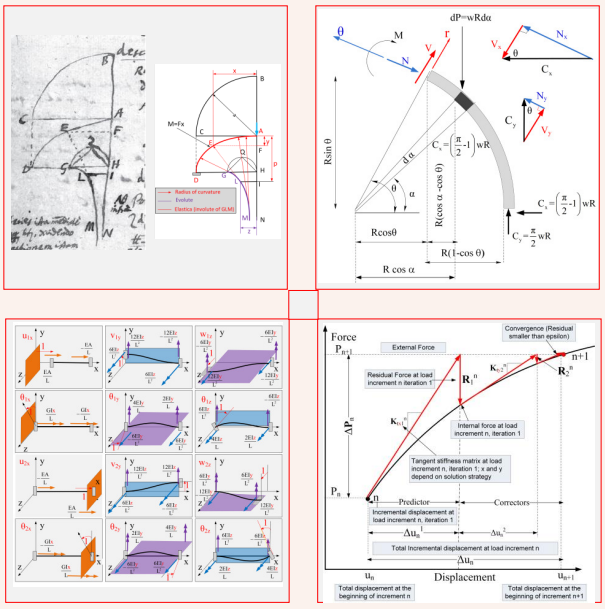
结 构 分 析

四 卷 本

从力学史到
现代计算方法

维克多 沙马 &
荣休教授，科罗拉多大学博尔德分校



V. 1.0
2026 年 8 月

项目网站: https://structuralanalysisbook.org/

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International" license.

审阅稿

言语随风而逝，文字历久弥存。‡

‡ “我的讲座虽已结束，但这本书将长久留存。”☺

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

法律通知

本书在一 CC BY-NC-SA 许可证, 即**非商用** -*ShareAlike*. 简而言之, 本许可证允许您自由分享和适应只要有几种条件, 就必须遵守。
以下是你能做的事情:

- **分享:** 感到自由地复制和重新分发任何媒体或格式。这意味着你可以把它传给朋友, 同事, 或者甚至在其他人可能受益的平台上提供它。从它。
- **适应:** 您欢迎重新混合、转换和建立内容。只要是用于非商业目的。
- **属性:** 分享或调整时, 请向作者提供适当的信用。然后再回到原创作品。此分配应当明确以便其他人了解材料的来源。

然而, 还有几个重要限制:

- **非商业:** 您不得使用材料用于商业目的。这意味着它不能出售、用于付费产品或以其他方式货币化。
- **分享:** 如果您使用此材料创建新的东西, 任何衍生工作必须在 CC BY-NC-SA 相同的条款下获得许可。这保持着活着的开放精神, 确保其他人可以从你的版本, 就像你从这个版本中受益一样。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

献词

为了纪念我祖父维克托和我的妻子雷亚。



和我的孩子们，理查德，卡罗琳和索菲

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

前言

（前言作者待定）

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

绪论[4]

绪论内容提要

I. 起源与目的
在标题上
缘起
覆盖
讲义
还有另一本书?

II. 结构哲学
为什麼全部在一個?
机械

三。观众和使用
观众
导航

IV. 个人影响力
外部影响力
教科文 CU

V. 风格与演示
风格
评论
重复
颜色
型号
标题字体

VI. 设计与生产
LaTeX
马特拉布代码
MathCad 代码
AI
人物

七。来源与授权
参考
照片
书籍咨询

八。可用性和统计
為什麼是自由的?
网站
统计

I。起源与目的

在标题上 这个作品的标题是故意提醒 Palladio 的 **四本建筑书籍**.

在这里, 四倍结构反映了教学进展: 从结构分析的历史基础, 通过介绍和中间的表达, 先进的方法。平行在于, 即使复杂的对象也受益于精心进行的曝光。

基因 随着我的学术职业生涯接近其双重, 我感觉 - 也许有一个骄傲的触摸 - 是时候分享在几乎四十年的教学结构分析收集的知识。这个 **马格努姆 · 奥普斯** 是结果。

它的起源在两个平行流中。第一部分由讲座笔记积累并在同一四十年中不断改进, 更新以反映该领域的进步和学生发展的需求。第二个是安静的收藏, 聚集在教学旁边: 纸张、单图、历史好奇心和技术细节很少进入课堂, 因为观众还没有准备好, 或者因为所需的深度超过了一个课程可以容纳的东西。

在人工智能作为实用的写作工具的出现之前, 从这两个流中收集了第一个完整的草案。接下来不是一个代表团的著作判断, 而是访问第三个和有效无限来源: 通过无数的交换, 推迟, 拒绝和随后的改进, 人工智能提供了一个丰富的材料, 没有任何图书馆访问或文学搜索可以匹配。然而, 这些决定仍然是我的。

我一直在思考我的角色, 作为一个 **校长** 收集展览 - 接收来自不同流的输入的人, 然后必须决定什么值得在收藏中的位置和什么不, 哪个房间每件作品属于, 它应该如何被绘制。在什

[4] “Prolegomena”源自希腊语，意为“预先说明的话”，用于在正文开始前交代作品的范围、方法与目的。康德在《任何一种能够作为科学出现的未来形而上学导论》（1783）中使这一术语进入现代学术语汇。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

么顺序中, 一个访问者应该遇到它。对于本书的结构分析部分, 这个教程任务是相对简单的: 技术材料遵循一个已建立的教学逻辑, 章节序列越来越少强加自己。

历史部分提出了一个完全不同的挑战。如何在线序列的章节中跟踪结构分析的进化 - 从数字和字母的最早发现到古代和文艺复兴的伟大智力漏洞, 到有限元法的所有途径 - 同时也对本质上主题而不是时间学的主题进行正义? 有些章节跟着时间的线条; 其他人切断它, 收集思想, 数字和发展, 属于一个主题而不是一个世纪。导航这种紧张, 决定什么时候跟随时间线和什么时候放弃它, 证明是最苛刻的审判判断。

🕮 **覆盖** 概括而言，本书分为四个部分：

概括而言，本书分为四个部分：

书 I 本书提供了一个深入探索结构分析的历史。虽然它不声称是完整的, 但我发现这个处理方面特别涉及写作。起初, 我选择了没有严格限制的关键事件和人物, 但当讲故事到达加利利奥加利里的时代时, 更有结构化和纪律的方法变得必要。即使如此, 组织这本第一本书也证明是挑战性的: 它应该如何分裂? 覆盖部分是时间学的, 部分是主题的, 有时也是。因此, 部分之间存在着显著的过渡 - 但在每个案例中, 材料从不同的角度进行审查。我使用了自由的 hyperlinks 连接相关讨论在章节之间。

书二 本书涵盖了我们通常在结构分析的第一课程中所期望的材料, 随后研究变形物体的静态和机械。然而, 我已经显著扩大了范围超越介绍级别 - 因此, 主题 **原始: 解析**. 经常在标准文本中不适当处理的主题, 如电缆、架构和三维结构, 在这里得到彻底的覆盖。我还包含了先进的主题, 如盘子和壳牌, 这些主题在这个阶段很少被讨论, 但对于完整的理解至关重要。本书结束了一个关于近距离方法和初步设计的章节。我坚信结构分析不应该在孤立中存在; 学生必须与他们的分析技能一起开发设计的直觉, 了解分析如何报告并允许随后的决定。

书 III 本书讲述了经常被称为 “矩阵 结构分析,” 但它基本上是对有限元法的处理。第一部分详细描述了直接刚度法, 包括其计算机实施的框架结构。这一点随之而来, 经过了广泛的变量方法 (变分法、虚功原理、和能量理论) 的处理, 形成了理论床位, 然后我介绍了有限元法为连续的单元。

一个常见的误解认为, 矩阵框架方法比终端单元更 “方便”。事实上, 相反的是常见的。Continuum 单元 处理 应力 和 应变 发动机 - 优雅且精确的量。框架单元, 在其最普遍的形式, 涉及三组力量和三个集时刻在每个节点, 以及他们的相关转移和旋转。这些力量和时刻组件之间的相互作用是微妙的, 在我的经验中, 学生并不总是欣赏他们的复杂性。

书 4 这本书源于我个人介绍的新课程。(基于我的一些学生的精彩论文), 一个具有相对较少的学术景观等级的课程。该课程主要集中在非线性分析框架结构周围。此外, 它还涵盖了关键主题, 如塑性, 稳定性, 动态, 特别是, 性能基于地震工程.

附件 在处理过程中, 我发现需要补充主要文本的额外材料 - 样品 MATLAB 代码, 介绍连续介质力学, 概率分布功能等。这些十八个附件作为参考和强化, 允许读者深入探索, 而不会中断原始讲话。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

我在这个处理中所采取的方法可以与一个埃克利德方法相似: 我们从基本定义开始, 并在每个接下来的章节中系统地建立它们。目标是介绍材料, 以便每个步骤从先前的逻辑流动, 基于基本概念、定义和以前的理论作为基础。跟随这一进展的热情读者将获得全面, 特别是百科全书的理解结构分析。

虽然《书》二、四的内容主要源于我的讲座笔记, 但我通过咨询许多来源来完成、扩展和改进材料而努力。我的真诚希望, 所有这些来源在整个文本中都被正确认可。

陪同阅读笔记 这本书从我职业生涯中提供的数百个讲座中成长, 在结构分析上连续三门课程。我一直使用 LaTeX 和 Beamer 准备我的课程笔记, 最终成为这个工作的基础。这些讲座幻灯片已被编写到一个单一的文档, 自由可用 download.

还有另一本书? 对于偶然读者可能出现的问题是: **為什麼還有一本書在结构分析上?** 这是一个有效的查询, 考虑到许多关于这个主题的现有文本书往往是重复性的, 在某些情况下, 已经看到了无数版本。不幸的是, 这些文本中的一些可以被认为是无灵感的, 过度简化, 缺乏深度。

一个常见的缺点是他们对基础理论的有限覆盖, 经常伴随着依赖于简单而不复杂的结构例子。

作为回应这些限制, 在本书中, 我一直致力于建立结构分析的各种程序与应用机械和数学的基础原则之间的联系。这个方法旨在为读者提供一个更深入和清晰的了解结构分析, 将其与该领域的典型报价分开。

二。编辑哲学

為什麼全部在一個? 将这四本书作为一个统一的处理, 是故意的, 并基于两个基本考虑。首先, 它反映了工程师必须不断地意识到当前知识的历史过程。今天使用的理论、方法和计算框架并没有在孤立中出现; 它们是概念改进、辩论和纠正几个世纪的累积结果。理解这个线条不是与技术能力相同的, 而是它的组成部分。

第二, 作品的结构旨在针对科学和工程历史学家, 强调历史调查获得深度和相关性, 当考虑到与当前状态的纪律。具有现代结构分析的数学形式主义、分析技术和设计原则不仅仅是历史的终点, 而且为解释前思想家的动机、限制和成就提供了必不可少的背景。

因此, 治疗被视为一个明确的双向框架。对于历史学家来说, 它从思想的历史发展到当今分析形式的清晰智力轨道。对于工程师来说, 它跟踪了相互的道路 - 从当代实践和正式方法回到他们的历史起源。通过维护这两路对话, 工作将历史洞察和技术严格融入一个一致且相互加强的整体。这些两个视角之间的导航通过明确的跨参考和超链接, 如下:

对于 解析 的详细信息, 请参见 § XX; 或 历史背景, 看 § XX.

最后, 除了这些概念动机之外, 决定将这四本书集成到一个单一的体积也是一种教学和技

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

术目的。在一份连续工作中, 介绍结构分析的引入、中间和先进级别可以促进在复杂性层面上无缝进展, 同时确保整个评分、定义和公约的严格一致性。这种统一 - 在文学中很少 - 允许读者在一个一致的 PDF 中流动地从基本概念转移到先进的格式, 消除分裂和笔记性不连续性, 通常发生在材料分散多卷时。

机械 让我们清楚: 结构工程是它的核心, 应用的机械。虽然这往往足以解决常规工程问题, 但它不会使我们无法理解我们的工具来自哪里。有一个不断的需要 (1) 保持相同的 解析和数学严格性, 控制机械, (2) 必要时, 明确返回机械本身。太常, 这种基础在工程实践中被忽略, 由程序知识和数值的方便而替换。故意在整个职业生涯中保持了一条机械和另一条工程的脚, 我希望这本书反映了这个立场。因此, 这里提交的每一个方程都是可以追踪的第一原则, 我包含了一项附件介绍了连续介质力学的基本概念。(附件 O), 以及另一个值得称赞的威斯特加德 - 一个工程师通过直接从基本机械学来解决深入实用的问题。(附件 P).

三, 审查和使用

观众

学生: 本书适用于连续三个课程的序列: 介绍结构分析, 中间结构分析和非线性结构分析. 它集成到一个单一的体积, 传统上需要至少两个不同的文本书。此外, 它保持着连续的评分, 并包含有意为挑战性的示例。

然而, 值得注意的是, 本书是为了 “成熟的观众”. 因此, 我指的是那些不寻求简单而无言的基本处理的学生。因此, 对于大多数学生来说, 这本书不应该作为课程中的主要文本。相反, 它最适合有动机的学生探索传统上不深入覆盖的子主题。

这本书也将证明有价值的那些学生谁想要一个 “统一” 对结构工程的态度, 具有一致的评分和一致的哲学观点。它提供了一个顺利的过渡从基本概念到中间和先进的主题。

教育者: 结构工程教练将发现这本书是一个有价值的资源, 特别是作为对过度简化的一种抗议, 这会伤害许多人。受欢迎的书籍。它的宽度和深度使它适合分配论文主题, 术语项目或博士学位。考试资格问题。

工程师: 这本书也适用于结构工程师, 他们有足够的清晰度来远离计算机程序, 并沉浸在解析解的优雅中, 这可以提供比常见的更大的价值。许多工程师经常急于寻找基于计算机的解决方案, 而无需先探索获得准确或大约的解析解的可能性。

历史学家: 四本书中的第一本提供了一个全面的探索结构分析的历史。除了著名的经典作品, 这些作品处理了这个主题, 这本书提供了在结构分析文学领域最全面的覆盖。

导航 由于数百个内部的超链接, 读者不应该犹豫地跟随它们, 知道一个简单的 ALT + **左射线** 返回邀请页面 (和 ALT + **右射线** 把你带回超链接)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

四。个人影响与学习

外部影响力 在我与东京电力公司合作的九年中 (特斯拉) 在非线性地震分析的高拱女士, 我认为自己非常幸运。六年之周, 我认为我们的工作基本上是完整的, 只是为了满足我的对手的坚实反应: **不! 不! 教授 沙乌马, 在日本, 一个程序不但必须顺利运作, 它也必须拥有美观的美丽。**. 这一点, 由先生 Yagome, 包围了一个深根的日本原则: 不妥协的细节注意力, 坚持卓越, 追求和谐远超出了简单的技术准确性。

我也有幸运在瑞士拥有一个家庭房子, 我们度过了很多夏天以及几个安息日时期。从瑞士人那里, 我很安静但坚定地学习了精确、无短暂的工作以及抵抗任何人工紧急感的重要性。在瑞士, 事情是彻底、故意和正确地完成的, 没有任何急需感知。注意细节不是限制, 而是美德, 质量被理解为耐心、纪律和手工艺的自然结果。

这个道德与奥森威尔斯的常见备忘录相矛盾: **在意大利, 三十年在波尔吉亚统治下, 他们有战争、恐怖、谋杀和流血, 但他们制作了米歇尔安吉洛、莱昂纳多 · 达芬奇和复兴。在瑞士, 他们有兄弟爱情、五百年的民主和和平—这带来了什么? 可口可乐时钟**. 好吧, 不是这么快, 奥尔森。瑞士正在不断追求时钟 “并发症,” 先进的高精度微机械, 并生产了长时间的优秀建筑师和工程师。还应该提到巴塞尔先生们—埃乌勒和伯诺利斯—谁站在纽顿在塑造机械本身不远的背后, 建立基础, 最终会支持结构分析.

最后, 在意大利长大时, 我经常听到讲话。*Chi va piano, va sano e lontano* 文学上, “那些慢慢走的人, 安全地走得很远。” 这个信息是不可错误的: 不要匆忙, 花时间, 做事正确。

这些三个国家, 日本、瑞士和意大利, 共同形成了我的智力温度和专业实践。比任何人, 他们都影响了这本书所写的精神: 严格、耐心、关心细节和尊重工作。

科罗拉多大学的教学 我从 1984 年到 2023 年在科罗拉多大学教授, 几乎四十年。在我职业生涯的早期, 我深深地受到两位著名同事的影响: 教授 Kurt Gerstle 在结构工程和教授 Kaspar Willam 在结构力学。他们的严格、准确和坚持第一原则留下了一个持久的印象, 我一直在努力模拟他们的态度: 从来不远离理论、衍生品和我们纪律的基础。

我发现可用的文本不满意。许多人, 要明确地说, 被推翻了 - 仅限于两维结构, 无所不在的任何覆盖的弓箭, 并受到不一致的评分在进展从引入到中间到先进的结构分析。(课程 3525,4525 和 6525 分别). 这些不停的我被打破, 无论是突然的还是教学上的混乱。假设大多数学生将继续通过序列, 我从一开始就引入了标准的学术评分 - 多到某些人的悲伤, 但在他们的长期理解的服务。

在早期, 教学是一种真正的乐趣。学生有动机, 好奇心, 并愿意与挑战性材料参与。困难开始时, 介绍课程成为所有民用和建筑工程学生的要求。环境工程学生, 渴望拯救地球, 经常对结构分析有很少的耐心 - 也许大多数人是智力能力。建筑管理的学生, 在此期间, 想要除了最简单的公式和他们的直接应用。兩個團體在抵抗任何被認為是不必要的嚴格的情況下, 都可能非常有聲音。

我的哲学是简单的: 考虑到有限数量的公式涉及, 学生应该理解材料概念而不是依赖于路径记忆。因此, 我的考试是封闭书和封闭笔记。每个考试通常包含一个简单的问题, 每个人都应该解决, 一个中间困难, 一个挑战性问题, 旨在区分优秀的学生和其他人。第一個考試經

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

常用作尾流-up 的呼叫, 班級平均水平低於五分之一。我不相信人工地曲线等级; 相反, 我根据前三名学生的表现进行分类, 他们将获得 A。这种方法, 虽然在我看来是公平的, 导致失败率比许多其他课程更高 - 因此我接受了低估标准的偏好。

为了进一步复杂化事务, 即使学生被抓到欺骗超越任何合理的怀疑, 科罗拉多大学倾向于看不一样 - 毕竟, 学生正在支付客户, 而大学将转向后退, 以避免对抗他们。简单地说, 除非学生公开承认学术不诚实, 机构扩大了怀疑的好处, 离开一个失望的教师没有任何用途, 但接受结果。

最后, 关于教学评估的一句话。我从来没有过于担心他们, 尽管我甚至没有完全忽略他们。一个二十岁的学生, 无论如何光明, 并不总是最好的位置来判断他或她应该被教导的东西。不幸的是, 在我的机构里, 这些评估变成了一场受欢迎的竞赛, 其中我拒绝参加。

五。风格与演示

✍ **风格** 一本书不仅包含其内容, 而且还包含其形状, 它是个性和个人风格闪烁的形式。虽然总体上就内容的统治方程式和原则存在共识, 但形式或风格可能会有所不同。有些书是过于虚假的, 导致混乱, 而其他人忽略衍生或提供过于简单的例子。因此, 一本书的形式是非常个性化的, 反映了作者的教学风格、兴趣焦点和独特的交付风格。

在这本书中, 我包含了个人评论, 覆盖的深度和宽度反映了我对主题的个别观点。这意味着一些读者可能会发现某些主题被编写。(像影响线一样), 而其他人可能会意识到, 我在过度细节中沉浸在阿卡纳主题上。关于语言的笔记: 英语不是我的母语 - 事实上, 这是我获得的第五和最后一种语言。虽然人工智能在整个书中做了很多事情来完善这个预言, 但毫无疑问, 缺陷仍然存在。我做了我最好的, 我只要求读者的理解和慷慨的尺度相反。

αKΩ **评论** 结构力学和工程出版物的评分往往不一致。虽然使用不同的评分套件为每个章节基于特定领域对我作为作者来说会更方便, 但这对读者来说是无用的和令人困惑的书, 涵盖了如此广泛的主题。

这是我面临的最大挑战之一。很快就显然, 在各个学科中保持一致的评分会给寻求对主题全面了解的读者带来困难。

因此, 我一直努力在整个书中建立一个统一的评级系统。此外, 我采取了重新设计的举措, 以便与书籍的评级相匹配, 而不是严格遵守在特定分支范围内使用的评论。

🗘 **重复** 在大多数文本中, 重复数字、方程式或以前覆盖的文本通常被避免。然而, 由于本书的全面性质和方便理解, 我没有犹豫重复某些单元从以前的部分。此外, 我还努力在必要时引用原始内容。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

颜色 虽然大多数工程書是以灰色尺寸打印的, 這導致一個平坦的, 視覺不刺激的外觀, 但這本書是專為屏幕上的閱讀。免于印刷的限制, 颜色已被包围, 不是作为装饰, 而是作为一个有意志的沟通工具。它在各个数字中自由地出现, 每个字符都具有独特和一致的含义, 更广泛地, 无论在哪里, 它都用来加速清晰度、引导眼睛或加强理解。

此外, 我选择了从典型的白色背景中脱颖而出, 可以被视为有点侵略性, 而不是用六角代码选择背景颜色。`#fbf2ed`. 这项选择引起了《金融时报》的启发, 尽管由于完全不同的原因。

最后, 你可能会注意到我偶尔在文本本身中使用颜色来突出并强调某些点或概念。

型号

此版在 12pt 的帕拉蒂诺家庭系列中设置, 其中包含一份柱 尺寸, 以便在范围内保持每个行等待为持久阅读的舒适 - 大约 45 至 75 第 66 章 理想的男人[5]. 在本书的原始 11pt 设置中, 线路走近 85 个字符, 超越眼睛舒适地跟踪一行文本; 增加到 12pt 是为了具体纠正这一点而不是作为风格主义偏好。

标题字体

标题字体 标题字体保证了一个简短的解释。封面上的字母在十字架框内呈现, 交叉图形 - 对莱昂纳多 • 达芬奇的庆祝字母的故意敬礼 De Divina Proportione (威尼斯, 1509) 关于数学比例的处理 神的比例 由 Luca Pacioli 撰写, 由 Leonardo 描绘。在这项工作中, 莱昂纳多建造了每个资本字母的地质, 写在一个广场内, 并根据相同的比例规则构建, 统治建筑、人体和自然形状。选择不仅仅是装饰性。由其直径分裂的方形也是最简单的终端单元 - 这本书的大量占据的计算方法的构建区块。相同的地质数字应该在复兴时期的手稿中以比例和现代刚度矩阵中出现, 比古典地质与结构分析之间的深度连续性更少是偶然。身体文本是由赫曼 • 扎普专门为数学和技术文学设计的帕拉蒂诺, 其加利格拉法起源将其置于与这项作品灵感的手稿相同的广泛人文主义传统。从莱昂纳多写信到收集的刚度矩阵, 基本学科是相同的: 在结构中找到秩序和比例。

VI。概念与生产

LaTeX (本节关于 LaTeX 的文字特意排成圆形，仅为增添趣味；其构思取自 Knuth 原版 TeXbook 中的一个例子。)

[5]罗伯特 • 布林赫斯 (Robert Bringhurst),《风格的单元》第 4 版。(温哥华: 哈特利 & Marks 出版商,2012 年).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

本书不
可能用普通文字处理
器完成；只有 LaTeX，凭借其在排版、
数学公式、交叉引用和文档结构方面无可
比拟的能力，才能胜任这样的挑战。四十多年
来使用 LaTeX 的经验为本书奠定了坚实基础，但这
个项目仍把它的能力推向极限。仅共享导言文件就
增长到近 1,400 行，细致协调约 80 个宏包，共同管理
符号记法、定理与例题环境、配色方案、页面几何、页
眉、索引生成、参考文献、超链接和完整的多语言支持。
为保证四卷中数千条定义、命题、推导和插图的一致性，
我编写了数十个专用宏命令，其中许多借助 AI 工具反
复完善。另一个持续的难题是 LaTeX 写入寄存器耗尽；
仅 `morewrites` 宏包就需要额外分配 50 个写入流，
以避免令人头痛的 *no room for a new write* 错误。整
部著作的编译还需要依次多次运行 LuaLaTeX、
BibTeX 和 MakeIndex，并由专用构建脚
本统一协调辅助文件、多个索引流
以及四个部分彼此独立的参
考文献区段。

对于 LaTeX 爱好者，我公开了本书的 `Preambule.tex` 文件。

马特拉布代码 书籍包括一个显著的图形 MATLAB 代码集合，收集在一个专门的附件，以便轻松访问。MATLAB 在整个工程和研究社区广泛用于数值线性算法、算法开发和大规模计算分析，其包含反映了这一核心作用。这里提交的代码不是以优化或风格为模型，而是用来强调准确性、透明度和概念清晰度，明确的目的是在没有先进的编程专业知识的情况下保持读者可用的。

MathCad 代码 Mathcad 已成为在实习结构工程师中广泛使用的计算环境，由于其自然数学合成、集成的单位处理和计算透明度。用于描述目的，一个专门的附件大约 160 页介绍了对数以数的例子问题的完整解决方案在 Mathcad 实施，提供解析开发与日常专业计算之间的直接桥梁。

AI 我所想的是，完成这本书的证明是不同的。随着我接近看起来是一个最终的草案，大语言模型变得可用，逐渐证明是无价值的助理。我可能早已停止了很多，但这些工具 - ChatGPT (开幕式) 和克劳德 (天文学) 我的完美主义的感觉。每個新的能力都誘惑我进一步改變，再檢查一次，再打破另一個部分，再生一張摘要表。结果是该项目大约延长了两年，

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

远远超出了其自然结论。然而, 读者不应该被误导, 认为这是一个无力或被动的宽恕。我的完美主义是无休止的, 这些工具使它成为可能; 此外, 我没有时间限制或结束期限, 这意味着没有什么强迫我停下来。他们的可用性意味着我总是能找到一个更好的东西。

原创手稿, 包括几乎所有书籍 我, 完全完成了没有 AI 参与。它所包含的历史故事代表了多年阅读主要来源和仔细的合成 - 在我从未使用过这些工具之前, 我彻底完成的工作。当我开始使用它们时, 起初只用波兰语语言和填写小差距。然而, 很快就显而易见了, 把自己限制在这种谦虚的使用中会是一个严重的错误。这些工具的能力远远超越了简单的编写; 我应该利用它们的全部范围来验证事实, 合成不一样的材料, 产生总结表, 并加强整体讲话。挑战不是使用 AI, 而是严格使用它。

关于 AI 在这项工作中的作用: 在这个项目中, 人工智能援助从来不是一个短暂的, 而是对验证、合成和精炼的结构化对话合作伙伴。我的典型工作流始于一个草案或种子文本, 然后我将人工智能进行纪律交换: 我的账户实际上是正确的吗? 难道我缺少一些重要的东西吗? 周边细节应该被切断吗? 对于几乎每一个页面上出现的主题, 最终文本代表了十多个交换的产物 - 初始提议, 推迟拒绝人工智能所产生的东西, 请求澄清, 直接挑战问它是否完全确定其声明, 并且不可变地, 独立检查结果。除了事实检查之外, 我依靠人工智能来融合相关部分、主题之间的顺利过渡以及创建时间表和总结。

我与不同的 AI 工具的参与随着项目进展而发展。我开始了 ChatGPT, 但很快发现克劳德在脑任务上优秀—精彩编辑、历史合成、学术对话—并且对于《书》所要求的历史合成的内容显著优越。I。但是, 当完成书籍的最后页面时 II-IV,ChatGPT 的最新模型 (Pro, 由我的女儿 Sophie 慷慨提供, 她在 OpenAI 工作) 证明是创造数值例子和文本的机械方面非常优越。

在多次情况下, 我故意以验证策略对抗一个 AI。我會從一個工具獲得答案, 然後向另一個提出同樣的問題或挑戰, 要求它獨立評估或事實檢查第一個結果。此交叉验证证明是无价的: 克劳德经常在 ChatGPT 的输出中捕获过度简化或逻辑漏洞, 而 CatGPT 在检测时表现得很好, 当克劳多过于谨慎或缺乏计算细节时。这种对立的态度加强了对最终材料的信心, 并暴露了需要独立研究或与主题专家进行咨询的弱点。

為 **书籍 I (历史)** 克劳德的角色是严格有限的: 澄清历史事实, 并审查整个文件。我从来没有允许它产生或显著扩展内容。全书的文章 我完全是我的。

為 **书籍 二、四 (结构分析)**,AI 援助同样有限和集中。它主要用于精化选择的衍生品, 填补理论覆盖中的漏洞, 并为复杂主题创建数值例子。在所有情况下, 我仔细审查了产量, 以防止幻觉的声明或风格性的过度。人工智能标志在这些书中只出现在两个特定的背景下: 当一个衍生品是由人工智能协助的时, 或者当一个部分主要由人工知能写作时。它不出现在我写的部分, 只是用人工智能帮助编辑。

让我们说一件事: 在 2026 年, 拒绝人工智能将是一个严重的错误。没有什么美德可以放弃这种能力和力量的工具, 只是一个不适当的智力纯洁感, 这对作家或读者无益。历史的卢迪人不是, 如漫画所示, 反对技术本身, 而是反对它的剥削, 无论是手工艺、技能或人类尊严。现代的负担 “卢迪特” 现在是平衡的任何人谁怀疑拥抱新的工具。然而, 有合理的怀疑主义和虚假拒绝之间的区别。值得一提的是, 不远离人工智能, 而是以智慧、严格、总是从完全的权威控制的位置利用它。结构化的对话、工具之间的交叉验证和上面描述的谨慎标签并不是由可耻性所施加的限制, 而是控制的架构。人工智能是验证、合成和精化的强大工具; 判断、怀疑主义和最后一句话一直都是我的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

人物 我专注于布局和视觉演示, 个人创作了所有图像使用各种工具 - 从 Xfig 在 Unix 到 Visio 在 Windows - 并编写了附件中显示的 MATLAB 程序。对于第一本书的历史材料, 我经常从原始来源编写数字, 以提高清晰度或突出关键细节。

通过这个过程, 我来欣赏两个洞察力: 第一, 生产清晰、尖锐和简短的形象的重要性; 第二, 个人重新创造人物的教育价值, 这深化了人们对基本概念的理解。在这方面, 我更认识到 Vermeer 的艺术敏感性 - 评估深度和细节 - 与 Mondrian 的最小主义。

我承认我对数字有点迷信。每个人都被精心准备, 以确保视觉一致性, 包括使用透明背景, 使图像与页面颜色无缝混合而不是用白色的直角擦眼。小细节, 也许, 但它们很重要。

七。来源与吸引力

参考 全书 I (历史), 我故意依靠所有参考的主要来源 - 其中读者可以通过点击红色标志下载很多 这跟着引用, 我避免了次要来源, 除非它们是真正需要完全理解的地方。请注意, 在可能的情况下, 所有文件都已被 OCR 处理并压缩其文件大小。

照片 该工作在 A 下授权 Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International 许可。它是自由可用的, 我从其分配中没有获得任何财务福利。

在提取图像中, 我依靠我认为合理的 “公平使用” 评估。1900 年之前出版的所有作品都是公共领域的, 谷歌图像搜索所获得的照片, 我最了解的是, 已被许可用于非商业重复使用。我偶尔包含了没有完全分配的图像 - 一个任务, 严格为数百个数字进行, 将是禁止无聊的。我允许自己这个自由的精神 **公平使用** 考虑到这项工作的非商业性质。如果任何权利持有者是对象, 我会很高兴提供适当的信用或在请求时删除材料。

书籍咨询

I 书 I 对于这本书, 我欠了很多 Google Scholar，该 University of Colorado library (伊利亚德) 又是小知的 HathiTrust Digital Library[6].

在此工作中引用的许多历史文件可作为 PDF 文件下载。当一个小 PDF 图标出现在引用的右侧时, 点击它将获得原始来源的扫描副本。读者被强烈鼓励咨询这些基本参考 - 他们提供无价的洞察力, 以思想和方法的进化形成结构分析, 经常揭示的色调和背景, 没有二级账户可以完全捕捉。

我的法语、意大利语和西班牙语的流动性大大促进了未翻译的来源的访问, 而遗憾的是,

[6]HathiTrust 成立于 2008 年, 是学术和研究图书馆的非营利合作伙伴, 保留了 17+ 百万个数字化项目。HathiTrust 提供阅读访问美国版权法允许的最大范围, 计算机访问整个学术研究机构以及基于组合收藏的其他新兴服务。HathiTrust 会员管理收藏 - 由学术和研究图书馆管理的数字化书籍最大的集合 - 以科学而不是企业利益为目的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

我缺乏拉丁语和德语, 对某些基本文本的直接参与是有限的。然而, 我毫不犹豫地在整个作品中包含和评论来自原始来源的许多引用, 让读者首先见到历史人物的声音, 并提供更深入的洞察力提出的想法的发展。

书籍 II - IV 以下三本书主要来自我的 lecture notes 包括解决问题, 包括例子、家务任务和考试。虽然这些材料被仔细处理, 以保持适当的严格性, 但额外的参考证明是必要的。

在编写我的笔记和写这本书的过程中, 我一直在寻找 **灵感** 从许多文本影响了我的理论覆盖 - 经常扩展到 - 并引导选择数值例子。其中主要来源 (虽然没有完整的列表):

- 比利时,D。1965. **薄 壳 混凝土 结构**. 普林斯顿大学:McGraw-Hill, Inc.
- 比林顿、戴维 • P 和罗伯特 • 马克。1970. **民用工程 - 历史, 遗产和人文: 第一届全国会议的背景文件**. 普林斯顿,NJ: 公民工程系, 普林森大学。
- 格里斯特,K。1974. **基本 结构分析**. 麦克格罗 • 希尔 (出印刷。)
- 金正恩,J S。1957. **未定义 结构分析**. 阿迪森威斯利 (出印刷。)
- 诺里斯,C。H、和 J。H。威尔伯 1960. **原始 结构分析**. 麦克格罗 • 希尔
- ,W。D、和 W。奇妙的 1994. **结构的机械, 变量和计算方法**. CRC 新闻。
- 天文学,J。S。1968. **矩阵 结构分析 的理论**. 纽约:McGraw Hill。由 Courrier 打印 (此前 Dover).

所有努力都是为了在整个工作中提供合适的信用。如果有任何遗忘, 它们是完全无意的, 我为任何这样的监督提出了我的真诚道歉。

八。可用性和统计

为什麼是自由的? 在 The “供应” 在书写方面, 作家通常由两个动机驱动: 财务奖励和/或个人满意度 - 也许甚至认可 - 这源于为自己的领域做出贡献。在这两种情况下, 有预期出版商将处理文本编辑、页面配置和营销, 这些任务往往超越作者的专业知识或兴趣。然而, 从我的经验来看, 即使是主要出版商现在也参与了质量的制作: 重大编辑已经大大消失了, 出版的各个阶段经常在国外排出。作者和出版商之间曾经存在的合作关系已经消失了。

让我们谨慎: 在我们的学术学科中, 很少的作家获得足够的奖金, 以覆盖甚至跨大西洋航班。在我职业生涯的这个阶段, 我不寻求成为出版作家的认可 - 无论我在已经完成的工作中获得了什么谦虚的名声, 都不会放松。

第 11 章 请求” 另一方面, 学生和读者见证了书价上升到应变个人预算和图书馆收购等级。出版商用聪明的策略来回应 - 租一本书或个别章节有限的时间, 就像播放一部电影一样 - 但这些只是解决基本访问问题。

作为大学教授, 我们的责任是获得和分享知识。我们的机构对这个任务有合理的补偿。出版商提供的混合礼物, 只是不值得一个法斯蒂安交易, 它把我们的工作放在支付墙后面, 并在那些最需要它的人身上。

因此, 这本书可以自由下载和共享无限制, 符合开放学术调查的精神。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

网站 一个奉献 website 它是为这本书创造的。此外, 作为主要平台服务的书籍 (附属讲座笔记) 可以下载, 网站提供一个论坛与读者通过博客互动。这个空间允许读者报告错误, 提出问题或提供评论和反馈。

同时, 我正在考虑另一个举措: 使用 LaTeX 创建本书的网页版本, 由章节组织;

一些统计 和企业规模在其内容中反映: 大约 3246 页面 68 四卷分布的章节 (17、22、13 和 16 相应), 16 附件 451 部分 , 300 工作例子,854 数字,187 桌子, 大约 3000 等式, 908 引用和 352 内部交叉参考链接 - 一项遗嘱什么纪律, 耐心和准确的类型化可以实现。

维克多 E 沙马
布尔德,CO
2026 年 7 月

审阅稿

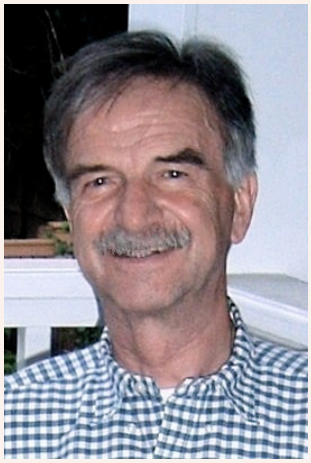
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

致谢

首先，我的心灵感激向两位特别的同事致敬，他们对我有着深刻的影响，几乎不熟悉。他们的惊人的个人性格和出色的专业成就是不断的灵感来源。这些品质的稀有组合在我们的职业中令人遗憾的是不寻常。



库尔特 • 格斯特 (1923–2013)



卡斯帕 • 威尔姆 (1940–2024)

Anthropic (2021 年 – 至今)

OpenAI (2015 年 – 至今)

库尔特和卡斯帕通过数十年的学术交流塑造了我对结构工程与力学的理解；Claude 则在第一卷历史叙事的推敲中成为不可或缺的合作伙伴，在资料综合、文字润色和事实核查方面提供了持续帮助，而且从不要求学术休假或休假安排。

我很抱歉不承认学生的许多问题。
偶尔提供意想不到的洞察力，以及
科罗拉多大学学术环境
这使得这个漫长的努力。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

读者的指南

- 本书是故意设计的数字阅读，而不是打印。它在计算机上是最好的体验，允许无缝的导航通过许多超链接和图标为丰富的阅读体验。
- 首先要从前面开始，因为这本书与典型的格式不同，并包含独特的功能和洞察力，您将希望从一开始就明白。
- 本书不适用于随机读者，也不适用于标准结构分析文本的快速替代品。它是针对那些寻求超越传统，日常覆盖的人。
- 要达到一个谦虚的技能水平作为结构工程师，你不需要这本书。传统的方法，由计算机程序补充，就足够了。
- 但是，如果你想要深入了解结构性行为之前沉浸在计算机分析中，这本书可以帮助，因为所有的方程和结果都源于第一原则，确保每个概念的完整和透明发展。
- 具有理论的坚实理解，使其快速、可靠 “Back-of-the-envelope 背包” 手动分析，在转向计算机之前可能是无价的。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

错误发现计划

作為作者, 我明白, 儘管我的嚴格編輯, 錯誤可能仍然存在在本書的頁面內。因此, 我正在实施一个 **错误发现奖励计划** 请求您的帮助, 以确定任何这样的错误。

如果您在文本中遇到任何错误:

- 历史在书中;
- 平等、数字或与之相关的声明, 在书 II-IV ,

我邀请你在博客网站的部分提到这个点

对于您成功识别和向我报告的每一个错误, 我将您的名字添加到此页面上以及未发现的错误。此外, 作为您的精心评估的标志, 我将向您发送 1 美元的检查, 每发现的确认错误。

请注意下列参与指南 **错误发现奖励计划**:

- 错误必须是真实的、实质性的。无情或错误的声明将不会被考虑。
- 要报告错误, 请在书中提供有关其位置的详细信息以及错误性质的简短解释/证明。
- 您可以提交多个错误报告, 但每个报告必须属于一个单一的错误。
- 文件将每月更新第一年, 第二年四季度, 第三年半期, 随后大约每年。
- 该计划在我的判断下受修改或终止。

错误

日期	姓名	电子邮件	版本	错误
4/4/2025	特朗普，唐纳德	首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學	2025 年 11 月 11 日	平衡式 2.5 中的估计群体大小

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

符号说明

我一直在努力保持连续的四本书的评分。这是特别令人挑战的, 因为评分在引用和先进参考之间有所不同, 作者经常获得自由。尽管我的努力, 有些差异可能已经过去了, 但它们应该是可识别的聪明读者。

注: 在多种情况下, 张量被标记为 [7] 由 **两者** 勇敢的面孔和 / 或在方形手相关术语内 (伊。 $\mathbf{K}$ $[\mathbf{K}]$, $\{\delta\}$.

线性弹性分析

滑雪

A	区域
B	应变 位移 (电影学) 矩阵
C	连续性 (C^0, C^1)
E	弹性模量
G	剪切模量
G_f	破裂能量
H	电缆中的水平力量
	塑料或塑料模块
I_e	惯性矩 關於軸 e
J, I_{xx}	波拉 惯性矩
K	动能
L	区域三角协调
M	瞬间
N	轴力
	形状功能
U	应变能
U^*	附加 应变能
U_0	内部 应变 能量密度
U_0^*	附加内部 应变 能量密度
T	温度
	紧张 (在 索)
	扭转
V	剪力
W	工作
W_e	外部工作
W_i	内部工作

[7] 虽然这与接受的评级明显偏离, 但我认为有用强调张量的 vectorial 或 matricial 性质。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

$\mathcal{W}_e$ 外部工作潜力
$\mathcal{W}_e^*$ 外部工作的补充潜力

f_c' 抗压强度
f_t' 抗拉强度
q 分布荷载
s 一个索的 SAG
t 时间
w 分布荷载

装修器

$\mathcal{A}$ 電影 矩阵
$\mathcal{B}$ 静态 矩阵
D 宪法 矩阵
五 固定终点时刻
I 二次命令的内心 张量
J 雅各比
K 全球协调中的稳定性
M 瞬间 (M_{zz}, M_{yy})
N 轴力 (N_x)
NEF 诺达等级力量
P 全球协调中的力量
T 扭转 (M_{xx})
V 剪力 (V_y, V_z)

b 身体力量
柔度矩阵
k 刚度矩阵 在本地坐标
LM 地點 矩阵
n 標準單位 向量
p 地元协调中的力量
t 表面拖动
u 位移 向量

$\boldsymbol{\Delta}$ 全球协调中的转移
$\boldsymbol{\Gamma}$ 变换矩阵 在全球坐标

Γ_t 自然界限 (已知的拖动)
Γ_u 关键边界 (已知 位移)
Φ 滑板领域
Π 势能
Π^* 附加 势能
Ω 体积的身体

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

α 热扩张率
$\boldsymbol{\delta}$ 地点协调中的转移
$\boldsymbol{\varepsilon}$ 应变张量
$\boldsymbol{\gamma}$ 变换矩阵 在本地坐标
κ 条件号
κ 曲率
λ 特征值
拉姆的常态
μ 拉姆的常态
ν 鱼的比例
ρ 质量 密度
曲率的射线
$\boldsymbol{\sigma}$ 应力张量
ω 角频率

功能

$\mathcal{H}$ 赫尔米蒂亚
$\mathcal{L}$ 拉格兰

运营商

B 线性运营商 (地图转移到 应变)
$\mathbf{L}$ 线性运营商 (应力 和 应变)

数学象征

$\oint$ 完整线
$\mathbf{\nabla\cdot}$ 差异 (div)
∇ 格拉迪特 (grad)
$[.]$ 矩阵
∂ 部分 (衍生品)
δ 变量运营商
$\{.\}$ 向量 (柱)
$\lfloor . \rfloor$ 向量 (路由)
$\delta\dot{-}$ 虚拟量

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

非线性 单元表述

Nodal 数量

$\mathbf{P}_S^{int}$	内节力 向量
$\mathbf{P}_t^{ext}$	外部节点力量 vector 在自由度的结构级别
$\mathbf{P}_t^{int}$	内部节点力量向量在自由的自由度在结构层面
$\mathbf{P}_u^{int}$	内节力 向量 在结构层限的 自由度
$\mathbf{P}_t^R$	剩余节点力量 vector 在自由度的结构级别
$\mathbf{u}_t$	Nodal 位移 向量 在 自由 自由度 在 结构级别
$\mathbf{F}_e$	元素节点强度 vector 在全球参考; $\lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$
$\mathbf{F}_e^{int}$	内部 单元 节点力量 向量 在全球参考
$\boldsymbol{\delta}_e$	单元 节点 位移 向量 在全球参考中; $\lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$
$\bar{\mathbf{f}}_e$	单元 节点强度 向量 在当地参考与硬体模式; $\lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$
$\bar{\mathbf{f}}_e^{int}$	内部 单元 节点强度 向量 在当地参考与硬体模式
$\bar{\mathbf{d}}_e$	单元 nodal 位移 向量 在当地参考与硬体模式; $\lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{X2},\ \overline{v}_{Y2},\ \overline{\theta}_{Z2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e$	单元 节点强度 向量 在没有硬体模式的本地参考; $\lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$	内部 单元 节点强度 向量 在本地参考没有硬体模式
$\tilde{\mathbf{f}}_e^R$	剩余 单元 节点强度 向量 在本地参考中没有硬体模式
$\tilde{\mathbf{d}}_e$	单元 节点 位移 向量 在本地参考中, 没有硬体模式; $\lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$
$\tilde{\mathbf{d}}_e^R$	剩余 单元 节点 位移 向量 在本地参考没有硬体模式
$\delta\bar{\mathbf{d}}_e$	虚拟 单元 节点 位移 向量 在本地参考

部分数量

$\mathbf{d}_s(x)$	分区转移 vector; $\lfloor u(x),\ v(x) \rfloor^T$
Φ	曲率
$\boldsymbol{\sigma}_s(x)$	部分力量 向量; $\lfloor N(x),\ M(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$	内部部分力量 向量
$\boldsymbol{\sigma}_s^R(x)$	剩余部分力量 向量
$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	部分变形 向量; $\lfloor \varepsilon_x(x),\ \phi_z(x) \rfloor^T$
$\boldsymbol{\varepsilon}_s^{int}(x)$	剩余部分变形 向量
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	虚拟部分变形 向量
κ	塑料 应力

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

纤维数量

σ	单元 应力
ε	单元 应变
σ_r	单轴应力 层/纤维
ε_r	单轴应变 层/纤维

精力矩阵

$\mathbf{N}_d(x)$	转移领域的形状功能
$\mathbf{B}_d(x)$	矩阵 由衍生品产生的 $\mathbf{N}_d(x)$
$\mathbf{N}_f(x)$	形函数 在力量领域
$\mathbf{K}_S$	刚度矩阵在结构层面上增加
$\mathbf{K}_{tt}$	刚度矩阵相关的自然边界条件
$\mathbf{K}_{tu}$	刚度矩阵相关的自然和基本边界条件
$\mathbf{K}_{ut}$	刚度矩阵相关的基本和自然边界条件
$\mathbf{K}_{uu}$	刚度矩阵相关的基本边界条件
$\mathbf{K}_e$	单元 刚度矩阵 在全球参考
$\bar{\mathbf{k}}_e$	单元 刚度矩阵 在本地参考与硬体模式
$\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$	元素坦格固态矩阵与硬体模式的本地参考
$\tilde{\mathbf{k}}_e$	单元 刚度矩阵 在本地参考中没有硬体模式
$\tilde{\mathbf{c}}_e$	单元 柔度矩阵 在本地参考中没有硬体模式
$\mathbf{k}_s(x)$	部分 刚度矩阵
$\mathbf{k}_s^{tan}(x)$	部分坦根 刚度矩阵
$\mathbf{c}_s(x)$	部分 柔度矩阵

错了。

$E(x)$	弹性模量
$A(x)$	分区
$I_z(x)$	惯性矩 在部分区域
L_e	单元 长度
$\boldsymbol{\Gamma}_e$	变换矩阵 與 总体坐标系 之間
$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e$	变换矩阵 硬體模式與沒有硬體狀態之間

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

签名

t	已知的拖动
u	已知 位移
S	结构级别
e	单元 或 e^{th} 单元 在 单元 状态定义
r	层/纤维水平或 r^{th} 层/纤维在层/繊維状态定义
s	部分级或 s^{th} 国家决定的部分
d	位移 字段
f	力量领域
n	外部力量的当前步骤/位移 向量

超级文本

int	内部
ext	外部
R	剩余
k	k^{th} 结构层次的伊特拉
j	j^{th} 以 单元 级别的 iteration

非线性宪法模型

A_g	重量 横截面积
A_{st}	交换增强 钢材 横截面积
b	会员跨部分宽度
c	催眠衰退率因素
E	青年模块
$E_{adjusted}$	塑性 模型, 线性弹性 单元 调整 弹性模量
E_{axial}	零长 单元, 轴春弹性 (青春的) 模块
E_{bp}	重新充电模块
E_c	封面后 (应变 放松) 模块
E_{hys}	催眠能量能力 ($= \gamma\sigma_y\varepsilon_y$)
E_i	在充电之旅 “i” 期间分散的歇斯底里能量 ($= \Delta\varepsilon[\sigma_{i-1} + \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_{i-1}]$)
E_s	应变 硬化模块
E_{shear}	零长度 单元, 转向春季弹性 (青春的) 模块
E_t	目标重载模块
E_{tan}	模块
E_u	无人模块
f'_c	混凝土 抗压强度
F_y	发出力量
G	剪切模量
h	成员跨部分高度

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

$K_{adjusted}$	塑性 模型, 线性弹性 单元 调整初始硬度
K_{BC}	柱 初始硬度
$K_{combined}$	塑性模型, 线性弹性和非线性粘贴塑料结合
	初步旋转性
K_{deg}	零长度 单元 后峰衰弱的坚固性
K_e	初步弹性强度
K_{linear}	塑性 模型, 线性弹性 单元 初始硬度
K_{LP}	塑性 模型, 非线性比例的 单元 初始硬度
$K_{rotation}$	初步旋转性
K_s	应变 硬化强度
K_{shear}	初步的清洁
K_{stiff}	极限状态 型号, 零长度转向春季初始固态
K_{deg}^t	后峰衰弱的强度
K_{unload}	解除硬度
L	单元 长度
M_r	剩余的母乳
M_u	最终 (峰会) 瞬间
M_y	交付时刻
p	轴力
V_{fail}	剪力 到 Shear 故障点
V_r	剩余的强度
V_u	Shear 容量
β	催眠分散参数
γ	催眠能量能力因素 ($E_{hys} = \gamma\sigma_y\varepsilon_y$)
$\gamma_{adjusted}$	塑性 模型, 催化歇斯底里的容量因素
Δ_{BC}	柱 侧形变形
Δ_5	与 Elwood 所定义的叶片故障点之间的侧面变形 & 毛泽东,2003 年)
Δ_{spring}	零长度春季变形
Δ_y	出售 位移
ε_{10}	负 应力 不加载和积极的点
	应力 重新加载
ε_5	应力 负载和负载之间的通胀点
	应力 重新加载
ε_{bp}	破点 应变
ε_r	剩余 应变
ε_t	应变 到目标重新充电点
ε_u	应变在峰值
ε_y	出售 应变
θ_r	剩余 转角
θ_u	最终 (峰会) 转角
θ_y	出售 转角

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

κ_d	突破点定义目标 应变 (位移) 因素
κ_f	突破点定义目标 应力 (力量) 因素
λ	剩余强度因素 ($V_r = \lambda V_{fail}$)
ν	名称 强度 (=V_u/A_g)
ρ''	转型强化理性 (= A_{st}/bh)
σ_{bp}	破点 应力
σ_r	剩余 应力
σ_{ref}	接收后分支参考 应力
$\sigma_{ref,bp}$	破点定义参考 应力
σ_t	应力 到目标重新充电点
σ_u	最终 (峰会) 应力
σ_y	出售 应力

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

术语表

基本概念在结构分析

轴力: 力量在一个成员的长度上行动, 导致紧张或压缩。
弯矩: 内在的时刻, 让一个会员跳动。
变形协调: 条件确保在结构中不断变形。
变形: 由于应用负载而改变结构的形状或大小。
自由度 (多夫): 独立 位移 或 转角 在结构点上可能。
平衡: 一个状态, 在那里对结构的所有力量和时刻均衡。
灵活性: 反向的硬度, 代表易于变形。
剪力: 内部强度为一个成员的长轴, 抵抗滑动。
静态定义: 一个结构, 其内部力量可以通过平衡方程式单独确定。
静态不确定性: 需要额外的变形协调方程式来解决内部力量的结构。
精力: 结构或组件对变形的抵抗。
应变: 材料的单位长度变形。
应力: 物质内部的内部力量每单位区域。

物质属性和行为

克里普: 时间依赖的常态 应力 的变形。
弹性: 物质属性, 可在取消负载后恢复原始形状。
材料衰退: 由于老化或重复加载而减少物质强度或硬度。
塑性: 物质行为超越弹性界限, 涉及永久变形。
波士顿的比例: 对侧 应变 至轴的 应变 的比例, 在轴负载下的材料中。
热扩展: 由于温度变化引起的变形。
极限强度: 最多 应力 一件材料可以在失败之前抵抗。
屈服强度: 应力 在其中一个材料从弹性转移到塑料行为。
青年模块: 材料硬度在线性弹性中测量。

标准和指南

阿什托: 美国公路和交通官员协会。
第 318 章: 由美国具体研究所开发的“构建结构特征代码要求”(这里).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

艾斯克: “美国钢材建设研究所”规格。

阿斯特 7: 建筑和其他结构的设计负载和相关标准。

第 41 章: “现有建筑物的地震评估和逆转”标准。

欧元条例 2: 欧盟强化和预应力混凝土结构标准。

欧元条例 8: 欧盟标准为地震耐用的结构设计。

FEMA P-58: 联邦紧急管理局对基于性能的地震评估的指南。

IBC: “国际建筑规则”, 提供基于性能的设计指南。

SEAOC Vision 2000: 以性能为基础的地震工程。

UBC: “制服建筑代码”, 历史模型建筑代号。

线性 结构分析

挠度: 垂直或水平的位移在结构中的一个点。

要求 荷载: 一个结构预计在地震事件期间会经历的估计侧面力量或转移, 基于指定的地形运动或性能目标。

有限元法 (五): 数值方法 用于对复杂结构问题的解决方案的接近。

线性弹性分析: 它在弹性范围内的负载和变形之间的比例性。

矩阵分析: 计算方法使用矩阵来解决线性结构系统。

瞬间分配方法: 分析静态不确定的射线和框架的以色列方法。

超级原则: 一个系统的组合反应是对负担的个别反应的总和。

非线性分析

几何非线性: 它发生时, 大变形会导致对结构的反应影响地质学的变化。

催眠: 循环充电期间的能量分散, 在非线性系统中常见。

以色列方法: Newton-Raphson 等技术在 结构分析 中解决非线性方程式。

荷载 路径依赖: 非线性系统, 答案取决于应用的负载序列。

材料非线性: 它发生时, 压力和压力的关系偏离线性, 例如塑料或裂缝。

非线性 屈曲: 在轴承负载下在弹性边界之外发生的不稳定。

P-Delta 效果: 轴力对由于地质学的变化而导致结构形态的次要影响。

软化行为: 硬度的减少, 随着变形的增加, 典型的损坏结构。

结构动力学

基础隔震: 技术从地面运动中分解结构, 减少地震力量。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

冲浪: 能量分散机制减少振动运动。

动力分析: 在时间变量负载下进行结构反应的评估。

振型: 一个结构在特定 固有频率 中变形模式。

固有频率: 一个结构倾向于自由振动的频率。

反应谱: 图表显示在一个特定的地面运动的自然频率范围内的最大结构反应。

时间历史分析: 动力分析 使用详细的地面动作记录作为输入。

基于性能的地震工程 (PBEE)

年度超越率 (λ): 地球运动可能在一年内超过一定的强度水平。

能力曲线: 描述结构需求之间的关系 (例如, 位移) 使用的基板或力量。

能力图: 图形描述结构的非线性反应, 经常显示强度位移行为。

容量频谱: 容量曲线转化为光谱坐标, 通常比较结构需求与地震需求。

能力功能: 数学函数描述结构抵抗作为位移或变形的函数。

倒塌机构: 结构的故障模式, 由足够的塑料粘贴或变形模式形成而特征, 导致稳定性损失或荷载负载能力。

条件频谱: 反应谱 代表在多个时期预期的光谱加速, 条件为目标光谱 加速度 在一个特定的时期。

损害国家 (DS): 结构损害分类为低、适度、严重或崩溃等级。

要求曲线: 代表地震要求, 通常在光谱 加速度 和 位移 的意义上。

工程需求参数: (EDP) 可测量的反应量 (例如, 位移, 加速度, 应变) 用于在特定充电条件下评估结构的性能。

工程地震风险分析 (ESRA): 量化潜在的地震影响。

脆弱性曲线: 概率代表在一定强度测量的损害状态过度的可能性。

动作预测方程式 (GMP): 数学模型估计预期的地面运动强度 (例如,PGA, 光谱加速度) 在基于地震大小、距离、位置条件和其他参数的网站上。

超中心距离: 直线距离从一个站点到低中心 (或焦点) 地震, 在地球内开始破裂。

极限状态: 超越一个结构不再符合性能标准的边界。

绩效目标: 在地震事件中, 如即时占领、生命安全或崩溃预防等结构性结果。

表演点: 容量和需求曲线的交叉, 在地震负载下显示预期的性能。

地震 功能: 结构在地震后不久保持运营或返回服务的能力。

可行性地震 危险性分析 (PSHA): 方法包含不确定性, 以估计地震危险的可能性。

微弱和强度: 结构性属性, 确保荷载的重新分配和在极端事件中抵抗失败。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

反应谱: 显示顶峰反应的插图 (例如, 加速度, 速度, 或位移) 一系列单度自由的旋转器, 具有不同自然时期, 受同一地形运动的影响。

重定向策略: 加强或升级现有结构的方法, 以改善地震性能。

地震危险曲线: 地面动作强度与其在特定地点的年度过度概率之间的关系。

地震危险分裂: 破坏概率性地震危险的过程结果确定不同地震场景的相对贡献 (尺寸、距离和源特征) 在某个特定的网站上的危险。

地震危险地图: 视觉上代表地震危险水平的空间分布, 在指定的时间段内不同概率水平。

地震抵抗力: 一个结构或社区能够在地震之后快速恢复功能。

地震源模型: 空间和时间分布潜在的地震.

可用性 极限状态 (SLS): 确保结构在正常负载或小地震下保持功能, 有限的变形。

结构脆弱性指数: 对结构对地震损害的敏感性进行定量测量。

目标危险频谱: 反应谱 由地震的 危险性分析 衍生, 用于选择或规模地面动作。

最终 极限状态 (ULS): 防止在严重的地震事件中崩溃或灾难性失败。

统一危险频谱 (UHS): 反应谱 代表在特定地点上具有相同的过度概率的光谱加速, 并在不同结构时期确保一致的风险水平。

失败机制

屈曲: 在压缩负载下, 一个成员的突然不稳定。

疲劳: 由于循环充电造成的进展性损害, 随着时间的推移导致失败。

灵活失败: 因弯曲而失败, 往往涉及一个成员的折磨或分裂。

断裂力学: 研究克拉克的传播和材料中的失败。

Shear 失败: 失败模式是由于过度的相关术语压而沿着飞机滑动所特征。

计算技术

转型标准: 确保 iterative 解决方案的条件达到可接受的准确性。

有限差分法 (FDM): 数值方法 以解决 结构分析 的差异方程式。

数值 稳定性: 确保计算解决方案仍然受到 iterations 的限制。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

内容表 (I - IV)

前置内容 i

题词 . . . i
法律通知 . . . ii
献词 . . . iii
前言 . . . iv
绪论 . . . v
致谢 . . . xvii
读者的指南 . . . xviii
错误发现计划 . . . xix
符号说明 . . . xx
术语表 . . . xxviii
内容表 (I - IV) . . . xxxii
插图目录 (I - IV) . . . lxxxii
表格目录 (I - IV) . . . lxxxiii
关于作者 . . . lxxxiv

I 力学与结构分析的历史基础 1

时间线 ECB **2**

时间线 CE **3**

1 引入 **5**
1.1 结构工程历史的相关性 . . . 5
1.2 方法与企图 . . . 6
1.3 大画 . . . 6
1.3.1 主题 . . . 6
1.3.2 历史上 . . . 7
1.4 学术参考 . . . 7

2 之前的结构: 数字和字母 **10**
2.1 数字 . . . 10

审阅稿

2.1.1 性别和双子系统 . . . 10
2.1.2 英格兰 . . . 11
2.1.3 时间 . . . 12
2.1.4 十数系统和印度阿拉伯数字 . . . 12
2.1.5 历史的 π . . . 12
2.1.6 异常数字与黄金比例 . . . 13
2.2 标签: 写作系统的历史 . . . 14
2.2.1 最早的记录:Tokens、Tallies 和 Clay . . . 14
2.2.2 楔形文字：世界上最早的书写系统 . . . 15
2.2.3 埃及基督教和画家传统 . . . 15
2.2.4 福尼西亚人和字母的发明 . . . 16

3 古代文明 20
3.1 早期文明和纪念品起源 . . . 20
3.1.1 梅索波塔米亚: 吉格拉特和克莱结构; c. 公元 3100 至 500 年 . . . 20
3.1.2 梅索美洲: 玛雅和阿兹特克金字塔; c. 400 BCE 1521 CE . . . 21
3.1.3 埃及;C。~2700 年至 2000 年 . . . 22
3.1.4 比较梅索波塔米亚人、梅索美洲人和埃及人 . . . 24
3.2 古典古代: 地质学、理论和帝国 . . . 27
3.2.1 波斯: 帝国平台、桥梁和 康纳 . . . 27
3.2.2 阿拉伯伊斯兰贡献: 创新在结构工程 . . . 28
3.2.3 希腊对静态和结构力学的贡献 . . . 29
3.2.4 罗马: 混凝土, 架构和基础设施 . . . 33
3.2.4.1 维特鲁维乌斯: 第一位结构理论家 . . . 34
3.3 印度、中国和日本的数学和结构传统 . . . 36
3.3.1 中国: 地震学、桥梁和机械创新 . . . 36
3.3.2 印度: 数学、材料和纪念建筑 . . . 37
3.3.3 日本: 地震抵抗力和适应性结构 . . . 37
3.3.4 合成与全球影响 . . . 37

4 哥特式大教堂 39
4.1 引入 . . . 39
4.2 从罗马式质量到哥特式骨骼 . . . 39
4.3 哥特式大教堂: 历史和结构逻辑 . . . 40
4.3.1 历史千里 . . . 40
4.3.2 基本术语与结构 单元 . . . 41
4.3.3 哥特式结构革命 . . . 42
4.3.4 结构特性 . . . 45
4.3.4.1 显著的结构耐力 . . . 47
4.3.4.2 结构分析的进化 . . . 47
4.4 四大教堂的故事 . . . 49
4.4.1 Beauvais 教堂: 结构界限的偶像案例研究 . . . 49
4.4.2 米兰双胞胎: 地质、政治和结构性辩论 . . . 55

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

4.4.3 圣。彼得的基督教: 从危机到科学分析 . . . 59
4.4.4 圣玛丽亚 • 德尔菲奥 (Santa Maria del Fiore): 布鲁内莱什的工程直觉胜利 . . . 63
4.5 总结表 . . . 67

5 科学理由的崛起 **70**
5.1 引入 . . . 70
5.2 伊斯兰教:Bayt al-Hikma . . . 70
5.3 科学革命 . . . 72
5.3.1 新方法的基础 . . . 72
5.3.1.1 自然哲学的终结 . . . 72
5.3.1.2 数学与启蒙的作用 . . . 72
5.3.1.3 弗朗西斯 • 贝康与帝国主义的诞生 . . . 72
5.3.1.4 理性主义: 德卡特的诱惑方法 . . . 73
5.3.1.5 大学的转变 . . . 73
5.3.2 革命发现与新方法 . . . 73
5.3.2.1 天文学:Tycho Brahe . . . 73
5.3.2.2 数学天文学: 约翰内斯 • 凯普勒 . . . 74
5.3.2.3 从观察到理论: 科学进步的模板 . . . 74
5.3.2.4 解剖革命: 安德烈 • 维萨利乌斯 . . . 74
5.3.2.5 循环系统:William Harvey . . . 75
5.3.2.6 伽利略: 自然的数学语言 . . . 75
5.3.3 早期科学机构 . . . 75
5.3.3.1 意大利: 林西人 . . . 75
5.3.3.2 意大利:The 水泥 . . . 76
5.3.4 合成与制度化 . . . 76
5.3.4.1 牛顿: 方法的合成 . . . 76
5.3.4.2 皇家社区和 **科学学院** . . . 76
5.3.4.3 现代科学的实验与理论 . . . 77
5.4 光明: 文化之桥 . . . 77
5.4.1 科学思维的传播 . . . 78
5.4.2 技术教育的崛起: 军事工程学校 . . . 79
5.4.3 从自然哲学到应用科学 . . . 79
5.5 结论 . . . 79

Interlude I: 从自然哲学到解析机械 **82**

6 潘特文 **83**
6.1 引入 . . . 84
6.2 哲学、地质和早期静态 . . . 85
6.2.1 莫西 (c. 470 - 391 ECB) . . . 85
6.2.2 亚里士多德 (384 - 322 ECB) . . . 85
6.2.3 欧克里德 (c. 300 元) . . . 86
6.2.4 阿基米德 (c. 287-212 ECB) . . . 86

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

6.2.5 佩尔加的阿波罗尼奥 (c. 第 262 至 199 年) . . . 87
6.3 工程、机械和知识传输 . . . 88
6.3.1 马库斯·维特鲁维乌斯·波利奥 80 - 70 ECB - 15 ECB 之后) . . . 88
6.3.2 亚历山大英雄 (fl. c. 62 CE) . . . 88
6.3.3 伊本·哈伊塔姆 (c. 965–1040 CE) . . . 89
6.3.4 阿布·雷汉·阿尔·比鲁尼 (973–1048) . . . 90
6.3.5 阿尔哈齐尼 (fl. 1115–1130 CE) . . . 90
6.3.6 公寓 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250) . . . 90
6.4 建筑、比例和人文形式 . . . 91
6.4.1 莱昂·巴蒂斯塔·阿尔伯蒂 (1404 – 1472) . . . 91
6.4.2 莱昂纳多·达芬奇 (1452–1519) . . . 92
6.4.3 安德烈·帕拉迪奥 (1508–1580) . . . 100
6.4.4 塞尔维亚诺·塞里奥 (1475–1554) . . . 101
6.4.5 吉亚科莫·巴罗齐·达维戈拉 (1507–1573) . . . 101
6.4.6 哈伯特·加泰尔 (1660–1737) . . . 102
6.4.6.1 饰 Jean-Rodolphe Perronet . . . 105
6.4.6.2 从比例到经验的过渡 . . . 107
6.5 从数学顺序到机械 . . . 107
6.5.1 弗朗西斯·贝康 (1561–1626) . . . 108
6.5.2 尼古拉斯·科珀尼克斯 (1473–1543) . . . 108
6.6 从统计学到科学革命 . . . 109
6.6.1 西蒙·史蒂芬 (1548–1620) . . . 109
6.6.2 加利利奥 Galilei (1564–1642) . . . 110
6.6.3 雷内·德卡特 (1596 – 1650) . . . 114
6.6.4 克里斯蒂安·休根斯 (1623–1695) . . . 115
6.6.5 布莱斯 帕斯卡 (1623–1662) . . . 116
6.6.6 罗伯特·胡克 (1635–1703) . . . 117
6.6.7 伊莎克·纽顿 (1642–1727) . . . 122
6.6.8 福特弗里德·莱布尼兹 (1646–1716) . . . 125
6.6.9 伯诺利家族 (1654–1782) . . . 127
6.6.9.1 雅各布·伯诺利 (1654–1705) . . . 128
6.6.9.2 约翰·伯诺利 (1667–1748) . . . 129
6.6.9.3 介入 奥姆尼亚歌剧 . . . 130
6.6.9.4 丹尼尔·伯诺利 (1700–1782) . . . 130
6.6.10 莱昂哈德·尤勒 (1707–1783) . . . 131
6.7 从解析机械到连续和结构理论 . . . 135
6.7.1 查尔斯·奥古斯汀·德库伦布 (1736–1806) . . . 135
6.7.2 SIMé 丹尼斯·波伊森 (1781–1840) . . . 137
6.7.3 克劳德·路易·马里·亨利·纳维尔 (1785–1836) . . . 137
6.7.4 饰 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) . . . 141
6.7.5 约瑟夫·路易斯·拉格兰奇 (1736–1813) . . . 142
6.7.6 卡西 (奥古丁 - 路易斯 1789-1857) . . . 142

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

6.7.7 乔治绿 (1793–1841) . . . 143
6.7.8 阿德´ Jean Claude Barr´ 文特 (1797–1886) . . . 143
6.8 结构工程作为纪律的崛起 . . . 144
6.8.1 卡尔 • 库尔曼 (1821-1881) . . . 144
6.8.2 威廉 • 约翰 • 麦克文 (William John Macquorn) (1820-1872) . . . 145
6.8.3 克里斯蒂安 • 奥托 • 莫赫 (1835–1918) . . . 145
6.8.4 亨利 • 莫塞利 (1801–1872) . . . 146
6.8.5 詹姆斯 • 克莱克 • 麦克斯威尔 (1831–1879) . . . 147
6.9 机械的主要历史 . . . 148
6.9.1 伊萨克 • 托丹特 (1820–1884) . . . 148
6.9.2 史蒂芬 • 普罗科菲耶维奇 • 蒂莫申科 (1878–1972) . . . 148
6.9.3 雷恩 • 杜加斯 (1897–1957) . . . 149
6.9.4 克里福德 • 安布罗塞 • 特鲁斯德尔 3 (1919–2000) . . . 149
6.10 可见的女人 . . . 150
6.11 分析与背景 . . . 151
6.11.1 竞争、秘密和科学进步 . . . 151
6.11.1.1 隐藏方法 . . . 151
6.11.1.2 争议及其影响 . . . 157
6.11.2 转向现代工程科学 . . . 158
6.11.3 法国工程教育革命 . . . 159
6.12 从自然哲学到工程科学 . . . 159
6.12.1 总结表 . . . 160
6.12.1.1 主要参与者及其影响力 . . . 160
6.12.1.2 地标出版物 . . . 161
6.12.1.3 工程教育机构 . . . 163
6.12.1.4 大型智力争议 . . . 163
6.12.1.5 历史时间表 . . . 164

Interlude II: 从中世纪的洞察到现代结构力学: (1351-1879) 169

7 强度, 中性轴, 和灵活压力 172
7.1 引入 . . . 172
7.2 强度 . . . 172
7.2.1 莱昂纳多 (≃ 1490) . . . 173
7.2.2 加利利 (1564-1642) . . . 173
7.2.3 贝克曼 (1588-1637) . . . 175
7.2.4 莫斯特布鲁克 (1692—1761) . . . 175
7.3 内部灵活性压力: 研究三项行为 . . . 176
7.3.1 第一条: 帝国线性 . . . 177
7.3.1.1 莱昂纳多 (≃ 1490) . . . 177
7.3.1.2 加利利 (1632) . . . 178
7.3.2 二: 帝国主义 - 连续线性 . . . 180
7.3.2.1 德卡特 (1644) . . . 181

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

7.3.2.2 莱布尼兹 (1684) . . . 181
7.3.2.3 马里奥特 (1686) . . . 182
7.3.2.4 父母 (1713) . . . 183
7.3.2.5 科隆 (1773) . . . 184
7.3.2.6 年轻人 (1807) . . . 186
7.3.2.7 圣文 (1855) . . . 188
7.3.2.8 克里斯蒂安 (1862) . . . 188
7.3.2.9 圣文 (1866) . . . 189
7.3.3 第三条: 解析线性 . . . 189
7.3.3.1 雅各布・伯诺利 (1687) . . . 189
7.3.3.2 Euler (1727) . . . 190
7.4 总结 . . . 191
7.5 过渡 . . . 193

8 曲线的差异地质 195
8.1 介绍: 曲率和 Elastica 的地质起源 . . . 195
8.2 曲率 . . . 196
8.2.1 奥斯卡 (1351) . . . 196
8.2.2 纽顿 (1671) . . . 197
8.2.3 莱布尼兹 (1686) . . . 199
8.2.4 约翰・伯诺利 (1691) . . . 199
8.2.5 雅各布・伯诺利《黄金理论》(1694) . . . 201
8.2.6 凯斯特 (1758) . . . 205
8.2.7 总结 . . . 205
8.3 进化 / Involute . . . 206
8.3.1 胡格斯 (1658-1673) . . . 207
8.3.2 实用限制与遗产 . . . 208
8.3.3 结论注意事项 . . . 208
8.4 从地质曲线到结构力学 . . . 209
8.5 等待: . . . 210

9 大挑战: 催眠, 弹性和解析机械的诞生 212
9.1 数学基础: 从地质到计算 . . . 212
9.1.1 希腊遗产: 从欧克利德到地质机械分裂 . . . 212
9.1.2 德卡特革命: 协调和阿尔及利亚 . . . 213
9.1.3 计算革命 . . . 213
9.1.4 从曲线到机械: 桥梁 . . . 214
9.1.5 转型完整 . . . 215
9.1.6 数学笔记 . . . 215
9.2 加泰罗尼亚挑战 (1690 年 5 月至 1691 年 6 月) . . . 215
9.2.1 早期研究 . . . 216
9.2.1.1 莱昂纳多 . . . 216
9.2.1.2 加利利 . . . 216

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

9.2.1.3 史蒂芬; (1634) . . . 217
9.2.1.4 胡格斯 (c. 1646) . . . 218
9.2.2 挑战 . . . 219
9.2.2.1 标签: terminology . . . 219
9.2.2.2 雅各布 • 伯诺利 福尼克 第 1690 章 挑战 . . . 220
9.2.2.3 莱布尼兹的回应和挑战修改; 1690 年晚 . . . 220
9.2.3 三大解决方案 . . . 222
9.2.3.1 约翰 • 伯诺利 (1690 年 12 月提交,1691 年 6 月发布) . . . 222
9.2.3.2 胡格斯 (提交于 1690 年 10 月, 发表于 1691 年 5 月) . . . 223
9.2.3.3 莱布尼兹; (提交于 1691 年 5 月, 发布于 1661 年 6 月) . . . 224
9.2.3.4 出版和最终决议;1691 年 6 月 . . . 225
9.2.3.5 出版后分析与遗产 . . . 225
9.2.4 埃皮洛格 . . . 226
9.2.4.1 遗忘的统一 . . . 226
9.2.4.2 数学遗产 . . . 227
9.2.4.3 雅各的悖论 . . . 227
9.3 灵活的挑战 (1690-1744) . . . 228
9.3.1 雅各布 • 伯诺利的挑战 (1690) . . . 228
9.3.2 解决方案 . . . 230
9.3.2.1 雅各布 • 伯诺利的解决方案 (1694) . . . 231
9.3.2.1.1 反力 从 Huygen (1694) . . . 235
9.3.2.1.2 介入 . . . 237
9.3.2.1.2.1 莱布尼兹 生活的 关于能源概念的进化 . . . 237
9.3.2.1.2.2 布拉希斯托克隆挑战 (1696) . . . 238
9.3.2.1.2.3 约翰 • 伯诺利的解决方案 (1697) . . . 241
9.3.2.1.2.4 丹尼尔 • 伯诺利的解决方案 (1742) . . . 243
9.3.2.1.2.5 以色列问题 vs. 变分法 . . . 245
9.3.2.2 Euler 的解决方案 (变分法) (1744) . . . 245
9.3.2.2.1 弹性物种分类 . . . 250
9.3.2.3 现代变量框架 . . . 259
9.3.3 第一两项挑战的历史概述 . . . 261
9.4 匿名挑战: 问题之间的桥梁 (1724) . . . 262
9.4.1 伯诺利 - 埃勒合作: 第一次统一 (1728) . . . 263
9.4.1.1 丹尼尔 • 伯诺利 (建立 Moment-曲率 原则) 1728 . . . 264
9.4.1.2 Euler (从地质观察到数学革命) (1732) . . . 265
9.4.1.3 Euler-Bernoulli 理论 . . . 269
9.5 屈曲理论: 从观察到关键负载 . . . 270
9.5.1 早期工作 . . . 270
9.5.1.1 莱昂纳多 (ca. 1490s) . . . 270
9.5.1.2 皮埃特 • 范 • 穆森布鲁克 (1729) . . . 272
9.5.2 Euler(1759) . . . 272
9.6 尤勒的一般理论: 完整统一 (1771) . . . 275

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

9.7 结论 . . . 278

10 连续机械: 结构分析基金会 284
10.1 分子 *vs* 弹性的连续理论 . . . 284
10.1.1 概述 . . . 285
10.1.2 从加利利奥到法国分子学校 . . . 285
10.1.3 不断的态度上升 . . . 285
10.1.4 比较表 . . . 286
10.1.5 哪个理论占主导地位? . . . 287
10.1.6 历史参考 . . . 287
10.2 连续介质力学 . . . 289
10.3 引入 . . . 289
10.3.1 法国革命和现代弹性的诞生 . . . 289
10.3.2 连续机械与弹性理论的基础 . . . 290
10.3.2.1 科隆 (1736-1806) 和工程 基础 . . . 290
10.3.2.2 拉格兰 (1736-1813) 分析基金会 . . . 291
10.3.2.3 Fourier 的 (1768-1830) 数学方法 . . . 291
10.3.2.4 卡西 (1789-1857) 和应力的概念 . . . 292
10.3.2.5 鱼的 (1781-1840) 比率和 Cauchy 的简化 . . . 295
10.3.2.6 船员的 (1785-1836) 合成和应用 . . . 296
10.3.2.7 拉米的 (1795-1870) 灵活的连续 . . . 297
10.3.2.8 圣文 (1797-1886) 半逆方法 . . . 297
10.3.2.9 Clapeyron 的 (1799-1864) 能源方法 . . . 298
10.3.2.10法國的成績在前景 . . . 299
10.4 完整的数学框架 . . . 299
10.4.1 Euler 和 质量 的保留 . . . 299
10.4.2 卡西 (1789-1857) 平衡线性动力 . . . 300
10.4.3 角度瞬间的平衡 . . . 301
10.4.4 克劳斯 (1822-1888) 汤姆森 (1824-1907) 和 Duhem (1861-1916) 热力学法则) . . . 301
10.4.4.1 第一法 (能量平衡): . . . 301
10.4.5 第二法则 (英特罗菲不平等): . . . 302
10.4.6 历史发展与现代合成 . . . 302
10.5 宪法理论: 物质行为 . . . 303
10.5.1 一般框架 . . . 303
10.5.2 零 (1925-2017) 和客观性: 材料的原则框架差异 . . . 303
10.5.3 绿色 (1793-1841) 和超弹性 . . . 304
10.5.4 看见 (1850-1919) 物质同义 . . . 305
10.5.5 科尔曼 (1930-1992) 和零: 热力限制 . . . 306
10.5.6 历史观点: 从帝国主义到理论 . . . 306
10.5.7 连接到 结构分析 . . . 307
10.5.8 一个名字里有什么? 机械的进化与其实践者 . . . 307
10.5.8.1 结构分析师的变化的身份 . . . 308

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

10.5.8.2 从专业身份到纪律内容 . . . 309
10.5.8.3 今天的纪律景观 . . . 312
10.5.8.4 术语条约与关系 . . . 312
10.5.8.5 本书中采用的条约 . . . 313
10.6 结论 . . . 314
11 结构分析 在最后: 合成 & 应用 **316**
11.1 引入 . . . 316
11.2 结构工程, 标签 . . . 317
11.3 早期发展: 静态不确定的漏洞 . . . 318
11.3.1 船员 (1785–1836) 第一种系统治疗 . . . 318
11.3.2 克莱普里昂 (1799–1864) 标签: 三瞬间方程式 . . . 319
11.4 转向一般方法 . . . 319
11.4.1 马克思 (1831–1879)：互等定理 . . . 320
11.4.2 莫克 (1835–1918): 地质方法和类似 . . . 320
11.4.3 卡斯特里亚诺 (1847–1884): 能源方法 . . . 321
11.4.4 布雷斯拉夫 Müller-Breslau (1851–1925): 系统化和影响线 . . . 321
11.4.5 力量方法: 变形协调和灵活性 . . . 322
11.4.6 基本概念与程序 . . . 322
11.4.7 力量方法: 总结和遗产 . . . 324
11.5 位移方法: 从理论到实践 . . . 324
11.5.1 理論基礎: 早期堅固的表達 . . . 324
11.5.2 Slope-Deflection 方法: 系统式编写 . . . 325
11.5.3 哈迪克罗斯 (1885–1959) 时刻分配方法 . . . 326
11.5.4 扩展和变量 . . . 328
11.5.5 位移方法: 总结和遗产 . . . 329
11.6 影响线和移动负载 . . . 330
11.6.1 温克勒 (1835–1888)● 早期發展 . . . 330
11.6.2 穆勒 - 布雷斯拉夫的原则 . . . 331
11.6.3 应用和遗产 . . . 331
11.7 向 矩阵 表述: 概念桥到计算 . . . 331
11.7.1 矩阵 古典方法的结构 . . . 331
11.7.2 从 Iteration 到 矩阵 解决方案 . . . 332
11.7.3 手计算的界限: 设置计算阶段 . . . 332
11.7.4 结论: 连续性和转型 . . . 332
11.8 结构分析的基本要求 . . . 333
11.9 捐助者的时间总结 . . . 335
11.9.1 结论 . . . 338
12 计算方法 **340**
12.1 终结区别方法 . . . 340
12.1.1 皮尔森和理查德森:DAM 应力分析 (1905–1911) . . . 340
12.1.2 Iterative 解决方法 . . . 342

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

12.2 矩阵 结构分析 . . . 343
12.2.1 克隆: 网络分析与结构类似 . . . 343
12.2.2 约翰 • H 阿尔及利亚 (1913–2004) . . . 343
12.2.3 空中空间 (德尔塔翼) 背景:1950 年代 . . . 344
12.2.4 NBS / 海军; Samuel Levy . . . 344
12.2.5 波音; 特纳和直接刚度法 . . . 346
12.2.5.1 灵活性与稳定性: 持续的讨论 . . . 348
12.3 有限元法的 . . . 349
12.3.1 数学基础 . . . 349
12.3.2 优先事项和术语: 什么是 (而不是) 有限元法的 . . . 352
12.3.3 雷 • 克劳 (1920–2016) . . . 353
12.3.4 早期计算机与伯克利计划 . . . 354
12.3.5 Norfork Dam: 第一大应用 . . . 354
12.3.6 非线性和动力分析 (1960–1962) . . . 354
12.4 巩固和分散 . . . 356
12.4.1 奥利格 • 齐恩基维奇 (1921–2009) . . . 356
12.4.2 莱特 • 帕特森会议 (1965) . . . 356
12.4.3 理查德 • 加拉格 (1927–1997) . . . 357
12.4.4 强力方法与硬度方法的讨论 . . . 358
12.4.5 纳斯特兰的决定 (1969) . . . 358
12.4.6 一般化 . . . 358
12.4.7 文本书与全球采用 . . . 359
12.4.8 现行影响与应用 . . . 360
12.5 总结和关键贡献 . . . 360
12.6 结论 . . . 362

13 从阿巴库斯到算法: 科学与工程计算的历史调查 364
13.1 引入 . . . 364
13.2 古代和早期计算设备 . . . 364
13.3 机械自动化和早期计算机 . . . 366
13.4 巴贝奇与洛夫莱斯：程序设计的概念起源 . . . 368
13.5 类似科学计算 (1900–1945) . . . 369
13.6 数字革命 (1945–1960) . . . 369
13.7 编程语言和早期科学软件 . . . 370
13.8 关键计算发展时间表 . . . 371
13.9 早期工程与结构软件 (1960–1980) . . . 371
13.10 PC 时代与工程计算的扩张 (1980–2000) . . . 372
13.11 现代计算生态系统 (2000 - 现有) . . . 373
13.12 技术写作和报告的进展 . . . 374
13.13 结论 . . . 375

14 力量的进化与虚拟原则 377
14.1 引入 . . . 377

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

14.2 古代与神圣 . . . 379
14.2.1 埃及 . . . 379
14.2.2 梅索波塔米亚 . . . 380
14.2.3 印度 . . . 380
14.3 古典古代与自然哲学 . . . 381
14.3.1 希腊人 . . . 381
14.3.1.1 英雄 (494-434 公元前) . . . 382
14.3.1.2 柏拉图 (427-348 公元前) . . . 383
14.3.1.3 亚里士多德 (第 384 章 公元前) . . . 384
14.3.1.4 阿基米德 (公元前 287 至 212 年) 标签: 示威 “什么” . . . 385
14.3.1.5 波西多尼 (135 - 51 B.C.) 和斯托克 . . . 387
14.3.2 罗马人, 普洛丁 (204–270) . . . 387
14.3.3 比桑丁, 菲洛波诺斯 (490–570) . . . 388
14.4 中世纪和学术主义 . . . 389
14.4.1 伊斯兰学者 . . . 389
14.4.1.1 阿维森纳 (980–1037) . . . 389
14.4.1.2 巴格达 (1080–1165) . . . 389
14.4.2 乔丹斯 • 德 • 内莫尔 (约 1225 - 1260) 和位置 重力 . . . 390
14.4.3 中世纪: 巴黎大学 . . . 390
14.4.3.1 布里达 (1295-1358) . . . 390
14.4.3.2 奥斯卡 (1320-1382) . . . 391
14.5 复兴与科学革命 . . . 392
14.5.1 莱昂纳多 • 达芬奇 (1452-1519) . . . 392
14.5.2 贝多芬 (1530 – 1590) . . . 393
14.5.3 帕迪 (1636–1673) . . . 393
14.5.4 西蒙 • 史蒂芬 (1548–1620) . . . 394
14.5.5 加利利 (1564-1642) . . . 397
14.5.6 凯普勒 (1571–1630) . . . 400
14.5.7 德卡特 (1596–1650) . . . 402
14.5.8 托里克利 (1608–1647) . . . 407
14.5.9 瓦利斯 (1616–1703) . . . 409
14.5.10莱布尼兹 (1646–1716) . . . 409
14.5.11纽顿 (1642–1726) . . . 410
14.5.12丹尼尔 , Daniel (1700-1782) . . . 412
14.5.131715 年约翰 • 伯诺利的信 . . . 412
14.5.14瓦里尼奥 (1654–1722) . . . 414
14.5.15阿伦伯特 (1717–1783) . . . 415
14.5.16坎特 (1724 – 1804) . . . 420
14.5.17拉格兰 (1736–1813) . . . 420
14.5.18四人 (1768–1830) . . . 423
14.5.19拉萨 • 卡诺特 (1753–1823) . . . 424
14.6 埃皮洛格 . . . 425

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

14.7 结论 . . . 425
Interlude III: 在哪里奖学金满足激情 **428**
15 建筑 & 结构 **429**
15.1 引入 . . . 429
15.1.1 第章 组织 . . . 430
15.2 维特鲁维亚传统 . . . 431
15.2.1 马库斯 • 维特鲁维乌斯 • 波利奥: 第一位建筑影响者 . . . 431
15.2.1.1 Vitruvius 关于教育 . . . 431
15.2.1.2 Vitruvius 工程师 . . . 432
15.2.1.3 建筑师维特鲁威：历久弥新的三原则 . . . 435
15.2.1.4 维特鲁威论运动员与学者 . . . 437
15.2.2 维特鲁维乌斯在复兴时期重新发现 . . . 437
15.2.2.1 莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂 (1404–1472) . . . 437
15.2.2.2 安德烈 • 帕拉迪奥 (1508–1580) . . . 439
15.2.2.3 三位一体的重新排序 . . . 440
15.2.2.4 阿尔伯蒂和帕拉迪奥作为工程师 . . . 441
15.2.3 人类学与规模问题 . . . 443
15.2.3.1 Vitruvius: 基本文本 . . . 443
15.2.3.2 中世纪传输 . . . 444
15.2.3.3 复兴的回归 . . . 444
15.2.3.4 二十世纪: 模块化 & 查尔斯•埃迪奥德•杰纳雷特 Le Corbusier (1887–1965) . . . 445
15.2.3.5 从比例到 ergonomics . . . 448
15.2.3.6 隐藏的假设: 规模独立 . . . 448
15.2.3.7 运营地质: 大师建筑师实际上如何追踪他们的建筑 . . . 448
15.3 Interlude: 建筑师和工程师 - 艺术与科学? . . . 453
15.4 先驱们 . . . 455
15.4.1 飞翔的蝴蝶: 结构逻辑可见 . . . 456
15.4.2 古斯塔夫 • 艾菲尔 (1832–1923) . . . 459
15.4.3 路易 • 亨利 • 苏利文 (1856-1924) . . . 461
15.4.4 罗伯特 • 梅拉特 (1872–1940) . . . 462
15.4.5 奥古斯特 • 佩雷特 (1874–1954) . . . 463
15.4.6 爱德华 • 托罗贾 • 米雷特 (1899–1961) . . . 464
15.4.7 路易吉神经 (1891–1979) . . . 467
15.4.8 里卡多 • 莫兰迪 (1902–1989) . . . 472
15.4.9 基督徒人 (1927–2018) . . . 473
15.4.10拉哈曼 • 汗 (1929–1982) . . . 474
15.4.11The Progettisti 比较: 设计师 - 建筑师及其材料 . . . 478
15.4.11.1艾菲尔和金属 . . . 478
15.4.11.2神经与铁路 . . . 478
15.4.11.3Roebling 和 电缆 . . . 478

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

15.4.11.4常见威胁 . . . 478
15.5 结构性形状: 关键人物 . . . 479
15.5.1 凯特纳 . . . 479
15.5.1.1 波兰 (1683–1761) . . . 480
15.5.1.2 安东尼 • 加迪 (1852–1926) . . . 480
15.5.1.3 萨尔文 (1910–1961) . . . 481
15.5.2 壳和膜 . . . 482
15.5.2.1 保罗 • 奥托 (1925–2015) . . . 482
15.5.2.2 海因斯岛 (1926–2009) . . . 482
15.5.2.3 塞尔吉奥 • 穆斯梅西 (1926–1981) . . . 483
15.5.3 相互结构 . . . 484
15.5.3.1 历史发展 . . . 485
15.5.3.2 现代复兴 . . . 487
15.5.4 数学优化:Maxwell、Michell、Baker 和 Behini . . . 487
15.5.4.1 马克思 (1831 – 1879) . . . 488
15.5.4.2 米歇尔 (1870 – 1959) . . . 489
15.5.4.3 贝克和开始 . . . 490
15.5.5 科达: 当建筑师和工程师碰撞时 . . . 492
15.5.5.1 案例一:Bourdais vs. Eiffel (巴黎 1889) . . . 492
15.5.5.2 案例二: 帕克斯顿和水晶宫 (伦敦,1851 年) . . . 493
15.5.5.3 案例三: 罗布林和布鲁克林桥 (纽约,1869 年至 1883 年) . . . 493
15.5.5.4 遗产 . . . 494
15.6 计算机一代 . . . 494
15.6.1 和“例外”建筑师 . . . 494
15.6.1.1 菲利克 • 坎德拉 (1910–1997) . . . 495
15.6.1.2 弗兰克 • 盖里 (1929–2025) . . . 495
15.6.1.3 圣地亚哥卡拉特拉瓦 (1951–) . . . 496
15.6.2 结构工程师: 五个百分点 . . . 497
15.6.2.1 高级建筑 . . . 499
15.6.2.1.1 莱斯利 • 罗伯特森 (1928–2021) . . . 499
15.6.2.1.2 威廉 • 贝克 (1953–) . . . 501
15.6.2.2 桥梁:Michel Virlogeux (1946–) . . . 503
15.7 Vitruvius 修订 . . . 504
15.7.1 解体结构艺术 . . . 505
15.7.2 什么是艺术? . . . 505
15.7.3 结构建筑:Llunji 的宣言 . . . 507
15.8 结论 . . . 508

16 Terrae Motus: 地震的神话、信仰和代表 512
16.1 引入 . . . 513
16.2 神话 . . . 513
16.2.1 日本 . . . 514
16.2.2 太平洋西北 . . . 516

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

16.2.3 美国 . . . 517
16.2.4 其他傳統 . . . 518
16.2.5 上一篇: 神话作为地震记忆 . . . 518
16.3 宗教 . . . 519
16.3.1 圣经 . . . 519
16.3.2 希腊 . . . 522
16.3.3 印度 . . . 527
16.3.4 伊斯兰教 . . . 529
16.3.5 美洲 . . . 531
16.3.6 Shinto . . . 532
16.3.7 概述: 宗教与地震灾难的意义 . . . 534
16.4 哲学 . . . 538
16.4.1 亚里士多德 . . . 538
16.4.2 埃拉托斯特 . . . 538
16.4.3 卢塞蒂乌斯和普利尼 . . . 538
16.4.4 里斯本 地震作为哲学活动 . . . 539
16.4.4.1 沃尔泰和鲁塞奥作为哲学对话者 . . . 539
16.4.4.2 坎特 . . . 540
16.4.5 重建 . . . 540
16.5 文学 . . . 541
16.5.1 文学中的地震 . . . 541
16.5.2 1755 年里斯本地震和启蒙辩论 . . . 542
16.5.3 梅西娜 地震 1908 年 . . . 543
16.5.4 摘要: 文学与地震文化记忆 . . . 544
16.6 建筑 . . . 545
16.6.1 皮罗 • 利戈里奥 . . . 545
16.6.2 吉布里娜 . . . 545
16.7 艺术 . . . 548
16.7.1 摇滚艺术与错误的痕迹 . . . 548
16.7.2 绘画 . . . 549
16.7.3 科扎克收藏 . . . 550
16.7.4 阿米利亚收藏 . . . 551
16.8 音乐 . . . 552
16.9 电影化 . . . 552
16.10 结论 . . . 553
16.11 标签: 从纳马佐到罗斯威尔 . . . 554

第一卷参考文献：历史 **557**

第二至第四卷目录（分析） **613**

第二至第四卷插图目录（分析） **649**

第二至第四卷表格目录（分析） **665**

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷例题目录（分析） 669
第二至第四卷要点目录（分析） 676

II 导论：基础与解析方法 678

17 引入 679
17.1 大图像 . . . 679
17.1.1 建筑 . . . 680
17.1.2 结构工程 . . . 680
17.1.2.1 结构设计 . . . 681
17.1.2.2 分析 . . . 681
17.1.2.3 安全评估 . . . 682
17.1.3 学科集成在结构分析 . . . 683
17.2 单元: 主要内部力量 . . . 683
17.3 荷载 转换 单元 . . . 683
17.4 结构类型 . . . 684
17.5 工程工具的转型 . . . 688
17.6 结构工程 课程 . . . 689

18 负载 691
18.1 引入 . . . 691
18.2 货物分类 . . . 691
18.2.1 垂直 . . . 692
18.2.2 侧面 . . . 693
18.2.2.1 风 . . . 693
18.2.2.2 地震 . . . 696
18.2.3 水道和地球 . . . 697
18.2.3.1 例题 18.1: 水晶 荷载 . . . 698
18.2.4 效应 荷载 . . . 698
18.2.5 二级 . . . 699
18.2.6 热量 . . . 700
18.2.6.1 例题 18.2: 热扩展/应力 . . . 701
18.3 考虑 . . . 701
18.3.1 计划的负载 . . . 701
18.3.2 荷载 定位 . . . 702
18.3.3 荷载 组合 . . . 703
18.3.4 荷载 路径 . . . 703
18.3.5 税务区 . . . 706
18.3.5.1 例题 18.3: 税务区 . . . 707
18.3.6 结构性反应 . . . 708

19 反应 711

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

19.1 引入 . . . 711
19.1.1 支持的类型 . . . 712
19.1.2 平衡 . . . 712
19.1.3 条件方程式 . . . 714
19.1.4 静态决心 . . . 714
19.1.5 地质不稳定 . . . 715
19.1.6 自由体图 . . . 716
19.2 例子 . . . 716
19.2.1 例题 19.1: 水静态 荷载 . . . 717
19.2.2 例题 19.2: 荷载 转换 . . . 717
19.2.3 例题 19.3: 简单支持 梁 . . . 718
19.2.4 例题 19.4: 平衡 荷载 . . . 719
19.2.5 例题 19.5: 四分之一 梁 . . . 720
19.2.6 例题 19.6: 3 加布式框架 . . . 721
19.2.7 例题 19.7: 包含支持 . . . 722
19.2.8 例题 19.8: 网络结构 . . . 723
19.2.9 例题 19.9: 飞机 平衡 . . . 724
19.2.10例题 19.10: 吉姆博酒 . . . 725
19.2.11例题 19.11: 排名: 平衡的浮动身体 (液化证据) . . . 728
19.2.12例题 19.12: 体育运动员: 神经 . . . 730

20 威胁 733
20.1 引入 . . . 733
20.1.1 假设 . . . 733
20.1.2 签约 . . . 734
20.1.3 确定性和稳定性 . . . 734
20.2 分析方法 . . . 736
20.2.1 合成方法 . . . 736
20.2.1.1 例题 20.1: 桁架分析; 关节方法 . . . 737
20.2.1.2 例题 20.2: 3D 桁架 . . . 740
20.3 部分方法 . . . 743
20.3.1 部分方法 . . . 743
20.3.2 例题 20.3: 部分方法 . . . 743
20.4 共用/矩阵 . . . 744
20.4.1 例题 20.4: 简单的特鲁斯; 合体/矩阵方法 . . . 745
20.4.2 例题 20.5: 综合特鲁斯; 合体/矩阵方法 . . . 748

21 灵活成员的内部力量 751
21.1 引入 . . . 751
21.1.1 工程方法: 从压力到内部力量 . . . 751
21.1.2 2d/3d 直 / 曲线射击的内部力量 . . . 752
21.1.3 为什麼這是重要的 . . . 754
21.1.4 设计签约 . . . 754

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

21.2 荷载, 表, 瞬间关系 . . . 755
21.2.1 差异形式 . . . 756
21.2.2 综合形式 . . . 757
21.3 例子 . . . 757
21.3.1 例题 21.1: 梁 與傾向 荷载 . . . 758
21.3.2 例题 21.2: 包含 框架 . . . 759
21.3.3 例题 21.3: 框架 與水位性 荷载 . . . 762
21.3.4 例题 21.4: 线性不同 荷载 . . . 763
21.3.5 例题 21.5: 框架; 例子弯曲天花板 . . . 764
21.3.6 例题 21.6: 相反 框架 . . . 765
21.3.7 例题 21.7: 3D 框架 . . . 769

22 缺陷; 弹性曲线 **773**
22.1 引入 . . . 773
22.2 差异方程式 . . . 774
22.2.1 例题 22.1: 双重融入 . . . 774
22.2.2 例题 22.2: 最大 挠度 . . . 776
22.2.3 例题 22.3: 最佳滑雪形状 . . . 777
22.2.4 例题 22.4: 浮动 梁 . . . 777
22.3 曲率 . . . 780
22.3.1 例题 22.5: 自行车轮子 . . . 782
22.3.2 例题 22.6: 直升式的春天 . . . 788
22.3.3 曲线与曲线关系 . . . 789
22.3.3.1 例题 22.7: 二元交换器 . . . 790
22.3.4 曲率 区域方法 (瞬间区) . . . 791
22.3.4.1 签约 . . . 791
22.3.4.2 第一 曲率 区域理论 . . . 791
22.3.4.3 第二个曲率区域理论 . . . 793
22.3.4.3.1 例题 22.8: 曲率 区域, cantilevered 梁 . . . 793
22.3.4.3.2 例题 22.9: 瞬间 曲率, 仅支持 梁 . . . 794
22.3.4.4 最大 挠度 . . . 795
22.3.4.4.1 例题 22.10: 最大 挠度 . . . 796
22.3.4.5 温度 曲率 关系 . . . 797
22.3.4.5.1 例题 22.11: 框架 受温度加载 . . . 797
22.3.4.6 例题 22.12: 塑料长度 . . . 800
22.3.4.7 弹性重量 / 结合点击 . . . 801
22.3.4.7.1 例题 22.13: 接口 梁; 点 荷载 . . . 802
22.3.4.7.2 例题 22.14: 合成 梁; 变量 I . . . 803

23 Shear 和 扭转 **806**
23.1 Shear 歪曲 (转向) . . . 806
23.1.1 字体, 无限的单元 . . . 806
23.1.1.1 例题 23.1: 挠度 加密式 梁 . . . 807

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

23.1.2 股票分布; $\tau(y)$ . . . 807
23.1.3 共享率 . . . 808
23.1.4 SHAR 因素 . . . 808
23.1.5 Shear 歪曲 v_s 泰莫森科 . . . 810
23.2 转型变形 . . . 811
23.2.1 S^t 虚拟或统一 扭转 . . . 811
23.2.2 Vlasov 或 Nonuniform 扭转 . . . 812
23.2.2.1 例题 23.2: 不统一的扭转 I 部分 . . . 817

24 附加 虚功 **821**
24.1 引入 . . . 821
24.2 简化补充 虚功 原则的衍生 . . . 822
24.2.1 衍生品 . . . 822
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti 相互理论 . . . 824
24.2.3 外部 虚功 $\delta\overline{W}^*$ . . . 825
24.2.4 内部 虚功 $\delta\overline{U}^*$ . . . 825
24.3 例子 . . . 827
24.3.1 例题 24.1: 梁 . . . 827
24.3.2 例题 24.2: 框架; 缺陷 . . . 828
24.3.3 例题 24.3: 框架, 转角 . . . 829
24.3.4 例题 24.4: 灵活的手套 . . . 830
24.3.5 例题 24.5: 索 支持的 cantilever 梁 . . . 832
24.3.6 例题 24.6: Torsional 和 Flexural Deformation . . . 833
24.3.7 例题 24.7: 梁中的灵活和叶形变异 . . . 835
24.3.8 例题 24.8: 热效应在梁 . . . 836
24.3.9 例题 24.9: 管道 . . . 837
24.3.10 例题 24.10: 桁架; 简单 . . . 838
24.3.11 例题 24.11: 桁架; 复杂 . . . 839
24.3.12 例题 24.12: 桁架 与初始交换器 . . . 840
24.3.13 例题 24.13: 桁架 二次压力 . . . 840
24.3.14 例题 24.14: 圆环 . . . 842
24.3.15 例题 24.15: 春天 . . . 845

25 柔度法 **848**
25.1 引入 . . . 848
25.2 力量 / 柔度法 . . . 853
25.2.1 例子 . . . 854
25.2.1.1 例题 25.1: 梁 與 tie rod . . . 854
25.2.1.2 例题 25.2: 钢材 构建 框架 分析 . . . 856
25.2.1.3 例题 25.3: 桁架, 一大强度 . . . 859
25.2.1.4 例题 25.4: 桁架: 两支救援力量 . . . 862
25.2.1.5 例题 25.5: 桁架: 热 荷载 . . . 864
25.2.1.6 例题 25.6: 春天支持 梁 . . . 865

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

25.2.1.7 例题 25.7: 皇后邮件 . . . 867
25.2.1.8 例题 25.8: 灵活性矩阵; 曲线泡沫 . . . 869
25.3 三瞬间方程式 . . . 872
25.3.1 例题 25.9: 连续 梁 . . . 875
25.3.2 例题 25.10: 连续 梁 . . . 875

26 武力在转移方面 878
26.1 引入 . . . 878
26.1.1 签约 . . . 878
26.1.2 分析方法 . . . 879
26.2 Axial Deformations 轴形变形 . . . 880
26.3 灵活 . . . 880
26.3.1 差异方程式 . . . 880
26.3.2 Nodal 终端力量为初步的压力 . . . 883
26.3.3 诺达等级力量为单元的灵活性 . . . 884
26.3.3.1 均匀分布的货物 . . . 884
26.3.3.2 集中负载 . . . 885

27 手中的坚固 887
27.1 引入 . . . 887
27.2 挠度; 直接解决方案 . . . 887
27.2.1 例子 . . . 889
27.2.1.1 例题 27.1: 彩色 梁 . . . 889
27.2.1.2 例题 27.2: 连续 梁 . . . 890
27.2.1.3 例题 27.3: 双间 梁 . . . 891
27.2.1.4 例题 27.4: 双螺旋 梁, 初始 挠度 . . . 892
27.2.1.5 例题 27.5: 框架 . . . 894
27.2.1.6 例题 27.6: 彩色盒子 . . . 896
27.3 瞬间分配 . . . 897
27.3.1 引入 . . . 897
27.3.1.1 例题 27.7: 连续 梁 . . . 900
27.4 Slope 挠度; 瞬间分配; Gauss-Seidel . . . 902
27.4.1 例题 27.8: Slope 挠度 / 瞬间分配 / Gauss-Seidel . . . 903

28 影响线 905
28.1 引入 . . . 905
28.2 程序 . . . 905
28.2.1 例题 28.1: 对一个简单支持的 梁 的影响线 . . . 906
28.2.2 例题 28.2: 簡單支持 梁 與超端 . . . 908
28.3 Mü 布雷斯拉夫原则 . . . 909
28.3.1 衍生品 . . . 909
28.3.1.1 例题 28.3: Müller-Breslau; Shear 影响线 . . . 910
28.3.1.2 例题 28.4: Müller-Breslau; 瞬间 影响线 . . . 911

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

29 二、灵活分析 **912**
29.1 引入 . . . 912
29.2 大型移动, 稳定 . . . 913
29.2.1 例题 29.1: 地质不稳定 . . . 913
29.2.2 例题 29.2: 荷载对灵活性变形的影响 . . . 914
29.2.3 例题 29.3: Cantilever Beam 的大漏洞 . . . 916
29.3 小动作, 不稳定 . . . 920
29.3.1 格式硬带 . . . 920
29.3.1.1 单栏系统 . . . 920
29.3.1.1.1 例题 29.4: 屈曲 兩個粘固 柱 . . . 922
29.3.2 连续系统 . . . 924
29.3.2.1 Euler 屈曲 加载 . . . 924
29.3.2.1.1 例题 29.5: 屈曲 的 折叠式 柱 . . . 925
29.3.2.1.2 例题 29.6: 屈曲 的固定 柱 . . . 926
29.3.2.1.3 例题 29.7: 屈曲 固定曲线 柱 . . . 928
29.3.2.1.4 例题 29.8: 柱 具有弹性支持 . . . 929
29.3.2.1.5 例题 29.9: 可限制 屈曲 . . . 931
29.3.2.1.6 例题 29.10: 水塔 . . . 932
29.3.2.2 与自由振动相似之处 . . . 934
29.3.2.3 有效长度因素 K . . . 935
29.3.2.4 无线列 . . . 938

30 索 结构 **941**
30.1 引入 . . . 941
30.2 集中负载 . . . 942
30.2.1 例题 30.1: 光学索 . . . 942
30.2.2 例题 30.2: 包含的光学索 . . . 944
30.2.3 例题 30.3: 索 甘道拉 . . . 945
30.3 分布的货物; . . . 946
30.3.1 平衡方程 . . . 946
30.3.2 qdx • 侧 荷载; 平板 . . . 947
30.3.2.1 地质学 . . . 947
30.3.2.2 内部力量 . . . 951
30.3.2.3 弹性伸展 . . . 952
30.3.2.4 相同的轴性强度 . . . 954
30.3.2.5 特殊案例: 垂直管道 . . . 956
30.3.2.5.1 例题 30.4: 包含 索 地质 . . . 956
30.3.2.5.2 例题 30.5: 包含 索 力量 . . . 957
30.3.2.5.3 例题 30.6: 盖伊德塔 . . . 958
30.3.2.5.4 例题 30.7: 关闭桥梁 . . . 960
30.3.2.5.5 例题 30.8: 不可延伸的 索; 温度 . . . 961
30.3.2.5.6 例题 30.9: 可扩展 索; sag . . . 961
30.3.2.5.7 例题 30.10: 可扩展 索; 热 . . . 962

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

30.3.2.5.8 例题 30.11: 可扩展 索; 前列 962
30.3.3 *qds* • 催眠 963
30.3.3.1 地质学 963
30.3.3.2 力量 965
30.3.3.3 加泰罗尼亚倾斜 965
30.3.3.3.1 例题 30.12: Sag 在一个倾斜的索 967
30.3.3.3.2 例题 30.13: Trolley 公交车电缆支持 967
30.3.4 平板和基于凯特纳的解决方案之间的比较 970
30.3.4.1 例题 30.14: 加泰罗尼亚 vs Parabola 972

31 马索尼亚档案的分析 (你的) 973
31.1 引入 973
31.2 一些历史记录 974
31.2.1 De la Hire; 1640 年至 1718 年 974
31.2.2 贝利多; 1698-1761 975
31.2.3 双胞胎; 1670-1744 978
31.2.4 丹尼西; 1698-1777 979
31.2.5 科隆布 1736-1806 979
31.2.6 莫塞利; 1801-1872 年 981
31.2.7 灵活的解决方案 981
31.2.7.1 卡斯蒂格利亚诺; 1847-1884 981
31.2.7.2 温克勒;1835 年至 1888 年 982
31.2.8 皮帕德,1891 年至 1969 年 982
31.2.8.1 例题 31.1: 荷载的失败; 胡萝卜的方法 985
31.3 管道的通用化方法; 香味 988
31.4 算法 992
31.5 最后评论 995
31.5.1 雅克 • 海曼,1925 年 995
31.5.2 Thrust 线 995
31.5.3 Thrust 线和 pippard 997

32 和曲线的 Be 999
32.1 循环档案 999
32.1.1 四个圆形弓 1000
32.1.1.1 爱迪的理论 1001
32.1.1.2 例子 1001
32.1.1.2.1 例题 32.1: 三根相关术语弓; 点负载; 分析 1001
32.1.1.2.2 例题 32.2: 四分之三的拱; 点荷载 1003
32.1.1.2.3 例题 32.3: 三根相关术语弓; 单一负载 1004
32.1.2 两张圆形弓 1006
32.1.3 无缝循环 拱 1006
32.1.3.1 例题 32.4: 无缝循环 拱 1007
32.1.4 通用解决方案 1014

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

32.1.4.1 衍生品 1014
32.1.4.1.1 中心 重力 1014
32.1.4.1.2 衍生品 1016
32.1.4.1.3 验证 1020
32.1.5 基于数学的解决方案 1021
32.2 最佳形状的拱 1021
32.2.1 例题 32.5: 完美的拱 1022
32.3 帕拉布利亚 1022
32.3.1 例子 1022
32.3.1.1 例题 32.6: 三角形 模拟 拱 1023
32.3.1.2 例题 32.7: 兩個垂直的平凡變量交叉部分 拱 1023
32.3.2 固定 拱 与同步 荷载 1027
32.3.2.1 例题 32.8: 无情的模拟 拱 1029
32.3.3 基础 调节和温度效应 1031
32.3.3.1 例题 32.9: 热 荷载 在 Parabolic 拱 上 1034
32.4 曲线 BAMS 1034
32.4.1 球旋转 1034
32.4.1.1 例题 32.10: 球旋转 1035
32.4.2 赫利科伊德 1037
32.4.2.1 地质学 1037
32.4.2.2 平衡 1038
32.4.2.2.1 例题 32.11: 拱; 点 荷载 1040

33 静态不定义拱的设计 **1042**
33.1 例题 33.1: 设计静态不定义的拱 1042
33.2 例题 33.2: 温度变化在一个 拱 1048

34 板块 **1051**
34.1 厚板理论: 雷斯纳 • 明德林 1051
34.1.1 电影关系 1051
34.1.2 宪法关系 1053
34.1.3 平衡 1054
34.2 薄 板 理论:Kirchhoff 1056
34.2.0.1 例题 34.1: 薄相反厚 板 理想化 1056
34.2.1 基本关系 1057
34.2.2 差异方程式 1058
34.2.3 压力 1058
34.2.3.1 例题 34.2: 恢复 板 瞬间结果的压力 1059
34.2.3.2 例题 34.3: 简单支持的平方 板 在统一的 压力 1060
34.2.3.3 例题 34.4: 板 挠度 对厚度的敏感性 1061
34.2.4 循环板 1061
34.2.4.1 例题 34.5: 圆形 板 模型 压力 1065
34.2.5 变量 表述 1065

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

34.3 总结 1066

35 沙特 1069

35.1 一般理论 1069
35.1.1 定义 1069
35.1.2 假设 1072
35.1.3 强度 位移 关系 1073
35.1.3.1 平衡 1073
35.1.3.2 平衡 方程式的完整集 1080
35.1.3.3 变形协调 1080
35.1.3.4 总结 1084
35.1.3.5 压力压力 1084
35.1.3.5.1 应力-应变 1084
35.1.3.5.2 Sress 力量 1086
35.1.3.6 最终表达 (武力在转移方面) 1087
35.1.4 简化 1087
35.1.4.1 Shallow Shells 饰 1089
35.1.4.1.1 假设 1089
35.1.4.1.2 假设的应用 1089
35.1.4.1.3 深度梁方程式 1090
35.1.4.1.4 Slab 方程式 1092
35.1.4.1.5 浅壳方程 1092
35.1.4.2 膜理论 1093
35.1.4.2.1 假设 1093
35.1.4.2.2 理论 1093
35.1.4.2.3 分类 1093
35.1.4.2.4 专业化 1094
35.2 单桶的分析 (圆形圆形 壳) 1095
35.2.1 引入 1095
35.2.2 膜理论 1098
35.2.2.1 应力 结果 1098
35.2.2.1.1 错误 1101
35.2.2.1.2 修正 1101
35.2.2.2 转移 1102
35.2.3 Shallow Shell 理论 1106
35.2.3.1 平衡的方程式 1106
35.2.3.2 表述 1107
35.2.3.2.1 独特的单一 荷载 解决方案 1109
35.2.3.2.2 标签: membrane 五 *S* Shallow 壳 1110
35.2.3.2.3 例题 35.1: 膜的比较 & 壳 1113
35.2.3.3 一般解决方案 1113
35.2.3.3.1 位移 w 1113

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

35.2.3.3.2 M_ϕ . . . 1116
35.2.3.3.3 其他条款; 程序 . . . 1117
35.3 静态不定义的 . . . 1119
35.3.1 艾德 • 贝姆 . . . 1119
35.3.1.1 垂直边缘线 . . . 1120
35.3.1.2 垂直边缘 . . . 1123
35.3.2 首頁 〉外文書 梁 . . . 1123
35.3.2.1 例题 35.2: 圆形设计 壳 . . . 1124
35.3.3 MATLAB® 代码和数值例子 . . . 1136

36 动态 I **1137**
36.1 哲学基础 . . . 1137
36.2 什么时候 动力分析 被警告 . . . 1138
36.3 基本原则 . . . 1139
36.3.1 d'Alembert 的原理和动态平衡 . . . 1139
36.3.2 自由的单一学位奥斯基拉特 . . . 1139
36.3.3 固有频率和期限 . . . 1140
36.3.3.1 例题 36.1: 计算机 $\omega_n, T_n,$ 和 f_n 为 SDOF 系统 . . . 1140
36.3.4 Damping 和 阻尼比 . . . 1141
36.4 自由振动 . . . 1142
36.4.1 无缝自由振动 . . . 1142
36.4.2 蒸发自由振动 . . . 1143
36.4.3 逻辑衰退 . . . 1143
36.4.3.1 例题 36.2: 从 Logarithmic Decreement 中估计 . . . 1144
36.5 强迫振动: 和谐的兴奋 . . . 1145
36.5.1 无情的和谐反应 . . . 1145
36.5.2 和谐的反应 . . . 1146
36.5.2.1 例题 36.3: 和谐反应: 增强和阶段 . . . 1146
36.6 对仲裁负载的回应 . . . 1147
36.6.1 冲动反应与单位冲动 . . . 1147
36.6.1.1 例题 36.4: 蒸发 SDOF 系统的单元冲动反应 . . . 1148
36.6.2 杜哈梅尔综合 . . . 1149
36.6.2.1 例题 36.5: 突然步 荷载: 动态增强因素的 2 . . . 1149
36.6.2.2 例题 36.6: 直角脉冲 荷载 和冲击频谱 . . . 1150
36.6.3 四级分析与频率反应 . . . 1152
36.6.3.1 例题 36.7: 频率回应定期机器兩個和諧的力量 . . . 1153
36.7 支座 兴奋和 地震 回复 . . . 1154
36.7.1 运动方程 为基础兴奋 . . . 1154
36.7.2 回复 光景 . . . 1155
36.7.2.1 例题 36.8: 使用响应频谱的单层框架的地震设计 . . . 1156
36.8 多级自由制度 . . . 1157
36.8.1 动作方程式 . . . 1157
36.8.2 免费振动: 自然模式 . . . 1157

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

36.8.3 模型分析 1158
36.8.4 地震 回复中的代码参与 1159
36.8.4.1 例题 36.9: 3DOF 板建筑在地震负载下的模块分析 1159
36.9 连续系统 1161
36.9.1 波的轴振动 1161
36.9.2 转向的振动 Beams 1162
36.9.2.1 例题 36.10: 固有频率 的 钢材 脚桥和步行者反射检查 1162
36.10 非线性动态 1163
36.10.1非线性来源 1164
36.10.2催眠和能源分散 1164
36.10.2.1例题 36.11: 相当于 黏性阻尼 从双重催眠路径 1165
36.10.3Ductility 和 Capacity Design 1166
36.10.3.1例题 36.12: 二元性需求和强力减少为一钢筋混凝土 框架 . . 1166
36.11 实用考虑 1167
36.11.1沉浸在现实结构中 1167
36.11.2土-结构相互作用 1168
36.11.3质量 Dampers 混凝土 1168
36.11.4例题 36.13: 设计一台突发的质量蒸汽机, 用于高楼 1168
36.11.5基础隔震 1169
36.11.6例题 36.14: 建造一座孤立的医院建筑 1170
36.12 关闭评论 1171
36.12.1实践者对反应谱方法的警告 1171
36.12.2下一篇: 线性理论的限制 1171

37 单元 结构设计 **1172**
37.1 引入 1172
37.1.1 分析与设计; 一项异常过程 1172
37.1.2 安全 1172
37.2 可用的应力设计 (ASD) 1174
37.2.1 例题 37.1: ASD; 灵活性 1175
37.3 荷载 和抵抗因素设计 (LRFD) 1175
37.4 lrfd 基于设计代码的例子 1178
37.4.1 应用: R/C 梁 分区的塑料强度 1179
37.4.1.1 例题 37.2: 极限强度; 评论 1183
37.4.1.2 例题 37.3: 极限强度; 设计 I 1184
37.4.1.3 例题 37.4: 极限强度; 设计 II 1184
37.4.1.4 例题 37.5: 精确分析 1185
37.4.2 应用:R/C 列的塑料强度 1187
37.4.2.1 例题 37.6: R/C 柱 等。c 已知 1191
37.4.2.2 例题 37.7: R/C 柱 等。e 已知 1193
37.4.3 预应力混凝土 1196
37.4.3.1 例题 37.8: 案例研究:Walnut Lane Bridge 1197
37.5 性能基工程 (PBE) 1200

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

38 Fermi 解决方案 (接近分析) 1202
38.1 内部力量 . . . 1202
38.1.1 破碎的形状 & 影响点 . . . 1202
38.1.2 梁 时刻在 支座 的强度方面 . . . 1206
38.1.3 分析方法 . . . 1207
38.1.3.1 垂直负载 . . . 1207
38.1.3.2 水平负载 . . . 1210
38.1.3.2.1 门户方法 . . . 1210
38.1.3.2.1.1 例题 38.1: 门户方法; 低升楼 . . . 1212
38.1.3.2.1.2 例题 38.2: 马特拉布解决方案 . . . 1224
38.1.3.2.2 Cantilever 方法 . . . 1225
38.1.3.2.2.1 例题 38.3: Cantilever 方法; 高升建筑 . . . 1226
38.2 结构性反应 . . . 1227
38.2.1 Shaft 子系统 . . . 1227
38.2.1.1 例题 38.4: Shaft 子系统 . . . 1228
38.2.2 墙 . . . 1229
38.2.2.1 例题 38.5: 混凝土 Shear 墙壁 . . . 1229
38.2.3 威胁的墙壁 . . . 1231
38.2.3.1 例题 38.6: 威胁的墙壁 . . . 1232
38.2.4 侧面缺陷 . . . 1232
38.2.4.1 短墙 . . . 1233
38.2.4.2 高墙 . . . 1233
38.2.4.3 墙壁和线条 . . . 1234
38.2.4.4 框架 . . . 1234
38.2.4.4.1 例题 38.7: 建造大约转 挠度 . . . 1237

39 初步设计 1241
39.1 例题 39.1: 杜勒斯机场 . . . 1241
39.2 例题 39.2: 艾菲尔塔 . . . 1247
39.3 例题 39.3: 杂志一般 . . . 1254
39.4 例题 39.4: 乔治华盛顿桥 . . . 1258
39.5 例题 39.5: 设计双环拱 . . . 1264
39.6 例题 39.6: 温度变化在一个 拱 . . . 1273
39.7 例题 39.7: 平凡的拱与分裂变异 *I* . . . 1275

III 进阶：数值方法 1278

40 引入 直接刚度法 1279
40.1 為什麼 矩阵 结构分析? . . . 1279
40.2 结构理想化 . . . 1280
40.3 签约 . . . 1282

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

40.4 协调系统 . . . 1282
40.5 灵活性 *vs.* 精力 . . . 1282
40.6 自由度 . . . 1283
40.7 静态 *vs.* 动画不确定性 . . . 1286
40.8 结构分析 / 机械; 一个 边值问题 . . . 1286

41 单元 密度矩阵 $\mathbf{k}^{(e)}$ 1288
41.1 密度定义 . . . 1288
41.2 桁架 单元 . . . 1289
41.3 标签: Euler-Bernoulli . . . 1290
41.4 2D 框架 单元 (a.k.a beam 列元素) . . . 1290
41.5 網絡 单元 . . . 1291
41.6 3D Beam 列元素 . . . 1291
41.7 泰莫森科 梁 . . . 1292
41.7.1 额外的歪曲 . . . 1294
41.7.2 改變 单元 刚度矩阵 . . . 1295
41.8 布拉索夫 扭转 . . . 1296

42 密度方法; I 正统结构 1299
42.1 引入 . . . 1299
42.2 理论 . . . 1299
42.2.1 灵活性重复 . . . 1300
42.2.2 直接刚度法 . . . 1300
42.2.3 从 单元 到结构 . . . 1301
42.3 例子 . . . 1302
42.3.1 例题 42.1: 正统 梁 . . . 1302
42.3.2 例题 42.2: 正统 框架 . . . 1304
42.3.3 例题 42.3: 网格 . . . 1311
42.3.4 例题 42.4: 混合式 框架 . . . 1315
42.3.5 例题 42.5: 混合网络 . . . 1319

43 转型矩阵 1324
43.1 引入 . . . 1324
43.2 某些理论 . . . 1325
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ 关系 . . . 1325
43.2.2 指向科森 . . . 1326
43.3 转型矩阵为单元框架 . . . 1328
43.3.1 2D 案例 . . . 1328
43.3.1.1 2D 框架 . . . 1328
43.3.1.2 网格 . . . 1329
43.3.1.3 布拉索夫 梁 . . . 1330
43.3.1.4 2D 桁架 . . . 1331
43.3.2 3D 框架 . . . 1331
43.3.3 Eulerian 旋转 . . . 1332

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

43.3.4 单元 轴 1334
43.3.5 3D 桁架 1336

44 直接刚度法 **1338**
44.1 目标 1338
44.2 理论 1338
44.3 差异化 1341
44.3.1 无限制 vs 有限 自由度 1341
44.3.2 结构性差异化 1341
44.4 计算机实施 1342
44.4.1 边界条件, [id] 矩阵 1342
44.4.2 **LM** 向量 1343
44.4.3 全球 刚度矩阵 的集合 1345
44.4.4 步骤程序 1345
44.5 例子 1346
44.5.1 例题 44.1: 框架 1347
44.5.1.1 初步 1347
44.5.2 例题 44.3: 桁架 1358

45 刚度矩阵的数学特性; 计算问题 **1362**
45.1 低调的矩阵 1362
45.1.1 相同价值 1362
45.1.1.1 自我价值的物理解释 1365
45.1.2 条件号 1366
45.1.3 无条件的硬度矩阵 1367
45.1.3.1 例题 45.1: 无条件 1370
45.2 数值 评论 1371
45.2.1 逆转 vs 分裂 1371
45.2.2 诺达数 1372

46 特殊主题 **1375**
46.1 混凝土 / Substructuring 1375
46.2 静态和电影学的方程式 1376
46.2.1 静态 矩阵 $\mathcal{B}$ 1376
46.2.1.1 衍生品 1376
46.2.1.2 静态定义 1376
46.2.1.2.1 例题 46.1: 静态定义 truss statics matrix 1377
46.2.1.2.2 例题 46.2: 梁 静态 矩阵 1378
46.2.1.3 静态不确定 1379
46.2.1.3.1 例题 46.3: 静态不定义 桁架 静体 矩阵 1379
46.2.1.4 解放力量的识别 1381
46.2.1.4.1 例题 46.4: 解放力量的选择 1381
46.2.1.5 电影不稳定 1383
46.2.2 電影 矩阵 $\mathcal{A}$ 1383

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

46.2.2.1 例题 46.5: Kinematics Matrix: truss 例子 1385
46.2.3 静态化学 矩阵 关系 1385
46.2.3.1 静态定义 1386
46.2.3.2 静态不确定 1387
46.3 通过静态逆转的动画关系 矩阵 1387
46.4 密度灵活性关系 1388
46.4.1 从稳定到灵活性 1388
46.4.1.1 例题 46.6: 柔度矩阵 1389
46.4.2 从灵活性到坚固性 1389
46.4.2.1 例题 46.7: 灵活性到坚固 1391
46.4.2.2 例题 46.8: 曲线元素的密度矩阵 1392
46.4.3 灵活性与固态方法之间的双重性 1394
46.5 合并的转型方法 **K** 1394
46.5.1 例题 46.9: 合并转型 1395
46.5.2 例题 46.10: 框架的合成转型 1397
46.6 特殊 单元 1399
46.6.1 强烈的折扣; 1399
46.6.2 半固体射击 1402
46.6.3 变量十字段 1407
46.7 瞬间框中的侧驱动的来源 1409

47 机械中的变量计算:Euler-Lagrange 框架 **1421**
47.1 引入 1421
47.2 Euler 1422
47.2.1 初步 1422
47.2.2 不同形式的 $\delta\Pi$ 1424
47.2.3 欧拉方程 1425
47.2.4 $\delta\Pi$ 1426
47.2.5 观察 1426
47.2.6 边界条件 1426
47.2.6.1 例题 47.1: 标签:Axial 1428
47.2.6.2 例题 47.2: 标签: flexure 1429
47.3 总数 势能 原则 1430
47.4 汉密尔顿 1433
47.4.1 动态; Euler/Lagrange 1433
47.4.1.1 差异制度 1433
47.4.1.2 连续系统 1435
47.4.2 例题 47.3: 汉密尔顿 1437
47.5 Hu-Washizu 变量原则 1440
47.6 “色情名称” 图表 1443
47.6.1 德 • 阿伦伯特的原则 1443
47.6.2 汉密尔顿的平衡 1444
47.6.3 拉格兰的平衡 1444

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

48 结构分析中的变量和能源原则 1448
48.1 引入 . . . 1448
48.1.1 热力学 . . . 1448
48.1.2 基本关系 . . . 1449
48.1.3 定义 . . . 1450
48.1.4 真实的条款 . . . 1450
48.1.5 虚拟表达式 . . . 1452
48.1.6 注意事项 . . . 1452
48.1.6.1 内部工作與 应变能 . . . 1452
48.1.6.2 外部工作独立之路 . . . 1453
48.1.7 应用程序 1D 单元 . . . 1454
48.1.7.1 补充能量, 线性弹性 U^* . . . 1454
48.1.7.2 能量, 线性弹性 U . . . 1455
48.1.7.3 虚拟 应变能 δU^* . . . 1455
48.1.7.4 虚拟 应变能 δU . . . 1457
48.1.8 关于 VW 和 CVW 的概述 . . . 1459
48.2 接近 . . . 1460
48.3 虚功 . . . 1460
48.3.1 补充 虚功 的原则 (PCVW) . . . 1460
48.3.1.1 衍生品 . . . 1461
48.3.1.2 例题 48.1: PCVW, 粘贴的梁 . . . 1463
48.3.2 例题 48.2: 四半循环 拱 . . . 1464
48.3.3 虚功原理 (PVW) . . . 1466
48.3.3.1 衍生品 . . . 1466
48.3.3.2 例题 48.3: PVW, 粘贴的 Cantilevered 梁 . . . 1468
48.4 势能的原则 . . . 1470
48.4.1 总数 势能 的原则 (PTPE) . . . 1470
48.4.1.1 衍生品 . . . 1470
48.4.1.2 例题 48.4: PTPE, 春天和质量 . . . 1472
48.4.1.3 例题 48.5: PTPE; 粘贴 梁 与变量 I . . . 1472
48.4.2 总补充 势能 的原则 (PTCPE) . . . 1473
48.5 卡斯蒂格利亚诺的理论 . . . 1473
48.5.1 第一理论 . . . 1473
48.5.1.1 例题 48.6: 非线性弹性 桁架 . . . 1475
48.5.2 第二理论 . . . 1476
48.5.2.1 例题 48.7: 卡斯蒂格利亚诺 2; cantilevered 梁 . . . 1477
48.5.2.2 例题 48.8: 卡斯蒂格利亚诺 2; 使用加斯蒂里亚诺的第二理论, 单一负载的喷雾的破裂 . . . 1477
48.5.2.3 例题 48.9: 卡斯蒂格利亚诺 2、非线性桁架 . . . 1478
48.5.2.4 例题 48.10: 卡斯蒂格利亚诺 2 号, 春天挠度 . . . 1479
48.6 雷莱里茨方法 . . . 1479
48.6.1 衍生品 . . . 1479

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

48.6.1.1 例题 48.11: Rayleigh Ritz 均匀充电 仅支持 梁 1480
48.6.1.2 例题 48.12: 变量方法 1481
48.7 总结 1488
49 干扰功能 **1492**
49.1 引入 1492
49.1.1 形状功能的特点 1492
49.1.2 帕斯卡的三角形 1493
49.1.3 协调系统 1494
49.1.3.1 卡特西亚 1494
49.1.3.2 自然 1494
49.1.3.3 三角形 1495
49.1.4 连续性 1498
49.2 形状功能 1499
49.2.1 直播 表述 1499
49.2.1.1 桁架 单元; 线性 1499
49.2.1.2 一般化 1500
49.2.1.3 永久 应变 三角形 单元 1501
49.2.1.4 直角二重 单元 1502
49.2.1.5 布里克三角形 单元 1503
49.2.2 Lagrangian Interpolation 功能 1505
49.2.2.1 四角形 1505
49.2.2.2 三角形 1506
49.2.2.3 信条元素; 四角形 1507
49.2.2.4 梁 1508
49.2.3 赫米蒂亚交叉功能 1510
49.2.3.1 梁 格式功能修订 1511
49.2.3.2 四方 单元 1512
49.2.3.2.1 四方线路 (q4) 1512
49.2.3.2.2 四角形方位 1513
49.2.3.2.2.1 直径 单元 (q8) 1514
49.2.3.2.2.2 拉格兰单元 (q9) 1515
49.2.3.3 变量 (希拉里) 单元 1518
49.2.3.4 三角形 单元 (t6) 1518
50 线性 单元表述 **1521**
50.1 引入 1521
50.2 结尾 单元 1522
50.2.1 引入 1522
50.2.2 应变 位移 关系 1522
50.2.2.1 Axial 成员 1522
50.2.2.2 灵活成员 1523
50.2.3 虚拟位移和线条 1523

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

50.2.4 单元 刚度矩阵 表述 1523
50.2.5 应力 恢复 1525
50.3 应用 1525
50.3.1 桁架 单元 1525
50.3.2 灵活 单元 1526
50.4 一般要求 单元 1526
50.5 差异化错误和转换率 1528
50.6 基于 势能 的最低解决方案的低限性 1529
50.7 平衡 和 变形协调 在解决方案中 1529

51 以色列 单元 1532
51.1 引入 1532
51.2 单元表述 1534
51.2.1 酒吧 单元 1534
51.2.2 四方 (q4) • 详细 表述 1535
51.2.3 三角形 单元 1539
51.2.3.1 T3 三角形 1539
51.2.3.2 T6 三角形 1541
51.2.4 例题 51.1: 雅各比亚运营商 1542
51.3 数值积分 1543
51.3.1 纽顿评论 1544
51.3.2 Gauss-Legendre 四角形 1546
51.3.2.1 传奇聚合物 1547
51.3.2.2 Gauss-Legendre 四角形 $n = 2$ 1548
51.3.3 直角和普里斯姆地区 1549
51.3.4 三角区 1549
51.4 应力恢复; 节点压力 1549
51.5 Nodal 等级负载 1552
51.5.1 重力 荷载 1552
51.5.2 特拉克 荷载 1553
51.5.3 初始压力/压力; 热 荷载 1554
51.5.4 集成命令 1555
51.5.4.1 完整的整合 1555
51.5.4.2 减少整合 1556
51.5.4.3 选择性减少融入 1557
51.6 寄生虫/不兼容的单元 1557
51.6.1 Q4 问题 1557
51.6.2 Q6 答案 1558
51.6.3 Qm6, 进一步改进 1558
51.7 旋转 D.O.F 1559

52 重量残留方法 1561
52.1 引入 1561

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

52.2 一般 表述 1562
52.2.1 不同运营商 1562
52.2.1.1 例题 52.1: 检查 1D 轴成员的同步性和积极定义性 1562
52.2.2 剩余 表述 1563
52.3 重量残留方法 1565
52.3.1 点配置方法 1565
52.3.2 Subdomain 配置方法 1565
52.3.3 最小四方方法 1565
52.3.4 伽辽金法 1565
52.3.4.1 例题 52.2: 强烈的振动 1566
52.4 应用程序 伽辽金法 到 3D 弹性 问题 1567
52.4.1 弱形的衍生 1568
52.4.2 信任差异化 1570
52.4.2.1 例题 52.3: 刚度矩阵 的 梁 单元 1571
52.4.2.2 例题 52.4: 热转换 1573

53 动态二 1576
53.1 引入 1577
53.2 框架 理想化为 动力分析 1577
53.2.1 轴心 *vs* 灵活性 1577
53.2.2 模型 1578
53.2.2.1 例题 53.1: 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应 . . . 1581
53.3 问题 表述 1582
53.3.1 变量 表述 1582
53.3.2 质量 代表性 1583
53.3.3 冲浪 1585
53.3.3.1 例题 53.2: 瑞利阻尼 加密对一层建筑的比例 1586
53.3.3.2 例题 53.3: 解析基线: 从一般初始条件自由振动 1587
53.3.4 数值技术:Euler 方法 1588
53.3.4.1 例题 53.4: Euler 方法 1589
53.4 时间差异化 1589
53.4.1 包容性 1589
53.4.1.1 纽马克的方法 1589
53.4.1.1.1 衍生品 1589
53.4.1.1.2 纽约 β 暗示方法 1592
53.4.1.2 希尔伯 - 胡格斯 - 泰勒方法 1593
53.4.2 明确时间集成 1595
53.4.2.1 线性系统 1595
53.4.2.2 非线性系统 1598
53.5 数值方法 为 动力分析 1598
53.5.1 中央区别方法 1598
53.5.2 例题 53.5: 中央差异稳定时间步骤 1599
53.5.3 纽马克 - 贝塔方法 1599

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

53.5.4 超级模式 vs. 直接集成 . . . 1599
53.6 连续系统 . . . 1600
53.6.1 波的轴振动 . . . 1600
53.6.1.1 例题 53.6: 波速和钢材 tie-rod 的轴自然频率 . . . 1601
53.6.2 转向的振动 Beams . . . 1602
53.7 非线性动态 . . . 1602
53.7.1 非线性来源 . . . 1602
53.7.2 Ductility 和 Capacity Design . . . 1603
53.8 实用考虑 . . . 1603
53.8.1 沉浸在现实结构中 . . . 1603
53.8.2 土-结构相互作用 . . . 1604
53.8.3 质量 Dampers 混凝土 . . . 1604
53.8.4 基础隔震 . . . 1604
53.9 总结 . . . 1604

IV 高级：非线性与其他专题 1606

54 引入 **1607**
54.1 引入 . . . 1607
54.1.1 非线性来源 . . . 1607
54.1.2 为什麼 非线性分析 . . . 1608
54.2 结构非线性分析类型 . . . 1610
54.3 增長 荷载 / 位移 . . . 1612
54.4 安全 . . . 1613
54.4.1 术语 . . . 1613
54.4.2 安全 & 负载 . . . 1613
54.5 设计代码 . . . 1614
54.5.1 引入 . . . 1614
54.5.2 进化: 古代 . . . 1615
54.5.2.1 梅索波塔米亚; 哈穆拉比 . . . 1615
54.5.2.2 罗马; 维特鲁维亚 . . . 1616
54.5.3 现代时代 . . . 1616
54.5.3.1 可用的应力设计,ASD . . . 1618
54.5.3.2 荷载 抵抗和因素设计,LRFD . . . 1618
54.5.3.3 基于性能 地震工程 . . . 1618
54.5.4 总结 . . . 1619

55 塑性 I; 纤维 & 连续 (為 有限元分析) **1622**
55.1 引入 . . . 1622
55.2 塑料生产条件 . . . 1623
55.2.1 压力 独立模型 . . . 1623

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

55.2.2 压力依赖型号 1625
55.3 实验室观察 1626
55.3.1 金属 1626
55.3.2 混凝土 1627
55.4 微观失败 1628
55.4.1 化学债券 1628
55.4.2 杜克特和布里特的失败 1628
55.4.3 散步 1629
55.5 塑性的基本内容 1630
55.5.1 引入 1630
55.5.2 弹性模量 直播 1631
55.5.2.1 一般化衍生 1631
55.5.2.1.1 利率功能; 以色列硬化模型 1631
55.5.2.1.2 流规则 1631
55.5.2.1.2.1 库恩 • 图克的条件 1633
55.5.2.1.3 一致性条件 1633
55.5.2.1.4 模块 1633
55.5.2.2 Tangent Modulus 工程 1634
55.5.2.3 例题 55.1: 模块 1635

56 塑性 II; 部分: 1638
56.1 引入 1638
56.2 理论框架: 假设和关键结果 1638
56.3 时刻 - 曲率; $M - \Phi$ 1640
56.3.1 从现在 曲率 关系 1641
56.3.1.1 例题 56.1: 非线性分区分析; 解析 1641
56.3.2 压力与流动关系 1643
56.3.2.1 例题 56.2: 平板; 钢材 1644
56.3.2.2 例题 56.3: 平板; 混凝土/ACI 1648
56.4 时刻 曲率, 通用化 1650
56.4.1 解析 方法 1651
56.4.1.1 例题 56.4: 时刻 曲率 的 I R/C 部分 1653
56.4.1.2 互动图表 $M - N$ 1658
56.4.2 数值方法 1659

57 塑性 III; 结构: Yield Lines 1663
57.1 引入 1663
57.2 线性 单元 (布, 框架) 1665
57.2.1 动画: 上限 1665
57.2.1.1 例题 57.1: 固定 梁; 中心 荷载 1667
57.2.1.2 例题 57.2: 固定 梁; 折扣 荷载 1667
57.2.1.3 例题 57.3: 连续 梁 1668
57.2.1.4 例题 57.4: 正统 框架 1668

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

57.2.1.5 例题 57.5: 包含 框架 1669
57.2.2 静态; 下限 1671
57.2.2.1 例题 57.6: 提交的 Cantiliver I 1673
57.2.2.2 例题 57.7: 提交的 Cantiliver II 1673
57.2.2.3 例题 57.8: 固定 梁 1674
57.2.2.4 例题 57.9: 包含 框架 1675
57.3 编程 单元 (弱点) 1679
57.3.1 标签: 下限 1680
57.3.1.1 例题 57.10: 广场弱点 1680
57.3.2 主条目: 上限 1681
57.3.2.1 例题 57.11: 直角弱点 1683
57.4 静力推覆分析 1684
57.5 低边界分析与 1685
57.5.1 静力推覆分析 1685
57.5.2 彩色 塑性 1688

58 损伤力学 **1691**
58.1 由 ChatGPT 提供 1691
58.1.1 动机与物理基础 (~1.5 页) 1691
58.2 热力框架 (~2 页) 1691
58.3 斯卡拉的异常损害: 马扎尔模型 (~4 页) 1691
58.4 压力 - 压缩无形和单方面效果 (~2 页) 1691
58.5 破坏 - 塑性 结合 (~2 页) 1691
58.6 规律和客观性 (~3 页) 1692
58.7 應用於 梁 和 柱 单元 (~3 页) 1692
58.8 参数识别和实用指南 (~1.5 页) 1692
58.9 图书馆笔记及进一步阅读 (~0.5 页) 1692

59 非线性分析; 材料 **1693**
59.1 数值 根找到 1693
59.1.1 纽顿方法 1694
59.1.1.1 引入 1694
59.1.1.2 泰勒系列和线性化 1694
59.1.1.2.1 例题 59.1: 纽顿的方法, 斯卡拉 1696
59.1.1.3 转型和错误估计 1698
59.1.1.4 最后评论 1699
59.1.1.4.1 例题 59.2: 纽顿的方法; 向量 1699
59.1.2 秘密方法 1700
59.1.3 解释 1701
59.2 与 结构力学 的关系; 随机 1702
59.3 集成方法 1703
59.3.1 荷载 控制 1704
59.3.1.1 Newton-raphson / 压力硬度方法 1704

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

59.3.1.2 改造新顿拉夫森 1707
59.3.1.3 西安 • 纽顿 1707
59.3.1.4 转型标准 1708
59.3.1.5 总结表 1709
59.3.2 位移 控制 1711

60 非线性分析; 地质 **1715**
60.1 地质 刚度矩阵 1715
60.1.1 衍生品 1716
60.1.1.1 弱形 1716
60.1.1.2 应变 1716
60.1.1.3 内部 应变能 1717
60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ 1717
60.1.2 弹性不稳定性; 二进制分析 1718
60.1.2.1 例题 60.1: 柱 屈曲 1719
60.1.2.2 例题 60.2: 框架 屈曲; Matlab 解决方案 1721
60.1.2.3 例题 60.3: 框架 屈曲; 数学解决方案 1724
60.1.2.4 例题 60.4: 荷载对灵活性变形的影响 1724
60.2 增加明确分析 1727
60.2.1 例题 60.5: Cantilever Beam 的大漏洞 1729
60.3 $P-\Delta$ 重定向 1733
60.3.1 例题 60.6: 包装负载无 $\mathbf{K}_{geom}$ 1734

61 非线性; 单元表述 **1737**
61.1 引入 1737
61.2 桁架 单元 1738
61.2.1 协调系统 2D 桁架 单元 1739
61.2.2 国家决心 1739
61.3 Beam 列元素的定义 1740
61.3.1 基于 Stiffness 的 2D Beam 列元素 1740
61.3.1.1 基于密度的 2D be 列元素的协调系统 1742
61.3.1.2 国家决心 1744
61.3.1.3 “隐藏” 错误 1746
61.3.1.4 非线性分析 使用基于固态的方法 1748
61.4 层/纤维部分 1750
61.4.1 灵活性方法 2D beam-column element 1753
61.4.1.1 以灵活性为基础的 2D be 列元素的协调系统 1756
61.4.1.2 国家决心 1757
61.4.1.2.1 没有单元级别的调节 1758
61.4.1.2.2 与纽顿-拉夫森在单元级的直径 1760
61.4.1.3 非线性分析 使用基于灵活性的方法 1764
61.4.1.3.1 没有单元级别的调节 1764
61.4.1.3.2 与新顿-拉夫森在单元级的振动曲线 1767

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

61.4.2 精力 *vs.* 基于灵活性 单元 1771
61.5 零长度 2D 单元表述 1775
61.5.1 协调系统在零长度 2D 单元 1775
61.5.2 单元 状态定义 1776
61.6 零长度部分 单元 1779
61.6.1 刚度矩阵 1779
61.6.2 协调系统 1780
61.6.3 单元 状态定义 1780
61.7 数值积分 1783
61.8 单元 力量 1783

62 分布式和折叠式塑性的宪法模型 1785
62.1 引入 1785
62.1.1 线性热量弹性 1786
62.1.2 希腊模型 1787
62.2 分布 塑性 1787
62.2.1 钢材 模型 1787
62.2.1.1 引入 1787
62.2.1.2 双向模型与以色列硬化 1789
62.2.1.2.1 紧张关系 1789
62.2.1.2.2 二进制模型的定义 1790
62.2.1.3 Menegotto - 色彩模型 1790
62.2.2 混凝土 模型 1798
62.2.2.1 封锁的影响 1798
62.2.2.2 改造 Kent 和 Park 模型 1800
62.2.2.2.1 紧张关系 1800
62.2.2.2.2 改造的 kent 和 park 模型 1807
62.2.3 Anisotropic 损害模型与有效的损害和硬度恢复 1810
62.2.3.1 宪法模型 1810
62.2.3.2 多纤维 表述 1812
62.2.3.3 定义 anisotropic 损害模型 1813
62.2.3.3.1 压力负载: 1813
62.2.3.3.2 压缩充电: 1814
62.2.3.4 安尼斯特洛普损伤模型与永久性线条 1820
62.2.3.4.1 统一数值系统 1820
62.2.4 邦德斯利普 1824
62.2.5 零长度部分 单元 1825
62.3 彩色 塑性 1828
62.3.1 塑料长度 1828
62.3.1.1 塑料粘贴的潜在位置 1829
62.3.1.2 曲率的变形 ($\Delta(\phi)$) 1829
62.3.1.3 钢筋混凝土 有效的 惯性矩 和 曲率 1830
62.3.1.4 塑性铰 长度的变形 1831

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

62.3.1.4.1 钢筋混凝土 1831
62.3.1.4.2 钢材 1835
62.3.1.5 例题 62.1: 塑性铰 在一个 钢材 柱 1836
62.3.2 Shear 失败模式 (极限状态 材料) 1837
62.3.2.1 引入 1837
62.3.2.2 Shear 极限状态 模型 1837
62.3.3 Ibarra 包含能源分散的歇斯底里模型 1840
62.3.3.1 催眠模型 1844
62.3.3.1.1 顶级模型 1845
62.3.3.1.2 Pinching 模型 1846
62.3.3.2 强度衰退模式 1851
62.3.3.2.1 基本强度衰退模式 1853
62.3.3.2.2 后覆盖强度衰退模式 1854
62.3.3.2.3 解除硬度衰退模式 1856
62.3.3.2.4 加速重新充电强度衰退模式 1857
62.3.3.3 总结 1858
62.3.4 Ghannoum 的模型 1858
62.3.4.1 背部曲线 1858
62.3.4.2 循环行为 1859

63 科学与艺术的终端单元模型 1862
63.1 引入 1862
63.1.1 完成 单元 按摩/分析验证 1865
63.1.2 模型验证和验证的概念 1865
63.2 混合 1866
63.2.1 马克思 单元 1867
63.2.1.1 例题 63.1: 柱 模型 1872
63.2.1.2 例题 63.2: 梁 模型 1873
63.2.2 截面 1873
63.2.3 “Pick 和 Stick” 1874
63.2.4 结论评论 1874
63.3 恶化参数定义 1875
63.3.1 定义 1875
63.3.1.1 参数识别 1876
63.3.2 数据库模型参数 1876
63.3.2.1 伯利 / 伯里 1876
63.3.2.1.1 柱 属性 1876
63.3.2.1.2 灵活能力的概述 1881
63.3.2.1.3 例子 1881
63.3.2.2 斯坦福 / 利格诺斯 1882
63.3.2.3 UTSA / 加诺姆 1884
63.3.2.4 终端 单元/Dolati 1884
63.3.2.5 ACI 437-A 1884

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Intermezzo: 从前进分析到参数识别 1885

64 数据与疑问: 不确定性和敏感性分析 1887
64.1 引入 . . . 1887
64.2 数据质量与疑问来源 . . . 1888
64.3 不确定性量化与分析 . . . 1888
64.3.1 输入不确定性特征化 . . . 1889
64.3.1.1 不确定性类型 . . . 1889
64.3.1.2 数学代表性 . . . 1889
64.3.2 依赖与相关样品 . . . 1889
64.3.2.1 Covariance 和 Correlation . . . 1890
64.3.2.1.0.1 例题 64.1: 相同性 矩阵 . . . 1890
64.3.2.2 太空科瓦里安 . . . 1891
64.3.2.3 暂时的封锁 . . . 1891
64.3.2.4 生成相关样品 . . . 1892
64.3.3 不确定性宣传 . . . 1892
64.3.3.1 蒙特卡洛模拟 (MCS) . . . 1892
64.3.3.2 拉丁 Hypercube 样品 (LHS) . . . 1892
64.3.3.2.0.1 例题 64.2: 拉丁 Hypercube: 工作例子与两个变量 . . . 1894
64.3.3.3 接近和超越直接样品采集的替代方案 . . . 1896
64.3.3.3.1 点估计方法 (PEM) . . . 1896
64.3.3.3.1.1 例题 64.3: 点估计方法例子 . . . 1896
64.3.3.3.2 一时一刻一 (泰勒的系列最终差异估计 TSFD) . . . 1897
64.3.3.3.2.1 例题 64.4: 泰勒系列 有限差分法 例子 . . . 1898
64.3.3.3.3 多元化混乱扩张 (PCE) . . . 1898
64.3.3.3.3.1 例题 64.5: 多元化混乱扩张 . . . 1899
64.3.4 输出不确定性解释 . . . 1899
64.4 敏感性分析 . . . 1900
64.4.1 莫里斯方法 . . . 1900
64.4.1.1 例题 64.6: 莫里斯方法 . . . 1904
64.4.2 Sobol 基于变量的敏感性指数 . . . 1904
64.4.2.1 第一命令指数 . . . 1905
64.4.2.2 相互作用与总效应指数 . . . 1905
64.4.2.3 解释 . . . 1905
64.4.2.4 计算与成本 . . . 1905
64.4.2.5 关于莫里斯的评论 . . . 1906
64.4.3 宣传和敏感性方法的比较 . . . 1906
64.4.4 确定重要随机变量 . . . 1906
64.4.4.1 例题 64.7: 莫里斯方法; 重要变量的识别 . . . 1907
64.4.5 塔纳多图表 . . . 1910
64.5 从敏感性分析到参数识别 . . . 1911

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

65 决策: 参数识别方法 **1913**
65.1 参数识别作为逆转问题 1913
65.2 申请和决策框架 1914
65.2.1 从敏感性分析到参数识别 1915
65.2.2 决策框架: 什么方法? 1915
65.3 数据质量与强度 1915
65.3.1 数据污染的来源 1915
65.3.2 强大的共识估计:RANSAC 1915
65.3.2.1 算法 1916
65.4 莱文伯格 - 马克思算法 1919
65.4.1 模型方法与模型选择 1919
65.4.2 重量不线 最小二乘法 1919
65.4.3 莱文伯格 - 马库尔德更新步骤和算法直觉 1919
65.4.4 例题 65.1: 适合非线性超级模型 1920
65.4.5 扩展、限制和调节 1922
65.4.6 可识别 1922
65.4.6.1 地方不确定性接近 1923
65.4.7 模型差异 1923
65.5 巴伐利亚参数识别 1924
65.5.1 Bayesian 参数识别: 设置 1924
65.5.2 地图估计与点估计 1924
65.5.3 后面样本和 MCMC 为参数 1925
65.5.4 例题 65.2: 巴耶西复兴与平方基和 Metropolis–Hastings 样品 . . . 1925
65.5.5 算例：退化参数的贝叶斯推断 1926
65.5.6 什么时候使用 Bayesian 识别 1926
65.6 Levenberg - 马克思算法在实践中 1927
65.6.1 最低四方实践 1929
65.6.1.1 MATLAB 参数识别计划: 描述 1929
65.7 混合工作流和最佳实践 1935
65.7.1 定义与验证 1935
65.7.2 结构性应用 1936
65.7.3 工作流决策框架 1936
65.8 桥到基于性能的地震工程 1936

66 间隔 **1940**
66.1 荷载和抵抗因子设计的限制 (LRFD) 1940
66.2 為什麼要移動到 基于性能的地震工程 (PBEE)? 1941
66.3 PBEE 的四个组成部分 1941
66.4 图书的结构 1941

67 危险性分析 **1943**
67.1 引入 1944
67.2 重复关系 1944

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

67.3 注意模型 1946
67.3.1 基本 1946
67.3.2 Boore, Joyner 和 Fumel (1997) 1947
67.3.3 参数评估 1947
67.4 定位性地震 危险性分析 1948
67.5 可靠性地震 危险性分析 1950
67.6 事件时间 1952
67.7 地震危险曲线 1953
67.8 地震危险地图 1954
67.9 地震危险分裂 1954
67.10 目标反应视野 1955
67.11 斯托卡斯特地面动作模拟 1959
67.11.1雷扎伊安和基乌里希安 (R-D) 模特 1959
67.11.2Yamamoto 和 Baker (Y - B) 模型 1961
67.12 耐力时间刺激功能 1962
67.12.1第一代 ETEF 1963
67.12.2二世代 ETEF 1963
67.12.3第三代 ETEF 1964
67.12.4第四代 ETEF 1964
67.12.5第五代 ETEF 1965
67.13 例题 67.1: 地震 危险性分析 1967

68 地震 危险性分析 II **1971**
68.1 引入 1971
68.2 年度超越率 1972
68.3 危险曲线 1972
68.4 工程地震风险分析 (ESRA) 1973
68.4.1 例题 68.1: 返回期计算 1974
68.5 可行性地震 危险性分析 (PSHA) 如 SHA + ESRA 1975

69 结构分析 **1978**
69.1 引入 1979
69.2 基本定义 1979
69.3 能力与需求 1980
69.3.1 需求能力关系 1980
69.3.2 需求估计方法 1980
69.3.3 能力设计原则 1981
69.4 地震分析方法 1982
69.4.1 Push Over 分析 (波) 1982
69.4.1.1 例题 69.1: 请求曲线的例子 1985
69.4.1.2 例题 69.2: Push-over 分析; 实用例子 1988
69.4.2 增長 动力分析 (伊达) 2015
69.4.3 多条线路分析 (MSA) 2017

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

69.4.4 云分析 (克拉) . . . 2019
69.4.5 耐力时间分析 (艾特) . . . 2020
69.4.6 总结 . . . 2022
69.5 什么是下一个 . . . 2023

70 损害分析 **2026**
70.1 引入 . . . 2027
70.2 限制国家 . . . 2027
70.2.1 边界国家的层次 . . . 2028
70.2.2 概率框架 . . . 2028
70.2.3 PBEE 框架中的实施 . . . 2028
70.2.4 定义与验证 . . . 2029
70.2.5 多客观考虑 . . . 2029
70.2.6 与损害指数的联系 . . . 2029
70.3 损害指数 . . . 2030
70.3.1 损害指数和性能标准 . . . 2030
70.3.2 转向可能损害评估 . . . 2031
70.3.3 损害的概率代表性 . . . 2031
70.3.4 损害测量和工程需求参数 (EDP) . . . 2032
70.3.5 主条目: 信任区 损害评估 . . . 2032
70.3.6 量化损害测量 . . . 2032
70.4 表现 . . . 2034
70.4.1 基于性能的工程框架 . . . 2034
70.4.2 性能水平和接受标准 . . . 2035
70.4.3 整合限制状态、损害指数和性能水平 . . . 2036
70.5 过渡到脆弱性曲线和风险评估 . . . 2038

71 损失分析 **2039**

72 风险概率评估 (⊇ PBEE)[8] **2041**
72.1 新模式: 基于性能的地震工程 (PBEE) . . . 2042
72.1.1 荷载和抵抗因素设计的限制 (LRFD) . . . 2042
72.1.2 第一部分: 明确性能目标 . . . 2042
72.1.2.1 方法 . . . 2042
72.1.2.2 PBEE1 的限制 . . . 2042
72.1.2.3 设计 vs. 分析 . . . 2044
72.1.3 第二部分: 功能和经济后果的直接定量化: . . . 2044
72.1.3.1 引入 . . . 2044
72.1.3.2 一般框架 . . . 2045
72.1.3.3 PBEE 1 和 PBEE 2 之间的差异 . . . 2046
72.1.4 PBEE 实施程序 . . . 2047
72.2 从回应到损害: 脆弱性曲线 . . . 2049
72.2.1 基本和定义 . . . 2049
72.2.2 开发脆弱性曲线 . . . 2050

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

72.2.3 数学代表性 . . . 2050
72.2.4 连续功能 *vs.* 直播 矩阵 . . . 2051
72.3 PBEE 框架中的作用 . . . 2053
72.4 例题 72.1: 完整的 PBEE 例子 . . . 2054
72.5 历史遗迹和基础文件 . . . 2057

附录

第一部分：基础参考资料

A 单位 2061
A.1 是单位 . . . 2061
A.2 测量预定和多元化 . . . 2062
A.3 单位 & 转换因素 . . . 2062
A.4 强度、长度、工作和应力的概述, 在各个测量单位 . . . 2063
A.5 物理量从计量转换为帝国单位 . . . 2063

B 包装, 以帝国为基础的设计 2064
B.1 死负载 . . . 2064
B.2 风负载 . . . 2065
B.2.1 例题 B.1: 风荷载 . . . 2068
B.3 地震 . . . 2070
B.3.1 例题 B.2: 地震在一个框架上加载 . . . 2073
B.3.2 例题 B.3: 地震 荷载 在高楼上 . . . 2075
B.4 桥梁负载 . . . 2076
B.5 荷载 组合 . . . 2076
B.6 活载 减少 . . . 2077
B.6.1 例题 B.4: 活载 减少 I . . . 2078
B.6.2 例题 B.5: 活载 减少 II . . . 2079
B.7 荷载 定位 . . . 2079

C 线性均匀差异方程式 2080
C.1 管理差异方程式的概述 . . . 2080
C.2 解决方案 . . . 2081
C.3 稳定 I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ . . . 2081
C.4 二、稳定性 $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ . . . 2082
C.5 梁 弹性 基础; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ . . . 2083

D 灵活的架子; 先进的分析 2085
D.1 引入 . . . 2085
D.2 三角圆 拱 . . . 2086
D.2.1 分析程序 . . . 2086
D.2.2 点 荷载 . . . 2087

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

D.2.3 自我重量 . . . 2093
D.2.4 统一 分布荷载 . . . 2097
D.2.4.1 挠度 . . . 2099
D.2.5 三角圆 拱: 验证 . . . 2099
D.2.6 结论 . . . 2101
D.3 2 - 旋转圆形 拱 . . . 2101
D.3.1 分析程序 . . . 2102
D.3.2 点 荷载 . . . 2102
D.3.3 自我重量 . . . 2112
D.3.4 统一 分布荷载 . . . 2120
D.3.5 双环圆 拱: 验证 . . . 2123
D.3.6 结论 . . . 2126
D.4 无缝循环 拱 . . . 2126
D.4.1 分析程序 . . . 2126
D.4.2 点 荷载 . . . 2127
D.4.3 自我重量 . . . 2139
D.4.4 统一 分布荷载 . . . 2147
D.4.5 无缝循环 拱: 验证 . . . 2151
D.4.6 结论 . . . 2154
D.5 结论 . . . 2154

第二部分：结构分析与设计表格

E 圆形壳分析表 2156

F 彩票设计 壳 Roofs 2169

G 阿拉米洛的桥梁数据集 2198

H 标签: Visual Hashing 2202
H.1 引入身份证 . . . 2202
H.2 识别一代算法 . . . 2203
H.3 GitHub vs. Stack Exchange Identicon 定位 . . . 2204
H.4 我们的 MATLAB 实施 . . . 2205
H.5 核心代码分区 . . . 2207
H.6 使用该计划 . . . 2208
H.7 优点和应用 . . . 2209
H.8 结论 . . . 2209

第三部分：程序实现

I MATLAB®, 数学 代码 2210
I.1 第一部分: 基本和计算分析方法 . . . 2211
I.1.1 静态 矩阵 的 桁架 B . . . 2211
I.1.2 圣路易斯 拱 形状 . . . 2213

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

I.1.3 仲裁三重循环 拱; 数学 . . . 2215
I.1.4 马索尼亚架的崩溃 . . . 2226
I.1.5 主 . . . 2226
I.1.6 大 挠度 的 梁 . . . 2237
I.2 第二部分: 结构设计与分析 . . . 2241
I.2.1 圆形盾牌设计 . . . 2241
I.2.2 接近 框架 分析; cantilever 方法 . . . 2253
I.2.3 非统一 扭转 . . . 2265
I.2.4 正统 框架 . . . 2268
I.2.5 混合式框架 . . . 2271
I.2.6 框架; 硬直 . . . 2274
I.2.7 直接刚度法; 框架 . . . 2278
I.2.8 主要代码 . . . 2278
I.2.9 刚度矩阵 非普里斯马特成员 . . . 2290
I.2.10 隔离线 . . . 2296
I.2.11 进化设计 . . . 2302
I.2.12 主 . . . 2302
I.2.13 柱 互动图表 . . . 2308
I.2.14 变量方法: 数学 . . . 2311
I.2.15 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应 . . . 2322
I.2.16 以色列 单元 . . . 2324
I.3 第三部分: 材料模型与宪法行为 . . . 2335
I.3.1 增長 塑性 . . . 2335
I.3.2 宪法模型 . . . 2339
I.3.3 二元模型 . . . 2339
I.3.4 哈登 . . . 2343
I.3.5 催眠 . . . 2346
I.3.6 修正的吉夫雷 Monegotto Pinto . . . 2365
I.3.7 改造城区公园 . . . 2370
I.3.8 伊巴拉 . . . 2375
I.3.8.1 催眠 . . . 2375
I.3.8.2 混凝土 Pinch . . . 2394
I.3.9 极限状态 Shear 标签 . . . 2415
I.4 第四部分: 数据驱动的方法和参数识别 . . . 2436
I.4.1 参数识别计划 . . . 2437
I.4.2 主节目和核心乐队 . . . 2437
I.4.3 数据 I/O 和 Spreadsheet 集成 . . . 2447
I.4.4 优化工作流和辅助功能 . . . 2458
I.5 第五部分: 数值和统计基础 . . . 2471
I.5.1 莱文伯格 - 马库尔德 . . . 2471
I.5.2 数值 技术 . . . 2472
I.5.3 FFT 和 Butterworth 过滤器 . . . 2472

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

I.5.4 单一价值分解 . . . 2475
I.5.5 预条件 . . . 2477
I.5.6 随机样本共识 (拉纳克) . . . 2478
I.5.7 拉丁 Hypercube . . . 2483
I.5.8 巴伐利亚回归以四方基础 . . . 2487
I.5.9 马尔科链 Monte Carlo Simulation . . . 2495
I.6 第六部分: 优化和参数匹配 . . . 2496
I.6.1 莱文伯格 - 马库尔德 . . . 2496
I.6.2 定制实施 . . . 2497
I.6.3 使用内置功能 . . . 2499
I.7 第七部分: 地震可靠性和不确定性 . . . 2501
I.7.1 地震 危险性分析 . . . 2502
I.7.2 基于性能 地震工程 . . . 2504
I.8 第八部分: 有用 . . . 2508
I.8.1 身份 . . . 2509

J MathCad 例子 **2515**

第四部分：数值与统计方法

K 地震记录过滤 (快速转型) **2681**
K.1 如何处理 Fourier 转型 . . . 2682

L 关于线性阿尔及利亚的评论 **2687**
L.1 关于矩阵 . . . 2687
L.1.1 定义 . . . 2687
L.1.2 基本 矩阵 操作 . . . 2689
L.1.3 定义者 . . . 2690
L.1.4 投资 . . . 2691
L.2 线性方程式的解决方案 . . . 2691
L.2.1 策略 . . . 2691
L.2.2 解体 . . . 2692
L.2.2.1 Gauss 排除 . . . 2692
L.2.2.2 加斯 - 约旦排除 . . . 2692
L.2.2.3 **LU** 解体 . . . 2693
L.2.2.4 霍尔斯基的分裂 . . . 2695
L.2.2.5 单一价值分解 . . . 2696
L.2.2.6 QR 分解 . . . 2697
L.2.3 间接方法 . . . 2698
L.2.3.1 盖斯 • 塞德尔 . . . 2698
L.3 矩阵 特性和计算改进 . . . 2698
L.3.1 独特性和排名 . . . 2698
L.3.2 自我价值与自我 vectors . . . 2699
L.3.3 条件号 . . . 2700

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

L.3.4 条件前 . . . 2700
L.3.4.1 左前提 . . . 2701
L.3.4.2 正确的前提 . . . 2702
L.4 例子 . . . 2702
L.4.1 例题 L.1: Gauss 排除 . . . 2703
L.4.2 例题 L.2: 加乌斯 - 约旦排除 . . . 2704
L.4.3 例题 L.3: **lu** 解体 . . . 2705
L.4.4 例题 L.4: 霍尔斯基的分裂 . . . 2706
L.4.5 例题 L.5: 加斯西德尔 . . . 2707
L.4.6 例题 L.6: 盖斯 • 塞德尔 . . . 2708
L.4.7 例题 L.7: 单一价值分解 . . . 2708
L.4.8 例题 L.8: 预条件 . . . 2709

M 概率与统计 **2712**
M.1 引入概率与统计 . . . 2712
M.2 概率的基本概念 . . . 2712
M.2.1 定义 *vs.* 概率 . . . 2712
M.2.2 定义 . . . 2713
M.2.3 条件概率 . . . 2714
M.2.4 随机变量类型 . . . 2714
M.3 统计工具可靠性分析 . . . 2715
M.3.1 累积分配功能 . . . 2715
M.3.2 信任间隔 . . . 2716
M.4 统计措施 . . . 2717
M.4.1 中央趋势的时刻和措施 . . . 2717
M.4.2 变量之间的关系 . . . 2720
M.5 分布 . . . 2720
M.5.1 统一分布 . . . 2720
M.5.1.1 比较 . . . 2723
M.5.2 二元化分布 . . . 2725

N 可靠指标 **2728**

第五部分：高级理论与优化

O 变形物体的机械, 一个初级 **2734**
O.1 引入 . . . 2734
O.1.1 评论 . . . 2734
O.1.2 装修器 . . . 2737
O.1.2.1 行动 . . . 2737
O.1.2.2 转角 的轴 . . . 2738
O.1.2.3 张量 转型 . . . 2740
O.1.2.4 交响二级紧张器的主要值 . . . 2740
O.1.3 应力的物理解释 . . . 2742

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

O.2 向量字段; 变形体的机械 . . . 2743
O.2.1 力量 . . . 2743
O.2.2 卡西的应力张量 . . . 2743
O.2.2.1 液化和偏差 应力 发动机 . . . 2745
O.2.2.2 应力 州的地质代表性 . . . 2746
O.2.3 电影学 . . . 2746
O.2.3.1 位置和 位移 . . . 2746
O.2.3.2 斯特林 . . . 2747
O.3 连续介质力学的基本法则 . . . 2749
O.3.1 保守法 . . . 2749
O.3.2 流动 . . . 2750
O.3.3 质量的保留; 连续性方程式 . . . 2750
O.3.4 保持动力; 运动方程 . . . 2751
O.3.5 能源保养: 热力学的第一原则 . . . 2753
O.4 宪法方程式 . . . 2755
O.4.1 一般 3D . . . 2755
O.4.2 超越性异常案例 . . . 2757
O.4.3 2D 案例 . . . 2757
O.5 现象观察 . . . 2758
O.5.1 充电、驱动和压力控制测试 . . . 2758
O.5.2 钢材和混凝土的预/后峰材料反应 . . . 2759
O.6 变形的位置 . . . 2760
O.6.1 实验证据 . . . 2760
O.6.1.1 σ 代码图, 希尔伯格的模型 . . . 2760
O.7 边界条件 . . . 2763
O.8 彩色图表 . . . 2763
O.9 内部力量的概念 . . . 2764

P 向威斯特加德致敬 2765
P.1 Crack 提示 应力 字段 . . . 2765
P.1.1 Airy 应力 功能 . . . 2765
P.1.2 解决方案 . . . 2767
P.2 流体 结构相互作用 . . . 2772

Q 信任区和莱文伯格 - 马库尔特方法 2784
Q.1 信任区 . . . 2785
Q.2 算法 . . . 2787
Q.3 MATLAB®formulation . . . 2788
Q.4 实时视觉化 . . . 2790

R 向量 计算; 一个初始 2792
R.1 基本定义 . . . 2792
R.1.1 衍生品为一个滑板 . . . 2792
R.1.1.1 例题 R.1: 向曲线倾斜 . . . 2794

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

R.1.2 差异 2794
R.1.2.1 向量 2794
R.1.2.1.1 例题 R.2: 向量的差异 2796
R.1.2.2 第二次订单 张量 2796
R.1.3 格拉迪特 2796
R.1.3.1 滑板领域 2796
R.1.3.1.1 例题 R.3: 学士学位: 一个规模的领域 I 2797
R.1.3.1.2 例题 R.4: (二) 斯卡拉字段的格拉迪特 2798
R.1.3.2 向量 字段 2799
R.1.3.2.1 例题 R.5: 一个向量字段的格拉迪特 2800
R.2 综合理论 2800
R.2.1 整合一个 向量 2800
R.2.2 完整线 2800
R.2.3 集成部分 2801
R.2.4 加斯: 差异理论 2801
R.2.4.1 例题 R.6: 差异理论的物理解释 2802
R.2.5 斯托克的理论 2803
R.2.6 绿色: 格拉迪特理论 2803
第二至第四卷及附录参考文献 **2804**

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

插图目录 (I - IV)

审阅稿

表格目录 (I - IV)

审阅稿

关于作者

Victor E. Saouma 拥有四十余年的研究经验。他在混凝土碱硅反应（ASR）与耐久性方面开展了重要工作，并对结构分析与力学作出了广泛贡献。他著有《AAR 数值模拟》和《基础设施的老化、震动与开裂：从力学到混凝土坝和核结构》，并发表了大量技术报告和同行评议论文。

他通过 RILEM 担任国际委员会主席。(国际实验室与材料、建筑系统和结构专家会议) 专注于 diagnosis and prognosis of structures affected by ASR, 并编辑了一份全面的 RILEM 报告, 包括来自世界各地领先的研究人员的贡献。

他是前任总统和同事。International Association of Fracture Mechanics for Concrete and Concrete Structures. 他向东京电力公司咨询 (特斯拉) 关于非线性动力分析的大型拱大小和结构问题在巨大的钢筋混凝土结构, 并为 EPRI 报告做出了贡献 **核容器结构的结构模型**.

他的研究兴趣延伸到理论, 数值, 和实验的断裂力学, 氯化物分散在混凝土, 以及中心测试的女士。他还编辑了一个体积 real-time hybrid simulation 这是一个重要的实验技术, 用于结构测试。他的工作由核监管委员会、奥克里奇国家实验室、投诉办公室、东京电力公司和瑞士联邦能源局资助。他的国际合作包括法国、西班牙、瑞士、意大利和日本。

自 2019 年以来, 他一直担任 **博诺** 技术顾问为 C-10 研究和教育基础核安全问题, 包括在美国前担任专家证人。核监管委员会关于核设施的混凝土衰退。这项工作提供了技术分析、监管决策和公共安全的交叉点的独特洞察力。

作为训练有素的民用工程师,Saouma 教授了线性和非线性结构分析以及增强和先进的钢筋混凝土设计, 为工程挑战带来了一个广泛的视野。

维克多・萨奥马的其他书籍

1. 萨乌马,V.E. 和哈里里-阿德比利,M。(2020) Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Strutures, 斯普林格自然
2. 萨奥马,V.E (Ed.) (2020) Diagnosis & Prognosis of AAR Affected Structures, 斯普林格自然
3. 萨奥马,V.E (2013) Numerical Modeling of AAR, 320 页, 泰勒& 弗朗西斯;
4. 萨奥马,V E. 和 Sivaselvan, M. (艾德斯) (2008) Hybrid Simulation: Theory, Implementation and Applications

5. 萨奥马,V.E Structural Analyis Lecture Notes (1764 pages)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

6. 萨奥马,V E。Fracture Mechanics (Unpublished, 1186 pages)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

Part I

力学与结构分析的历史基础

在我所阅读的大多数书籍中, 仍然存在任何对结构分析历史的重大处理的显而易见缺席 - 最好提供最有趣的概述。

对于那些寻求对这个主题的全面理解的人来说, 一小堆经典参考提供了授权和详细的覆盖。这些被引用在整个这个体积, 并建议进一步研究。

雖然不是歷史學家, 而是结构分析的教授, 但我選擇了一點勇敢和勇敢地冒險這本書的主题的歷史基礎。

我完全承认, 只有少数读者会全力以赴。然而, 我希望许多人在选择性地探索兴趣点中找到价值, 特别是学生可以使用这些材料作为更深入的研究的基板。

我请求你了解是否出现任何不警告的错误或缺陷。

关于作者身份及人工智能工具使用的声明

本书的原创手稿是在 ChatGPT 和类似的大语言模型的出现之前写的。整个智力内容, 包括结构、论点、历史分析和技术发展, 都是我的作品。

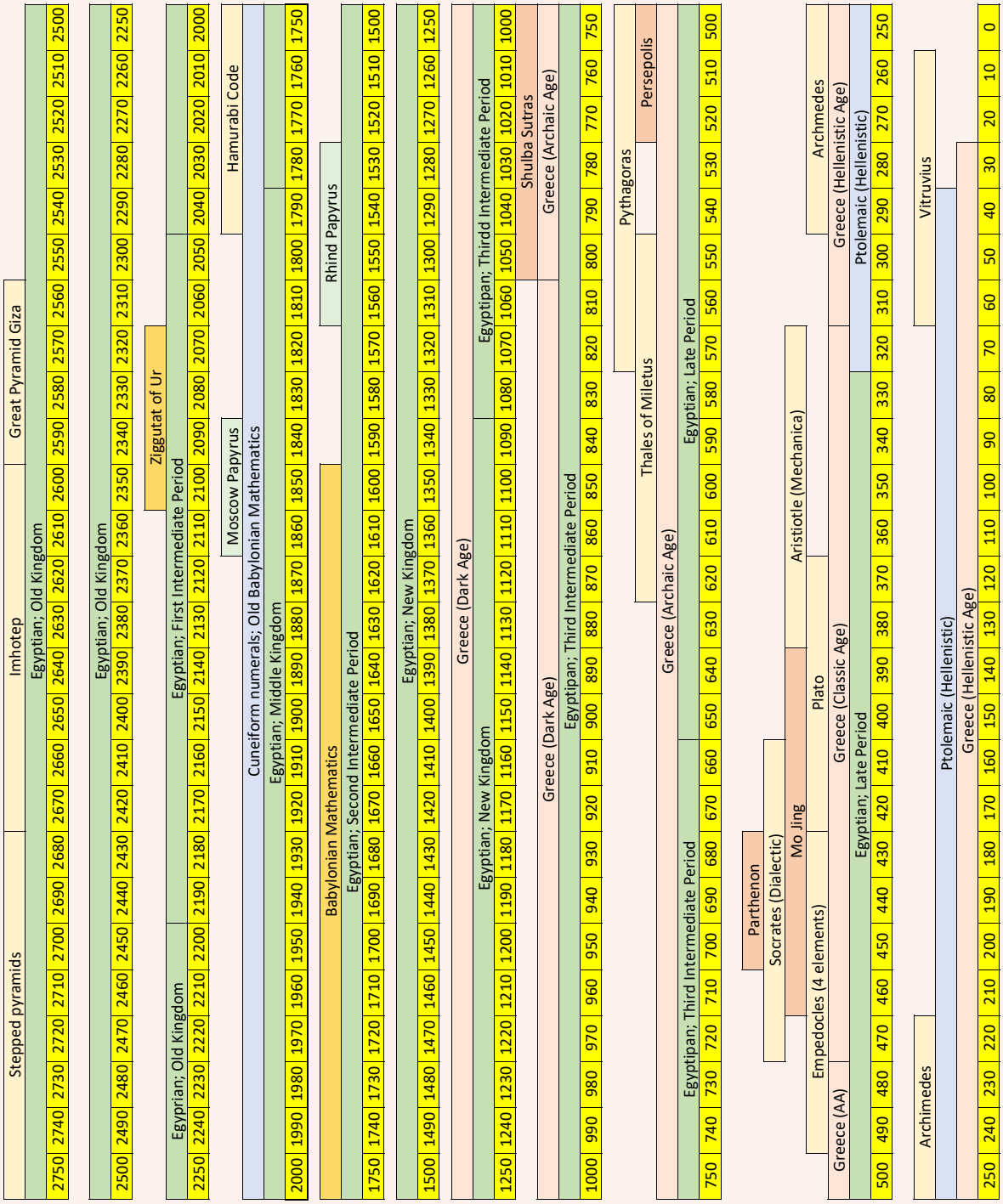
随后, 我使用了 ChatGPT 作为编辑工具来完善写作, 提高清晰度, 并在几种情况下提出额外的参考。除非明确说明, 否则 ChatGPT 没有创建任何概念、解析 或解释材料。

如果任何部分在 ChatGPT 的协助下被彻底编写, 后来由我审查和批准, 则将明确表示为此。否则, 所有的重大贡献都完全属于我。

审阅稿

时间线; ECB

注意事项日期是近的; 时间线不是完整的, 而是几个世纪以来建筑、建筑、科学和工程的视觉概述。

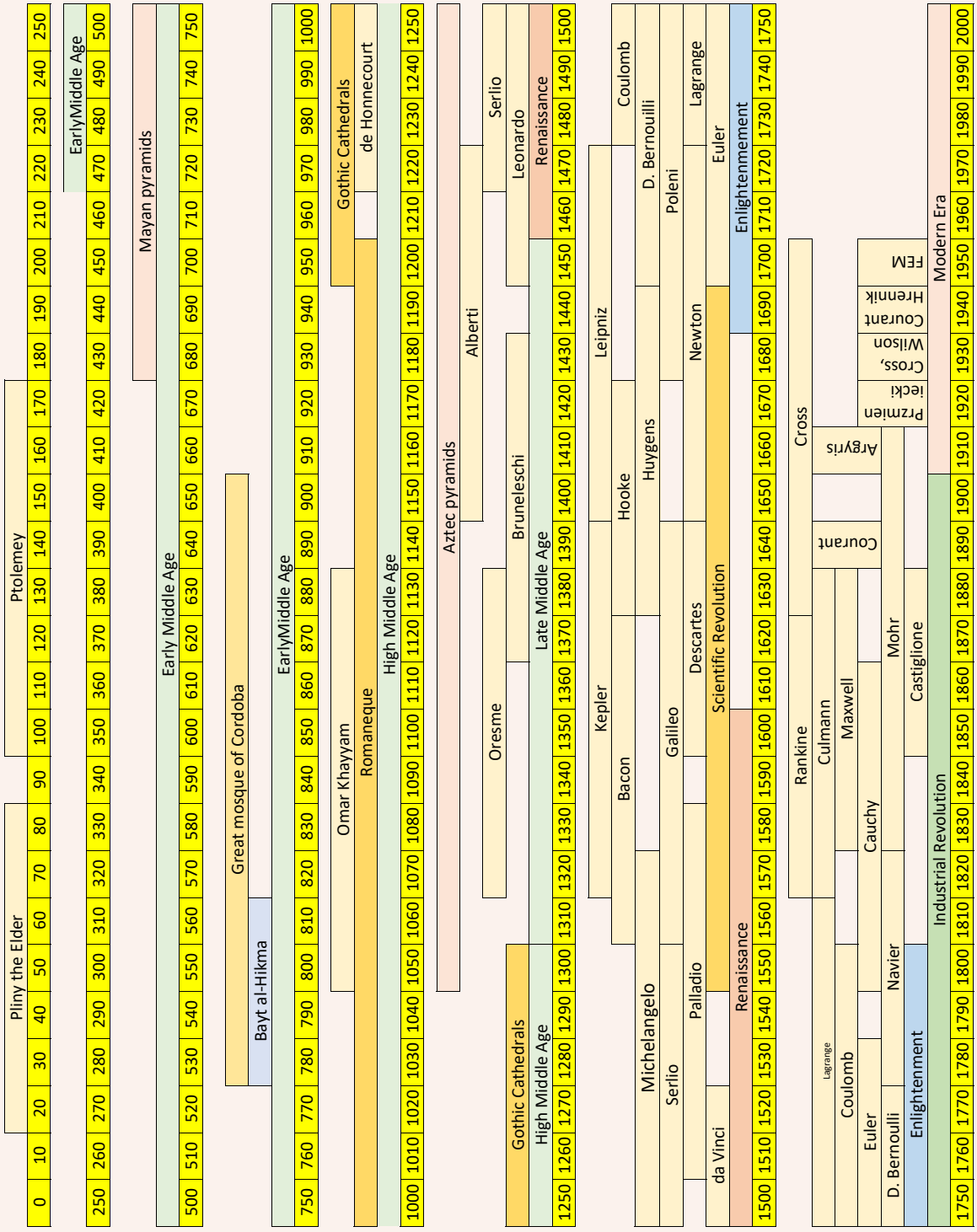


审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

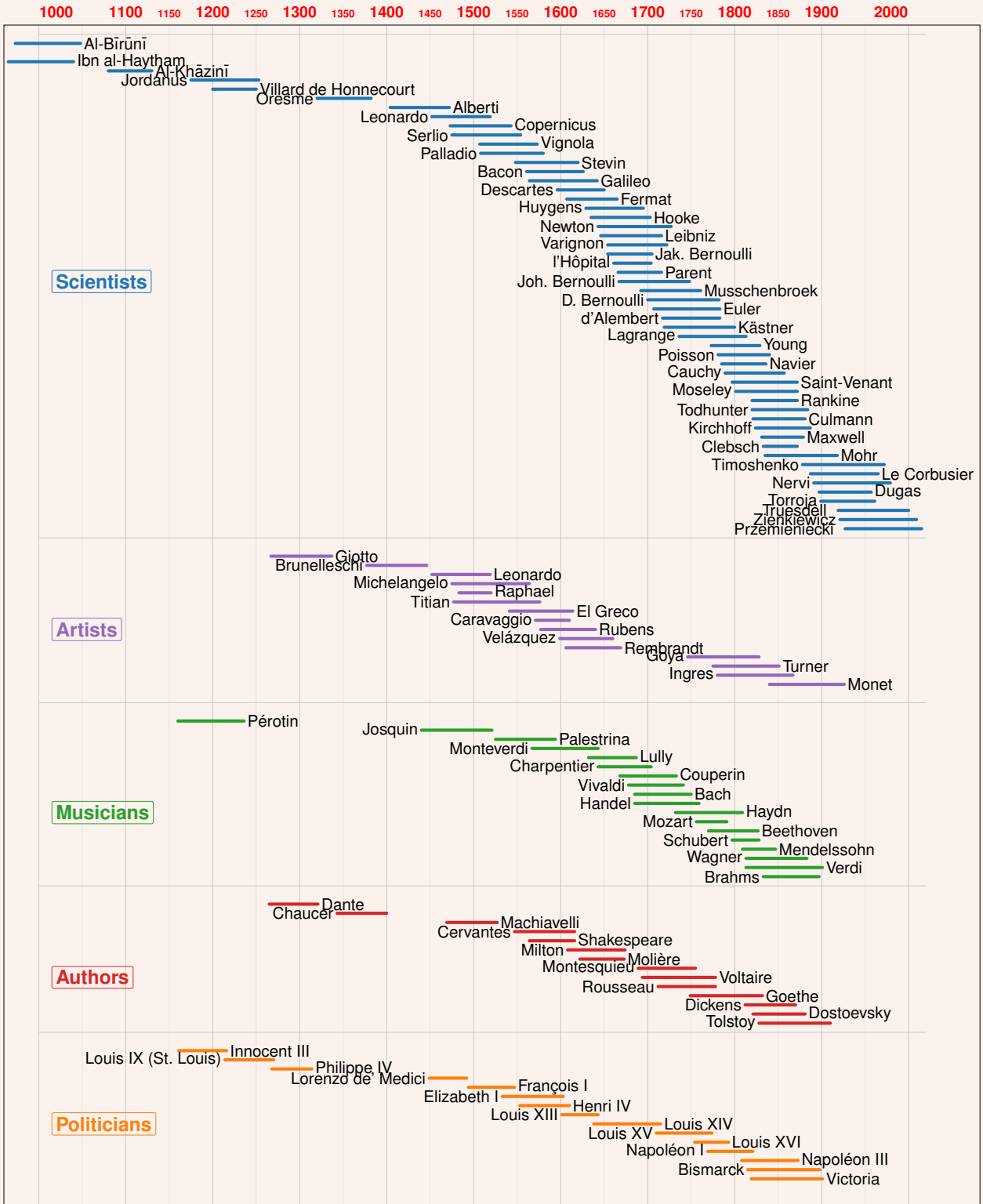
时间线;CE

注: 所有显示的日期都是近距离的,时间线在任何情况下都不是完整的。它仅仅是建筑、建筑、科学和工程在几个世纪不断发展的视觉表现。



审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。



科学家、艺术家、音乐家、作家和政治家的历史时间表,1000 年至 2020 年。适应和扩展 Truesdell, 1968. 第一行列出的科学家都在本章中讨论, 其余的数字包括在更广泛的文化和历史背景下。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

1 引入

摘要

本介绍章讲述了结构分析常见的历史基础, 并为其持续相关性提出了一个案例。它预先警告读者, 这一次第一次体积, 专注于结构分析的历史, 将从一个严格的时间传讲中脱颖而出, 而不是采用一个精致的, 主题结构 - 与个人观察更全面地发展在接下来的章节。

为了提供背景, 章节还描绘了“大图像”的主题和历史, 跟踪从古代的实验主义到现代计算力学的出现。

对读者有兴趣深入探索的参考内容进行精心选择。结果是个人旅程, 也是邀请结构分析不只是作为技术领域, 而是由几个世纪的智力发展形成的一个。

1.1 结构工程历史的相关性 5
1.2 方法与企图 6
1.3 大画 6
1.3.1 主题 6
1.3.2 历史上 7
1.4 学术参考 7

1.1 结构工程历史的相关性

如果我们问工程师他们常用的方程式的起源, 答案可能令人失望:

> 如果我们问工程师他或她不断使用的方程式的起源, 答案会令人失望。他们是存在的, 别无所不在。為什麼要對其衍生有好奇心? 工程师对其主题的背景并不感兴趣。
>
> (Benvenuto, 1991b, pg. 543)

但也许有些人应该感兴趣。至於我所知道的最好, 沒有任何“现代”文本书关于结构分析试图解决 Benvenuto 提出的问题 [1]. 这一点特别令人难以置信, 因为很少的职业能够跟踪他们的知识历史, 直到结构工程。熟悉它可以, 以微妙的方式, 让我们稍微多一点。“民事。”

这一点是由下列注明加强的。

> 对于那些渴望深度数学知识的学生来说, 最重要的是要早就习惯于直接进入原始发展　至少在原始发展的情况下是直接的。它们在一个不太困难的语言中被发现。
>
> (Miller, 1916)

同样的感觉也适用于工程学生, 对于这样的学生来说, 本章的目的是。

起初, 我的意图是提供一个简短的概述进化结构分析. 但是, 一旦我开始了这个过程, 我发现自己越来越被吸收 - 特别是因为我在 COVID-19 锁定期间像许多其他人一样在家里被困。因此, 第一章是大约六个月的努力的产物, 由好奇心和乐趣以及学术意图驱动。

[1] 与我学士学位结构分析文本的可能例外, 这献了一些页面历史背景 (Kinney, 1957, pp. 1–19).

审阅稿

1.2 方法与企图

接下来, 最终更是一个个人反思, 而不是一个系统的历史。它既不是全面的, 也不是严格的, 也不是科学的。相反, 它是一个收藏 - 有时更像一个 collage - 无缝连接的主题, 其中一些探讨的深度比其他, 从梅索波塔米亚到有限元法的路径。

演示是故意的, 非线性, 有时似乎随机。某些主题可能看起来不一致或不在场; 其他人可能会对其包含或强调提出分歧。他们所团结的就是每个人在某个时候, 都吸引了我的好奇心, 并促使我写笔记。

随着时间的限制, 我有时直接引用了主要和次要来源 - 并充分分配 - 并且重新编写了几个数字, 以帮助澄清所选择的想法。

最后, 我允许自己在脚本中留下一些个人观点, 思考某些主题如何随着时间的推移进展 - 或者没有进展 -, 并将历史发展放在当代视野的光线上。

1.3 大画

1.3.1 主题

图 1.1 提供长历史之旅的路线图。不同学科之间的相互联系 (自己不明确定义) 它在某种程度上是自愿的。请注意, 我已经包括建筑, 因为几个世纪的建筑师实际上是尺寸结构, 在许多方面, 他们的职业与结构分析密切相结合。

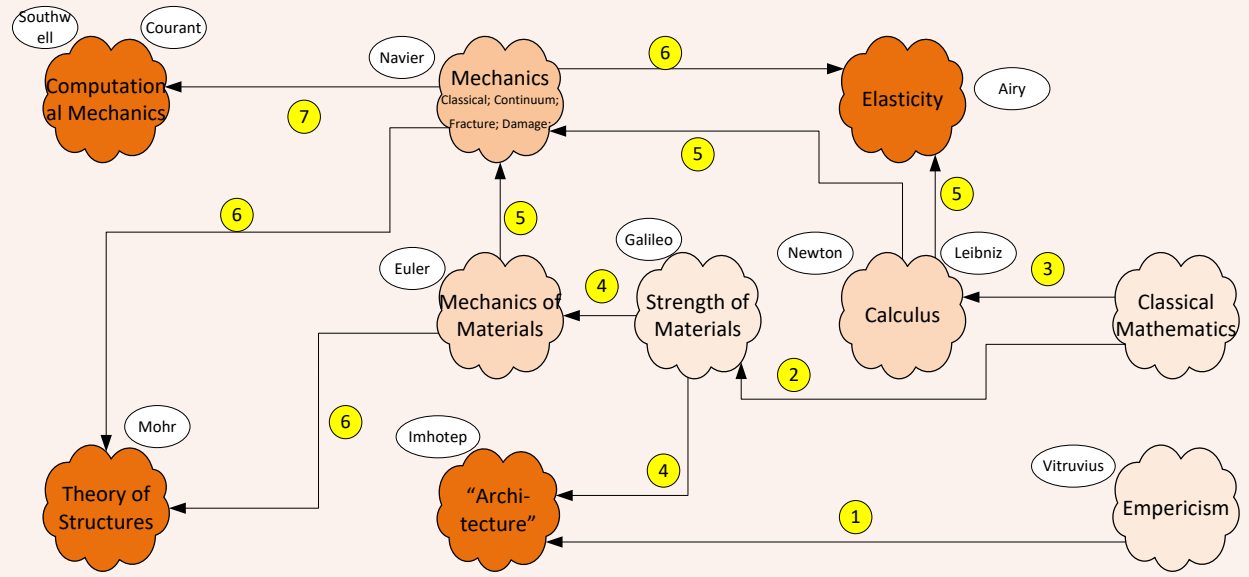


图 1.1: 路线地图到 结构工程

1. 几个世纪以来, 结构是用实验规则的模具 - 思考哥特式大教堂 - 在正式设计方法存在之前很久。這些早期做法首先由 Vitruvius 編碼。在古罗马。
2. 预算数学最终出现, 为材料力学奠定了基础。半实验, 基于仔细设计的实验观察。
3. 计算的正式发展很快就随后, 独立于纽顿和莱布尼兹在 17 世纪末。它提供了一个强大的数学语言来描述运动和变化。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 半 empirical 材料力学 成熟到更严格的 材料力学; 此外, 建筑首次被排除在底部规则。
5. 材料力学进一步发展为通用机械, 由计算和差异方程支持, 使在任意负载和动作下研究身体。
6. 结构理论从机械学和材料力学的进步进化; 同时, 弹性从机理学和计算中进化。
7. 最后, 计算力学从这些各个分支中开发出来, 将数值方法与机械结合起来, 以解决分析上不可处理的问题。

1.3.2 历史上

借款从 (Renn, Damerow, and McLaughlin, 2002), 机械学的长期历史可以分开 (又有意志) 至少 8 个时间内 [2]:

黎明: 它指的是人类社会通过经验和口头传达积累实用机械知识的延长时期, 而无需以书面形式记录或制定正式理论框架。虽然数学和天文学等学科的起源可以追溯到巴比伦和埃及古老的城市文明, 但这令人惊讶的是不是机械学家的情况。尽管有大量的证据证明了这些文明的纪念建筑成就, 但没有任何生存的文件直接描述了机械知识必须为这些努力奠定了基础。

二夜: 它包括希腊罗马时期, 见证了利弗法的表述和第一批专门用于机械学和自然哲学的书面条约的出现。这个时代特别与亚里士多德、埃克利德和阿基米德等人物有关, 其作品深深地影响了随后的智力发展。阿里士多德物理学, 特别是, 提供了主导的概念框架几个世纪。虽然罗马人对理论机械学做出了很少的贡献, 但他们作为实用工程师表现出优秀。维特鲁维亚的著作虽然在科学范围内有限, 但对建筑理论和实践产生了持久的影响。

不是那么黑暗的时代: 他强调了阿拉伯学者的重要贡献, 他们保留、翻译和扩展到希腊机械条约的时期, 当这种知识在拉丁西部大多衰退。远离空虚, 这个时期看到了机械思想的改进, 观测室和机构的建立, 以及水手表和自动化等设备的发展。他们的作品建立了古典古代与欧洲文艺复兴之间的基本桥梁。

Sunrise, Renaissance: 标志着西欧科学和结构研究的重新启动。这个时期将通过两项经典案例研究在结构设计, 以及一个简短的审查四本研讨会书, 深深塑造建筑和工程思想。

科学方法: 经过几个世纪的坚持阿里士多德教义在西方, 实验科学的基础由弗朗西斯 • 贝康提出, 他的观察和实验的支持标志着一个决定性的转变。他的实验机械的影响不能被夸张, 他的遗产是由早期实践者如加利利奥 • 加利里 (Galileo Galilei) 体现出来的, 他对物理问题进行了系统的实验。

创始人: Isaac Newton 和 Robert Hooke 的贡献对现代机械的开发至关重要, 他们值得一项专门的类别。他们的工作建立了数学法则和定义经典机械的实验基础。

解析 机械: 其特点是数学和机械的严格整合, 尤其是法国和瑞士科学家的工作。这个时期看到了表述的原则, 如 d'Alembert、Lagrange 和 Euler 的原理, 为机械系统提供了统一的解析框架。

结构分析的出现: 到目前为止, 所有现代结构分析所需的基本概念都已经建立了。其余任务是系统地开发方法 - 几个主要数字 - 这将正式化结构分析在今天所知道的学科。

虽然这代表了机械和结构工程的历史发展的合理定义, 但它并不与这个体积的章节结构无缝相匹配, 由历史进展和主题结构组合引导。

1.4 学术参考

虽然只有少数人可以勇敢地描述这些书的令人震惊和可怕的深度, 但许多人更愿意采取更简单的方法, 并将理论讨论进行。

[2]请注意, 我已经忽略了印度 - 中国的贡献, 并只对阿拉伯人进行了轻微的讨论。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- Todhunter 和 (完成的由) 皮尔森 (1893) **关于弹性理论和材料强度的历史** (Todhunter and Pearson, 1893). 可能是最完整和有权威的覆盖, 从加利利奥开始。两人都是数学家。纪念品 对于那些主要感兴趣的弹性.
- 蒂莫森科的 (1953) **材料力学的历史** (Timoshenko, 1953). 主要有兴趣的人 (最终) 在 结构分析 中。
- 特鲁斯德尔 (1968) **机械史中的论文**,(Truesdell, 1968). 这不是像以前的书一样历史性的, 全景的介绍, 而是在特定的主题上触摸的八个论文, 引发了 Truesdell 的兴趣。(谁看过弹性作为应用数学).
- 特鲁斯德尔 **灵活或弹性身体的理性机制** 432 页的介绍, 第十卷和第十一卷关于埃勒的工作体的完整收藏, (Truesdell, 1960).
- Dugas, 1988, **机械史**全面和科学的计算跟踪机械思维从古代到 20 世纪初的发展, 详细关注概念和数学发展。
- 欢迎 (1991) *An* **介绍结构力学的历史** (Benvenuto, 1991a) 和 (Benvenuto, 1991b). 非常简短的两个体积书。广泛覆盖的哥特式档案, 多米。
- 海曼 (1998) **结构分析***;* **一个历史性方法** (Heyman, 1998a).
- 哈尔特 • 埃德 (2005) **结构理论史上的论文***:* **以雅克 · 海曼的名义**.
- 治愈 (2008) **和 结构理论的历史** *(Kurrer, 2008). 这是一个很好的, 非常可读的书, 重点是结构分析与机械相反。*

此体积的准备涉及广泛的历史文件的审查, 其中许多是足够古老的自由可用在数字格式通过 HathiTrust Digital Library, 或通过我家机构提供的图书馆间贷款服务获得。

除了这些基本作品之外, 我还没有遇到过其他历史性结构力学的治疗方法, 足够全面或有洞察力, 以便值得被列入此名单。这种缺席本身是值得注意的: 结构工程的历史 - 从梅索波塔米亚的吉格拉特到当今巨大的超级塔楼形成了人类文明建筑环境的纪律 - 仍然被历史学家显而易见地忽视。

技术训练的读者向蒂莫森科重力; 数学倾向于特鲁斯德尔; 建筑好奇向本文托和海曼。然而, 这些作品中没有一个是如此令人惊叹的, 以至于它们是, 引导学生或实习工程师谁不寻求完整的学士学位, 而是一个可访问的讲话 - 我们每天使用的工具是如何的故事出现了, 以一种方式讲述, 照亮而不是威胁。

目前的 体积 是一个可耻的尝试来解决这个差距, 以带来 结构工程的历史, 以一种令人印象深刻的方式向新一代工程师传达, 他们可能不太了解智力斗争、虚假开始、洞察的闪光和使他们的职业成为可能的知识的患者积累。这不是原创历史学奖学金的作品; 我是工程师, 不是历史学家, 我深信上面的来源。但我试图把他们的账户变成一个讲话, 向工程师作为工程师说话 - 将历史发展与我们解决的方程式、我们运行的软件、我们设计的结构相连。

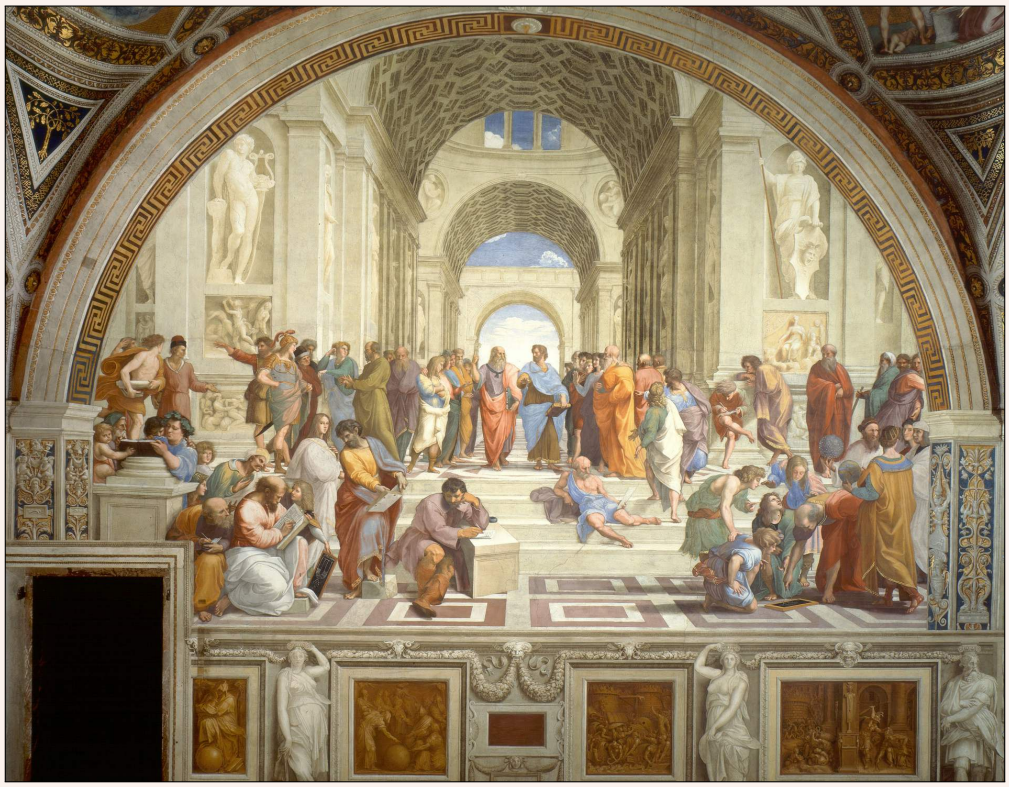
如果这些页面在某个年轻的工程师中唤醒了我们所有人站在肩上的巨人的一种欣赏, 如果它们甚至激励一个读者寻找加利利奥的故事。**演讲** 或者在 Euler 的数学的勇气上奇怪, 或者在一个完美的单元中认识到 Culmann 的图形静态的遥远的对象 - 作者将考虑他的工作很好。

此体积的准备涉及广泛的历史文件的审查, 其中许多是足够古老的自由可用在数字格式通过 HathiTrust Digital Library, 或通过我家机构提供的图书馆间贷款服务获得。

最后一本书中, (历史), 我故意依靠所有参考的主要来源 - 其中读者可以通过点击红色标志下载很多 这跟着引用, 我避免了次要来源, 除非它们是真正需要完全理解的地方。请注意, 在可能的情况下, 所有文件都已被 OCR 处理并压缩其文件大小。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



拉斐尔, 雅典学校 *(1509-1511)*[a]

古代哲学家和数学家的聚集, 其思想构成了所有随后的结构知识的基础。要确定主要数字, 请参见 §3.2.3.

[a]本书的每一章都以一种艺术作品结束, 为其 - 有时是可接受的 - 与先前材料的主题响应而选择。读者被邀请以慷慨的精神观察这些选项; 随时引导的连接可能需要某种想象性的弹性.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

2 之前的结构: 数字和字母

摘要

本章讲述了科学、工程和建筑建立的两个平行基础: 数字系统的发展和写作的发明。第一部分探讨了古代文明 (苏美里亚、巴比伦、埃及、希腊、伊斯兰和欧洲) 如何构建数值工具, 使数学成为可能的。和 *sexagesimal* 梅索波塔米亚系统 通过位置数十 印度和二进制 数字时代的算法。故事跟踪了角度测量、时间保存、异理数字和黄金比例等概念的进化。. 第二部分转向写作的平行故事: 从最早的滑板标志和滑板, 通过 *cuneiform* 苏默和希拉格利夫 埃及, 对菲尼基人的决定性贡献字母的发明它通过希腊和罗马传递到现代世界。数字和字母是双重的工具, 没有它们, 科学的理性或人类知识的积累记录都无法实现。

2.1 数字 10
2.1.1 性别和双子系统 10
2.1.2 英格兰 11
2.1.3 时间 12
2.1.4 十数系统和印度阿拉伯数字 . 12
2.1.5 历史的 π 12
2.1.6 异常数字与黄金比例 13
2.2 标签: 写作系统的历史 14
2.2.1 最早的记录:Tokens、Tallies 和 Clay 14
2.2.2 楔形文字：世界上最早的书写系统 15
2.2.3 埃及基督教和画家传统 . . . 15
2.2.4 福尼西亚人和字母的发明 . . 16

2.1 数字

2.1.1 性别和双子系统

不久之后的铜时代, 苏美尔 - 与古埃及一起最早记录的文明之一 - 在梅索波塔米亚出现。该地区是由欧弗拉特河和泰格里斯河连接的。永久安排发生在大约 5500 至 4000 之间 BC (Mieroop, 2024). 苏默最终被巴比伦帝国击败。(1895 年至 539 年 BC) 它继承和扩展了苏美里文化的许多方面。苏美里人最持久的贡献之一是最早已知的写作系统的发展:cuneiform。, 由偶像形状的字符组成, 印刷在平板电脑上。

在现代奖学金中, 这些平板电脑经常被收藏所包含的收藏名称所识别。例如,Plimpton 322 是哥伦比亚大学的 Plimpton 收藏的一部分, 而 Yale Babylonian Collection 7289 以耶路撒冷巴比伦收藏 (Robson, 2001). 由于煮熟的木材的可见保存品质, 今天关于苏美里和巴比伦数学而已知得多, 而不是古埃及数学, 这在更可破坏的纸板上大多被记录下来。

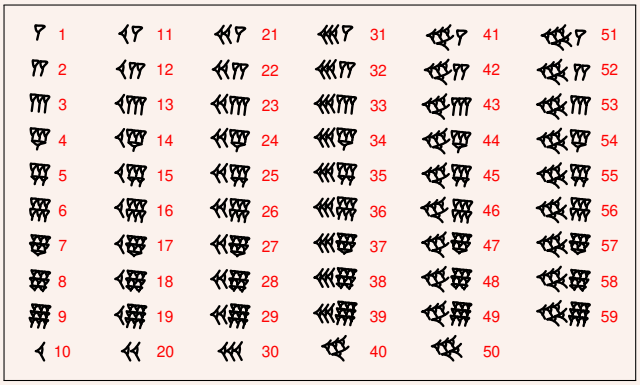
苏美里人和巴比伦人雇用了双分数 (基地 12) 和 sexagesimal (基地 60) 数字系统, 如图中所示 2.1a. 他们的日历 年份由 360 天组成, 可能反映了天文和地质理性。然而, 他们一开始就缺乏零的象征, 尽管后来他们开发了一个位置主体象征 - 在现代数学意义上不是真正的零。以自己的算法规则为数字的零概念, 直到印度数学家布拉哈古普塔才正式确定。于公元 628 年, 从那里它转移到伊斯兰世界和最终中世纪欧洲 (Kaplan, 2000).

有趣的是, 苏美里人不像今天那样使用十个手指, 而是用十二个手骨。(法兰加) 在一只手上 - 四个手指中的三个 - 同时使用鼓作为指标, 以连续触摸每个骨头。这使他们能够在一只手中计算到 12。使用另一只手跟踪 iterations 的数量, 他们可以计算到 60 的总数 - 在五个数字中有 12 个单位。(Maor, 2001).

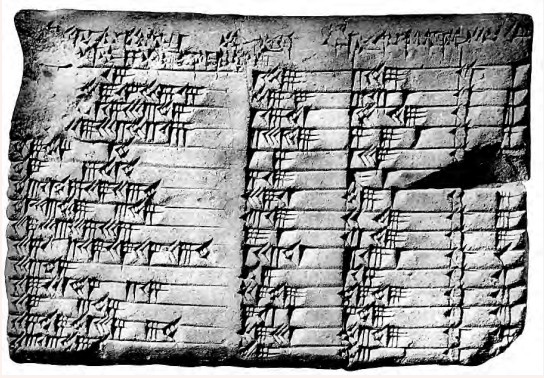
六十的选择不是自愿的。这就是现在所谓的 A。**超级高组合数**, 这意味着它比任何较小的积极整合物有更多的分裂器: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 和 60. 重要的是, 它是由前三个主要数字分开的。(二、三、五), 这大大简化了分裂的代表性。相比之下, 一个十数 没有分数评级的系统只允许清洁分为 2 和 5。在商业背景下, 这种分裂性可能促进了贸易和会计的实用算法。(Neugebauer, 1969; Menninger, 2013).

历史上, 双重 该系统仍然在巴比伦人和后来希腊人中使用, 部分是由于其方便的分裂率为 2、3 和 4。它的持久性也被天文观测强化, 特别是每年约有 12 个月球周期。(Maor, 2001).

审阅稿



(a) 巴比伦文本数字



(b) Plimpton 322, Columbia University

图 2.1: 巴比伦数学

最著名的 Cuneiform 第 322 章 普林普顿 (图 2.1b) 以 1800 年左右的日期 BCE 指出, 巴比伦学者在皮塔哥拉斯时期很久以前就知道正确三角形的特性。平板电脑列出十五套整合器 (a, b, c) 满足关系 $a^2 + b^2 = c^2$ 现在被称为皮塔戈里亚人 三重。虽然一些科学家曾经否认这一点作为抽象练习的组合, 但现代解释认为平板电脑反映了数值关系的复杂理解。(Robson, 2001).

另一个值得注意的艺术品,Yale Babylonian Collection (YBC) 7289 包含一个令人惊叹的精确性别 接近 $\sqrt{2}$ 正确到大约六个十数点 (1.414214) (Robson, 2002).

科學上, 巴比倫人最著名的是他們對數學和天文學的貢獻。相比之下, 他们的工程成就 - 虽然在灌溉等领域显著 - 与后来的文明如希腊人或罗马人相比相对微不足道。

2.1.2 英格兰

巴比伦人也是夜空的热情观察者, 为了绘制天地位置, 开发了一种早期形式的参考框架. 五世纪周围 欧盟, 他们介绍了 Zodiac 作为天文学用途的协调系统。这个系统是他们的性别基础的自然延伸, 可能受到它们的地质观察的影响 - 例如, 一个常规六角形的周围相当于其圆圈的射线的六倍。360 度循环的发展可能来自多个影响, 包括他们的日历系统。(360 天) 地质考虑和天文观察, 尽管准确的起源仍然是科学辩论的主题 (Toomer, 1998).

虽然埃及人能够用像格罗马这样的工具来确定条纹, 但一个角度的抽象概念 他们似乎在数学上是未知的。希腊人更清楚地与角度测量的正式化有关。泰勒 米勒特 (c. 624 – c. 545 BCE) 以证明三角形中的角度的总和为证据。等于 180 度。值得注意的是, 他也打破了神话的解释, 提出地球在水上浮动和地震。由波类似的动作产生的结果, 也许他的理性是哲学的, 而不是基于现代理解板 tectonics。(Boyer and Merzbach, 2011).

一个主要的进展与角度测量有关, 来自亚里士多德 萨莫斯 (c. 310 – c. 230 BCE), 谁估计太阳的角直径约为两度。他也被认为是第一个提出太阳系的海洛中心模型。(Evans, 1998).

希帕奇 (c. 190 – 120 BCE) 经常被认为是三角形的父亲, 通过将循环分为 360 度。大约两世纪后, 普托利米 (c. 100 – c. 170 CE) 在罗马埃及工作, 通过将每个学位分成 60 个平等的部分, 并进一步将每个部分分为 60 个小部分来扩展这个系统。当他的希腊作品后来被翻译成中世纪拉丁文时, 这些分支被称为 **首頁 關注** (第一小部分) 和 **部分 瞬间 秒** (第二小部分) 现代术语的标志性起源 **几分钟** 和 **二秒** (Neugebauer, 2012).

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

2.1.3 时间

就像巴比伦人一样。使用二分之一 和 sexagesimal 数字系统, 古埃及人 也使用了双分数。框架。正如前面提到的那样,12 是一个超级高组合的数字, 在分裂中提供实用优势。因此, 当时间到来时 以便把日分成小单位, 埃及人自然地将其分为十二组。“时间” 一个是白天, 一个是夜晚。然而, 这些早期时间没有固定长度; 它们因季节而异, 取决于白天和夜晚的相对寿命。(Clagett, 1995).

命令由 Hipparchus 引入 (看上方) 他们提出将日分为 24 个平等时间, 这是一个被称为平等时期的系统, 基于平等的日光和黑暗在平等时期分裂。(Evans, 1998).

使用性别系统将时间分为小单位, 直到伊斯兰早期才发生。大约 1000 CE, 阿尔比鲁尼聚合物 用巴比伦方法将时间分为 60 分钟, 然后分为 60. (Kennedy, 1971). 此方法后来由约翰 • 萨克罗波斯科采用。1235 年左右 CE 在中世纪巴黎 - 阿尔比鲁尼之后的两个世纪 (Grant, 1977).

因此, 现代时间的概念 它反映了两个古老的数值传统的合成: 埃及二分之一 结构和巴比伦性别 系统。

2.1.4 十数系统和印度阿拉伯数字

指数是数字系统中最直观的起源, 而十数则 基于十个数字的系统实际上是由几个古代文明使用的, 包括希腊人。埃及人和罗马人。后者, 特别是, 是因为他们对管理和工程的实际方向而闻名。

但是, 决定性的步骤不仅仅是计算基数十, 而是开发一个 **立场** 一个数字的值取决于它的位置在一个数字中, 而零不仅仅是作为一个位置持有者, 而且作为一个数字在自己的权利。这一突破是在印度实现的。数学家 Brahmagupta628 年写作 CE 是第一个制定零和负数的算法规则。(Kaplan, 2000). 由此产生的位置数十系统通过阿尔哈里兹密的作品传递给伊斯兰世界。谁的治疗 **以色列的《古兰经》中, 有许多古人说**: (c. 825 CE) 不仅仅是印度阿拉伯数字。但也引发了这个词。**阿尔及利亚**. 这一记数系统由比萨的莱昂纳多（更广为人知的名字是斐波那契）传入中世纪欧洲通过他的 **自由阿巴西** (1202 CE) 在此, 他展示了印度阿拉伯数字的实际优越性, 比罗马数字更为商业算法。(Devlin, 2011).

关于十字路口的说法还不多 直到法国革命, 当革命的相关术语甚至延伸到时间测量。. 在努力对生活的各个方面施行合理秩序中, 法国革命家们引入了一种基于十数的时间保存系统: 一天为 10 小时, 每小时为 100 分钟, 每分钟为 100 秒。1793 年成立 (年度 二、共和国日历) 由 1794 年命令, 该系统 - 虽然数学上很优雅 - 变得不实用, 并且很快被遗弃。(Richards, 1998).

改革进一步延长, 引入法国共和国日历, 将年份分为 12 个月 3 天 10 周。(**十年**). 要完成 365 或 366 天的一年, 五、六个额外的假期。**补充日**于今年年底被提交 (Gleick, 2016).

雖然十個時間保留並沒有忍受, 但這個時期的另一個創新 - 測量系統 - 說。最终, 它变成了 **國際單位系統** (SI), 现在由国际体重和测量办公室维护, 并在科学和工程领域广泛采用。

关于二进制 系统 (基地 2), 其数学根可以追踪到 Leibniz 在十七世纪, 他是由古代中国人部分启发的。**我 陈** 列布尼兹 (Leibniz) 被认定为二进制逻辑的体现。(Davis, 2018). 今天, 二进制系统正在推翻数字时代。结构工程师, 往往是潜意识的, 每天都依靠它 - 无论是编写文件, 进行分析或在计算机上运行模拟。

2.1.5 历史的 π

在数学常态中, 在工程中破坏的, π 比例的 A 循环的周围对其直径 - 也许是最普遍的。其十大扩张,

$$\pi = 3.14159265358979\ldots,$$

两者都是不合理的。(它不能被表达为两个整体的比例。) 和超越 (它不符合理性方程式的多元方程), 直到十九世纪才正式建立的财产。

实际需要接近 π 是古老的。巴比伦人 使用价值 $3\frac{1}{8} = 3.125$ 當 Rind 纸质 (c. 1650 BCE) 引用埃及人接近

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.1605$. 第一个严格的数学治疗是因为阿基米德斯 (c. 287–212 BCE) 谁被限制 π 經常登記和循環关于一个圆圈的聚合物 (图 2.2). 使用 *96* 聚合物, 他设立:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

以其时间为准确的结果。这种多元化方法仍然是几乎两千年以来一直处于主导的计算方法。

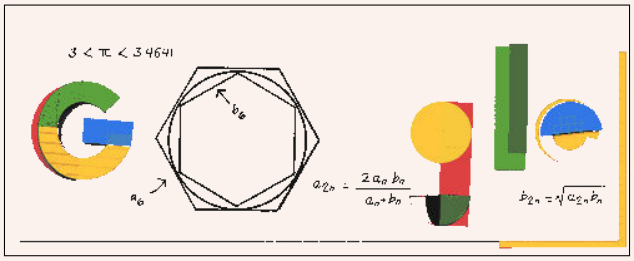


图 2.2: Google 的 Doodle on π 日子 (3/14/26) 敬拜阿基米迪斯

显著的进步来自印度数学传统。阿里亚巴塔 (476–550 AD) 给予 $\pi \approx 3.1416$ 后来, 马达瓦 (c. 1340–1425) 基拉拉学校的产物, 现在被称为 Leibniz - 格雷戈里系列:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

预测两世纪的结果后来归功于欧洲数学家。在十七世纪, 计算的发展开辟了全新的通道: 纽顿 计算 π 六十个十字路口使用二元系列扩展, 指出他是 “不自豪” 已花费的那么多时间在计算。

象征 π 它本身是由威尔士数学家威廉 • 琼斯 1706 年和由 Euler 普及 第 1737 章 走向相同的 Euler, 其身份 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 出现在 §2.1.6. 和证明这 π 这是不合理的, 由兰伯特 1768 年, 其超越由 Lindemann 创立 1882 年, 终于定居。古老的问题是 **圆圈的四角形** 无法通过单独的交叉和直线构建一个面积平等的一个圆圈。

2.1.6 异常数字与黄金比例

异常的数字在工程师的生活中始终存在, 主要是通过恒定的数字。π 和 e. 這些兩個超越數字在數學中經常被描述為最美麗的方程式中著名地相互結合:Euler。他的身份,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

虽然优雅, 但这个身份在结构分析中发现了很少的直接应用 - 与 Euler 的显著例外屈曲 负载的公式。在建筑设计背景下更有意义 (虽然不是机械) 是所谓的 **黄金比例**.

欧克里德 (c. 330 BCE) 在书中 我們的 **单元的评论**, 定义一行在极端和中间比例的分为如下: 一行说要切断到极端, 而中间比则, 当整个是到更大的部分, 而较大的则到较小的。[1] 此分類上一篇: 图 2.3, 并以算法表达为:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{a+b}{a} &= \tfrac{a}{b}, \\ x &= \tfrac{a}{b} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \overset{\text{def}}{=} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1.6180339887\ldots \\ 0.6180339887\ldots \end{cases}$$

[1] 二十多年来, 埃克里德的 **单元** 它是数学理性的范式。以基本定义和论文开始, 尤克利德开发了一种严格的退缩系统, 其中每个提议都从前者进行逻辑。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

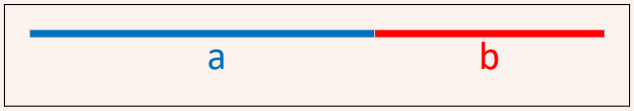


图 2.3: 欧克里德“定义”的 **极端和中等比例**

这里, ϕ 标记黄金比例 名稱:Phidias (§3.2.3) 虽然他自己没有用它在数学形式。这就是黄金比例的经典定义, 尽管有许多其他地质形式。显而易见, ϕ 它也出现在菲博纳奇连续术语的限制比例中。序列: $\phi = \lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$ 一个不可预见的桥梁, 在重复性整体序列和地质上根源的不合理的连续之间。

古埃及人把黄金比例纳入了金字塔的设计; 然而, 这种说法受到广泛争议, 因为没有可靠的证据表明他们拥有定义或计算异理数字所需的数学工具。直到复兴时期, 建筑师明确呼吁黄金比例提高建筑物的外观和相容。(Livio, 2008).

2.2 标签: 写作系统的历史

数字不存在于隔离中, 它们需要表达的媒介。人类如何记录、沟通和传达知识的历史与数学和工程史不可分割。写作和编号是共同发展的, 值得跟踪书面语言的起源以及上面描述的数值系统。

2.2.1 最早的记录:Tokens、Tallies 和 Clay

在正式写作出现之前很久, 人类社区开发了记录数量的基本系统。其中最古老的作品是 **泰利 · 斯蒂克**木材或木材被记录数。利本博骨头 从南非 (c. 43,000 BCE) 可能是最古老的已知数学艺术品, 而伊桑戈骨则, 在刚果民主共和国发现, 约有 20 年,000 BCE, 携带一系列的笔记安排在模型, 一些学者解释为早期算法合理的证据。(Marshack, 1972).

甚至比自己写作更早, 梅索波塔米亚社会使用了微小的相关术语。**标志**代表商品, 如谷物、油或牲畜, 以跟踪交易。大约 3500 BCE, 这些标志被封闭在空的粘贴包装中, 印刷在外面指示内容, 如图所描述。2.4. 从这样的印象到平板粘贴表面上的符号的直接标记, 这是一段短暂的概念步骤, 而与此同时, 写作就诞生了。(Schmandt-Besserat, 1992).



图 2.4: 梅索波塔米亚滑板标志: 先驱写作 (c. 3500 BCE)

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

2.2.2 楔形文字：世界上最早的书写系统

世界上已知最早的书写系统——楔形文字——约于公元前 3200 年由苏美尔人创造。其名称源自拉丁语 *cuneus*（楔子），指用芦苇笔压入湿黏土形成的楔形符号。楔形文字最初带有象形特征，随后迅速发展为更抽象的音节书写系统，不仅能记录商品和账目，也能表达文学、法律和科学内容；其演变见图 2.5。

和 **吉尔加梅什的传奇**文学中最古老的生存作品, 保留在圆形平板上; 也是天文记录, 数学问题集和哈穆拉比法典。(c. 1754 BCE). 克莱被证明是一个非常持久的环境: 由故意或破坏古城的火灾烧烤的平板电脑已经生存了数千年。这正是为什么今天的巴比伦和苏美里数学比埃及的数学更好地记录, 其中主要媒体是更可破坏的纸质。(Kramer, 1963).

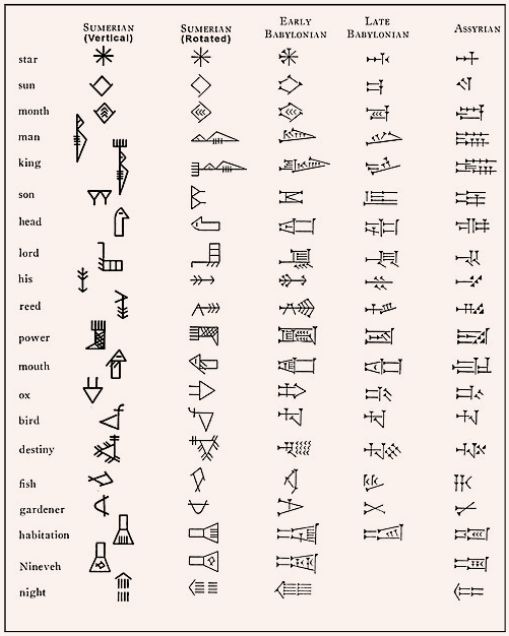


图 2.5: 图形的转变从图形 (c. 3200 BCE) 抽象的 Sylabic 信号 (c. 2000 BCE)

随着时间推移，楔形文字被中东各地多种文化采用，包括阿卡德人、亚述人、赫梯人和波斯人。然而，到公元前第一千纪，它逐渐被更灵活的书写系统——尤其是字母文字——取代。现存年代最晚的楔形文字泥板约写于公元 75 年；此后，这一文字传统消失了数百年。

2.2.3 埃及基督教和画家传统

独立于梅索波塔米亚 - 也许可能与间接刺激 - 古埃及 開發自己的寫作系統大約 3100 银行。埃及基督教 (从希腊 **英雄**神圣的, 和 **格里菲因**要加勒比) 是复杂的混合系统, 结合了标志性符号。(象征代表一个词或概念) 音效信号 (象征代表声音) 和决定性 (未透露的标志表明性别类别), 如图中所示 2.6. 结果能够具有极其表达性的范围和视觉美丽, 如埃及各地的寺庙、坟墓和纪念碑的记录所证明。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



图 2.6: 埃及基督教

希拉格利夫 [2] 它们被用来在石头上写出纪念碑, 而有两种相关术语的衍生品　希拉特 随后,Demotic[3] 他们被雇用为日常写作在纸板上。数学知识传达在这些经典书中;Rhind Mathematical Paperus (c. 1650 BCE) 莫斯科数学论文 (c. 1850 BCE) 他们是我们对埃及数学和地质学的理解的主要来源之一。(Clagett, 1999).

西方世界的神秘长久的希罗格利夫解体是由 Jean-François Champollion 实现的。1822 年, 使用三语的玫瑰石。(图 2.7) 以希拉里语、德莫特语和希腊语为关键。(Parkinson, 1999). 以色列希拉格传统的形象丰富与应得的抽象效益 - 字母的明显对比。

2.2.4 福尼西亚人和字母的发明

写作通讯史上的所有创新中, 没有一个证明比字母发明更有后果。一个小组的标志, 每个代表一个单一一致的声音, 可以结合到任何语言写字。这个发明被归功于菲尼基人。[4] 海洋文明, 在当今黎巴嫩、以色列北部和叙利亚沿岸地区的东地中海沿岸繁荣, 大约有 1500 至 300。BCE (Sader, 2019).

菲尼西亚字母, 在 1050 周左右晶体化 ECB 由 22 个联盟信件组成 (使它一个 **阿布扎德** (一) 写作系统仅记录一致性, 允许读者完成承诺。), 如在 图 中显示 2.8. 每个字母都有一个名字, 也是一个半语词, 从相应的声音开始: **阿里夫** (ox), **贝特** (房子), **吉米尔** (卡梅尔) 等等等。这个 Acrophonic 原则使用一词的初始声音作为标志的名称和价值, 既是神话般又是优雅。这些迹象本身源于以前的 Protosinaitic 脚本。它似乎被埃及基督教的灵感, 尽管适应了象牙语言的声音。(Naveh, 1987).

芬尼西亚制度的天才在其激进经济中: 在那里, 库内伊形式需要数百个标志, 埃及基督教派雇用了成千上万的人, 芬尼希字母将语言的书面代表性减少到 22 个符号。这种简单性使文学远远超越以前的系统所掌握的狭

[2]埃及基督教和中国基督徒之间存在一个指导方程式。人物二是混合系统相结合标志标志 (象征代表一个词或字体), 音效组件 (单元 显示音频), 和类似于埃及的种族分类决定性。在中国, 大多数人物都是 **光学语音组合**由一种 Semanty 组成激进的意思指向意义和一个声音组成部分, 表明发音..... 结构性逻辑非常相似于埃及的合并, 字体图, 而决定性。兩個系統完全獨立發展, 但相互結合。相同的组织解决问题代表一个复杂的谈话语言写作。这种结构性转变有时被称为证明混合的逻辑和语音系统代表一个自然中间阶段写作的进化 (Daniels and Bright, 1996).

[3]示威者 (从希腊 *d*¯ **感** *ós*, "从人民") 这是一个可怜的脚本, 在埃及出现了 7 世纪左右。BCE 作为以前的希拉里文脚本的简化, 它本身是一种混乱的基督教衍生物。在耶路撒冷主要由牧师和作家用于宗教和行政文本时, 德莫蒂克已成为埃及文学家的日常写作系统, 用来广泛的目的: 法律合同、信件、文学文本和商业记录。它一直在使用大约一千年, 直到希腊人逐步移动后亚历山大伟大的征服埃及。(332 BCE) 后来, 哥普特语, 埃及语言的最后阶段写在一个修改的希腊字母。玫瑰石 (196 BCE) 它是最受欢迎的文档中的一部分, 写在德莫蒂克, 以及其希腊和希腊版本。

[4]我的祖先!

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

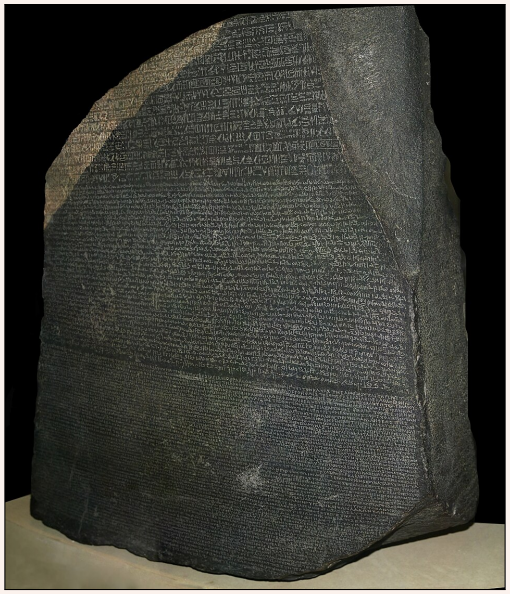


图 2.7: 玫瑰石 (196 BCE), 在希腊语、德莫特语和希腊文中持有相同的法令 (从上到底), 是解析古埃及脚本的关键

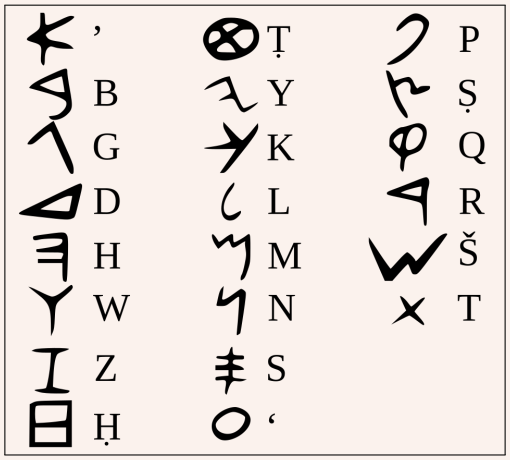


图 2.8: 菲尼西亚字母 (c. 1050 BCE), 显示 22 个联盟标志, 他们的名字, 以及他们降落在希腊和拉丁字母

窄书籍课堂。毫不偶然, 芬尼西亚人 - 古代世界的主要贸易商, 其商业网络从莱文特扩展到北非、西班牙和英国群岛 - 是那些完美并传播这个工具的人。对于他们来说, 写作首先是商业、通信和记录的实用工具。

芬尼西亚字母的传递改变了古代世界。希腊人 它在第九或八世纪左右被采用。欧洲央行, 使重复多种芬尼西亚联盟信号的关键创新代表承诺因此, 创建了第一本真实的字母, 其中两条合并和承诺都是系统地写的。希腊字母由埃特鲁斯人和罗马人改编, 引发了拉丁字母。这是今天西方世界中最常写的。与此同时, 同样的菲尼西亚原型通过分开的进化分支向希伯来人带来了兴起。阿拉伯语最后, 布拉希克的经文 南亚和东南亚, 如在图的基因图中总结 2.9 (Daniels and Bright, 1996).

这种传播的文化后果几乎不能被夸张。字母写作的相对方便使文学、哲学、法律代码和科学文本在地中海

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

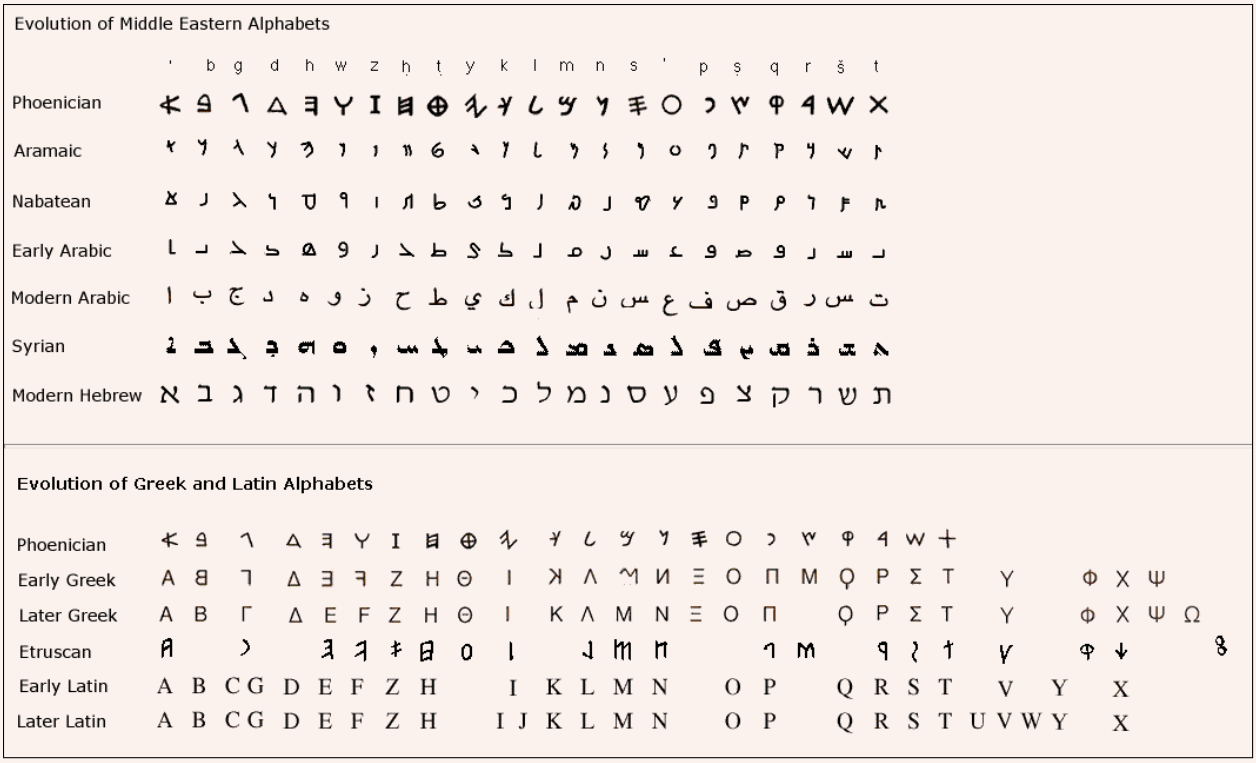


图 2.9: 字母的基因学: 从菲尼西亚人 (c. 1050 BCE) 希腊语、拉丁语、阿拉伯语、希伯来语和布拉赫语脚本家庭

世界各地繁殖。霍默、柏拉图、尤克利德和亚基米德的作品, 全部写在希腊字母中, 本身是芬尼人的直接后裔, 形成了西方科学与工程的智力床。在这个意义上, 费尼西亚商人把 22 个迹象压在相关术语子里, 并将它们擦在地板上是非常数学和机械传统的无意中贡献者, 这本书试图编写。

在 结构分析 处理的背景下, 值得注意的是 **工程师** 最终, 它从拉丁语和旧法语到拉丁文的回归。**工程师**原生智慧, 智慧, 是写作的普及表达和增强的概念。数字和字母、记录和计算, 不是单独的流动: 它们是同一条河的税收。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



阿尔布雷赫特 · 杜勒的 *Melencolia I (1514)*

魔法广场、地质坚固和围绕着模糊的图像的测量工具体现了人类数学觉醒。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

3 古代文明

摘要

结构分析和机械学的领域非常欠古代文明所取得的智力和实践进步。其中, 梅索波塔米亚、梅索美洲、波斯、中国、印度、日本、罗马、埃及和阿拉伯伊斯兰世界占据了重要地位, 为各种原则和技术奠定了基础, 影响了理论和应用机械。他们的贡献反映了科学研究、工程天才和实践实验的混合物, 这些实验在各个时代都响起。

结构分析和机械学的领域非常欠古代文明所取得的智力和实践进步。其中, 梅索波塔米亚、梅索美洲、波斯、中国、印度和日本占据了重要地位, 为各种原则和技术奠定了基础, 影响了理论和应用机械。他们的贡献反映了科学研究、工程天才和实践实验的混合物, 这些实验在各个时代都响起。

3.1 早期文明和纪念品起源 20
3.1.1 梅索波塔米亚: 吉格拉特和克莱结构; c. 公元 3100 至 500 年 20
3.1.2 梅索美洲: 玛雅和阿兹特克金字塔; c. 400 BCE 1521 CE . 21
3.1.3 埃及;C。~2700 年至 2000 年 22
3.1.4 比较梅索波塔米亚人、梅索美洲人和埃及人 24
3.2 古典古代: 地质学、理论和帝国 . . . 27
3.2.1 波斯: 帝国平台、桥梁和 康纳 27
3.2.2 阿拉伯伊斯兰贡献: 创新在结构工程 28
3.2.3 希腊对静态和结构力学的贡献 29
3.2.4 罗马: 混凝土, 架构和基础设施 33
3.3 印度、中国和日本的数学和结构传统 36
3.3.1 中国: 地震学、桥梁和机械创新 36
3.3.2 印度: 数学、材料和纪念建筑 37
3.3.3 日本: 地震抵抗力和适应性结构 37
3.3.4 合成与全球影响 37

3.1 早期文明和纪念品起源

3.1.1 梅索波塔米亚: 吉格拉特和克莱结构; c. 公元 3100 至 500 年

梅索波塔米亚, 经常被认为是 “文明的破坏,” 在结构力学和民用基础设施领域建立了基本基础。Ziggurats - 在主要的梅索波塔米亚城市中心建造的纪念碑滑板平台 - 作为质量在重力统治的荷载政权下的修道院建设的早期示威。乌尔的伟大吉格拉特 (2100 年左右~BCE), 图 3.1a 例如, 它是用阳光干燥的灰相关术语芯片的核心建造的, 包围着发射的火柴, 以提高耐力和天气抵抗性。(Oppenheim, 1977). 地雷地质提供了通过多层有效的压力分散, 减少垂直压缩压力在基础上积累并改善全球稳定。使用比特币作为连接器引入了马索尼亚矩阵内部的双重性和增加一致性, 改善其对相关术语失败和环境衰退的抵抗力。值得注意的是, 梅索波塔米人在公元前 4000 年初在地下排水系统和坟墓瓦尔特中使用了原始的弓形状, 尽管这些不是真正的相关术语子弓。

虽然埃及金字塔和梅索波塔米亚的吉格拉特共享表面地质相似之处, 但没有结论证据直接影响。然而, 吉格拉特的标志性形状几乎肯定激发了圣经《巴比伦之塔》的讲话, 尤其是通过巴比隆之塔的 Ethemenanki。(George, 1993).

与此同时, 梅索波塔米亚工程师开发了水力工程的基本原则为支座农业和城市耐用性。他们实施了控制的开放渠道灌溉网络和地面滑板, 设计的跨部分配置, 以缓解洪水风险和直接季节性水流。这些系统包含了水力格拉迪恩和流动连续性的概念, 即使尚未数学正式化。Clay, 一个丰富的地质材料, 不仅是一个结构性单元但也服务于模具和原型组件的制造 - 建议在建筑生产中提前使用模板。集体而言, 这些创新反映了一个实用的理解结构行为, 物质性能和水力动态在资源限制的环境。

审阅稿

克莱 虽然梅索波塔米亚的吉格拉特和库内伊形板的粘贴都从厄瓜多尔 - 泰格里斯洪水平面相同的幻灯片中提取出来, 但原料以不同的方式加工, 以满足不同工程要求。建筑喷泉包含了干燥的丝绸和泥土温度, 以提高压力抵抗力, 并且主要是阳光干燥, 选择的面向轨道被点燃并封闭为天气保护。

与此相反, 作家放松了 cl。(图 3.1b) 除去碎片和硬粒子, 以获得一个精致的塑料胶囊, 可以接受粘贴风格的印象; 大多数平板电脑只是空气干燥, 仅在后来的混合物中实现意外低射击。因此, 一个单一的地质资源产生了两个工程 “食谱”, 分别适用于压缩机和档案记录保存 (Oates, 1990; Moorey, 1999).



(a) 吉格拉特　　(b) 平板电脑

图 3.1: 克莱在梅索波塔米亚

3.1.2 梅索美洲: 玛雅和阿兹特克金字塔; c. 400 BCE 1521 CE

虽然梅索美洲寺庙金字塔后日期为旧世界的吉格拉特和埃及金字母超过一千年, 但它们在这里与以前的纪念碑一起被处理, 因为它们代表着一个独立的, 大规模的转变出现。步骤建筑 - 为纪念品的全球传统提供平行基础。这种独立发展, 没有与旧世界文明的接触, 表明某些结构性解决方案自然源于普遍工程限制。

梅索美洲的文明 - 包括玛雅人, 阿兹特克人和他们的先驱 - 为结构工程和纪念品建筑做出了显著贡献。它们的标志性金字塔, 其特点是滑坡楼梯、滑坡平台和与天堂现象相匹配, 作为宗教、政治和宇宙中心。这些结构不仅仅是为了印象而建造的, 而且是精心规划、材料选择和环境适应的产物。

玛雅金字塔, 如 西雅图,Palenque (250-900 CE), 图 3.2a, 和 Chichen Itza, 展示了高级别的工程复杂性。建筑师采用了增强荷载分布和减少侧振动的固态形状, 使高度更高而不损害稳定性。使用本地加热的相关术语石, 与基于粘膜的木材相结合, 在高湿度条件下允许长期凝聚。内部填充核心 - 通常是由橡胶和木材制成的 - 被压缩为提供 质量 和坚固性 (Coe, 2005; Sharer and Traxler, 2006). 这些金字塔经常支持寺庙在其峰会上, 指示他们的仪式意义, 并作为神圣空间的垂直标志。它们的地质学经常编码了日历和天文知识, 并配备了指向太阳星、平原星和金星周期的调整。

阿兹特克金字塔, 如 寺院市长在 Tenochtitlán (1325-1487 CE), 图 3.2b 以以前的传统为基础, 继续和编写。由火山基石制成, tezontle (红色拉瓦岩), 和相关术语石, 他们配备了宽敞的露台和滑板平台, 以分发自我重量并防止滑板腐蚀。许多人使用了类似于以前的 Teotihuacan 风格的建筑技术, 称为 **塔布莱尔**包含一堵 sl 墙 (泰勒) 由直角板上传 (图书馆) 增强结构完整性, 同时提供丰富的象征性和装饰潜力 (Smith, 1996). 这些结构往往包含了连续的建设阶段 - 新金字塔建在旧的顶部 - 意味着动态持续性和宇宙更新。

环境考虑是梅索美洲城市设计的核心。玛雅人和阿兹特克人都开发了先进的排水和雨水管理系统。在像 Tenochtitlán 这样的城市, 建在顶部的湖泊, 工程师创造了人工岛屿 (中国人), 升起因路, 和带有嵌入的石头渠道。在玛雅低地, 石线运河, 地下水库 (**库尔德人**), 和路线管理渠道帮助保持城市耐力, 尽管季节性高降雨 (Sharer and Traxler, 2006).

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 马雅:Tikal-palenque



(b) 阿塞拜疆:Tenochilan

图 3.2: 马雅和阿兹特克金字塔

因此, 梅索美洲的金字塔模拟了结构力学, 材料工程、水学和天文学的整合, 在正式科学理论形成之前很久。这些成就证明了一个实验性的建筑传统, 既是背景反应和概念野心。

3.1.3 埃及;C。~2700 年至 2000 年

纪念石建筑的诞生 埃及的建筑传统从 Imhotep 开始, 第三帝国期间参观法老 Djoser (c. 2660 公元前) 被广泛认为是历史上第一位名为建筑师、工程师和医生。(Lehner, 1997). 他想象并监督在萨克拉的步行金字塔的建设, 改造传统 **马斯塔巴** [1] 成为一座被打破的石头纪念碑, 标志着大规模四角石的第一次已知使用。这一创新引入了劳动组织、建筑物流和地质规划的基本原则, 为随后的金字塔设计设立了一个技术和象征性的基础。

由 Imhotep 启动的建筑线路 三世代后, 在法老斯内法鲁的下 (r. c. 2613-2589 BCE 公元前), 谁命令一系列的实验金字塔, 推进过渡从步形状到平面侧地质。在梅德姆, 斯内弗鲁可能完成了一座滑落的金字塔, 其外层后来崩溃或破坏, 尽管核心结构仍然不稳定, 导致重大结构调整。他的 Dahshur 的 Bent 金字塔揭示了一个中间的变化, 在一个缓解失败的步骤调整 - 随后是成功建造的红色金字幕, 埃及的第一个真正平滑侧金字母。

这些地质和建筑方法的精化直接使他的儿子和继任者 Khufu 能够实现吉萨大金字塔。具有不一致的精度、规模和结构性野心。它的原始柔软的表面是通过精心装饰的图拉相关术语石加石实现的, 其中大多数已经失去了腐蚀或重复使用。金字塔基础在 230 米的范围内差不多 20 毫米, 其侧面在一个程度的部分内与真正北方相匹配, 根据时间工具在地质控制方面取得了显著成就。完成的结构, 建于公元前 2550 年左右, 由大约 230 万块木材组成, 每块重几吨。(Lehner, 1997).

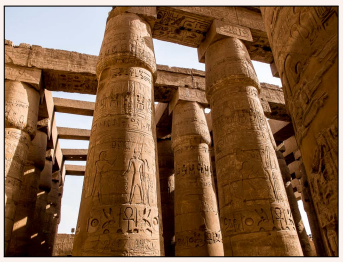
现代理论表明, 块被移动, 使用在沙子上插下的跟踪。(减少压缩高达 50%), 与拉姆系统一起 - 无论是直线, zigzag 或螺旋 - 也许准确的方法仍然被讨论。它的折叠侧面和调节基础优化重量分配, 有效地减少板块, 并在巨大的质量下实现长期结构稳定。这些发展在埃及结构思维中, 从实验的开始到纪念主权的进化。

寺庙、材料和基础设施 埃及寺庙, 如 卡尔纳克寺庙综合体, 图~3.3a, 展示在后和木材建设的掌握, 使用大石 单元. 催眠 客厅, 由从沙石和相关术语石挖掘的密集空间列支持, 显示压缩力量和天花板范围限制的复杂控制 (Arnold, 2003). 这些空间不仅为仪式目的服务, 还展示了一个象征性的石林, 加强了宗教和政治权威。

材料专业是埃及工程的核心。泥石、沙石和相关术语石被四角形、塑造, 并通过大量的距离运送, 使用跟踪、绳子和拉姆。奥贝利斯特的成功勃起往往超过 300 吨的证据, 以埃及对机械优势和荷载控制的理解, 特别是在升降和放置操作。

[1] A **马斯塔巴** 这是一个直角, 平面天花板的坟墓与内向的侧面, 在早期埃及葬礼实践中使用。通常是由泥相关术语或石头制成的, 马斯塔巴斯作为金字塔形状的先驱, 并包含地下埋葬室, 在地面上提供教堂。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 豪华的卡尔纳克寺庙 (~2000 年至 300 年)



(b) 步行金字塔在萨克卡拉 (~2667-2648 BCE)



(c) 吉萨大金字塔（胡夫 / Cheops，~公元前 2580—2560 年）

图 3.3: 埃及寺庙和金字塔

水力工程在维持埃及社会方面也发挥了重要作用。尼罗河的年度洪水通过渠道、储存池和湖泊网络进行管理, 支持稳定的农业经济。这些项目反映了流体动态和早期大规模基础设施规划的实用知识。(Butzer, 1976).

地质学与 Seked 我们对埃及实用数学的两大知识来源是: *Rhind* **数学论文** 和 The **莫斯科数学论文**. 复制在中世纪和第二中期期间, 这些手稿记录问题集涉及的算法, 地质学, 单位转换和建筑测量。桌子~3.1 总结了每份文件的日期、动态背景和当前存储库, 详细研究 Robins and Shute, 1987 和 Gillings, 2019. 他们一起揭示了在埃及中部王国期间建立的金字塔建设、土地探测和量计算的基础实验方法。

表 3.1: 埃及两大数学论文的关键数据

纸质	延伸复制日期	原始内容的可靠日期	动态 / 时期	现存库
Rhind 数学论文 (RMP)	c. 第 1650 章 (作者:Ahmès)	中國源材料,C。1850 年至 1800 年 [2]	晚 13th 早期 15th 迪恩。(第二次中介)	英国博物馆,EA 10057 – 10058
莫斯科数学论文 (MMP)	c. 1850 年公元前	与复制相同的现代化	第十二帝国, 中部王国	普什金国立博物馆, inv. 4676

雷恩德的复印件可能保留了在中帝国期间两世纪早些时候首次编写的问题。

埃及人开发了一种基于 **库布**, 一个古老的长度单位定义为从手指到中指顶的距离。它的价值在各个文化中有所不同, 通常从 44 到 52 厘米。(17 至 20 英寸). 古埃及所谓的“皇家圆形”大约为 52.4 厘米, 在建筑、建设和研究中广泛使用。和 它分为 7 个棕相关术语, 每颗棕色分为 4 个手指, 分为 28 个单元。(图,3.4a). 相比之下, 标准希伯来圆形大约为 45 厘米, 而梅索波塔米亚 (苏美里亚) 估计, 圆形已经稍长一点, 大约 49 至 50 厘米。

和 **塞克** 这是埃及方法表达一个金字塔的面孔。它测量了一个圆形垂直上升的水平运行。因为一个圆形相当于七个棕相关术语树, 所以分裂是用棕色表达的。(和手指) 每升的圆圈。基于金字塔升高角度 ϕ 是的,SEKED 数学上定义为:

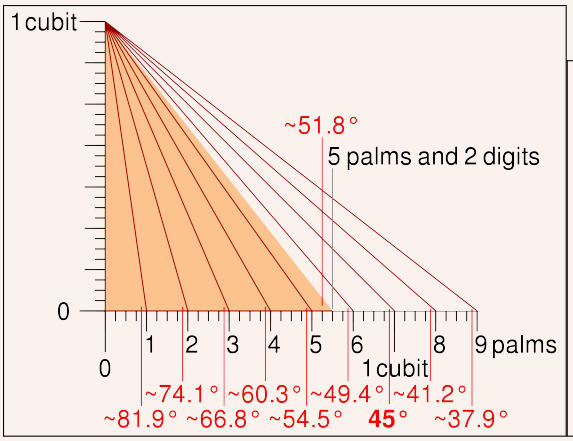
$$s = 7 \cot \phi$$

请注意, 分裂可以被解释为一个合理的接近可口功能 - 运行单位升起 - 这与现代三角学思维相匹配。虽然没有证据表明, 埃及人在希腊意义上有角或三角形功能, 但他们的分裂体现了一个类似于科坦的地质关系。相比之下, 正式的三角学作为数学学科没有发展到 2nd 希腊天文学家和数学家 **希帕奇**经常被认为是三角形的父亲。

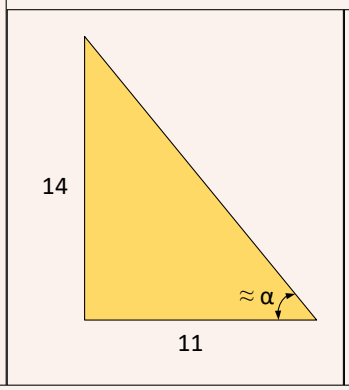
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



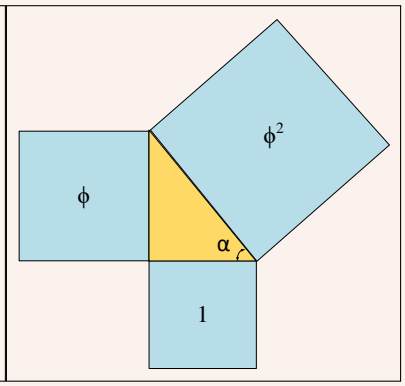
(a) 埃及皇家库比特 (link)



(b) 定义 (link)



(c) 14:11 三角形用于金字塔



(d) 凯普勒三角形接近

图 3.4: 埃及地质和金字塔比例

对于吉萨大金字塔, 分数记录为 5.5。(五个手指和两只手指) 给予:

$$\phi = \cot^{-1}\left(\frac{5.5}{7}\right) \approx 51.84^\circ$$

这相当于 14:11 的上升与运行比例, 如图中所示。~3.4c, 并与重建的金字塔地质相匹配 (Bartlett, 2014).

有些人猜测金字塔的比例是为了反映 **黄金比例** 基普勒三角形的地质学 (图~3.4d). 在这种情况下, 关系将是:

$$\frac{14}{11} = 1.2727\ldots \quad \text{vs.} \quad \sqrt{\phi} = 1.2720\ldots \tag{3.1}$$

相对差距低于 0.06%但如 Markowsky, 1992 注意, 物理尺寸中的数学恒定的存在不一定意味着故意设计 - 特别是由于缺乏一个明确的埃及概念框架为异常数字。

3.1.4 比较梅索波塔米亚人、梅索美洲人和埃及人

寺庙 尽管它们的视觉相似之处, 但梅索波塔米亚、埃及和梅索美洲的纪念结构 - 吉格拉特、金字塔和寺庙 - 各式各样的金字母 - 从不同的文化、结构和功能框架中出现。3.2.

梅索波塔米亚吉格拉特如乌尔的大吉格拉特, 建造为大规模的、高层平台, 主要是由阳光干燥和相关术语发的泥棒制成的, 比图姆用作防水剂。这些结构是完全坚固的, 并作为寺庙的升高基础, 象征着物理上帝的王国。西格古拉特不是一个公共空间, 而是一个神圣的牧场, 仅可供祭司教堂使用。结构上, 基格拉特依赖于负载重量和逐步粘贴以缓解压缩压力, 并在重力负载下提高耐用性。

埃及金字塔被吉萨大金字塔所描述, 是纪念碑的坟墓, 旨在为法老的身体住宿, 并使他们进入后世的旅程更容易。主要是由泥石和相关术语石制成的, 它们展示了精致的地质准确性和内部室内布局。焦点是内向: 葬礼

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

功能, 保护萨尔科法格斯, 和宇宙与太阳和恒星周期相匹配。这些金字塔在完成后没有访问或使用仪式。他们的工程卓越包括精确的马索尼, 荷载 -shedding 通过弯曲飞机和强大的内部空白管理。

墨西哥神庙金字塔如同在 Chichen Itza 和 Tenochtitlán, 结合了仪式、天文和政治功能。这些结构经常在阶段内建造, 旧的核心上添加了新的层。他们用石头、泥相关术语和橡胶填充而建造, 支持用于仪式、公共表演和天堂观察的顶峰寺庙。与埃及金字塔不同, 这些不是坟墓; 与吉格拉特不同, 它们是可用和互动的。它们的地雷形状、宽阔的楼梯和与太阳和金星周期相匹配, 深深融入了城市社会政治生活。

简而言之, 虽然所有三个传统都产生了步行或金字塔形状, 但由于不同的原因: ——该 **吉格拉特** 把上帝升起。——该 **埃及金字塔** 奉献死者。——该 **墨西哥神庙金字塔** 活着的站点。

这些结构反映了每个文明的世界观、技术能力和物质环境。

表 3.2: 与文明相矛盾的纪念建筑

特色	**吉格拉特 (梅索波塔米亚)**	**金字塔 (埃及)**	**神庙金字塔 (美洲)**
原材料	布里克, 比特币	林相关术语, 大理石	石头、相关术语石、橡胶核心
功能	神殿基地为上帝	皇家坟墓	仪式、政治和天文平台
内部	固体 质量; 没有房间	室内通道、葬礼室	可以包括室内房间, 重建的核心
接入	限制祭司	无 (葬礼后)	公共仪式, 峰会寺庙访问
宇宙学	天与地球之间的联系	与星星和太阳相匹配; 后生命之旅	日历周期, 太阳系, 金星跟踪
结构逻辑	质量 为 重力 加载	飞机, 空白的折叠	滑板露台, 宽敞的破坏控制平台
象征主义	Axis mundi; 神圣居住地	法老的永恒力量	神圣王国和宇宙秩序的阶段

测量系统和地质知识 在分析后来的古典纪念碑的结构逻辑之前, 有用对抗三大早期文明 埃及、梅索波塔米亚和梅索美洲 如何测量空间和编码地质。桌子 3.3 突出 (i) 他们所采用的基本单位, (ii) 這些單位是如何分裂的, (第三) 引导建造的地质思想, 以及 (iv) 數學記錄或持續來到我們身上。尽管有显而易见的分数和目的差异, 但每个传统都将实验观察转化为坚实的建筑规则。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 3.3: 测量实践和地质重点在三个古代文化

文明	首要单位	分区 / 数值 系统	地质焦点
埃及人	库比特 (Elbow 指纹)	1 库布 7 手指 28 指	塞克 (按 Cubit 运行 升起) 金字塔角
墨西哥	库比特 像尺寸 (区域多样性)	~ 指数: 每片 30 个基 60 性别分裂	区域/体积接近; 右三角列表 (普林顿 322)
美洲人	特拉克西特 (手相关术语) 玛雅汤姆 (360 天一年)	手指、手指; 基地 20 (维多利亚) 数字	步行金字塔同位素; 天空的调整

文明	数学记录	已知的常态或拉蒂奥
埃及人	雷恩德和莫斯科数学论文	塞克 (可口可乐) • 接近 $\sqrt{2}$ 和 π
墨西哥	楔形文字泥板（Plimpton 322、YBC 7289 等）	皮塔哥里亚三角形; $\sqrt{2}$ • 性别分裂
美洲人	基于日历的比例; 观测天文学	太阳系/阴道周期; 模块式同位率

表 3.4: 文明的关键结构创新比较时间表

创新	文明	接近日期	例子 / 笔记
材料创新			
放弃布里克	梅索波塔米亚	C。3500 公元前	乌鲁克时期结构
大尺寸石材	埃及	C。2660 公元前	步行 Djoser 的金字塔
水力 混凝土	罗马	C。300 元	Opus caementicium 与 pozzolana
钢铁	中国	C。第四世纪欧洲央行	农业工具, 后来结构性
99% 清洁的铁	印度	C。四百 CE	德里的铁柱
结构系统			
可口可乐 拱	梅索波塔米亚	C。4000 元	地下排水, 墓地
真色毛茸茸 拱	罗马尼亚 / Roman	C。700 - 500 BCE	由小说家完美
房屋建设	罗马	C。第 126 章	潘特文 (未增强 混凝土)
布莱克系统 (杜格)	中国	C。五百元	地震耐木材
灵活的关节 (卡纳瓦 • 图西)	日本	C。六百 CE	Horyu-ji 寺庙
工程成就			
灌溉系统	梅索波塔米亚	C。3000 元	频道网络
金字塔建设	埃及	C。第 256 章 天下	吉萨大金字塔
Dujiangyan 灌溉	中国	第 256 章	今天仍在工作
罗马之路	罗马	C。第 312 章	通过 Appia
大墙 (拉米地)	中国	C。第 220 章	Qin Dynasty 统一

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

3.2 古典古代: 地质学、理论和帝国

3.2.1 波斯: 帝国平台、桥梁和 康纳

波斯在结构工程历史上占据了独特的地位, 作为继承人和创新者。继承梅索波塔米亚建筑传统, 波斯工程师显著超越他们, 创造创新将影响希腊和罗马工程实践。希腊 - 波斯战争引发的激烈文化交流 (499 - 449 EC) 通过亚历山大的征服和随后的希腊时期延伸, 创造了一个双向的技术知识流动, 这丰富了两种传统。

波斯人被列入 **古典古代** 由于阿切门帝国 (c. 550 – 330 BCE) 与古典希腊同时繁荣, 直接先于帝国罗马。技术上和艺术上, 波斯工程师继承了梅索波塔米亚的灰相关术语传统, 但在它们之外取得了显著进步, 创造了像佩塞波利斯这样的纪念碑性石头雕刻的宫殿综合体。, 精致的桥梁, 以及广泛的水管理系统。这种波斯的创新影响和竞争了希腊和罗马结构实践。此外, 由希腊 - 波斯战争启动并通过随后的希腊交换扩展的文化互动将波斯和地中海工程传统结合在一个共享的经典故事中, 清楚地区分波斯与东方的独立建筑轨道。

Achaemenid 帝国建筑 波斯工程在阿哈梅尼德时期达到其日内塔, 例子由佩塞波利斯的纪念宫殿综合体. 建造了一块大规模的石板, 尺寸约为 450 米 300 米, 高 15 米以上的周围平面,Persepolis 配备了精心绘制的石柱, 有效地分布重屋顶负载到坚固的基础上。阿帕达纳大厅独自雇用了七十二个单一的相关术语石柱, 每一个高约 20 米, 有特征的双头熊首都。

精确的马索尼和迷人的艺术细节反映了结构稳定与象征性表达的故意融合, 加强帝国权力的伟大。铁底层和粉碎的灰尘裂缝锁定了柱喷雾, 而塞达尔和西普雷斯喷雾伸出 25 至 30 米, 形成古代最宽的清晰天花板之一 - 后来希腊催眠室寻求模拟的成就。

波斯工程师也掌握了长间桥梁: 达里乌斯 [3] 波斯福和塞尔克斯的桥梁 [4] 桥梁超越 Hellespont 展示了复杂的清洁, 安克拉格和节奏负载的理解, 使整个军队, 马匹和塞尔火车可以穿过开放水。

萨桑桥和水力结构 (224–651 CE) 随后, 波斯人结构工程在萨桑德王朝期间进一步发展, 如修炼桥梁建设实践所示。著名的例子包括 Dezful 和 Shushtar 桥, 两者共约 260 个。~沙普尔统治期间~我, 在他对罗马皇帝瓦莱里安的胜利之后。

沿着德斯河的德斯福桥, 使用约 7 万罗马战俘的工作建造。舒斯塔尔桥 (**乐队和皇帝**) 经过卡隆河, 同时作为桥梁和泥土。两座结构都配备了精心设计的布里克和石头架。将重力负载有效地转移到其基础上, 整合水道组件, 如管道和水道, 以实现双重运输和区域水管理的目的。(Huff, 2005).

这些桥梁表现出对水力力量的先进理解, 其加速的马索尼亚分散风格和早期石头板块包含了保护冲击和流量控制的原则, 后来会影响伊斯兰和欧洲水力工程。

Qanats: 地下水力学与结构创新 (第一千年 ECB 前进) 波斯水力工程的掌握是由 *q*an qan 系统: 一个精致的地下灌溉网络, 将地下水运送到长距离, 以维持干燥环境中的农业, 图 3.6a. 设计的 **可**口可乐 需要精确的流量, 水力格拉迪安特和地下水动态计算, 证明了流体流量的先进实验理解。

同样重要的是需要的结构创新。*q*an qan 建造:

- **垂直接入轴承**定期用石头或烤板粘贴, 以防止崩溃。

[3]达里乌斯的桥梁穿越波斯福 (C。第 513 章) 由萨莫斯岛的工程师曼德罗克尔建造, 以便达里乌斯的军队进入欧洲, 为他对抗斯基提派而进行战斗。赫罗多图详细描述了桥梁, 并记录了达里乌斯建造纪念柱, 以阿西里语和希腊语列出他的军队中的所有国家。曼德鲁克尔用他的重大付款来委托一幅军队穿越桥梁的绘画, 他在萨莫斯的赫拉寺庙里用一个伴随的字体, 图 3.5. 雖然歷史上有意義和有文件, 但橋似乎已被描述的名稱所認識, 而不是有一個特定的正確名稱。(Herodotus, 1921 PDF).

[4]Xerxes 的桥梁超越 Hellespont (第 480 章) 事实上, 两座平行桥梁是在第二次波斯入侵希腊期间建造的。从阿比多斯到塞斯托斯附近建造, 桥梁围绕了大约七个阶段。(C。1300 米). 东北桥使用 360 艘船 (五角大楼和三角) 虽然西南桥使用了 314 艘船, 所有这些船都合并并覆盖着板块。著名的是, 第一套桥梁被风暴摧毁, 迫使塞尔克斯以 300 个火柴、热讽和火柴的象征性惩罚地狱, 同时执行负责工程师。重建的桥梁成功地将 Xerxes 的大型军队带到一个跨越, 持续了七天和夜晚没有休息。就像达里乌斯以前的桥一样, 这些人以他们的描述名称而不是具有具体的正确名称。(Herodotus, 1921 PDF).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

87. Having viewed the Pontus, Darius sailed back to the bridge, of which Mandrocles of Samos was the chief builder; and when he had viewed the Bosporus also, he set up by it two pillars of white stone, engraving on the one in Assyrian and on the other in Greek characters the names of all the nations that were in his army; in which were all the nations subject to him. The full tale of these, over and above the fleet, was seven hundred thousand men, reckoning therewith horsemen, and the number of ships that mustered was six hundred. These pillars were afterwards carried by the Byzantines into their city and there used to build the altar of Orthosian [1]

[1] A deity worshipped especially at Sparta; the meaning of the epithet is uncertain.

Artemis, save for one column covered with Assyrian writing that was left beside the temple of Dionysus at Byzantium. Now if my reckoning be true, the place where king Darius bridged the Bosporus was midway between Byzantium and the temple at the entrance of the sea.

88. After this, Darius, being well content with his bridge of boats, made to Mandrocles the Samian a gift of ten of every kind;[1] wherefrom Mandrocles took the firstfruits and therewith had a picture made showing the whole bridge of the Bosporus, and Darius sitting aloft on his throne and his army crossing; this he set up in the temple of Here, with this inscription:

"This Picture Mandrocles to Here gives,
Whereby for ever his Achievement lives;
A Bridge of Boats o'er *Bosp'rus'* fishful Flood
He built; Darius saw, and judg'd it good;
Thus for himself won Mandrocles a Crown,
And for his isle of *Samos* high Renown."

34. Beginning then from Abydos they whose business it was made bridges across to that headland, the Phoenicians one of flaxen cables, and the Egyptians the second, which was of papyrus. From Abydos to the opposite shore it is a distance of seven furlongs.[2] But no sooner had the strait been bridged than a great storm swept down and brake and scattered all that work.

35. When Xerxes heard of that, he was very angry, and gave command that the Hellespont be scourged with three hundred lashes, and a pair of

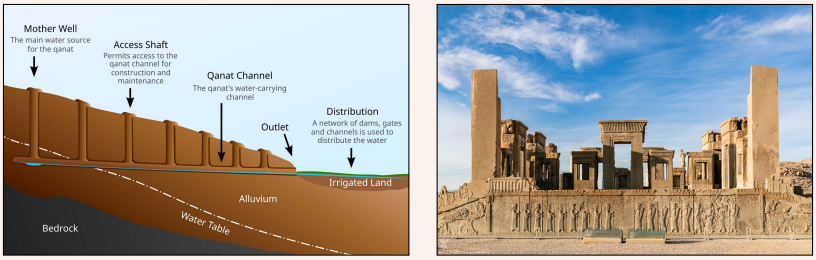
[2] The modern width at the narrowest part is nearly half as much again; perhaps this can be explained by the washing away of the coasts, due to a current which strikes them near Sestos and rebounds on Abydos.

fetters be thrown into the sea; nay, I have heard ere now that he sent branders with the rest to brand the Hellespont. This is certain, that he charged them while they scourged to utter words outlandish and presumptuous: "Thou bitter water," they should say, "our master thus punishes thee, because thou didst him wrong albeit he had done thee none. Yea, Xerxes the king will pass over thee, whether thou wilt or no; it is but just that no man offers thee sacrifice, for thou art a turbid and a briny river." Thus he commanded that the sea should be punished, and that they who had been overseers of the bridging of the Hellespont should be beheaded.

图 3.5: 赫罗多托在波斯福的交叉上, 由波斯人 (Herodotus, 1921)

- **ARCHED 画廊**: 由火柴或石头建造的桶瓦式隧道, 以稳定在不稳定的土壤中挖掘
- **先进材料**: 精心挑选煮熟的火柴、泥相关术语和石油, 以提高对地质和地震压力的抵抗力

帝国全域 *q*an qan 网络 - 紧急滑动, 数公里长的地下画廊由垂直轴承通风 - 需要精确的地质检查, 地下水控制和长期维护规划。许多人仍然在今天使用, 代表人类最持久的水力成就之一。(Wulff, 1968).



(a) 卡纳特

(b) 波斯

图 3.6: 波斯

3.2.2 阿拉伯伊斯兰贡献: 创新在结构工程

从 7 世纪开始, 阿拉伯伊斯兰工程师系统地开发了结构创新, 这将深度影响全球建筑实践。他们的贡献包括精致的拱形式, 先进的木材建设, 复杂的数学基础和城市规模规划原则。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

建筑改造在弓和瓦尔特 阿拉伯 - 伊斯兰工程师开发了一个广泛的档案形式, 包括马相关术语, 指向和多层档案。指向的弓, 特别是代表了对罗马半圆弓的显著结构进展, 通过减少侧冲动并允许更轻、更高的墙壁。这种创新后来证明对哥特式建筑至关重要 (章节 4).

清真寺、马德拉萨和宫殿的广阔使用不仅提供了结构优势, 还允许开放、照亮的室内空间成为伊斯兰建筑的标志。除此之外, 瓦尔特系统如穆加纳三维地质蜜蜂细胞 - 作为装饰和结构分布性特征在家园中出现 和伊万斯.

建造房屋的结构创新 伊斯兰工程师通过创新结构技术完成了木材建设。使用 Pendentives 和 squinches 允许循环 Domes 在平板或直角基础上支持, 解决一个基本的地质和结构挑战。岩石之城 (691 CE) 后来, 伊斯坦布尔的伟大家园展示了对压缩环、侧轴分布以及多种结构系统的整合的复杂理解。

波斯被处理在内 **古典古代** 因为阿切门帝国 (c. 550–330 BCE) 它与古典希腊相符, 即时先于帝国罗马。波斯建筑师, 尽管继承了梅索波塔米亚的铜砖传统, 但很快完成了大规模切石和木材建设。波塞波利斯例如, 阿帕达纳大厅在一块石头露台上升起, 使用了七十二个单曲列, 每列约为 20 个。m 高与双头泡头。铁下滑和粉碎的奶油裂缝锁定了柱喷雾, 而塞达尔和西普雷斯喷雾冲动 25-30。形成古代最广阔的清晰天花板之一 后来希腊催眠室寻求模拟的成就。(Curatola and Scarcia, 2003).

波斯工程师也掌握了长间桥梁: 达里乌斯的桥梁 穿越波斯福和塞尔克斯最熟悉的桥梁 超越 Hellespont, 展示了精致的清洁、安克拉格和节奏充电的理解, 使整个军队、马匹和游艇列车能够穿过开放水。

帝国也同样进步。*qan* **网** 即时滑动, 长几公里的地下画廊由垂直轴承通风 - 需要精确的地质检查, 地下水控制和长期维护规划; 许多仍在使用今天 (Behnia, 2021). 水力工艺, 如帕萨加达 (Pasargadae) 和卡隆河 (Karun River) 的早期岩石树木等, 进一步描绘了波斯的水动力负载和相关术语保护命令。

这些柱和梁, 桥梁和地下水域的创新不仅竞争, 而且直接影响了当代希腊和后来罗马结构实践。希腊波斯战争的激烈文化接触, 随后几个世纪希腊交换, 将波斯的成就融入更广泛的经典工程管道, 把它们与印度、中国和日本发展远东的独特建筑轨道分开。

材料策略和模块化: 哥尔多巴大清真寺 和 哥尔多巴大清真寺 (第 784 章 开始~CE) 饰 Fig 3.7a, 它通过其革命性的双层拱系统模拟了结构性天才。这些粘贴的架子, 由滑板列支持, 解决了不足的柱高度的问题, 同时创造了一个独特的建筑词典。使用替代石头和火柴刷子不仅提高了结构耐力和侧面硬度, 还引入了一个模块化美学和建设性节奏。

这项策略增加了空间灵活性, 同时在扩展式祷告厅中保持结构完整性, 使易于扩展 - 清真寺多次扩大, 同时保留其结构逻辑。(Fletcher, 2004).

数学作为结构实践的基础 伊斯兰对结构工程的贡献受到数学领域的突破性发展所支撑。学者如 阿尔 • 哈瓦里兹米 (9 世纪) 正式化算法方法, 允许象征性操纵结构关系和精确的建筑计算。奥马尔 • 哈伊姆 (十一世纪), 图 3.7b 通过他的地质方法对圆形方程, 影响空间规划和瓦尔特地质计算。

这些数学进步支持更准确的压力估计, 波曲线控制和布局精度, 将抽象数学理性与实用工程应用联系起来。伊斯兰数学家开发的三角形测量提供了计算拱个人资料、圆形地质和结构力量的重要工具。(Hogendijk, 1994).

城市规模结构规划 除了个人纪念碑之外, 伊斯兰工程师为城市规模的结构组织做出了贡献。城市如 **巴格达** 和 **伊斯法汉** 它配备了轴规划、纪念碑门和系统地组织的基地和住宅区。这些城市的阿卡德、模块列网和水分配系统的负载路径不仅反映了建筑复杂性, 还反映了分布负载、侧面稳定性和材料效率的实验理解。(Hill, 2019).

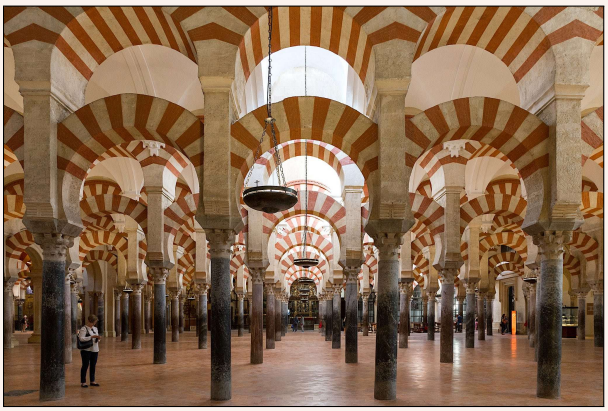
结构系统与城市基础设施的整合, 包括覆盖市场、住宅综合体和公共浴室, 使伊斯兰工程师成为全面环境设计的先驱。

3.2.3 希腊对静态和结构力学的贡献

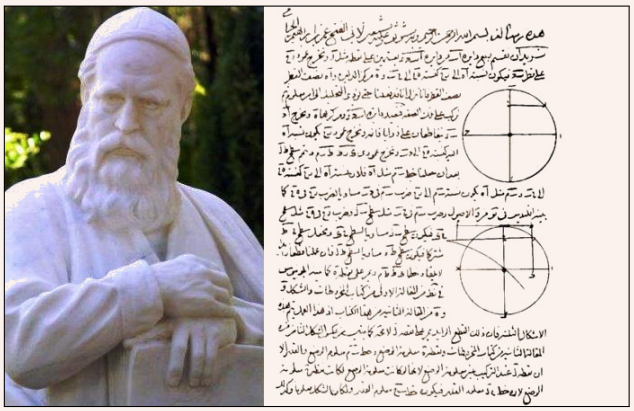
希腊简单机器的合理化 古希腊人为结构力学做出了基本贡献, 特别是通过简单机器的合理分析。虽然以前的文明已经使用了几个世纪, 但希腊人首先提供了理论框架来理解他们的行为。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

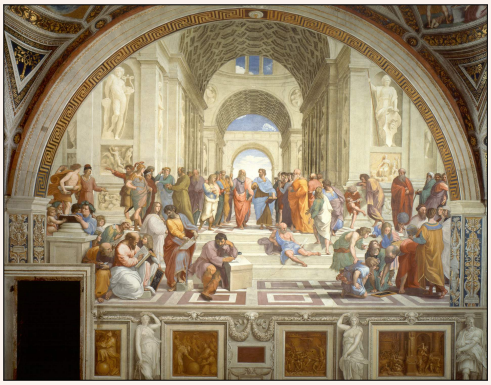


(a) 科尔多瓦



(b) 奥马尔・基亚姆

图 3.7: 阿拉伯伊斯兰



(a) 雅典学校 (拉斐尔)



(b) 帕特伦

图 3.8: 希腊

在这些设备中, **升起** 它是最基本的简单机器。雖然被梅索波塔米人和埃及人用於建設目的, 但希臘人是第一個開發系統理論, 解釋其機械原則。

塔伦图的 Peripatetic 学校和 Archytas 第一個理論討論的相关术语出現在周圍治療中 **机械问题**, 被归功于亚里士多德的 Lyceum。

虽然曾经被认为是真实的亚里士多德, 但 **机械问题** 现在被认为是早期机械反思的集合, 可能受到思想家的影响。**塔**伦图的建筑 (c. 428–350 BCE). 阿基塔斯是一位来自希腊城市的皮塔哥尔哲学家、数学家和国家主义者。**塔伦特** (意大利南部的现代塔兰托). 他经常被认为是创始人之一。**数学机械**, 成为第一个将量子和地质逻辑应用于物理问题。在问题上~3、对待的论点引入了平衡瞬间手臂的概念, 并呼吁一种原能理性的形式　假设小势力可以移动大重量, 当应用于从一个满体更大的距离时, 因此, 预测现代机械优势的概念。

> 為什麼小勢力可以通過一頭相关术语子移動大重量, 正如治療開始時所說的那樣, 看到一個人自然增加了頭骨的重量呢?
>
> ... 但是, 因为在同一重量的冲动下, 从中间的更大射线越快移动, 并且有三个单元在直升机上, 满体, 即

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 绳子或中心, 以及两个重量。既是引发动作的, 又是被移动的; 现在, 重量转移到重量移动的比例是距离中心的相反比例。现在, 从满洞的距离越大, 它就越容易移动。
>
> Peripatetic School, circa 4th century BCE, No. 3

这种基于力量和距离的产物的动态思维, 预测了时刻和劳动能量保养的现代概念, 可疑提供比亚基米德更直观的理性。以後的地質 表述.

阿基米德和静态的基础 阿基米德 (c. 287–212 BCE), 在他的治疗中 **关于平衡的计划**, (Archimedes, -250) 正式化了利弗的法则 并为古典静态奠定基础. 他的第六个提议介绍了机械学的第一方程式可以被认为是什么:

> 尺寸在平衡的距离是相互比例的重量。
>
> Archimedes, -250, Proposition 6 Book I

亚基米德斯将机械作为一个自我包含的理性科学, 建立在论文和数学证据上, 与亚里士多德更物理地根植的方法相反。虽然亚基米德的待遇是地质学的, 却被一个明确的力量概念所剥夺。(看章节 14) 然而, 它建立了数学基础的结构分析.

希腊建筑与结构实践 希腊建筑发展延伸到令人惊叹的建设成果, 主要是广泛使用 **工作建设**— 基于后和后线原则的系统, 在其中垂直射线 (林) 它是由垂直列支持的。这种方法, 是希腊寺庙的特点, 在没有真正的拱建筑的情况下定义了它们的结构和美学方法。

雅典的阿克罗波利, 尤其是帕特伦, 图 3.8b, 它是这种方法最具标志性的体现, 结合精致的比例与纪念品规模。其建造在菲迪亚斯的艺术方向下 [5] , 谁监督雕像单元和设计和谐, 例子希腊合成工程, 建筑和艺术。建筑物的微妙改造 - 包括内塔西斯 (柱 泡沫) 和轻向内滑 - 展示视觉感知和结构优化的复杂理解。

希腊人还开发了机械装置, 如火柴和合成火柴, 反映了力量分配、提升机械以及在寺庙建设期间处理重型建筑材料的实用理解。(看见 § 回复标签: 机械).

希腊工程中的拱的缺席 尽管他们在静态和理性机械方面取得了进步, 但希腊人却没有发展到建筑用途, 这将后来成为罗马工程的标志。希腊建筑几乎专门依赖于后和小型建筑, 限制覆盖空间的范围和规模。拱, 其能够有效地传输负载和宽敞开关的能力, 在希腊结构 repertoire 部分缺席。这个限制将被罗马工程师决定地克服, 他们将拱转化为纪念品建筑的基本单元。

雅典学校 (拉斐尔) 虽然画在 16 年初 th 梵蒂冈, 拉斐尔 **雅典学校**, 图~3.8a 它提供了一个复兴的视觉, 古希腊的知识遗产。作为教皇公寓的一部分, 这幅画以古典哲学和科学为荣誉, 将图标希腊思想家聚集在一个理想化的建筑环境中, 提醒希腊寺庙。组成象征着抽象思维和实验研究的融合, 这些基础上后来建立了结构分析的纪律。

中心是柏拉图和亚里士多德, 象征性地分裂理想主义之间的场景。(左) 和实验主义 (正确的). 周围, 拉斐尔安排了代表逻辑、地质学、天文学和形状物理学的数字 - 这些学科不仅塑造了古老建筑, 而且构成了机械学和结构理论的概念框架。

[5] 黄金比例 (§2.1.6) 经常被希腊文字所描述。ϕ (皮) 传统上, 以菲迪亚的名义。Phidias 与 Parthenon 的设计和装饰有关, 后来科学家发现了比例。**接近** 黄金比例。雖然沒有直接的證據, 菲迪亞斯有意識地使用這個連續, 象徵性名稱反映了他的遺產, 在古典藝術和建築中的調和比例的主人。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

中央人物:

柏拉图: 中左, 指向上方, 持有 **泰米奥斯**. 由莱昂纳多 • 达芬奇制作。

亚里士多德: 中右, 手垂直, 握着 **道德**.

左侧 (理想主义、哲学、抽象思维):

苏格拉底: 与他人进行辩论, 可因其独特的特点和异常性行为而识别。

皮塔戈拉斯: 写在一本书中, 被学生包围; 与和谐和数学神秘主义有关。

赫拉克利特: 坐在前面独自一人, 失去了思考; 后来添加并模拟在米歇尔安吉洛。

帕尔梅尼德: 可能是皮塔戈拉斯旁边的图像, 代表了形态理性。

Plotinus 或 Epicurus: 可能存在于内观学校的哲学家。

催眠 (争议): 一个罕见的女性人物, 有时被解释为新柏拉图主义哲学家。

右侧 (帝国主义, 科学, 数学):

欧克里德 (或 Archimedes): 展示一个地质理论, 用一个模型; 建于建筑师布拉曼特。

普托利米: 拥有地球, 代表地理和天文学。

佐洛斯特: 擁有天體, 代表宇宙學或天文學。

拉斐尔 (自我肖像): 在远右边, 直接看着观众。

二元素: 在步骤的中心前线上, 反对愤世嫉俗主义和对物质主义的仇恨。

某些数字的分配仍然是投机性的, 尤其是那些没有拉斐尔标签。许多识别是基于风格的提示, 动作和历史背景。

从柏拉图的时代到中世纪, **四角形** 它是四个主题或艺术的组合 - 数学, 地质学, 音乐和天文学 - 形成了第二个课程阶段后准备工作在 **特里维亚**, 由语法, 逻辑和理性组成。二者共同构成 **特里维亚** 和 **四角形** 由七个自由艺术组成, 形成了西方社会的自由艺术教育的基础, 直到它逐步被教科文组织转移。**人文研究** 其后, 他的发射, 从 五角大楼 在十四世纪。七个古典艺术被认为是 **思考能力** 与实践艺术, 如医学和建筑一样区分。(Wagner, 1983).

古典希腊思维中的税理学 希腊哲学家通常将现象组织为顺序的计划, 他们在自然、道德、心理和逻辑中寻找结构。这些 taxonomies 作为 heuristic 架子 (非现代生物分类) 通过基本组成、因果分析、类别逻辑和灵魂、幽默和影响的类型学进行框架调查。下面的表列出了在学校和期间使用的代表性示例, 表 3.5.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 3.5: 在古典希腊哲学与科学中选择的分类方案

思想家 / 学校	分类方案
英雄	四 单元 (根) 地、水、空气、火。
柏拉图	三角灵魂: 理由 (物流) 精神 (托马斯 és) 食欲 (艾滋病毒). **泰米奥斯**: 常规固体和单元—tetrahedron (火) 奥克塔德隆 (空气) 伊科萨赫顿 (水) 库布 (地球) 多德卡赫德隆 (宇宙 / 全世界).
亚里士多德	**甲状腺:** 十个类别 物质、数量、质量、关系、地点、时间、位置、状态、行动、激情。 **自然哲学:** 四个原因 物质、正式、有效、最终。 **单元:** 基本品质的组合 - 火 (热 + 干) 空气 (热 + 天气) 水 (冷 + 天) 地球 (冷 + 干) 以第五个单元为天体。 **生物学:** 灵魂的功能 - 营养 (植物) 敏感 (动物) 理性 (人类). 动物区别 - 血腥 / 无血, 活性 / 紫色, 地面 / 水域。 **理性:** 三种类型 自由性、司法性、流行性。
皮塔哥里亚人	十对面表: 限/无限, 奇怪/同等, 一个/多人, 右/左, 男女, 休息/动作, 直/曲折, 光/黑色, 好/坏, 平方/圆 (从亚里士多德的重建 **甲状化**).
希普克拉特 / 加利尼亚	四种幽默: 血液、相关术语、黄黄、黑黄。 四个温度: 血性、相关术语性、胆固性、旋律性。
斯托克	四个类别: Substrate (Hupokeimenon) 合格的 (波恩) 被排除 (pō 艾康) 相似分散 (主持人 Pō 艾康). 四个激情 (路径 ē) 食欲、恐惧、喜悦、痛苦; 相应的理性善良情绪 (欧佩特).
神学	工厂系统分类 **植物史**关于:Morphology (树木、草地、草原), 栖息地, 生长模式和繁殖方式。

3.2.4 罗马: 混凝土, 架构和基础设施

罗马帝国为结构力学和工程做出了令人震惊的贡献, 这仍然是现代实践的基础。他们的工程天才包括了架构的开发和应用, 革命性的混凝土技术, 以及全面的水力系统, 以及有系统化的建筑方法的遗产。

拱与穹顶技术的成熟 拱的罗马主教 革命建造, 使比以前可能的结构更大、更稳定。它们在桥梁、水族馆和纪念建筑中系统地使用弓箭, 如 哥伦比亚 - 展示了荷载转换和抗压强度优化的实用理解 (Vitruvius, 1960).

扩展到基于弓的概念, 罗马人开发了相关术语和绿谷, 允许扩展和无间断的室内空间没有紧密的支持。由两桶瓦尔的交叉形成的绿色瓦尔, 有效地将负载转向差异点, 使罗马人能够创造像卡拉卡拉浴室那样广阔的室内空间。

创新在罗马混凝土 也许最具变革的罗马创新是他们开发混凝土 (首頁 〉 外文書 〉 西洋文學 〉 Italianindex-hopus caementicium. 由火山灰混合制作 (波兹拉纳), 粘贴和集成橡胶, 这种材料具有显著的特性: 它设置了水下, 抵抗环境衰退, 并可以塑造到复杂的形状。

罗马混凝土的适应性允许勇敢的建筑实验, 由 Pantheon 模拟, 其巨大的未加强的混凝土地层反映了物质行为和压力分布的复杂理解。(MacDonald, 1982). 潘蒂昂的半球圆形, 直径和高度 43 米, 仍然是世界上最大的未

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

修复的混凝土圆形圆形。它的建筑使用了毕业集合物 - 重型特拉维丁在基地转移到轻量级喷雾机附近的冠冕 - 展示了应力优化原则的直观概念。

水力工程与基础设施 罗马在水力工程中的卓越是由他们的水道系统, 如 Gard Pont 的例子。. 这些结构通过长距离运送水, 使用精确计算的格拉迪安来保持持续流动。(Hodge, 1992). 拱水道的多层建筑减少了材料需求, 同时提高了结构稳定性和视觉影响。

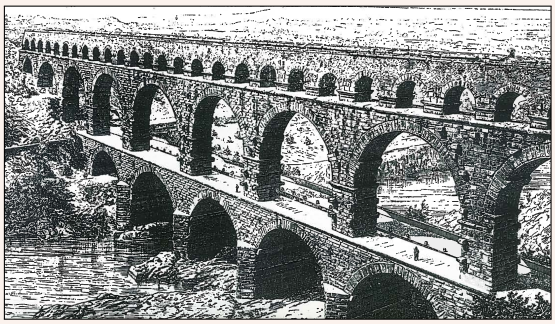
罗马桥, 如阿尔坎塔拉桥 在西班牙, 展示其能够与结构效能和美学吸引力相匹配的功能。这些桥梁经常包含分区架, 减少了死体重, 同时保持结构能力。

城市建设与系统建筑 城市规划从罗马工程创新中获得了巨大的好处。多故事 **岛** (公寓区块) 需要仔细注意荷载带的分布和火灾安全。混凝土和模块化建设技术的系统使用使城市在前所未有的规模迅速扩展。罗马工程师开发了标准化的建筑方法, 包括:

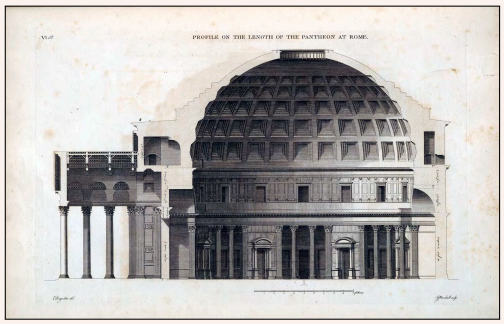
- 模块化火柴和混凝土系统
- 標準化 柱 訂單及比例
- 基础设计的系统方法
- 综合基础设施规划 (水源、供水、道路)

遗产与限制 罗马工程的成就是实用的和系统性的。他们精化了拱建筑　继承的 埃特鲁斯人 - 但通常使用半循环形状, 引入了基本的侧面冲动。此限制后来将引发指定的拱的哥特式创新。

最著名的罗马结构 - Pont du Gard 和 Pantheon - 代表了他们的结构成就的顶峰。潘特文相对的完美 (高度和直径均为 43 m) 其它 **区域地质**后来由厚的混凝土墙壁支持, 展示了罗马三维结构思维的主导性, 直到复兴时期才不会相匹配。



(a) 城堡之桥



(b) 潘特文

图 3.9: 罗马文学建筑

3.2.4.1 维特鲁维乌斯: 第一位结构理论家

希腊和罗马工程师把结构力学的物理基础, 是维特鲁维亚。首先试图将建筑和工程知识编码为一致的理论框架, (§6.3.1 更多关于他的书的细节). 他的待遇, **建筑** (关于建筑的 10 本书) 它是最早的生存文件, 系统地处理结构形状和功能。比例、材料、水力、音效和城市规划。

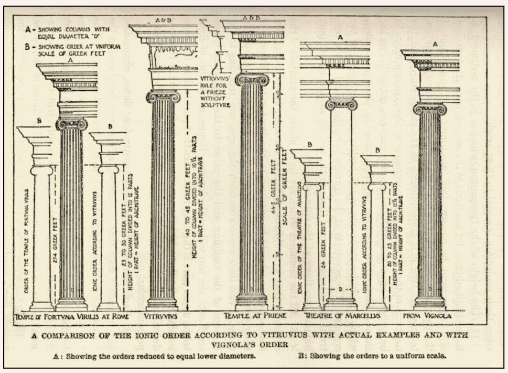
上一篇: 绘画之前 (现在失去了) 希臘來源和由羅馬實踐豐富, 維特魯維斯論文設計哲學, 將實驗體驗與理論反思相結合。在这样做中, 他超越了他的罗马背景, 成为西方历史上第一个人物到框架建筑设计的观点, 以此为前景现代工程原则。

从传统到理论 在维特鲁维亚之前, 整个巴比伦、埃及、希腊和罗马的建筑师都依靠了沉默的规则和积累的经验　实用的智慧通过工艺传统消失。Vitruvius 的工作代表了从这种沉默的知识到系统化、可教导的原则的关键过渡。

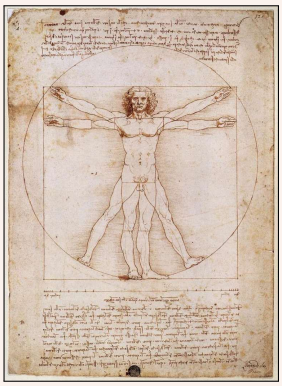
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

维特鲁维亚三位一体 Vitruvius 著名声称, 良好的建筑应该包含 **坚定** (力量), **用途** (功能性), 和 **威尼斯** (美丽). 这一三角形影响了建筑思维在复兴时期和之后, 建立了结构性能、功能效率和美学成就是成功设计的不可分割方面的原则。

相对系统与规则 维特鲁维乌斯作品中最突出的特点是他的比例规则和系统的设计方法。这些规则是有效的, 因为它们是实验性认证和可扩展的 - 一个方法, 推翻现代材料力学理论, 但在石头和木材结构功能上足够。



(a) 十本建筑书籍



(b) 维特鲁维亚人 (莱昂纳多)

图 3.10: 维特鲁维亚比例性规则

其中一个说:

> 如果宽度超过四十英尺, 让列放在内面和对面的列之间。[...] 因此, 额外的相关术语子数量将相当于头骨体内的损失, 阻止它被看到, 从而以不同的方式, 列将变得看起来平等厚。
>
> Vitruvius, 1960, p. 4.4.2

这些规则是有效的, 因为它们是实验性认证和可扩展的 - 一个方法, 传承现代材料力学但功能上足够的石头和木材结构。(Heyman, 2003).

Vitruvius 的比例感激着随后的发展, 包括:

- 莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂 **定义者**, 一个设备, 以机械传输规模测量
- 莱昂纳多 • 达芬奇的著名图像 **维特鲁维亚人**
- 安德烈亚 • 帕拉迪奥的经典订单系统化
- Le Corbusier 的天文学系统 **模块**

这个主题在进一步发展 §15.2.3.

对复兴建筑的影响 文艺复兴建筑师在维特鲁维亚发现了与经典权威和系统方法的联系。在许多由维特鲁维乌斯启发的复兴建筑师中, (Palladio, 1570) (1508 – 1580) 以维特鲁维亚原则为主, 重点是对同义词、比例。, 以及其自己的设计功能, 同时编码它们在 **四大建筑图书馆** (1570). 他的建筑和理论著作以维特鲁维亚的理想为主, 特别是一个建筑应该反映人体与自然的和谐比例的观念。(Wassell, 2008). 正如 Palladio 所说:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 美丽将源于恩典的形状和整体与部分的关系, 以及各自之间的部分和整个, 因为建筑物必须看起来像完整和精确的身体。其中一个会员与另一个相匹配, 所有会员都是必要的所需。
>
> Palladio, 1570, Book I, Chapter I

限制和遗产 维特鲁维乌斯也是他时代的产物, 并非所有的观察都符合现代标准。然而, 他的基本贡献 - 基于实验观察和理论反思的设计原则系统化 - 建立了一个方法论, 仍然适用于当的结构工程实践。

自复兴以来, **建筑** 它不仅影响了古典建筑, 而且还提出了一个概念基础, 通过几个世纪的结构思维响起, 建立了维特鲁维乌斯作为古老实践的记录和对结构理论的持久影响。

不是所有的观察都被现代标准所接受:

> 此外, 由于气氛的稀有性, 南方国家因热量而具有激烈的智慧, 在制定方案时非常自由和快速, 而北方国家则如此。[...] 只有一种沉默的智力。
>
> Vitruvius, 1960, Chapter I, Book VI

维特鲁维斯的中心性 维特鲁维乌斯对这本书的基本意义如此之大, 以至于他的生活、写作和影响力在三个不同的章节中被审查: 本章。§6.3.1, 和 §15.2.1.

3.3 印度、中国和日本的数学和结构传统

虽然结构力学的历史经常强调希腊 - 罗马和后来的欧洲贡献, 古代文明在亚洲发展了深度独立的传统在建筑, 材料和机械理智。在印度、中国和日本, 实验观察、数学创新和建筑表达的合成导致了在工程方面持久的成就, 这与西方发展相匹配, 并与西部发展一致。这些贡献根源于实用的需要, 如灌溉、地震耐用建筑和城市基础设施, 但它们也反映了深深的哲学和美学理想。接下来是探索各个文明的一些最重要的贡献, 而不是作为周边的好奇心, 而是作为平行和往往相近的道路, 以了解结构形状和功能。

3.3.1 中国: 地震学、桥梁和机械创新

Zhang Heng 和早期地震学 中国工程史上最令人印象深刻的人物之一是陈相关术语天文学家、数学家和东汉王朝的机械工程师 (78–139 CE). Zhang Heng 發明了第一個已知的 **地**震图, 图 3.11a 能够检测遥远的地震, 并指示其方向。(Needham, 1959). 这个铜器具, 配备了持有球的龙将落入下面的相关术语子的嘴里, 展示了动态机械和振动的非凡理解, 传达了类似的发展在世界其他地区超过一千年。

莫希特机械传统 摩西的 Mohist Canon, 归功于 Mozi (470 - 391 ECB) 他的追随者, 代表了中国对机械理论的贡献的一个角落。这个古老的文本系统地讨论了机械学的原则, 包括使用莱弗。平衡, 紧张 (Graham, 1978) 开发与希腊机械研究相匹配的概念, 但从一个独立的哲学框架中强调实用性和社会利益。

革命桥梁建设 中国桥梁建设展示了他们对结构力学的贡献。安吉大桥建于 605 年, 在苏伊王朝期间, 代表了一个工程师的杰作, 已经生存了超过 1400 年。(Brownbridge, 1986). 这个分区的拱桥, 其创新开放式螺旋, 减少了重量和材料需求, 同时提供洪水过流能力 - 展示了复杂的理解水力力量和结构优化。中国工程师也创建了悬挂桥技术的先驱, 创造了竹子和铁链悬挂橋, 这些桥梁在岩石拱建设中无法延伸距离, 预测后来的原则在现代索固定和悬挂系统中发展。

中国使用水驱动机械, 如链泵和水轮等, 进一步展示了他们对机械原则的理解。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

3.3.2 印度: 数学、材料和纪念建筑

建筑科学:Vāstu Śāstra 古老的治疗 **沙特阿拉伯** 提供详细的建筑指南, 涵盖方向、材料属性和荷载分布等方面 (Shukla, 1993). 这种系统的方法, 以构建综合的结构、环境和精神考虑, 创造了对整个印度地下大陆建设影响的建筑设计的全面框架。

数学基础 数学家和天文学家 Ariabhata (476–550 CE) 结构力学 通过其在三角测量和地质计算方面的进展作出贡献。其精确的计算 π 和系统的方法为角度测量提供工具, 必需的建筑布局和结构分析 (Bag, 2003).

德里的铁柱 印度古代工程最具标志性的例子之一是 **德**里的铁柱, 在 375 - 415 CE 左右升起 (Balasubramaniam, 2000), 图 3.11b. 站高 7 米以上, 重约 6 吨, 这种粉碎的铁柱由于其独特的金属组成和保护性氧化涂层, 耐受腐蚀超过 1600 年。柱子展示了材料科学和金属学的先进理解, 直到现代时代, 它在其他地方都没有匹配。

水力和建筑成果 Stepwells 饰如同《 **拉尼 · 基 · 瓦夫** 在古贾拉特, 和寺庙复合体在 Khajuraho 和 Hampi 突出印度的建筑天才 (Michell, 1989; Hardy, 2007). 这些结构展示了石头挖掘的掌握, 荷载分布在复杂地质学中, 以及结构系统与精致的装饰程序的整合。

水力工程与农业系统 印度在水力工程方面取得的进展显而易见于设计大道、水库和精致的水管理系统, 支持大型城市人口和广泛的农业地区。

3.3.3 日本: 地震抵抗力和适应性结构

木材建筑与地震创新 传统的日本木材建筑, 以古代和寺庙为例, 反映了独特的结构适应性, 以应对频繁地震活动。和 **西伯利亚**, 或中央柱, 结合关闭木合并和灵活的连接, 允许结构通过控制运动而不是硬抵抗分散地震能量, 图 3.11c, (Sugimoto, 2008).

这种对地震设计的态度 - 灵活性, 能量分散和物质双重性 - 预测了现代地震工程原则几个世纪。五个故事的牧羊人已经经历了大地震超过一千年, 证明这些传统技术的有效性。

城堡建筑与建设 日本城堡, 如 16 世纪和 17 世纪建造的希米吉城堡展示了强化工程和荷载先进技术。分配 (Turnbull, 2003). 这些结构采用复杂的石 基础 系统, 精致的木制框架和多级防御安排, 将结构效率与军事功能相结合。

材料创新与建设技术 日本依赖木材和石材等天然材料, 引发了独特的结构创新, 特别是在涂层、布雷克系统的使用方面。(**东京**), 和灵活的关节, 适合地震力量和物质运动由于湿度变化。开发精致的木材合成技术 - 包括不需要指甲或金属固体的复杂交锁关节 - 展示了对材料特性、荷载转换和结构连续性的先进了解。

3.3.4 合成与全球影响

这些亚洲传统在结构工程开发了复杂的解决方案, 以解决建筑、材料科学和环境适应的基本问题。他们强调人类建设与自然力量之间的和谐, 整合美学和结构考虑以及发展可持续的建筑实践提供重要前景, 补充并丰富了更熟悉的西方讲述结构工程的发展。

在印度、中国和日本开发的数学创新、材料技术和结构系统, 为工程科学的全球发展提供了重要知识。证明结构力学的基础实际上代表着全世界的人类成就, 而不是任何单一文化传统的产物。

审阅稿

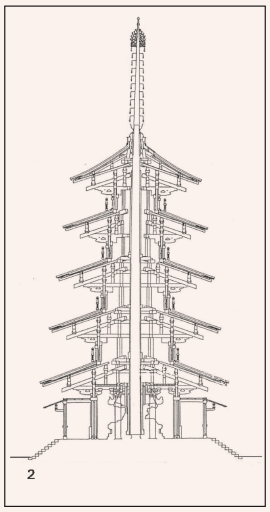
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 中国：第一台地震仪

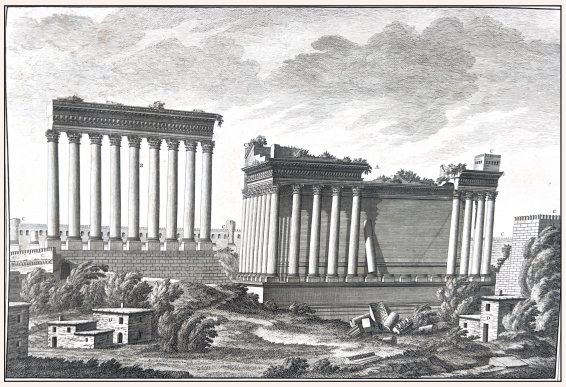


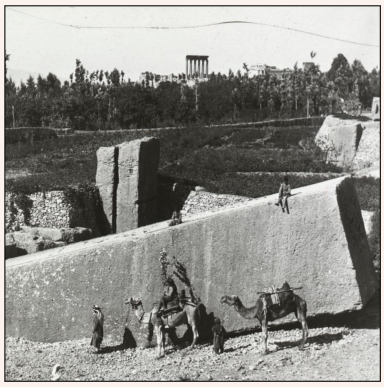
(b) 印度: 铁柱



(c) 日本

图 3.11: 印度、中国、日本





巴库斯的寺庙, 巴尔贝克和孕妇的石头, 黎巴嫩

巴尔贝克的巨大的石头 - 其中最伟大的曾经被打破 - 证明了古老的工程雄心勃勃, 仍然缺乏简单的解释。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

4 哥特式大教堂

摘要

哥特式大教堂是对精神渴望和结构天才的持久纪念碑。本章探讨了他们勇敢的形状背后的工程逻辑，特别注意地质、荷载路径控制和物质行为如何相匹配以确保稳定。跟踪古典建筑的进化，从罗马起源，并描述关键结构特征 - 包括飞翔的泡沫，绳子和线条 - 章节介绍了四个象征性建筑的深入分析。每个案例研究都揭示了当代知识的界限如何被测试，有时超越，提供设计耐用性、实验思维和过度思维的持续教训。

4.1 引入 39
4.2 从罗马式质量到哥特式骨骼 39
4.3 哥特式大教堂: 历史和结构逻辑 . . . 40
4.3.1 历史千里 40
4.3.2 基本术语与结构 单元 41
4.3.3 哥特式结构革命 42
4.3.4 结构特性 45
4.4 四大教堂的故事 49
4.4.1 Beauvais 教堂: 结构界限的偶像案例研究 49
4.4.2 米兰双胞胎: 地质、政治和结构性辩论 55
4.4.3 圣。彼得的基督教: 从危机到科学分析 59
4.4.4 圣玛丽亚 • 德尔菲奥 (Santa Maria del Fiore): 布鲁内莱什的工程直觉胜利 63
4.5 总结表 67

4.1 引入

从 12 世纪到 16 世纪，欧洲大教堂取得了前所未有的建筑高度 - 不仅在物理规模上，而且在结构性勇气和象征性的野心。这些纪念碑比崇拜之家多得多；它们体现了中世纪工程的深潮，在那里宗教热情引导技术创新到其实验界限。

无计算或现代材料建造，经常在几个世纪与进化计划，哥特式大教堂挑战我们的理解工程作为一个系统的学科。然而，他们的创作者通过地质清晰度、实验性测试以及现代分析刚刚开始充分欣赏的力量路径的直观感知实现了显著的结构复杂化。

本章重点是使这种教堂成为可能的结构原则，特别强调如何通过地质清晰而不是物质强度实现稳定。通过指向的架子、围绕的瓦尔特和飞翔的泡沫，哥特式建筑师创造了高而光明的室内，如今仍然存在。然而，并不是所有的实验都成功了：在一些大教堂里，渴望和崩溃之间的界限被克服 - 有时是戏剧性的。

经过审查哥特式结构力学的关键概念和其建设可能的历史创新，章节转向四个主要案例研究。这些大教堂 - Beauvais，米兰，St. 彼得在罗马和佛罗伦萨的圣玛丽亚 • 德尔 • 菲奥 (Santa Maria del Fiore) 不仅代表了建筑步骤，而且也代表了结构知识被挑战、精化或寻求的事件。他们一起提供过去工程决策的法学观点，以及信仰、形式和力量之间的相互作用的深度欣赏。

4.2 从罗马式质量到哥特式骨骼

从罗马文到哥特式建筑的转变，是历史上最深层次的结构革命之一。在罗马教堂依靠由小窗口点击的巨大的墙壁，哥特式建筑师开发了一个结构性骨骼，使墙壁脱离其荷载携带功能。这种创新使了定义哥特式大教堂的广阔冰上表面和高峰。

关键突破是承认负载可以通过条纹、架子和相关术语子的框架进行通道，让墙壁自由成为光的屏幕。大型马索尼大群是罗曼斯克的标志 建造和只有小窗户在罗马教会的周围墙壁开放。相比之下，与马索尼亚群体无

审阅稿

关的结构骨骼的建设是第一个创新。因此, 大门可以建在墙壁上, 最终会引发玻璃和花朵的窗户如此典型的哥特式教堂。(Como, 2013).

有了这种结构性转型, 我们现在可以探讨那些让哥特式建筑师达到前所未有的高度和开放性的具体创新。

4.3 哥特式大教堂: 历史和结构逻辑

哥特式建筑以其令人惊叹的高度、光明的室内和结构性天才而闻名。在 12 世纪和 13 世纪发展, 它在建筑环境中发生了转变, 工程与精神渴望融合在一起。哥特式建筑师使用了弓箭、绳子和飞翔的泡沫来建造几个世纪后仍然站立的建筑物。如所述, 由 Ochsendorf, 2002, “这些建筑物将其安全从 **地质学** 结构, 以及 **不是从力量** 关于材料。” 曾经说过, 一个站立五分钟的结构将持续五个世纪。(Heyman, 1966) 尽管这种乐观主义忽略了长期的物质衰退。

这个原则　哥特式稳定源于形状而不是质量　是由尤金・维奥莱・杜克 (Eugène Viollet-le-Duc) 特别清楚地表达的。在他的 **关于建筑的演讲** (Viollet-le-Duc, 1875). Viollet-le-Duc 开发了一项理论框架, 以了解哥特式建筑师如何直观地描述结构与形状之间的关系, 并建立了现代结构分析以后确认的原则。(对于他作为百科全书家和复兴者的补充作用, 请参见 §15.4.1.)

虽然这章强调哥特式大教堂, 但它还将引用令人惊叹的过渡结构, 如圣。彼得大教堂、米兰公爵夫人、博瓦伊斯大教会和佛罗伦萨圣玛丽亚・德尔・菲奥尔。

4.3.1 历史千里

从罗马根源起, 哥特式建筑在 12 世纪和 13 世纪达到其高度。第一個以這種風格建造的結構是聖丹尼斯大教堂, 图 4.1a1144 年在法国圣丹尼斯完成。查特斯大教堂, 显示在图 4.1b 它结合了哥特式和罗马式单元, 并在戈特式设计的顶峰期间建造。圣玛丽亚大教堂, 图 4.1c 它被称为其巨大的宫殿和新哥特式面孔, 完成于 1887 年。伦敦西明斯特大使馆, 图 4.1d 主要重建于 13 世纪, 是另一个重大例子。阿米恩斯大教堂, 图 4.1e, 是最高的, 达到 139 英尺的高度。选择的结构在表中总结 4.1.

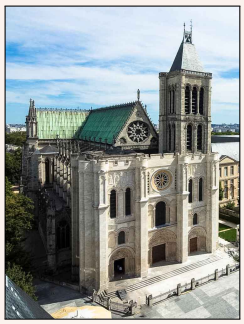
桌子 4.1 和 4.2 列出一些最突出的哥特式大教堂, 并为所选的例子提供关键尺寸 - 信息将随后提到在博瓦维斯的讨论中。

表 4.1: 可见的哥特式结构

教堂	位置	世纪	显著的特征
圣丹尼斯大教堂	法国	12th	首位哥特式结构
查特斯大教堂	法国	12th	第 1194 章 火灾后重建
巴黎的女神	法国	13th	早期使用飞行泡沫
圣玛丽亚・德尔菲奥	意大利	13th	著名古墓, 新哥特式面孔
克勒蒙特 - 法兰大教堂	法国	12th	由黑色拉瓦石造
西明斯特大使馆	英格兰	13th	英国冠军网站
阿米恩斯大教堂	法国	13th	最高的哥特式大教堂

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 圣丹尼斯



(b) 宪章



(c) 圣玛丽亚・德尔菲奥



(d) 西明斯特大使馆



(e) 阿米恩

图 4.1: 象征性大教堂

表 4.2: 主要哥特式大教堂的比较尺寸 (Elizalde, 2025)

教堂	瓦尔特 高度 (m)	船 宽度 (m)	全面宽度 与岛屿 (m)	建设 日期
巴黎的女神 (FR)	33.0	13.0	24.8	1163–1250
查特斯大教堂 (FR)	36.0	16.4	30.0	1194–1250
雷姆斯大教堂 (FR)	38.0	14.65	30.0	1211–1275
阿米恩斯大教堂 (FR)	42.3	11.6	32.0	1220–1288
美丽大教堂 (FR)	47.5	15.3	45.6	第 1225 章 不完
科隆大教堂 (DE)	43.0	14.0	45.0	1248–1880
帕尔马大教堂 (ES)	44.0	19.0	55.0	1229–1601
米兰杜莫 (IT)	45.0	16.5	57.0	1386–1965

4.3.2 基本术语与结构 单元

理解哥特式结构力学需要熟悉几个关键概念。最基本的是 **线路的震动**压缩力量通过拱或瓦尔特的路径。当这条线完全留在马索尼亚边界内时, 结构稳定。(§31.5.2)

在我们进展之前, 我们应该熟悉某些条款, 图 4.2d, vault 类型在 图 中显示 4.2e.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

地质 单元

线路的震动 代表在 拱 中的力量之路, 如果在结构的物理界限内包含一行冲动, 则稳定。

入口 内部曲线的拱或泡沫。

出口 外部曲线的拱或泡沫。

你的 個别的石頭在拱或泡沫 (章节 31).

力量和平衡概念

活跃的 Thrust 线 与拱的地质学所允许的最大水平强度相结合。

被动线的冲动 代表在其重量下对结构的推线。

结构性 单元

飞翔的泡沫 倾斜 拱 抵抗侧负载从一个 拱, 图 18.11c.

皮纳克 建筑元素在墙上添加压缩压力。

四分肋拱顶 由两条对角肋将拱顶划分为四部分，如图 4.2a。

六分肋拱顶 由两条对角肋和一条横肋将拱顶划分为六部分，如图 4.2b。

建筑特性

首席 一个教会的东端。

三角形 墙厚的狭窄通道, 图 4.2c.

4.3.3 哥特式结构革命

Bony, 1983 它确定了哥特式建筑的三个关键特点: (1) 的, (2) 整个结构中都设有指标, 以及 (3) 重点是垂直性。这些特性产生了开放性和轻度, 区分哥特式风格。他还讨论了罗马人的影响力, 特别是在使用相关术语子瓦尔特方面。罗马尼亚和哥特式建筑之间的关键差异在于荷载转移的基本方法, 以及图中显示的拱的革命形状。4.3.

拱优点

指定的拱代表了罗马式形状的美学出发, 这是根本改变结构性行为。通过将力量集中更垂直, 指向的树木减少侧面冲动约 20 至 30% 与半循环架相比, 允许更高的建设, 轻松的泡沫系统。

罗马和哥特式方法之间的根本区别在拱个人资料比较时变得明显 (形象 4.3). 罗马半圆 拱 在图中 4.3a 它在其基础上产生最大侧面刺激, 需要在其高度中大规模磨损。哥特人在图中指出了拱 4.3b 集中力量更垂直, 减少按摩要求, 并允许特征的哥特式轻度。

审阅稿

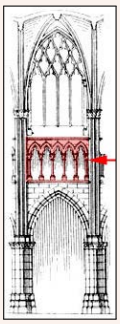
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



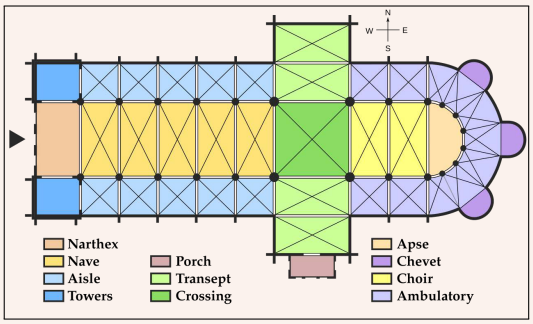
(a) 四角形



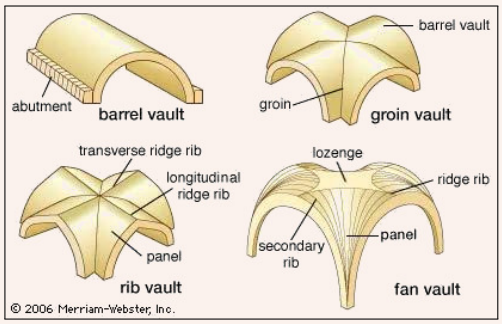
(b) 性别 Drib



(c) 三角形

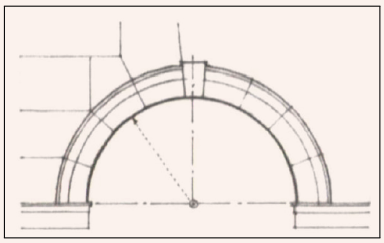


(d) 可口可乐

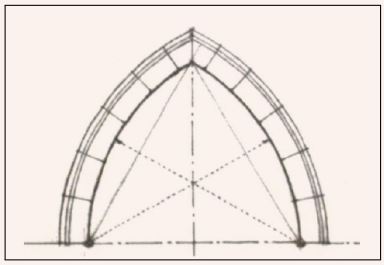


(e) 瓦尔特类型

图 4.2: 教堂结构 单元



(a) 罗马人 拱



(b) 哥特式拱

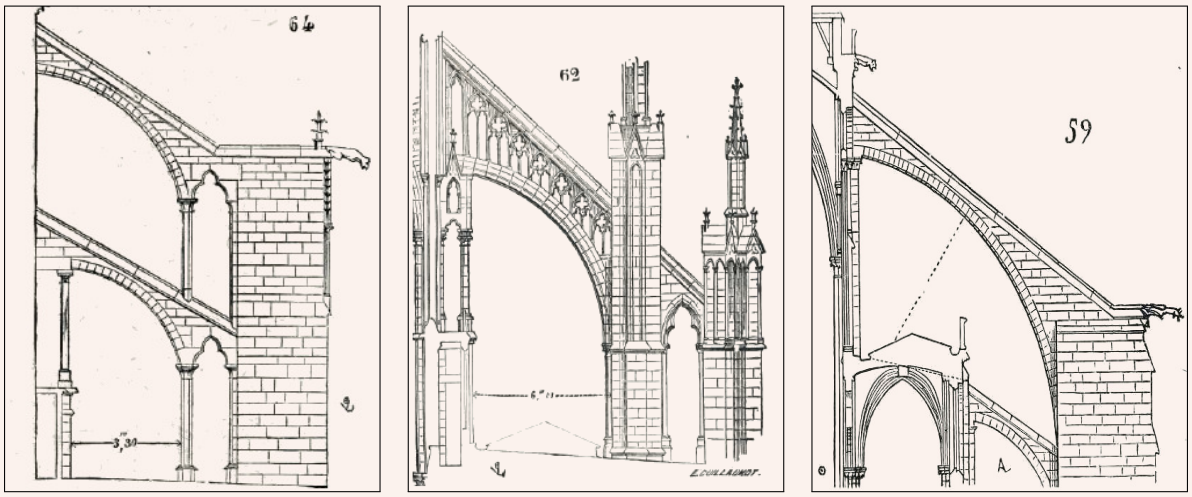
图 4.3: 罗马和哥特式拱的比较 (Ching, 2011)

飞行泡沫: 外部荷载转换

哥特式建筑的一个标志是使用 **飞翔的胡萝卜**. 也许最具标志性的哥特式创新, 飞翔的泡沫外向了结构系统。通过在建筑封面外转移高瓦特的插槽, 它们保持室内开放性同时确保稳定。这些外部支持可以抵抗高相关术语和弓的侧面冲动, 从而允许建造更高的墙壁。自十二世纪以来, 飞翔的泡沫使建筑师能够通过压缩来达到前所未有的结构高度, 同时保持稳定。尽管在哥特式大教堂广泛实施, 但它们的结构性行为仅最近才被用现代计算分析工具详细研究。(Ochsendorf, 2002; Kim, 2016).

形象 4.5 它提供了一个典型的哥特式大教堂的交叉部分。泡沫, 由装饰的窗帘覆盖, 将飞翔的泡沫融化起来, 从内部架子向外传递侧面刺激。这种配置允许内部结构主要依赖压缩力量, 同时保持开放性和亮度。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 克莱蒙特 - 法兰　(b) 阿米恩　(c) 巴黎的女神

图 4.4: 在哥特式大教堂里飞翔的胡萝卜的例子 (Kim, 2016)

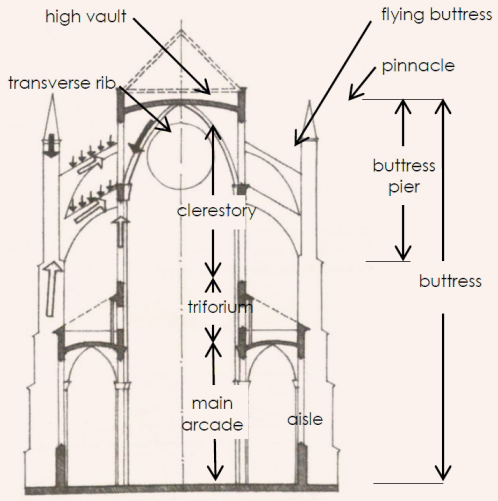


图 4.5: 哥特式大教堂 截面 (Ching, 2011)

肋拱顶：荷载路径

哥特式绳子瓦尔特作为三维框架, 沿着预定路径向柱子和泡沫方向负载。该系统取代了罗马尼亚桶的不断充电, 用集中负载, 允许更大的开关和减少墙壁质量。

哥特式结构, 以其高高度和空气建筑而闻名。哥特式结构的主要建筑元素是指向的架子、绳子的十字架、飞翔的相关术语子和滑板, 其中一些已经在罗马文中使用过, 甚至早些时候也在罗马建筑中。所有这些单元的同时应用, 形成一个和谐、统一的整体, 首先是由法国建筑师实现的。法国之岛, 谁重新定义了教堂的概念。

指定的拱不仅是从罗马式形状的美学出发, 而且也是结构上有利的 - 它减少了水平压力, 并更有效地分配体重。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

要充分欣赏这些系统背后的机械, 有用检查拱的基本组件。形象 4.6 显示一个典型的拱的地质, 包括所知的单个石头。**婚礼**外部和内部的曲线, **入口** 和 **外出**. 每个端的泡沫都作为被动支持, 抵抗由拱的曲率产生的外部刺激。

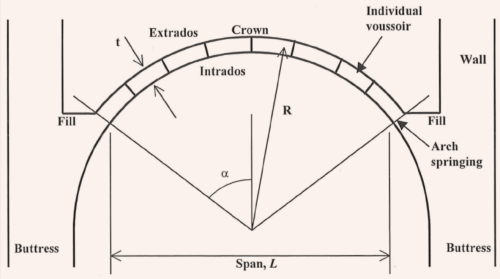
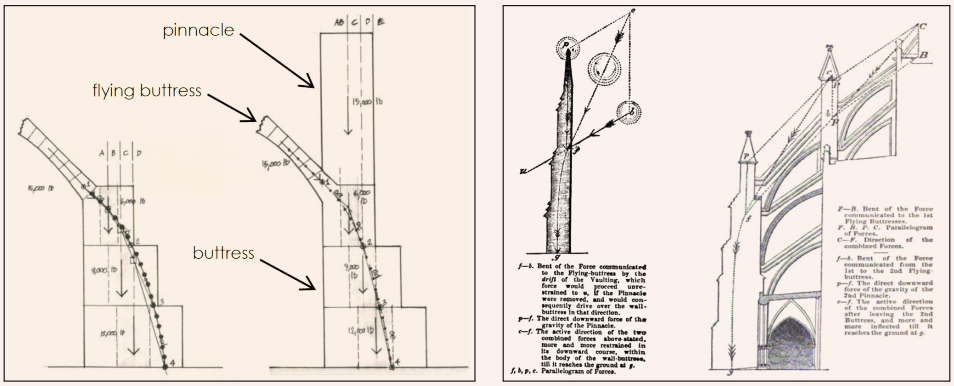


图 4.6: 典型 拱 (Ochsendorf, 2002 PDF)

哥特式建筑的优雅在于它的结构性需要和艺术表达的合成, 而不是物质强度, 地质统治稳定。

4.3.4 结构特性

哥特式工程的一个定义方面是通过其结构元素仔细控制负载路径。一个令人震惊的例子是皮纳克。远离仅仅是装饰性的, 皮板将一个显著的垂直荷载添加到泡沫系统中, 从而提高其抵抗侧冲动的能力。此效应在图中被描述 4.7.



(a) 触及曲线的旋转 (Kim, 2016)　　(b) 强力转移 (Bartholomew, 1840 PDF)

图 4.7: 通过飞翔的泡沫转移力量

哥特式建筑中的另一个关键 单元 是绳子瓦尔特, 它取代了罗马尼亚建筑物的重型桶瓦尔。如图所示 4.8, 哥特式瓦尔特直接负载沿着边缘和下到柱子和脚, 减少墙壁质量并允许更大的窗户和更多的开放室内。

飞扶壁本身的几何形状对其结构行为至关重要。如图 4.9 所示，真实和理想化的扶壁均由倾角、宽度、厚度以及拱腹和拱背轮廓等参数定义。这些参数决定了扶壁将高拱顶的作用力传递至地面的效率。

在分析哥特式结构的核心概念是 **线路的震动**压缩力量通过一个拱或泡沫的路径。稳定性保证, 如果该线完全在结构的物理边界内 (§31.5.2). 形象 4.10 描述了由 **最低限度** 和 **最大限度** thr 线 - 代表, 相应, 由于外部运动或内部崩溃而崩溃前的限制。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

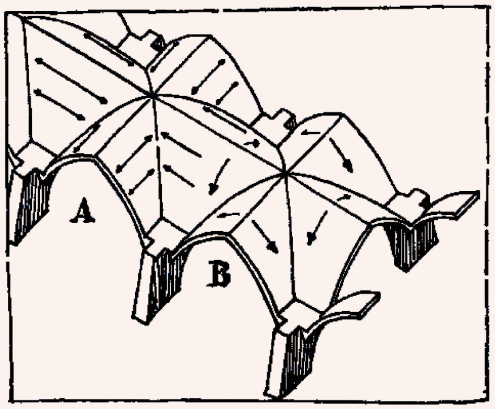


图 4.8: 善良的行为 (Hassan Fangary, 2010)

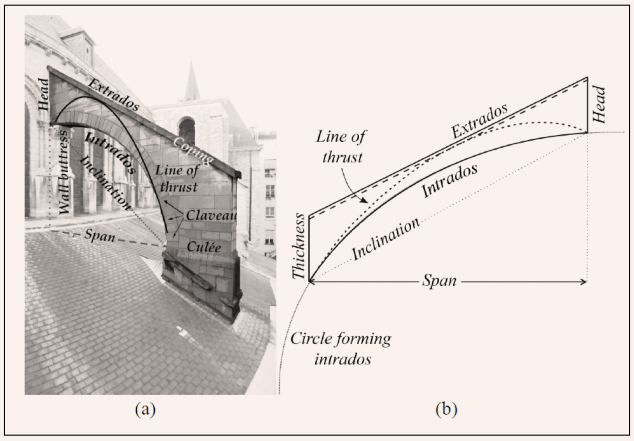


图 4.9: 飞翔的石油地质 (Nikolinakou, Tallon, and Ochsendorf, 2005)

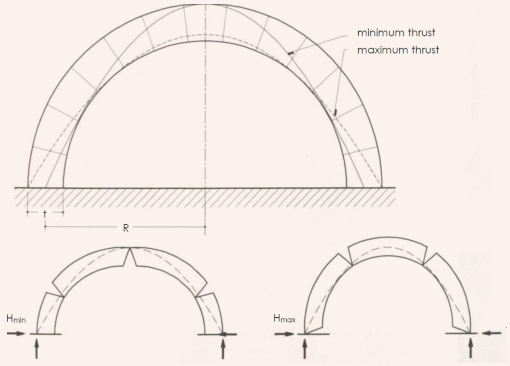


图 4.10: 最小和最大线路的冲动 (Kim, 2016)

这些边界也被称为 **被动** 和 **活跃** 线路的推力。被动线与结构的自我重量相匹配, 而活跃线反映了在不稳定发生之前可以抵抗的最大水平冲动。形象 4.11 显示这些两条冲动线在一个典型的飞翔泡沫系统内。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

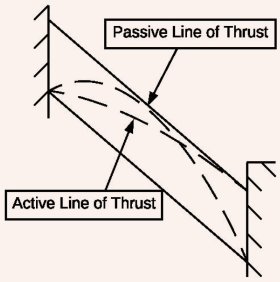


图 4.11: 活跃和被动的线条 (基于 (Heyman, 1966))

4.3.4.1 显著的结构耐力

这些精致的荷载传输机制有助于哥特式结构的令人惊叹的长寿, 其中许多人经历了几个世纪的微不足道干预。这些大教堂没有现代工程工具, 经过长时间的建造, 并且经常在不断发展的建筑计划下。令人惊讶的是, 有很少的灾难性失败。许多哥特式大屠杀结构经历了重大地震和战争 - 有时超越邻近现代建筑 (Heyman, 1997).

如 Ochsendorf, 2002 观察到, 他们的力量不是从材料而来自地质。根据 Heyman, 1966, 一个站立的哥特式结构可能将持续几个世纪 - 基于 “安全理论”:

> 如果可以找到一个带动的线, 它在平衡与外部负载和完全位于马索尼里, 那么结构是安全的。

这个原则将在章节中深入探索。31, 专注于胡萝卜的理论和平衡的图形分析。

然而, 值得注意的是, 这种模型承认不可改变的物质特性。它不涉及长期的衰退, 由于波动、物质老化或差异定位 - 所有这些都可能影响历史结构的安全。

4.3.4.2 结构分析的进化

早期情感理解 (1840 年至 1860 年) 哥特式结构性单元的行为系统调查始于 19 世纪中期。Willis, 1842 这是第一个提到, 带有线的轴承是关键的荷载组件, 观点一直被广泛接受, 直到后来观察受到挑战。Alexander, Mark, and Abel, 1977 批评这个观点, 即 “基于视觉印象, 而不是全面的结构理解。”

1860 年代, 尤金 • 维奥莱特 • 杜克 (Eugène Viollet-le-Duc) 提出了 **弹性**, 建议马索尼可以容纳各种负载和定居点 (Alexander, Mark, and Abel, 1977). 他的瓦尔特模型将结构视为个别架构的系统。

这些想法后来被维克多 • 萨布雷特在 20 世纪初提出挑战。基于观察到的裂缝, 他提出了绳子不像结构性关键 单元 行为。(Huerta, 2009). 波尔亚伯拉罕建立在这个工作上, 强调垂直冲动和瓦尔特的地质资料是物质强度或摩塔质量的主导。(Alexander, Mark, and Abel, 1977).

海曼革命 (1960s) 杰克 • 海曼 (Jacques Heyman) 通过引入塑料边界理论来转化大麻分析. 他的三个基本假设革命了这个领域:

雅克 • 海曼革命了 1960 年代开始的马索尼亚结构研究, 引入塑料边界分析概念。(Heyman, 1966). 他提出, 如果马索尼亚结构是安全的 **线路的震动** 可以找到这:

1. 它完全在结构中,
2. 在 平衡 与外部负载, 以及
3. 它不会引发紧张。

这个分析基于三个假设:

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- Masonry 有不可忽视的 抗拉强度.
- 抗压强度 不限 (自我重量下).
- 没有滑动失败是由于高振动而发生的。

这些假设允许应用边界分析的下层和上层链条理论。前者确保稳定, 如果发现一个可接受的压力领域, 而后者确定崩溃, 当没有这样的平衡可以包含在结构内。失败通常标志着形成一个机制, 有足够的旋转 - 通常在拱或泡沫中四个 - 导致不稳定。

现代计算方法 现代分析采用了多种方法, 每一种提供不同的洞察力, 但也面临非德克特性、异常性马索尼亚的限制:

图形和电影方法 图形振动线分析估计结构力量是否仍然存在于地质包围的弓和波, 经常使用 “滑雪 ” 以 2D 接近为主 (Hassan Fangary, 2010). 尽管有效, 但对于复杂的地质学来说, 它是时间耗尽和不实用的。

另一方面, 电影分析模型作为硬块的组合崩溃机制。它通过评估外部力量所做的工作来估计失败负担的上限。这种分析的典型失败机制在图中显示 4.12.

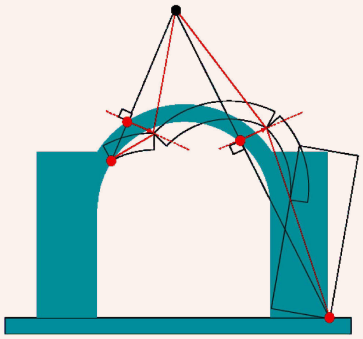


图 4.12: 拱结构和故障机制的动画评估 (Hassan Fangary, 2010)

终结的振动和现代计算方法 D’ Ayala and Tomasoni, 2008 提出了一个 3D 低链 极限状态分析, 包括最终的振动。它产生应力字段、克拉克模式和不同负载条件的水平振动值。尽管更准确, 但它需要大量的计算资源和专家输入。(Hassan Fangary, 2010).

单元 模型 (五): 由罗伯特 • 马克引入,FEM 已被用来模型哥特式瓦尔特和胡萝卜, 尽管有内在的限制。持續性, 以色列和弹性的假設不嚴格遵守馬索尼亞。最近的模型 Barrallo, Sanchez-Beitia, and Onati, 2005 和 Viola, Panzacchi, and Tornabene, 2004 包括胡萝卜、皮和香水。虽然有用, 但 FEM 的结果很大程度上取决于理想化的假设。

单元 模型 (他们): DeJong, 2009 应用 DEM 到马索尼亚, 将每个石头视为能够分离或滑动的硬块, 更好地捕捉不停的行为。

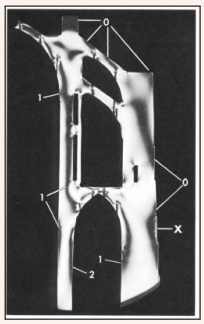
光学分析: Mark and Prentke, 1968 创始人使用规模化的 Epoxy 模型通过 Frinx 模式来视觉化应力。后来工作由 Mark, Abel, and O’Neill, 1973 将此扩展到 3D 瓦尔特 (形象 4.13).

崩溃分析和硬体机械 在他的博士论文中, Ochsendorf, 2002 强调地质变化是崩溃的主要原因 - 例如, 瓦尔特滑动, 增加震动或范围变异。他确定了典型的失败机制: 五环形成在弓, 转向泡沫, 四环失败在地震负载下。奥克森多夫还强调了对历史性马索尼亚的弹性和精致单元方法的限制, 促进了实质性评估的硬体机械。

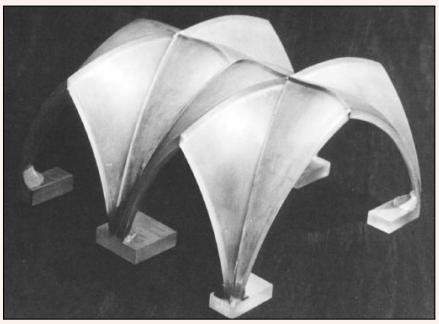
飞翔的胡萝卜分析 飞翔的胡萝卜只是最近在深度分析。Nikolinakou, Tallon, and Ochsendorf, 2005 提出的理想化地质模型, 以捕捉他们的行为, 显示失败可能发生通过破裂、滑动或局部不稳定 - 特别是在短暂或直立倾斜的泡沫。

Nikolinakou and Tallon, 2006 进一步研究了曲率, 倾斜和厚度的影响。然而, 这些研究受到可直接比较的哥特式结构的小数量所限制。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 模特模型 (Mark and Prentke, 1968)



(b) 瓦尔特模型 (Mark, Abel, and O'Neill, 1973)

图 4.13: 哥特式瓦尔特的光学分析

最近最多, Kim, 2016 他们在三座主要大教堂 (Notre-Dame de Paris、Amiens 和 Saint-Étienne) 进行了飞翔的精元研究。他与应力浓度和结构脆弱性相关的地质特征。

走向合成 每一种分析方法 - 图形、电影、光学、FEM、DEM - 都提供了不同的洞察力, 但也面临着限制, 尤其是对非德克特性、异常的马索尼亚。在实践中, 可能需要多种方法来评估安全性、识别故障模式以及了解保存策略。

每一种分析方法 - 图形、电影、光学、FEM、DEM - 都提供了不同的洞察力, 但也面临着限制, 尤其是对非德克特性、异常的马索尼亚。在实践中, 可能需要多种方法来评估安全性、识别故障模式以及了解保存策略。

破裂并不总是信号失败, 但与转移、上层崩溃、地震活动或阴道变形相结合, 可能表明不稳定。(Hassan Fangary, 2010 PDF).

更多关于和 vous 机械线的讨论将在章节中呈现 31.

通过在哥特式结构原则和分析方法中建立的这一基础, 我们现在转向审查四个教堂案例研究, 这些理论概念被测试 - 有时成功, 有时灾难性 - 在实际建设。

4.4 四大教堂的故事

该部分探讨了四座大教堂, 其结构历史揭示了建筑野心与工程现实之间的复杂关系。每个案例都揭示了设计决策 - 无论是根源于勇敢的创新, 坚持传统或对危机的反应 - 如何塑造这些纪念碑建筑的命运。从 Beauvais 的戏剧性崩溃到米兰的地质争议, 以及圣城的解析突破 彼得到布鲁内尔希在佛罗伦萨的沉默主教, 这些大教堂提供无价值的教训在结构分析, 设计耐用性, 以及实验实践和理论理解之间的进化对话。

4.4.1 Beauvais 教堂: 结构界限的偶像案例研究

Beauvais Cathedral 是 结构工程 的历史上最有教导性的失败。它的雄心勃勃的设计和两个戏剧性的崩溃, 提供了一个罕见的文档洞察到哥特式建筑的实验界限。对于现代工程师来说, 它提供了一个独特的司法案例, 在那里结构性决策可以通过历史文档和当代边界分析进行分析。

Beauvais Cathedral 是结构工程历史上最重要的案例研究之一。它的雄心勃勃的设计和戏剧性的崩溃, 提供了一个罕见的洞察到哥特式建筑的边界。对于工程师来说, 它提供了一个有价值的例子是如何结构性决策

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 好和坏 - 可以塑造建筑物的命运。由于它的历史记录了很多, 并且由于其部分失败而其他部分被加强, 所以 Boovais 已成为法医工程和结构稳定研究的关键参考。

教会雄心勃勃与竞争性大教堂建筑

尽管波维亚缺乏像巴黎或雷姆斯这样的城市的政治和经济突出性, 但它作为一个强大的主教的座位拥有着显著的教会权威。在中世纪基督教的竞争性景观中, 主教经常以世俗王子的自治和资源行事, 委托建筑作为精神声明和机构声明。

尽管波维亚缺乏像巴黎或雷姆斯这样的城市的政治和经济地位, 但它作为一个强大的主教的座位占据了显著的教会权威。在中世纪教会的竞争性景观中, 主教经常以世俗王子的自主性和野心行事。其中一个人物是纳特威尔主教米洛, 他在 1220 年代开始建造大教堂。四十字军的退伍军人和高级牧师的良好联系成员, 米洛试图通过建筑来证实博瓦伊斯的精神和机构立场。他的愿景不仅仅是奉献性的, 它是象征性的: 建造一座大教堂, 规模和高度如此勇敢, 以至于它将布瓦维斯宣称为基督徒渴望的象征, 尽管它的温和城市脚印。

插曲：博韦天文钟

虽然 Beauvais 大教堂以其可怕的 13 世纪大屠杀而庆祝, 但其中最令人惊叹的工程成就之一属于 19 世纪。天文时钟, 由 Auguste-Lucien Vérité 在 1865 年至 1868 年间建造, 代表了精确机械工程的杰作, 与大教堂本身的结构性野心竞争。

尽管美丽的教堂 [1] 庆祝其勇敢的 13 世纪大屠杀, 其中一个最非凡的工程成就属于 19 世纪。1865 年至 1868 年间由法国时钟学家 Auguste-Lucien Vérité 建造, 这座大教堂的天文手表是一个非常复杂的机械系统。4.14. 它高达 12 米, 含有超过 9 万个交锁组件, 成为精确工程的主角。五十二日程提供天文现象的持续产量 - 行星位置, 太阳和月亮的阴影, 周期周期 - 以及在多个城市的民间时间。一系列自动序列, 由集中发动机和辅助轴承驱动, 执行一个完全同步的显示器, 需要仔细的电影规划。该时钟在哥特式建筑的重复兴趣期间建造, 展示了 19 世纪工程师如何将机械和天文知识转化为集成系统。远离装饰后思, 它展示了机械设计如何反映哥特式结构的逻辑和野心 - 层次, 优化, 深致以表达信息通过形式。



图 4.14: 波维亚的天文时钟

提出结构独特性神话的问题

一个常见的误解描绘了 Beauvais 是结构上非常特殊的 - 在其比例中如此雄心勃勃, 崩溃是不可避免的。这种讲述, 虽然戏剧性, 却掩盖了由仔细的尺寸分析揭示的更色彩的结构现实。

[1] Beauvais-Tillé 機場 (BVA) 现在主要作为预算飞往巴黎的折扣通道。很少的乘客意识到, 正远超越地铁站着哥特式欧洲最雄心勃勃的大教堂之一 - 更少的人仍然在短途上去参观它, 就像你真正曾经这样做一样。

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

正当的问题是:Beauvais 大教堂是如此的结构性异常, 只有它的比例才能解释其部分崩溃吗? 答案似乎是不。尽管经常对大教堂的巨大尺寸提出声明, 但它们实际上并不比其他主要哥特式大教馆在十三世纪前半建造的大大大。4.2 和 图 4.15. As Branner, 1997 注明, 在波维亚的中心线中间的主要角落尺寸为 15.0 米 - 几乎与布尔格斯、查特斯、阿米恩和科隆相同, 而仅比雷姆斯多一点。总长度约为 42 米, 与布尔格斯相似, 实际上比其他更狭窄, 导致相对较微的侧面隔离。唯一真正特殊的尺寸是瓦尔特高度, 达到 48 米 - 超越所有其他哥特式大教堂的时期, 尽管科隆接近 46 米。在长度方向上, 波维亚州的三个原始海峡大约有 8 到 9 米, 比阿米恩州最宽的海峡略小, 几乎与雷姆斯和科隆地区相同。

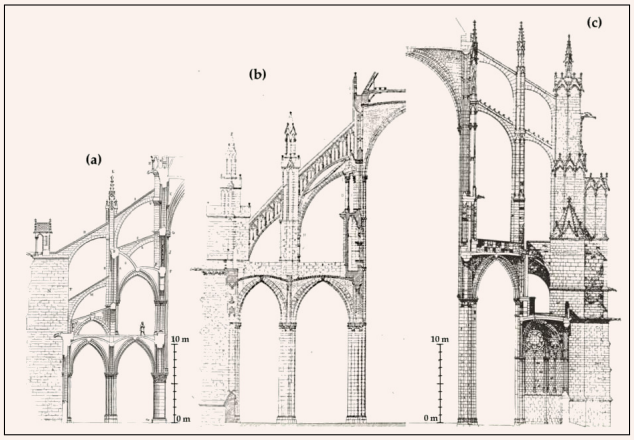


图 4.15: 对转部分的比较分析 (船长和布特雷斯系统) of: (a) Notre-Dame 教堂, 巴黎 (b) 阿米恩斯大教堂; 和 (c) 美丽大教堂 (作者的作品, 基于部分研究 Viollet-le-Duc, 1854 .

第 1284 章: 一个结构探险的故事

星期五,1284 年 11 月 29 日下午 8 点左右, 波维耶斯大教堂的顶部山谷灾难性崩溃。事件突然和令人震惊: 大规模的火柴倒塌, 破碎了几扇玻璃窗户, 并破裂了外部脚趾。霍尔 - 曾经被认为是哥特人的渴望的顶峰 - 变得不可用, 礼拜服务停止了四十年。神圣的遗产, 尤其是 追逐 圣徒 Just,Germer 和 Evrost 被称为无害。

缺乏外部发动机 - 地震活动, 特殊风或军事行动 - 使这种崩溃成为一个特别有价值的案例研究。失败发生在正常的负载条件下, 提供罕见的洞察到哥特式马索尼亚建筑的本质结构界限。

缺乏外部原因, 如地震活动或特殊的风力负载, 历史学家长期以来一直陷入困境。虽然一些早期评论家浪漫化了失败作为哥特野心超越其边界的例子, 但海曼的结构分析坚决拒绝了这些声明。他的边界分析表明, 正如建造的那样, 大教堂是在平衡的状态下, 并保持了超过十年。这种长寿是初步稳定配置的实验证据。Heyman, 1967 .

海曼的革命分析

雅克 • 海曼的 1967 年研究博瓦伊斯代表了结构考古学的一个水滑时刻。通过将塑料边界分析应用到一个历史性的失败, 他展示了现代工程理论如何能照亮中世纪建筑实践, 并挑战关于哥特式结构行为的长期假设。

海曼认为, 崩溃不能归因于整体地质或结构的过度高度。相反, 它可能源于一个地方但关键的建筑缺陷 - 也许在建造过程中引入的序列或细节 - 逃避了当代检查。他的分析表明, 无论是小型地质转移还是长期的相关术

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

语虫缩短都不会足以引发失败。[2] 尽管有许多理论, 但准确的机制仍然不确定, 反映了形状、材料和执行在哥特式建筑中的复杂相互作用。

随后立即采取紧急措施, 稳定损坏的结构, 包括将额外柱子插入霍尔架构中。Wolfe and Mark, 1976 和 Murray, 1989. 这一事件仍然是哥特式建筑中最有影响力的结构失败之一, 其意义在现代结构力学中所带来的技术洞察力水平上增加。

法医工程: Ungewitter 的力量分析

1284 年的崩溃主要是由高瓦尔特的压力下主脚的过度侧形变化的结果。现代分析表明, 当他们的互动创造了关键不稳定时, 似乎适当的个人单元可能会失败。

1284 年霍尔崩溃主要是高瓦特的压力下皮层过度侧形变化的结果。正如海曼所强调的那样, 失败不是由于材料的破裂或紧张失败而导致的, 而是因为脚踏板向后转移到冲动线从马索尼亚的档案中脱颖而出。

Heyman 重复 Ungewitter 的分析, 图 4.16a 它探讨了在典型的交叉部分上运作的主要力量。对于主要皮, Ungewitter 确定了高瓦尔特的热潮 $H_1 = 3.24$ 吨和其垂直 反力 V_1, 以及冰川的火焰 H_2 垂直 反力 V_2. 计算墙壁和其他单元由皮带的异重,Ungewitter 提出了问题: 什么是泡沫喷雾的大小 B 需要这样, 以便整个冲动线正直通过皮基的中间点?

通过对这个中间点的力量的瞬间, 价值 B 直接找到:

$$B = 3.02 \text{ tonnes (given } H_1 = 3.24 \text{ tonnes)} \tag{4.1}$$

此值定义了 平衡 所需的最小泡沫粘贴, 并将包含在大麻内面的粘贴线 (图 4.16a).

海曼还指出, 在 1891 年的分析中, 莱昂 • 本奥维尔也正确地将失败归因于波动的侧面分裂, 这是与图形和机械分析完全一致的结论。

这个问题在考虑冲动线本身时变得更加清晰。如在 图 中所示 4.16b, 鼓线非常接近在中高度的岩石内端边界, 确认平衡的可怕性质。结构非常敏感于任何微小的不完美 - 包括定位, 摩托罗拉的缩小, 或建筑中的轻微不准确性 - 这会导致冲动线移动在马索尼亚外面, 导致不稳定。

第 1284 章 重建: 应用工程课程

1284 年崩溃后的重建是历史上最彻底的结构逆转之一。而不是只是重建失败的单元, 大教堂章节实施了系统的变化, 解决了不稳定根本原因。

作为回应崩溃, 在 1284 年之后进行的重建大大改变了结构。中皮的数量增加了两倍, 图 4.17b, 通过添加中间支持, 海湾空间被半分。皮的马索尼亚被加厚, 瓦尔特的跳跃高度被减少, 以降低冲击的强度。

飞翔的泡沫也被重新设计, 以便更有效地抵抗水平冲动, 图 4.17c.

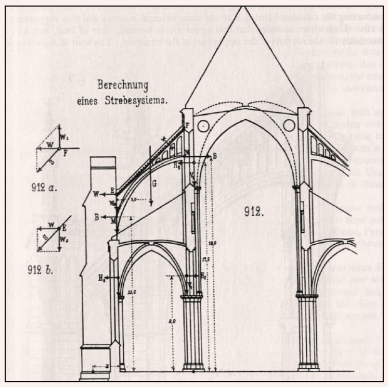
结果的重建, 大多完成于 1337 年, 显著增加了霍尔的强度。然而, 海曼指出, 尽管这个事件, 关于哥特式建筑中的精致平衡的教训似乎在 16 世纪试图添加一个中央塔时被遗忘了, 最终也失败了。

值得一提的是, 百年战争 [3] 建筑基本上停止, 尤其是由于经济应变, 资源缺乏, 以及重复的侵略在法国北部地区, 在那里 Boovais 位于。

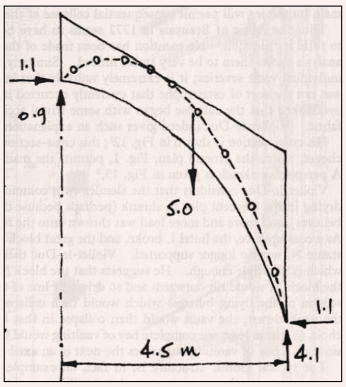
[2] 事实上, 即使在现代结构失败中, 根源的原因往往不是全球设计的缺陷, 而是忽略了定位细节 - 如不良连接、隐藏的材料缺陷或被忽视的边界条件。(Benouville, 1891). 一个已知的例子是 1967 年西弗吉尼亚州银桥崩溃, 由单眼线未发现的裂缝引起。(Administration, 1969).

[3] 1337 年至 1453 年间发生, 英格兰和法国王国之间的冲突以及中世纪后期法国内战。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 力量系统在一个典型的交叉部分上运作, 显示主要的瓦尔特冲动 (H_1, H_2) 垂直反应 (V_1, V_2), 和所需的泡沫鼓 (B) 对于平衡, (Heyman, 1967)



(b) 桥墩截面内的推力线；其中部接近拱腹边界，证实了失稳机制，(Heyman, 1967)

图 4.16: 第 1284 章 失败的分析

第 1573 章: 垂直野心与物理现实相遇

1573 年中央塔崩溃代表了不同的结构失败类别, 而不是由建筑缺陷引发的, 而是极高与不适当侧面支座之间的根本不一致性。这种失败为实验结构设计的界限提供了关键的洞察力。

1573 年 4 月 30 日 - 升降日 - Beauvais 教堂的中央塔倒塌。眼见证的记录描述了如何, 只有在教会和教会在当天的服务之后离开教堂后的那一刻, 十字路口的大型塔倒塌。失败是突然的, 暴力: 交叉的两个南方柱子先走路, 启动了一个反力链, 摧毁了灯塔和附近的瓦尔特。令人惊讶的是, 只有小型受伤才被报告。Branner, 1962.

这场崩溃标志着教堂对不一致的垂直性愿望的最终结束。1569 年完成的灯塔在崩溃前仅停留了四年, 强调哥特式结构体系延伸超越其实验证明的界限的可怕性。

结构分析: 失落的海洋问题

1573 年失败揭示了哥特式设计的一个基本原则: 这些结构通过系统的荷载分布和相互包装实现稳定。移除关键组件, 整个系统变得容易逐步崩溃。

灯塔的失败主要归因于在极端垂直荷载下跨越柱的地质不稳定性。如 Branner, 1997 和 Wolfe and Mark, 1976 强调, 脚踏板从未原来为此类负载而设计。船舶的缺席 - 计划结构的一个组成部分 - 意味着西方岩石缺乏关键的侧面限制。

Wolfe and Mark, 1976 进一步强调, 在南方岩石上观察到进展性裂缝导致崩溃。这表明, 故障不是突然发生的起源, 但随着皮层在维持的荷载下变形而逐渐发展, 最终到达了异常和转移超过地质稳定性限制的地方。

Branner, 1962 它还指出新塔与现有的哥特式纺织大教堂之间的结构性整合不足。旧和新组件之间的大麻界面缺乏有效分配负载所需的连续性。

基础问题已被提出为贡献因素。Elizalde, 2025 它表明, 差异化解决方案, 特别是在南极下方, 可能加剧了现有的不稳定。但是, 大多数学者, 包括 Murray, 1989, 认为安排是与主导地质不稳定问题相比的次要因素。

简而言之, 灯塔的崩溃是由累积地质不稳定导致的结构故障的经典案例, 在受高压负载和缺乏足够的侧面包装的滑板脚下。这是不是哥特式设计原则的失败, 而是通过以前经验测试的安全封面来扩展它们。

审阅稿

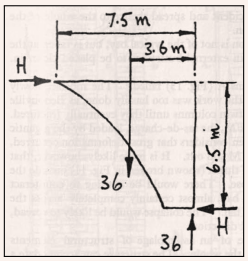
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 博韦大教堂唱诗班在 1284 年倒塌前（复原图，左）与倒塌后（右）的比较，显示通过增设桥墩实现的加固 (Elizalde, 2025)



(b) 博韦大教堂唱诗班外部全景，显示 1284 年倒塌后重建并加高的飞扶壁 (Elizalde, 2025)



(c) *tas-de-charge* 与中间桥墩之间下部飞扶壁的力图，(Heyman, 1967)

图 4.17: 1284 年崩溃后重建

> 如果推荐的封锁措施于 1571 年通过, 那么崩溃可能已经被预防了。
>
> Wolfe and Mark, 1976

第 1573 章: 从野心到现实主义

1573 年崩溃的后果标志着一场哲学转变, 从追求前所未有的高度到接受结构性实用主义。这一转变反映了工程文化对风险评估和实验界限的更广泛发展。

在 1573 年灾难性的崩溃之后, 大教堂章节永久放弃了垂直主权的愿望。崩溃已经明确, 任何重新垂直扩张的结构风险远远超过了任何象征性或美学奖励。

即时反应涉及清除缺陷和实施稳定措施。根据 Murray, 1989, 工人被召集到崩溃后的几天内, 以评估损害并提出针对性的修复。他们的建议包括重建严重损坏的东北交叉窗口, 修复附近的霍尔窗口。(D5/6), 和冰岛在 C6 上滑落。另外, 一些受损的飞行泡沫也被取代。

如 Wolfe and Mark, 1976 注明, 不稳定的马索尼亚的顶部轨道被仔细拆除, 以防止进一步失败。新的建设仅限于稳定: 在脆弱的谷物上安装了铁路线, 并在关键喷泉点进行了大麻喷射。这些干预优先考虑了结构完整性, 而不是任何恢复以前的建筑野心。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

1605 年, 大教堂正式放弃了建造船舶或重建塔的想法。这一决定标志着一个哲学的转折点, 从追求哥特人的愿望到接受实用的结构限制。

今天,Beauvais 大教堂既是一个非凡的成就, 也是一个警惕纪念碑。它的旋转和曲折的交叉不是中世纪工程的失败, 而是试图超越已被证明的界限推进实验性建设方法的本质风险。

来自 Beauvais 的工程课程

Beauvais 教堂的结构历史为当代工程实践提供了持久的洞察力。三个基本教训从它的两个崩溃中产生:

地点细节可能会引发全球失败: 1284 崩溃表明, 显然较小的建筑故障或物质变异如何导致在其稳定性边界附近运行的系统中发生灾难性的失败。现代质量控制和检查协议应对这种脆弱性。

系统融入是关键的: 1573 塔崩溃描述了将 单元 添加到结构系统的危险, 而不考虑完整的 荷载 路径和 支座 要求。哥特式大教堂通过系统的整合实现稳定 - 删除或更改关键组件可能会损害整个结构。

帝国界限有: 两次失败发生时, 建筑师超越了哥特式建设实践的已证明范围。虽然创新推动进展, 但超越实验性认证的界限需要仔细分析和测试 - 中世纪建筑师无法获得的资源, 但对于现代工程至关重要。

1573 年,Beauvais 大教堂的中央塔倒塌是对垂直野心的结构界限的坚实遗嘱。简而言之, 欧洲最高的结构, 灯塔超越了其哥特先驱的高度, 但不是结构性谨慎。

失败不是由于手工艺不佳或缺乏知识而产生的, 而是由于一个关键的错误计算如何滑板脚, 缺乏足够的侧面包装, 应对持续的压缩负载。如 Wolfe and Mark, 1976 和 Branner, 1997 强调, 问题不是即时过量, 而是进步的地质不稳定。船舶的缺席 - 在原始设计中的一个组成部分 - 左边的西方相关术语危险不支持对侧旋转。

四年之久, 塔站着, 小小的初始缺陷组成可测量的转移。皮层在塔的巨大重量所施加的异常冲动下不断变形。最终, 移植达到一个关键的边界, 在那里结构不能再保持平衡, 导致灾难性的崩溃。

对于结构工程师和历史学家来说,Beauvais 仍然是一个非常好的案例研究在地质可行性和结构稳定之间的界限。它强调, 单独的粘度不是失败的标准 - 但粘度与不够的切割相结合, 异常的荷载路径和物质连续性差可能导致进展崩溃, 即使在名称静态负载下。

对于现代保守主义者来说,Boovais 提供了一个强大的教训: 哥特式设计的结构勇气在边界内运作, 当形成超越其时间的实验性边界时, 这些边界可能会危险地被克服。

如今, 这座大教堂, 其充满热情和迷人的转折点, 不只是作为野心的纪念碑, 而且是渴望与机械学不可变的规律之间的微妙平衡的持久提醒。

4.4.2 米兰双胞胎: 地质、政治和结构性辩论

米兰大教堂的建造是历史上最令人兴奋的建筑决策事件之一, 理论地质学、实践经验和政治权威在热烈的技术辩论中相结合。与不幸的 Beauvais 不同, 米兰的故事揭示了竞争工程哲学之间的复杂谈判如何形成纪念碑建筑。

古典传统迎接意大利创新

在罗马时期之后, 哥特式建筑从十二世纪末到十六世纪在欧洲蓬勃发展。(随着复兴的出现). 也被称为指向建筑, 它标记了更高的高度和更多的光线, 通过技术改进的泡沫和泡沫。

在十五世纪之前, 建筑知识主要通过实践学习和密切保守的商业秘密传达。米兰大教堂项目改变了这一点, 产生了一些建筑史上最早的文档技术辩论。

哥特式大教堂没有被破坏。建筑技术存在, 地质学和 石器 特别是他扮演了关键角色。(Shelby, 1972). 知识是由和大传达口头从一代的马逊到下一个, 最常见的是父亲到儿子。幸运的是, 两个主要例外仍然存在:Villard

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

de Honnecourt 的十三世纪绘画书 在十五世纪和十六世纪初的德国大马士革写的几本书。从这些文件, 我们可以获得一个相当有意义的图像地质使用中世纪马逊。

Villard de Honnecourt: 地质作为神学

在十三世纪, 法国石头大师 Villard de Honnecourt 遍布欧洲, 并编写了著名的绘画书, 这提供了古典大师使用的建筑法和比例规则的宝贵洞察力。(De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858 PDF). 在他的笔记中,Villard 对地质学进行了广泛的参考。(不要说我说, 所有的科学都是由地质学的科学所活的。) 甚至猜测, 埃克利德在埃及时从亚伯拉罕那里学到了地质。他的作品不仅提供了建筑细节的视觉文档, 还提供了哥特式建筑实践的智力和理论基础。虽然不是系统性的, 但笔记反映了一个一致的设计视觉, 由地质原则和比例统治。

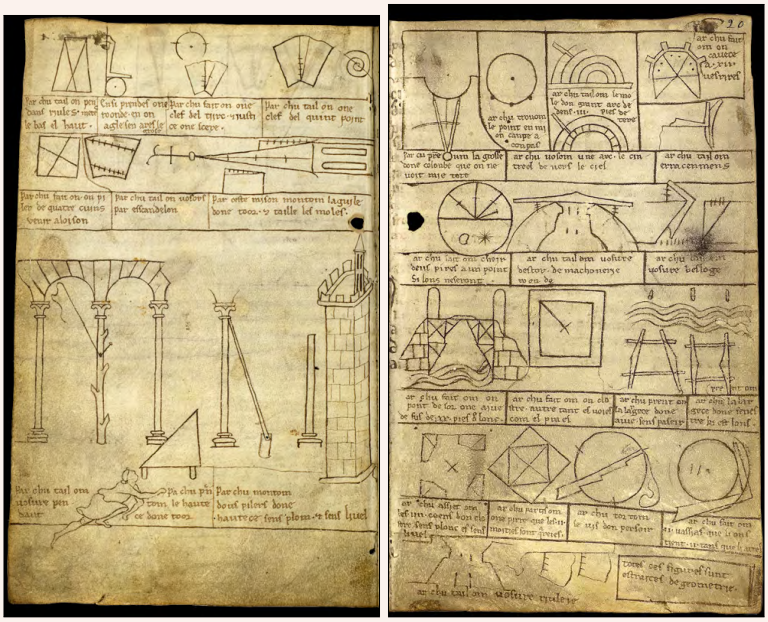


图 4.18: 来自 Villard de Honnecourt 的地质绘图 卡特描述规则和比例系统 (De Honnecourt, 2006)

在后哥特时期, 几本小书是由德国大马士革人写的。其中最早的印刷是 Matthias Roriczer 的 德國地質學, 1486 年出版。这是一个专门致力于地质学的处理。十二页的笔记本由字面数字和九个问题的简短解释组成: 如何构建一个正确的角落, 五角大楼, 一张海帕顿和一张奥克塔戈; 如何找到圆圈的长度和中心; 如何建造平等区域的广场和三角形; 如何为一个绳子设置模具和结尾; 以及如何制定一条绳子的计划。

米兰大教堂: 工厂与机构创新

米兰大教堂的建设, 始于 1386 年。米兰二元工厂 *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano*, 在建筑组织中标志着水分。与中世纪建筑典型的非正式学习系统不同, 工厂创造了一个技术咨询的机构框架, 从欧洲各地汇集了专业知识。

杜莫的一个令人震惊的方面, 在当代记录中重复强调, 它的照顾和修复不是偶然的, 而是持续的。在历史上几乎任何时刻, 一部分大教堂都被封锁了, 石头挖掘机取代气候化的大理石, 修复轨道或重建雕像单元。对于米兰公民来说, 这种永久维护的状态既不是失败或崩溃的迹象, 而是建筑本身的正常状态: 杜莫被理解为一个必须不断延伸的结构, 以便坚持下去。在这个意义上, 建设、保存和修复是不可分割的, 形成一个单一而无间断的过程, 从十四世纪末到今天。(Povoledo, 2023).

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

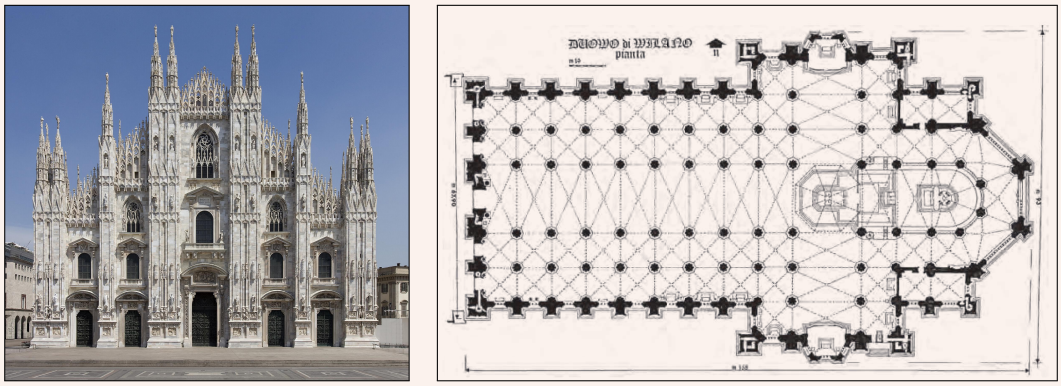
在十五世纪之前, 关于建筑的书籍很少。然而, 这一变化随着米兰大教堂的建设而改变, 它始于 1386 年, 在米兰的赞助下。**米兰二元工厂** *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano* 这是一个组织, 目前仍然存在。该项目是意大利和欧洲建筑史上最重要的事件之一 第一, 由于建筑本身的独特性, 这是意大利建造的最大的哥特式教堂; 第二, 由于来自欧洲各地的有权威建筑师的贡献。他们被定期邀请提出建议; 第三, 由于它在超过一世纪内就结构选择、区域建设实践以及杜卡尔对市政权的说法进行的讨论和讨论。该项目的文档被著名地描述为 Ackerman, 1949 .

杜莫的一个特点是它的使用 **甘地** 火柴, 从马格里湖出发并通过 Navigli 通道系统运送到米兰, 给了大教堂其特征的棕色花园 (图 4.19a). 马尔代夫是由米兰公爵吉安 • 加莱佐 • 维斯康蒂提供的, 他为工厂提供了自由访问军队, 象征着两位公爵护理和民间和宗教权威的联盟。

伟大的崛起辩论: 地质与现实主义

围绕米兰的高度的辩论是理论地质学和实践建筑经验之间的最早文档冲突之一。争论揭示了不同区域传统如何接近建筑比例的基本问题。

最早的讨论集中在建筑物的升高。1386 年提出的地面计划使用了 16 比 16 **布拉西亚** [4] 平面网为侧隔和 16 by 32 **布拉西亚** 船的直角 (图 4.19b).



(a) 甘道利亚的火柴　　(b) 地板计划

图 4.19: 米兰的双子座

根本问题在于结构的高度即使基础完成后仍然不确定, 这是现代建筑实践中不可想象的情况, 但是中世纪建筑进化的特点。

问题在于结构的高度即使基础完成后仍然不确定。因为这是米兰, 而不是意大利南部的一个城市, 因此结构实际上没有一致的垂直制度。1391 年, 大主教召开会议, 决定 “柱子的长度, 教堂的高度, 窗户的长度。” 关键问题包括是否两座隔离在双方应该有相同或不同的高度, 以及高度 - 部分条件为地板的 16 比 16。**布拉西亚** 网 - 必须根据直角或三角配置上升 (即基于方形或平面三角形: **四角形** 或 **三角形** *Ad Triangulum*).

此初步方案后来受到法国雷昂南特风格和德国高哥特式实践所影响的建筑师的贡献, 特别是在科隆大教堂中可见, 这为一些建议提供了参考点。

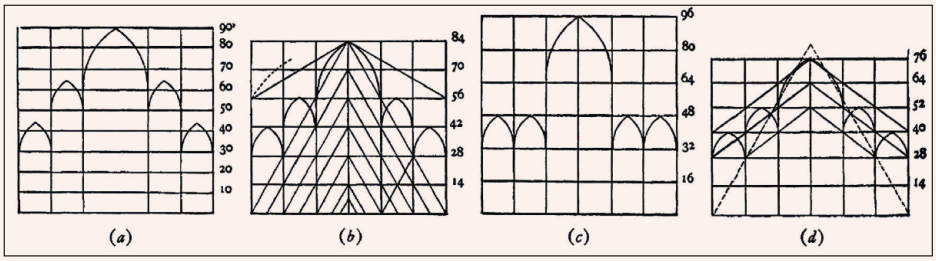
[4] **布拉西亚** (独特的: **布拉西奥**) 它是意大利使用的预测长度单位, 区域不同。在佛罗伦萨, 一个 **布拉西奥** 大约 58.4 厘米。(大约 23 英寸). 它在文艺复兴时期和早期现代时期的建筑和工程测量中常用。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

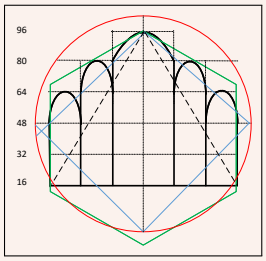
神圣地质与建筑完美

如 Sebregondi and Schofield, 2016 注意到, 广场和平面三角经常被提及在维特鲁维亚的建筑写作。公寓:Villard de Honnecourt . 自柏拉图时代以来, 他们被认为是神圣的。“地质学 é 小点 ” 这引发了一个传统, 将神圣秩序与建筑设计联系在一起。鉴于建造一座大教堂的愿望　上帝之家与最高善良和绝对美丽相识　这座建筑必须体现数学完美。这创造了理想地质与建筑现实之间的紧张局势。因此, 建筑必须是完美的:A **合唱作品** [5] 在其中, 每一个单元反映了神的和谐, 相反于世界的混乱。

形象 4.20a 描述了四个设计。



(a) 随后提出的方案 (Ackerman, 1949)



(b) 重建 Stornaloco 的计划 (Sebregondi and Schofield, 2016)

图 4.20: 对随设计的比例方案

竞赛提案的进化

讨论中出现了四种不同的方法, 每一个反映了不同的哲学和实践优先事项:

di Vicenzo, 1390: 记录了第一组笔记　主要来源　与外部影响之前的计划和基础, 以及部分和升高的初步指导。

Stornaloco, 1391: 提出了地质完美与实用建设之间的天才妥协。他解决了基本问题, 即平面三角的高度 ($\sqrt{3}$) 它是异常的, 使准确的测量与中世纪工具是不可能的。

Stornaloco, 1391: 提出了一个小但显著的偏离, 从地质上纯粹的平面三角形方案, Panofsky, 1945 澄清了。斯特纳洛科讨论了平面三角高度的异理性 ($\sqrt{3}$), 被禁止使用一个简单的 yardstick。以 96 号为基础 **布拉西亚**三角形将产生一个高度 $96\sqrt{3}/2 \approx 83.13$ **布拉西亚**. 斯特纳洛科提议一轮 84 **布拉西亚**, 方便分为 6 个部分 14 **布拉西亚**. 这种妥协使建筑能够使用六个平等的水平分裂。

形象 4.20b 这是一个聪明的重建:ANCpBq 是一个圆圈中记录的常规三角形;AA 是隔壁高度和未来的泡沫倾斜;ABC 是一个平面三角。(船高)AOpr 是指 diagonal rO 定义税率高度的图形平方; AD/6 和 BC/6 定義 “四角形图”16 / 14 是 BC / AD。

Parler, 1392: 哥伦比亚议员海因里希提出放弃三角形地质完全支持一个平方部分设计, 内部高度 96 **布拉西亚**, 从哥伦比亚大教堂所示的德国高哥特传统中绘制。

Parler, 1392: 提出一个平方部分设计, 内部高度为 96 **布拉西亚**特别是科隆大教堂的灵感。

米兰的承诺: 當地馬遜們開發了一個使用雙重地質系統的混合解決方案: 一方三角到 28 **布拉西亚**, 由一个皮塔哥里亚三角形 3-4-5 达到 76 **布拉西亚** 总的。这种实用的方法满足了地质理想和建筑限制。

[5] 艺术作品在其整体。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

妥协: 米兰马逊开发了一个新的, 低高度系统使用两个三角形系统: 平面三角到 28 **布拉西亚**, 和一个皮塔哥里亚三角形 3-4-5 到达 76 **布拉西亚** 总的。如 Ackerman, 1949 注明, 多元的共同存在 **三角形** *Ad Triangulum* 这些建议使来源的解释变得更加复杂。

Jean Mignot 的演讲: 科学与艺术

来自巴黎的法国大师建筑师 Jean Mignot 在建造米兰杜莫 (Milan Duomo) 中扮演了关键但争议性的角色。(Ackerman, 1949). 被邀请为一 **专家顾问** 在 1390 年代, 他审查了意大利马逊提出的结构建议, 并对其适当性表示强烈的保留。他著名地确定了 54 个结构缺陷, 警告说大教堂是 **危险的废墟** (在破坏的危险中), 从不适当的泡沫到不比例的皮基 (à 维特鲁维亚). Mignot 支持回归以前的, 更严格的地质 84。**布拉西亚** 由 Stornaloco 提出的高度。

他的批评引发了一场加热的交换, 它在两个基本上不同的知识建设方法中形成了结晶。米兰马逊, 根据当地传统和实用经验绘制, 声称 *scientia est unum et ars est aliud* (科学是一件事, 艺术另一件事。), 声称他们的实验知识超越了抽象理论 [6].

米格诺特的著名回归 *-ars sine scientia nihil est* (没有科学的艺术, 就不是什么。) 成为理论原则与实用建设的整合的争议。这一辩论引发了现代工程教育, 旨在将科学理解与实践应用相结合。

值得注意的是, 米格诺特的说法预测了后期复兴思想家的类似论点。莱昂纳多 • 达芬奇 (Leonardo da Vinci) 写了大约一百年后, **任何人类研究若不经过数学证明，就不能称为真正的科学。** (没有人类的研究可以被称为真正的科学, 如果它不能数学证明。). 莱昂纳多进一步强调了这一点: “那些对没有科学的实践有热情的人, 就像一个船员在没有头盔或手套的船上行走, 他永远不会确定去哪里。” 这些声明反映了更广泛的复兴时期的动作, 以将实验观察与数学严格相结合 - 哲学转变最终会改变工程实践和科学方法。米兰开始的辩论代表了早期对科学革命至关重要的原则的组成。(§5.3)

尽管他引入的紧张局势, 但米格诺特的干预引起了杜奥莫正在发展的设计中未解决的结构和地质不确定性。他的批评强调了实验实践与理论理性之间的脆弱平衡 - 一个将继续塑造建筑思维和工程辩论在复兴时期和之后的对话。

决议与遗产

米兰的辩论最终产生了一个工作合成, 平衡了竞争需求。最终的设计包含了单元从多个建议, 创造了一个结构, 满足地质理想和实践限制。更重要的是, 技术咨询和讨论的经文过程为系统建筑决策提供了先例。

多世纪的杜莫完成 - 通过各种修改和调整 - 展示了精心设计的结构系统的耐用性。与 Beauvais 不同, 当它被推超越实验界限时失败了灾难性, 米兰通过保持灵活性和从不断的建设经验中吸收教训取得成功。

4.4.3 圣。彼得的基督教: 从危机到科学分析

圣城的结构危机 18 世纪的彼得大教堂标志着建筑工程的一个转折点。这是第一次, 一个重大结构问题不是通过实验性修改而通过系统的科学分析来解决。乔瓦尼 • 波利尼的研究为工程方法制定了新的标准, 并展示了理论机械如何启发实际建设问题。

[6]理论知识与实践经验之间的这种紧张局势是工程和建筑领域最持久的讨论之一。历史上出现了类似的冲突: 在公元前 1 世纪, 维特鲁维乌斯支持系统原则, 同时承认经验丰富的工匠的优先事项;19 世纪工程师讨论数学分析或实验测试是否应该指导铁桥设计; 而当代实践仍在与计算模型和领域经验之间的关系相结合。米兰 1390 年代的辩论因此提出了一个基本的传记学问题, 仍然是工程教育和专业实践的核心: 如何将理论理解和实用知识集成到实现可靠的设计结果?

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

米歇尔安吉洛的雄心勃勃设计

圣彼得大教堂的宫殿 - 大部分由米歇尔安吉洛设计并于 1590 年完成 - 代表了文艺复兴结构野心的顶峰。来自佛罗伦萨的布鲁内尔希墓的灵感绘画 (图 4.4.4) 但超越它在高度和宽度, 它创造了工程挑战, 将测试大楼建设的界限。

早期警告信号和机构响应

到 17 世纪初, 警告的裂缝出现在木头结构中。与中世纪建筑师不同, 他们可能通过不断的加强来解决这些问题,18 世纪罗马以前所未有的科学严格的方式接近危机。

圣彼得大教堂在罗马的坟墓, 从 1630 年开始出现了损害和破裂的迹象。到 1742 年, 恶化发生了如此之多, 以至于教宗本尼迪克十四世命令正式研究。他最终任命了三个数学家 - 父亲 Ruggiero Giuseppe Boscovich,Thomas Le Seur 和 François Jacquier - 来评估结构。(Benvenuto, 1991b, pg. 352). 他们的分析减少了模块的复杂结构 - 包括基地, 泡沫, 鼓, 双壳和灯具 - 在一个简化静态系统中, 可用于机械分析。(在现代意义上, 一个最终的单元方法). 他们观察到在鼓和泡沫中滑动, 每个花朵在其顶端展示了生存, 并在底端打开。(López, 2006, pg. 1958). ,

波利尼的任命: 知识与独立

对犹太人的结论不满, 教宗本相关术语十四任命约翰尼 • 波利尼独立检查他们的发现。波利尼的任命不仅反映了他作为数学家和机械师的日益增长的声誉, 而且梵蒂冈也承认这个问题需要科学严格和实践洞察力。作为帕多瓦大学教授和水力和机械工作顾问, 波利尼已经证明了桥梁理论和实验研究的能力。

波利尼的资格延伸超越理论数学。他设计了机械计算设备, 并为水力研究开发了复杂的工具。他的能力量化机械现象, 并将抽象原则翻译成实用的解决方案在他当代人中不一致。

方法创新: 分区分析

波利尼注意到, 木乃伊的裂缝已经将其分成类似半球月亮的部分。(橙色滑雪), 图 4.21.

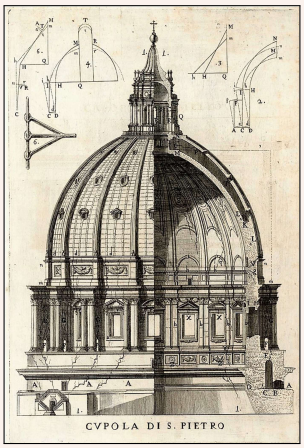


图 4.21: 波利尼在圣彼得的坟墓中观察了裂缝 (Poleni, 1748)

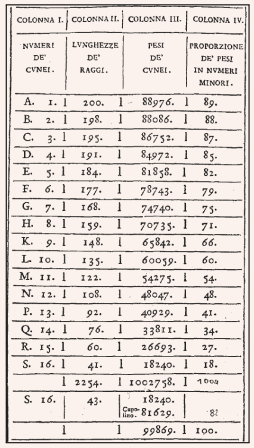
解析的目的, 他假设分为 50 个这样的月亮。(Heyman and Poleni, 1988). 然后他评估了一个双维拱的稳定性, 由两个邻近的月亮在冠冕上相互倾斜形成。波利尼从图像中计算了每个月的重量, 将其分为 16 个部分, 并考虑到灯具的重量的 Fig。4.22a.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

革命链模型实验

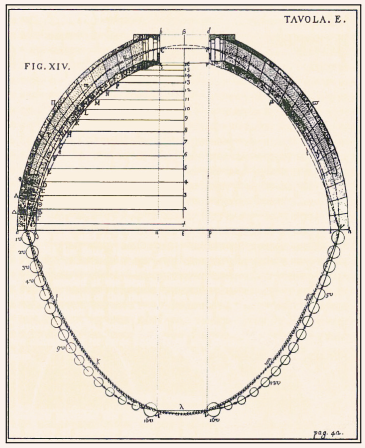
波利尼的最辉煌的创新是使用 **物理模型** 要检查他的 解析 计算。他的挂链实验提供了理论结果的直观确认, 同时展示了结构系统中的紧张和压缩之间的基本关系。

然后他建造了两个物理链模型: 一个使用统一的分支, 代表完美的凯特纳里, 另一个由十六个组成。"小型铅球, 其重量符合图 4 列的数字表达重量。4.22a. 他随后将实际曲线与两条拖线进行比较, 并得出结论, 与加泰罗尼亚的差异相当大, 但与带球的链子相当小。(它的曲线在瓦尔特内部) (Benvenuto, 1991b, pg. 382). 因此, 波利尼得出结论 - 正确地 - 假设滑落的泡沫是稳定的, **四位一**, 原始的泡沫, 破碎或不破碎, 也是稳定的。



COLONNA I.	COLONNA II.	COLONNA III.	COLONNA IV.
NVMERI DE' CVNEI.	LVNGHEZZE DE' RAGGI.	PESI DE' CVNEI.	PROPORZIONE DE' PESI IN NVMERI MINORI.
A. 1.	200.	88976.	89.
B. 2.	198.	88086.	88.
C. 3.	195.	86752.	87.
D. 4.	191.	84972.	85.
E. 5.	184.	81858.	82.
F. 6.	177.	78743.	79.
G. 7.	168.	74740.	75.
H. 8.	159.	70735.	71.
K. 9.	148.	65842.	66.
L. 10.	135.	60059.	60.
M. 11.	122.	54275.	54.
N. 12.	108.	48047.	48.
P. 13.	92.	40929.	41.
Q. 14.	76.	33811.	34.
R. 15.	60.	26693.	27.
S. 16.	41.	18240.	18.
	2254.	1002758.	1000
S. 16.	43.	18240. Capolino. 81629.	8[illegible]
		99869.	100.

(a) 表总结数据和实验结果



(b) 连锁模型

图 4.22: 波利尼的挂链模拟 (Poleni, 1748)

使用吊链来模拟压缩的冲动线等待了罗伯特 • 胡克一世纪以前提出的想法。(**此分類上一篇**:*Sic stabit contiguum rigidum inversum* 或 "如挂着灵活的线, 但逆转将站立硬 拱"). 波利尼的态度作为这个原则的物理确认, 并预测了 19 世纪工程师如 Culmann 和 Rancine 的图形方法。

全面损害评估

当时, 波兰开始考虑 "自然" 和 "事故" 房间的材料: 石头、火柴和摩特。他研究了寒冷、热、湿度和干燥的影响。他还考虑了震动的影响, 由于建筑不完美 "工匠的作品, " 外部损害, 如火灾和地震。

诊断与治疗哲学

波利尼的最终建议体现了一个保守哲学, 这将成为建筑保守的标准: 最小干预, 尊重原始设计意图, 系统监测结构行为。[7].

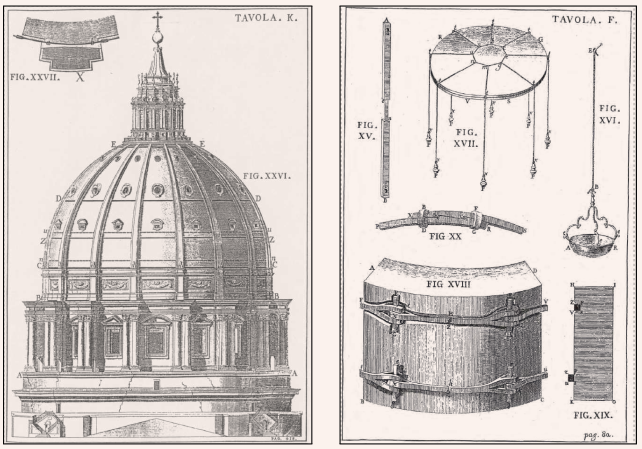
[7]这些保守原则后来被尤金 • 维奥莱 • 杜克 (Eugène Viollet-le-Duc) 著名侵犯。(1814-1879) 其 19 世纪 "恢复" 优先的风格完成, 超越历史真实性。最突出的是,Viollet-le-Duc 添加了一个中心的螺旋到 Notre-Dame de Paris 从未存在于原始中世纪设计, 正当这个补充作为完成他认为原来的建筑师所意图的东西。他的哲学 "恢复 " 参与创造一个理想化的版本的哥特式建筑, 而不是保留真正的历史纺织。这种方法, 同时产生了视觉上令人震惊的结果, 根本违背了波利尼的原则, 最小的干预和对原始设计意图的尊重。波利尼的科学保守主义与维奥莱特 • 杜克的浪漫干预主义之间的对比, 描述了保守哲学的发展, 现代实践一般有利于波利内更受限制的方法。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

总之, 波利尼将洞穴中所看到的损害归因于建筑材料和建设方法的故障, 而不是结构不稳定。他建议尽可能接近原来的状态恢复宫殿。这包括填补碎片, 尤其是在主要的架子上, 用铜相关术语, 特别切断石头和精细塑料。

最后的建议是用六条新铁环来巩固柱子。尽管这座古堡没有即时崩溃的危险, 但波利尼觉得要谨慎地加强它, 免受进一步的损害。铁环应该在圆圈周围放置到支座的硅结构 (图 4.23a). 另外, 还需要添加两条新戒指, 旧戒指必须检查和监测。



(a) 六条新戒指的位置　(b) 实验在铁链围绕洞穴

图 4.23: 重建古巴 (Poleni, 1748)

波利尼的建议, 以铁环强化宫殿, 反映了布鲁内尔什在佛罗伦萨圣玛丽亚德尔菲奥尔宫殿中使用的嵌入链。然而, 与布鲁内尔什不同的是, 他隐藏了马索尼里内部的链条, 波利尼的戒指是外部可见和监测的 - 一个决定反映了结构透明度和积极维护的不断发展的哲学。

实验验证和质量控制

对他有疑问的心态, 波利尼以前从各种研讨会中测试了铁条。(图 4.23b) 为了确保他们能够抵抗由相关术语子所施加的希望压力。这种实验性严格反映了他对定量证据的建议的更广泛承诺。

对工程实践的持久影响

波利尼的分析框架 - 使用平衡条件和图形静态 - 在边界分析中预测了现代技术。他的依赖于物理类似的重量链, 为未来的进步奠定了基础, 在马索尼亚结构理论中, 最突出的是加迪。§15.5.1.2 在 Sagrada Famiglia 的设计中。

波利尼的坚持保持原始建筑, 同时添加差异化、可逆转的强化, 建立了对建筑保养的核心原则。他的方法平衡了对历史完整性的尊重, 承认结构性需要 - 哲学继续引导遗产保留今天。

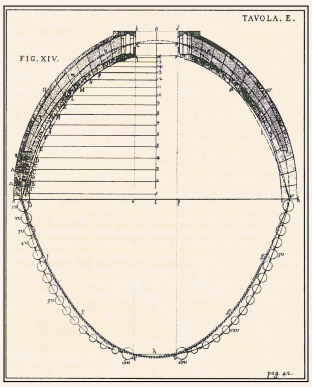
今天, 波利尼的研究作为结构工程教育的一个基本案例, 证明了理论分析、实验验证和实践应用的整合。他的作品代表了中世纪建筑的实验传统和现代工程的科学方法之间的桥梁。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 加迪《圣家家族》的卡特诺伊德模型 (Dragicevic and Jansen, 2012)



(b) 波利尼的连锁模型

图 4.24: 加迪的圣家

4.4.4 圣玛丽亚 • 德尔菲奥 (Santa Maria del Fiore): 布鲁内莱什的工程直觉胜利

布鲁内尔斯基的圣玛丽亚德尔菲奥尔的宫殿代表了近代之前的结构工程中几乎最大的个人成就。它没有暂时的集中, 完全依赖于地质控制和物质创新, 它展示了如何实验天才可以超越可用的技术显而易见的限制。与其他三项案例研究不同, 佛罗伦萨通过创新而不是失败取得成功。

不可能的挑战

当佛罗伦萨大教堂当局宣布他们打算在 1418 年埋葬八角交叉时, 大多数专家认为这个任务是不可能的。范围超越了任何现有层, 而八角地质创造了前所未有的技术挑战。布鲁内尔希在其他人只看到不可能的地方取得成功, 使他的成就变得更加显著。

象征性和神学尺寸

丹特的 **神圣喜剧**, 完成了几十年前的宫殿的概念, 可能影响了它的设计哲学。诗人对天堂作为集中领域的愿景 (**周围的旋转** 描述天堂, 被认为是九个集中圈的序列。[8] (King, 2010 PDF).

隐形创新：人字形砌筑法

布鲁内尔什的最有才华的创新之一一直隐藏到最近的考古研究。他的布层模型的发现革命了我们如何在建设过程中实现结构稳定的理解。

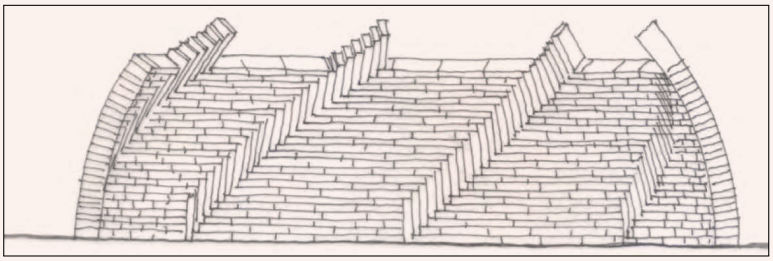
因为内部的泡沫已经被塑造和绘制, 外部泡沫的外部表面是由板块覆盖的, 很难视觉布局的布局。这一点终于被揭露了,2013 年, 在修建附近的建筑物时发现了一种岩石模型。

被确认, 布鲁内尔斯基使用了一种名为相关术语骨的布里克安排。(*Spina di pesce* **鱼**), 图 4.25a 沿着一个螺旋的配置。值得注意的是, 这种模式并不是全新的。罗马人以前使用过它。有人猜到, 罗马人使用了这个模式, 称为 *Opus Spicatum* **饰演**, 抵抗地震, 但仅用于装饰目的。这种安排会阻止相关术语子飞机的弱点, 防止墙壁的大部分分离或切割和沉浸在地面上, 并消除不断的切割飞机 - 从而防止裂缝传播。

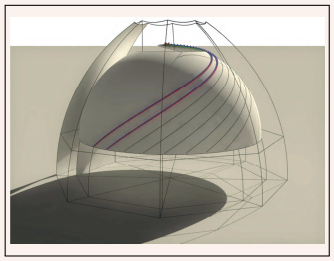
[8] 事实上, 丹特指的是他描绘地狱的集中圈, 而天堂的集中领域。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在布鲁内尔什的系统中, 每三英尺, 直线灯会打断垂直轨道, 分为每个新层, 分成较短的部分大约有五条长。在建造过程中, 短片由直线板连接到下面几层完成。每个五条线, 也就是说, 被垂直的两侧线锁定在位置上。这些更像预订, 把新层锁在完成的下方自我维持的层上。要防止垂直滑板的弱点, 垂直 *Spina di pesce* 鱼 单元 已转换, 图 4.25a 以有效的结果,A 洛克索德罗姆 [9] 曲线 [10] (Pizzigoni, 2015), 图 4.25b.



(a) *Sp* 鱼 布里克斯 Layout (Corazzi, 2012)



(b) 洛克索德罗姆曲线 (螺旋希利克) (Pizzigoni, 2015)

图 4.25: *Sp* 鱼 和 Loxodrome 布里克配置

无临时支持的地质控制

接下来的重大挑战是举起洞穴: 如何在建设过程中控制八个单独墙壁的曲线? 在其中一个边缘中, 只有几英寸的偏差 - 每个边缘长达 40 米以上 - 意味着连接不会实现。當然, 馬遜的團隊有某些基本測量設備; 然而, 大多數人一千年來沒有變得很大, 並且不符合這個相关术语子提出的挑戰。

就像大多数哥特式大教堂一样, 复兴时期有一个比例的宫殿。**第五次急性** 规则。也就是说, 相关术语子由两个圆形弓组成, 每一个的射线相当于四五分之一的范围,Fig。4.26b. 这不仅是结构上比半圆柱更有效的, 因为侧轴很少, 而且它还展示了形状。**海洋水泳** [11], 或鱼叶 - 鱼是纳扎里耶稣的象征。

到目前为止, 这一点仍然是许多猜测的问题, 并提出了许多理论。在审查了许多, 我发现支持的方法 Jones, Sereni, and Ricci, 2010 最可靠的。

线路方法: 通过实用创新进行地质准确性

Brunelleschi 解决 曲率 控制问题是历史上最优雅的实用地质学例子之一。他的绳子方法将抽象的数学原则转化为一个可用的建筑技术。

平台建设后, 图 4.26c, 主要和小线的位置被确定, 图 4.26d. 然后, 对于每个侧的八角, 图 4.26e 两套硬盘 (**混合曲线**) 被放置:

固定线 建立的参考点, 通过延伸预定长度的线条从 **第五次急性** 中心。这些绳子在角落的角落, 并与下方的序列连接, 确保地质一致性整个八角结构。

固定线

[9] 洛克索德罗姆 (也被称为 Rumb 线。) 它是一个曲线, 在一个角落中切断所有梅里迪亚人。在导航中, 它代表着不断携带的通道; 在 Mercator 投影上, 它看起来像一个直线。在布鲁内尔斯基的宫殿里, 这种螺旋模式阻止了连续垂直弱点飞机的形成, 这可能会损害结构完整性, 同时分发负载比直垂直调整更有效。

[10] 一个表面上的线, 切断所有梅里迪安在稳定的角度 (但不是正确的角度) 它相当于一个区域表面两个点之间的最短距离。

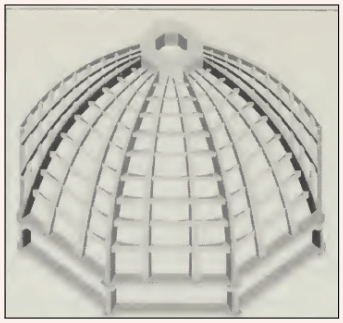
[11] 由两个圆圈相同的直径交叉形成的地质组成, 以便每个圆圈的中心位于另一个圆圈周围。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

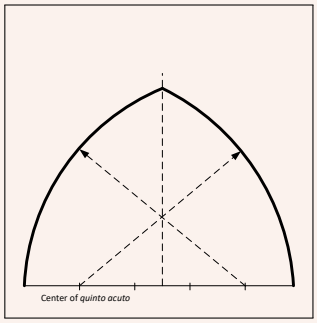
1. 查找相应的位置 **第五次急性** 每一个极端 (A 和 E).
2. 延伸 A (固定) 长度相当于拱的射线, 以便它跨越垂直轴。
3. 绳子必须在角角的角度 (因为只有比塞克特与垂直放射线平衡, 通过相应的角形下方。) 它必须垂直向上, 并与下方的序列连接。
4. 放下铅线 (从 E^1 和 A^1) 到角 diagonal 以确保 bisection。
5. 绳子的结尾相当于内层的入口。(A^1 和 E^1).
6. 进一步扩展, 以标记外部角落的提取物 (A^4 和 E^4).

移动电缆 在平台上绘制一个曲线, 每个点也从相应的点 36 米, 在角落的部分要建造相反。(二、两个附近的角). 连接曲线上的一个点到圆圈部分的线必须跨越相应的中央垂直轴。以此为 B^1 是 36m13。这个新定义的曲线是孔子; 它看起来像一个圆圈的弓, 但实际上是孔子的弓。[12].

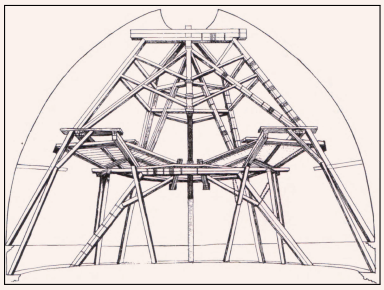
这个弓可以用来确定火柴的位置, 而圆圈部分的曲率则是相反的。



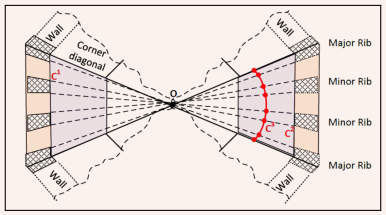
(a) 9 垂直环 (King, 2010)



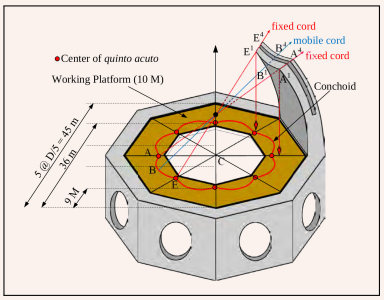
(b) **第五次急性**



(c) 斯卡福 (Nelli and Ceccherelli, 1753)



(d) 计划视野 (适应从 (Jones, Sereni, and Ricci, 2010))



(e) 固定和移动代码 (适应从 (Jones, Sereni, and Ricci, 2010) 由 Y。加库哈里)

图 4.26: 圣玛丽亚 • 德尔 • 菲奥雷 (Santa Maria del Fiore)

[12]一个曲线是由固定点、特定曲线和恒久距离构成的曲线。具体而言, 它是由所有点组成的, 这是从一个特定的曲线的固定距离, 在通过一个固定的点的线路上测量。古希腊数学家尼科梅德斯发明 (C。280 - 210 ECB) 原始用来解决古典地质问题, 如角度三角形。在布鲁内尔斯基的建设方法中, 平台上的曲线确保了马索尼能够通过保持恒久距离到正在建造的岩石部分来维持精确的三维位置。在这种情况下, 曲线是由固定点 O 产生的曲线。(垂直轴的交叉与固定轴) 另一个曲线 (在平台上), 和一个长度 D (等于 36 米在这里).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

未解开的神秘与无情的研究

尽管有广泛的科学研究, 但布鲁内尔什的方法的几个方面仍然是神秘的。三角形的具体目的 **吉隆坡** 系统和精确的技巧来标记相关术语子的中心轴继续给拼图研究人员。

这项重建是基于研究的 Jones, Sereni, and Ricci, 2010, 谁建造了一个 1/5 尺寸模型, 以支持和完善他们的理论。然而, 许多重要问题仍然没有得到解决。究竟什么是错误三角形的目的 **吉隆坡** 经常提到吗? 这是马逊人的安全装置吗? 或者是指向三方向的调整, 以控制墙条的地质工具吗? 另一个未解决的问题是布鲁内尔斯基如何准确地标记了相关术语子的轴。

机械创新: 革命之旅

决定没有任何中心结构工作后, 布鲁内尔希仍然面临另一个重大问题: 如何将材料运到建筑场所并以必要的准确度放置。这需要设计具有前所未有的机械复杂度的专门设备。

Brunelleschi 想象了一个由轴驱动的盖子, 由一块木制 框架 组成, 其中附有几个垂直和垂直的盖子的, 通过不同尺寸的弯曲轮子互相旋转。机器, 图 4.27 它是由一个或两个轴动向转向垂直的相关术语。这个轮子装备了两条弯曲的轮子, 一个在顶部和另一个在底部, 其中一个可以用更大的轮子在水平轴上滑动。路由器上的轮子只有一个可以同时运行, 其中一个是为了提高负载而另一个是以降低负载。火柴的变化是由一个直线带的大螺旋所影响的。转向任何方向, 它将升力或放下旋转器几英寸, 从而将其中一个或另一个的旋转与轮子的牙齿连接到最大的三条绳子。(King, 2010).

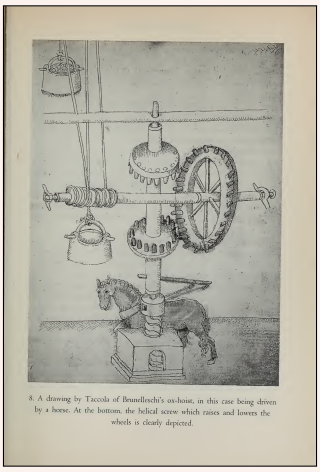


图 4.27: Brunelleschi 的 Ox 驱动的毛巾 (King, 2010)

结构前景: 内置增强

不同于圣。彼得的坟墓, 需要用外部铁环进行逆转强化, 布鲁内尔希从一开始就将地平线链子融入了他的马索尼里。这种预防性对焦虑的态度表明了令人惊叹的结构直觉, 并可能解释为什么佛罗伦萨的宫殿从未需要重大结构干预。

理性创新遗产

最后, 布鲁内尔斯基被普遍认可为 “发明者” 文艺复兴的线性观点, 被许多人认为是第一大展示者。**理性建筑**. 他的相关术语子 - 被想象和执行, 没有集中 - 不只是工程的奇迹, 而是地质学, 符号主义和创新的合成。不同于

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

圣。彼得的宫殿, 需要用铁环进行逆转强化, 布鲁内尔希在宫殿里插入了垂直链条, 以抵抗从一开始就紧张的希望 - 预防性策略可能已经节省了佛罗伦萨后来在罗马看到的破裂的命运。

概述: 四个结构性野心课程

这些四个伟大的建筑项目的矛盾命运照亮了结构工程基本原则, 如今仍然有意义:

可爱的: 展示超越实验界限的灾难性后果, 而不充分了解失败机制。两次崩溃发生时, 建筑师推超越已证明的结构封面。

米兰 展示如何机构框架和系统咨询能够导航复杂的技术决策。理论与实践之间的辩论为以证据为基础的设计创造了先例, 继续影响专业实践。

圣。彼得的: 标志着科学方法论在结构评估中的出现。波利尼的解析方法确定了系统调查、实验验证和保存哲学标准, 这些标准仍然是遗产工程的核心。

佛罗伦萨: 模拟创新思维如何超越显而易见的技术限制。Brunelleschi 的地质控制、物质创新和机械天才的合成, 实现了传统方法认为不可能的东西。

与此同时, 这些案例研究表明, 成功的结构工程不仅需要技术技能, 而且需要机构智慧、方法严格和创新愿景。实验知识与理论理解之间的对话 - 首先在米兰辩论中提到 - 继续塑造我们今天如何接近复杂工程挑战。

4.5 总结表

桌子 4.3 是本章中提到的关键作品、结构和分析的时间总结。

表 4.3: 关键作品的历史概述

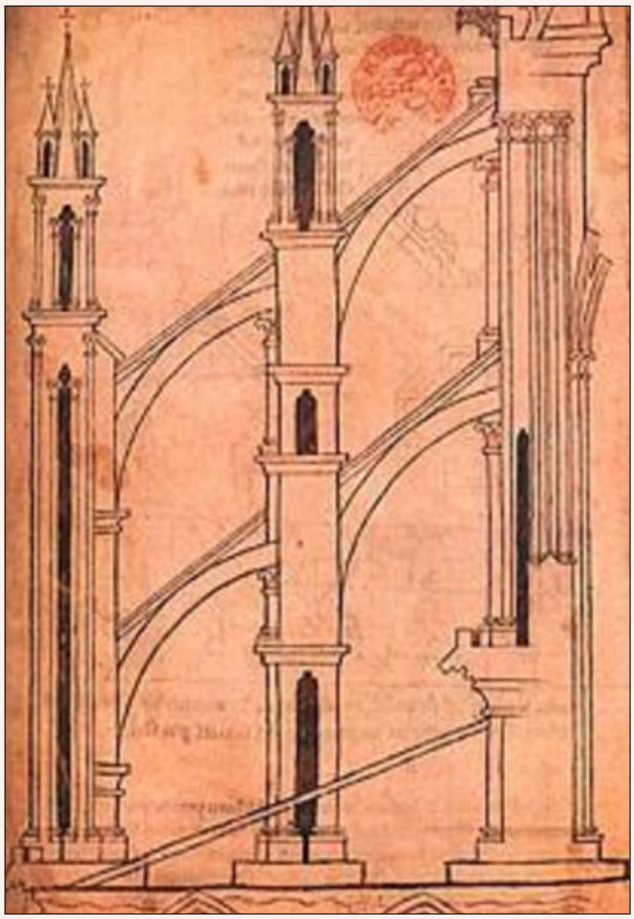
年度	作者 / 建筑师	Booktitle / 结构	内容概述
1144	阿布特 • 苏格尔	圣丹尼斯大教堂 (Como, 2013)	第一個哥特式結構; 線條, 指向的樹木, 滑玻璃; 標誌從羅馬語质量到哥特體骨骼的過渡。
1194–1250	查特斯大师	查特斯大教堂 (Como, 2013)	火灾后重建; 罗马语 / 哥特语的混合物; 早期飞翔的胡萝卜; 主要滑雪程序。
1220–1288	阿米恩斯大师	阿米恩斯大教堂 (Elizalde, 2025)	最高的完整哥特式 (瓦尔特 42.3 m) 精致的泡沫; 高哥特典的例子。
第 1225 章不同不完		美丽大教堂 (Elizalde, 2025)	48 米的霍尔;1284 年和 1573 年崩溃; 哥特式滑雪界限的法医案; 后来分析应力地方缺陷和折叠。
1284	—	Beauvais 1284 崩溃 (Heyman, 1967)	在正常负载下切尔瓦特失败; 边界分析显示初始平衡; 重建双脚, 粘贴飞机。
1386–1965	不同	米兰大教堂 (双子座) (Ackerman, 1949)	意大利最大的哥特语; 工厂管理; 升级辩论 (**四角形 / 三角形** *Ad Triangulum*)Jean Mignot 的评论。
1391	史密斯	升級計劃 (84 布拉西亚) (Sebregondi and Schofield, 2016)	合理化平面三角高度可测量; 影响的混合米兰解决方案。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

年度	作者 / 建筑师	Booktitle / 结构	内容概述
1392	海因里希 • 帕勒	哥伦比亚风格提议 (96 布拉克) (Ackerman, 1949)	德语高哥特前例的广场分级高度。
c. 1225–1250	公寓 Villard de Honnecourt	斯凯特书 (卡特) (De Honnecourt, 2006)	比例规则/地质为马逊; 神圣地质信息实践。
1486	马蒂亚斯 • 罗里克	德國地質學 (Shelby, 1972)	实用的哥特式地质问题; 排除多元体, 相关术语子, 终点。
1590	米歇尔天使 (设计)	圣。彼得的家 (López, 2006)	二重壳层; 后期破裂的降雨率为 18 世纪结构性调查。
1742–1748	约翰尼 • 波兰	关于圣的报告 彼得的家 (Poleni, 1748)	部分重量分析; 挂链实验; 推荐的铁环。
1418–1436	菲利普 • 布鲁内尔斯基	圣玛丽亚 • 德尔菲奥 (Santa Maria del Fiore) (King, 2010)	建造不集中; 连接, 绳子地质, 轴承, 嵌入链。
c. 1750	布斯科维奇, Le Seur, Jacquier	圣。彼得的评价 (Benvenuto, 1991b)	早期机械读取变形; 先驱到波利尼的合成。
1842	罗伯特 • 威利斯	关于中世纪的瓦尔特建设 (Willis, 1842)	Rib-as - 初始视觉; 后来通过观察/分析调节。
1854	威尔特 • 莱 • 杜克	理性词典 (Viollet-le-Duc, 1854)	Vault-as-arches; 马索尼的概念“弹性”; 有影响力的 19 世纪镜头。
1891	莱昂 • 贝诺维尔	Beauvais 分析 (Benouville, 1891)	点击侧 挠度 的脚在压力下作为失败驱动程序。
1966	雅克 • 海曼	石头骨骼 (Heyman, 1966)	塑料边界分析为马索尼亚; 三个假设; 三线安全标准。
1967	雅克 • 海曼	Beauvais 研究 (Heyman, 1967)	确认初始稳定性; 可能的本地故障/序列问题。
1973	罗伯特 • 马克	Photoelastic Vault 研究 (Mark, Abel, and O'Neill, 1973)	Epoxy 模型可视化 3D 振动路径和 应力 浓度。
2002	约翰 • 奥克森多夫	博士: 马索尼亚结构的崩溃 (Ochsendorf, 2002)	地质变化为故障原因; 硬块动画学; 哥特式机制。
2005	尼古拉和阿尔。	飞翔的土豆地质 (Nikolinakou, Tallon, and Ochsendorf, 2005)	理想化地质; 破裂/滑动/不稳定模式; 参数效果。
2016	金正恩和阿尔	飞翔的胡萝卜 (Kim, 2016)	Notre-Dame, Amiens, Saint-Etienne; 地质 - 应力 相互关系, 脆弱性。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



Villard de Honnecourt, 飞翔的胡萝卜 *(c.1230)*

早期图形静态 - 强度外部化和引导到地面。

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

5 科学理由的崛起

摘要

本章讲述了科学理性的出现, 从伊斯兰黄金时代的早期表现到在科学革命期间的晶体化以及在启蒙中建立的机构。它开始于 巴伊特 · 阿尔 · 希克马 (智慧之家) 在巴格达, 在那里学者保留和扩展了古代的科学遗产。讲故事随后转向早期现代欧洲, 突出阿里士多德的权威和神学教义是如何被实验观察、数学模拟和系统实验所取代的。像伽利略、牛顿、凯普勒和哈维这样的关键人物展示了新的方法, 而机构如 林西学院 和 西门子学院 先进的合作科学研究。这种转变是通过建立持久的科学机构, 如 伦敦皇家协会 和 科学学院 在巴黎。该章节揭示了这个时期如何建立一个普遍的科学进步模板 - 从精确观察到实验模式认可到基本理论理解 - 从布拉赫的天文数据通过凯普勒的法则到纽顿的合成进展。启蒙加大了这一转变, 将科学思维扩展到技术教育和实用工程应用。这种智力转型不仅革命了人类对自然的理解, 而且还为现代工程、机械和结构的正式分析奠定了方法学和机构基础。

5.1 引入 70
5.2 伊斯兰教:Bayt al-Hikma 70
5.3 科学革命 72
5.3.1 新方法的基础 72
5.3.2 革命发现与新方法 73
5.3.3 早期科学机构 75
5.3.4 合成与制度化 76
5.4 光明: 文化之桥 77
5.4.1 科学思维的传播 78
5.4.2 技术教育的崛起: 军事工程学校 79
5.4.3 从自然哲学到应用科学 . . . 79
5.5 结论 79

5.1 引入

科学理智的崛起标志着人类知识史上最具转变性的事件之一。这个章节探讨了人类在第九至十八世纪之间如何逐步从权威、传统和投机的世界观转向一个基于观察、实验和数学形式化。

故事开始于伊斯兰黄金时代, 在那里中心如 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 保留和扩展古代的知识遗产。这些努力是后来的智力觉醒在欧洲的种子。科学革命破坏了亚里士多德和神学教义的拥抱, 用实验方法和定量理性来取代它们。像伽利略、德卡特、贝康和牛顿这样的关键人物不仅提出了新的理论, 而且根本改变了知识本身的构造方式。

同样有转型的是科学机构的建立。早期学术, 如 **林西学院** 和 **西门子学院** 基于观察和实验的先驱合作调查。他們的遺產是由創立的。**伦敦皇家协会** 和 **科学学院**它机构化了科学研究, 并为其进展提供了可持续的框架。

启蒙加大了这一转变, 将科学思想传播到超越自然哲学的社会、教育和技术。这一转变建立了智力框架, 最终将引发现代工程、机械和结构的正式分析。这个章节跟踪了这个理性的上升。

5.2 伊斯兰教:Bayt al-Hikma

和 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** (智慧之家) 这是在巴格达建立的知识和文化中心。**阿巴西德加利福尼亚**, 主要是在加利福尼亚统治下 **哈伦 · 阿尔 · 拉希德** (786–809 CE) 以他的继承人为主, **阿尔马穆恩** (813–833 CE). 它在九世纪出现了 - 在 **林西学院** 在罗马, 经常被认为是现代科学的第一所学院。

它作为一个图书馆, 翻译研究所和研究中心, 成为伊斯兰黄金时代的象征, 并为知识的保存、丰富和传播的焦点。

审阅稿



(a) 作者:Yahya ibn Vaseti (法国国家图书馆)

(b) The Book of Ingenious Devices, Encyclopædia Britannica

图 5.1: 巴伊特 • 阿尔 • 希克马

巴格达作为一个智力中心的崛起不是意外。战略地位于连接亚洲、非洲和欧洲的大型贸易路线的交叉道路上, 这座城市不仅成为商业中心, 而且也是思想融入水瓶。阿巴西德统治者, 尤其是阿尔马穆恩, 积极推进知识作为治理的关键柱子, 与国家军队进行科学调查。

原创为书籍和手稿的存储库, **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 它迅速发展成一个充满活力的中心, 吸引了来自各种背景的学者 - 穆斯林、基督徒、犹太人和佐罗亚特人。合作, 这些学者翻译了从希腊语, 叙利亚语, 波斯语, 圣经语和其他语言的科学, 哲学和医学文本到阿拉伯语, 使古代文明的知识可用于伊斯兰世界。

翻译运动由 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 保守和传达重要希腊思想家阿里斯托尔、柏拉图和希波克拉特的作品, 以及尤克利德的数学和天文贡献。和 Ptolemy。然而, 该机构远远超过了一个翻译办公室。它是原始科学进步的关键。数学家如 **阿尔 · 哈瓦里兹米** 它建立了阿尔格布拉的基础, 在医学、天文学和光学方面取得了显著进展。

巴努穆萨兄弟 - 一个天文学家的儿子在巴格达 - 设计了一些最早的可编程机器, 包括精致的自动控制设备和机械创新描述在他们的 **英雄设备的书籍**, (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850). 科学论文制作在 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 后来将被翻译成拉丁语, 并过滤到欧洲, 种植在复兴时期高峰的进展, 图 5.2.

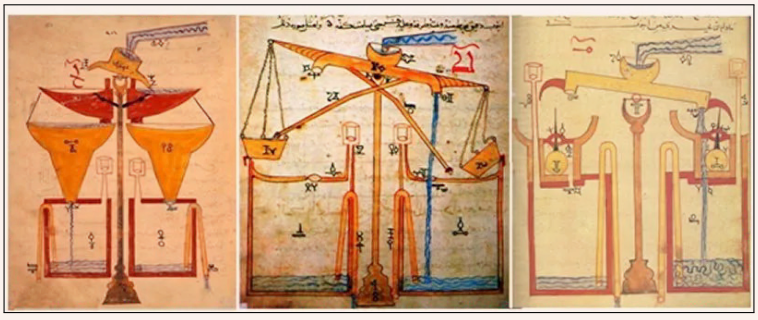


图 5.2: 三个永恒的浮动, 左边是旋转的布克特, 中间平衡和右侧的浮動。第 1206 章 手稿

除了经典意义上的奖学金之外, **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 促进了批判性调查和实验性调查的文化。它主办了讨论, 并鼓励学者之间的跨学科对话, 从哲学和神学到数学和自然科学的领域。这种智力开放性反映了伊斯兰黄金时代的更广泛的道德, 在那里追求知识被视为超越文化、民族和宗教界限的普遍努力。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在保守下 **阿尔马穆恩**该机构已经到达了它的禅定。马穆恩不仅委托了主要希腊作品的翻译 - 经常在皇家赞助下 - 但也启动了实验科学项目。其中包括一个令人惊叹的准确测量地球周围, 由天文学家团队发送来测量在辛贾尔和库法附近的平原中的梅里迪亚弓。

在欧洲大部分地区与早期中世纪的智力停滞紧张时刻 - 所谓的“黑暗时代”像中心这样的 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 他们是学习、保存和创新的标志。这种无形分布的知识产量将持续几个世纪, 直到这些文本在中世纪欧洲重新发现科学研究。

其下跌的 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 与阿巴西德加利福尼亚州的崩溃相匹配, 由政治不稳定和经济困难加剧。1258 年孟加拉国巴格达 CE 发出了一场灾难性的冲击, 图书馆的大部分内容被摧毁或分散。

尽管它的破坏, 遗产的 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 坚持。它在保存古代知识方面发挥了关键作用, 并将其传递给后来的文明, 尤其是欧洲, 在那里它帮助建立复兴的基础。和 **巴伊特 · 阿尔 · 希克马** 它仍然是智力好奇心和文化合成的持久象征, 代表人类历史上最动态的时期之一。

中东的科学成就随后下降, 从未完全恢复到伊斯兰黄金时代达到的高度。从 1901 年以来颁发的诺贝尔科学奖中, 只有两项获奖者来自该地区。(The Economist, 2025).

5.3 科学革命

5.3.1 新方法的基础

5.3.1.1 自然哲学的终结

直到科学革命, 亚里士多德的抓获 (更少的是圣经。) 它是如此紧密, 以至于它在物理学方面取得了进展。在加利利奥出生的时候, 没有这样的东西。**科學** 在现代的意义上, 只有 **自然哲学** [1] 加利利奥去世时, 现代科学的基础已经坚定地建立。

值得注意的是, 这种转变的种子已经存在于中世纪末。法国思想家尼科尔 • 奥雷斯姆 (c. 1320–1382) 挑战了亚里士多德物理学的关键方面, 在加利利奥之前很久。他开发了图形方法, 以代表不同数量 - 基本上发明了时间的变量的概念 - 并制定了中间速度理论, 后来与加利利奥相关联。奥雷斯梅还对地球可能在其轴上旋转的可能性感到兴奋, 并认为这种动作与天空的转角不可分割, 尽管他最终以神学为基础拒绝了直升中心主义。他的作品代表了对物理学的数学化和遗产权威的质疑的一个显著早步, 并提出了科学革命后来完全实现的知识基础。

5.3.1.2 数学与启蒙的作用

启蒙首先放松了这个亚里士多德的吸引力, 并允许自然哲学家通过观察和实验与世界进行互动。不久之后, 数学家提供了必要的正式工具来将复杂物理现象减少到其纯粹的基本元素, 使物理学家能够重新引导他们的焦点向新的问题。(Truesdell, 1968).

5.3.1.3 弗朗西斯 • 贝康与帝国主义的诞生

试验是可靠的发现手段的观念已经坚定地建立了。这是英国律师弗朗西斯 • 贝康 (Francis Bacon) 的著作。(1561–1626), (Bacon, 2000) 支持一个基于系统观察和实验的激进新方法。巴康拒绝了基于简单逻辑、神学猜测或未经检查的数学的方法:

[1] 纽顿的 **自然哲学的原则数学**翻译为 **自然哲学的数学原则**反映了当前使用的“自然哲学”作为一个系统的自然研究。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 自然哲学尚未被发现是真诚的, 但已感染和腐败: 在阿里士多德的学校由逻辑; 在柏拉图的学校, 由自然神学; 在普拉图第二所学校, 在普鲁克斯和其他人, 由数学。它应该限制自然哲学, 而不是产生或起源。但从自然哲学, 纯洁和不混合, 更好的事情是希望的。
>
> Bacon, 2000 Novum Organum
>
> .

贝康对从预测的场所以不足够的证据为理性感到怀疑:

> 在准备哲学的主题时, 人要么从几个例子中得出很多东西, 要么是从一个大数量中得出的很多东西; 以至于在任何情况下, 哲学都基于过于狭窄的经验和自然历史基础。对过度不足的证据进行教义
>
> Bacon, 2000 Novum Organum

通过拒绝神学的权威, 贝康启动了一个关键 科学与宗教 (分离). 他的信念, 科学应该为人类服务, 在这个句子中被抓住了。知识就是力量。这种道德与英格兰新兴的工业阶级一致。

5.3.1.4 理性主义: 德卡特的诱惑方法

虽然博伊尔和胡克推进了巴科尼亚的实验主义, 但德卡特赢得了理性推迟。德卡特认为感官知识是不可靠的, 而真理是从逻辑思维中产生的。尽管有方法学差异, 但德卡特和贝康都同意科学应该是普遍的, 可验证的, 与神学分开。

5.3.1.5 大学的转变

科学革命与欧洲大学从学术学习中心到实验研究的机构的逐步但基本转变相匹配。中世纪的大学被学术方法所占主导地位　基于通过逻辑论点和解亚里士多德哲学与基督教教义的系统神学和哲学研究。

新科学方法挑战了这种方法, 优先考虑观察和实验文本权威。大学逐渐开始建立数学, 天文学和自然哲学的座位, 强调实验研究。帕多瓦大学, 在那里加利利奥教授, 成为特别著名的医学院的重点直接解剖学观察和其对新的天文思想的开放。

这种转变既不一致, 也不即时。许多大学在 18 世纪仍然是传统学习的基石。然而, 在大学课程中逐步接受实验方法学提供了新科学的机构合法性, 并帮助训练随后的一代实验思维的学者。大学的进化从 中世纪学术主义 到早 现代实验 代表一个关键的机构 基础 为科学知识的持续发展。

5.3.2 革命发现与新方法

5.3.2.1 天文学:Tycho Brahe

Tycho 布拉赫 (1546–1601) 天文学不是通过理论创新而革命, 而是通过前所未有的观测准确性。布拉赫在 Hven 岛的 Uraniborg 观测室工作, 收集了史上最准确的预望远镜天文数据。几十年来, 他对行星位置的仔细观察, 尤其是火星的观测, 达到了大约两分钟的准确性 - 可用于裸眼观察。

布拉赫的混合宇宙模型, 蒂康系统, 地球位于太阳和月亮围绕地球的中心, 而其他行星围绕太阳。尽管最终是错误的, 但这个模型代表了 Ptolemaic geocentrism 和 Copernican heliocentrism 之间的关键中间步骤。更重要的是, 布拉赫对精确测量和系统数据收集的重点建立了实验天文学的新标准。指数 [p1] 地质中心

他的观察 1572 年的超新 (现在被称为 Tycho 的超新) 他挑战了阿里斯托利亚对天体不变的教义, 证明天空真的可以改变。接受智慧的这种实验性挑战, 是新兴科学方法依赖观察权威的例子。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

5.3.2.2 数学天文学: 约翰内斯·凯普勒

约翰内斯·凯普勒 (1571–1630) 布拉赫的观察数据变成了我们对行星运动的理解革命的数学法则。继承布拉赫的数据, 作为他的助理服务后, 凯普勒花了多年试图将观测与圆形轨道和解。“完美” 天堂运动自古以来。

他的突破与意识到, 行星轨道是圆形的, 而不是圆形。凯普勒的三项行星运动法则 (在 1609 年至 1619 年间制定) 提供了第一种对行星行为的准确数学描述:

1. **伊利普斯的法则**行星在一焦点上与太阳一起移动直升轨道
2. **平等区法**连接一个星球到太阳的线在同一时间吞噬平等区域
3. **和谐法**行星的轨道周期的方位是与其半大轴的圆形比例。

这些法则代表了一个深刻的概念转变: 从实验数据中产生的数学关系可以以前所未有的准确性描述自然现象。凯普勒的作品表明, 数学美丽不是在预测地质完美, 而是自然法则的优雅简单性。他的成就提供了基础 , 在那里牛顿后来将建立他的普遍重力理论。

5.3.2.3 从观察到理论: 科学进步的模板

这种进展与现代实验机械非常相似。首先, 我们收集准确的观察数据。(布拉格) 然后我们在这些数据中识别实验关系和数学模式。(凯普勒) 最后, 我们制定了一个基本的理论框架, 解释和预测实验关系。(纽顿). 事实上, 凯普勒的三个法则可以从纽顿的普遍重力法则中数学地产生的, 与他的动作法则相结合, 这表明实验发现往往揭示了更深入的基础原则。

这种模式 - 观察, 实验的相互关系, 理论理解 - 在机械和工程史上重复。胡克对春季变形的仔细观察导致他的实验性法律与强度和位移有关, 后来发现理论基础在连续介质力学和弹性理论。在结构工程中, 从建筑经验和失败观察中产生的实验设计规则的几个世纪最终被合理的结构分析替换为基于平衡、变形协调和物质行为的基本原则。同样, 库伦布的系统性试验与震动和地球压力产生了实验关系, 后来通过土壤机械学和塑料性理论的原则获得了理论基础。

即使在液体机械中, 进展也保持着: 托里克利的液体流动实验, 伯诺利的压力和速度关系的实验观察以及许多其他实验性相互关系最终在海军 - 斯托克方程式的理论框架下统一。现代计算力学跟随了同样的进展 - 实验验证指南是实验模型, 随着理论理解的深化, 它们逐渐被更基本的方法取代。

有限元法本身代表了这个过程的峰值: 精致的理论框架以计算方式实施, 但仍然需要实验验证、验证和实验定义。

5.3.2.4 解剖革命: 安德烈·维萨利乌斯

安德烈·维萨利乌斯 (1514–1564) 先驱了人类解剖学的实验研究, 挑战了基于权威的医学知识 15 个世纪。他的大师工作 **人工工厂** (《人体的草坪上》1543 年) (Vesalius, 1998–2009) 它是基于系统的人类分裂而不是依赖古代文本, 特别是加伦的。

维萨利乌斯在加列尼克发现了许多错误 [2] 解剖学 - 骨头由一个骨而不是两个组成, 肝脏有两个洞而不是五个, 心脏的阴道不被打破。这些纠正可能看起来很小, 但它们代表了一个基本的方法革命: 直接观察破坏文本权威。

他的方法建立了原理, 理解自然现象需要直接调查而不是向经典当局转移。详细的解剖学图像在 **人工工厂** 将艺术主导与科学准确性相结合, 为科学通信设定了新的标准, 并帮助在欧洲医学中传播实验方法。

[2]加列尼理论是指克劳迪乌斯·加伦的医学教义。(C。第 129 章 216) 它在欧洲医学统治了超过 1400 年。根據伽倫教義, 血液是由肝臟從食物中不斷生產的, 並被身體組織消耗, 移動在一個有趣的背部和前方運動而不是循環。这个理论也定位了单独的血管和血管系统, 并将心脏视为加热血液的炉子而不是泵。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5.3.2.5 循环系统:William Harvey

威廉 • 哈维 (1578–1657) 通过他的血液循环的发现, 模拟了新的科学方法, 发表在 **动物公交车的** *Motu Cordis et Sanguinis Anatomica* (1628) (Harvey, 1628). 哈维的作品代表了对生物现象的定量合理化成功应用。

通过仔细观察和测量, 哈维计算心脏每小时大约泵 540 公斤血液 - 比身体可以生产或消耗的要多得多。这个量子论点, 与血管和动脉单路阀的观察相结合, 导致哈维得出结论: **血液必须循环, 而不是不断生产和消耗。**.

哈维的方法 - 结合解剖学观察, 定量分析和实验验证 - 成为实验生物研究的模型。他的作品证明, 在天文学和物理学中开发的新科学方法可以为生命科学带来同样革命性的洞察力。

5.3.2.6 伽利略: 自然的数学语言

关于 *Galileo* **的生物绘图, 请参见** *§6.6.2*.

加利莱奥引入了另一个方法创新。而不是寻找最终原因, 伽利略专注于数学描述可观察的现象。在 **机械** (Galilei, 1594 PDF) 对于工程师来说, 他展示了机器如何遵守定量法则, 并预测了他的后来的说法:

> 哲学 [自然] 这是在这个巨大的书中写的, 在我们眼前不断开放。(我指的是宇宙) 但它不能被理解, 除非先了解语言并认识到它的字符。它是用数学语言写的。沒有這個媒體的知識, 無法理解一句話。
>
> Galilei, 1623 Il Saggiatore

伽利略的望远镜观测破坏了亚里士多德对一个不可改变的宇宙的信念。他的辩护的直立中心主义导致他的著名审判和家务逮捕在 1633 年, 但他的遗产建立了假设驱动方法: 提出一个假设, 推测其后果, 并通过实验验证它们。

5.3.3 早期科学机构

5.3.3.1 意大利: 林西人

与科学革命不太常见, 是意大利人群的早期贡献。虽然他们没有像德卡特和贝康那样构成科学革命的哲学基础, 但他们是第一个完全拥抱它并将其实行。

1603 年, 一群学者创立了 **林西学院** (林克斯学院), 被认为是第一个现代科学学院。它的名字带来了双重的提及 - 到林凯乌斯, 尖锐的阿尔戈纳特, 和林克斯, 以其急性视觉而闻名。(Freedberg, 2003)

林西人故意拒绝了每当它与观察和实验证据相冲突时, 都会否认可奈智的智慧。他们对视觉和实验性审查的承诺使他们成为现代科学方法的前沿, 即弗朗西斯 • 贝康在英格兰独立制定自己的实验哲学时。(Freedberg, 2003) 他们接受权威的挑战必然导致他们与天主教教会保守势力发生冲突。

这个冲突在加利利奥 • 加利里 (Galileo Galilei) 的职业生涯中被描述为最著名的林西人成员。当伽利略将他的望远镜转向天空时, 亚里士多德宇宙学 - 被教会称为教义真理 - 开始崩溃。地球在宇宙的中心失去了其特权地位, 引发了直升机模型。在加利利奥最富有成效的年代, 林西安学院的支座是至关重要的。他也受益于教宗乌尔班八世和他的孙子弗朗西斯科 • 巴伯尼 (Francesco Barberini) 的保护, 他自己是一个林洋。但是, 支座从巴伯尼家族的最终撤退证明是灾难性的: 这是教宗乌尔班八世在征服之前最终提起加利利奥。

和 **林西学院** 事实上, 他是科学革命的早期贡献者, 虽然经常被低估。它仍然是意大利国家学院, 这是意大利和国际科学家之间的对话的活跃中心。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

5.3.3.2 意大利:The 水泥

和 **西门子学院** (实验学院) 佛罗伦萨成立于 1657 年, 由大公弗里迪南二世和莱奥波尔德二世主持。它是欧洲最早的机构之一, 明确致力于实验科学, 象征着从投机性自然哲学到系统性的实验研究的决定性转变。他的口号, **尝试和重新尝试** ("测试和重新测试") 它包含了对实验的严格承诺, 以及依赖权威或纯粹理论合理性的拒绝。

该学院包括几位著名学者, 如伽利略学生 Vincenzo Viviani; 实验生物学的先驱 Francesco Redi; 巴罗米特的发明家 Evangelista Torricelli; 早期生物机械研究员 Jovanni Alfonso Borelli; 和卡洛 Rinaldini。这些成员对空气压力、真空特性、热扩展和液体机械进行了广泛的调查。他们精化并开发了温度计、直径计和巴罗米特等工具, 不仅仅是示范工具, 而且是系统实验的准确装置。

他们的实验包括空气压力如何影响液体的沸点, 对空气压缩性进行调查, 以及关于热转移的观察。他们试图以决定性的方式量化自然现象, 超越投机性思维。

虽然 The **林西学院** 观察科学与广泛的哲学野心相结合 **水泥** 它代表了对现代科学定义的实验性、工具驱动的方法的焦点缩小。

雖然是 **西门子学院** 1667 年左右, 仅仅 10 年后分散, 其对科学界的影响是显著的。其实验性严格的道德有助于巩固科学方法作为研究的规范方法。该学院的实验工作在 1667 年出版物中总结 *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento* (关于自然实验的论文), (Accademia del Cimento, 1667) 它已成为实验科学历史的基本文本。

加利利奥的方法受到强烈的影响, 学术界的成员认为自己是他的遗产的守护者, 强调观察和实验 - 而不是形态 - 应该是科学知识的根石。

尽管他的短暂生活, 但 **西门子学院** 建立后来的科学社会的关键基础, 包括 **伦敦皇家协会** 和 The **科学学院** 在法国。这些机构正式化和扩展了西门子先驱的实验原则, 有助于将科学方法融入现代科学的核心。

5.3.4 合成与制度化

5.3.4.1 牛顿: 方法的合成

对于纽顿的生物绘画, 请参见 *§6.6.7*.

伊莎克 • 纽顿 (1642–1727), 出生于加利利奥去世的那年, 合成了这种方法。他的 **自然哲学的原则数学** (Newton, 1687) 物理法则的数学分解, 而他的 **光学** (Newton, 1704) 实验验证的例子。牛顿的双重方法仍然是现代科学实践的角落。桌子 5.1 总结了科学革命所带来的概念转变。

5.3.4.2 皇家社区和 科学学院

到 1640 年代中期, 巴康的想法广泛传播, 在伦敦皇家学会改进自然知识的基础上峰,1660 年, 其口号 *Nullius* **在** *Verba* ("用别人的话来"). 布朗克成为第一任总统, 与罗伯特 • 博伊尔 (1627–1691) 作为一个有影响力的早期成员和后任总统。由加利利奥和德卡特所启发的博伊尔是一位专门的实验家, 也是气体研究的先驱。他著名地证明, 一块灰尘和一块粉尘在一个真空中落下相同的速度 - 证实了加利利奥的思维实验。

博伊尔任命罗伯特 • 胡克 [3] (1635–1703) 作为实验的治愈者。胡克, 一个辉煌的聚合物和工具制造商, 体现了实验精神。他的 **微观**, (Hooke, 1665) 开启与:

> 事实上, 自然科学已经太久了, 只是大脑和幻想的作品。现在是时候回到对物质和显而易见事物的观察的清晰度和清晰性。

[3]提到 §6.6.6 对于 Hooke 的生物。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> Hooke, 1665 Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon

1676 年, 胡克出版了弹性的线性法则。**胡克的法律**表明, 对于小型变形情况下, 应变与应力相比例。弹性中的这个基本概念仍然是关键的, 这种宪法关系至今仍在实验上确定。

创立的基于 **科学学院** 1666 年, 巴黎的历史标志着科学与皇家社会共同的永久制度化。这些学院正式化了科学革命的道德: 依赖于实验观察、实验和数学分析。

与皇家社会类似的口号 *Nullius* **在** *Verba* (“用别人的话来”) 这些机构体现了基于权威知识的拒绝。他们为合作调查、对手审查和科学成果的公开传播提供了持久的框架。

重要的是, 这些学院不仅仅是自然哲学的论坛; 它们很快扩展到实用领域 - 天文学, 航行, 工程, 材料科学和应用机械。他们帮助将学者的孤独工作转化为现代科学的集体企业。

5.3.4.3 现代科学的实验与理论

这种双重性扩展到工程。像穆森布鲁克这样的实验者和像埃勒这样的理论家, 模拟了平行研究模式　物理世界的物理实验和数学。“实验” 在模型的抽象世界中, (Goss, 2009). 数学模型可以暗示哪些物理实验值得进行, 而物理结果可以改进或挑战数学假设。当这种互动成熟时 - 由巴什金格对弹性的接受所例外 - 它成为现代科学的一个定义特征。

表 5.1: 科学革命概念转变

古老的悖论	**新范式**
权威的知识 (亚里士多德, 写作)	从观察、实验和理性知识
质量描述	数学、数量法则
最终原因 (**為什麼**)	有效原因 (**如何**)
地质化学	天文宇宙学
静态、不可变的宇宙	由普遍法则统治的动态宇宙
从原则中引导	假设 - 引导与实验性测试

这种转变使智力基础成为正式科学社会的出现, 这些社会制度化了科学方法作为自然世界理解的研究中心。

5.4 光明: 文化之桥

到 18 世纪, 前一世纪的科学思维在数学和物理学远远超越哲学、治理、教育以及欧洲更广泛的知识生活。这个运动　启蒙　是由人类理性、实验观察和批判思维可以普遍应用的信念而特征, 不仅适用于自然现象, 而且适用于人类社会。[4].

[4]这个时代的科学发展发生在重大政治和宗教崛起背景下, 包括三十年的战争、荷兰叛乱以及改革的更广泛冲突。智力移民, 尤其是向荷兰共和国和瑞士等宽容中心, 有助于传播思想。印刷行业的扩张, 尤其是在荷兰, 使其能够传播在其他地方经常被审查的科学作品 - 包括加利利奥 *2* **新科学**, 由 Elzevir 在 Leiden 发表。

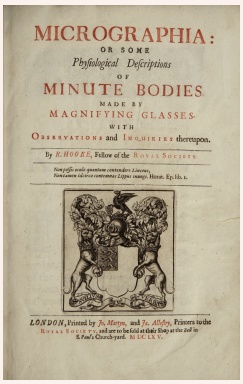
第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



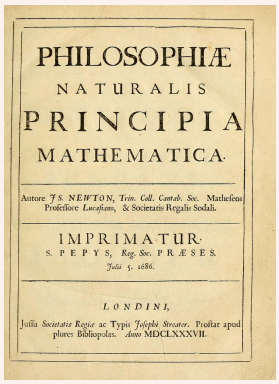
(a) 巴康 (1561-1626)



(b) 加利利 (1564-1642)



(c) 胡克 (1635-1703)



(d) 纽顿 (1643-1727)

图 5.3: 科学革命的研讨会作品, 由加利利奥、牛顿、贝康和胡克



(a) 林西学院 (1603)



(b) 水泥学院 (1657)



(c) 皇家社区 (1660)



(d) 科学学院 (1666)

图 5.4: 制度化科学

5.4.1 科学思维的传播

启蒙强化了对权威的呼吁的拒绝, 无论是神学、贵族或学术, 支持系统的辩论和证据。像伏尔泰、迪德罗、蒙特斯基耶和康多塞特这样的思想家赢得了知识的传播, 作为改善社会的手段。创建如《大作品》**百科全书** 它不仅仅是智力运动, 而且是一个文化使命, 以民主化知识。(Diderot and d'Alembert, 1751).

沃尔泰的普及纽顿的思想引发了科学理性, 向更广泛的受过教育的观众, 而迪多和德阿伦伯特的 **百科全书** 根据理性原则系统地组织人类知识。这个巨大的举措证明了启示的信念, 从自然现象到社会机构, 人类体验的所有领域都可以通过系统的调查和逻辑分析来理解。

科学方法的重点是观察、假设形成和实验测试, 成为社会和政治改革的模型。启示思想家们用这些原则来研究政府、法律、经济学和教育, 认为社会进步可以通过与自然哲学革命相同的理性方法实现。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5.4.2 技术教育的崛起: 军事工程学校

启蒙见证了技术教育的系统性制度化, 特别是通过建立军事工程学校, 这将对民用工程和应用科学的发展产生深刻影响。法国引领了这种转变, 由军事需要和理性、科学教育的启示理想驱动。

和 *École Royale du Génie de Mézières* 成立于 1748 年, 成为世界上第一个现代意义上的工程学校。由 Claude-Antoine Couplet 和随后 Jean-Rodolphe Perronet 领导, 学校建立了一个严格的课程, 将理论数学与实践工程应用相结合。学生研究计算, 机械学, 水力学和堡垒设计 - 以前所未有的方式将科学原则与工程实践相结合。

这个模型在 *École Royale des Ponts et Chaussées* 成立于 1747 年, 由 Jean-Rodolphe Perronet 领导。学校培训了桥梁和道路建设的民用工程师, 应用科学方法到基础设施开发。其毕业生成为法国运输基础设施的背景, 并在整个欧洲和其殖民地实施科学工程方法。

这些学校的课程代表了一个革命性的合成: 从科学革命中产生的数学严格与实践工程需求相结合。学生学习差异计算, 机械和材料科学以及调查, 建筑技术和项目管理。这种理论和实践的整合建立了现代工程教育的模板。

这些法国工程学校影响了后来的建立类似的机构在整个欧洲和美国, 包括美国。西点军事学院 (1802) 德国的各种技术机构。重点是数学严格与实践应用结合成为专业工程教育的标志, 区分它与传统工艺学习船。

5.4.3 从自然哲学到应用科学

启蒙的转变将科学思维扩展到实用的领域, 这将直接使工业革命成为可能。正式的机构致力于应用科学繁荣: 军事和民用工程学校, 技术学院和科学社会在整个欧洲蓬勃发展。数学严格, 一旦限制在纯粹的地质或天空机械, 越来越成为理解物质强度, 建筑和机械的实用问题工具。

这个时期见证了我们现在所承认的工程科学的出现。数学分析的系统应用于实用的问题 - 从桥梁设计到水力系统 - 代表了从传统基于手工艺的方法的一个基本突破。科学革命的理论原则现在正在应用, 以解决建筑、制造和基础设施领域的现实挑战。

在这个时期, 机械已经不再是地质学家的边缘追求, 而是成为一个中心的纪律, 密切联系到理论研究和工业应用。开发数学工具分析结构行为、物质特性和机械性能, 为我们今天所知道的工程专业奠定了基本基础。

启蒙的思想 - 对理性分析的信心, 对进展的承诺, 以及通过数学和实验可以解码自然的信念 - 建立了能使十九世纪快速发展: 工业革命, 现代工程的智力框架。和正式理论的弹性, 材料力学, 和结构分析。相信人类理性可以系统地改善物质生活条件, 成为现代技术文明的驱动力。

5.5 结论

简而言之, 科学理性的崛起代表了近一千年的决定性的智力转型。从古代知识的保存和进步开始, 在伊斯兰中心如巴特 • 阿尔 • 希克马等, 继续通过科学革命的方法进展, 并在启蒙的机构巩固中高峰, 这种转变使调查脱离神学权威和投机哲学的限制。

新方法 - 系统观察, 数学形式化和实验验证 - 建立了一个普遍的科学进步模板: 从精确数据收集到实验模式认可到基本理论理解。这种方法, 从布拉赫的观察通过凯普勒的法则到纽顿的合成进展, 成为所有随后的科学和工程发展的基础。

同样重要的是机构革命, 使科学研究成为一个合作、累积的企业。科学学院和工程学校的创建将自然哲学的孤独追求转化为现代科学的系统性学科, 而启蒙技术教育计划则建立了今天持续的专业工程教育模板。

这个知识的框架 - 结合严格的方法与机构支座 - 设置了现代工程的发展阶段, 结构的正式分析, 以及随后的机械量学科学。现在我们转向这个发展。

最后, 桌子 5.2 列出本章中提到的所有书籍。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

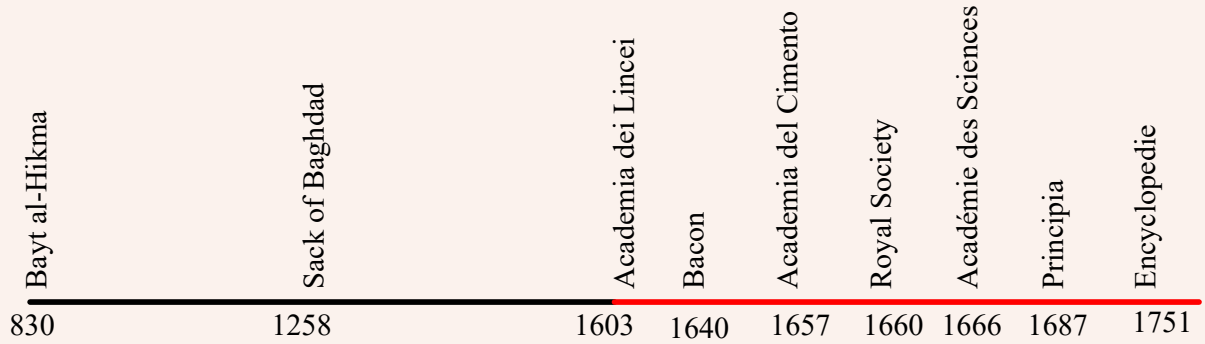


图 5.5: 科学理性的崛起时间线

表 5.2: 关键作品的历史概述

年度	作者	书名	内容概述
c. 850	穆萨兄弟	英雄设备的书籍 (Banū Mūsā ibn Shākir, 0850)	早期可编程的机器和巴格达智慧之家的自动控制设备; 将机械与实用工程混合。
1543	安德烈·维萨利乌斯	人工工厂 (Vesalius, 1998–2009)	基于直接人类分裂的解剖革命; 修正了长期持久的伽利略错误; 虚假的科学图像设定了新的标准。
c. 1593	加利利奥 Galilei	机械 (Galilei, 1594)	工程处理显示机器遵守定量规则; 早期结构化机械的数学形式。
1620	弗朗西斯·贝康	新的器官 (Bacon, 2000)	基本的呼吁是实验方法; 系统观察和对权威或纯粹逻辑进行实验。
1623	加利利奥 Galilei	萨吉托 (Galilei, 1623)	宣言自然的“书”是写在数学; 争论测量作为理解物理现实的道路。
1628	威廉·哈维	动物公交车的 *Motu Cordis et Sanguinis Anatomica* (Harvey, 1628)	发现血液循环; 量子测量与伽利略理论相矛盾; 整合解剖学, 观察和理性。
1665	罗伯特·胡克	微观 (Hooke, 1665)	显微镜中的标志; 详细的积累; 强调实验观测超越投机; 包括物质行为洞察。
1667	西门子学院	*Saggi di naturali esperienze fatte nell' Accademia del Cimento* (Accademia del Cimento, 1667)	总结了严格的实验调查; 空气压力, 真空, 热现象; 编码“测试和重新测试”道德。
1687	伊莎克·纽顿	哲学 *æ Naturalis Principia* 数学 (Newton, 1687)	机械和普遍重力的数学合成; 结合了凯普勒的法律与物理运动理论。

© 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

年度	作者	书名	内容概述
1704	伊莎克・纽顿	光学 (Newton, 1704)	它在光学中例外实验方法; 研究光的特性、颜色和分离。
1751–1772	迪德罗 & 阿伦伯特	百科全书 (Diderot and d'Alembert, 1751)	根據理性的原則, 人類知識的全面組織; 解釋科學和社會思想的工具。



卡拉瓦乔《圣托马斯的不信任》*(1601-1602)*

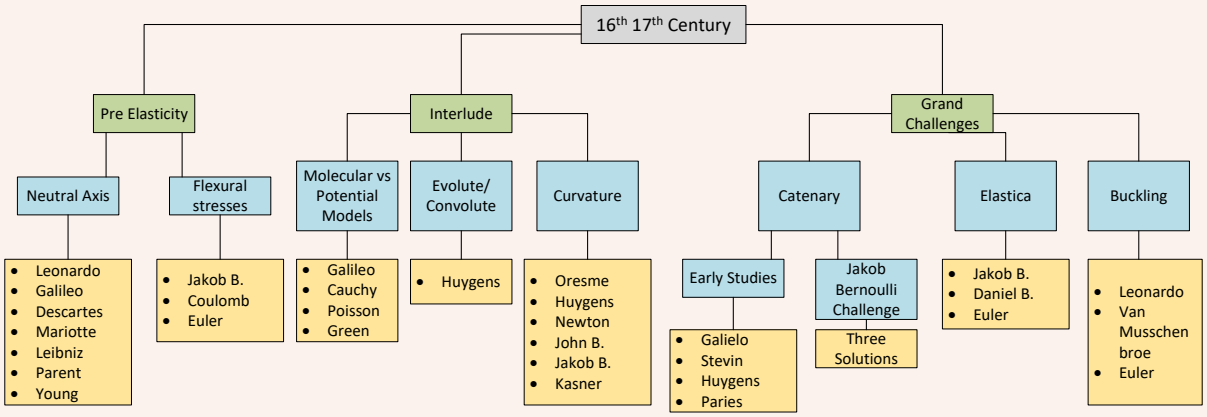
托马斯以实验的坚持来试验伤口, 即实验科学的创始性: 拒绝相信没有直接证据。

审阅稿

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Interlude I: 从自然哲学到解析机械

结构分析的概念基础.



Leonardo (1452-1519)	Bacon (1561-1626)	Galileo (1564-1642)	Descartes (1596-1650)
Mariotte (1620-1684)	Hooke (1635-1703)	Newton (1643-1727)	Leibniz (1646-1716)
Jacob B. (1654-1705)	Parent (1666-1716)	Johann B. (1667-1748)	Daniel B. (1700-1782)
Euler (1707-1783)	Coulomb (1736-1806)	Navier (1785-1836)	Cauchy (1789-1857)
St Venant (1797-1886)			

上一篇章 通过审查该领域的知识基础 **科学革命** (章节 5.3) 并通过介绍现代机械的种子数字和作品 (章节 6). 这个主题和合成观点被采用为方法论问题: 它先于概念连续性和智力结构, 而不是纯粹的技术发展时间重建, 引导到接下来的章节。

在这种结合中, 有助于休息并巩固在这个形成期间出现的几个概念线　地质、平衡、曲线和稳定　经常在相对隔离中发展, 但逐渐转向统一的分析观点。现在介绍了主要演员, 他们的主要作品, 以及他们运作的智力气候, 我们转向技术发展本身。在接下来的六章中, 从早期机械学到结构分析的正式化历史进展被追踪, 随后逐步澄清基本概念　内部力量、变形。其稳定性　以及其最终合成到现代解析方法中, 在工程实践中使用。

审阅稿

6 潘特文

摘要

这个章节作为一个 谁是谁 和 *A* 他们所写的 那些为现代机械奠定基础的关键人物 一群先驱, 他们的生活和作品从实验工艺转化为数学科学。从古代到 *19* 世纪的延伸 th 百年, 它分析了先驱思想家 从莫齐的早期对古代中国利弗的见解, 通过亚基米德的基本静态, 到加利利奥的规模法则, 纽顿的动态, 伯诺利斯、尤勒和拉格兰奇的变异框架。和高峰与严格的连续介质力学的 *Cauchy*, 绿色, 圣威尼斯。对于莱昂纳多 · 达芬奇 *(Leonardo da Vinci)* 来说, 这是一个例外 - 特别活跃在 15th 百年 其机械、解剖学、飞行和流体动作的笔记本显示了实验观察深度, 以及系统层面的理解, 这表明了后来的科学家的解析思维。

这个章节不只是跟踪个人的成就, 而是整个学科的进化 展示了结构力学如何从数学、自然哲学和实践工程的交叉中出现。故事揭示了个人关系、机构竞争和文化交流如何塑造机械科学的发展, 就像个人的天才一样。除了生物学账户之外, 它还研究了这些进展编码的标志文本: 那些训练几代工程师并改变了我们如何分析结构的大书。

而不是深入他们的思想的完整技术发展, 这项调查将以后来的章节进行讨论, 这些调查将背景化他们的贡献、竞争和智力线路。目标是跟踪从物理直觉和地质学的过渡到基于方程式的机械行为的正式理解。最终的交响图表总结了每个参与者的遗产, 形成该领域的标志性出版物, 培训实践者的机构和加速发现的竞争 - 提供一个一致的讲述如何结构力学作为分析根源的学科出现。

6.1 引入 84
6.2 哲学、地质和早期静态 85
6.2.1 莫西 (c. 470 - 391 ECB) . . . 85
6.2.2 亚里士多德 (384 - 322 ECB) . 85
6.2.3 欧克里德 (c. 300 元) 86
6.2.4 阿基米德 (c. 287-212 ECB) . 86
6.2.5 佩尔加的阿波罗尼奥 (c. 第 262 至 199 年) 87
6.3 工程、机械和知识传输 88
6.3.1 马库斯•维特鲁维乌斯•波利奥 80 - 70 ECB - 15 ECB 之后) 88
6.3.2 亚历山大英雄 (fl. c. 62 CE) . 88
6.3.3 伊本 • 哈伊塔姆 (c. 965–1040 CE) 89
6.3.4 阿布 • 雷汉 • 阿尔 • 比鲁尼 (973–1048) 90
6.3.5 阿尔哈齐尼 (fl. 1115–1130 CE) 90
6.3.6 公寓 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250) 90
6.4 建筑、比例和人文形式 91
6.4.1 莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂 (1404 – 1472) 91
6.4.2 莱昂纳多 • 达芬奇 (1452–1519) 92
6.4.3 安德烈 • 帕拉迪奥 (1508–1580) 100
6.4.4 塞尔维亚诺 • 塞里奥 (1475–1554) 101
6.4.5 吉亚科莫 • 巴罗齐 • 达维戈拉 (1507–1573) 101
6.4.6 哈伯特 • 加泰尔 (1660–1737) 102
6.5 从数学顺序到机械 107
6.5.1 弗朗西斯 • 贝康 (1561–1626) 108
6.5.2 尼古拉斯 • 科珀尼克斯 (1473–1543) 108
6.6 从统计学到科学革命 109
6.6.1 西蒙 • 史蒂芬 (1548–1620) . 109
6.6.2 加利利奥 Galilei (1564–1642) 110
6.6.3 雷内 • 德卡特 (1596 – 1650) 114
6.6.4 克里斯蒂安 • 休根斯 (1623–1695) 115
6.6.5 布莱斯 帕斯卡 (1623–1662) . 116
6.6.6 罗伯特 • 胡克 (1635–1703) . 117
6.6.7 伊莎克 • 纽顿 (1642–1727) . 122
6.6.8 福特弗里德 • 莱布尼兹 (1646–1716) 125
6.6.9 伯诺利家族 (1654–1782) . . . 127
6.6.10 莱昂哈德 • 尤勒 (1707–1783) 131
6.7 从解析机械到连续和结构理论 135
6.7.1 查尔斯 • 奥古斯汀 • 德库伦布 (1736–1806) 135
6.7.2 SIMé 丹尼斯 • 波伊森 (1781–1840) 137
6.7.3 克劳德 • 路易 • 马里 • 亨利 • 纳维尔 (1785–1836) 137
6.7.4 饰 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) 141
6.7.5 约瑟夫 • 路易斯 • 拉格兰奇 (1736–1813) 142

审阅稿

6.7.6 卡西 (奥古丁 - 路易斯 1789-1857) 142
6.7.7 乔治绿 (1793–1841) 143
6.7.8 阿德´ Jean Claude Barr´ 文特 (1797–1886) 143
6.8 结构工程作为纪律的崛起 144
6.8.1 卡尔 • 库尔曼 (1821-1881) . . 144
6.8.2 威廉 • 约翰 • 麦克文 (William John Macquorn) (1820-1872) 145
6.8.3 克里斯蒂安 • 奥托 • 莫赫 (1835–1918) 145
6.8.4 亨利 • 莫塞利 (1801–1872) . 146
6.8.5 詹姆斯 • 克莱克 • 麦克斯威尔 (1831–1879) 147
6.9 机械的主要历史 148
6.9.1 伊萨克 • 托丹特 (1820–1884) 148
6.9.2 史蒂芬 • 普罗科菲耶维奇 • 蒂莫申科 (1878–1972) 148
6.9.3 雷恩 • 杜加斯 (1897–1957) . 149
6.9.4 克里福德 • 安布罗塞 • 特鲁斯德尔 3 (1919–2000) 149
6.10 可见的女人 150
6.11 分析与背景 151
6.11.1 竞争、秘密和科学进步 . . . 151
6.11.2 转向现代工程科学 158
6.11.3 法国工程教育革命 159
6.12 从自然哲学到工程科学 159
6.12.1 总结表 160

6.1 引入

Truesdell, 1968 提出了存在性的问题, 确定基本实验的 “**经典**” 机械化, 引用 “**我从来没有找到任何一个。**” 事实上, 现代机械在 17 世纪至 19 世纪逐渐发展, 以一种简单的日历或单一起源的方式。这种逐步的进化不是在孤立中发生, 而是通过一个复杂的智力交换、机构发展和文化转变网络, 根本改变了人类如何理解物理世界。

本章旨在分析最关键参与者的生活和智力关系..... “**巨人**” 他们塑造了解析机械和数学, 同时还研究了他们的发现和通过这些观念传播的标志性出版物的机构和文化背景。我們不僅探索他們發現的東西, 而且他們的個人情況、競爭和合作如何導致機械學從自然哲學轉變為數學科學。除了这些生物资料之外, 我们还研究了编码结构知识的伟大书籍: 教条、文本和收集的作品, 培训了几代实习生并建立了现代分析的基础。

二个问题引导这个章节: **谁改变了我们对结构的思维方式的人**? 和 **哪些书籍编码了这些变化**? 但我们还提出了更深的问题: 欧洲学术和大学的新兴网络如何创造快速科学进步的条件? 个人竞争和合作如何加快发现? 实用工程挑战在推动理论突破方面扮演了什么角色? 如何出版关键文本 从加利利奥的 **演讲** 到海军的 **教训** 将静态知识转化为正式科学吗? 这不是一个完整的目录, 而是一个选择性和解释性的努力来识别那些值得记住在结构分析的智力遗传学。

科学!进展 它经常通过思想和理论讲述, 但每一个方程的背后都有一个人 - 由好奇心、野心、坚持力以及有时冲突或不满引导。这些个人不是被动的知识传递者, 而是他们帮助燃烧的革命中的活跃代理人。更重要的是, 他们被嵌入在沟通、竞争和合作的网络中, 这些网络紧张了国家边界和机构联系。他们的想法是因为它们被写下来 在书籍、记忆和条约中, 流传到欧洲各地。

有些人在他们的时间庆祝; 其他人为承认而奋斗。有些人在学术界的舒适中工作; 其他人孤立或怀疑。有些人, 像尤勒一样, 在不同欧洲法院和学院之间自由移动, 而其他人, 如加利利奥, 面临着机构的迫害。有些人系统地建立在他们的导师的工作上, 而其他人, 像纽顿一样, 嫉妒地保留了他们的发现, 并参与了激烈的优先争议。他们的个人故事提醒我们, 科学不是一个不个性化的算法, 而是人类的努力 由想象力、耐力和坚固而发动。

通过重新审视他们的生活和出版物, 我们不仅澄清了他们的贡献, 而且还获得了对塑造结构科学进化的文化和知识力量的深度欣赏。机械学作为数学纪律的出现不仅需要个人天才, 而且需要新机构的发展。(就像皇家社会和 **科学学院**) 新的学术沟通方式 (通过通信网络和杂志出版物), 以及理论知识与实践应用之间的新关系。这篇文章应该被阅读为 A **谁是谁** 和 A **他们所写的** 引导机械学的创始人物和通过他们的想法实现永久性的文本。**具体的技术发展和理论进展将详细审查在后期章节。**

虽然本章采用了生物学和历史观点, 但它不是为了技术处理。这些数字引入的解析格式、衍生物和数学结构将在后续章节中进行审查, 他们的想法将以更简短但数学上严格的方式重新审查。因此, 目前的讨论作为一个人道主义和智力预言 在转向其理论贡献的正式曝光之前, 揭示了个性、情况和形式的出版物的背景框架。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

下面的图表在快速发展的机构景观中工作, 该景点在本章的结尾部分详细审查。

6.2 哲学、地质和早期静态

此分類上一篇: 機械師出現的数字 **自然哲学** 和 **地质学**而不是作为一个独立的科学。平衡和稳定性问题通过逻辑需要、比例和地质结构来解决, 静态被理解为命令形状而不是物理原因的结果。统一主题是处理机械思想作为哲学理性和地质抽象的延伸。

6.2.1 莫西 (c. 470 - 391 ECB)

莫西 (也被称为 Mo Di) 它出生于公元前 470 年左右, 现在的 Tengzhou, 上海省, 中国 - 偶然与康福西斯相同的地区, 谁在莫齐出生几年前就死了。与来自贵族家庭的许多哲学家不同, 历史证据表明莫齐从工人阶级上升。他可能被训练为一个大师或工匠, 而这种实用背景深深地塑造了他的哲学前景, 基于他的思想在实验观察和用途的担忧而不是抽象投机。

莫齐创立了穆希斯思想学校, 该学校在保守国家时期成为最著名的组织学校之一。(c. 475 - 211 ECB) 对抗孔子主义的影响力。他的追随者 - 大多数是技术人员和工艺家 - 以纪律的顺序组织, 研究哲学和技术写作。莫希斯人被称为军事工程师, 设计了堡垒和封锁防御机制, 这可能引用了他们对机械学的理论兴趣。

吉恩 和 吉恩 (Mozi, 2013), 由 Mozi 的追随者所归功的文本组合, 展示了令人惊讶地先进的静态知识。包括利物浦人的行为。, 中心 重力其机械优势. 文本以显著的准确性编写了平衡的原则: 它区分满体的位置和重量的分布, 它承认, 一个平衡的梁需要重量和距离的产品在两侧均等 - 在亚基米德正式化之前几个世纪的 implic 法的暗示声明。

后期莫希斯的著作 (c. 300 - 200 ECB) 包含光学、地质学、机械学, 甚至天文学的痕迹。他们的传记学似乎基于一个信念, 客观真理存在, 可以通过审查, 研究和系统的理性来理解 - 这些原则在科学革命之前不会成为西方科学的中心。

雖然摩希特傳統並沒有直接影響西方機械的發展 - 這所學校在紀元前 221 年中國金合併和後來的書籍燃燒後下降 - 這是令人驚訝的證據, 基本的結構原則在各文化中獨立發現。它仍然是地中海世界以外的机械理性最早的系统治疗之一。

6.2.2 亚里士多德 (384 - 322 ECB)

亚里士多德出生在希腊殖民城斯塔吉拉, 在哈尔西迪克半岛。他的父亲尼科马库斯为阿明塔斯国王担任个人医生。马其顿的第三个联系, 后来证明是后果性的。阿里士多德在十七岁时被送到雅典, 并进入柏拉图的学术院。他在那里住了二十年, 直到柏拉图去世于 347 年。银行。经过学术界的领导 - 也许是因为他的外国出生或出现哲学差异 - 他离开雅典, 并在亚洲小和莱斯波斯度过了几年, 进行生物调查, 后来将其动物学书籍。

In 343 菲利普 , 菲律宾 马其顿二世将亚里士多德交给他的儿子亚历山大, 那时十三岁。这个教育的准确内容仍然不清楚, 尽管后来传说显著装饰。当亚历山大掌权并发起他的行动时, 亚里士多德回到雅典, 并在 335 年创立了自己的学校,Lyceum。银行。他在那里教了十二年, 据称在走着殖民地的道路时讲课　因此他的追随者的名字叫《波里帕蒂奇》。323 年亚历山大逝世 反马其顿情绪使雅典对任何有皇家联系的人都危险。亚里士多德向哈尔西斯撤回, 据报道指出他不会允许雅典两次反对哲学。他在那一年去世了。

和 机械 **和 Peripatetic 传统** 经常归属于亚里士多德, 但可能由一个后来的学员组成。[1] 其它 **机械** (Aristotle, 2000 PDF) 它是简单机器的基本处理, 以及它们运行的原则。写在第三世纪 欧盟正在探索利弗斯, 波利斯, 争论, 和力量的平衡, 呈现机械如何增强人类努力的定性报告。

[1]术语 **周边** 来自希腊的衍生品 周边人, 意思 “被允许走路。” 这就是亚里士多德在与学生一起散步时教导的习惯。(首页 > 伊帕托) 雅典的 Lyceum。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

处理是围绕一个核心问题进行的: 为什么小势力通过机械设备移动重量? 提出的答案　循环运动具有特殊的产生力, 结合相反的趋势　是哲学上天真的现代标准, 但它代表了一个真正的尝试, 以一个单一的解释原则统一各种机械现象。

水平、运动和早期组成原则 *Mechanica* 讨论了三十五个问题，内容从天平与船桨的运动规律延伸到胡桃钳和镊子的力学原理。其中对杠杆的论述尤其重要：该书认识到杠杆的效能取决于作用点到支点的距离之比，从而预示了后来由阿基米德严格证明的杠杆定律。该书还讨论了速度平行四边形与运动合成，这些概念后来成为理性力学的基础。

传输和长期影响 其对后期作者的影响是不可误导的。阿基米德斯提出了许多第一提到的想法。**机械**, 特别是改进重力的中心概念 制定严格的数学原则。在罗马和希腊时代, 作家如亚历山大英雄和帕普斯进一步开发机械系统, 包括实用设备和理论考虑。在伊斯兰黄金时代, 这段经文被翻译成阿拉伯语, 后来是拉丁语, 并将其传递到中世纪和复兴的欧洲。像伽利略这样的学者承认了古希腊机械思维的遗产, 他们自己的动作和肝脏分析。

因此, 该 **机械** 它是与现代机械科学的早期哲学研究相连的长期线路的根源。亚里士多德更广泛的动作理论特别是他自然和暴力运动之间的区别　直到十七世纪初才统治西方自然哲学。

6.2.3 欧克里德 (c. 300 元)

几乎没有关于埃克利德的生命所知。他在普托利米统治期间在亚历山大工作。I 索特 (323–283 BCE), 这一单一事实, 使可靠的生物信息消失。后来, 作家们自由地沉默: 普鲁克斯 (Proclus) 写了八个世纪后, 报告说, 尤克利德比柏拉图的学生年轻, 但比亚基米德更年长, 并在亚历山大创立了数学学校。著名的传说, 其中普托利米要求更短的路径到地质学和欧克里德回应, 没有皇家路径的主题可能是无形 - 一个非常相同的故事讲述了梅纳赫穆斯和亚历山大。

即使是尤克利德的出生地和教育仍然不确定。一些中世纪的阿拉伯消息来源声称他出生在泰勒; 其他人把他与以前的哲学家埃克利德 • 梅加拉混淆。这是在文艺复兴的偶像中犯下的错误。无论他是否在雅典的柏拉图学院学习, 因为他的数学线性似乎是可行的, 不能确定。他的性格和性格完全失去了我们。剩下的就是工作本身。

和 单元 和 Axiomatic 方法 尤克利德的 **单元** (Euclid and Heath, 1956) 它是历史上最有影响力的文本书, 并将基础列为地质学。但是, 也对抑制性理智的结构本身。包含 13 本书, 它系统地组织飞机地质学 (书籍 I - VI) 数字理论 (书籍 七 - 九) 坚固的地质 (书籍 十三、十三) 通过一个严格的轴心框架。从定义、论点和常见概念开始, 尤克利德展示了如何通过从自我显而易见原则的逻辑进步来构建整个知识结构。

逻辑建筑的 **单元**定义, 其次是投诉、常见观念、提议和证据, 成为科学界严格的理性模型。这种结构不仅仅是教学的, 它体现了一个方法态立场, 其中确定性源于命令的推迟而不是权威或实验积累。

对机械、建筑和工程合理性的影响 其影响的 **单元** 超越数学。超过两千年, 它一直是逻辑思维的标准介绍, 由哲学家、科学家和工程师同样研究。其对结构力学的影响是直接和间接的: 直接, 欧克利德地质提供了分析空间关系, 比例和结构形状必不可少的形状特性的工具; 间接, 异化方法训练工程师清晰提出问题。顺序进行, 确定结果。

复兴建筑师如阿尔伯蒂 和 Palladio 以欧克利德的比例为基础, 在他们的建筑中建立和谐关系。纽顿明确模拟了他的展览。**原则** 关于埃克利德的先例 和 **单元** 它是第二本最印刷的书, 直到二十世纪, 超过一千版。因此, 它的遗产不仅仅是地质知识的身体, 而且是一种思维方式　结构通过轴, 清晰度通过逻辑进展, 确定性通过证据　这仍然是工程实践的基础。

6.2.4 阿基米德 (c. 287-212 ECB)

阿基米德出生于西里希腊首都叙拉库斯。有些人就与其统治者, 王耶伦有关。II. 他的父亲菲迪亚斯是一位天文学家。不知不觉的。在某个时候, 亚基米德斯前往亚历山大。在那里, 他与乌克利德的继承人一起学习, 并建立了持久的智力友谊。他的许多条约是针对亚历山大数学家, 包括康恩 • 萨莫斯。皮鲁西姆的剂量, 以色列人,

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

其它 波利马特, 他担任大图书馆的负责人。亚基米德回到了西拉库斯, 在那里度过了他的工作生活, 享受皇家保守, 同时追求地质、机械和水静学问题。

古代来源描绘了亚基米德作为吸收思想家的档案, 被数学观念所消耗的, 以至于他忽略了食物, 不得不被拖到浴室里, 在那里他将继续在他的皮肤上的油中绘制图表。著名的故事他的跳出浴室哭泣 “欧里卡!” 发现了可爱的原则 假设在调查一个为耶伦制作的冠冕是否包含了它的全部金量时 首先出现在维特鲁维乌斯, 写两世纪后。无论故事是真实的还是不真实的, 它就抓住了关于亚基米德的方法的一切: 物理洞察与数学表现之间的相互作用。

死亡、记忆和自我选择的遗产 他的死亡变成了传奇。罗马军队在马塞洛斯下 第 212 章 西拉库斯 经过长时间的封锁 根据普鲁塔克的说法, 由战机设计的亚基米德人推迟 一名士兵来到一个老人在沙子里绘制地质数字。阿尔及利亚人说 “不要打扰我的圈子,” 他在现场被杀。马塞洛斯, 他希望见到著名的数学家, 感到悲伤, 并安排了一个荣誉的葬礼。西塞罗, 一百年半后, 参观西拉库斯, 发现坟墓被翻过和忽视, 只能由亚基米德所要求的绘画和圆圈识别出来 他认为最美好的理论纪念碑, 与这些形状的数量有关。

理性机械的基础 西拉库斯的考古 (Archimedes and Heath, 1897) 作为理性机械的创始人, 建立静态 和水素 作为数学科学。他的作品, 包括 **关于平衡的计划**, **浮动物体**, **在球和缸上**, 以及 **机械理论的方法**将数学的严格与物理观念相结合, 直到科学革命才不等同。

在 **关于平衡的计划**阿基米德斯证明了利弗的法则 從第一個原則和發展的概念中心的重力, 展示如何为各种飞行图像, 包括三角形、平行图和模拟分区的位置。这些结果是现代力量分析的基础。和瞬间 在结构系统中。他的方法 立刻的轴, 数学上产生后果, 并将结果应用于物理配置 建立了理论机械的范式。

水化, 稳定性和机械方法 **浮动物体** 启动了科学的布宜安, 证明一个沉浸在流体的身体体验到与移动流体的重量相同的上升力量。这项工作是对与液体相互作用的结构系统的理解至关重要的, 从船洞到沉没的基础。阿基米德斯还研究了浮动物体的稳定性, 确定他们在转移时返回平衡的条件 早期和显著复杂的贡献稳定分析。

和 **方法**失去了直到 1906 年在著名的棕相关术语树中重新发现, 它揭示了亚基米德斯如何使用机械思维来发现数学结果, 然后严格证明它们。發現與顯示之間的這種明確分離, 照亮了物理直覺在解釋框架內的創造作用。方法模式 物理洞察导向数学证据 成为结构工程实践的基础。

6.2.5 佩尔加的阿波罗尼奥 (c. 第 262 至 199 年)

阿波罗尼奥出生在佩尔加。一个希腊城市在南亚小亚洲沿岸的帕姆菲利亚。他去亚历山大 作为一个年轻人, 在那里他与乌克利德的继任者一起学习, 并吸收了博物馆的数学传统。古代消息来源表明, 他也花了很长时间在佩尔加姆。其图书馆与亚历山大竞争, 其阿塔利德国王积极赞助学者。超越这些虚假事实, 几乎没有关于他的生活的消息 没有传说生存, 没有个性出现, 甚至他的日期是由他引用的数学家和后来引用的人间接得出。

我们所拥有的生物学洞察力几乎完全来自预先的信件, 到他大师作品的八本书籍。**康尼克**. 这些奉献揭示了一个数学家融入了希腊学习的科学通信网络: 阿波罗尼亚人对佩尔加姆的埃德莫斯, 发送评论草案, 对组成延迟道歉, 并提到在亚历山大为一个名叫纳克拉特的访客快速制作的更早版本。他描述了版本之间的重大修订, 并强调谨慎的逻辑订单, 建议一个方法工作者对曝光深感兴趣。他还提到一个儿子, 也称为阿波罗尼亚。后来, 在埃德莫斯去世后, 书籍被献给。

和 康尼克 曲线形状的地质学 阿波罗尼奥在古代被称为 “大地质,” 一个标题, 即使在一个特殊的数学家时代也区分了他。他的 **康尼克** (Perga, 1896) 它代表了古典古代最复杂的科尼克部分处理, 超越所有以前的作品, 并保持近两千年的终结。在八本书中 (其中七人生存了。) 阿波罗尼奥系统地研究了精灵。平凡的, 和 Hyperbola● 由飞机与角膜的交叉产生的曲线。他引入了今天仍然使用的大部分术语, 这些曲线的名称源于地质关系。“缺点,” “平等,” 和 “过量” 关于参考建筑。

实现的成就 **康尼克** 它不仅仅是列出属性, 而且建立了统一的曲形形状地质理论。阿波罗尼亚在一个单一的驱动框架内开发了对直径、坦根、正常和无症状的关系方法, 同时延长并系统化了梅纳赫穆斯以前的结果, 同时提出了全新的建议。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

转移到机械、建筑和结构形式 雖然被認為是一個純粹的地質學的作品, 但觀點 **康尼克** 证明是后来的数学理解结构形状的基础。原始曲线, 由阿波罗尼奥详细研究, 在统一的水平负载下统治灵活线的地质学, 后来成为自我重量运载的架子分析的中心。精英 基于多层建筑的地质学, 与此相关的孔形状在瓦尔特中出现 还有其他曲折的马索尼亚系统。

激烈的线条 和力量之路 在马索尼亚结构中, 它们的曲线跟随了阿波罗尼奥在其机械意义被理解前几个世纪所描述的地质特性。文艺复兴的建筑师和早期现代理论家, 后来结构工程师在分析曲线形状和它们的荷载分布时暗示和明确地引用了阿波罗尼亚地质学。.

6.3 工程、机械和知识传输

此分類上一篇: 與參與者聯合的參與 **机器** 与机械知识的实用关节和传播。他们的工作强调了描述、分类和图像, 以及通过条约和图表传达技术。常见的线条是工程知识作为某种东西的出现。**编码**可教, 可再生。

6.3.1 马库斯 • 维特鲁维乌斯 • 波利奥 80 - 70 ECB - 15 ECB 之后)

关于维特鲁维的生命, 很少知道, 我们所拥有的几乎完全来自自传评论, 在他的处理中散布。他担任朱利叶 • 凯撒的军事工程师, 负责建造和维护包括弹道机和蝎子机等炮兵机器。这种对封锁设备的经验给了他第一手的紧张机制, 扭转, 以及投射性动作 - 实用的理解, 这将告知他的后来的理论讨论。凯撒的谋杀之后, 维特鲁维乌斯在奥古斯底下继续帝国服役, 尽管他的角色似乎已经下降。他提到监督在 Fanum Fortunae 的基督教堂建设 (现代粉丝) 唯一的建筑, 他声称是自己的设计。在他编写他的治疗时, 维特鲁维乌斯老了, 并生活在奥古斯的妹妹奥克塔维亚的介入保证的养老金上。他以一个寻求通过奖学金而不是纪念碑建立他的遗产的人的焦虑写作, 对奥古斯特的奉献带来了不可思议的祈祷。维特鲁维乌斯的意义不在于他的建筑物, 其中没有一个生存, 但在 De architectura 中, 是古代唯一完整的建筑处理。

建筑 维特鲁维亚 **建筑** (关于建筑的 10 本书) (Vitruvius and Morgan, 1914) 写在公元前 25 年左右, 是唯一完整的建筑处理可以从古典古代生存。它涵盖了罗马建筑实践的几乎每一个方面: 城市规划, 建筑材料, 寺庙建设, 民用和国内建筑, 水供应, 太阳能和机械。

最著名的是, 维特鲁维乌斯提出了良好的建筑的三个基本品质: **坚定** (结构性声音), **用途** (功能性), 和 **威尼斯** (美丽) 原则仍然是建筑和结构思维的基础。他的建筑方法、物质特性和比例系统的描述, 为文艺复兴建筑师提供了他们的主要窗口进入古典实践。阿尔伯蒂、帕拉迪奥和其继任者都对维特鲁维亚施加了重力, 他的影响力在 20 世纪的美术教育发展中持续。

维特鲁维斯的中心性 维特鲁维乌斯对这本书的基本意义如此之大, 以至于他的生活、写作和影响力在三个不同的章节中被审查: 本章。§3.2.4.1, 和 §15.2.1.

6.3.2 亚历山大英雄 (fl. c. 62 CE)

英雄生命的日期长期以来一直是混乱的问题, 估计范围为三个世纪。这个问题解决了奥托 • 纽格巴威 (Otto Neugebauer) 注意到英雄的 **迪奥特拉** 描述了罗马与亚历山大之间的距离, 同时观察月亮日落的方法 - 并提供的例子符合 3 月日落。13, 62 CE. 它安全地把英雄放在第一世纪, 当代的尼罗, 塞内卡 把老年人放下。超越这个时间的安克, 几乎没有什么可以恢复他的生活。他的名字提到希腊起源, 但亚历山大 在这个时期, 他是彻底的宇宙主义者, 他可能来自埃及或混合降落。

英雄与博物馆相连, 无论是作为该机构的正式成员还是作为独立教师, 仍然不清楚。他的著作建议一个实用的教育者, 对理论优雅的关心较少, 而不是将有用知识传递给学生和实践者。他以技术希腊语编写, 可供工匠和工程师使用, 他的作品包括详细的装置建设指示 - 与亚基米德或阿波罗尼奥斯的奥斯特数学风格明显矛盾。

工作范围和机械教学 古代文献将许多著作归于希罗，其中若干部以希腊文或阿拉伯文译本流传。他涉猎极广。*Pneumatica* 记载空气、水和蒸汽驱动的装置，其中包括汽转球（一种原始反力式涡轮机）和自动开启

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的庙门。*Automata* 描述自动运转的戏剧机械。*Dioptra* 讨论测量仪器，*Catoptrica* 则讨论镜面与反射。希罗在古代及后世的声誉主要建立在这些巧妙装置之上；它们也使他被略带轻蔑地视为玩具和舞台奇观的制造者，而非严肃的数学家。

机械，简单的机器和工程实践 亚历山大英雄 (Alexandria, 1851) 通过简单机器的系统处理，推进了机械原则的实用应用；水力系统，和 pneumatic 设备。第一世纪在罗马亚历山大活动 CE，英雄占据了亚基米德数学机械和应用工程之间的关键位置。

他的 **机械**主要保留在阿拉伯语翻译，通过详细分析五个简单的机器，精化了亚基米德人静态。波利，借口，斯特里克，轮子和轴。英雄展示了这些单元如何将其结合在合成机器中，并为计算机提供程序。他解决了实用的问题，如移动有限强度的重负载、打印设计和升降设备建设　对建筑和结构实践直接相关的问题。

轮胎、自动和传输 和 **轮胎** 研究了在压力下空气和水的机械行为，描述了 100 多台设备，包括西芬、喷泉、电池板和自动装置，由落水或加热空气驱动。虽然这些设备中的许多用于仪式或娱乐目的，但基本原则　压力传输、空气的弹性和热能转换为机械运动　预期的概念是中心的后续工程。

英雄也写了关于调查 (**迪奥特拉**)，炮兵 (**贝洛波**) 和测量 (**测量**)，展示了古老的技术知识的广度。他的作品通过拜占庭和伊斯兰学者传递给复兴工程师，如 Jovanni Battista della Porta。西蒙 • 史蒂芬，建立机械系统的理性设计的前提。

6.3.3 伊本 • 哈伊塔姆 (c. 965–1040 CE)

阿布 • 阿里 • 哈桑 • 伊本 • 哈桑 • 伊本 • 海赛姆出生于巴士拉，然后是伊拉克南部布伊德域的主要贸易和学习中心。他在神学、数学和自然哲学方面获得了深入的教育，并在本城长期担任行政职位。在一个自传的段落中，他描述了与宗教宗派的竞争主张越来越不满，每个人都确信其独特拥有真理，而转向亚里士多德的著作。以某种知识为道路。这种智力转变塑造了他对基于示范和实验测试的系统调查的持久承诺。

埃及，尼罗河项目和生产性分裂 伊本 • 哈伊塔姆的野心引导他到埃及，在法蒂米德的统治期间，哈基姆的加利夫。报道称，他声称可以调节尼罗河的年度洪水。但是，在探索河流并检查阿斯凡附近古代水力工艺的遗迹时，他意识到这个项目超越了他的手段。害怕加利福尼亚人的可见不可预测性，他惊慌疯狂，直到 1021 年阿尔哈基姆去世为止在家中被拘留。在这段被强制驱逐的时期，以及随后的几年里，伊本 • 哈伊塔姆产生了一个非凡的工作体。随后的消息来源信任他，有超过两百个关于从光学和天文学到地质学和数字理论的主题的谈判。

光学、机械和实验计划 伊本 • 哈伊塔姆，在拉丁西方被称为阿尔哈森，(Haytham, 1989) 最著名的是他的《古兰经》《圣经》(光学的书) 它通过系统实验和地质分析转化了视觉和光的理解。他拒绝了以前的视觉排放理论，他证明，当物体反映的光进入眼睛时，视觉发生，并通过控制的实验支持这一说法，涉及开关、镜头和反射表面。

尽管他的声誉主要是光学，但伊本 • 哈伊塔姆也解决了与结构分析直接相关的机械问题。他检查了力量传输。和硬体的行为 在充电中，分析力量如何通过连接的系统传播。他的著作讲述了影响机械，包括碰撞和移动转移，他研究了飞机和火箭上的尸体的运动　后来将成为早期现代机械的中心。

方法、传输和结构意义 伊本 • 哈伊塔姆最持久的贡献可能是方法学。他坚持说，物理理论是基于系统的观察。被控制的实验，数学描述，以及没有经验支持的投机性理性被拒绝。这个纪律化的方法提供了科学方法的模板，后来成为物理学和工程分析的基础。他的坚持，数学模型符合可观察的现实是基于结构力学的传记基础。

他在开罗度过了几十年。阿尔阿扎尔清真寺附近的景点 支持自己，复制数学手稿。他在 1040 年左右去世。他的作品在十二世纪和十三世纪被翻译成拉丁文，对欧洲科学产生了深刻的影响，通过像罗杰 • 贝康这样的人物塑造了光学传统。威特洛，最后，凯普勒。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

6.3.4 阿布 • 雷汉 • 阿尔 • 比鲁尼 (973–1048)

阿布 • 雷汉 • 阿尔 • 比鲁尼 (973–1048) (Al-Bīrūnī, 1910) 它是中世纪伊斯兰世界最原始的科学思想之一, 为天文学、数学、地理学和机械学做出了重大贡献。出生于 Khwarezm (乌兹别克斯坦当今) 他花了大部分职业生涯在马赫穆德的法庭上, 陪同苏丹在印度的竞选活动, 导致他的百科全书。**《古兰经》《圣经》**(印度所构建的书), 是比较文化和科学研究的先驱工作。

《古兰经》《圣经》阿尔 • 比鲁尼对机械中心的贡献, 关于他对密度测量系统的方法 具体重量. 他设计并构建了精确的工具, 以确定金属和宝石的特定的重力, 取得与现代价值观有利的结果。其水道方法 扩展了考古原则, 仔细关注实验错误来源, 确定后来的结构分析的方法先例。他承认, 统治平衡的相同数学关系适用于各种条件下的材料行为。

阿尔比鲁尼的更广泛的科学方法论 他坚持系统观察、定量测量以及理论与实验数据的和解 影响了对物质行为的方法的发展。这在结构工程中变得非常重要。他的地质测量, 包括使用山脉观测来确定地球的射线的一个精彩方法, 证明了将数学理论与谨慎测量相结合的力量 结构工程师后来将应用于建筑和桥梁分析的范式。

6.3.5 阿尔哈齐尼 (fl. 1115–1130 CE)

阿卜杜勒 • 拉赫曼 • 哈齐尼 (Abd al-Rahman al-Khazini) 是希腊的拜占庭奴隶。带到 Merv 塞尔尤克帝国 (土库曼斯坦现日) 在那里, 他是由一个名叫阿尔哈辛的财政官员所拥有的。從他所取出他的名字。他的大师承认了他的智力礼物, 并为他提供了数学和自然哲学的特殊教育。随后, 哈齐尼选择留在梅尔夫, 并将自己献给奖学金。据报道, 他生活在一个无神论的生活中, 并从苏丹的妻子那里获得了 1000 日元的重大礼物, 因为他的谦虚需要已经满足了一些面包。

十一世纪初的梅尔夫是伊斯兰世界最伟大的城市之一, 这是一个学业中心, 该中心在一百年前产生了阿尔伯恩, 并保持了天文学和精确科学的活跃传统。哈齐尼在这个环境中工作, 在塞尔尤克法院担任天文学家。创建天文图表 (她) 致力于苏丹 • 桑贾尔, 此前的精炼作品由 Omar Khayyam。

和《古兰经》《圣经》**重量科学** 阿尔哈齐尼的主要科学成就是**《古兰经》《圣经》**(智慧平衡的书), 完成在 1121-1122 左右。这种令人惊叹的治疗是机械学中最复杂的中世纪治疗之一, 探索平衡。平衡, 和水素 具有特殊的 解析 深度。在塞尔尤克的守护下工作, 哈齐尼合成了希腊机械知识 特别是亚基米德的作品。尤克里德梅内拉斯与原始研究和精致的实验实践。

该治疗将广泛关注钢铁和平衡, 包括重力中心的详细分析。以及 平衡 的准确条件。哈齐尼开发了系统的程序, 以确定特定的重力 物质, 编制几乎五十种材料的表格, 包括金属、宝石和液体。这些测量的准确性不会超过近五个世纪。

液化学、实验准确性和方法 阿尔哈齐尼扩展了亚基米德的善良原则, 研究一个身体的显而易见重量如何与周围媒体的密度不同。他承认, 一个身体的重量取决于它是否在空气、水或其他流体中测量 - 对潜水或部分潜水系统的分析直接相关的洞察力。他的描述水静平衡揭示了能够在密度中检测分钟差异的工具, 预测早期现代实验科学的精确平衡。

雖然沒有關心結構的单元在現代意義上, 但 **米桑 · 阿尔 · 希克马** 模拟一个先现代的方法, 以机械理性为基础的物理第一原则, 谨慎的实验和定量测量。在这一点上, 哈齐尼是亚基米德水静学与早期现代机械的后续实验传统之间的关键联系。

十二世纪初, 哈齐尼从历史记录中消失。他的死亡日期和情况都未知。

6.3.6 公寓 Villard de Honnecourt (fl. c. 1225–1250)

除了他生命之外, 没有什么可从他的名字所携带的绘画组合中得出结论, 现在保留在法国国家图书馆。手稿中的一篇文章将他定义为来自 Honnecourt 的, 位于法国北部的 Cambrai 附近的 Picardy 村。绘画本身表明一个漫步的职业生涯。其中包括拉昂的教堂雕塑, 雷姆斯, 卡特里, 吃的食物, 与瓦塞尔斯的西斯特里奇教堂一样,

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表示广泛的旅程, 通过 13 世纪法国的建筑地点。一张片子描绘了来自匈牙利的地板设计, 提到, 维拉德的旅程远远超越了他的本地地区。

无论维拉德是大师马森, 建筑师, 宿舍牧师, 或者只是一个受过教育的观察员, 仍然是一个学术争议的问题。绘画的不平等技术复杂性导致一些历史学家质疑他的专业立场, 而其他人强调了他的兴趣的广度和地质思维的一致性。

内容、授权和作者问题 投资组合包含建筑计划和楼梯, 包括飞翔的泡沫在内的哥特式建筑细节 跟踪, 机械装置, 如水驱动的眼镜 永恒的动作机器, 切石的地质方案, 以及人类和动物图像的绘画减少到抽象地质框架。后来手添加了手稿的材料, 并使单独的叶片的分配变得复杂, 使难区分维拉德自己的作品与随后的批评。

毫无疑问的是, 手稿提供了一个罕见的窗口到哥特式建筑师中流动的实践知识 - 知识大多在客厅和研讨会内通过口头传达, 并很少致力于写作。在这一点上, 这份投资组合是独一无二的: 它保留了不然不会留下任何纪录片痕迹的理性模式。

地质学、帝国设计和哥特式结构实践 Villard de Honnecourt 的景点 **投资组合** (De Honnecourt, 1858) 提供中世纪实验设计的罕见和无价值的洞察力 方法。收购三十三个停车板 (MS Fr 19093) 大约有 250 幅绘画, 手稿记录了古典建筑的实用地质和建设性的想象力。

特别重要的是 Villard 的比例和布局地质程序。中世纪建筑师依赖于技术如 **四角形** 和 **三角形** *Ad Triangulum*, 使用旋转广场, 写入聚合物, 和比例结构与计划, 高度和部分的关系。这些方法控制了石头的切割, 瓦尔特、顶部和轨道的布局以及复杂空间系统的协调, 而无需使用数值计算。

结构性直觉在正式机械之前 投资组合描述了地质、比例和积累经验如何引导对结构性行为的理解。在解析静态出现之前很久。哥特式建筑师取得了非凡的结构成果 这些石头相关术语子占据了广阔的空间, 向地面转向鼓动, 无前所未有的高度的塔, 没有正式的力量或平衡理论。他们的成功取决于实验规则, 地质控制和以前工作的集体记忆。

维拉德的投资组合是对艺术知识和结构直觉的融合的一种遗嘱。它在结构分析的历史中占据了一个过渡时刻, 地质学不是作为抽象数学, 而是作为建筑实践中的操作工具。

6.4 建筑、比例和人文形式

这个团体反映了一个传统, 在 **结构**, **比例**建筑形式是不可分割的。机械的理解是暗示地嵌入在和谐规则, 古典前例和人文主义理想, 而不是通过计算表达。稳定性和荷载传输在正式的结构分析存在之前很久就通过形状和比例被挖掘出来。

6.4.1 莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂 (1404 – 1472)

阿尔伯蒂 [2] 他出生于日内瓦, 是富裕的佛罗伦萨商人 Lorenzo Alberti 的非法儿子, 后来因他的家庭的政治不幸而居住在流亡。他获得了极其广泛的人文学教育, 在帕多瓦学习古典和博洛尼亚的法律, 在那里他也追求数学和自然科学。据报道, 他的研究的应变在 20 年代初引起了一场崩溃, 随后他越来越多地转向视觉艺术和建筑。1428 年, 对阿尔伯蒂家族的禁令被取消, 莱昂 • 巴蒂斯塔第一次见到佛罗伦萨 - 与布鲁内利什的崛起之墓相遇, 这将塑造他的后来的召唤。

阿尔伯蒂接受了神圣的命令, 并在罗马担任教宗简介的职位, 这是一个信念, 提供收入, 同时留下时间获得奖学金。他从未结婚, 尽管有机会, 他生活得温和, 并在他时代的主要人文学家、艺术家和王子中培养了广泛的信徒圈。现代人将他描述为年轻的运动员, 熟练的骑士和健身师, 并拥有令人惊叹的记忆。瓦萨里记录了他是善良的方式和慷慨的他的知识, 自由建议画家, 雕塑家, 建筑师。

他的建筑委会很少, 但有影响力: 里米尼的 Tempio Malatestiano, 佛罗伦萨的圣玛丽亚诺贝拉和宫殿 Rucellai 的面孔, 以及曼图亚的圣塞巴斯蒂亚诺和圣安德烈亚教堂。与布鲁内尔斯基不同, 阿尔伯蒂没有监督自己建造,

[2] 更多关于阿尔伯蒂的贡献 §15.2.2.1.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

而是提供其他人执行的设计, 建立了建筑师作为知识产权作家的现代概念而不是大师建筑师。他在罗马去世, 并制作了从绘画和雕塑到加密, 道德哲学和家庭管理的主题的谈判。

6.4.2 莱昂纳多 • 达芬奇 (1452–1519)

莱昂纳多 • 达芬奇 图 6.1 出生于 4 月 1452 年, 在佛罗伦萨共和国的温奇小镇。他是佛罗伦萨公证人塞尔 • 皮埃罗 (Ser Piero) 的非法儿子, 也是名叫卡特里娜 (Caterina) 的农民。如 A **野蛮人**, 莱昂纳多不能继承他的父亲的名字或职业地位; 他的任命 **达芬奇** 简单的意思 “来自 Vinci” 它作为一个位置标记, 而不是姓名。主要由他的父亲亲戚抚养, 莱昂纳多获得了阅读、写作和算法的基本教育, 但在拉丁语中很少有正式的教学, 是学者的语言。这种从人道主义教育中排除, 似乎是悖论上的好处。无限于学术公约和亚里士多德的评论, 莱昂纳多开发了一种基于直接观察、绘画和比较而不是文本权威的知识方法。莱昂纳多是普遍天才的复兴理想的最高例子, 他的笔记本电脑反映了在结构力学的先驱研究, 预期发展几个世纪之前。包含数千页的绘图和笔记写在他的特征镜子脚本, 笔记本记录调查到几乎每个领域的自然哲学和工程。

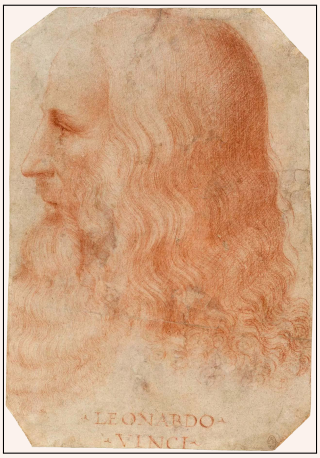


图 6.1: 莱昂纳多 • 达芬奇

研讨会培训与艺术与机械的融合 十四岁左右, 莱昂纳多在佛罗伦萨的安德烈亚 • 德尔 • 维罗基奥 (Andrea del Verrocchio), 当时最成功的艺术家和工程师之一。在那里, 他在绘画、绘画和雕塑、金属学、绘图和机械设计方面进行了培训。Verrocchio 的研讨会作为一个传统艺术家的工作室, 而不是作为一个混合环境, 在那里艺术制作、工程实验和物质实践密切相互联系。

这种形成性的体验塑造了莱昂纳多的终身调查模式: 强烈视觉、图形和合成。事实上, 该研讨会作为一个原始的... 研究实验室在莱昂纳多中引发了对艺术、机械和自然问题的习惯, 作为一个常见的调查过程的变异。

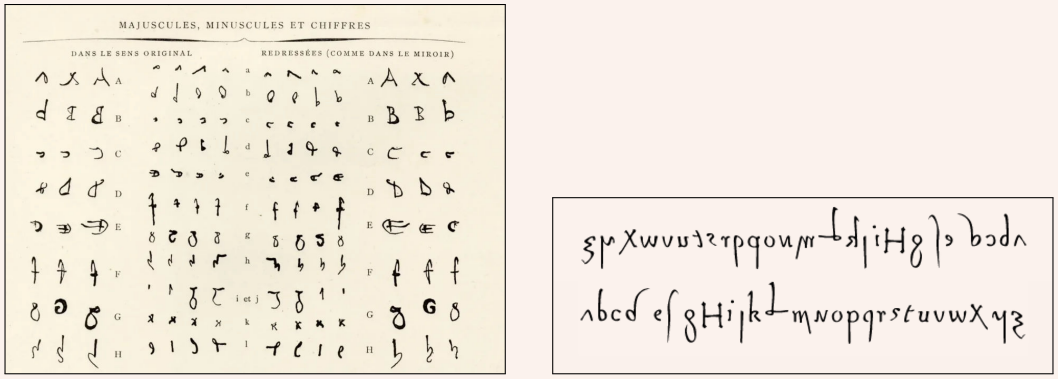
个人生活与写作实践 莱昂纳多被广泛认为是同性恋者。1476 年, 他和其他几人被匿名指控索多米亚, 随后是佛罗伦萨的犯罪。尽管他因缺乏证据而被释放, 但他从未结婚过, 并且对妇女没有任何记录的浪漫兴趣。他的笔记本有时包含男性情感的暗示性评论, 但个人事务否则不太记录。

左手, 主要用相关术语和墨水工作, 莱昂纳多开发了独特的习惯。**镜子写作**, 从右到左写在逆转脚本。无论是被采用以避免欺骗, 作为纪律的形式, 还是作为隐私的手段, 仍然不确定。实践, 与偶然的写作和缩写相结合, 使他的笔记本难以阅读, 并为其后来的黑暗,Fig 做出了贡献。6.2. 一些科学家提出, 这种不透明度也反映了在智力创新可能引发怀疑的时代隐藏非正统思想的愿望。

米兰: 监护、观察和自然法 莱昂纳多最富有成效的职业年份在米兰度过, 由路德维科 • 斯福萨赞助, 从 1482 年开始。在那里, 他制作了纪念品艺术作品, 如 **最后的晚餐**同时还担任法庭娱乐、军事堡垒和水力系统的设计师。他的笔记本从这个时期 - 后来聚集在收藏品, 如 **亚特兰蒂克斯代码** 和 **马德里手稿**文档一个令人惊讶的调查范围: 解剖学, 机械学, 光学, 水力学, 飞行和城市形状。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 解体　　(b) 字母

图 6.2: 莱昂纳多的镜子写作解释

莱昂纳多认为, 自然可以追随可发现的法则, 但与后来的科学家不同, 他没有通过数学推翻来寻找这些法则。相反, 他通过精致的视觉观察、类似和重复的绘画追逐他们。他的作品标志着中世纪自然哲学, 以权威为基础的过渡时刻, 以及早期现代科学的实验研究。

> “动作是整个生命的根源。”

这种信念动画了他的笔记本, 这些笔记是充满旋转的相关术语子、流水、弯曲的斑点、关节性关节和分裂的肌肉, 所有都以艺术直觉和机械理智相结合的清晰度呈现。

工程视觉与结构直觉 莱昂纳多设计了一系列特殊的技术项目: 滑板飞机, 降落伞, 装备车辆, 升降设备和旋转桥梁。很少有人建造, 但他们的概念范围使他更接近一个投机工程师, 而不是一个传统的四百人的工匠。

对结构分析特别重要的是他对材料的强度、射线行为、弓箭行动以及形状与负载之间的关系的研究。这些研究缺乏后期机械的数学形式主义, 但它们表明出现意识到结构性行为可以系统地分析而不是通过模具规则。在这一点上, 莱昂纳多是加利利奥和 17 世纪机械数学的关键先驱。

材料力学 和 梁 行为 莱昂纳多的结构研究因其实验观察、实验测试和理论猜测的组合而令人惊叹。他研究了材料力学, 对铁线的紧张容量和木材喷雾的破裂强度进行了实验。他研究了一根相关术语的尺寸与它的负载容量之间的关系, 并承认对弯曲的抵抗力取决于宽度和深度广度 - 一个洞察力不会正式化直到加利利奥 2 **新科学** 一百多年后。

、Va 和结构失败 他的考古和考古的研究是同等可见的。莱昂纳多分析了货物是如何通过弓结构分布的, 认识到弓 “永远不会断裂, 如果外角的弓不触摸内角,” 研究了拱形状和振动之间的关系。他研究了房屋和墙壁的破裂模式, 开发了一个直观的理解如何失败的马索尼亚结构。他的军事堡垒、桥梁和机械设计展示了对结构原则的精致欣赏。

生物机械与结构类似 莱昂纳多还研究了人体的机械学, 认识到解剖结构和工程系统之间的类似性 - 脊椎作为柱, 手臂作为绳子, 阴道作为电缆。这种生物机械观点丰富了他对结构性行动的理解。在他的研究中, 莱昂纳多认识到观察、实验和数学抽象之间的统一性, 为结构科学奠定了关键的概念基础。虽然他的笔记本电脑一直没有出版到 19 世纪, 但它们记录了一个心灵与结构问题在一个高度的复杂性不符合直到科学革命。

艺术、完美和选择性遗产 尽管他的精彩礼物, 莱昂纳多完成了相对少数作品。他经常放弃的委会, 由完美主义或新智力问题引导。他完成的作品, 包括 **莫娜丽莎**，该 **维特鲁维亚人**, 以及 **最后的晚餐**成为持久的图标, 不仅仅是美学创新而显著, 而且它们的解剖学、比例和空间结构的整合。

法国的最后一年 在他最后的几年里, 莱昂纳多进入国王弗朗西斯的服务。我是法国的。1516 年, 他搬到安博伊斯附近的 Clos Luce 城堡, 获得荣誉称号。“首席画家、工程师和国王的建筑师。” 他在 1519 年去世, 留下了数千页的绘画和笔记。许多人被分散或失踪, 但许多人幸存下来再发现几个世纪后。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

他的死亡标志着一个时代的结束, 在那里一个单一的人可以随机追求普遍知识。随后的科学专业化的快速扩张很快将使这种宽度不可实现。

代码、福利和手稿遗产 A 代码 (多元化: 代码) 它是一个强制性的手稿体积, 与扫描相反。莱昂纳多的编码包括绘画、笔记和描述, 涵盖机械、地质学、绘画和解剖学。

A 福利 (多元化: 福利) 指在手稿中的一张单一纸。内容通常出现在直线和后线上, 虽然只有一个页面被编号。莱昂纳多的许多手稿是由无缝收集的叶片组成的, 而不是正式连接的卷。

桌子 6.1 列出 Leonardo da Vinci 所属的主要生存代码, 其现有位置和内容。

表 6.1: 莱昂纳多 • 达芬奇的编码 (Vinci, 1938)

代码	日期	位置	内容
		主要代码	
亚特兰蒂克斯代码	c. 1478–1519	米兰图书馆 Ambrosiana	机械, 地质学, 飞行, 军事机器。
代码 Arundel	c. 1480–1518	英国图书馆, 伦敦	关于机械、光学和地质学的笔记。
马德里 I Codex & II	c. 1490–1505	马德里国家图书馆	静态、机械、火柴、堡垒。
福斯特代码 I - III	c. 1490–1505	维多利亚和阿尔伯特博物馆, 伦敦	水力, 重量, 自然科学。
莱斯特 Codex Leicester (哈姆雷特)	c. 1506–1510	个人收藏	水力学、化石、光学、天文学。
条例 Codex Trivulzianus	c. 1487–1490	Trivulziana 图书馆, 米兰	词汇列表和建筑研究。
阿什伯恩哈姆 I & II	1400 年代	法国研究所, 巴黎	来自其他代码的部分。
《鸟类飞行条例》	c. 1505	皇家图书馆, 多伦多	研究鸟类飞行和空气动力学。
乌尔比纳斯代码	编写 C。1570	梵蒂冈图书馆	处理绘画 (后世).
		二级和分裂代码	
Codex Windsor 系列	c. 1490–1510	皇家博物馆,Windsor	解剖学和科学绘图。
梵蒂冈法典	c. 1480 年至 1490 年	梵蒂冈图书馆	数学和建筑研究。
巴黎法典 (A - E)	不同	法国研究所, 巴黎	机械、光学、地质。
代码 C (巴黎系列)	c. 1500	法国研究所, 巴黎	静态和平衡.
代码 R	c. 1503–1505	法国研究所, 巴黎	地质、重量、解剖学。
代码 Sulbiate	1400 年代	未知 / 分散	小型建筑手稿

这些代码是莱昂纳多 • 达芬奇的科学和工程遗产的一部分。还有几个额外的小或分裂的手稿, 但这里列出的最完整和广泛研究。莱昂纳多笔记本的最全面的现代编译是提供在 (Vinci, 1938).

莱昂纳多的结构和建筑思想的图像调查 令人印象深刻的出版物, 捕捉了莱昂纳多天才的广度是 (Istituto Geografico De Agostini, 1956). 因为莱昂纳多有助于塑造我们对艺术和科学的集体理解, 而且他专注于这本书的两个主题。(建筑与结构) 我给了这个体积的特殊处理: 首先通过下面的总结, 然后重复相关页面为读者。

这个决定从我的常见实践中脱颖而出。在这本书中, 我一直小心只包含在文本中可以单独提到的数字, 并且我同样小心确保它们的尺寸不会超过页面。然而, 莱昂纳多 • 达芬奇却分开: 虽然他没有留下一个方程式, 但他的思想的纯粹原创性在描述方面给予了特别的待遇。因此, 我为好奇的读者重复了包含他的绘画的页面的完整序列 - 首先是关于建筑, 然后是关于结构 - 从 (Istituto Geografico De Agostini, 1956). 雖然縮小到頁面, 但文本仍然很容易閱讀, 只是在 (或通过点击引用旁边的 PDF 图标下载完整源文档).

莱昂纳多作为结构调查员 和 “结构科学” 部分的 (Istituto Geografico De Agostini, 1956) 莱昂纳多被视为一个早期的, 不寻常的自我意识的调查员, 我们现在会称之为材料力学和结构性行为, 通过实验, 比例的理

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

智, 以及仔细询问失败。该部分通过将进化建设形式与科学和实践概念的逐步积累联系起来, 明确邀请结构形状的历史技术阅读而不是纯粹的风格。

在其中, 框架, 莱昂纳多手稿笔记被介绍为试图在相对尺寸方面表达力量。(高度、厚度和比例) 作为连接的努力 “测量和比例” 对机器和结构必须抵抗的要求。幻想段落专注于支持和列: 他提出规则 (有时不符合现代标准。) 与地质相关的能力, 包括思维实验和数值例子, 旨在使比例趋势可见。

该书还强调了他对复合行动的兴趣, 以及从结合单元中获得的强度/强度。例如, 注意到他的声明, 连接的相关术语子可以携带很多次单一的>子所携带的东西 - 关于将弱势成员聚集在一个系统中的结构效应的早期直觉。除了斑点和列之外, 树木似乎是一个重复的结构对象。(既是要研究的形式, 又是揭示分裂和破裂的基础法则的地方。) 强调, 莱昂纳多将失败视为信息性而不是仅仅是问题性。

最后, 结构部分突出莱昂纳多的实验想象力通过一个装置测试的概念: 他提出了一个控制设置到荷载铁线。(使用量化体重添加剂), 重复测试不同长度, 并记录失败发生的位置/方式 - 明确旨在从重复试验到 “法律” 支座在材料和配置上具有强度。

莱昂纳多作为建筑师 建筑的部分 (Istituto Geografico De Agostini, 1956 PDF) 反对对待莱昂纳多主要是画家。“意外” 建筑利益, 认为这样的奖学金过于常见是分裂和单方面, 因此缺乏他的作品的统一。相反, 它将莱昂纳多的建筑思维从他的更广泛的探索习惯中不可分割: 他研究建筑物作为观察、比较和寻找统治标准的对象, 而不是仅仅是风格主义练习。

磁盘和评论表明他如何在具体的建筑元素之间移动 (教會計劃和室內, 面孔, 建造的計劃, 宮殿前線, 塔) 更多关于比例、空间组织和构建环境的道德/理性安排的问题。一个重复的主题是莱昂纳多依赖于类似性作为合法的解释工具: 文本指出, 当倡导特定解决方案时 **泰布里奥** (跨越塔) 米兰大教堂, 他呼吁原则相似于那些基于 “物理健康” 一个人的, 暗示结构正义和有机一致性是由平行规则统治的。

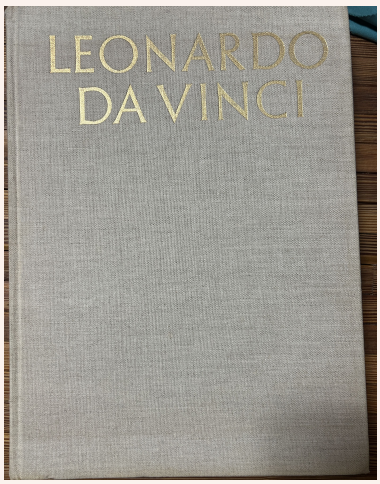
建筑部分还强调，仅仅统计图纸或罗列母题，并不能回答真正的解释问题；关键在于这些草图如何作为不断演进的研究实践的一部分发挥作用。文中明确讨论并基本否定了关于莱昂纳多建筑图纸是否“仅仅”是概念构想的旧争论：即使有些图页可被视为展示性的“建筑组合”（说明静力学和美学上的后果），对米兰大教堂材料（采光塔与穹顶问题）以及其他有文献记录的项目进行细致研究，也足以消除这样的重大疑问，即莱昂纳多确实以具有技术实质的方式处理了建筑问题。

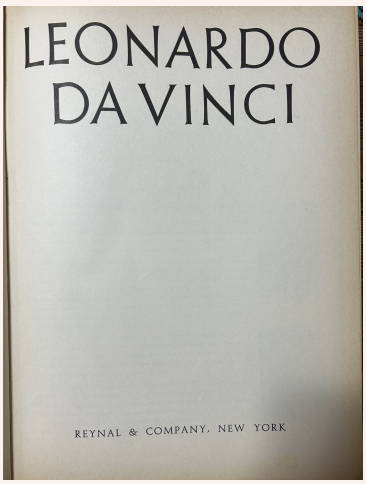
讲话是谨慎的, 关于分配和 “影响力” 故事也, 尤其是关于布拉曼特: 它警告说, 从表面计划相似之处中得出的直接影响的结论往往是急性的, 并呼吁时间和概念歧视而不是广泛的精神合作或一个大师的声明。“优越性” 被别人的影响所解释。这与莱昂纳多作为一个有礼貌的纪录片作家的形象相结合: 笔记和例子强调测量, 观察数据的故意收集, 以及其他专家和书籍的参考。暗示他的建筑思维在他这个时代的非凡的实验和信息饥饿的工作流中建立了基础。

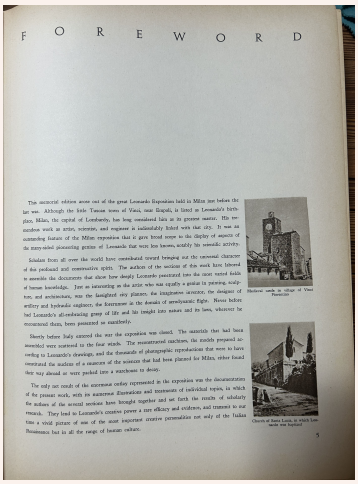
城市的尺寸也出现, 通过通信和建筑等方案, 安排了大街和组织的城市区 - 显示 “建筑” 从建筑类型到基础设施和城市形状。结合起来, 建筑和结构的部分介绍莱昂纳多不是作为设计师谁偶尔 “建造的建筑物,” 但作为一个思想家, 其建筑形状、结构性需要、测量、类似和实验属于一个连续的方法 在这里可以通过处理的手稿摘要和磁盘来阅读。(支持, 喷雾, 域, 弓箭, 城市循环) 与建筑师的不断对话。

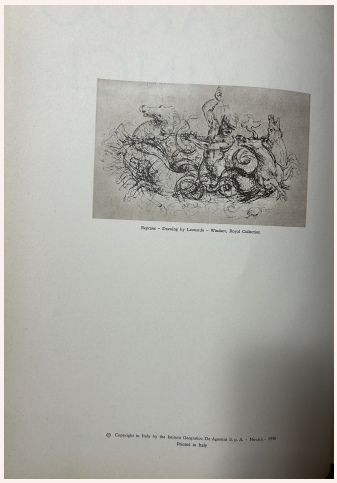
审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

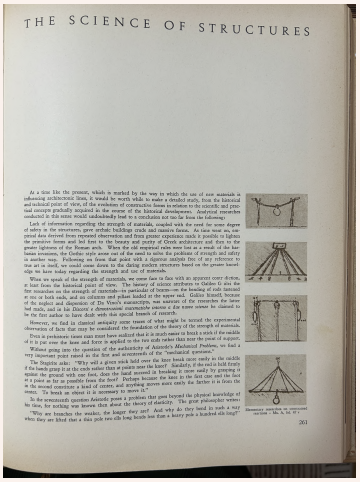


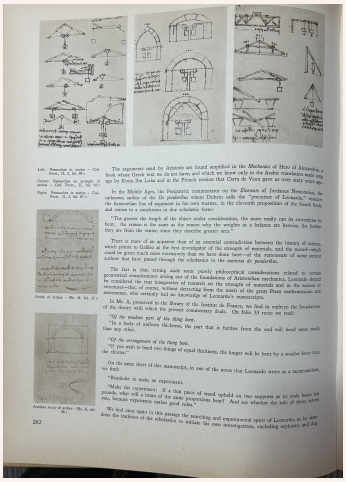


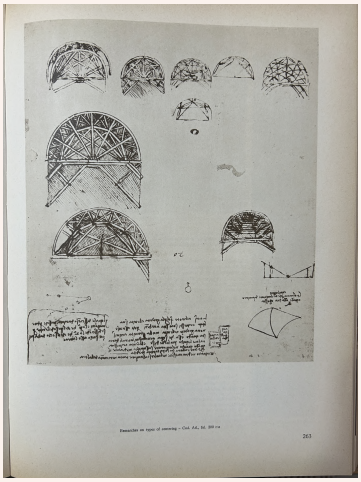




结构科学

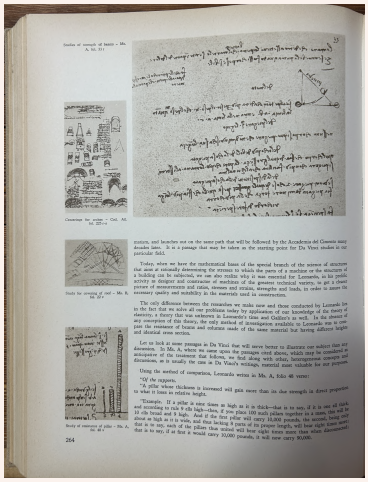


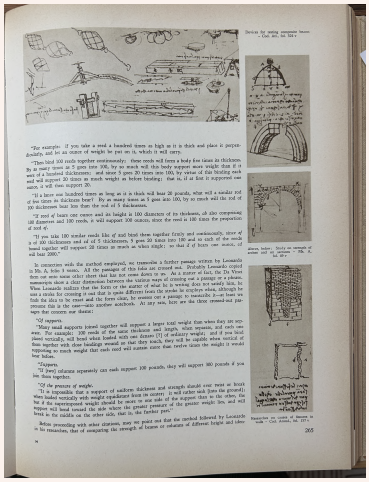


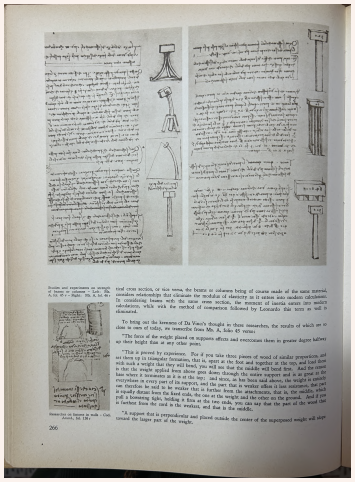


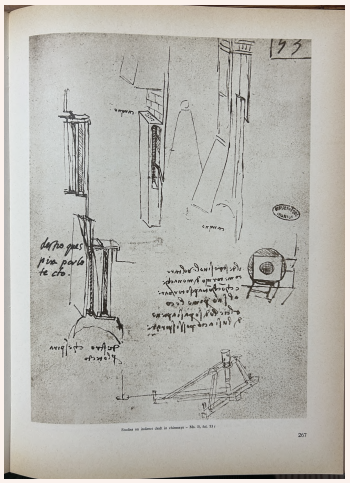
审阅稿

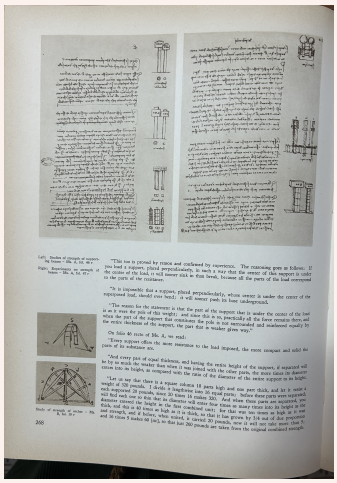
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

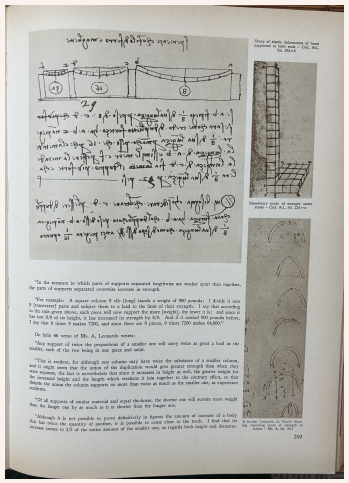


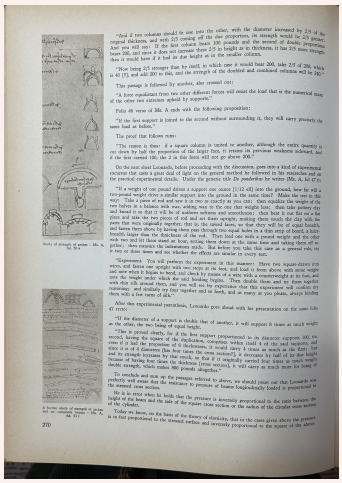


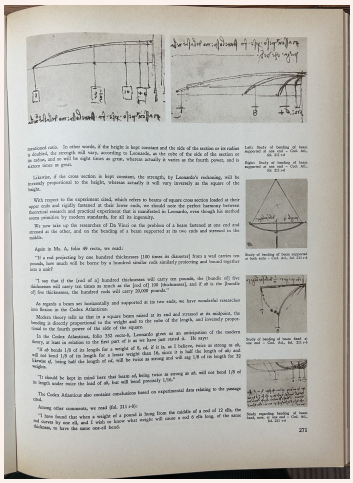


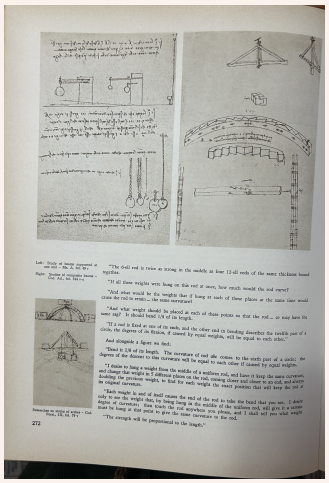






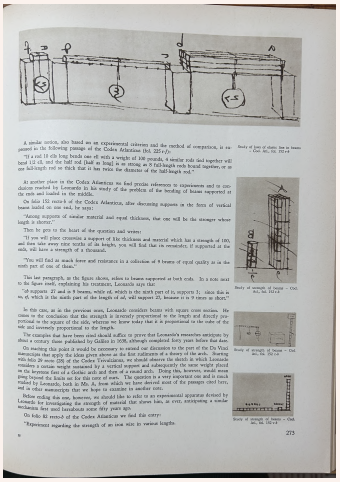


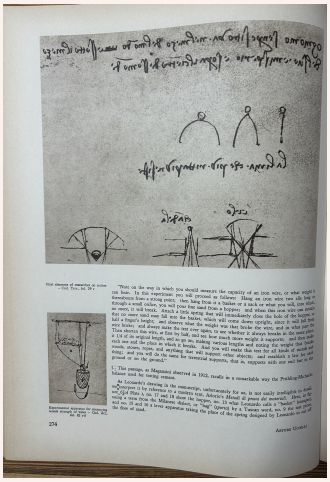


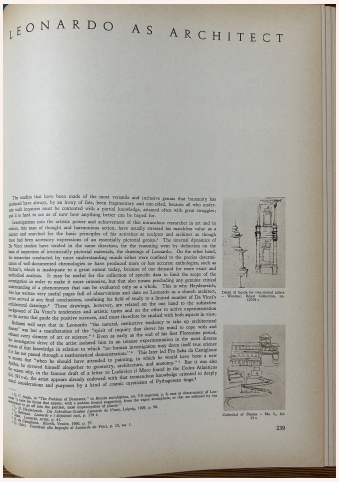


审阅稿

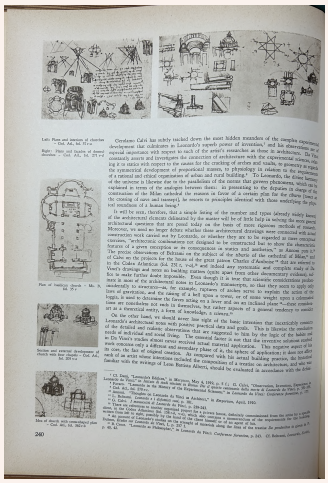
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

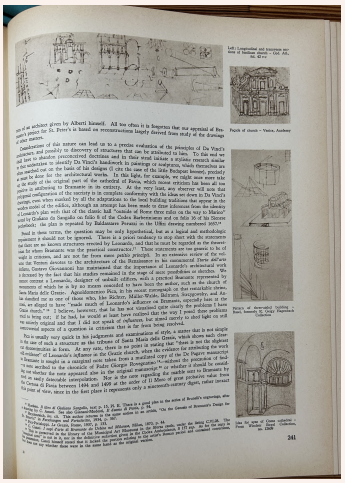


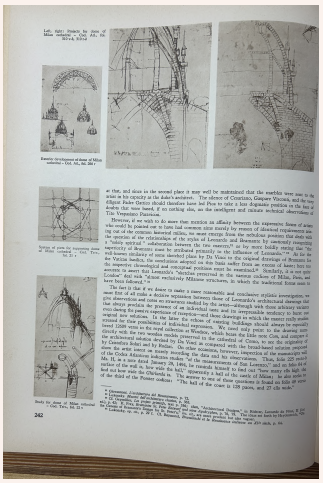


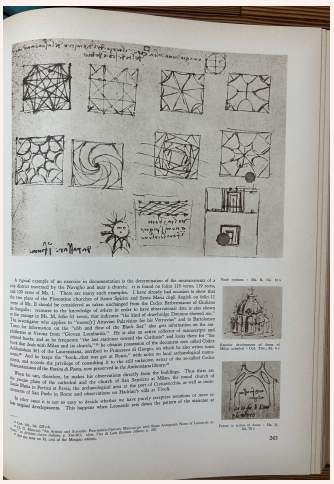


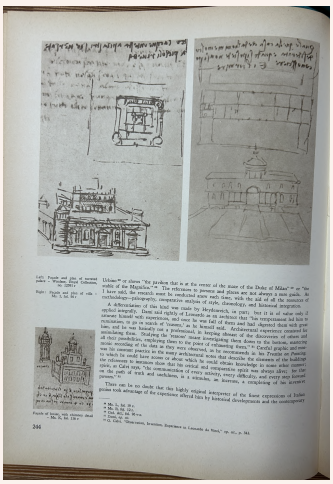
建筑师







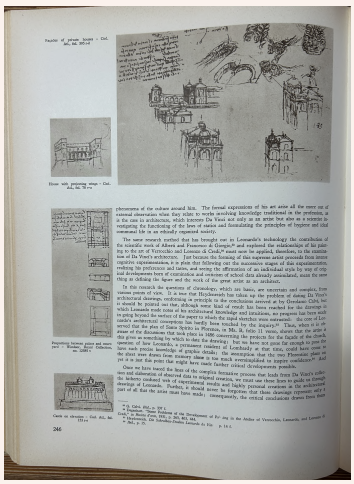
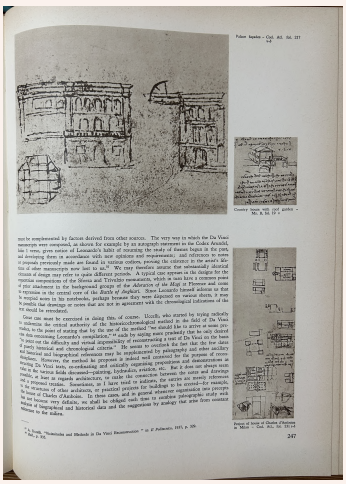
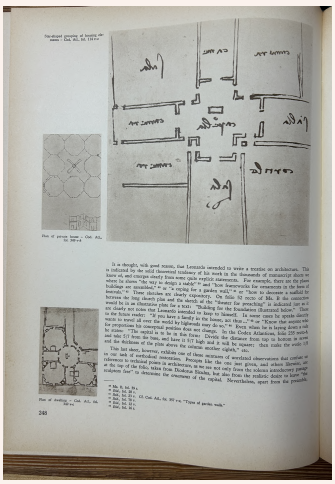
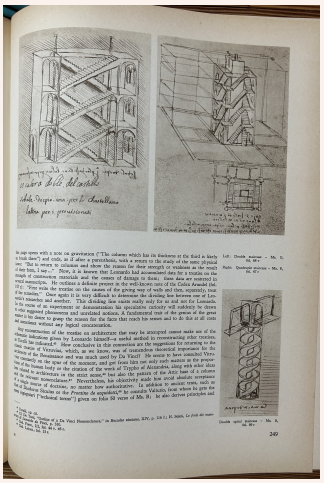
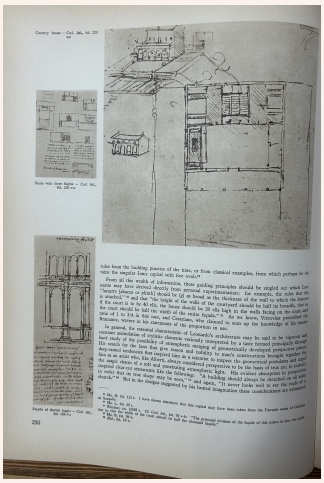
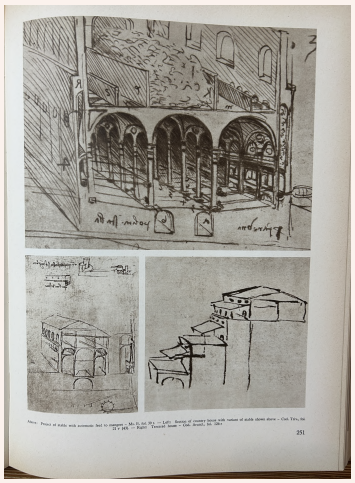
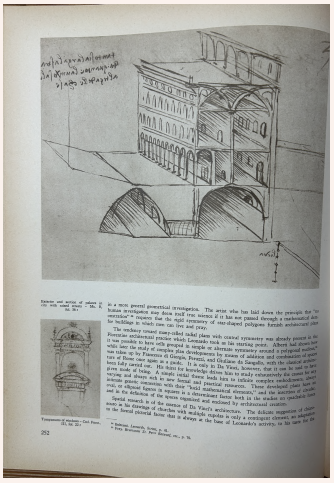
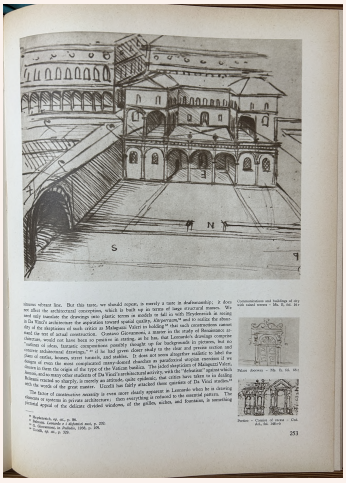
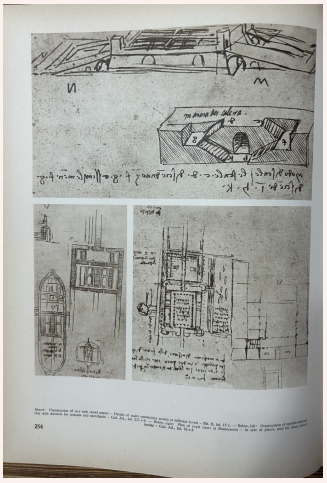






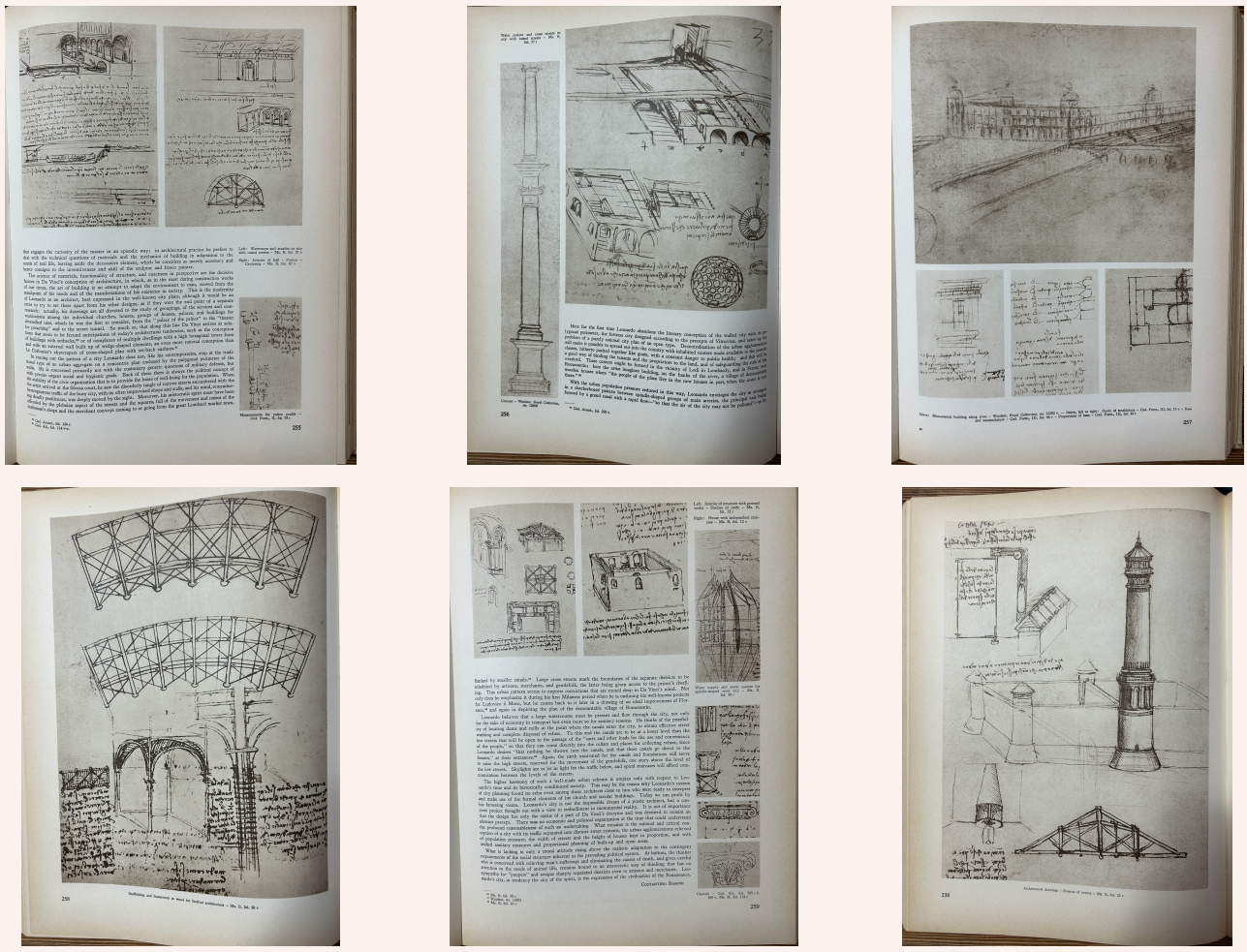
审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。



6.4.3 安德烈 • 帕拉迪奥 (1508–1580)

1508 年出生于帕多瓦, 由安德烈亚 • 皮特罗 • 德拉 • 戈多拉 (Andrea di Pietro della Gondola)[3] 1520 年代转移到维森萨, 约十六岁时被注册。(1524) 在当地的布里克莱尔和石马森的吉尔德。接下来的十年里, 他曾担任马逊和雕塑家, 并在文件中描述了他为一个 **拉比** (Stonecutter) 直到 1542 年。因此, 他的早期教育是实用的而不是学术的, 根源于材料、建筑技术和建筑场所的现实　一个形成性的经验, 将永久塑造他的建筑视野。他的后期理论工作以构造逻辑而不是纯粹的美学投机为基础。

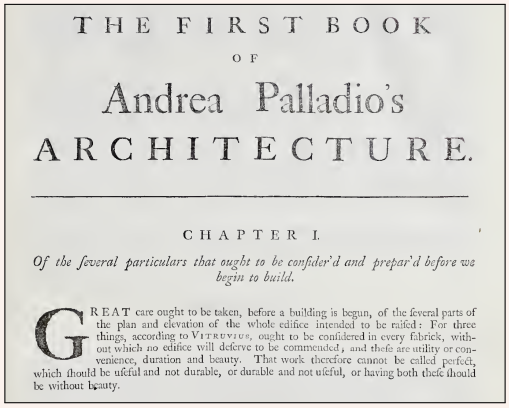
1530 年代后期, 人文主义诗人和学者吉安 • 乔治奥 • 特里西诺 (Gian Giorgio Trissino) 注意到他的工作, 同时雇用他在建筑项目上, 并将他带到他的监护下。特里西诺认识到他的天赋, 给了他分类的名字 “广播” Pallas Athena 之后　并将他介绍到人文学的学习。沉浸在古罗马建筑和维特鲁维亚的研究中 (印刷自十五世纪末以来) 特里西诺鼓励帕拉迪奥的经典教育, 并陪同他学习之旅到罗马, 在那里他系统地研究和测量古老纪念碑。这些与罗马建筑的会面提供了智力框架, 使他能够合成古典形式与当代建筑实践。

到 1540 年左右, 帕拉迪奥接收了建筑委会, 并在他所扮演的角色中公开出现。主要位于维森萨, 他成为后复兴时期最有影响力的建筑师, 在整个威尼斯设计别墅、宫殿和教堂。他的作品站在工艺、经典理论和理性比例的交叉点上。

[3]更多关于他的贡献的详细信息可以在 §15.2.2.2.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

安德烈 • 帕拉迪奥 (1508–1580) (Palladio, 1570) 它一直在成为最有影响力的文艺复兴建筑师 - 尤其是西方建筑的所有。他的 **四大建筑图书馆** (四本建筑书籍) 出版于 1570 年在威尼斯, 合成古典建筑理论与严格的实用指导在最有影响力的建筑处理史上写的。该作品结合了理论原则, 测量古罗马建筑的绘图和帕拉迪奥自己的作品的详细介绍, 并将其组成了一个全面的设计手册, 形成了世界各地的建筑。[4]



THE FIRST BOOK
OF
Andrea Palladio's
ARCHITECTURE.

CHAPTER I.

Of the feveral particulars that ought to be conſider'd and prepar'd before we begin to build.

GREAT care ought to be taken, before a building is begun, of the feveral parts of the plan and elevation of the whole edifice intended to be raiſed: For three things, according to VITRUVIUS, ought to be conſidered in every fabrick, without which no edifice will deſerve to be commended, and theſe are utility or convenience, duration and beauty. That work therefore cannot be eſteem perfect, which ſhould be uſeful and not durable, or durable and not uſeful, or having both theſe ſhould be without beauty.

图 6.3: 广播 (Palladio, 1570)

6.4.4 塞尔维亚诺 • 塞里奥 (1475–1554)

Sebastiano Serlio 出生于 1475 年在波洛尼亚, 并在转向建筑之前作为画家训练。他在 1510 年代和 1520 年代在罗马工作, 在那里他吸收了古纪念碑的教训和布拉曼特和佩鲁齐的工作。1527 年罗马封锁后, 他搬到威尼斯, 后来前往法国, 在那里他服务于弗朗西斯一世, 并在 Fontainebleau 城堡工作。他在 1554 年左右在 Fontainebleau 去世。

所有建筑作品 塞里奥通过优先视觉清晰度而改变了建筑知识的传输。他的 **所有建筑作品** (关于建筑的完整工作) (Serlio, 1996) 出版于 1537 年至 1575 年间的设施, 是首个主要围绕图像设计的建筑处理。阿尔伯蒂和维特鲁维乌斯写了密集的理论论文, 塞里奥提供了数百个木制图像, 伴随着实用的解释, 可供建筑师、建筑师和建筑师提供。

塞里奥的态度民主化了古典建筑, 使古代和复兴时期的设计原则可用于欧洲各地的实践者, 他们缺乏意大利建筑或人文教育。他的经典命令书籍图斯坎、多里克、约尼克、科林蒂亚和复合物, 各个顺序都通过系统的图表呈现了比例关系、形状资料以及组装细节。

该论文被翻译成荷兰、德语、法语、西班牙语和英语, 成为 16 世纪最广泛传播的建筑书。塞里奥使用图表传达设计的地质规则, 预测了图形方法的重要性 在 结构分析 中。

6.4.5 吉亚科莫 • 巴罗齐 • 达维戈拉 (1507–1573)

吉亚科莫•巴罗齐•达维戈拉 (1507–1573) (Vignola, 1969) 编码五个经典命令 在一个精确的模块化系统中, 它已成为建筑和工程实践的标准参考超过三个世纪。他的**《五大建筑规则》** *(Regola delli cinque ordini d'architettura)* (五条建筑规则)1562 年首次出版, 取得了前所未有的处理: 一个完全系统的、数学准确的、视觉上清晰的经典比例呈现, 任何有能力的实践者都可以应用。

[4]仔细的读者会注意到, 本文的标题将致敬帕拉迪奥的主作品。作者承认这份借款比有罪的更令人欣赏, 希望一些小尺寸的威尼斯大师的清晰度和系统化可以通过同情的魔法注入这些页面。帕拉迪奥将建筑艺术分为四本书, 我们试图对结构科学进行同样的研究。这个工作是否会享受甚至一部分 **四本书**五世紀的長寿, 仍然是慈悲的, 未來的世代要審判。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Vignola 的创新是方法学的。他设立了模块 - 定义为其基础上的柱的射线 - 作为所有其他维度产生的基本单位。每个顺序的每一个元素 - 列高度, 实体比例, 基础和资本档案, 集合 - 都被表达为这个模块的一个单一部分或多个。该系统将经典设计缩小为算法: 由于所需的柱高度, 所有其他尺寸都会自动跟踪。这种合理化消除了以前的治疗中, 包括塞里奥和甚至维特鲁维乌斯的两种不一致性。

《五大建筑规则》(Regola delli cinque ordini d'architettura) 1562 和 **规则** 对其经济非常重要。它几乎全部由三十二个包装板组成, 最小文本 - 仅足以解释比例系统。这种视觉直观使其非常实用: 建筑师和建筑师可以从一眼中提取他们需要的信息。这本书经过了数百个出版物和翻译, 一直在印刷到 20 世纪。它是由优秀的建筑文本, 在欧洲和美国各地的学术院和研讨会中使用。

Vignola 对尺寸和比例的系统性方法影响了比建筑风格更大。他的复杂的美学判断减少到准确的数值关系模拟了理性主义精神, 这将是科学革命的特点。生成模块性比例系统的思想习惯 (系统、量、规则) 就是产生结构分析的相同习惯。因此,Vignola 的处理不仅仅是经典品味的编码, 而且是对现代工程特征形状和结构的合理处理的一步。

6.4.6 哈伯特 • 加泰尔 (1660–1737)

哈伯特 • 加蒂耶出生于 Nî 马斯和训练为军事工程师在路易统治期间 第十四届, 一个雄心勃勃的基础设施扩张时代, 旨在巩固法国国家的行政和经济力量。他的职业生涯包围了道路、渠道和桥梁, 他长大成为 **船舶**, **桥梁**, **港口和路线检查员 ´ 文台**通道、桥梁、海港和路线检查员, 为法国最大的省份之一的兰格韦多克地区。

1716 年, 古蒂尔出版了他的 **桥梁条约** (Gautier, 1765) (第四版) 第一個處理完全致力於橋梁建設。工作以令人惊叹的投诉开启, 图 6.4a:

> 论述建筑的作者并未给出建造桥梁的规则。他们没有深入处理这一主题，也没有提供细节，只是一带而过；他们假定，一名对本专业无所不知的建筑师理应掌握桥梁的一切。斯卡莫齐、帕拉迪奥、塞利奥等人给出了石桥或木桥的范例；维特鲁威和维尼奥拉则只字未提。我从讨论过这一主题的作者那里，摘取一切适合本书目的的内容；凡我认为对公众有用者，均记载其发表或完成的成果。但凡我认为通过增补或删减可以把问题说明得更清楚，我便这样处理，使其更容易理解。此外，我还加入了多年从事这些工程所积累的经验，使不熟悉此事者能够从中受益；本论著正是专为他们而作。
>
> ---
>
> 处理建筑的作者没有给出桥梁建设规则。他們沒有深入討論這個主題, 也沒有提供任何詳細的討論; 他們只在通過時談到它。他们假设一个建筑师, 谁是无知的什么与职业有关的东西, 应该知道一切与桥梁有关。
>
> 一些作家, 如斯卡莫齐、帕拉迪奥、塞里奥等, 已经提供了大桥或木材的模型; 维特鲁维乌和维格诺拉没有说过他们。我从那些在这个主题上写过的一切都得到了我的目的, 我每当我认为这对公众有用时都会报告他们所发表或做的一切。
>
> 但是, 在我所看到的任何地方, 我可以通过添加或忽略去进一步, 以便更充分地澄清事务, 我都这样做, 使它们更容易理解。到这一切, 我已经补充了我在许多年间从这些工作中获得的经验, 并且我在这里报告, 以便那些不知道的人可以从中受益。对于谁, 我写了这条约。
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

维特鲁维乌斯对桥梁没有说话, 维格诺拉也这样。帕拉迪奥和斯卡莫齐提供了例子, 但没有系统的指导。Gautier 明确提出, 通过编写所有已出版的内容来弥补这个缺陷, 并通过他自己的几十年的实践经验增加。

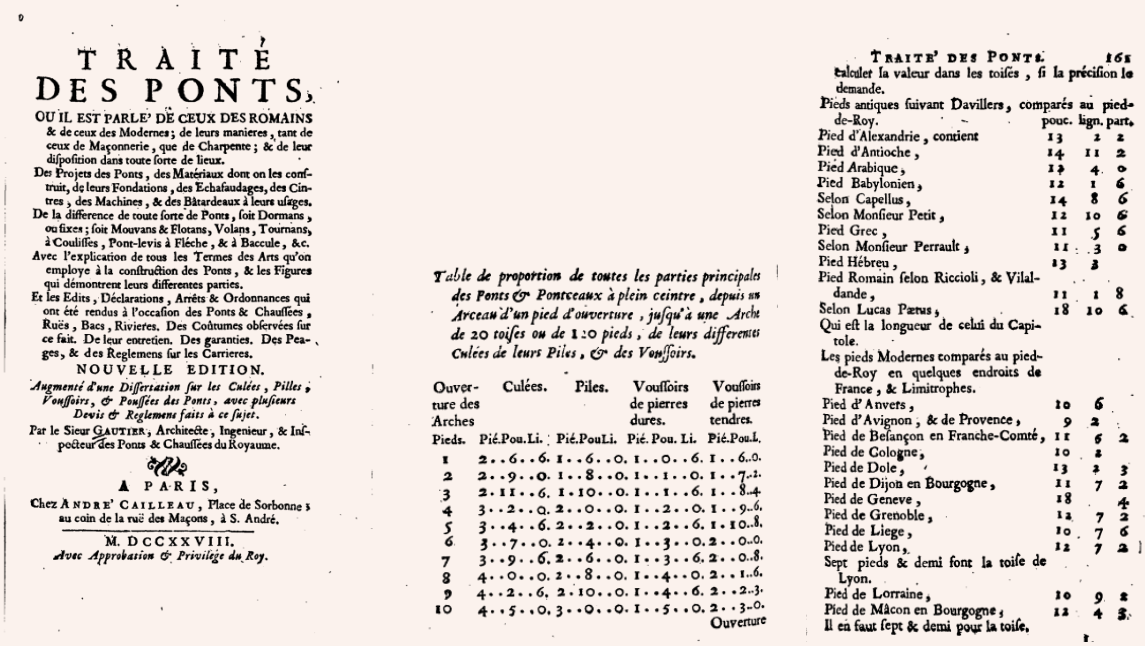
和 **桥梁条约** 它在范围内是百科全书的。它开启了一个历史性的调查庆祝的桥梁 - 特拉雅恩桥在大道上, 罗马桥, 花园桥 - 在系统地通过桥梁类型, 材料, 基础, 箱子, 中心和机械。Gautier 讨论木材桥梁和大道桥梁、固定桥梁以及可移动的桥梁 (滑雪桥, 浮动桥梁, 旋转桥). 他处理了树木的地质学、树木和树木的大小化以及河

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

流建立结构的实际挑战。整个过程中, 工作仍然是描述性的而不是解析; 结构性能通过形状、比例和积累的先例而不是计算来处理。

除了形状和建筑问题之外,Gautier 还特别关注工程的实用和行政基础设施。他制定了准确的技术名称, 并在页面上 第 161 章 描述长度单元的细节 (脚), 从巴比伦的措施到在欧洲各个地区和法国城市使用的。这种单位的多样性明亮地描述了工程师在标准化之前面临的实际困难。它有助于解释为什么后来的引入测量器 - 在法国革命期间启动并在拿破仑统治下巩固 - 构成了工程实践史上最负面改革之一。



TRAITÉ
DES PONTS,
OU IL EST PARLE' DE CEUX DES ROMAINS & de ceux des Modernes; de leurs manieres, tant de ceux de Maçonnerie, que de Charpente; & de leur disposition dans toute sorte de lieux.
Des Projets des Ponts, des Matériaux dont on les construit, de leurs Fondations, des Echafaudages, des Cintres, des Machines, & des Bâtardeaux à leurs usages.
De la difference de toute sorte de Ponts, soit Dormans, ou fixes; soit Mouvans & Flotans, Volans, Tournans, à Coulisses, Pont-levis à Fléche, & à Baccule, &c.
Avec l'explication de tous les Termes des Arts qu'on employe à la construction des Ponts, & les Figures qui démontrent leurs differentes parties.
Et les Edits, Déclarations, Arrêts & Ordonnances qui ont été rendus à l'occasion des Ponts & Chaussées, Ruës, Bacs, Rivieres. Des Coûtumes observées sur ce fait. De leur entretien. Des garanties. Des Peages, & des Reglemens sur les Carrieres.
NOUVELLE EDITION.
Augmenté d'une Dissertation sur les Culées, Pilles, Voussoirs, & Poussées des Ponts, avec plusieurs Devis & Reglemens faits à ce sujet.
Par le Sieur GAUTIER, Architecte, Ingenieur, & Inspecteur des Ponts & Chaussées du Royaume.
A PARIS,
Chez ANDRE' CAILLEAU, Place de Sorbonne; au coin de la ruë des Maçons, à S. André.
M. DCCXXVIII.
Avec Approbation & Privilége du Roy.

Table de proportion de toutes les parties principales des Ponts & Ponteeaux à plein ceintre, depuis un Arceau d'un pied d'ouverture, jusqu'à une Arche de 20 toises ou de 120 pieds, de leurs differentes Culées de leurs Piles, & des Voussoirs.

Ouverture des Arches	Culées.	Piles.	Voussoirs de pierres dures.	Voussoirs de pierres tendres.
Pieds.	Pié.Pou.Li.	Pié.PouLi.	Pié. Pou. Li.	Pié.Pou.L.
1	2..6..6.	1..6..0.	1..0..6.	1..6..0.
2	2..9..0.	1..8..0.	1..1..0.	1..7..2.
3	2.11..6.	1.10..0.	1..1..6.	1..8..4.
4	3..2..0.	2..0..0.	1..2..0.	1..9..6.
5	3..4..6.	2..2..0.	1..2..6.	1.10..8.
6	3..7..0.	2..4..0.	1..3..0.	2..0..0.
7	3..9..6.	2..6..0.	1..3..6.	2..0..8.
8	4..0..0.	2..8..0.	1..4..0.	2..1..6.
9	4..2..6.	2.10..0.	1..4..6.	2..2..3.
10	4..5..0.	3..0..0.	1..5..0.	2..3..0.
				Ouverture

TRAITE' DES PONTS. 161
calculer la valeur dans les toises, si la précision le demande.

Pieds antiques suivant Davillers, comparés au pied-de-Roy.	pouc.	lign.	part.
Pied d'Alexandrie, contient	13	2	2
Pied d'Antioche,	14	11	2
Pied Arabique,	13	4	0
Pied Babylonien,	12	1	6
Selon Capellus,	14	8	6
Selon Monsieur Petit,	12	10	6
Pied Grec,	11	5	6
Selon Monsieur Perrault,	11	3	0
Pied Hébreu,	13	3	
Pied Romain selon Riccioli, & Vilalandande,	11	1	8
Selon Lucas Pætus,	18	10	6
Qui est la longueur de celui du Capitole.			
Les pieds Modernes comparés au pied-de-Roy en quelques endroits de France, & Limitrophes.			
Pied d'Anvers,	10	6	
Pied d'Avignon, & de Provence,	9	2	
Pied de Besançon en Franche-Comté,	11	6	2
Pied de Cologne,	10	2	
Pied de Dole,	13	2	3
Pied de Dijon en Bourgogne,	11	7	2
Pied de Geneve,	18		4
Pied de Grenoble,	12	7	2
Pied de Liege,	10	7	6
Pied de Lyon,	12	7	2
Sept pieds & demi font la toise de Lyon.			
Pied de Lorraine,	10	9	2
Pied de Mâcon en Bourgogne,	12	4	3.
Il en faut sept & demi pour la toise.			

(a) 打开页面 (b) 各式各样的定义 (c) 桥梁尺寸

图 6.4: 桥梁条约 (Gautier, 1765)

Gautier 进一步讨论公共工作规则和规定 (p. 196) 因错误执行处罚 (p. 214) 维护义务 (p. 217)10 年保修, 为建筑师提供 (p. 225). 他讨论了桥梁通道的关税 (p. 227) 成本估计程序 (pp. 第 231 章 273) 正确执行的工作认证 (p. 325) 公共工作会计方法 (p. 328), 以及当局正式批准工程文件 (p. 340). 特别令人震惊的是他对重新批评的明确反应。(p. 409) 这是一个早期的例子, 现在将被称为对比评论。

对于拱厚度的关键问题,Gautier 转向 Pont du Gard 作为他的模型 (图 6.5). 在那里, 树木的厚度为 4 脚在 60 分的长度 脚, 产生的经典比例 1/15 - 相同的规则由阿尔伯蒂两个世纪之前给出的, 图 15.4. 但 Gautier 立即承认了一个问题: 这个规则只适用于大架子。為一個小 拱 的 6 脚宽, 规则会规定一个厚度不到 6 英寸, “他认为与正确的厚度相比, 它是非常少的, 他说的是 1.5。脚” (Huerta, 2018). 在这里,Gautier 做了一个基本意义的观察 第一個明確的承認, 橋梁設計是內在的。不比例:

> 有一座大桥携带一辆大车, 比一座大门携带更负担得多。ˆ 米车
>
> 大型携带重货物的桥梁比同一行货物的小桥更少负载。
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

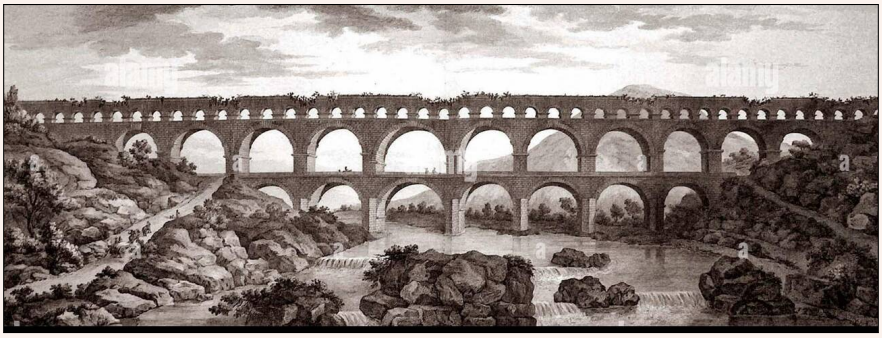


图 6.5: 防守之桥

Gautier 的说法需要澄清: 他意味着 **比例** 交通 荷载 到桥本身的重量比大桥小得多。一个大桥, 重量较高, 由其自我重量占主导地位; 通行运输代表了整体荷载的不可忽视部分。一个小桥, 更轻, 经历相同的运输, 相对较大的干扰。因此, 比例规则 (t/s = const.) 缺少小间隔: 活载的绝对大小与结构不规模, 即使恒载也这样做。这是第一个明确的认可, 拱桥设计是 **不比例**.

这种观点与维特鲁维亚以来所有比例规则的基本假设相矛盾: 结构稳定仅取决于地质, 独立于绝对大小。[5]

1717 年,Gautier 出版了一 *Dissertation sur l'épaisseur des culées des Ponts* 在那里, 他试图进行更有系统的治疗。他制作了一张给拱厚度的桌子作为间隔功能, 区分硬和软石。四十大弓 脚或多, 他保留了阿尔伯蒂的规则 1/15. 对于较小的树木, 他命令添加 1 脚到 1/24 的范围 - 不比例的纠正, 承认小结构对集中负载的更大的脆弱性。和 **桥梁条约** 经过四个版本 (1716, 1728, 1755, 1765) 十八世紀, 被廣泛引用。´ 利多将加泰罗的桌子纳入他的影响力 **英格兰的科学 ´雄** (De Belidor, 1729).

Gautier 没有提前一个数学理论的架子或火箭。他的工程依赖于比例、前例和经验丰富的建筑师的判断。然而, 通过将桥梁作为系统研究的独特主题隔离, 将工程融入全面的法律和行政框架内, 并明确承认设计问题的非比例性质; Gautier 建立了他的继任者将建造的知识和机构基础。

在这一点上,Gautier 与 Jean-Rodolphe Perronet 相反。Gautier 的贡献在于实习 - 终端学, 规则, 财务, 维护和比例 - 的百科全书编码, 记录桥梁是如何被设计、执行和管理为公共作品。Perronet, 一代后, 将代表这种传统的成熟: 工程教育的巩固, 集中监督, 以及无前例的滑雪性的纪念碑石桥梁拱的执行。從工藝知識到組織技術規律的過渡 - 从大師建築家的直覺到工程師的方法 - 决定通過 Gautier 的 **条约**.

单位

當時,Gautier 寫了 **桥梁条约**在法国, 没有统一的测量系统, 至少在整个欧洲。长度以合成单位表达..... **脚**, **推特**, 和 **线路**其绝对值不只是从国家到国家, 而且经常从城市到城市,Fig。6.4b. 这种异常性引发了设计、估计和建设的严重实用困难, 尤其是长期执行或涉及多个管辖区的大型公共工作。Gautier 非常清楚这个问题, 正如他详细描述的不同问题所表明的那样。**脚** 在使用中, 从古代措施到在法国各个地区采取的措施。他的对单位的谨慎关注反映了 18 世纪初工程实践的现实, 其中比例规则和组合测量是唯一可靠的确保一致性在没有标准化测量的手段。这种情况最终在 1795 年引入的法国革命期间得到解决, 后来在十九世纪初在拿破仑统治下在整个法国建立和实施。

[5] 正如我们所知道的那样, 这个观点后来受到加利利奥著名的骨滑例子的挑战。(p. 435). 很久之后, 在结构中的尺寸效应的概念被正式化为 Bažant, 1976 随后, 延长了 Saouma, Natekar, and Hansen, 2003 要明确地调整塑性和断裂力学之间的差距。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Gautier 的半循环桥梁比例表 (桌子上 P。368)

桌子是什么 (范围与意图). Gautier 将此表明确介绍为 **各大桥的主要部分比例表** *& Ponceaux a plein ceintre* **全景**, 即对桥梁和小曲线的主要部分进行比例表 **全天堂** (半循环) 档案 所述范围从一脚的开口开始, 延伸到 20 个尾巴的拱 (120 英尺). 目的是实用的: 由于一个开口, 桌子提供一眼的主要大小尺寸需要比例工作, 图 6.4c.

桌子是如何安排的 (列). 桌子是通过增加 **开幕式的弓箭** (開啟 拱) 用脚表达。对于每个开幕式, 它提供:

- **关闭**: 推荐的尺寸, 用于折叠 (脚 - 英寸 - 线).
- **电池**: 推荐的尺寸为脚 (脚 - 英寸 - 线).
- **石头的长度**: 推荐的毛巾 (戒指) 厚度为 **硬石**.
- **石头的温柔**: 推荐的毛巾 (戒指) 厚度为 **软石**.

因此, 表分离基因导向的比例 (开口、皮, 抽象) 材料质量纠正 (硬 vs 软石) 适用于你的尺寸。

输入的含义 (什么是每个数字的控制). 在 Gautier 的使用中, 输入不是抽象的比例; 它们是直接可用于绘图、估计和地点决策的尺寸:

- 和 **开幕式** 是拱的清晰范围。
- 和 **皮尔** 尺寸控制中间支撑的厚度; 它控制两者稳定性 (质量) 水力阻塞 (河流是多么紧张).
- 和 **失败** 尺寸控制了终端支持; 它通常比一块石头大, 因为它必须在序列结束时抵抗冲动, 并与接近的融化和保留地球互动。
- 和 **饰演** 尺寸 (硬/软) 是拱戒指的厚度 (组成拱的马索尼乐队). 这是最直接的代理, 在桌子上, 当地压缩需求和石头和关节质量。

硬石 vs 软石列 (為什麼兩個青春的價值). 一个关键特点是明确分裂 **石头硬** 和 **石头温柔**. Gautier 承认, 一个单一的地质比例不够: 对于相同的开口, 戒指厚度必须在石头紧时更大。(弱, 更容易破裂、损坏和不完美关节). 因此, 桌子作为一个简单的、可操作的材料纠正: 保持相同的开关、窗口和抽象逻辑, 但根据石材质量选择木材厚度。

如何阅读一行 (工作流). 计划的工作流是简单的:

1. 选择相应的序列 **开幕式的弓箭** (脚下).
2. 阅读, 以获得推荐的尺寸 **关闭** 和 **电池**.
3. 选择的 **您** 相应材料的厚度 柱 (硬或软石).
4. 使用这些值作为绘图的基本比例和 **戴维斯**然后调整 (如果需要) 网站限制 (基础 条件、洪水、航行清洁等。).

桌子是什么 (而不是) 做概念。 图表编码了解析预设计逻辑: 稳定性通过质量处理, 比例和先例, 而不是通过明确的推线计算。然而, 它不仅仅是一系列孤立的例子: 它是一个系统的比例方案, 将开放与主要抵抗部分联系起来。(ab, 皮, 环厚度), 它通过双青少年列引入了一个明确的材料质量纠正。

尺寸单位 (脚 - 英寸 - 线). 所有入口都以传统的法国制度提供: **路线** - **线路**. A **脚** 分为 12 **子**, 和 A **推特** 到 12 **线路**. 因此, 在桌子上写的文章如: “4..6..9” 应该读为 4 脚,6 英寸,9 行。该公约允许直接使用桌子在没有中间的算法的情况下确定大小, 同时也反映了这个时期的实际现实: 工程师和承包商在合成分区工作, 而不是十数单位。

6.4.6.1 饰 Jean-Rodolphe Perronet

如果 Gautier 建立了桥梁工程的学科,Jean-Rodolphe Perronet 将其带到成熟。出生在巴黎附近的苏雷斯内, 佩罗内特开始了他的职业生涯为城市的主要建筑师之一工作, 并在他的一生中保持了对建筑以及工程的兴趣。1747 年, 在三十九岁时, 他被任命为新成立的首席执行官。**公路和街道学校**他的职位, 直到他去世四十七年后。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1763 年, 他成为首席工程师。**桥梁和街道** 1765 年, 他被选为 **科学学院**. 他监督了二十一座桥梁的第二半世纪最重要的法国公共作品, 并个人设计了十二个桥梁, 其中十三座建造。

佩罗内特的桥梁因其勇气和轻度而庆祝 (图 6.6a). 纽威尔桥 (1774) 圣马克森桥 (Pont de Saint-Maxence) (1772–86) 与此同时, 在 Conte de la Concorde (1787–91) 实现了无情的比例, 这让当代人感到惊讶, 并在几十年内保持不一致。阿尔伯蒂处方 1/15 和罗马桥通常从 1/10 到 1/12 的, 佩罗内特的树木接近 1/24 或更远。这不是无视, 而是由系统观察产生的信心。

1748 年, 仅一年后任命为学校主任, 佩罗内特写了一篇未出版的纪念书。“以色列人, 必然要有各式各樣的門口。” 记住在桥梁的各个瓦尔特的开斯顿的胡子厚度。这份保存在法国国立桥路学校图书馆的文献，是十九世纪以前关于桥梁比例最系统的实证研究 (Huerta, 2018).

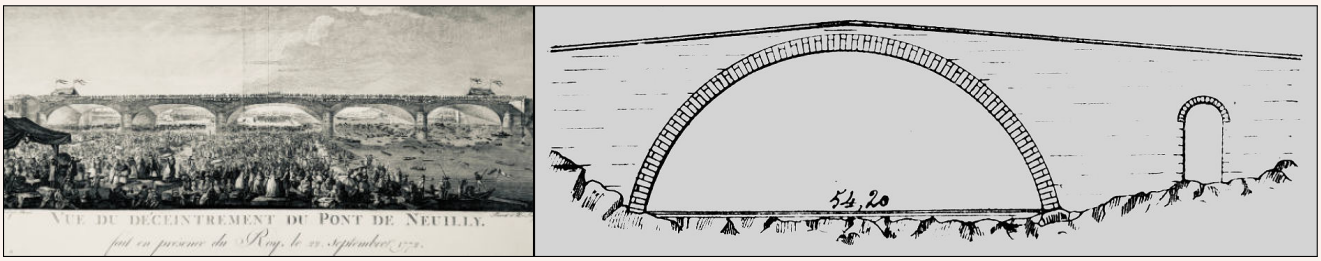
佩罗内特的方法是五分之一的实验。他编写了一张超过二百个拱桥梁的表, 古代和当代, 半圆形和基于上方, 记录了它们的螺旋和拱厚度。他的目标是从最好的现有例子中提取 - 那些将坚定与经济相结合 - 一个可以指导未来的设计的一般规则。“在建设方面,” 他写的, “只有投机才能超越经验。” (“在建设方面, 只有投机才能优先于经验。”).

从这个系统的研究,Perronet 得出一个简单的线性公式半循环架。厚度 t (脚下) 应该是:

$$t = \frac{s}{24} + 1 - \frac{s}{144}$$

哪里 s 那是脚上的相关术语。第一個期限取出一個四分之二十的範圍; 第二個增加一腳 “为了较小的弓, 必须通过相同负载的支座与大货物” 第三个字符串一行 (1/12 英寸) 每条路径, 以适应最勇敢的现有桥梁的比例。这种表达量大约减少了 $t = 1 + s/28.8$ 或在甲基单位, $t = 0.325 + 0.035s$ 米。

佩罗内特的规则的重要性不在于它的数学复杂性　它只是对实验数据的线性匹配　但在其后果中。对于大桥,Perronet 的公式处方了几乎一半的厚度由 Alberti-Gautier 提供。伟大的中世纪桥 Vieille-Brioude, 图 6.6b 以 54.6 的范围 m 和实际厚度为 2.1 m 在键盘上, 适合 Perronet 的规则几乎准确 (预测: 2.09 m), 而阿尔伯蒂的 1/15 规则将规定 3.64 m。因此, 该规则编码并合法化了勇敢的建筑师在实验上实现的低调比例, 将特殊实践转化为标准指导。



(a) 尼古拉之桥　　(b) 古老大桥

图 6.6: 佩罗内特的桥梁

1788 年, 佩罗内特 **项目描述和桥梁建设** (Perronet, 1782) 他以完整的细节介绍了他生命的工作: 设计和建造 Neuilly,Mantes,Orléans,Nogent-sur-Seine 和 Sainte-Maxence 的桥梁, 以及机械、箱子、中心和建筑序列。作品是技术文档的纪念碑, 保存了与建造完成相反会消失的知识。正如 Perronet 在他的前面所观察的那样, 桥梁建设的艺术 “他们整个建造后, 没有任何痕迹: 不仅能克服在建立和举起这些巨大的群众所面临的无数困难的艺术不再揭示其资源, 而且石头切割和放置, 木材聚集, 和装饰品的方法需要, 由建筑师, 注意力和操纵者甚至不了解商人谁没有机会跟踪这样的伟大的作品。”

审阅稿

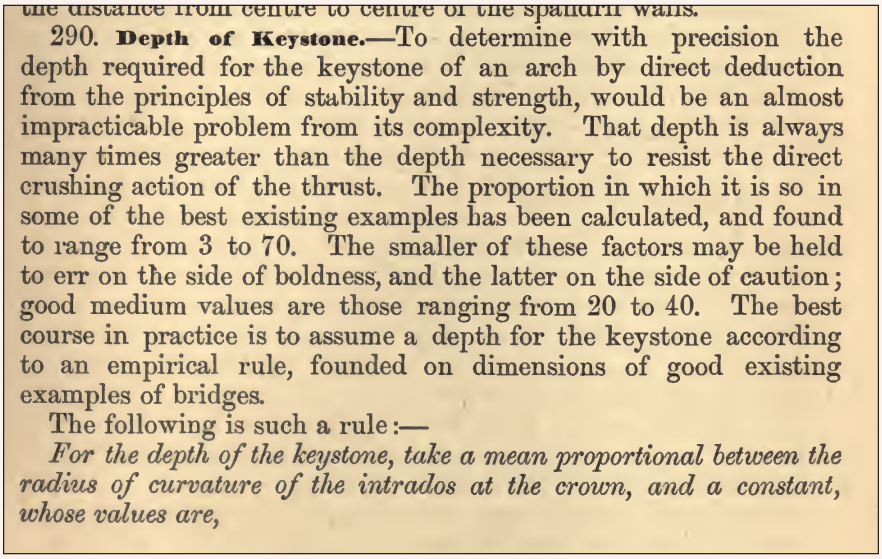
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

6.4.6.2 从比例到经验的过渡

无论是 Gautier 还是 Perronet 都没有在现代意义上使用解析机械。由 La Hire、Couplet 和其他人开发的拱理论已知，但他们认为不适合真正的桥梁设计的复杂性。引用一个世纪后，图 6.7：

> 要准确地确定一个拱的密钥所需的深度，直接从稳定性和强度原则中减少，这将是由于其复杂性而几乎无法实现的问题。
>
> Rankine, 1862 A Manual of Civil Engineering

最好的路程留下了“根据一个实验规则，以基于桥梁的良好现有例子的尺寸为关键点的深度。”



the distance from centre to centre of the spandril walls.

290. **Depth of Keystone.**—To determine with precision the depth required for the keystone of an arch by direct deduction from the principles of stability and strength, would be an almost impracticable problem from its complexity. That depth is always many times greater than the depth necessary to resist the direct crushing action of the thrust. The proportion in which it is so in some of the best existing examples has been calculated, and found to range from 3 to 70. The smaller of these factors may be held to err on the side of boldness, and the latter on the side of caution; good medium values are those ranging from 20 to 40. The best course in practice is to assume a depth for the keystone according to an empirical rule, founded on dimensions of good existing examples of bridges.

The following is such a rule:—

For the depth of the keystone, take a mean proportional between the radius of curvature of the intrados at the crown, and a constant, whose values are,

图 6.7: Rankine, 1862 评估关键字的尺寸

Gautier 和 Perronet 所取得的成就比理论更微妙：系统的实验知识的制度化。佩罗内执掌法国国立桥路学校近半个世纪；通过这所学校，工程实践不再依靠行会学徒制传承，而是通过系统教学、书面文献和标准化方法传播。从大师建筑师到民用工程师的过渡　从工艺到职业　在他们的世代中实现了。

其规则，此外，体现了一个关键的流行病学转变。阿尔伯蒂和帕拉迪奥的比例规则认为，结构稳定仅仅是地质问题：一个站在一个尺寸的拱将站在任何尺寸。Gautier 承认，这种假设在交通负载下对桥梁失败，而 Perronet 系统化了不比例的纠正。这种洞察　绝对尺寸重要，相同的比例在不同规模上产生不同的安全边界　最终会在次元分析和现代结构类似性理论中找到其理论表达。但是，它的实用认可首先是通过一个工程师对投机的经验信任的两百个桥梁的病人图表。

Gautier 和 Perronet 共同指出民用工程作为基于地质学、经验和系统教育的学术学科的出现，但仍在前面是正式的 解析 工具，即将在十九世纪发展。他们站在人道主义的比例传统　这个部分从维特鲁维亚到阿尔伯蒂和帕拉迪奥之后追踪　以及将结构工程在下个世纪转变的机械学的科学传统之间。

6.5 从数学顺序到机械

此分類上一篇：引入增長的數字 **数学顺序** 研究物理现象。地质学和早期解析方法逐步应用于动作问题，并将平衡机械转化为数学组织的领域。结合这些贡献的是机械理智转化为结构化的数学企业。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

6.5.1 弗朗西斯 • 贝康 (1561–1626)

弗朗西斯 • 贝康出生于 1561 年, 成为一个著名的英格兰家庭 - 他的父亲是伊丽莎白一世的伟大封锁守护者。他在剑桥和格雷斯酒店学习, 追求法律和政治的职业生涯, 以詹姆斯一世任命为上校。他的政治职业生涯在 1621 年被判入狱后, 他完全致力于哲学和科学写作, 直到 1626 年去世 - 重复从冰冷中捕获, 同时尝试在雪中冻结一只鸡。

Novum Organum 和 Empirical Method 巴康的 **新的器官** (新工具) (Bacon, 2000)1620 年出版, 为实验方法提出了哲学基础。引发性理性 它成为现代科学和工程的基础。标题故意与亚里士多德的对立 **器官**信号为 Bacon 的意图将学术逻辑取代一个新的方法来研究自然。

偶像的教义 巴康对所得知识的批评是他的教义 “偶像” 系统性偏见, 扭曲人类理解。部落的偶像源自人类本性。(我们倾向于看到模式, 在那里没有存在) 洞穴的偶像, 从个人的温和和教育; 市场场的偶象, 从语言的不准确性; 剧院的偶然, 从接收的哲学系统和教义。这种认知错误的定义预测现代担忧与实验性偏见, 并仍然适用于工程判断, 在那里过度信任, 确认偏见和依赖于前例可能会导致结构性失败。

所罗门之家和皇家社会 在学术争议的场合, 贝康支持有组织的实验研究计划: 现象的系统观察, 控制的实验以隔离原因, 仔细记录结果, 并从积累的证据中引发普遍化。他的乌托邦工作 **新大西洋** (1627) 描述 “所罗门的家,” 一个由国家赞助的机构, 专门通过实验、合作和知识实践应用进行系统性自然研究。这个愿景直接激励了皇家社会的创始人。(1660) 他们认为自己正在实现 Bacon 的计划。社会对物质强度、空气压力和机械设备的早期实验, 建立了胡克、博伊尔和纽顿工作的机构框架。

限制和遗产 值得注意的是, 贝康本人对数学作为研究自然的工具感到怀疑, 这是一个显著的限制, 使他与加利利奥和德卡特不同。他的引导方法, 自然史和化学的强大, 证明不太适合机械学, 在数学从原则中提取证明比纯粹的例子列表更有果实。然而, 他的坚持权威实验和组织研究的愿景形成了数学物理最终蓬勃发展的文化。

对于结构工程,Bacon 的贡献是方法论而不是技术。他的重点是结构化实验, 成为科学方法的组成部分, 工程师用来描述物质行为, 验证解析模型, 并开发设计程序。现代结构实验室是巴康对组织实验研究的愿景的直接后裔。

6.5.2 尼古拉斯 • 科珀尼克斯 (1473–1543)

生活

尼古拉 • 科珀尼克斯出生于 1473 年, 在普鲁士王国的托鲁恩。(此后, 波兰王国的一部分). 十岁时, 他被他的叔叔, 一个主教抚养, 给了他优秀的教育。科珀尼克斯在克拉科夫大学学习, 后来在意大利 - 在博洛尼亚 (法律与天文学) 帕多瓦 (医学) 和 Ferrara (卡诺法). 他大部分的成年生活作为法兰堡大教堂的修道院, 在那里他的教会任务留下了天文观察和数学计算的时间。

科珀尼克斯在几十年来开发了他的直升机理论, 并编写了一本简短的手稿。(**评论**) 1514 年左右的朋友中, 但延迟了完整的出版, 直到他生命的尽头。根据传说, 他在 1543 年在他的死床上获得了他的主作品的第一张印刷副本。

De Revolutionibus 及其对机械的重要性 哥本哈根的 **火柴 火车 火箭 火焰** (关于天空领域的革命) (Copernicus, 1995)1543 年出版, 提出了地球和行星绕着太阳的轨道 - 一个假设矛盾于常见意义和古代和中世纪宇宙学的积累权威。结构力学的意义不在于直径模型本身, 而在于它所要求的传染学转变: 数学模型 可以揭示与直接感官观察相矛盾的真理。

通过允许地球本身移动, 哥伯尼克斯暗示地挑战了亚里士多德区分自然休息和自然运动。动作不再是与宇宙中心的绝对属性, 而是依赖于观察者的框架参考的相对属性。这种概念破裂破坏了亚里士多德电影学的几个世纪, 并为后来的无情、相对动作和参考框架的重新观念开辟了道路, 这将成为经典机械的中心。

科珀尼克斯证明, 一个数学一致和内部一致的模型可以提供更准确的现实描述, 而不是在日常体验中建立的一个。在这个意义上, 数学一致性从描述的帮助上升到物理真理的标准。这种智力跳跃 - 将数学抽象依靠感官证据 - 使基础对待机械作为一个普遍的, 基于法律的科学而不是一个实验性手工艺。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哥伯尼克革命也暗示地引入了参考框架问题: 从地球观察的动作不是绝对的, 而是与移动平台相对的。这种实现后来需要概念, 如无形框架和显而易见的 (幻想) 力量, 在动态和最终在结构工程分析中仍然是必不可少的想法, 其中包括加速度, 振动和地震兴奋。

然而, 值得注意的是, 哥伯尼克斯保留了圆形轨道和周期, 优先于数学和谐的物理原因。直升机的全部机械后果只有基普勒放弃循环运动和纽顿的表述普遍动态才会出现。

在哥伯尼克制度中, 自然法的普遍性 - 纽顿一半世纪后完全实现 - 是结构工程的整个企业: 平衡和动作的相同原则是否适用于分析一个罗马弓, 一个哥特式瓦尔特。或现代滑雪器。

6.6 从统计学到科学革命

这里组成的数字标志着从继承的教义转向基于机械的传说。**实验** 和 **测量**. 如力量、无效和平衡等概念通过观察和数学合成进行了改革。这个部分捕捉了静态和动态成为物理基础科学的决定性转变。

6.6.1 西蒙 • 史蒂芬 (1548–1620)

西蒙 • 斯蒂文出生于 1548 年在布鲁格, 西班牙荷兰。(目前的比利时). 很少有关于他的正式教育的确定性, 但他的早期职业生涯是绝对实用的: 他在进入学术生活之前作为牧师、书作家和工程师工作。与许多当代人不同, 斯蒂文并没有从大学训练的人道主义传统中出现。相反, 他的智力发展是由直接与贸易、工程工作和应用问题解决的参与形成的。这个背景深深地影响了他的科学前景, 基于他的机械在混凝土物理理理而不是学术抽象。

1580 年代末, 斯蒂文进入纳萨乌王子莫里西的服务, 成为军事工程师、顾问和教师。该协会将他置于数学、堡垒设计、水力和机械的交叉点, 并为他的科学工作提供了实用动机和机构支座。

西蒙 • 史蒂芬 (1548–1620) (Stevin, 1955–1966) 基本转型静态 从定性描述到严格的数学分析, 建立目前仍然为结构工程中心的原则。他的 **首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學** (重量艺术的原则)1586 年在荷兰出版, 是第一个全面的数学力量处理平衡。从亚基米德开始, 在许多方面, 它超越了古老的主人。

包装飞机 史蒂文最受欢迎的贡献是他对倾斜飞机法则的表现。通过著名 **克劳特克朗** (w 的罪恶) 思考实验。他想象了一系列平等空间的圈子, 穿过三角形前进: 因为链条不自发地移动, 所以各侧的力量必须与侧面长度相比例, 因此与角落的阴影。这个优雅的证据 - 史蒂文以口号提醒 “奇迹是奇迹” (看起来奇妙的东西并不奇妙。) 建立在倾斜表面沿着力量的分辨率, 而无需使用动态或虚拟转移。

组成和平衡的力量 从这个基础, 斯蒂文开发了力量的平行图证明, 在一个点上行动的两个力量可以通过完成平行图来结合到一个单一结果。这一原则, 基本于所有随后的向量机械能够有系统的力量系统分析 在结构中。斯蒂文展示了如何将力量分成组件, 将多个力量结合在结果中, 并确定平衡条件。对身体的多种力量 - 结构分析 的基本操作。

虚功 和 一般 平衡 斯蒂文也提出了相当于虚功的原则, 承认平衡在小型虚拟移动时获得, 不会产生净工作。雖然沒有在後來的正式語言中表達到解析機械, 但這種洞察力預測了结构分析中最強大的方法之一。虚功原理 后来将由 d’Alembert、Lagrange 和其他人普遍化, 成为静态不确定的系统分析必不可少的。

水化学、笔记和工程乙醇 除了静态之外, 斯蒂文对水位学做出了重要贡献, 证明压力在流体中仅取决于深度而不是包含的船舶形状 - 水位悖论。他也是系统使用十数笔记的先驱, 并为写科学作品而不是拉丁文的强烈倡导者。他的决定在荷兰写作反映了一个信念, 科学知识应该为工程师, 艺术家和实践者提供, 而不是学术精英。

这种实用和平等的科学概念 - 数学在工程服务中 - 标志着斯蒂文作为复兴自然哲学与现代工程科学之间的过渡人物。他的作品为静态, 结构分析和应用机械的后续发展奠定了概念基础。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

6.6.2 加利利奥 Galilei (1564–1642)

起源、教育和新的研究方式 加利利奥 Galilei 1564 年出生于皮萨, 以一种温和的家庭。他的父亲, 文森佐, 是一位音乐家和理论家, 有一个怀疑的思维 - 他的儿子会继承。在古典科目, 如拉丁语, 希腊语和逻辑的教育 (图 6.9a) 加利利奥将成为自然哲学转化为现代科学的关键人物。他的生活与欧洲深度智力衰退的时期相匹配, 因为科学、宗教和政治领域的传统当局面临着从实验研究和数学理性的新形式来解决前所未有的挑战。

他被广泛认为是第一个接受我们现在所称之为 **科学方法**提出假设, 进行实验, 并解释实验结果。雖然這句話 “科學” 到加利利奥去世 1642 年时刻, 一项新的调查方法在整个欧洲都采取了形状。这种方法代表了从中世纪依赖于文本权威和逻辑推迟的根本转变, 到对直接观察、数学描述和实验验证的新重点。

伽利略站在科学、哲学、工程和机构权威的十字路口。他的生活不仅标志着实验机械和现代物理学的黎明, 而且也体现了科学合理化与建立的教义信念之间的紧张局势。

在接下来的, 我们探索了他的职业生涯的弓 - 从他的训练年份和他的著名 (虽然可能是天真的) 实验在 披萨之塔到天上的启示, 挑战了亚里士多德宇宙学, 并引发了天主教会的愤怒。伽利略的 *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (关于两个主要世界系统的对话, 普托莱马和哥本哈根) 和**《关于与力学有关的两门新科学的论述与数学证明》& 地方运动** (关于机械和地方动作的两个新科学的演讲和数学示威) 它们不仅仅是科学文本, 而且是新的传记学的智力显现, 根源于观察和数学抽象。

本节的最后一部分专注于对结构工程师特别重要的一种想法: 规模。伽利略是第一个提出自然不均匀规模的原则, 承认大结构必须面临与小结构基本上不同的机械限制。这一观点最终会在几个世纪后在加迪、伊斯勒和穆斯梅奇的设计实践中响起, 他像伽利略一样通过物理实验和地质直觉寻求结构形状。

因此, 加利利奥的遗产远远超出了他的发现; 它在他先驱的方法中, 他所持有的抵抗力和他帮助开启的结构想象力。

和 2 新科学 数量 结构力学 加利利奥 Galilei (1564–1642) (Galilei, 1638 PDF) 正当被认为是结构力学的创始人, 作为定量科学。他的 **数学演讲和演讲, 关于机械学的两个新科学 & 地方运动** (关于两个新科学的演讲和数学示威)1638 年在加利利奥被家拘留期间发表在莱登, 研究了物质强度。第一次在数学基础上进行结构的机械。

和 “2 新科学” 标题: 动作科学 (电影和动态) 材料力学和结构的科学。后者占据了前两 “日子” 对话和解决工程直接相关的问题: 为什么大结构需要比小结构更有比例的物质? 梁的破裂抵抗如何取决于它的尺寸? 什么决定一个绳子的强度, 一个柱, 一个骨头?

加利利奥对梁的分析 它成为所有随后的灵活工作的起点。他模型了一张梁从墙上投影并在其自由端充电, 承认失败发生在转角围绕内置部分的底边。他的结论 即破裂的荷载是与梁的宽度和深度的平方, 反之亦然是与其长度的比例 是质量准确的, 尽管他认为在整个部分上均匀的 应力是量子错误的。正确的应力分布将不会直到父母、库隆伯和纳维尔在接下来的几个世纪的工作才确定。

也许加利利奥最深入的洞察力涉及规模化法律. 他证明, 地质相似性并不意味着机械相似之处: 在所有尺寸均匀规模的结构因体积而相对较弱。(因此重量) 作为线性尺寸的圆形增加, 而 横截面积 (因此, 力量) 只会像平板一样增加。这个 “四角古布法” 解释为什么大动物比小动物有相对厚的骨头, 为什么巨型昆虫是不可能的, 以及为什么结构设计不能简单地从小型模型到大型建筑物, 而不考虑规模影响。这一实现标志着从实验尺寸规则到解析结构设计的最终突破。

伽利略的方法 结合数学分析与实验观察, 测试理论预测对物理测量 建立了结构力学的范式。他的作品启动了建筑的转变, 从传统和经验引导的工艺到以普遍原则为基础的应用科学。

物理学: 皮萨塔 1581 年, 加利利奥开始在皮萨大学学习医学, 很快就放弃了数学和哲学的道路。尽管他没有学位, 但在 1589 年只有 25 岁时被任命为皮萨数学教授。这个任命反映了越来越多的认识, 数学知识具有实用价值, 即使许多传统学者仍然认为数学是自然哲学的服从。[6]

根據傳達的故事, 但歷史上不確定, 加利利奥證明不同群體的物品落在同樣的速度, 將它們從皮薩的滑雪塔

[6]在现代时代, 这种认可远远超越学术: 数学家不寻常被华尔街公司招聘, 在那里他们的定量分析、斯托克斯特模型和优化方面的专业知识适用于复杂的财务问题。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

下降。这份报告源于维瓦尼 1654 的生物学, **加利福尼亚生命史史的故事**在加利利奥去世后写得很好。无论实验是否发生如所描述, 它捕捉了加利利奥对亚里士多德物理学的挑战的本质。

如 Moody, 1951 加利利奥对自由跌倒实验、抵抗和空虚中的动作的观点不仅由亚里士多德, 而且是中世纪批评者如阿文帕斯和后来的评论家所塑造。

第 1590 章 他的 *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum* 加利利奥在动作上提出了革命性的想法: (1) 物体在相同的速度下跌, 无论质量; (2) 速度 随着时间的推移, 线性增加; 以及 (3) 行程的距离是相当于行程时间的平面。这些洞察力使基础为动态, 并在实验机械的时代被推翻。更重要的是, 他们证明数学关系可以以前所未有的准确性描述物理现象, 提供定量方法的模型, 将现代物理学定义。

加利利奥对阿里斯托利亚正教的公开批评和激烈的辩论风格赢得了他的敌人。1592 年, 他的合同未被更新。

天文学: 对话 同年, 加利利奥在帕多瓦大学获得了更有名的职位, 在那里他一直保持到 1610 年。他的时间是繁荣的: 他教会包装讲座, 出售自己的设计工具, 并提供数学和工程的私人咨询。他也写了 **德拉科学机械**以静态为基础。这项工作展示了数学分析如何应用于实用的机械问题, 将理论知识与工程应用之间的差距结合起来。

1609 年, 加利利奥 (Galileo) 在学习荷兰远程观察的发明后, 建立了一个 望远镜 他的自己的。他的能力甚至让他惊讶。通过它, 他观察了月球的标记表面, 金星的阶段, 在牛路上的数千颗恒星, 以及 - 最令人震惊的是 - 四个月亮围绕木星。

其中最令人困惑的观察是土星, 它似乎通过原始望远镜奇怪地形成。无法解决我们现在知道什么是土星的戒指, 伽利略看到了什么看起来像一个三重行星或手相关术语的行星。根据科学的习俗, 在保持秘密时设定优先事项, 他宣布这一发现于 1610 年使用安格拉姆: **首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學**當被解密時, 發明的 *Altissimum planetam tergeminum observavi* **天文学** ("我已经观察到最高的星球是三重的。"). 这种暗号化方法使天文学家能够要求对发现的偏见, 同时给自己时间来确认他们的观察 - 一个实践反映了早期望远镜天文的竞争性质以及在挑战建立的宇宙信念时所需的谨慎。

这些发现, 发表于 1610 年作为 **西德里奥斯 · 努尼西斯** ("明星的使者"), 震惊了亚里士多德宇宙学的基础。加利利奥与科西莫二世 • 德 • 米迪奇 (Cosimo II de' Medici) 赞美, 称之为月亮。"医学明星," 确保保护和国际名声。这个战略名称描述了近代早期科学进步不仅依赖于发现, 而且也依赖着复杂的保护和政治影响网络。

1611 年, 他被引入了 **林西学院**这是最早的科学社会之一。然而, 争论仍在激烈。

加利利奥的观察支持哥本哈根直升中心主义　這個想法, 地球軌道太陽。但教會最近宣布這一理論是基因的。1616 年, 哥伯尼克斯 **火柴 火车 火箭 火焰** 被放置在 **标签**: *Librorum Prohibitorum*[7] 伯尔林枢机 加利利奥被命令放弃这个想法。

有一段时间, 加利利奥坚持了。1623 年, 巴伯里尼枢机教宗: 一个崇拜者 - 成为教皇乌尔班 八。激励,Galileo 发布 *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano* (关于两个主要世界系统的对话, 普托莱马和哥本哈根),(Galilei, 1632) 图 6.8.

提出为三位交谈者之间的讨论　简介 (亚里士多德) 神圣 (中性 Layman) 和救世主 (哥本哈根) 对话是任何东西, 除了不公平。单独的 Simplicio 名称 ("简单的") 背叛了作者的立场。

爱因斯坦后来写道:

> 在这里, 一个人被揭示了谁拥有热情的意志、智慧和勇气站起来作为理性思维的代表。
>
> Einstein, 1954 Ideas and Opinions

[7]和 **标签**: *Librorum Prohibitorum* 由罗马征服所维护的, 在历史上并不独一无二。类似的努力, 以压制分歧或意识形态危险的文学, 是由全权政权, 特别是纳粹, 谁组织书籍燃烧和保持黑名单。"非德国" 作者, 以及苏联, 谁审查了侵略性文本和限制禁止的作品限制 "特殊存储" 部分 (**斯特克兰**) 在图书馆里。最近, 美国在当地层面出现了书禁令的复兴, 经常针对种族、性别和性别的作品　特别是在特朗普时代塑造的政治气候　引发对审查和知识自由的新担忧。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

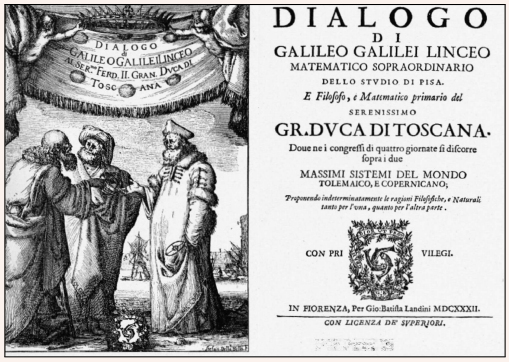


图 6.8: 加利利奥的对话 (Galilei, 1632)

加利利奥把他的手打过了。教會並沒有有趣。

主条目:Inquisition 不久之后, 出版了《 **对话**，该 注入 它被禁止出售, 加利利奥被命令去罗马进行审判。1633 年 6 月, 他被判入狱。“可疑的,” 他的监禁被立即转移到永久的家务拘留。他被迫公开引用他对海洛中心主义的观点　也许传说有, 在他的审判结束时, 他模仿了反对的话语。**清洁的动作** (“然而, 它仍在移动”)[8]. 伽利略的审判成为科学与机构权威之间的关系的一个定义时刻, 使他成为智力自由的烈士, 同时也展示了挑战建立正统的个人成本。[9]

1542 年由教皇保罗创立的罗马征服 三、这是一个系统的法院, 旨在根源异教和保留天主教正统, 特别是在反对新教改革。与以前的中世纪印基斯蒂安不同, 它在圣办公室的集会下被集中化, 并直接行使教宗监督。尽管它旨在防止教义错误, 但它还压抑了分歧, 审查出版物, 并打破了科学与宗教之间的界限。加利利奥案已成为其最著名的事件之一, 象征自由调查与机构权威之间的冲突。

方法: 演讲 1634 年, 他被封锁在阿塞特里的别墅。加利利奥开始工作, 将成为他的最后和可能最重要的书: **《关于与力学有关的两门新科学的论述与数学证明》& 地方运动** (关于机械和地方动作的两个新科学的演讲和数学示威). 他的治疗是他在职业生涯中早些时候开发的机械。这项工作对工程科学的发展比他的天文发现更有影响力, 因为它将数学基础用于理解物质行为和结构反应。

手稿 (Galilei, 1638), 显示在 图 6.9b 它被意大利贩卖, 并于 1638 年由 艾尔扎维尔 在 Leyden (荷兰) 超越印第安人的范围。

加利利奥死于 1642 年 4 年。由于他的判决, 他被埋在一个黑暗的地方, 直到他在 1737 年重新审查。

讽刺的是, 印第安人没有对新书采取任何行动。事实上, 当五十本书到达罗马的书店时, 它们迅速出售。

不同于 **对话**讨论哲学和神学问题, **演讲** 在物理机械的范围内保持安全, 如其标题所示: **机械与地方动作** (桌子 6.2). 新工作在色调上更技术, 部分针对工程师。通过专注于实际的机械问题而不是宇宙学猜测, **演讲** 避免了造成的神学争议。**对话** 如此危险。

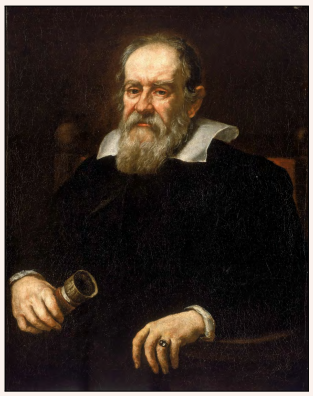
二个主题突出于结构工程师: 彩虹的强度 (§7.2.2) 和扩展的概念。后者是至关重要的。

尺寸的概念是现代结构工程的基础。它肯定是由加利利奥首次引入的 - 也许不是我们现在使用的算法或尺寸意义。他是第一个意识到, 自然界中的小生物或物体不仅仅是大生物的下层版本。

[8]自 1870 年代加利利奥审判文件的完整出版以来, 对他的谴责的全部责任通常已归咎于天主教会。然而, 这一点隐藏了学术哲学家所扮演的有影响力的角色, 他们首先说服神学家将加利利奥的科学理论与异教相冲突。1979 年, 教宗约翰 • 保罗 二开始了对加利利奥的审判进行正式调查, 最终在 1992 年一份教宗委员会报告中得出结论, 承认梵蒂冈的错误。

[9]常见的是 1925 年目标。“猴子审判” 在田纳西州, 在公立学校的进化教学受到国家法律的挑战, 强调科学思想和社会或宗教规范之间的类似紧张局势。不幸的是, 在 2025 年, 特朗普下, 我们可能会见证类似线路的进一步复兴, 例如在公共图书馆中审查书籍, 否认建立的科学, 并拒绝疫苗的已证明价值。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 天文学家、物理学家、工程师——杰出的博学家



(b) 關於兩個新科學的談話 (Galilei, 1638)

图 6.9: 加利利奥 Galilei

在 **演讲**, 提议 IX (日二), 加利利 - 通过萨尔维亚提 - 州:

> 有一次, 我拿起骨头的形状, 延长了三倍。[图 6.10] 然后厚得如此之大, 以至于它在其大动物中相对较小的骨头为小动物服务: 这里是图像; 你可以看到骨头的形状是多么不比例..... 他会被自己的体重打破, 倒下。
>
> Galilei, 1638 Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

表 6.2: 加利利奥的四天对话和演讲

	对话 (Galilei, 1632)	演讲 (Galilei, 1638)
标题	关于两世界体系的对话	关于两个新科学的演讲和数学示威
主条目	波多利亚人和哥本哈根人	机械与地方动作
印刷在	意大利	拉丁语
日子		
1	反对亚里士多德物理学	身体对分离的抵抗力
2	内心法则	共识的原因
3	天文现象分析	自然加速运动
4	太阳系的哥本哈根解释	火箭的动作

加利利奥缺乏正式的工具 尺寸分析后来将引入的 Vashy, 1892. 然而, 他明白了核心想法: 一个骨头支持的重量随着体积增加。(L^3), 而它的强度只会随着横截面积的增长 (L^2). 因此, 以 3 的因素扩展需要骨头超过 3 倍的宽度..... 大约 $3^{3/2} \approx 5$ 到 支座 添加重量。[10]

[10]伽利略的定性理性预测现代 **尺寸效应** 概念的正式化 Bažant, 1984 改造的衍生品 Saouma and Barton, 1994, 量化结构的名义强度系统减少, 随着它们的大小增加, 应用从断裂力学到规模规则在四分之一材料。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



图 6.10: 加利利奥的骨折 (Galilei, 1638)

他的洞察力是革命性的, 因为它表明自然形状不是自愿的, 而是代表机械限制的最佳解决方案, 一个原则后来会激发几代工程师和建筑师的灵感。

这种洞察力 地质相似性导致结构差异性 是革命性的。对于工程师和建筑师来说, 它打开了物理建模的门。

6.6.3 雷内 • 德卡特 (1596 – 1650)

雷内 • 德卡特 (René Descartes) 是古典哲学与现代科学之间的过渡人物。最著名的哲学论文 **科吉托, 埃尔戈索姆** [11] 德卡特深深地影响了机械和数学, 通过他的理性主义框架和对地质和物理学的基本贡献。他的系统的知识方法, 强调方法质疑和数学理性, 为随后的科学革命提供了哲学基础。

地质学 第 1637 章 工作 **地质学** (Descartes, 1637b) 以其更哲学的附件 **方法的演讲**德卡特介绍了分析地质学 - 将算法与欧克利迪亚地质相连 (§6.2.3) 通过在协调系统中代表曲线作为算法方程式。这种创新使计算的后续发展成为可能, 并在数学术语中成为机械的正式化至关重要。卡特西亚协调系统 提供必要的数学语言来定量地描述运动和力量关系, 使可能的解析机械将由纽顿, 尤勒和拉格兰奇开发。

德卡特还提出了三个动作法则, 强调在缺乏外部力量的情况下无情的动作 - 从阿里斯托利亚动态中显而易见的脱离。尽管他的法律最终被纽顿的更准确的表达所超越, 但德卡特为自然观视为由机械原则统治的基础, 这种观点是由像 Huygens、Leibniz 和 Bernoullis 这样的思想家采用和精化。

德卡特也引入了一种早期保守原则。说上帝保留同一总体。“动作数量” 在宇宙中。尽管他的斯卡拉概念 (质量 次速度, 无论方向) 物理上是错误的 - Huygens 后来会显示, 冲突保持动力作为一个 向量 的数量建立了机械互动遵守保养法则的预期, 这将是解析机械开发的核心指导原则。

他的 Vortex 理论 行星运动, 解释天体机械通过旋转物质而不是在远程行动主导大陆物理学, 直到纽顿 **原则** 提供数学上级的替代品。尼古丁重力对卡特西亚 vor 的最终胜利形成了十八世纪的方法论辩论: 机械学家应该寻求机械解释。(联系力量) 或者接受不解释的力量的数学描述? 这种紧张局势一直持续到埃勒和拉格兰奇, 只有在十九世纪的领域理论才完全解决。

与伽利略不同, 他的物理学根源于实验观察, 德卡特从第一原则中赢得了偏见的理性。他坚持一个机械主义、决定的宇宙。深深地影响了 17 世纪的智力气候。这种哲学框架证明是对自然现象的数学描述的接受至关重要, 即使这些描述与常见意义或宗教教义相矛盾。因此, 德卡特不僅要為數學創新而獲得信用, 還要為古典機械的概念 基础 形成。

[11] **科吉托, 埃尔戈索姆** (拉丁语为 “我想, 所以我”) 这是雷内 • 德卡特哲学的基本陈述, 首先用法语说: **我想, 所以我是** 第 1637 章 工作 **方法的演讲**后来, 在拉丁语中 **哲学原则** (1644). 它表达了思想的行为是人类存在不可否认的证据。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

6.6.4 克里斯蒂安・休根斯 (1623–1695)

克里斯蒂安・胡格森出生在一个独特的家庭。他的父亲, 康斯坦蒂恩・休根斯, 被称为 “荷兰文学史上最辉煌的人物,” 基督徒自己被称为 “荷兰哲学家的王子, 也是十七世纪最伟大的科学家之一。” 康斯坦蒂恩是一位外交官, 他研究了自然哲学, 并在詹姆斯统治期间在英国度过了一段时间。I。通过他的父亲的联系, 克里斯蒂安获得了早期访问他时代的顶级科学圈。这个特权背景描述了十七世纪的科学网络经常依赖于社会联系和家庭地位, 即使荣誉和发现对科学声誉越来越重要。

直到十六岁, 克里斯蒂安学到地质学, 建造机械模型, 并学习社会改进, 如玩彩票。他的数学教育受到德卡特的强烈影响, 他是偶尔访问 Huygens 家庭的人, 并对男孩的智力发展感兴趣。

胡伊格斯继续学习法律和数学, 从 1647 年到 1649 年继续他的研究。通过他的父亲与法国多元主义者马林・梅森的联系, 梅森和年轻的胡伊根之间的交往开始了。Mersenne 挑战了他几个问题, 其中包括确定两个支持者之间悬挂的绳子的形状。雖然 Huygens 沒有解決這一點。**卡特里 凯特纳问题**他成功地解决了一个相关的问题: 如何分配重量沿着绳子, 以便它采取一个模拟形状。这不仅表明了他的发明性, 而且早期与地质和物理界面问题的参与。这项早期工作表明, 理论数学问题往往是从实用的机械挑战中产生的, 这是一种将许多 17 世纪科学的特点。[12]

范围和轨道: 望远镜、Pendulums 和 Light 克里斯蒂安・休根斯是十七世纪最原始的科学思想之一, 他的作品围绕了数学、天文学、机械学和光学领域。他的职业生涯反映了一个不断的探索, 从观察天体通过精致的望远镜仪器, 到发明和分析时钟的准确时间保留, 最后到波光理论。这种进步　从望远镜到阴道, 从阴道到光线　不仅描绘了他的智力发展的轨道, 而且还反映了自然哲学向数学准确性和物理模拟的更广泛过渡。胡金斯模仿了 17 世纪出现的新型科学家: 一个将理论复杂化与实用工程技能结合在一起的人, 并且在纯数学和应用机械之间自由移动。[13]

海根的广泛创新, 包括发现土星最大的月亮, 建造第一款实用的行走时钟, 以及现在所谓的波光学的海根原则的关节, 使他成为现代科学的出现中的一个基本人物。他的作品反映了在卡特西亚传统中根深蒂固的地质优雅和实验性清晰度的推动力, 但发展到更具动态的机械, 后来由纽顿正式化。雖然經常被紐頓的鼓動影響力超過, 但 Huygens 提供了一個替代和多種方式補充物理法則的觀點 - 在那裡波浪、曲線和振動中間階段。

从望远镜到 Pendulums: 时间维护和 奥斯基拉托时钟 天文学工作需要准确性 时间保留 (看见 §6.6.6) 而这个挑战 呼吁 Huygens 直接解决这个问题。1656 年, 他专利了第一个通道时钟, 显著提高了时间测量的准确性。他的探险与他对循环的数学工作密切相关, 这是他在帕斯卡挑战后研究的一个曲线。相信一个带有更大的螺旋弓的通道会更有用于船上,Huygens 发明了 循环性通道. 他建造了几个长时钟, 以确定海边的长度, 这些时间在 1662 年和 1686 年进行了海上试验。这些努力在他的研讨会工作中高峰, *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum* 在其中, 他描述了 pendulum 运动的理论。这项工作是先进数学的第一项成功应用之一, 以解决全球意义上的紧张实用问题。

学术与国际科学实践 1661 年,Huygens 访问了伦敦, 在那里他收集了关于新成立的皇家社会的信息,1663 年他被选中。他是皇家社会的成员, 也是 **阿卡德 é 我的科学** 使他成为第一个真正的国际科学家之一, 能够在全国范围内促进沟通和合作。

1666 年, 他接受了 Jean-Baptiste Colbert 的邀请, 帮助形成新创作。**阿卡德 é 我的科学** . 到达巴黎时, 他发现该机构还没有运营。第一次会议在科尔伯特的图书馆举行, 后来转到 **图书馆 è 王之人**在那里,Huygens 接收了居住。他担任领导职位, 并帮助组织学院, 基于他对英国皇家社会的运作知识。

延伸体的动态: 循环运动和组合 Pendulum 克里斯蒂安・休根斯 (1629–1695) (Huygens, 1986) 对动态做出重要贡献 在时间变量下, 为结构分析设立了基本概念。他的 **奥斯基拉托时钟** (时钟 Pendulum) 出版于 1673 年, 是 17 世纪数学物理学的硕士作品, 结合实用发明与深入理论分析。

[12]现代的结构工程平行可以在工作中找到 Cross, 1932 其时刻分配方法 (1930) 提供优雅的 解析解 为分析无限框架的实用挑战, 或 Przemieniecki, 1968, 提供一个系统的解析框架复杂的航空空间和民间结构, 甚至 Saouma and Perotti, 2004 模拟碱性集成反应。在所有情况下, 实用的设计需要激发了强大的新的解析工具的开发。

[13]这种理论和实践的整合后来将由像 Claude-Louis Navier 这样的人物推进。(看见 §6.7.3 因其失败的桥梁设计而), 谁结合了数学的严格与应用在结构工程, 以及其他十九世纪的机械师。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

对于机械学更重要的是,Huygens 分析了圆形路径的身体运动, 从而产生了中心力量的表达。: $F = mv^2/r$. 这一结果, 对旋转运动的理解至关重要, 直接适用于涉及旋转机械、曲线运动和动态加载的结构问题。

Huygens 还开发了 oscillation center 的概念 一个延伸身体的 质量 可以集中在没有改变它的 oscillating 期限的情况下 预测用于 结构动力学 中使用的同等系统思想。他的作品在合成曲线上建立了分析硬体的动态方法, 直接扩展到结构性单元的振动分析。

和 **奥斯基拉托时钟** 此外, 它还包含了加速度中心的公式的第一个正确衍生, 并在曲线的进化和涉及方面取得了重要成果。Huygens 的数学严格与实用应用的组合模拟了科学与技术之间的新兴关系, 这将是结构工程的特点。

从摆到光：波与惠更斯原理 1678 年,Huygens 引入了后来被称为 *Huygens* **的原则**每一个光明的波前线的每个点都作为次要区域波线的来源, 而新波前面是这些波线的一个封面。这种建造使 Huygens 能够产生反射和反射的法则, 并解释光线和空间传播。

在他的一生中,Huygens 经历了延长的旋律, 在其中他产生了一些小, 随后是强烈的创造性时期 - 可能表明双极趋势, 在现代诊断术语。奇怪的是, 与许多当代人不同。(德卡特, 莱布尼兹, 纽顿),Huygens 在物理或哲学调查中表现出很少的兴趣。他的重点仍然坚定地关注可观察的现象和数学法则。这种实验性焦点将成为工程对机械的方法的特征, 这将在下个世纪出现。

6.6.5 布莱斯 帕斯卡 (1623–1662)

Blaise 帕斯卡出生于 1623 年在克勒蒙特 - 费兰, 成为一个受养的家庭。他的父亲, 埃蒂安 • 帕斯卡, 一名法学家和业余数学家, 在帕斯卡的母亲早逝后直接承担了他的教育责任。帕斯卡的数学天赋在一个非常年轻的年龄表现出来: 他的早期青少年, 他独立重新发现结果在埃克利德地质学, 并在十六岁时, 他写了一篇有影响力的论文关于康尼部分吸引了迪卡特的注意力。这种早期沉浸在数学中, 与促进智力独立的家庭环境相结合, 形成了帕斯卡的理论、实验和哲学反映的终身融合。

实验, 压力, 和液体的性质 他的早期工作为流体力学和压力理论奠定了基础。作为一个青少年, 他设计和构建了一个机械计算器 - 帕斯卡林 - 是第一个设备旨在自动化算法操作。在 20 年代, 他对大气压力进行了突破性的实验, 延伸了托里克利的工作, 并证明大气压在高度下跌, 通过测量波米特变异在 Puy de Dôme 上升时。

這些實驗決定挑戰了阿里士多德教義, 否認真空的存在。帕斯卡 表明, 它是空气的重量, 而不是任何内在的空白恐惧, 支持水泥的 柱 在一个巴罗米特。他的作品模拟了一个新的科学态度: 数学理性, 由精心设计的实验而不是权威或定性论点引导。

水化学与帕斯卡的法则 第 1647 章 他的 **利克人平衡条约**帕斯卡尔正式化了水位学的原则, 并引入了现在被称为帕斯克尔的法则: 对封闭液体施加的压力在各个方向上无限地传递。这一结果为流体静态提供了统一的原则, 并成为水力设备的基础, 从压缩和升降到随后的工程应用涉及流体传输力量。

帕斯卡 的 表述 将 压力 视为一个在 流体 中间的规模领域, 独立于容器形状 - 一种概念性动作, 将 流体力学 与物理现象的出现基于领域的描述相匹配。雖然沒有後來的部分差別方程式的機器, 但他的理性預測了由 Euler 和 Navier 更充分發展的持續方法。

机械发展中的立场 虽然帕斯卡的工作在狭窄的意义上不直接与结构机械有关, 但他的压力和液体分析对受液体力量的结构设计和分析具有持久影响, 包括泥土、维修墙壁、水力机械等。流体 - 结构互动问题。他的贡献构成了智力基础的关键部分, 在其中伯诺利斯、尤勒和纳维尔将建立系统的流体动作和压力理论。

也许更重要的是, 帕斯卡的数学理论与实验实践的整合提供了工程科学如何进步的模型: 通过抽象理性和实验验证的系统互动。这种方法遗产 - 将计算与实验联系起来 - 成为现代机械和工程科学的定义特征 [14].

[14]在现代语言中, 这被 Thacker et al., 2004.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

6.6.6 罗伯特 • 胡克 (1635–1703)

罗伯特 • 胡克出生于 1635 年, 在威特岛上, 是一个温和的英格兰牧师的儿子。作为一个孩子, 身体上很脆弱, 并不期望到成年才生存, 他最初训练绘画和机械技能而不是经典奖学金。他的父亲去世后, 胡克搬到伦敦, 他的天赋引导他到领先的知识分子的注意力。他在威斯明斯特学校学习了很短的时间, 后来在牛津工作, 在那里他担任罗伯特 • 博伊尔的助理。这种早期沉浸在实验实践、工具制作和实用的解决问题中, 形成了胡克对观察、装置和机械天才的终身重点。

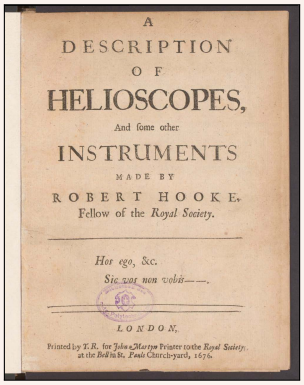
罗伯特 • 胡克 (Robert Hooke) 是十七世纪科学中最令人兴奋的、悲剧地被低估的人物之一。如果他没有被牛顿过度夸张和反对, 他可能会被记住为机械科学的中心巨人。胡克非常多样: 物理学家, 天文学家、发明家、显微镜学家和工程师。如同长期 **实验的治愈者** 在皇家社会, 后来是其秘书, 他在定义当时的实验文化方面是有道德的。他在皇家社会的角色使他成为欧洲科学沟通的中心, 在那里他不仅开展了自己的研究, 而且促进了其他人的工作, 并帮助建立实验验证的议定书, 成为现代科学的核心。他为弹性、天文学、时间学和显微学做出了先驱贡献, 其中许多洞察力仍然不发达或被其他人信任。本节简要审查了他对机械和工程的贡献, 特别关注他在时间维护和重力争端与牛顿的参与。

长度挑战 海上航行依赖于天空技术。虽然宽度可以用一秒钟来测量太阳或月亮的高度在已知时间, 但确定海上长度更难 - 需要一个非常准确的时钟来比较当地时间与参考梅里迪安。在 17 世纪和 18 世纪, 这种可靠的时间保存还无法实现。无法确定长度, 导致了许多船舶故障和政治焦虑。这个问题描述了实际挑战往往导致理论创新, 因为紧急需要准确导航激发了时间学和天空机械的进步。

这种航行挑战已成为国家重要事项。1714 年, 英国议会通过了 **长度行动** 鼓励创新长期决心。它提供了对任何实用的测量长度准确的海上方法的重大货币奖励, 以及每年小型奖学金给研究人员在世界地图工作。[15].

胡克和时间维护的机械 确定长度的关键要求之一是准确的时间测量, 使时间学成为科学创新中心。基于加利利奥的想法, 将 pendulum 的以色列特性应用到时间保存中,Christiaan Huygens 成功实施了一个 pendulum 时钟, 使用冠轮逃避。(看见 §6.6.4). 胡克反过来提出了一个根本不同的解决方案: 一个春天控制的平衡轮子, 配备了新的逃避机制。

1675 年, 胡克出版了他的 *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*, 一个处理专注于望远镜仪器和时间学, 特别是发明的安克尔逃避和春季规定的平衡轮。虽然是英国早期科学出版物的典型, 但该作品缺乏解释数字。一个视觉解释胡克的机制后来重建了 Hall, 1951, 如在 图 中显示 6.11b.


A
DESCRIPTION
OF
HELIOSCOPES,
And ſome other
INSTRUMENTS
MADE BY
ROBERT HOOKE,
Fellow of the *Royal Society*.
Hor ego, &c.
Sic vos non vobis——.
LONDON,
Printed by *T. R.* for *John Martyn* Printer to the *Royal Society*, at the *Bell* in St. *Paul's* Church-yard, 1676.

(a) 胡克的 1675 封面 **关于** *Helioscopes* **和其他工具的描述** Hooke, 1676

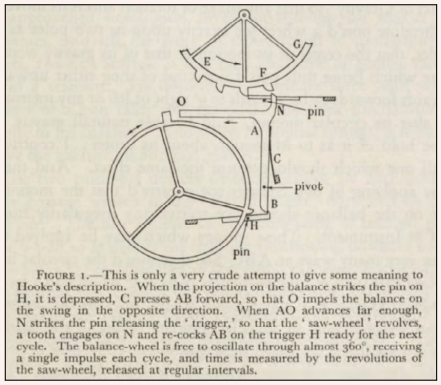


FIGURE 1.—This is only a very crude attempt to give some meaning to Hooke's description. When the projection on the balance strikes the pin on H, it is depressed, C presses AB forward, so that O impels the balance on the swing in the opposite direction. When AO advances far enough, N strikes the pin releasing the 'trigger,' so that the 'saw-wheel' revolves, a tooth engages on N and re-cocks AB on the trigger H ready for the next cycle. The balance-wheel is free to oscillate through almost 360°, receiving a single impulse each cycle, and time is measured by the revolutions of the saw-wheel, released at regular intervals.

(b) 胡克在一小时内逃脱的解释 Hall, 1951

图 6.11: 胡克和手表

[15]这一努力并不与当今高级技术奖项不同, 例如 DARPA 机器人挑战 - 将战略军事需求与基本科学研究相结合。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Hooke 的逃避设计旨在提供比 pendulum 更紧凑、更强大的解决方案, 使其更好地适合船舶使用。尽管 Huygens 最终成功地实施了海上试验值得倾斜的时钟, 但胡克在时间学方面的创新仍然有影响力。他的工作有助于为平衡轮时和海洋时间计的未来发展设置基础。

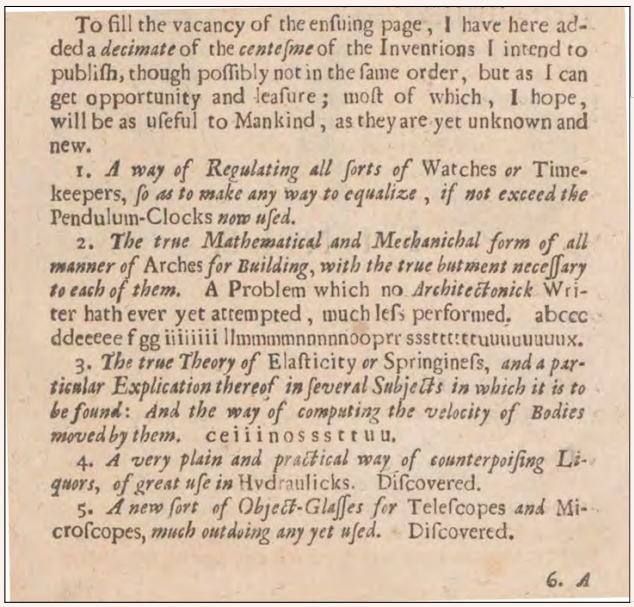
机械与新顿火焰 胡克的科学洞察力远远超出了时间保存。他是最早的思想家之一, 将天体运动作为机械问题。他提出, 行星运动是由线性内向运动和吸引力向轨道中心的结合产生的。他还承认, 这种吸引力的力量可能会因距离而有所不同。然而, 胡克无法得出精确的数学关系或证明基普勒预测的直径轨道。这个限制描述了数学复杂化在将物理洞察转化为严格的科学理论中发挥的关键作用。

当纽顿发布了他的第一个体积时 **哲学** *æ Naturalis Principia* **数学** 1686 年, 胡克声称他以前给了纽顿普遍重力的基本概念。纽顿反过来强烈否认了这一要求, 并指出胡克没有提供任何严格的衍生或地质证据。争议迅速升级。纽顿已经对胡克的早期批评感到愤怒, 利用这个机会尽量减少胡克的一份贡献, 并从记录中删除他的影响力。他们的竞争成为科学史上最令人震惊的之一。纽顿对胡克的诱惑, 甚至超越了坟墓。(Westfall, 1980).

尽管他与牛顿的优先争论有争议, 但现代历史学家承认胡克在重力理论的核心中抓住了物理洞察力, 但缺乏数学工具来正式化它。他的直觉预测了逆方法和轨道机械, 使他成为经典机械进化中的基本 - 如果不信任 - 形象。(Westfall, 1980; Inwood, 2002).

兩個改變領域的安格拉姆

關於 Arches 对于我们结构工程师来说, 最有意义的是胡克在 1675 年出版物的附件中所写的。(查看 图 6.12).


To fill the vacancy of the enſuing page, I have here added a *decimate* of the *centeſme* of the Inventions I intend to publiſh, though poſſibly not in the ſame order, but as I can get opportunity and leaſure; moſt of which, I hope, will be as uſeful to Mankind, as they are yet unknown and new.

1. *A way of Regulating all ſorts of* Watches *or* Time-keepers, *ſo as to make any way to equalize, if not exceed the* Pendulum-Clocks *now uſed.*

2. *The true Mathematical and Mechanichal form of all manner of* Arches *for Building, with the true butment neceſſary to each of them.* A Problem which no *Architectonick* Writer hath ever yet attempted, much leſs performed. abccc ddeeeee f gg iiiiiiii llmmmmnnnnnoopr ssssttttttuuuuuuuux.

3. *The true Theory of* Elaſticity *or* Springineſs, *and a particular Explication thereof in ſeveral Subjects in which it is to be found: And the way of computing the velocity of Bodies moved by them.* ceiiinosssttuu.

4. *A very plain and practical way of counterpoiſing Liquors, of great uſe in* Hydraulicks. Diſcovered.

5. *A new ſort of Object-Glaſſes for* Teleſcopes *and* Microſcopes, *much outdoing any yet uſed.* Diſcovered.

6. *A*

(a)

To fill the vacancy of the ensuing page, I have added a decimate centesme [a thousandth] of the Inventions I intend to publish, though possibly not in the same order, but as I can get opportunity and leasure; most of which, I hope, will be as useful to Mankind, as they are yet unknown and new.

2. The true Mathematical and Mechanical Form of all manner of Arches for building with the true abutment necessary to each of them, a Problem which no Architectonick Writer hath ever yet attempted, much less perform'd

abcccddeeeeefggiiiiiiiillmmmmnnnnnoopprrsssttttttuuuuuuuux

3. The true Theory of Elasticity or Springiness, and a particular Explication thereof in several Subjects in which it is to be found: And the way of computing the velocity of Bodies moved by them. *ceiiinosssttuu.*

(b)

图 6.12: 胡克的 1675 个字符 *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676)

令人惊讶的是, 在这本专门用于手表和时间保留的书中, 胡克包含了两份声明。(可疑三) 主要科学原则 [16]. 需要填补下面的页面空白, 胡克添加了一份他打算发布的十个发明列表, 其中四个特征性地被暗号为动画。[17]

[16] 与 Fermat 不同, 他 1637 年左右写在一份副本的边缘。**算法** 他有证据 (是没有存在的 $n \neq 2$ 这样的那 $a^n + b^n = c^n$) 但是, 它太大了, 以便在边缘上匹配。

[17] 一个字母是由重组另一个人的字母形成的单词或句子, 通常使用所有原始字母一次。在胡克的时代, 信件 u 和 v 被用来交换, 以便标记 u 或共识 v. 当纽顿使用一 拉丁文的传记 句子 [18] 胡克使用了拉丁语的字体。两人都试图 “隐藏” 他们的发现, 特别是为了确保优先而延迟披露。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

一个他在职业生涯中所喜爱的设备, 以确保优先事项, 同时延迟完整披露。四人中, 他后来只揭示了两个人; 其余的人至今仍然不受记录。第一個解析的安格拉姆對結構工程師有關, 第二個對機械學家有關。

胡克的第一张动画写道:

> **以此为主, 以此為主。**
>
> Hooke, 1676 A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

直到胡克去世后, 他的执行人理查德 • 威勒才揭示了未加密的版本。(Hooke, 1705):

> **此分類上一篇**:*Sic stabit contiguum rigidum inversum*[a]
>
> [a]在拉丁文中, 字母 “u” 和 “v” 可交换。
>
> 正如一个灵活的索挂着一样, 逆转, 站着一个拱的触摸片。
>
> Hooke, 1705 The Posthumous Works of Robert Hooke

换句话说, 一个拱的理想形状正是一个自由挂着的绳子的形状 - 只转向后面。胡克明白, 建筑材料可以抵抗压缩, 但不是紧张, 而绳子是相反的。这种对荷载路径和形状寻找的洞察力仍然是结构工程的基础。该原则后来将激发几代建筑师和工程师, 从克里斯托弗 • 威伦的设计圣。保罗大教堂到安东尼 • 加迪的革命大教馆在圣家里。

当时, 但是, 胡克的洞察力没有立即影响。他的密码表述, 缺乏编写和有限的传播意味着, 结构性影响被他的当代人大多忽略。直到 18 世纪, 挂链和稳定的架子之间的关系才被研究得更严格 - 主要是由 **波兰**, 谁分析了圣的鼓线。彼得的坟墓 后来, 这些数字如 **科尔曼** 和 **海曼** 这将使胡克的观察更加清晰的数学和图形焦点, 并在马索尼亚结构理论中占据其地位。基督教灵感的结构正在讨论中 §15.5.1.

> **有关分析细节，请参见** *§30.3.3*

在 Springs 第二个图表是关于胡克在机械学中最常记得的: 强度和位移在弹性身体之间的线性关系。

与第一张安格拉姆不同, 它仅以后世方式解决了, 而第二张是胡克自己在他的书中揭示的。*Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies* (Hooke, 1678), 如在 图 中显示 6.14. 该出版物总结了胡克对弹性材料的实验结果, 并首次标志着固体的弹性行为被科学讨论。

胡克在 1675 年首次宣布发现。[19] 在他的附件中 *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* (Hooke, 1676). 关心保障优先事项, 他没有明确地提到法律, 而是加密它为:

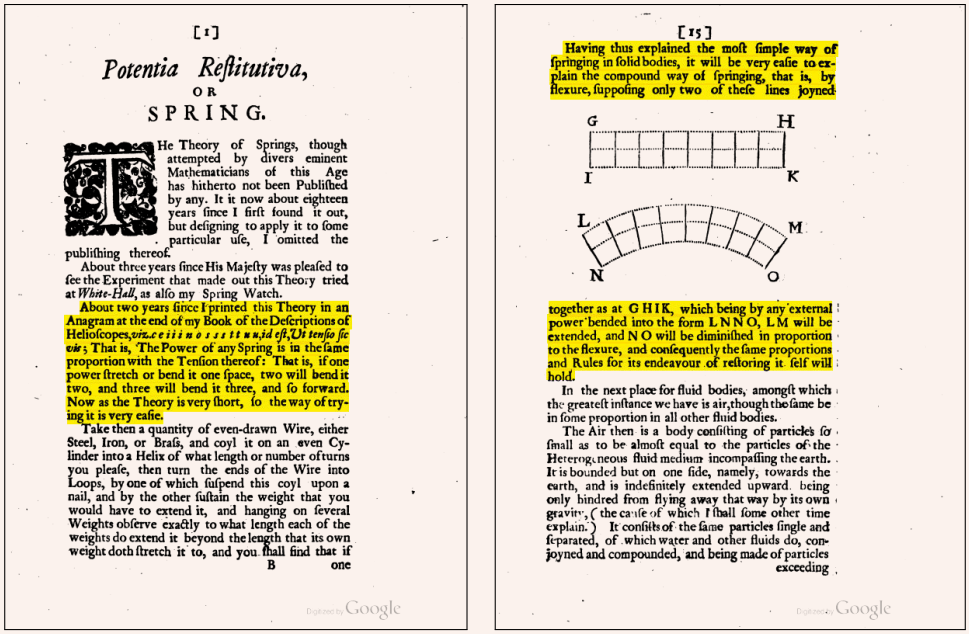
> **天文台**
>
> Hooke, 1676 A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments

这个解决方案发生了三年后,1678 年。[20]. 胡克将其解密为:

[19]和 *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments* 印刷日期为 1676 年, 但实际上分发于 1675 年 10 月。

[20]与现代研究人员争取出版不同, 在 17 世纪和 18 世纪推迟披露并不异常。一个已知的后来的例子是达尔文, 他在 1830 年代末开发了他的进化理论, 但等到 1859 年出版。**物种的起源** 一個約二十年的延遲。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



[1]

Potentia Reſtitutiva,
OR
SPRING.

THe Theory of Springs, though attempted by divers eminent Mathematicians of this Age has hitherto not been Publiſhed by any. It it now about eighteen years ſince I firſt found it out, but deſigning to apply it to ſome particular uſe, I omitted the publiſhing thereof.

About three years ſince His Majeſty was pleaſed to ſee the Experiment that made out this Theory tried at *White-Hall*, as alſo my Spring Watch.

About two years ſince I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Deſcriptions of Helioſcopes, *viz. ceiiinosssttuu, id eſt, Ut tenſio ſic vis*; That is, The Power of any Spring is in the ſame proportion with the Tenſion thereof: That is, if one power ſtretch or bend it one ſpace, two will bend it two, and three will bend it three, and ſo forward. Now as the Theory is very ſhort, ſo the way of trying it is very eaſie.

Take then a quantity of even-drawn Wire, either Steel, Iron, or Braſs, and coyl it on an even Cylinder into a Helix of what length or number of turns you pleaſe, then turn the ends of the Wire into Loops, by one of which ſuſpend this coyl upon a nail, and by the other ſuſtain the weight that you would have to extend it, and hanging on ſeveral Weights obſerve exactly to what length each of the weights do extend it beyond the length that its own weight doth ſtretch it to, and you ſhall find that if

B one

[15]

Having thus explained the moſt ſimple way of ſpringing in ſolid bodies, it will be very eaſie to explain the compound way of ſpringing, that is, by flexure, ſuppoſing only two of theſe lines joyned

together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminiſhed in proportion to the flexure, and conſequently the ſame proportions and Rules for its endeavour of reſtoring it ſelf will hold.

In the next place for fluid bodies, amongſt which the greateſt inſtance we have is air, though the ſame be in ſome proportion in all other fluid bodies.

The Air then is a body conſiſting of particles ſo ſmall as to be almoſt equal to the particles of the Heterogeneous fluid medium incompaſſing the earth. It is bounded but on one ſide, namely, towards the earth, and is indefinitely extended upward being only hindred from flying away that way by its own gravity, (the cauſe of which I ſhall ſome other time explain.) It conſiſts of the ſame particles ſingle and ſeparated, of which water and other fluids do, conjoyned and compounded, and being made of particles exceeding

Digitized by Google

图 6.13: 胡克的灵活振动图像 **重复潜力** (Hooke, 1678 PDF)

特纳西奥 · 西克 · 维斯

如延伸, 如力量。

Hooke, 1678 PDF Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

虽然这个时代的数学家尝试了《斯普林斯理论》, 但到目前为止, 没有人发表。我第一次发现它已经大约十八年了, 但为了将其应用于某种特殊用途, 我忽略了出版证据。

大约三年后, 他的陛下很高兴看到这项理论在白洞中被试验的实验, 以及我的春天时钟。

大约两年后, 我在我的书《希利奥斯科的描述》结束时在一张安格拉姆中打印了这项理论。**天文台** ID 是 **特纳西奥 · 西克 · 维斯**也就是说, 任何春天的力量与它的紧张相同: 即, 如果一个力量伸出一个空间, 或者把它绑在一个空间上, 两者将把它捆绑在两个空间上; 三者将它捆綁在三个空间上。现在, 因为理论很短暂, 试验方法非常简单。

拿起 20 或 30 或 40 英尺长的绳子, 并将其顶部粘在一个指甲上, 另一端粘在一块岩石上以获得重量: 然後, 用一對同步, 從地面或地板下方取出階段底部的距離, 並將所述的距離放下; 然後將重量放在所述階段中, 並測量所述行列的幾個伸展。把它们放下。然后比较该行的多个伸展, 你会发现它们将始终携带相同的比例, 重量使它们。

Hooke, 1678 PDF Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies

胡克的《滑雪法》的经典声明, 如 **重复潜力**, 显示在 图 6.13.

标志性的春季图像 胡克主要关心设定对普遍自然法的优先事项, 而不是提供教学或频道实验图像。几乎二十年前发现了法律, 以加密形式发表它作为一个图表, 并在皇家社会面前公开展示它, 它的目的是说一般性

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

而不是教学。因此, 胡克不作为一个单一的设备, 而是作为一种广泛的恢复现象类别, 包括金属线条、伸带线条, 木材, 振动线条等, 观察平衡线条和波斯, 甚至是空气的弹性。因此, 他的数字描述了多种物理实现和地质结构 - 长度、区域、功率集成和速度 - 空间关系 - 比单一的图形更为细致。

因此, 毫不奇怪的是, 现在熟悉的质量 - 春季图通常与胡克的法则相关的图表在第一版中没有出现。**重复潜力** (Hooke, 1678). 尽管有很大的努力, 但我无法追踪图中显示的标志性图像的起源。6.14. 对胡克的贡献似乎源于 Andrade, 1950 即使在那裡, 它也只會被執著。

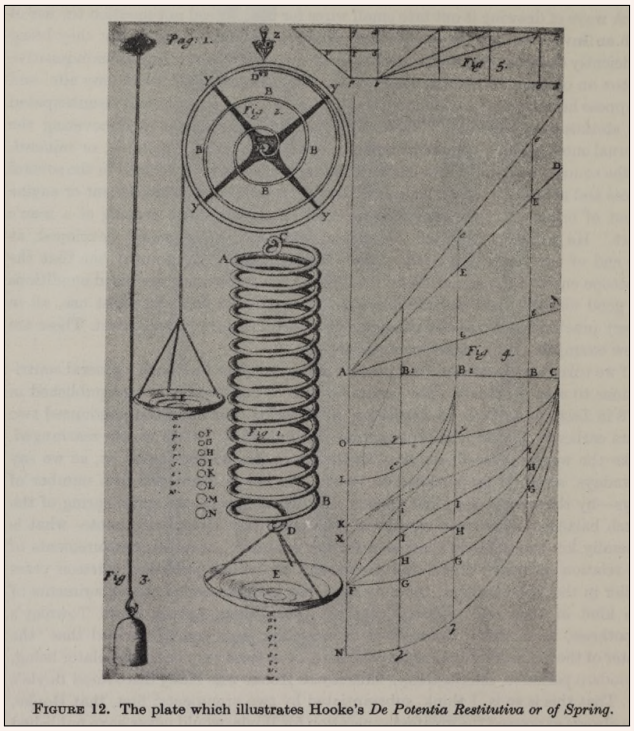


FIGURE 12. The plate which illustrates Hooke's *De Potentia Restitutiva or of Spring.*

图 6.14: 直升式火柴春天, 重量暂停。这个标志性的描述通常归因于胡克, 尽管它的起源仍然不清楚; 这里重复的图像是从 Andrade, 1950 .

某些背景是保证的。胡克的声誉长期以来一直遭受了纽顿的夸张, 成为偶然和不良批评的主题。Andrade, 1950 试图纠正这一点, 认为在科学的那个春天所有天才的人中, 罗伯特 • 胡克有很好的说法被认为是最伟大的。在这种康复的背景下, 安德雷德展示了这个数字 - 也许在胡克自己的监督下进行后续版本, 尽管这一点仍然不确定。

胡克的真实图像 胡克的真实数字, 如在图中显示的本特拉米纳 6.13, 描述他的地质方法到弹性. 在这座建筑中, 两条直线 GHIK 在其端子上连接并由外部 “权力” 在曲形形状 LNNO; 延伸 LM 和 NO 是与 flexure 相对的。这模拟了胡克对恢复力的思维方法, 通过可观察的地质关系 - 长度、曲线和比例扩展 - 比以算法抽象的方式更少。

~~$f = kx$~~ 熟悉的算法表达式 $F = kx$ 它本身是后 表述。胡克自身对原则的说法 **西克 · 维斯** *(Sic Vis)* (“如延伸, 如力量。”), 表达了弹性的法则, 作为一个比例性根在地质而不是象征性的算法。对于胡克来说, 弹性是通过扩展、长度和力量的比例在各种物理实现中表现出来的, 而无需使用抽象的连续性。这种地质思维模式是由托马斯 • 杨 (Thomas Young) 引进的, 并且显著改进的。他在 1807 年首次系统地普遍化弹性行为。**关于自然哲学的讲座** (Young, 1807).

年轻人没有从形状的平衡开始。$F = kx$ 相反, 他通过比例理性定义完美的弹性 - 产生平等扩展的平等力量和比例扩展产生的平等势力 - 然后才引入了一个测量弹性, 正常化这个比例性与身体的尺寸。因此, 弹性成为

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

一个物质属性独立于特定的地质学, 现在被称为杨氏模量. 阿尔及利亚语表达只有在这种地质正常化成立后才出现, 一个发展, 其概念根可以追溯到 Euler。直到 1727 年。[21]

> **318. 定义**. 一个完美的弹性物质最初是由平等的力量和比例的力量在平等程度上扩展和压缩。
>
> **319. 定义** 任何物质的弹性模块是相同物质的柱 , 能够在其基础上产生一个压力 , 这相当于造成一定程度的压缩的重量。因为物质的长度是它的长度减少。
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

看见 §7.3.2.6 为了对青年的灵活贡献进行背景化处理。

6.6.7 伊莎克 • 纽顿 (1642–1727)

伊萨克 • 纽顿出生于 1642 年圣诞节在林肯郡的 Woolsthorpe, 成为一个温和的农民家庭。他的父亲在他出生之前已经死了, 而牛顿在她重新结婚后与母亲分开度过了大部分童年, 这似乎促进了他一辈子的内心和自信。作为一个男孩, 他对农作物表现出很少的兴趣, 但早期对机械设备感兴趣, 建造太阳能、水钟和小机器。首先在本地语法学校教育, 后来在剑桥的特立尼蒂学院, 纽顿最初遇到了亚里士多德自然哲学, 但很快就离开了它, 以便独立数学和物理研究。这种早期隔离, 无论是社会还是智力, 形成了一种工作方式, 其特点是强烈的集中、秘密和偏好于实验性社交性。

从加利利奥到普遍机械 伊萨克 • 牛顿出生于 1642 年圣诞节, 那是加利利奥去世的同一年　在科学史上象征性的转折点。他在英格兰乡村林肯郡长大, 于 1661 年进入剑桥的特立尼蒂学院。卢卡西亚教授 数学的。[22] 基于伽利略对加速度和德卡特的机械世界观的洞察, 纽顿在两者之外取得了决定性的进展。德卡特提出, 天地运动是由无形液体的旋转相关术语子统治的, 而这些力量必须通过接触行动。牛顿用一个革命性的概念取代了这一点: 远程的重力吸引。通过正式化动作法则, 并表明基普勒的精密行星轨道自然跟随它们, 他在一个框架下纠正了卡特西亚错误和统一地面和天空机械。这种统一代表了科学革命的最大智力成就, 证明相同的数学法则统治着落苹果和轨道行星。[23]

纽顿的天才被强烈的个人倾向所匹配。雖然他經常被解釋和戰鬥, 但他曾經在激烈的智力競爭中 - 最著名的是羅伯特 • 胡克 (Robert Hooke) 對逆四方法則以及戈特弗里德 • 萊布尼斯 (Gottfried Leibniz) 對計算的發明。这些争议, 虽然令人震惊, 促使开发和澄清关键科学原则。悖论地说, 纽顿的秘密和竞争性质, 虽然个人是破坏性的, 可能加速了科学进步, 迫使他和他的当代人不断开发更严格的证据和更清晰的解释来确定他们的声明。牛顿的数学、物理和天文学合成将塑造科学的进程几个世纪。他被广泛认为是史上最有影响力的科学家。

他也是一个非常复杂的人物: 不仅是一位数学家和物理学家, 而且也是一名酒精学家、神学家。纽顿花了几十年的时间在学习圣经时间和化学转换, 尽管这些追求在他的一生中仍然没有公布。一位创始人, 由 皇家社区他最终担任总统, 并担任皇家硬币大师的强大的政府职位。其活动的广度　严格的科学、神秘投机、机构领导和国家服务　反映了十七世纪智力景观的丰富与矛盾。

下面是专注讨论纽顿对数学、物理和机械的贡献。这些子部分强调了他在塑造现代科学世界观中的作用的技术基础。

数学家 出生于加利利奥去世的一年圣诞节, 伊萨克 • 纽顿在科学史上出现了一个突出的人物。他是一位数学家、物理学者、天文学家和神学家, 曾在剑桥大学担任数学教授, 被广泛认为是史上最有影响力的科学家。

[21] Euler 通过引入 弹性 的物质恒定的初步步 **扩展模块** (比例性因素将长度延伸与应用力量联系起来, 正常化为身体的尺寸), 并使用它连接胡克型延伸到弹性身体的弯曲。这个结果是写的。1727/28 和只出现在 1862 年后文; 见 Euler 的 *De oscillationibus annulorum elasticorum* **直播** (Euler, 1862) 历史记录在 Truesdell (Truesdell, 1960).

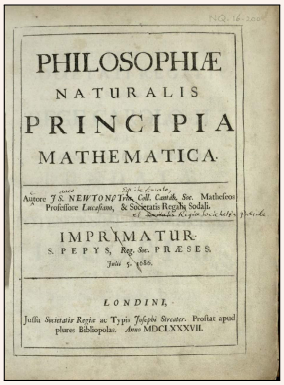
[22] 这个著名的座位后来将由史蒂芬 • 霍金主持。

[23] 在现代物理学中, 这个单位进一步扩展: 量子机械　原来是用来描述原子和子核现象　在天体物理中也具有应用, 例如模拟恒星内部、白色相关术语虫、中子恒星等过程, 如量子隧道化在天文物理背景下。

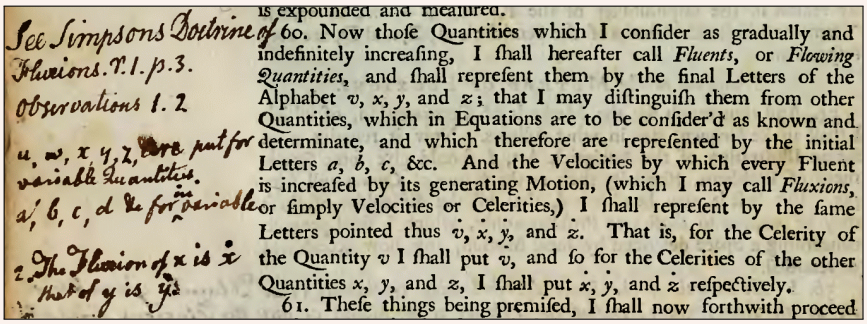
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

直到纽顿的演讲, 亚里士多德!机械 主宰: 物体被认为寻求其自然的休息状态。牛顿根本改变了这个世界观, 说一个对象在单一的运动中保持着, 除非它被外部力量攻击 - 因此将无动, 而不是停滞, 放在运动的核心。这种重新评估, 与他对震动和抵抗的清晰数学处理有关, 重新定义了力量的概念。

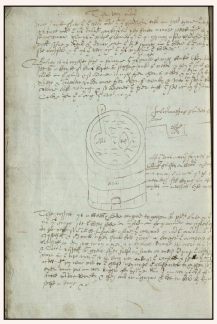
在天文学中，开普勒已经依据第谷 • 布拉赫的精密观测，提出了行星运动的三条经验定律，但仍缺少统一的理论框架。1684 年，天文学家埃德蒙 • 哈雷拜访牛顿并提出关键问题：若引力随距离平方成反比，行星将沿何种曲线运动？牛顿立即回答“椭圆”，并称自己已经完成计算。由于找不到原稿，他答应把推导寄给哈雷，由此写成 *De motu corporum in gyrum*（《论轨道上物体的运动》）。该论文从数学上证明椭圆轨道自然源于平方反比引力，令哈雷深受震动，并促使他敦促牛顿扩展这一工作。最终形成牛顿 1687 年的巨著 *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*(Newton, 1687)，见图 6.15a。牛顿在其中系统推导了运动定律和万有引力定律，以一套统一而连贯的原理贯通地面力学与天体动力学。



(a) *Principia*, Cover Page (Newton, 1687)



(b) Fluxion



(c) Alchemy

图 6.15: 伊莎克 • 纽顿

引入的三项动作法则 **原则** 它们是古典机械和工程的基本, 并将在本书中详细分析。纽顿对光学, 尤其是数学的贡献也相当深。然而, 他的数学遗产被莱布尼兹关于计算的发明而闻名的争论所困扰。. 纽顿的版本, 基于无限模型, 并通过他的笔记表达 **流动** [24] 它在 1666 年初出现在手稿中, 但直到 1693 年才被公开。相比之下, 莱布尼兹于 1675 年开始使用差异化, 引入现代评级。$\int$ 和 dy/dx 它已成为标准。當現代歷史學家承認兩人獨立發展計算時, 皇家社會的調查　由紐頓本人主持和秘密執筆　指責萊布尼斯 (Leibniz) 普拉吉主义. 这种痛苦的争论对欧洲数学产生了持久的后果, 因为英国数学家几乎一世纪以来, 以自己的损害, 大多孤立于大陆发展。

[24]纽顿称时间变量为 **流动**其即时的变化率, 如 **流动**, 由一个点在变量上标记 (是的, $\dot{x}$). 这与现代衍生品相同。$\frac{dx}{dt}$ 但是, 在一个暂时的基于地质框架中表达。纽顿在 1660 年代中期开发了这种方法, 尽管它是后世出版的。**原名**:*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (1736).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在与莱布尼兹的邮件中, 纽顿用图形编码了他的发现, 以确定优先事项, 同时保持秘密。

> *6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux*
> 或 *Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa*
>
> 考虑到包含任何流量数量的方程式, 以找到流量; 反之亦然。
>
> Newton, 1960 *"Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676"*

有效概述基本理论 以加密形式计算。

另一个激烈的争论与罗伯特 • 胡克, 谁声称在 1679 年, 纽顿已经适用了 吸引力逆四法则 从他。尽管胡克提出了定性洞察力, 但他从来没有数学地开发过它。纽顿的 **原则** 把这个想法变成一个量子普遍的重力法则。大多数历史学家放弃了普拉吉主义的指控, 但竞争对手留下了两人的遗憾。

尽管它现在的传奇地位, 但 **原则** 也许是未公布的。无论是牛顿还是皇家社会都不能资助。成本最终由天文学家 Edmond Halley 覆盖, 他不仅资助了印刷, 而且处理了它的分布。哈利向纽顿发送个人用品的副本, 并通过书店工作, 以确保更广泛的访问。(Cohen, 2013). 这个节目描述了即使是最纪念的科学作品如何依赖于个人关系和个别的倡议来传播。

这是值得纠正关于牛顿的第三法则的一种常见误解。它经常被误导为 "对于每个行动, 有一个平等和相反的反力," 在同一个对象上, 形成一对自我平衡的力量。事实上, 法律规定, 如果身体 A 施加力量 F_a 在身体上 B 然后身体 B 以平等和相反的力量 F_b 在身体上 A. 因为力量在不同的身体上行动, 它们并不意味着平衡 (Cohen, 2002 PDF).

阿尔及利亚人 最后, 但最不重要的是, 牛顿也深深地从事过化学　当时提到 **化学** [25]. 其主要目标之一是发现 **哲学家的石头** 一个传奇的物质被认为将基金属转化为黄金。其次追求是 **生命的精英** 他们说要给予长寿或不朽。

对于现代读者来说, 这些目标可能看起来很幻想, 但在 17 世纪的酒精学并没有被认为是相关术语或假科学。相反, 这是一个严肃和合法的智力追求, 超越后来的化学、金属医学和医学。許多自然哲學家 - 包括 Boyle,Glauber, 甚至 Kepler - 參與。考古学结合了实验性实验与基于经典和神秘传统的赫尔米特哲学。它的象征性语言和算法框架现在看起来模糊, 但它的方法往往涉及到实际的实验室工作与炉子, 十字路口和消化设备。在很多方面, 碱性实践提供了关键的实验技术和实验室技能, 后来将被纳入现代化学和材料科学。

牛顿的过化工作是系统和广泛的。十年后, 他编写了 **化学指数**, 从他阅读的 150 多种碱性处理中提取的物质、过程和算法术语的字母列表 (Newton, 1680). 他进行了广泛的私人实验, 旨在装饰古老的食谱, 并发现物质的真实组成。这些活动从未在他一生中公开分享, 部分是因为学术上有尊重的边缘运作, 部分由于其与秘密和权力的联系。

1727 年去世后, 纽顿的化学手稿被认为是 "不适合打印" 而且大部分都隐藏在公众眼前。只有在 20 世纪, 科学家开始系统地研究这些写作。今天, 牛顿沉浸在化学中并不是被视为从科学中脱颖而出, 而是反映了科学、哲学和神秘主义之间的界限在现代早期有多可透明。

现代读者可能仍然很难和解牛顿的科学天才与他对一个经常被误解或拒绝的领域的奉献。然而, 正是在这种立场上, 我们看到了十七世纪思想的过渡性质　一个严格数学、物理猜测和实验化学都在一个心灵中共同存在的世界。牛顿的过化追求提醒我们, 即使是最合理的科学思想在他们的时代的文化和知识背景下工作, 以及我们所认为的界限。"科學" 它在几个世纪里发生了巨大的变化。

灵活的? 牛顿在弹性理论的历史发展中只扮演了一小角色。(Todhunter and Pearson, 1893 PDF). 但是, 在他的后续工作中 **光学** (Newton, 1717) 他提出了一系列投机。"问答," 求之之, 求之。第十三章 - 在 "选举吸引力" 提供一个建议, 小粒子之间的吸引力可能会受到宏观现象的影响。

[25] 十七世纪, 这个术语 **化学** 它提到一个广泛的领域, 包括投机化学和新兴实验化学。它还不是我们今天所知道的完全实验性科学, 而是实践金属学、神秘哲学和早期实验室实践的混合物。现代术语 **化学** 不完全分开 **酒精** 直到 18 世纪。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 因为众所周知, 身体因吸引力而相互作用。重力, 磁力和电力; 这些例子展示了自然的天气和流程, 并使它不不可能, 但可能比这些更有吸引力的力量。因为自然是非常一致的, 适合自己。
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[查询 31]

在这个查询中, 牛顿想象所有的物质都是由硬粒子组成的, 轻松地融在一起, 几乎没有触摸到几个点。然后, 他提供了一种早期直觉的团结和弹性行为:

> 现在, 物质的小粒子可以通过最强的吸引力合并, 并且构成更大的弱贵的粒子; 而且许多这些粒子都可以合并和组成更大粒子, 其优越性仍然更弱; 因此, 为了继承, 直到进化在最大的粒子中结束, 这些粒子依赖于化学的操作和自然体的颜色; 它们通过粘着来组成敏感大小的身体。如果身体是微型, 并且在压力下弯曲或转向内部, 而没有任何部分的滑动, 它是硬和弹性, 回到它的形状与力量从其部分的相互吸引力上升。
>
> Newton, 1717 Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light[查询 31]

此段落预测后来的尝试将宏观弹性反应与内部吸引力联系起来。除了这个猜测的观点之外, 纽顿对弹性的唯一已知贡献就在一个短暂的段落中。**原则** 处理弹性身体的碰撞。他的印象在弹性理论的正式发展仍然有限。

灵活性的严格数学定义将在接下来的几个世纪出现。胡克的实验性法则, 与位移有关的力量 - 第一次出版于 1678 年 - 是一个关键的早期步骤 (看见 §6.12). 后来,Augustin-Louis Cauchy 在连续媒体中引入了压力和正式的平衡;Claude-Luis Navier 将这些想法扩展到结构机械学迄今为止使用的系统线性理论。

和 原则 **和新顿框架为结构分析** 伊莎克 • 纽顿 (1642–1727) (Newton, 1687 PDF) 实现了大合成, 将地球和天空机械统一起来, 建立了随后的结构分析运作的概念框架。他的 **哲学** *æ Naturalis Principia* **数学** (自然哲学的数学原则)1687 年首次出版, 制定了动作和普遍重力法则, 从苹果落下到轨道行星的现象 - 至于工程的重要性, 从喷射火箭到结构崩溃。

纽顿的三项动作法则 提供 基础 为 结构力学. 第一法则 (无情) 设定身体保持在休息或均匀的运动, 除非由力量行动　静态平衡的概念基础。第二法定量化力量之间的关系, 质量 和 加速度, 允许动力分析的结构受时间变量负载。第三法则确保相互作用的力量发生在不同的身体上平等和相反的对手, 这是自由体分析和反应的决定必不可少的原则。

对于静态结构, 牛顿的法律减少到平衡条件: 所有力量的向量总额必须消失 ($\sum \mathbf{F} = 0$) 每一个点的所有时刻的总和都必须消失。($\sum \mathbf{M} = 0$). 系统地应用, 这些关系允许分析相关术语、be、框架、弓和其他结构形状。由结构工程师绘制的每一个自由体图表都是新顿机械的应用。

和 **原则** 它还引入了数学仪器　在地质形式呈现的流动计算　后来能够分析连续系统。支配泡沫分裂、列稳定和结构动态的差异方程式是对变形物体应用的新顿机械的表达。超越具体的成果, 牛顿建立了一个理性机械的理想: 一个自我一致的数学系统能够从第一原则预测物理行为。这个信念是基于结构工程的企业: 在建造之前可以分析一个结构, 并预测它从未经历过的负载下反应, 因为相同的法律统治所有机械现象。

6.6.8 福特弗里德 • 莱布尼兹 (1646–1716)

格托弗里德 • 威尔赫姆 • 莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz) 出生于 1646 年, 是道德哲学教授的儿子。在年轻时被遗产, 他获得了无限的访问他的父亲的广阔图书馆, 在那里他通过阅读广泛的经典文学, 哲学, 逻辑, 数学和法律来教育自己。这种大多自学的教育促进了非凡的智力宽度和对知识统一的终身信念。正式在法律而不是数学中训练, 莱布尼兹独立于学术教学开发了他的科学想法, 接近数学作为一个象征性语言能够表达一般

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

真理。这种早期沉浸在逻辑和形态物理学形成了他后来强调的正式系统, 笔记和普遍方法 - 特征区分他的方法到机械和计算与纽顿的更地质和物理基础风格。

17 世纪的聚合物 格托弗里德 • 威尔赫姆 • 莱布尼兹 这是一个德国的波利马特。哲学家和数学家, 其智力范围与十七世纪的任何人物相竞争。他是一位辉煌的思想家和富有成效的作家, 他为逻辑、形物学、法律、历史以及在本章的背景下对数学和机械做出了基本贡献。与许多专门从事特定领域的当代人不同, 莱布尼兹坚持说, 所有知识都是相互连接的, 一个领域的进步可以照亮其他领域的问题, 这对数学物理学的发展表现出令人惊叹的成果。

教學年及巴黎影響力 1672 年春天早些时候, 一位德国使者抵达巴黎: 那是莱布尼兹, 然后在 20 年代中期, 为他的牧师, 博内堡爵士进行外交任务。显然是政治的, 这段旅程是智力转变性的。在巴黎, 莱布尼兹遇到了一个充满活力的科学家和哲学家的社区。最突出的是, 他遇到了克里斯蒂安 • 休根斯。他是他的数学导师。在 Huygens 的指导下,Leibniz 从哲学猜测转向严格的数学分析。该导师讲述了非正式的欧洲网络是传达和推进数学知识的重要机制。

计算的发明 在巴黎的岁月里 (1672–1676) 莱布尼兹开发了变成差异和整体计算的基础。1675 年, 他引入了 $\int$ 为了整合和 d 对于差异性, 如今仍然普遍使用的符号。与纽顿不同, 谁使用了笔记的 **流动** 莱布尼兹迅速发表并传达他的发现, 这是科学实践中的差异, 这有助于引发激烈的优先争议。(看见 §6.6.7). 莱布尼兹的愿望公开与纽顿的秘密相矛盾, 最终受益于更广泛的数学分析发展。

计算优先事项争议 莱布尼兹对无限数的观点作为理想化的数量, 与纽顿的地质论点相矛盾。虽然现代科学家同意两人独立开发计算, 但纽顿的支持者 - 尤其是皇家社会 - 在纽顿秘密编写的一份报告中 - 指责莱布尼兹犯有狂热。这个案例在欧洲各地的科学社区被极端化, 英国和大陆数学家之间的关系已经被云层化了几十年。这种争论对数学的发展产生了深刻的后果, 因为英国数学家越来越孤立于大陆进步, 阻碍了自己的进步。[26]

物理学与机制 除了计算之外, 莱布尼兹提出了一个基于形态原则的机械世界观。他的概念 **蒙古**不可分割、灵魂类似的单位　是试图和解机制与统一和预先建立的和谐的哲学计算。虽然抽象, 但这项工作激励了后来的思想家在科学和哲学, 包括坎特和间接方面领域理论。

机械计算和工程兴趣 Leibniz 与工程师合作, 寻找实用创新。他设计了 **步行回归**, 一个机械计算器能够进行复制和分裂, 建立在布莱斯帕斯卡的以前添加机器上。虽然机械上不完美, 但这是一个勇敢的尝试来自动计算, 并且经常被认为是后来的计算机的先驱。这项工作表明莱布尼兹的信念, 理论数学应该有实用的应用, 一个将成为工程科学的中心视野。[27]

象征性逻辑和普遍语言 他的观点是普遍的科学语言, **特征普遍性**与正式的逻辑计算相结合, **计算 比例** 象征性逻辑和计算机科学的预测发展几个世纪后。这些努力旨在将理性减少到计算, 并对后来的思想家如 Boole、Frege 和 Turing 产生影响。

Vis Viva 和保存讨论 在机械学中,Leibniz 引入了概念 **生存** *VIVA* (“活力”) 相应于 mv^2, 作为机械过程中保存的量。这使他与新顿学校的机会相匹配, 这强调了动力。(mv) 作为保留的主要量。讨论将持续到十九世纪, 最终有助于现代了解能源储存。这种早期承认能源储存将证明对后来的热力学和机械和结构的工程分析至关重要。

差异方程式与物理模型 Leibniz 还为使用差异方程式模型动态系统奠定了基础。他的笔记清晰度和算法格式主义使他能够系统地表达变革和物理法则, 这些工具在 Euler、Lagrange 等开发的机械中成为中心。

机构愿景与科学外交 莱布尼兹在创立科学学院中发挥了重要作用, 包括将成为柏林学院。他支持跨国科学努力的统一, 预期现代国际合作网络。他的机构观点反映了一个理解, 科学进步不仅需要个人的天才, 而且有组织的结构可持续合作。[28]

[26]在地质工程中, 在 1930 年代, 卡尔 • 特拉扎吉和保罗 • 菲隆格之间就土壤机械的数学基础以及有效应力原则的有效性产生了同样激烈的争论。(Goodman, 1999). 争论变得非常个人和政治负担, 最终与 Fillunger 的死亡悲剧结束, 其影响塑造了地面机械研究的轨道和接受数十年的。

[27]这种哲学的现代例子可以看到本诺的作品。î 曼德尔布罗特 (Mandelbrot), 其分裂地质的开发　原来是理论结构　在工程中发现了广泛的应用, 从模拟粗糙表面和色调媒体到改进信号处理和天线设计。

[28]一个现代的平行可以看到在美国赞助的大规模研究举措。國立科學 基础 (NSF) 如同乔治 • E。布朗,Jr。地震工程 模拟网络 (不) 其继承人, 自然危险工程研究基础设施 (黑人). 这些项目将跨大学、国家实验室和行业

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

十字路口和影响 经过此 体积 是 Leibniz 与 Newton 的相互作用。(§6.6.7), 他的导师在 Huygens 下 (§6.6.4), 以及他在后来的图像, 如 Cauchy 和 Euler, 谁帮助桥梁数学严格与物理直觉。

计算、变量思维和工程遗产 格托弗里德 • 威尔赫姆 • 莱布尼兹 (1646–1716) (Leibniz, 1969) 与新顿独立共同开发计算, 引入了在大陆数学和最终在工程分析世界各地成为标准的评级和概念框架。他对机械学的贡献, 而比牛顿更不受欢迎, 建立了变化的原则。它已成为结构分析中必需的工具。

Leibniz 的计算评分 $-dx$, dy, $\int$, d/dx 它比牛顿的流动更实用于计算, 现在普遍使用。其系统的区别和整合规则的开发, 从 1680 年代以后的论文中呈现, 使计算可用于数学家和工程师在整个欧洲。伯努利斯、尤勒、拉格兰奇和后代机械学家都在莱布尼齐亚框架内工作。

除了评分之外,Leibniz 为机械学提供了基本概念。他的原则 **生存** *VIVA* 我们现在称之为动能的, 开始了基于能量的方法, 以补充基于力量的新托尼亚表述的机械。承认一定数量 (能量, 工作) 在机械过程中保留, 提供强大的分析系统工具, 在直接力量分析困难的情况下。

莱布尼兹也参与了机械学的基础, 与纽顿和他的追随者讨论空间、时间和力量的性质。他的足够理性原则 没有理由就不会发生什么事　预期变化的原则: 在所有可能的动作中, 自然界选择一个极端化某种数量的人。由 Euler、Lagrange 和 Hamilton 数学上开发, 这种思维线引发了最少行动的原则和现代结构力学的基础变量表达。

对于结构工程,Leibniz 的遗产包括计算器、基于虚功和应变能源方法的能量概念以及允许有限元分析的变量框架。莱布尼西亚传统　解析, 系统, 计算方向　形成了结构力学在大陆的发展, 并通过 École Polytechnique 及其继任者, 帮助建立今天的工程数学方法。

6.6.9 伯诺利家族 (1654–1782)

香料商人雅各布 • 伯诺利逃到荷兰, 以避免西班牙人的宗教迫害。巴塞尔, 瑞士,1620 年 - 当时中央欧洲的一个主要商业中心 - 在那里他被授予公民身份 1622 年。起初, 雅各布和他的儿子尼克劳斯在商业中取得了成功。从商人到数学家的家庭轨道反映了十七世纪更广泛的社会变化, 商业繁荣创造了智力追求的机会, 数学技能成为航行、工程和自然哲学越来越有价值。

他们是尼古拉斯的后裔。(1623–1708) 已成为超级数学家超过一世纪。其中最著名的是他的儿子雅各和约翰, 以及他的孙子丹尼尔。

值得注意的是, 莱布尼兹教导约翰, 他反过来教导尤勒, 形成一个令人惊叹的智力线性, 塑造了现代数学。这个导师链展示了数学知识是如何通过个人关系和直接教学传达的, 创造不断的数学思维传统, 激发了几代人和国家边界。如果有机械的王国, 伯努利斯肯定会统治。[29]. 然而, 他们的君主制并没有没有戏剧　雅各布和约翰之间的激烈和有文件的对抗是强烈竞争力的象征, 有时伴随着伟大的天才。(Peiffer, 2006). 他们的家庭争论是如此精心文档, 以至于他们为个人动态提供了独特的窗口, 在现代早期引发了科学竞争。[30]

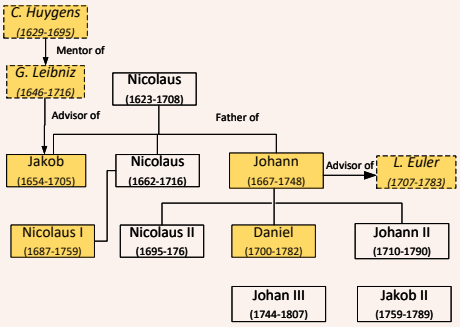
请注意, 该 Bernoulli-Euler Online (BEOL) 平台作为一个专门的研究中心, 重点是探索早期现代数学和科学。其主要目标是无缝地整合伯诺利王朝著名成员和影响力数学家莱昂哈德 • 尤勒的广泛作品和邮件。

的多机构团队结合起来, 以解决复杂工程挑战, 将专业知识、资源和实验设施集成到一个没有研究人员能单独实现的方式。

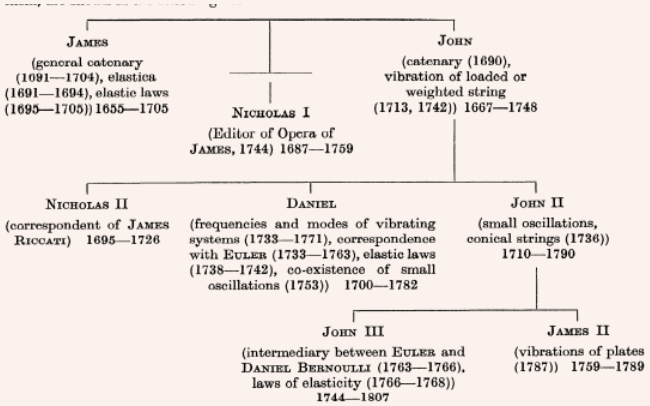
[29]在现代时代, "皇家" 这将是科里亚, 一个科学王朝, 在家庭成员中获得了五个诺贝尔奖。玛丽和皮埃尔 • 库里在 1903 年获得了物理学奖, 因为他们对放射性工作。玛丽 • 库里 (Marie Curie) 在 1911 年获得了第二个诺贝尔化学奖, 因为她发现了相关术语和波罗尼, 使她成为两种不同科学的唯一获奖者。他们的女儿伊琳 • 朱利奥特 • 库里 (Irène Joliot-Curie) 和孙子弗雷德里克 • 朱里奥特 (Frédéric Joliott) 在 1935 年获得了化学奖, 因为他们合成了新的放射性元素。家庭的贡献基本上塑造了我们对原子物理学和化学的理解, 建立了一个多代科学卓越的遗产, 与 17 世纪和 18 世纪伯努利斯在数学和机械学的统治相似。

[30]在现代时代, 科学竞争继续塑造研究轨道, 如詹姆斯 • 沃森和罗萨林德 • 弗兰克林的集团在 DNA 结构的启示中激烈的竞争。史蒂芬 • 霍金和莱昂纳德 • 苏斯金之间的长期争论, 关于黑洞信息悖论。就像伯诺利斯的冲突一样, 这些竞争结合了深刻的理论论点和强大的个人尺寸。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a)



(b) (Truesdell, 1960)；注：英语文献中 Jakob 和 Johann Bernoulli 也分别称为 James 和 John

图 6.16: 伯诺利家族树 (在本书中讨论的成员) 他们的智力循环

6.6.9.1 雅各布 • 伯诺利 (1654–1705)

雅各布 • 伯诺利是伯诺里王朝的第一位数学家。他是成功的交易者尼克劳斯 • 伯诺利最年长的儿子。(1623–1708) 他的妻子, 玛格丽特 • 施 o 愤怒。他的父亲坚持, 雅各完成了他的 **艺术大师** 在拉丁文、希腊文和哲学 1671 年, 随后是神学研究。尽管他对数学的热情日益增加, 但他不得不继续在神学中取得成就。**许可** 1676 年学位。后来他加入了巴塞罗那的圣部, 但继续追求科学作为一个自我教学, 通过基本文本教授数学和天文学。这种自我教学方法在早期数学家中常见, 因为大多数欧洲大学的正式数学教育仍然不发达。

旅行与智力成长 1676 年 8 月, 雅各布开始追求智力丰富。这是他第一次停车场, 在那里他花了 20 个月来教导一个有才华的盲人女孩, 伊丽莎白 • 沃尔德基奇。(1660–1728) 对于谁, 他发明了一个写作系统 [31]. 他参加了神学辩论, 并于 1677 年开始在他的笔记本中记录科学反思。**冥想** 旅遊入口 **雷斯布** *u* **克莱恩**.

从日内瓦, 伯诺利搬到法国　首先是里蒙西斯作为马克思德洛坦格斯的教导者, 然后是波尔多, 后来是南特、萨穆尔和巴黎等城市。在这个时期, 他变得流畅的法语, 深深受到德卡特的自然哲学的影响。1680 年, 他短暂返回巴塞罗那, 然后通过荷兰和英格兰进行 18 个月的巡回演出。在莱登, 他出席并讲数学讲座。这个漫长的旅程展示了数学知识如何通过个人网络传播, 以及年轻的科学家通过寻找建立的学习中心获得经验。

伦敦的科学会议 1682 年 8 月, 伯诺利抵达伦敦, 在那里他遇到了约翰 • 弗拉姆斯特。(1646–1719) 罗伯特 • 胡克 (1635–1703). 1682 年 8 月 12 日, 他参加了一次皇家社会会议, 其中展示了材料力学的实验。这种对机械问题的实验方法的曝光会深深地影响他后来关于弹性的理论工作。

回到巴塞罗那和学术职业生涯 1683 年 10 月回到瑞士后, 伯诺利定居巴塞尔,1684 年结婚了朱迪特 • 斯图班。他们有两个孩子。到目前为止, 他的兴趣已经转向实验物理学, 可能受到罗伯特 • 鲍伊尔的作品的影响。(1627–1691). 从 1683 年到 1686 年, 他讲实验物理学的讲座。**实验室** *Sive Curiosum* 这是物理和机械实验和反思的集合, 经常以讲话或教学风格呈现。

数学贡献与教授 1685 年之后, 伯诺利越来越多地出版于数学, 研究了第二个拉丁版的数学。Descartes, 1637b 是莱布尼兹的无限计算。他研究了算法和差异地质、序列、概率以及变量和整体计算。1687 年, 他被任命为巴塞罗那大学数学教授, 在他去世之前担任的职位。他的知识哲学强调了从建立的基础上逐步构建理解。这种对知识建设的系统方法成为巴塞尔数学学校的特点 受影响的学生一代。

与约翰合作和竞争 雅各布教给弟弟约翰数学 (1667–1748) 后来, 他成为了他的对手。他们最初在雅各布教授物理学, 约翰学习医学时合作。他们在几天内掌握了莱布尼兹的差异计算, 并很快将其应用到复杂问题上,

[31] 我们只能尊重伊丽莎白的父母, 因为他们委托这样一个有礼貌的人物在 17 世纪教育他们的盲目的女儿。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

包括曲线分析。他们的工作有助于进一步发展这种方法 足以让莱布尼兹在 1696 年公开感谢。这种快速计算的掌握, 证明了兄弟们的数学天赋和合作学习的力量, 即使他们的关系后来由于竞争压力而崩溃。

理性机械的基础 雅各布 • 伯诺利的研究引发了四个基本问题, 其中 Truesdell, 1968 它在理性机械史上被定义为步骤:

1. 由长线纤维延伸的法则衍生在弹性带中弯曲。
2. 确定中性纤维在梁的位置, 以及在十字架上运作的力量的性质。
3. 灵活线理论的统一性, 由强度 平衡 和弹性带的理论, 由时刻 平衡 统治。
4. 确定材料的弹性反应。

这些成就使基础为经典的弹性力学, 特别是发展 **弹性**, 一个数学模型, 在滑板轮子和裂缝中的大变形。雅各布在弹性曲线形状的先驱工作预测了后来的贡献由尤勒, 其分析处理将正式化主题。

和 弹性 和 结构分析 伯诺利提出了 **弹性** 问题在 1691 年, 并提供了其解决方案在连续作品高峰他的 1694 出版物 **拉米纳** *Elasticae*, (Bernoulli, Jakob, 1694). 他表明, 由一个薄的弹性条带在终端强度下的曲线可以被区别方程所特征。使用地质逻辑和曲线的概念, 他产生了旋转时刻与条线沿着位置之间的关系, 并证明曲线射线因应用负载而异。他的分析, 虽然表达在无限形状的混合物, 标志着一个重大步骤在表述的弹性稳定和非线性变形。这项工作代表了在结构性单元中的大挠度行为的第一个系统数学处理, 预测现代非线性分析几个世纪。

接待与遗产 Christiaan Huygens 和 Gottfried Leibniz 两人都认识到 **弹性** 问题。Huygens 甚至怀疑它可以优雅地解决, 尽管他后来承认伯诺利的成就。这些批评描述了伯诺利的观点是多么先进, 尽管有某些限制 - 例如假设中性纤维仍然不形成, 现代弹性理论从那时起修正。

和 **弹性** 挑战将在下个世纪重新出现。丹尼尔 • 伯诺利提出了对莱昂哈德 • 尤勒的变量方法, 他最终通过变分法将问题普遍化。这为现代弹性稳定理论和结构分析奠定了舞台, 结合了伯诺利斯、莱布尼兹、胡格森和尤勒的作品。

结论: 帝国主义与理性机制 除了他的数学严格性之外, 雅各布的方法反映了一个哲学立场, 将实验观察和加剧理智放在科学研究的核心。為 Truesdell, 1968 理性机械的创造与雅各布 • 伯诺利一样欠纽顿。他的遗产不仅通过自己的作品, 而且也通过他对他的兄弟约翰的影响, 他的学生尤勒, 以及基于他的概念基础建造的机械学家的世代。雅各布的实验观察与数学分析的整合建立了一个方法, 将成为工程科学的中心。[32].

6.6.9.2 约翰 • 伯诺利 (1667–1748)

雅各布的弟弟约翰 • 伯诺利 (Johann Bernoulli) 和丹尼尔的父亲在莱布尼齐亚计算的传播和发展中发挥了关键作用。雅各布引入数学后, 约翰成为差异计算的热烈倡导者, 也是物理和机械领域最早的系统用户之一。他主要解决了 布拉希斯托克朗 问题 [33] 并有助于研究地质学、水晶和液体的运动。他的解决布拉希斯托克隆问题 - 寻找最快的降落曲线 - 是变量方法的第一大应用之一, 并帮助建立变分法作为一个新的数学纪律。

约翰在格罗宁根担任数学主席, 后来他的兄弟在巴塞尔大学取得了成功。他的最持久的影响力是通过他的学生 - 最著名的莱昂哈德 • 尤勒, 他从一个年轻时开始导师。第 1713 章 出版了 **奥姆尼亚歌剧**它包含了他对计算和机械的许多最重要的贡献。约翰的教学方法强调了数学技术对物理问题的实用应用, 这将深度影响尤勒和后代数学物理学家。(Reddy, 2017).

[32]现代结构工程通过结构性卫生监测系统, 如在大桥上部署的像黄金门桥一样, 以实时传感器数据为例。(压力、转移、振动) 与最终的 单元 模型和动态反应方程不断集成, 以验证理论预测并优化维护规划。

[33]布拉希斯托克隆问题: 考虑到两个点 A 和 B, 一个粒子在最短的时间内从 A 到 B 滑动的曲线是什么? 这个解决方案 - 一个循环 - 是由纽顿, 雅各布 • 伯诺利, 莱布尼兹,L' 医院和约翰 • 伯努利自己发现的, 标志着变分法的发展的一个基本时刻。在空中导航中, 布拉希斯托克隆是飞行轨道或电波的最佳飞行路径。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

6.6.9.3 介入 奥姆尼亚歌剧

雖然出生於同一數學君主制, 雅各布和約翰 • 伯諾利在計算、機械和確率的形成中追求超越但不同的道路。收集的作品 - 分开出版 奥姆尼亚歌剧提供他们的知识产权的最终记录。下面的图表显示了他们主要贡献的侧面合成, 从他们的主要贡献中提取出来。奥姆尼亚歌剧 桌子, 桌子 6.3.

表 6.3: 雅各布和约翰 • 伯诺利的主要贡献如反映在他们的 奥姆尼亚歌剧

作者	贡献 / 工作	年度 (发表)	田野
雅各布 • 伯诺利	*Ars Conjectandi* 主持人 概率理论的基本处理, 引入大数字法则	1713 (邮政)	概率
	早期研究以色列问题	1700s	变分法
	展现 / 逻辑系列扩展	1680 年至 1690 年	分析
	与 Leibniz 的差异计算	1690s	计算 / 基础
约翰 • 伯诺利	關於 *Curva Isochrona Paracentrica* 的評論 解决布拉希斯托克隆问题	1697	变分法
	流体动态和差异方程式工作 (例如, 异常增长, 逻辑螺旋)	1690 年至 1710 年	机械 / DES
	公共数学挑战与争议 (例如, 与纽顿, 泰勒)	1700s	数学文化
	与牛顿、莱布尼兹、尤勒和他的儿子交往	1690 年至 1740 年	一般数学

6.6.9.4 丹尼尔 • 伯诺利 (1700–1782)

丹尼尔 • 伯诺利出生于荷兰格罗宁根, 是约翰 • 伯努利的第二个儿子和雅各布 • 伯諾利的孙子。他在一个充满数学和科学研究的家庭中长大, 尽管他与父亲的关系经常受到竞争的影响。约翰最初指导丹尼尔的数学教育, 但当丹尼爾的才華成熟並獲得認可時, 約翰的骄傲變成了羞辱。在约翰匿名提交竞赛作品的紧张局势中, 丹尼尔已经进入了比赛, 甚至试图为丹尼爾的發現提出信用。这种家庭动态展示了十八世纪科学文化的竞争压力如何扭曲最亲密的关系。

尽管这些挑战, 丹尼尔追求广泛的教育, 获得医学和数学博士学位。他在生理学和数学方面担任学术职位, 并在各种领域保持智力活跃, 如流体力学, 概率, 弹性和经济学。他终于定居在巴塞罗那, 在那里他教导和出版了很多他的影响力作品。

丹尼尔的立场是显著谦虚和协作, 他保持了友谊和学术交流与他的时代领先的科学家, 包括 Euler, 与谁他分享了一个漫长而有成效的通信。他的合作精神与父亲的竞争力相矛盾, 并帮助建立更开放的科学文化, 这将是启蒙的特点。

变量改革的 弹性 问题 约翰的儿子丹尼尔 • 伯诺利 (Daniel Bernoulli) 和雅各布的孙子, 在机械学中扩展了家庭遗产, 通过引入变化的方法来解决问题。弹性 问题。雅各布 • 伯诺利 (Jakob Bernoulli) 提出并解决了直角 弹性 1690 年代使用地质理和早期 算法!计算丹尼尔提出了广泛的普遍化。

有关分析细节，请参见 章节 9

在 1742 年的一封信中, 丹尼尔向莱昂哈德 • 尤勒提议, 通过尽量减少其弹性势能来确定弹性绳子的形状。具体而言, 他表达了整体能量作为一个包含曲率的方形在梁的长度的一部分。这种观念, 引发了 弹性 作为变量

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

问题, 因此打开了变分法在弹性中使用的门。这种以能源为基础的方法最终将成为结构机械的现代计算方法的基础, 包括终端元素分析。

Euler 以此提出的立场, 解决了总体 **弹**性 问题不久之后。他的治疗产生了我们现在所知道的 Euler-Bernoulli 射线理论, 并成为弹性稳定和结构机械学研究的基础。

丹尼尔的贡献是如此关键: 通过重新解释一个地质挑战作为能源减少原则, 他将古典机械与现代解析方法结合在一起。他的洞察力将雅各的先驱工作与新兴变化的框架相结合, 这将占据十八世纪和十九世纪机械的支配。

水力学和流体力学 除了他对弹性的贡献之外, 丹尼尔 • 伯诺利也为他在流体力学的作品而闻名。第 1738 章 他的 *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, (Bernoulli, Daniel, 1738) 将 基础 用于研究 流体 行为, 并引入了现在被称为 伯努利原理 的想法 - 一个 流体 的速度增加同时发生与 压力 或 势能 的下降。

该原则, 从能源储存中产生的, 适用于各种机械系统, 包括飞过翅膀的空气流动、管道流动和血液循环。伯诺利对不压缩、无情的流动的方程现在在液体机械上是基本的, 并在理论和应用水力学中作为关键关系。这项工作展示了如何在机械的不同分支中应用相同的数学原则, 加强物理科学的统一。[34].

机械轴承和稳定性 丹尼尔 • 伯诺利也为机械振动理论做出了贡献。他研究了弹性线条的转向波动和谐模式的过渡 Fourier 分析的一个先驱。他对振动系统的分析是最早与解析工具结合机械理性, 预测音效、结构动力学和波理论的后续发展。

他的研究结构的稳定性和荷载, 变形和动态反应之间的相互作用进一步证明了他的机械视觉的宽度。这些调查丰富了对系统如何应对不同力量的理解 终端的核心担忧理性机械. 他的振动系统工作设立了数学基础以理解响应和动态增强, 这是现代结构设计至关重要的现象 [35].

机械中的遗产 丹尼尔 • 伯诺利在机械学的遗产源于他的能力 **将地质、物理和变量原则合并为一致的框架**. 他连接了雅各布的遗产和现代机械的能量原则, 了解了尤勒的基本工作, 并在流体和结构分析之间建立了重要基础。他的名字仍然与机械的关键理论模型相结合, 从喷射到液体到振动, 确认了他在纪律进化中的中心地位。也许最重要的是, 丹尼尔的方法证明了数学分析如何在常见原则下统一显然不一样的物理现象, 这将成为十九世纪物理和工程的中心。[36].

6.6.10 莱昂哈德 • 尤勒 (1707–1783)

莱昂哈德 • 尤勒 (Leonhard Euler) 于 1707 年 4 月 15 日在巴塞尔出生, 后来是瑞士联邦内繁荣的学习中心。他的父亲保罗 • 尤勒 (Paul Euler) 是一位在雅各布 • 伯诺利 (Jakob Bernoulli) 学习数学的抗议牧师, 而他的母亲玛格丽特 • 布鲁克 (Marguerite Brucker) 来自一个学者的家庭。虽然最初是为了教会职业生涯而设计的, 但从一个早期的年龄开始, 尤勒表现出对数学的特殊能力。他的父亲给了他基本的教导, 但很快就显而易见, 他的能力远远超出了传统神学教育所能容纳的东西。

[34]例如, 简单的和谐运动的差异方程式, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ 它控制着各种物理现象: 春季质量的振动, 小角的旋转, 晶体中的分子振动、电路 LC 循环的行为以及音波传播。这个数学单位允许从一个域的洞察力 (如机械喷射) 在完全不同领域的现象的启示 (如电气工程或分子物理学) 模仿基本数学关系如何超越物理学的不同分支之间的界限。

[35]现代例子包括 1940 年塔科马纳鲁斯桥崩溃, 在那里风引导的波动在桥上的固有频率导致灾难性响应故障, 以及当代滑雪板设计, 工程师必须负责风引发的振动, 并使用突变的质量蒸汽机。(如 660 吨蒸汽机在台北 101) 应对可能使建筑物不可居住或结构上不安全的反射效应。

[36]许多物理现象遵循普遍的数学形式 $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla u) + s$, 在哪里 u 是国家变量, ρ 代表存储能力, D 是交通工具, 而且 s 是源词。这个方程式控制热转换 (温度分布), 质量 分散 (集中领域), 电动化 (电力潜力) 地下水流 (水力头), 弹性变形 (位移), 电磁场 (磁性潜力), 和音响波传播 (压力). 数学单位允许在这些多元物理领域应用相同的数值方法和解决方案技术。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

从巴塞罗那到欧洲法院: 早年和圣诞节 圣彼得堡 莱昂哈德 • 尤勒[37] 也许最多样的, 也许最富有成效的数学家, 一个牧师的儿子, 出生在巴塞罗那附近。1720 年, 他进入巴塞尔大学, 当时是由于约翰 • 伯诺利的影响力讲座而成为数学研究的重要中心, 吸引了来自欧洲各地的年轻数学家。尤勒的非凡天赋很快被认可, 而伯诺利除了他的正式讲座之外, 还为他提供了每周私人教学。在十六岁时, 尤勒获得了他的硕士学位, 在他二十岁之前, 他已经参加了一个由法国科学院赞助的国际比赛, 并出版了他的第一篇科学论文。这一早期认可展示了欧洲新兴学院和竞赛网络如何开始在全国范围内识别和培养数学天赋。[38].

和 **首頁 〉 外文書 〉 西洋學院** *Scientiarum Imperialis Petropolitana* (俄罗斯科学院) 成立于 1725 年, 圣。圣彼得堡 由大彼得的命令, 作为他更广泛的西方化俄罗斯运动的一部分。约翰 • 伯诺利的儿子尼古拉和丹尼尔, 是第一所学院中招募。[39] 搬到俄罗斯后, 他们帮助尤勒担任合伙人职位。1727 年夏天, 尤勒搬到圣地。圣彼得堡和, 不受教学或行政职责的负担[40], 能够专注于数学研究。他于 1730 年加入了物理学院的部门。當丹尼爾 • 伯諾利 1733 年在他的哥哥去世後回到巴塞羅那時, 尤勒成功地任命他為數學部長。欧洲学术界之间的这种移动性创造了一个国际数学人才市场, 加速了思想和方法在整个大陆的传播。[41]

尤勒的早期轨道象征着现代科学学院的出现: 一个早期认识到天赋的系统, 在国家边界上培养了天赋, 并为专注的智力工作创造了机构空间。他将继续成为历史上最富有成效的数学家, 并为机械、计算、图形理论、数字理论和天文学做出了贡献。

移动到柏林和变量计算的诞生 在他的时间在俄罗斯学院圣。圣彼得堡, 尤勒写了著名的机械学书 *Sive motus scientia analytice exposita* **机械学科** (机械学, 或动作科学分析证明,1736 年). 在这项工作中, 而不是依靠牛顿使用的地质方法, 他引入了解析方法, 在机械的正式化中标志着转折点。在同一时期, 尤勒开始研究弹性曲线, 一个主题很快导致了基础贡献。这种从地质到解析方法的转变代表了机械问题的攻击方式的变化, 强调了地质结构上的算法操纵和差异方程。

1740 年, 弗雷德里克二世 (后来被称为大弗雷迪里克) 升至普鲁士王位。作为科学和哲学的守护者, 他寻求将突出学者带到普鲁士学院。到那时, 尤勒被认为是欧洲最重要的数学家之一, 弗雷德里克延长了邀请他加入柏林学院。随着俄罗斯的政治困境加剧, 尤勒在 1741 年夏天接受并搬到柏林。尽管他被转移, 但他仍然与俄罗斯学院保持联系, 并继续出版许多论文。**首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 學術 〉** *Academiae Petropolitanae* (俄罗斯学院的记忆). 这种流动性表明, 十八世纪的学者在欧洲知识空间内如何运作, 当机会出现时, 法院和学院之间移动。

在柏林, 尤勒继续他的繁荣的研究, 定期出版在年度卷的普鲁士和俄罗斯学院。1744 年, 他出版了他的标志作品。**求具有极大或极小性质的曲线的方法，即广义等周问题的解** (寻找具有最大或最小属性的曲线的方法, 或者在最广的区域中解决以色列问题)(Euler, 1744b). 这是变分法的第一本书。并包括, 作为附件, 第一系统处理弹性曲线。本书的开幕部分如下:

> 所有最伟大的地质学家都很久以前就认识到, 本书中所描述的方法不仅在分析本身是最大的用途, 而且在解决物理问题方面也很有帮助。因为宇宙的组织是最完美的, 也是最明智的创造者的作品, 所以在宇宙中没有发生任何最高或最低的规则。因此, 毫无疑问, 宇宙的所有影响都可以从最终原因中以最大和最小的方法和有效原因本身同样幸福地解释。这里和那里的这个事实有这么好的例子, 我们几乎不需要更多的证据来证明它; 相反, 剩下的就是在每种科学问题中找到最多的数量。或最低值, 似乎更属于自然科学的主题。(哲学) 而不是数学。从那时起, 有两种方法可以学习自然的影响: 一种是通过有效的原因, 通常称为直接方法, 另一种是由最终原因, 数学家用相同的成功。

[37]到 1783 年初, 他出版了 530 项研究; 到 1826 年, 这个数字增加到 771 项。1844 年, 一位大爷子在手稿中发现了更多的材料。

[38]这一模式今天继续下去, 如诺贝尔奖得主和田野勋章获奖者所示, 经常成为多个国家学院的外国成员。(例如, 皇家协会、国家科学院或 **阿卡德 é 我的科学**) 通过现代的国际科学合作, 参观同事会和全球人才招聘计划, 跨越国家边界, 以认可和培养科学卓越。

[39]正如当今的教师从世界各地招募 “著名” 大学。

[40]非常像在普林斯顿研究所的学者。

[41]欧洲知识移动的历史模式与现代学生 Erasmus 计划相匹配, 自 1987 年以来, 它在各个欧洲机构中促进了学术交流, 创造跨越国家边界的网络, 加快了思想、方法的跨流。研究在整个大陆进行。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果有效原因太隐藏了, 而最终原因不容易逃避我们, 问题通常是通过间接方法解决的; 相反, 直接方法随时可以从有效原因中确定效果。但是, 最重要的是要证明, 每一种方法都为解决方案开辟了一条道路; 因此, 不只是一个能强大另一个, 而且我们在他们的协议中也享受最高的乐趣。因此, 绳子或挂链的曲率已被发现为由于重力的负载两个 a priori , 另一个是通过最大和最小的方法。因为它被认可, 绳子必须采取这样的曲率以使其中心的重力尽可能低。同样, 通过透明媒体的曲率射线既是从原则上确定的, 而且它们必须在最短的时间内到达一个特定的点。许多其他这样的例子都被著名的伯努利斯和其他人提出。

然而..... 最多或最少往往很难识别, 即使解决方案有 [既已] 被发现 **初步**. 因此, 虽然由弹性带所承认的曲形形已经很久已知, 但通过最大和最小的方法, 即最终原因, 对该曲线的研究尚未得到任何人。因此, 由于最著名和在这种更高的自然科学中最有前景的丹尼尔 • 伯诺利告诉我, 整个力量都存储在曲线上。弹性带可以通过某种公式表达, 他称之为潜在力量, 并且这种表达必须是弹性曲线的最低限度。我不能错过这个最受欢迎的机会, 以描述我的方法的有用性, 同时也出版了由著名的伯诺利发现的弹性曲线的这项令人惊叹的特性。对于此属性, 涉及第二衍生品, 因此上述处理方法解决以色列问题。[a] 它不够发展。

Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

[a] 以色列的差异计算中的分数问题可以轻松地翻译成一个功能的优化, 在整体的限制下。

这个段落包含了尤勒对机械的哲学方法: 自然现象可以通过因果分析和优化原则来理解, 数学提供两者访问。

柏林后年及返回俄罗斯 在柏林, 埃勒写了几部主要作品, 包括 **关于分析无限的介绍** (1748). 它被广泛视为现代数学分析的基本文本。在它中,Euler 定义了功能, 引入了对外和三角形功能的现代评级, 并将无限系列视为中央分析物体。它的影响力延伸到十九世纪, 形状分析, 复杂功能, 甚至 Fourier 理论, 并提供了工程数学的理论基础。

直到 1759 年, 欧勒已成为 **事实上** 是学院的首席执行官, 并受到越来越多的行政责任负担。在七年战争期间, 他还负责提供资金来维持行动。1760 年, 柏林被侵略俄罗斯军队占领, 欧勒的家被抢劫。俄罗斯指挥官道歉并命令赔偿; 皇帝伊丽莎白发送了一份额外的礼物, 这不仅覆盖了尤勒的损失。这个节目描述了欧勒命令的国际尊重和科学中立性的理想, 可以超越国家冲突。

凯瑟琳二世于 1762 年成为俄罗斯皇帝。作为科学和启蒙的强有力的支持者, 她寻求恢复俄罗斯科学院。谈判开始将埃塞勒带回圣地。彼得堡。凯瑟琳做了一个比弗雷德里克二世更有吸引力的报价,1766 年 - 在柏林二十五年的生产年份之后 - 埃乌勒回到俄罗斯。他在法庭上得到温暖的欢迎, 凯瑟琳介绍了他一个房子。[42]. 财务上安全,Euler 再次完全致力于研究。

到那时, 尤勒接近六十岁, 他的视力严重恶化。他在 1735 年失去了一只眼睛的视力, 另一只眼中形成了一个相关术语虫, 导致几乎完全的盲目。然而, 他的产量也增加了。令人惊讶的是, 他每年在这个最后阶段制作的文件数量超过了任何以前的期限。[43]. 他与助理们合作, 他对他们提出了问题的完整解释和解决方法。[44]. 1766 年至 1783 年间, 尤勒制作了 400 多张论文。在他去世四十年后, 俄罗斯科学院仍在年度记忆中发表他的作品。这种生产力表明了尤勒的精神力量和合作科学工作的有效性。

遗产和 奥姆尼亚歌剧 令人惊讶的是, 尤勒的作品在苏联更广泛地被称为和欣赏, 而不是在西欧大部分地区, 直到 20 世纪。1907 年, 瑞士欧元委员会、苏联科学院和德国民主共和国科学院合作启动了一项大型编辑项目。(被认为是普鲁士学院的法律继承人。). 这项国际合作, 以维持尤勒的遗产, 反映了他工作的持续重要性。

这一努力引发了出版的 **莱昂哈迪 · 尤利里歌剧奥姆尼亚**, Euler 的完整作品的最终学术版, 分为三系列:

1. 数学 (29 卷);

[42] 如今, 我们可以提到什么是 “Startup 包”
[43] 正如贝多芬在盲人时编写了他的第九交响曲一样, 尤勒因失明或年龄而无情。
[44] 就像史蒂芬 • 霍金一样, 他依靠助理来执行复杂的任务, 同时保持创造性的控制。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 机械与天文学 (31 卷);
3. 物理学与密歇尔 (12 卷).

尽管由于两次世界大战和随后的经济限制而中断, 印刷版 (72 卷) 它是完全的。截至最新更新, 仅有两卷关于天文学中干扰理论未公布。(Kleinert, 2015).

尤勒被普遍认为是历史上最伟大、最繁荣的数学家之一。[45] 他的贡献建立了多学科的基础。拥有超过 866 篇出版的作品和发现, 包括数学、物理、天文学和工程, 尤勒的影响力是无与伦比的。正如 Pierre-Simon Laplace 所说: “阅读 Euler, 阅读 Euller, 他是我们所有人的主人。”

也许最令人印象深刻的是, 尤勒也与数学中最著名的方程式之一有关, 即尤勒的身份:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{6.1}$$

这个身份结合了五个连续性: e, i, π, 1, 和 0, 并将添加、多样化和曝光结合在一个单一声明中。这是从 Euler 的公式中 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 它连接了异常功能、三角测量和复杂分析。

关于主要数学贡献的简短目录 他的基本贡献包括:

地理学与图形理论 (1736) 1735 年, 欧勒解开了 七个桥梁的 Königsberg 问题, 介绍 **地质网站** (位置地质) 建立图形理论和托波学的基础 (Euler, 1741).

数学笔记与象征主义 (1748) Euler 引入或标准化符号, 如 e, i, π, $f(x)$, Σ, 和现代三角学评级 (sin, cos, tan). 其系统性使用在 **关于分析无限的介绍** 对数学的国际化有重要贡献 (Euler, 1748).

现代分析的基础 (1748) 在 **关于分析无限的介绍**尤勒把功能的概念放在分析的中心, 并以统一的方式处理了无限序列、外观和逻辑函数以及三角形。(Euler, 1748).

变分法 (1744) Euler 建立了 变分法 在 *Methodus inveniendi* **线路曲线**, 将隔离优化问题转化为一个系统的解析理论 (Euler, 1744b). 这将进一步审查在 §9.3.2.2.

分析数字理论 (1730 年至 1750 年) Euler 采用 解析 方法来研究初级数字, 使用不同论点证明其无限性, 并引入了 Euler 的产品公式。(Euler, 1748).

桌子 6.4 总结主要作品。

Euler 和 结构力学 的数学基础 莱昂哈德 • 尤勒 (Euler, 1744b) 他是历史上最富有成效的数学家, 也是比任何其他人更为创造了结构力学的数學基礎的人。他的贡献几乎涵盖了机械学和应用数学的各个领域, 许多成果仍然由结构工程师使用。

Euler 的 **机械** (1736) 这是第一次全面处理应用计算。系统地解决机械问题, 改造新顿机械在解析而不是地质术语。在纽顿通过地质结构提出动态时, 尤勒将原则表达为可系统处理的差异方程式。这种改革 机械作为分析 能够解决超越地质方法的范围的问题, 并建立了分析运动的框架。, 力量, 和 平衡.

Euler 的关键 屈曲 荷载 衍生 对于列 (1744) 它仍然是结构稳定理论中最重要的成果之一。. 泡沫模式形状的概念也源于 Euler 的分析。

Euler 的工作在弹性曲线上 定义的差异方程式管理 梁 挠度, 将应用负载与变形联系起来:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

在适当的边界条件下, 这款表述 会产生故障、旋转和内部力量, 以便在自愿负载下进行冲击。许多经典的梁分析源于这个方程式。

[45] 其他数学家在讨论中经常提到 “最大的” 包括卡尔 • 弗里德里希 • 加斯, 亚基米德, 伊萨克 • 纽顿, 戈特弗里奇 • 威廉姆 • 莱布尼兹, 戴维 • 希尔伯特, 亨利 • 波恩卡´ 伯恩哈德 • 里曼。尤勒的区别部分在于他的生产力: 他收集的作品, **奥姆尼亚歌剧**包含 70 多卷。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 6.4: 莱昂哈德 • 尤勒的主要作品

标题 (拉丁语)	年度	组成地点	内容 / 意义
Mechanica sive motus scientia analytice exposita	1736	St. 圣彼得堡	使用差异方程式改造新顿机械; 在解析机械的基本工作。
Methodus inveniendi 线路曲线	1744	St. 圣彼得堡	基于变分法的基本处理; 引入了什么将成为 Euler - Lagrange 方程式。
关于分析无限的介绍	1748	St. 圣彼得堡	定义功能分析; 严格处理无限序列; 为现代分析设置基础。
分类: 计算差异	1755	柏林	对差异计算的系统暴露, 包括部分衍生品和差异方程。
分类:*Calculi Integralis* (3 飞机)	1768–1770	柏林	全面的整合计算工作; 包括集成方法和区别方程式解决方案。
信件 ` 位德国公主	1768–1772	柏林	著名的科学信, 涵盖物理学、天文学和哲学, 写给普鲁士公主弗里德里克 • 夏洛特。

Euler 也开发了 变分法在结构分析中提供能量方法 Castigliano、最低潜力能源、Rayleigh Ritz 以及支持现代结构优化的方法. 他的硬体动态工作, 流体力学, 和弹性扩展了数学工具可用于工程师。

Euler 的 体积 表格令人震惊: 他的收集作品填满了超过 70 卷。他继续制作数学, 即使失去视力后, 直到他去世为止, 他就机械、分析和数字理论的论文进行了独裁。几乎每个由结构工程师使用的解析方法都跟踪了一些其线性到 Euler 的工作。

6.7 从解析机械到连续和结构理论

此分類上一篇: 延長的貢獻者 **解析 机械** 超越粒子和硬体的 **继续**, **弹性**以及结构性反应。抽象的原则被调整, 以描述现实身体中的变形和物质行为。统一主题是数学形式主义与物理结构的整合。

6.7.1 查尔斯 • 奥古斯汀 • 德库伦布 (1736–1806)

适应从 *(Timoshenko, 1953* PDF*)* 查尔斯 • 奥古斯汀 • 德 • 库隆布出生于 1736 年, 在法国安哥莱姆, 成为一个家庭连接到行政和技术服务的国家。他在进入军事工程机构之前在巴黎获得了坚实的数学教育, 在那里地质、机械和建筑领域的先进培训为他提供实践服务。这个机构的路径 - 结合数学教学与即时暴露于真正的工程问题 - 形成了库伦布的终身方法: 仔细的实验, 由解析理性导向, 始终以实践应用为方向。

田野工程师: 马蒂尼克和记忆的起源 查尔斯 • 奥古斯汀 • 德 • 库伦布是一位令人兴奋的角色, 他的职业生涯描述了在十八世纪实用工程与理论机械之间的日益增长的联系。在接受他在巴黎的初级教育后, 他进入了工程师军队, 并在马丁尼克岛上停留。九年, 他监督建筑工作, 面对材料的机械行为和结构性能现实。在岛上远离大都会的智力刺激环境 他写了他的研讨会论文, **关于一个应用的** *Rè* **二是最大和最小** *à* **一些问题** *è* **静态的关系** *à L* **建筑** 1773 年, 他提交给法国科学院。这项工作展示了殖民工程实践如何推动理论创新和推进机械。在他的预言中, 库伦布以特征性谦虚地指出:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 这篇几年前写的记忆, 最初是为了我自己在职业中所从事的工作中的个人用途。如果我敢向这所学院介绍, 那只是因为最弱的努力在有用的目标时受到它的欢迎。此外, 科學是為公共利益奉獻的紀念碑。每个公民都应该根据自己的天赋为他们做出贡献。至於大人將被帶到建築物的頂部, 在那裡他們可以顯示和建造上方的樹木。普通的工人, 他们分散在底层或隐藏在基础的黑暗中应该只寻求完美那些更聪明的手创造。
>
> Coulomb, 1773a *"Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture"*

返回法国: 摩擦、机器和实验方法 回到法国后, 库伦布重新开始担任工程师的工作, 并更直接进入了学院的科学生活。他分享了一项奖项, 以获得关于最佳设计的论文。1781 年, 他为纪念品获得了另一个学术奖。*Thé* **奥里 · 德斯机器简单**在其中, 他展示了对材料 - 干燥和润滑的磨损方面的广泛实验的结果。这些系统的测量提供了机械设计至关重要的数据, 并帮助建立一个实验性的基础 特里布 [46].

1781 年之后, 库伦布在巴黎永久停车。在那里, 他被选为学院, 并获得了更好的研究设施的访问。他越来越多地转向电力和磁性,[47] 开发一个非常敏感的扭转平衡, 以测量分钟电力和磁力。在此过程中, 他研究了电缆对扭转的抵抗性　一个进一步探索的区域。§10.3.2.1.

工作在 扭转 和 弹性 库伦布的实验 扭转 不仅进一步了解磁性, 还为旋转机械奠定了基础。他引发了曲线和角形变形之间的关系, 他的测量在电缆中的粘膜抵抗设置了后续进展的阶段在弹性. 这些洞察力不只是与他的电气研究相结合, 它们在弹性材料的特征中成为一个角落。他的扭转实验代表了十八世纪最准确的机械测量, 并建立了工程师将使用几代的方法。

18 世纪的任何科学家都没有像库隆布那样为弹性身体的机械做出贡献。他的创始进展在弹性主要是在 1773 的记忆中发现, 这有助于桥梁实验建筑实践与新兴理论机械。

机械中的影响与遗产 雖然科羅姆在理論框架上可能不像紐頓、歐勒或伯諾利那樣高, 但他的精心實驗工作為應用機械奠定了關鍵基礎。他的动作研究, 扭转和弹性影响了十九世纪的 Navier,Cauchy 和 Saint-Venant 的工作, 谁扩展和正式化理论的应力和应变. 库伦布的遗产在于他能够将精心测量转化为持久的物理法则。也许最重要的是, 他展示了如何系统的实验调查可以产生数值关系, 这既在理论上有意义又在实践中是有用的。

个人特征与历史挑战 库伦布的性格被谦虚和谨慎所标记。尽管多年来一直在殖民孤立中工作, 远离欧洲学习中心, 但他从未停止过他的科学调查。他经常把自己描述为一个 "建造者在基础" 科学, 向其他人交给公共信贷。然而, 他的持久性, 尤其是在实验精炼中, 使他成为十八世纪应用机械的前沿。

雖然他現在經常被記得為他的電靜學法則, 但在機械中, 科羅姆的貢獻是必不可少的: 他提供了嚴格的實驗數據和物理模型, 引導了結構科學在未來幾個世紀成熟。他的职业生涯模仿工程师科学家谁结合了实践专业知识与理论洞察力, 以推进工程实践和科学理解。[48].

[46]特里布学是研究相对运动的互动表面刺激、穿戴和润滑的跨学科科学。它包括管道、螺旋和滑板表面设计, 开发润滑剂和表面处理, 以尽量减少机械系统的能量损失和物质衰退。地质工程和混凝土在建筑和基础设施应用中的土壤结构振动。

[47]有趣的是, 正如我们稍后看到的那样, 他的扭转研究是由原来用于磁性研究的设备启用。

[48]结构和机械工程的显著例子包括古斯塔夫 • 艾菲尔 (Gustave Eiffel), 他将风负载和物质压力先进理论分析与桥梁和铁塔建设创新技术相结合; 约翰 • 奥古斯图斯 • 罗布林 (John Augustus Roebling)。谁开发了两个数学理论的悬挂桥设计和实用的工程方法, 使布鲁克林桥; 和史蒂芬 • 蒂莫森科, 谁创造了基本的梁和板理论同时解决现实世界问题在结构振动和稳定。不幸的是, 现代专业的专业化很大程度上将理论研究与实用工程分开, 相对较少的当代实践者拥有深度科学理解和实用的工程专业知识, 相反, 许多科学家理解理论, 但缺乏实用工程经验。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

6.7.2 SIMé 丹尼斯 • 波伊森 (1781–1840)

SIMé 丹尼斯 • 波伊森 (Denis Poisson) 出生于 1781 年, 在法国的皮蒂维尔斯 (Pithiviers), 一个谦虚的家庭。他的独特的数学天赋早已被认可, 他被接受了 ´ **合物学科** 成立后不久, 在法国科学教育的革命后重组期间。在那里, 他在拉普莱斯和拉格兰奇的影响下, 其解析对机械的态度深深地塑造了他的智力发展。与他一代的许多工程师科学家不同, 波森追求了一项主要数学职业生涯, 支持解析的一般性和正式完整性超越实验调查。

革命后世代的分析师 SIMé 丹尼斯 • 波森是一位法国数学家和物理学家, 他的名字仍然包含在科学的多个分支中, 从概率到弹性. 一位拉普莱斯的学生和一位福里亚的当代人, 波森在十八世纪至十九世纪之间的过渡时期作为一个中心人物出现。推进拉格兰和拉普莱斯的解析机械传统, 同时适应不断物理学和工程的新兴需求。

他的职业生涯与法国科学工程教育的机构巩固相匹配, 特别是通过 *É* **科利 · 波利特尼克**, 在数学严格系统地应用于机械、材料和物理科学问题。波伊森属于第一代, 其先进分析不仅仅是天文机械的工具, 而且是描述物质内部行为的语言。

弹性和第二个弹性恒久 在机械学中,Poisson 最著名的是引入第二个弹性恒久 - 现在称为 **泊松比**量化物的侧面缩小, 受轴延伸的物质。这个概念标志着一个决定性的步骤超越胡克的比例性, 承认变形本质上是三维: 在一个方向的延伸必然导致交叉方向的缩小。

波伊森的表述精化了纳维尔启动的线性弹性理论, 并提供了系统的方式来将长度和转向线条在一个以色列固体内联系起来。通过将 Poisson 的比例定义为一个内在的物质属性,Poisson 帮助将弹性从一维法则集合转化为真正的连续理论。这一观点为圣文南特和全发达的海军拉姆的后续澄清奠定了重要基础。é 方程式

连续行为的数学 波森的工作代表了关键阶段在 **数学** 物质行为。而不是依靠地质直觉或实验类似, 他试图通过部分差异方程式来描述弹性反应, 统治整个身体的应力、应变和位移领域。在这样做中, 他帮助确定边界值问题作为弹性和连续介质力学的自然框架。

此 解析 观点也导致 Poisson 超越 弹性 的重要成果。他的方程式 - 現在被稱為 **波森的平衡**在重力和电静潜力的研究中出现, 但其数学结构在弹性、流体力学和热导体中再次出现。方程式示例如何本地来源 (力量、负担、重量密度) 确定全球领域行为, 一个概念中心的结构和物理分析。

与海军的关系和工程问题 波森的职业生涯是与克劳德 • 路易斯 • 纳维尔 (Claude-Louis Navier) 的智力紧张, 特别是关于抽象数学在工程中的作用。Poisson 赞助数学完整性和 解析 优雅, 而 Navier 强调物理模型和实用性。这些分歧远不只是个人的, 反映了数学驱动的连续理论和工程导向的结构分析之间的更深的纪律分裂。

在后期, 竞争表现出生产力。波伊森对解析一致性的坚持加强了弹性的理论基础, 而纳维尔的工程观点确保了与现实结构相关。他们共同努力形成了弹性理论的形式, 后来由 Lam 解释。é 和圣文。

影响力和遗产的广度 除了机械之外,Poisson 还为概率理论做出了持久的贡献。(鱼的分布), 解析 动态 (鱼布拉克) 还有数学物理。他的波传播、液压和电静学工作影响了十九世纪物理学的深度, 因为他的弹性理论影响了工程。

在结构力学中,Poisson 的遗产不在于孤立的公式, 而是在他作为桥梁人物的角色: 他帮助从早期机械直觉中将弹性带入数学一致的连续理论。其名字的参数在现代构建模型、最终单元格式和物质特征中仍然是必不可少的。

> 有关分析细节，请参见 *§10.3.2.5*

6.7.3 克劳德 • 路易 • 马里 • 亨利 • 纳维尔 (1785–1836)

克劳德 • 路易 • 玛丽 • 亨利 • 纳维尔 (Claude Louis Marie Henri Navier) 出生于 1785 年在迪昂。當他十四歲時, 他的父親死了, 小男孩是由他的母叔生長的。*E*。**盖特**, 一个著名的桥梁工程师和一个成员的 **桥梁和山脉** ´**面** . 这种家庭联系在早期引导了纳维尔进入工程世界。纳维尔在法国工程设施内的教育塑造了他的信念, 数学理论应该了解实践建设, 这将定义他整个职业生涯的视野。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

十七岁时, 海军进入了著名的 ´ **合物学科**, 进入 117 名学生的入门班中一个谦虚的排名。尽管这个谦虚的开始, 他很快就把自己分开了, 在他的第一年结束时升到十位。后来他加入了 **桥梁和山脉 ´ 面** 在那里, 他将花费其余的职业生涯平衡行政, 学术和科学责任。这个制度的道路 - 从 **政治学科** 代表了法国先驱的科学工程教育的新模型, 最终将遍布整个欧洲。

虽然在 **政治学科**海军在约瑟夫 • 福里尔的影响下, 其解析对热和波的态度深深地影响了海军的思维。(Cannone and Friedlander, 2003). 与他时代的许多工程师不同, 他们依靠实验规则, 纳维尔支持数学上严格的方法。他编辑和出版了他的叔叔的论文。**特拉特 ´ 梁的** (Gauthey, 1813) 将历史观念与理论严格相结合。

海军的影响力超越了研究。他的工程文本介绍 解析! 机械 在工程教育, 标志着从实验工艺到科学严格的学科过渡的一个转折点。这些文本提供了基础用于应用数学方法的工程问题, 特别是在弹性和流体力学. 他的教学方法建立了现代工程教育的模板, 强调数学原则而不是实验规则。

他的职业生涯并没有没有机构的震动。纳维尔的理论研究 - 特别是 1820 年代早些时候, 他从维斯科流体运动的方程式中产生的 - 做得有点差异化, 因为他的上级优先于实用的桥梁设计。这反映了理论和实践工程之间的更广泛的机构分裂, 最终超越了一个海军独裁。他的能力与理论合成实践, 他得到了两者的赞誉。**阿卡德 *é* 我的科学** 练习工程师 (Cannone and Friedlander, 2003).

他也有专业的竞争, 尤其是与 SIM´ 尼斯 • 波伊森 (Denis Poisson) 介绍了第二个弹性恒久 (泊松比) 并提供了关于弹性理论的竞争观点。尽管有时是争议的, 但他们的讨论激发了弹性模型的改进, 并为圣文南特的后续发展奠定了舞台。

灵活性 1826 年, 他的 *Leç* **我们数据到皇家学校的桥梁和街道关于应用机械到建造和机器** (在皇家桥梁和道路学院授课关于机械对结构和机器建设的应用), (Navier, 1826) 海军精确确定了海军的位置。中性轴 以 梁弹性曲线。通过应用水平、垂直和时刻的条件平衡 , 他表明, 中性轴通过交叉部分的中心。他的工作建立了几个基本原则: 飞机部分在弯曲期间保持平面; 对直角部分, 中性轴位于中间深度; 并且这些结果仅限于弹性范围内。這些原則成為現代梁理論的根石, 並且仍然是今天的结构分析基本。(§7.3).

海军引入线性曲线关系 $M = fS$, 放置一个古典梁理论的角石。与其先驱, 如 Parent 和 Coulomb 不同, 其贡献大部分仍然是学术的,Navier 的公式获得了广泛的采用在工程设计, 因为他们的清晰度, 严格性和可应用性。

弹性 海军经常被认为是现代国家的创始人。弹性 理论。1821 年, 他向 **研究所,《坚固的身体运动的法则》**, (Navier, 1827b) 将平衡的整体方程式和连续弹性身体的运动结合起来。这些方程不仅适用于内部点, 而且在边界上也规定的条件。[49] 这个表述代表了连续媒体中的弹性行为的第一个完整数学描述, 为固体机械的所有后续发展提供了理论基础。

纳维尔最初使用了一种单一的弹性恒定, 他于 1822 年修订了它, 以包含两个独立的材料参数, 提高模型的整体性。这些论文后来由他的学生圣维南特精化, 但纳维尔提出了理论的基本结构。

1826 年出版 *Leç* **我們**, (Navier, 1826) 它仍然是工程文学的一个步骤。它介绍了第一一般理论的弹性固体, 并提供了第一次系统处理结构力学. 当时, 弹性理论和结构工程之间没有明显的界限, 像 Navier 这样的人物都深深地参与了这两件事。

维斯科液体 纳维尔在流体力学上的工作在现在被称为 Navier - Stokes 方程式的表述中突出。他的 1822 年论文引入了内部震动的概念。(维斯科) 并提出, 流体的抵抗率是与应变的速度相比例的 - 一个提前假设。尽管他的作品最初被忽视, 但它形成了后续发展在连续介质力学的概念背景, 并仍然是流体动态的中心今天。这些方程式具有广泛的实用应用, 包括飞机和汽车设计。(空气动力和阻力减少), 天气预测和气候模拟, 海洋流动模拟、心血管医学的血液流量分析、建筑物和桥梁的风荷载计算、泵、涡轮机和喷发器的设计、石油和天然气管道流动、污染分散模型、船洞设计和 HVAC 系统优化。这些方程式对计算流体动态至关重要 (CFD) 在工程学科中使用的软件。

遗产 纳维尔的持久遗产在于他能够将实验观察与分析表达合成。他将结构和流体力学转化为由差异方程而不是实验图所统治的学科。他的文本教导了几代工程师的新精确语言, 他的理论仍然是弹性和水力学的研究的核心。

[49]这个全面的系统包括 15 个双重领域方程:3 个平衡方程,6 个构成性胡克压力 - 线路关系和 6 个地质线路 - 定位方程 - 为 15 个未知 (6 个压力,6 个紧张和 3 个转移).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

虽然不是如此广泛地被称为纽顿或尤勒在更广的科学管道, 在工程和应用机械中, 纳维尔站在巨人中间, 因为他在将工程转化为准确的科学中的作用。他的方法建立了工程科学的范式, 今天继续引导这个领域: 数学分析对实践问题的系统应用。

桥梁 菲亚斯科 直到十八世纪末和十九世纪初, 大多数结构都是用石头建造的。但是, 由工业革命引发的 (1760–1840) 特别是铁生产, 新金属桥梁在英格兰建造。(而美国。). 约翰 • 斯梅顿 (1721–1792) 他是第一位优秀的工程师, 在任何程度上都使用了铸铁。第一座钢铁桥建造（1776–1779 年）亚伯拉罕 • 达尔比 (Abraham Darby) 的《西文河》。其他國家跟隨英格蘭, 並且在世紀的轉折點上, 德國和法國出現了鐵橋。这些桥梁以弓形建造。这些新结构并不总是正确的尺寸, 许多失败 [50]. 工程师们得出结论, 钢铁桥可能不安全于大桥梁, 并开始建造悬挂桥 (Timoshenko, 1953). 此过渡表明, 结构性失败往往在材料和结构形状方面如何引发创新。

第一座这样的桥是在 1796 年由詹姆斯 • 芬利在宾夕法尼亚建造的。芬利是一位熟练的工程师, 在一个非常不同的环境中工作, 与海军在一个 **大学校**例如,1800 年农村美国。芬利是实用和实验性的, 成功地寻求生产可工作的、简单的、基因设计, 可以由农村黑人建造。他的成功的一个迹象是, 到 1820 年, 他拥有了一些专利, 在美国建造了四十多个链锁桥。芬利的创新是在英国由退休的海军船长萨缪尔 • 布朗 (Samuel Brown) 采取并扩展, 他通过实验确定了在悬挂桥索中铁连接的最有效形式。他成为悬挂桥的领先建设者, 包括 1820 年联盟桥在 Tweed 河上, 其宽度为 436 个。英尺几乎是美国建造的任何桥梁最长的两倍。联盟大桥在英国的其他工程成果, 包括由工业革命先驱布鲁内尔、斯蒂文森和特尔福德建造的桥梁。(Cannone and Friedlander, 2003). 这种跨大西洋的思想交流表明, 工程创新如何越过国家边界, 即使在有限沟通的时代。

英国工程师跟随美国人, 在十九世纪的第一季度, 许多这些桥梁在英格兰建造。其中最重要的是, 梅纳桥的中心范围为 550。ft, 由 Telford 设计 (1757–1834). 因此, 经典的治疗 Pope, 1811 已经发表了。法国政府, 感觉他们被留在后面, 呼吁 **公路和街道学校** 协助在悬挂桥技术的开发。他们自然地看着英国。根据其高级官员的要求, 海军 (谁已经在桥上发表了他的叔叔的作品) 1821 年和 1823 年两次前往英国, 以研究悬挂桥梁。然后他介绍了他的 **關於報告和紀念** *Les Ponts Suspendus* (Navier, 1830), 其中不仅包含了领域的历史审查和最重要的现有桥梁的描述, 而且分析这些结构的理论方法。

在这本书中, 纳维尔首次引入了数学家的解析和抽象方法。他试图描述抽象的力量和挑战, 而不是实验性的挑战。**阿德霍克** 接近。他做了应用数学家在构建一个数学模型时所做的事情。正如他所指出的那样,

> [模型需要] 一个特定的艺术, 它是用其他问题来替换要解决的问题本身, 这些问题尽可能差不多, 数学可以适用。
>
> Navier, 1830 Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus

纳维尔建议, 结果将被重新编制以确定它们应该相关的理论界限, 并使用数学分析来确定重要参数之间的关系。五十年来, 这份报告是关于悬挂桥梁设计的最重要的书籍之一。引用一个通道 (Picon, 1988):

> 很可能, 暂停桥的使用很快就会变得广泛; 通过这种方式, 我们将建立在目前看起来不可能的地方的通信链接。…这些结构将表现出形状的优雅, 由平衡的自然法则不断决定; 如果由有才华的工程师设计, 它们也可以为首都城市的装饰做出贡献, 或者在流浪谷中暂停。他们可以产生最强大的影响, 在山区的画作设置。這些建築物將向想像力展示人類藝術的力量, 為了公共利益, 超越大自然設立的障礙, 長久保持不可戰胜。
>
> Picon, 1988 *"Navier and the introduction of suspension bridges in France"*

到了纳维尔实行他的理论的时间, 他提出了一项项目, 在巴黎的塞内上设立一座悬挂桥, 而不是被视为他的理论研究的应用。桥将由埃及风格的皮尔组成,3 m 直径和大约 15 m 高, 空间 170 m 分开, 穿过的链条, 每个形成了九个轨道的圆形干铁连接。该链将为支座一个平台 9.5 m 宽, 重近 600 吨。这是一个雄心勃勃的项目, 其

[50] 可能是英格兰的失败。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

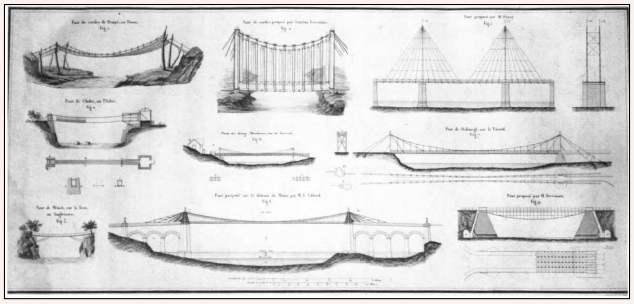


图 6.17: 纳维尔的描述, 从原始的土著人民桥梁到特尔福德的梅奈桥 (Picon, 1988)

规模几乎相当于特尔福德的梅纳桥。1823 年, 由 **桥梁和街道** 权威。纳维尔声称已终结了理论与实践之间的离婚, 不值得一 “如同光明的身体 **桥梁和街道**” (Picon, 1988).

事实上, 在这个地方没有紧急需要一个桥梁, 因为它是在巴黎东部。相反, 纳维尔寻求伟大和美学 - 一个建筑物将添加到 **荣耀** 法国和他的爱人 **桥梁和街道**. 他想证明两者, 一个美丽的桥梁可以是由铁制成的。(而不是石头) 它可以按照理论分析的说法进行。正如他写的那样,

> 没有紧急需要建造桥梁到埃利西亚广场 …但是, 如果有人想建造, 那就让它变成纪念碑。…让其安排以由艺术家批准的建筑构建的想法计算, 对公众有好处, 对管理层有荣誉。
>
> …此研究 (关闭桥梁) 没有近期数学分析取得的进步, 以及通过这些机构, 公共工作指向的人将被引入最先进的数学思想是不可能的。
>
> Navier, 1823 Rapport à Monsieur le Ministre de l’ Intérieur sur le projet d’ un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées

因此,1823 年, 海军向其高级官员提出了明智的计划。**桥梁和街道**. 每一个细节都是基于理论分析的设计, 纳维尔有足够的信心, 他不依靠常规工程实践。“过度建设” (即, 添加一个安全系数). 这种信心今天是不可想象的; 现代代码包含符合可靠性指标的安全因素 [51]. 专家委员会对纳维尔的项目表示非常有利, 并确信 “理论到处都照亮实践” (Cannone and Friedlander, 2003). 本集描述了早期工程科学的承诺和危险: **数学分析的力量与实践不确定性的不完整理解相结合** [52].

桥梁几乎完成了, 当链条安卡拉点出现轻微的动作时。这个运动在广场埃利西亚侧面加剧了 1826 年 9 月 6 日至 7 日的夜晚, 城市的一条水道的裂缝。m 直径。水的流浪之源 (头下 30 m) 从 Chaillot 的储备组成了一个游泳池旁边不完整的挖掘, 并导致已经完成的土木的渗透。Scaffolding 安装, 但高潮、冬季寒冷和财务担忧延迟了紧急安克拉格的巩固。决定将修复延迟到下个赛季, 并拆除地板和链条。最终, 完成的工作被拆除。(Cannone and Friedlander, 2003). 因此, 失败不是结构性的, 而是地质上的。 [53]. 这种失败作为提醒, 即使是最复杂的结构分析也只是对整个系统的理解, 包括基础和环境条件一样好。

萨尔卡斯特的文章出现在报纸上反对军队, 纳维尔被称为 “那個著名的科學人, 他的計算在巴黎失敗。” 政府委员会成立, 调查事故的技术和财务范围。**残疾人桥**. 批评被带到教堂, 因为他太依赖理论, 并且比英国和美国工程机构过于自制和精英。它被建议, 如果它们无法抵抗, 链条必须太重的胡萝卜。“轻微事故”. 相比之下,

[51] 讨论在 §37.3 至少等于 3

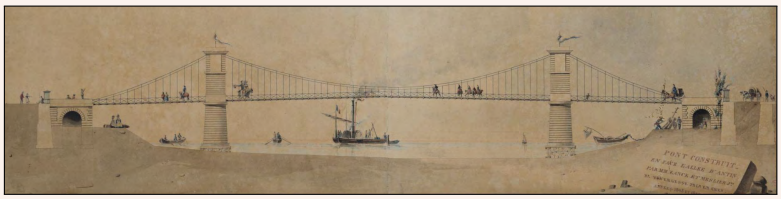
[52] 结构工程的例子包括 1940 年塔科马纳罗斯桥崩溃、2000 年伦敦千禧一代桥侧振动问题以及 1978 年西托克尔普中心四角风逆转。

[53] 海军的案例并不独特。莫塞夫在塔科马纳罗斯悬挂桥的完成和崩溃后三年逝世 (1940). 在法国, 在纳维尔的桥梁事故 100 年后, 马尔帕塞特钻井, 由一个伟大的 **波利技术** 工程师 André 可恩 (从那时起, 他们设计了大约 100 个女士。) 失败 (再一次不是结构性失败, 而是岩滑) 423 人死亡。科恩因这起事故遭受了深刻的伤害, 六个月后死亡。(Londe, 1987).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 特尔福德桥 (超越菜单)



(b) 海军建议的残疾人桥

图 6.18: 海军和特尔福德 (桥梁)

英国桥梁建设者的优秀成就被称赞为不 “数学” 这个问题。纳维尔失败的后果描述了对工程理论和实验方法之间的紧张局势, 这是今天以各种形式进行的辩论。

事实上, 从理论家/数学家到桥梁建设者的纳维尔的轨道只能与更实用的轨道相矛盾。

6.7.4 饰 Jean le Rond d’Alembert (1717–1783)

Jean le Rond d’Alembert 出生于 1717 年, 在圣日内瓦教堂的脚步中被遗弃为婴儿。他是由一个养育家庭长大的, 后来被他的生物父亲, 一名炮兵官员的财务支持 - 特别是在分歧上。德 • 阿伦伯特在四国学院接受了严格的教育 (马扎林学院) 在那里他在数学、哲学和科学方面受过训练。虽然他最初是向神学和法律方向的, 但很快他决定性地转向数学, 追求科学研究大多在正式的学术结构之外。这种非传统的道路促进了他对思想的独立性, 并强调了对传统的抽象思维。

动态和减少到 平衡 Jean le Rond d’Alembert 是一位重要的启蒙思想家, 他的工作帮助将机械从地质和力量驱动的框架转化为一个基于抽象原则。在他的 **动态条约**, (d’Alembert, 1743 PDF) 他介绍了现在所谓的 阿伦伯特的原则. 这个原则规定, 所应用的力量和无情的力量的总额 - 以相反的标志采取 - 必须消失, 所有虚拟移动。通过将无情作为一个虚构的力量, 德 • 阿伦伯特重新引入纽顿的第二法则到平衡的状态。

> 有关分析细节，请参见 *§36.3.1*

这个回报是深的。它将动作问题转化为正式相当于静态的问题, 从而允许虚功和平衡的方法应用到动力。在这样做中, 德 • 阿伦伯特提供了新顿机械与后来由拉格兰奇正式化的解析机械之间的概念桥梁。和 **动态条约** 因此, 它是开发虚功方法、通用坐标和能量原则的基本工作, 这将占主导地位十九世纪机械学和结构分析.

百科全书与理性主义计划 德 • 阿伦伯特也是对 **百科全书**作为编辑合作 (与 Diderot) 其数学和科学论文。在这个角色中, 他成为十八世纪法国理性和科学形式主义的领先声音之一。他的坚持清晰度、抽象和数学结构, 塑造了机械的介绍作为一个引导科学而不是实验规则的集合。通过 **百科全书**阿伦伯特帮助将数学机械传递给广泛的智力观众, 并在启蒙的文化结构中引入科学理性。

振动和波宣传 除了动态之外, 德 • 阿伦伯特还为振动理论做出了种子贡献。他的振动线分析导致一个维度波方程式的表述, 这是数学物理学中最早和最重要的部分差异方程之一。虽然起初有争议, 尤其是关于边境条件和可接受的解决方案的问题, 但他的波传播工作为弹性、音频学和结构动力学的后续发展奠定了基础, 在那里波方程控制着线条、线条和板块的振动。

机械发展中的立场 虽然德 • 阿伦伯特的风格比拉格兰奇更不系统和全面, 但他的概念创新使他成为纽顿机械与现代解析机械之间的关键过渡人物。他澄清了无效的作用, 正式化了动态减少到平衡, 并引入数学结构, 后来成为不可或缺的理论弹性和振动。通过他的技术工作和编辑角色在 **百科全书**阿伦伯特帮助建立机械作为一个合理, 抽象和普遍应用的科学。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

6.7.5 约瑟夫・路易斯・拉格兰奇 (1736–1813)

约瑟夫・路易斯・拉格兰奇 (Joseph-Louis Lagrange) 出生于 1736 年, 后来是萨尔丁王国的一部分。他的父亲在政府的立场上, 最初提供了财务保障, 但后来家庭财富下降了, 加强拉格兰奇依赖于智力成就而不是社会地位。尽管他首先是为了法律或行政职业生涯, 但拉格兰奇在独立学习加利利奥、纽顿和尤勒的作品后, 作为一个年轻人, 决定性地转向数学。令人惊讶的是, 他在高中数学方面大多自学, 在任何正式学校或建立的传统之外发展了他的想法。

在十九岁时, 拉格兰奇写信给尤勒描述了他在变分法的早期结果。尤勒立即认识到他的天赋, 并成为导师和支持者, 帮助确保拉格兰奇在欧洲科学界的快速崛起。这种早期独立, 与年龄的主要分析师的鼓励相结合, 形成了拉格兰奇对抽象思维和一般方法的终身偏好, 而不是地质或实验论点。

解析 机械与消除力量 约瑟夫・路易斯・拉格兰奇 (Joseph-Louis Lagrange) 与他的标志性工作基本重组机械 **机械分析**, (Lagrange, 1788 PDF) 在此, 他将力量概念作为原始的消除, 并从虚功和能量的原则中构建整个理论。通过引入通用坐标和变量方法, 拉格兰奇开发了一种统一应用于复杂机械系统的框架, 无论是静态还是动态。这个方法代表了最终的 **数学** 机械, 减少所有的物理问题在解析地质和计算的练习。

与纽顿机械相反, 根源于力量、图表和地质结构,Lagrange 的表述只需要规模数量、坐标和衍生物。无论是荷洛尼或不, 混乱都通过通用坐标系统地融入, 而不是由地质天才解决。这种抽象使前所未有的复杂性问题能够以概念清晰度和数学经济体来解决。

机械分析 **其遗产** 拉格兰奇的方法将机械提升到纯数学的一个分支, 并为后者物理学发展提供了基础, 包括哈米尔顿机械学、领域理论和现代解析动态。著名的前面是 **机械分析** 声明“在这项工作中不会找到任何形象”, 一种有意的方法声明: 物理洞察力必须完全编码为方程式, 而不是图表。

拉格兰奇的论文仍然是现代理论机械、工程动态和控制理论的核心。能量方法、通用坐标和变化的原则现在是引动方程式和平衡的标准工具 直接跟着他的工作。在二十世纪, 这个纯粹的解析观点会证明与计算力学特别兼容, 在那里物理系统被代表并通过数值操作方程式而不是地质结构解决。

关于拉格兰奇的科学贡献, 更多信息 §10.3.2.2.

6.7.6 卡西 (奥古丁 - 路易斯 1789-1857)

奥古斯丁・路易・卡奇出生于 1789 年, 在法国革命的开始。他在新成立的数学教育 ´**合物学科**, 一个机构明确创造, 以提供国家的工程师在先进分析训练。Cauchy 早些时候以其独特的解析能力区分自己, 很快就追求了一项结合数学、机械和公共服务的学术职业生涯。他的形成年与法国机械的更广泛转型相匹配, 在那里严格分析越来越被视为物理理论的正确基础。

应力在一个点和机械的本地视图 Augustin-Louis Cauchy 对数学和理论机械做出了深入的贡献, 基本上恢复了 解析 的基础, 以及 弹性 和 连续介质力学. 他的主要机械贡献是引入概念的 **应力在一个点上**. 在 Cauchy 之前, 机械学家分析了在整个交叉部分上运作的力量 - 如一条线上的总压力或柱中的结果压缩。Cauchy 取代了这个完整的观点, 用一个本地, 定义 应力 作为限制强度对区域的比例, 因为区域缩短到一个点。

从全球结果转移到点意识领域, 这使得表述的部分差异方程式能够控制在自愿负载下具有自愿形状的体内力量状态的基本方程, 即弹性。因此, 机械学从一系列力量平衡论点转化为由当地法律统治的领域理论学。

应力张量 和 平衡 一个关键的观点是, 应力在某个时候不能由单个尺寸或甚至一个向量代表。而不是拖动。(各单位区域) 通过一个点在表面上行动取决于该表面的方向。Cauchy 证明这种依赖是线性的: 如果三个相互偏向的飞机上的拖动 vectors 已知, 那么任何飞机的拖动可以通过线性转变来确定。结果定义了 **应力张量**二级发动机配备 9 个组件, 其中 6 个在平衡条件下独立。

压力感官形式主义统一了以前看起来不一样的现象: 紧张、压缩、相关术语和它们在复杂的压力状态中的组合。Cauchy 引发了与不同坐标系统中的 应力 组件相关的转型法则, 确定了主要压力 和主要方向, 并建立了当地的平衡方程式, 应力字段必须满足整个身体。这些发展奠定了现代连续机械的数学基础.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

从 弹性 到计算 Cauchy 的框架是现代计算力学的核心。每個 有限元分析 在整合點上評估 应力 緊張器, 將其轉化為主要坐標, 並對立法和失敗標準進行評估 - 是 Cauchy 的 表述 的直接後裔的程序。他的工作提供了在固体机械中以后开发数值方法所需的语言和结构。

勇气与遗产 超越应力,Cauchy 有助于应变理论, 结合应力与变形的构成关系, 以及数学分析的严格基础, 包括准确定义限制、convergence 和复杂功能。他的坚持逻辑准确性将机械从自然哲学的一个分支转化为数学科学。他引入的概念装置 - 压力和紧张压缩, 平衡和兼容性方程式, 以及构成关系 - 保留了坚固的机械和结构工程的基础。

更多关于 Cauchy 的科学贡献在 §10.3.2.4.

6.7.7 乔治绿 (1793–1841)

乔治 • 格林出生于 1793 年在英格兰诺丁汉姆, 成为一个谦虚的家庭。他接受了很少的正式教育, 他大部分时间都工作为一支火柴, 协助他的家庭风炉的运行。尽管如此, 绿色独立追求数学, 研究先进的解析工作大多是自己的。他的科学发展发生在与学术机构密切隔离, 使他的后来的贡献越来越显著。只有在生命中晚些时候, 格林才进入剑桥大学, 在那里他的早期工作终于被认可并吸收到数学大流。

1828 年《论文与潜力理论》1828 年, 在成立的科学社区之外工作, 绿色出版了一篇单独的论文。**关于数学分析对电力和磁性理论的应用论文**. 这项工作引入了现在被称为绿色理论和绿色功能的概念, 这些概念在数学物理学中将成为基础。

虽然在潜力理论中框架, 但论文的后果远远超出了电力和磁性。通过引入一个域内领域值与其边界值相关的综合身份, 绿色提供了一个强大的方法来解决边界价值问题。这些想法证明不仅在电静态方面是必不可少的, 而且在弹性、流体力学和热导中也是必不可缺少的。

能源方法与变量视角 格林的作品随意引入了一个以能量为基础和变化的视角, 以解决部分差异方程式。通过表达综合运营商和核心功能的解决方案, 他为后来由汤姆森正式化的方法奠定了基础。(凯尔文先生) 雷利和其他人在研究弹性能量、稳定性和振动。他的方法揭示了全球数量 (如能量和工作) 如何用来确定本地领域行为, 这是现代连续介质力学的中心观点。

边界方法和计算遗产 尽管在他一生中只出版了一些文件, 但格林的遗产仍然持久。绿色的功能现在是工程和物理学中的许多解析和数值技术的背骨。特别是现代基于边界的计算方法, 尤其是边界元法。(贝姆) 完全依靠绿的身份, 将体积问题转化为相同的边界表达。这种方法在线性弹性、音效、电磁、断裂力学和流体动态中广泛使用。

数学物理学的统一 格林的作品表现出数学物理学的统一性: 为一个物理理论开发的技术往往在其他方面再次出现, 大多不变。他的 1828 年论文描述了深度数学的洞察力, 即使在孤立中发展并应用于狭窄的问题时, 也能塑造整个学科。在结构力学和计算分析中, 格林的想法仍然是不可或缺的, 几乎两世纪后它们被引入。

6.7.8 阿德´ Jean Claude Barr´ 文特 (1797–1886)

阿德´ Jean Claude Barré de Saint-Venant 出生于 1797 年, 在 Villiers-en-Bî 里, 法国。作为工程师训练, 他进入了 ´堂, 桥梁和街道 ´面, 在那里严格的数学教学与实用工程教育明确相结合。这种双重形成 (解析和建设性) 将定义他的整个职业生涯。与纯粹的学术机械师不同, 圣文特在理论和应用界面上工作, 寻找数学上的语音, 但实习工程师可以使用。

弹性理论的系统化 Saint-Venant 以其先驱, 主要是 Navier 和 Cauchy 开发的 弹性力学 的精炼和系统化而闻名。他通过明确的体力和边界条件来改善弹性理论的普遍性, 并在纳维尔的原始论文中解决了限制。在这样做中, 他将弹性从数学上优雅但不完整的理论转化为一个一致的框架, 适用于实际工程问题。

Saint-Venant 在抽象连续介质力学和工程实践之间发挥了关键的调解作用。通过将复杂的机械概念翻译成方法, 工程师可以直接应用, 他建立了现代结构分析的理论基础很大一部分 - 今天仍然是工程实践的核心。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

扭转 和 Prismatic 酒吧的封锁 Saint-Venant 最受欢迎的贡献涉及 扭转 和 Bing 原始酒吧。旋转问题 - 确定压力分布和旋转的角度, 当一个栏被旋转时 - 有抵抗性解决方案的交叉部分不同于循环。Saint-Venant 开发了一种基于 应力 功能的通用方法, 允许对直角、精密和其他非循环交叉部分进行解决方案。

他的结果揭示了重要和反直觉的现象: 一个直角部分的最大 剪应力发生在长侧的中间点而不是角落, 而薄墙开放部分在扭转与关闭部分相比非常弱。这些洞察力仍然与现代结构设计直接相关。

在旋转中, 圣文特将纳维尔的梁理论扩展到非同步部分。, 显示如何不穿过叶子中心的负载导致结合弯曲和旋转。他分析了应力浓度 接近负载应用点和地质中断, 表明当地压力领域如何显著不同于基本射线理论的预测。其集中负载解决方案表明, 这些本地效果在荷载的距离下迅速消失。

圣文的原则 这些观察导致圣文本的原则也许是他最有影响力的贡献。原则规定, 从负载区域到足够的距离的应力字段仅取决于结果的力量和时刻, 而不是荷载的详细分布。

这个原则具有深刻的实用后果: 它允许工程师将复杂的边界条件替换为静态等级, 分析结构, 而无需对荷载分布的准确知识。并相信, 支持和连接的当地细节不会对这些地区的压力产生重大影响。圣文的原则在结构分析中强调了许多简化假设, 并证明了理想化的边界条件。

编辑工作与遗产 Saint-Venant 也编辑并广泛列出第三版的 Navier’s *R´* **斯** *é* 并翻译了 Clebsch 的弹性处理, 并添加了大量的笔记, 这些笔记本身是原始贡献。他的工作寿命将弹性从一个数学精致的理论转化为一个实用的工程工具。

对旋转硬度的公式, 压力分布在相关术语子里, 非循环部分的磨损, 以及其名称的原则仍然是结构工程师日常工作语言的一部分。

更多关于圣文纳特的科学贡献在 §10.3.2.8.

6.8 结构工程作为纪律的崛起

此分類上一篇: 出现的 **结构工程** 作为一个独特的科学和专业学科。分析和设计方法正式化, 理论与实践之间的关系被澄清。重点是机构化、编码和纪律身份。

6.8.1 卡尔 • 库尔曼 (1821-1881)

早期生活与工程培训 卡尔 • 库尔曼 1821 年出生于德国巴拉丁地区的伯格扎伯纳。他在 Karsruhe Polytechnic 担任工程师, 在那里他接受了数学、机械和实用建设的严格教育。从一开始,Culmann 表现出对地质理和视觉表达的强烈倾向, 更喜欢直观图形方法, 而不是纯粹算法计算。这种训练背景 - 将数学培训与对大规模民事作品的曝光相结合 - 塑造了他一生努力, 使结构分析既严格又即时可理解于实习工程师。

科尔曼 (Culmann, 1866) 基于图形静态 作为一个系统的学科, 将分散的地质技术转化为结构分析的综合方法。他的 **图形静态** (图形静态), 在 1866 年出版于苏黎世, 并在 1875 年大扩展的第二版, 设立了视觉方法分析力量在特鲁塞, 框架, 架子和维持墙壁, 几乎一个世纪以来一直在工程实践中占主导地位。

Culmann 在 Karlsruhe Polytechnic 训练, 并在前往英国和美国之前担任巴伐利亚铁路工程师。(1849–1851) 学习桥梁工程。他的《美国木材和铁桥》报告引入了大陆工程师的创新美国实践。1855 年, 他成为新成立的 Eidgenössische Technische Hochschule 工程科学教授。(ETH) 在苏黎世, 在那里他建造了欧洲领先的项目之一在结构工程.

图形静态利用力量与地质之间的双重性: 能量可以作为 vectors, 和 平衡 条件可以表达为关闭聚合物。库尔曼通过武力聚合物系统化了这些关系 (代表力量的大小和方向) 和 Funicular Polygon (代表其行动线和应用点). 这两个图表之间的相互作用 - 麦克斯威尔的术语中的相互数字 - 可以快速解决复杂的平衡问题, 而无需算法计算。

对于桁架分析,Culmann 的方法允许工程师通过构建一个单一图表来图形地确定所有成员力量, 其中每个成员都符合一条线段, 其长度代表强度大小。对于相关术语和电缆, 阴道聚合物直接代表冲动线, 使设计师能

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

够视觉化力量如何通过曲折结构流动。为了维持墙壁, 图形结构确定地面压力和其应用点。这些方法, 只需要压缩、直线和规模, 比工业时代复杂结构的算法更快。

库尔曼的影响力超越了特定的技术, 延伸到工程教育的哲学, 强调地质直觉和视觉思维。他的学生和继任者, 包括维尔希姆 • 里特 (Wilhelm Ritter), 他继续了图形传统, 以及毛里斯 • 科切林 (Mourice Koechlin), 他将这些方法应用到埃菲尔塔的设计中, 在欧洲和世界各地传播图形静态。这些方法一直是标准的实践, 直到电子计算机使算法方法更有效, 即使在今天, 图形合理化也提供了对纯计算无法匹配的结构性行为的洞察。克尔曼还为应力领域的视觉化做出了贡献; 他的主应力轨道图表在闪光中激发了解剖学家朱利乌斯 • 沃尔夫 (Julius Wolff) 对骨型改造的工作, 并继续出现在文本书中, 描述力量如何通过结构性单元流动。

6.8.2 威廉 • 约翰 • 麦克文 (William John Macquorn) (1820-1872)

威廉 • 约翰 • 麦克文 • 兰金 (William John Macquorn Rankine) 出生于 1820 年在爱丁堡, 苏格兰, 成为一个有强大的技术和科学兴趣的家庭。他没有获得数学或物理学的正式大学教育; 相反, 他主要是自学的, 独立学习先进机械学、数学和热动力学, 同时作为民用工程学员工作。这种非传统的路径促进了对机械学的实用和合成导向的方法, 其中理论表述始终与工程应用有关。兰金的早期暴露于真正的建筑问题, 与严格的自我研究相结合, 塑造了他一生努力将机械作为实践工程师的一致、可用的科学。

兰克 (Rankine, 1858) 她是热力学科学的创始人之一, 也是工程机械作为英语世界的一个严格的纪律的关键人物。他的 **应用机械指南**第一次出版于 1858 年, 并通过许多版本进行修订, 将理论机械学之间的差距解开。实用工程, 在实习工程师可用的形式中呈现先进的数学方法。

兰金主要是数学和物理学的自我教学, 但他对热力学做出了基本贡献。(蒸汽发动机的 Rancine 周期,Rancin 温度规模), 土壤机械, 和结构分析. 1855 年在格拉斯哥大学被任命为民用工程和机械教授, 他将学术严格与铁路、港口和水道项目获得的实用工程经验相结合。他的文本 - 覆盖应用机械, 民用工程, 机械和蒸汽发动机 - 获得标准参考在英语世界。

Rankine 的 表述 地球 压力 理论 它在地质技术和结构设计方面仍然是基本的。他分析了限制土壤质量的平衡, 确定了土壤在理想化的条件下保持墙壁的活跃和被动压力。Rankine 的土地 压力 比例 - 源于假设一个不一致的土壤与平面故障表面 - 为保持墙壁设计和滑板稳定分析提供起点。尽管后来由库隆布的更普遍的相关术语理学和现代边界分析方法改进, 但 Rancine 的方法仍然是工具工程师在初步设计中获得的第一个。

和 **应用机械指南** 合成材料强度结构稳定性, 和 弹性 建立工程教育的一致框架。Rankine 介绍了 材料力学, 梁 理论, 柱 屈曲, 以及以数学准确度分析框架和架构, 同时保持专注于实用应用。他对能源方法的处理预测了结构分析的后续发展, 其基本原则的明确曝光影响了英国传统训练的工程师一代。

有趣的是, 当机械师和实习民用工程师大多分享了一般知识框架时,Rancine 作者两者 **应用机械的手册** (Rankine, 1858) 和 **公民工程手册** (Rankine, 1862), 图 6.19. 在这样做中, 他模拟了一种严格的理论和工程实践的合成, 与当今分裂相矛盾, 在那里两个社区过于频繁沿着平行但不紧密连接的道路前进。

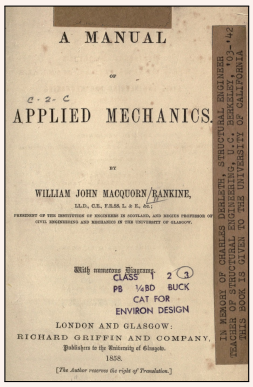
兰金还为海军建筑, 分析船舶的稳定和旋转运动以及新兴热动力学学做出了贡献, 在那里他对蒸汽特性和热发动机效率的工作与克劳西乌斯和凯尔文相匹配。他的令人惊叹的广度 - 包括民用、机械和海军工程 - 模仿了维多利亚理想的工程师科学家。Rankine 的合成有助于从实践艺术到完全数学学科的工程提升, 建立了支持工业时代伟大的工程成就的理论基础。

6.8.3 克里斯蒂安 • 奥托 • 莫赫 (1835–1918)

克里斯蒂安 • 奥托 • 莫赫 (Christian Otto Mohr) 出生于 1835 年, 在霍尔斯坦公爵的威塞尔布伦。他在汉诺威的波利技术学院获得了严格的技术教育, 数学、机械和实用工程密切融入。他的职业生涯早期, 莫赫担任铁路工程师, 获得了与真正负载条件的桥梁、地面工厂和结构系统的第一手经验。解析培训和实用工程经验的这种结合塑造了他对机械学的独特方法: 一个寻求清晰度、普遍性和直接应用于结构设计。

莫克 (Mohr, 1874) 结构分析 仍然是工程实践的核心, 开发图形和 解析 工具, 工程师每天使用超过一世纪后。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) Rankine, 1858 (b) Rankine, 1862

图 6.19: Rankine 的手册将应用机械和民用工程结合起来

他的工作包括应力分析、位移计算、影响线和失败标准, 这是一种贡献的宽度, 在结构力学历史上与其他几位数字相匹配。

莫赫在汉诺威的波利技术学院学习, 并担任铁路工程师工作, 然后成为斯图加特波利科技教授。(1867) 随后在德雷斯登聚合物 (1873) 他留在那里, 直到 1900 年退休。他的教学和研究建立了德雷斯登作为德国结构工程教育的领先中心。

莫赫的圈子 (1882) 提供优雅的应力转型图形表现. 考虑到任何两架飞机的应力组件,Mohr 表明, 通过一个点的所有可能飞机上的压力可以由圆圈中的点代表。σ-τ 飞机 循环的地质立即揭示了主要压力 (地平线轴上的极端点), 最大 剪应力 (循环的光线), 以及这些关键计划的方向。这种视觉化, 在每个引入机械学课程中都教导, 将抽象的张量转变为直观地质关系。

也许对结构分析更有意义,Mohr 开发了单元负载方法。(也被称为 Dummy 荷载方法或 Maxwell-Mohr 方法), 系统计算结构中的转移, 通过应用虚功原理. 要在任何地方找到 位移 , 一个应用于那个时刻的虚构单位 荷载 , 确定所产生的内部力量 (在 平衡 与 荷载 单元, 但不一定兼容) 并将这些产品集成到 “虚拟” 与整个结构的实际变形的力量。这种方法, 适用于静态定义和不定义结构, 也成为灵活性方法的基础。到 结构分析。

莫赫还提出了影响线理论。图表显示内部力量、反应或转移在某个点上是如何变化的, 因为一个荷载单元通过结构移动。其系统的影响线建设, 在移动负载下设计桥梁至关重要, 使铁路和高速公路桥梁能够进行合理分析。威利奥特 - 莫赫图表与法国工程师威利奥特合作开发, 提供了一个图形方法来确定桁架成员延长的缺陷 - 一个技术揭示结构的动态行为的方式, 纯粹数值方法不能。

莫赫对地质工程的贡献也同样重要。莫赫 • 库伦布失败标准将 Mohr 的代表性应力州与库隆布基于震动的土地失败法相结合, 仍然是土壤和岩石强度的标准模型。其失败包装的图形表现可以快速评估是否会导致某个 应力 状态失败 - 对于 基础 设计至关重要, 缓慢稳定性分析和维持墙壁计算。

6.8.4 亨利 • 莫塞利 (1801–1872)

早期生活与数学教育 亨利 • 莫斯莱 (Henry Moseley) 出生于 1801 年在伦敦, 并在剑桥的特立尼蒂学院接受了严格的数学培训, 当时剑桥数学小组统治英国解析教育。被命令为英格兰牧师, 莫塞利仍然以不寻常的强度追求应用数学和机械学, 反映了一个时期, 在那里牧师职责和科学研究经常共同存在。他的早期对抽象分析和实用理性的曝光形成了一个职业生涯, 致力于将数学机械转化为工程师和建筑师可用的形式。

莫塞利 (Moseley, 1843) 是第一个系统地应用弹性理论之一。到实用的结构问题, 制作一本教科书, 培训一代工程师在数学分析的结构。他的 **工程与建筑的机械原则**出版于 1843 年, 代表了英语工程教育的显著进展, 提出严格的解析方法为梁曲线, 柱 屈曲, 和拱分析在可用形式。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

机械原则 讨论了对英语文本无前例数学严格的结构分析。莫塞利使用生育的弹性理论, 衍生脱落公式和压力分布, 使结构成员合理比例。他的 柱 稳定性分析延伸了 Euler 的 屈曲 理论到实用设计, 考虑到虚假的效果和真实列必然显示的异常负载。对于马索尼亚小提箱, 莫塞利开发了 “最低压力原则,” 分析胡塞弓的稳定性, 通过考虑 thr 线及其与弓地质的关系。

这本书的影响力是显著和国际。它在西点的美国军事学院重新编写, 由丹尼斯 • 哈特 • 马汉 (Dennis Hart Mahan) 的额外笔记, 成为美国工程教育的标准文本。德语翻译将莫塞利的方法带到大陆观众。他的清晰的解析技术曝光, 与广泛的工作例子相结合, 建立了一个现代工程文本模型。

莫塞利的兴趣超越结构, 延伸到机器效率、船舶稳定性和水轮机械。他的动态稳定工作 - 分析浮动物体在干扰后返回平衡的条件 - 有助于海军建筑。在他的职业生涯中, 莫塞利模拟了数学分析的应用到实践问题, 帮助从实验规则引导的工艺转化为基于机械的应用科学。他不应该与他的孙子, 物理学家亨利莫塞利混淆。(1887–1915) 在加利波里去世之前, 他建立了原子数的概念。

6.8.5 詹姆斯 • 克莱克 • 麦克斯威尔 (1831–1879)

詹姆斯 • 克勒克 • 麦克斯威尔 (James Clerk Maxwell) 出生于 1831 年, 在爱丁堡, 苏格兰, 并在他的家庭的农村财产在 Glenlair 长大。从一个早期的年龄, 他表现出异常的地质和物理思维能力, 产生原始地质研究, 而仍然是一个学校男孩。他在爱丁堡大学和后来在剑桥的特立尼蒂学院接受了最强大的数学和自然哲学培训。这种早期沉浸在地质学、分析和物理直觉中, 塑造了麦克斯威尔的终身习惯, 寻找各种物理现象背后的深层结构性关系。

马克思 (Maxwell, 1890) 以其电磁理论为历史上最伟大的物理学家之一而闻名, 通过对桁架分析的相互图表开发, 也为结构力学做出了基本贡献。他的纸张 **关于力量的相互数字和图表** (Maxwell, 1864a) (Maxwell, 1864c) 出版于 1864 年, 建立了理论基础的图形方法, 统治结构分析几十年。



XLV. *On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces.* By J. Clerk Maxwell, *F.R.S., Professor of Natural Philosophy in King's College, London*‡.

RECIPROCAL figures are such that the properties of the first relative to the second are the same as those of the second relative to the first. Thus inverse figures and polar reciprocals are instances of two different kinds of reciprocity.

The kind of reciprocity which we have here to do with has reference to figures consisting of straight lines joining a system of points, and forming closed rectilinear figures; and it consists in the directions of all lines in the one figure having a constant relation to those of the lines in the other figure which correspond to them.

In plane figures, corresponding lines may be either parallel,

图 6.20: 詹姆斯 • 克莱克 • 麦克斯威尔

麦克斯威尔在爱丁堡和剑桥接受教育, 他的数学能力立即显现出来。他的职业生涯延伸了阿伯丁, 伦敦国王学院和剑桥的职位, 在那里他成为第一个卡文迪斯物理教授。虽然他的电磁方程式 - 结合电力, 磁力和光线 - 构成了他最大的成就, 但他的作品在结构力学, 颜色视觉, 热动力学和气体的动态理论证明了他的天才的显著广度。

麦克斯威尔的相互图表利用力量图表和结构地质之间的基本双重性。在分析一个桁架, 一个人构建一个力量图, 其中每个聚合物相匹配的结构中的一个关节, 每条线部分代表一个成员连接附近的关节的力量。麦克斯威尔表示, 这个力量图表是 “相互性” 结构图: 一行平行的线路在另一行平行, 它们之间的关系由精确的地质规则统治。这种相互性, 通过一个单一的图形结构, 使所有成员力量能够同时确定。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

实际意义是巨大的。在算法方法需要解决同步方程式的系统 - 计算机之前紧张和错误的图表 - 麦克斯威尔的图图表允许工程师通过地质结构确定复杂的图形中的力量。该方法特别适合 19 世纪桥梁和天花板建设中常见的静态定义特征, 每个成员力量只能从平衡确定。

麦克斯威尔的理论治疗超越了实用的技术, 建立结构力学和投影地质之间的深度联系。他表明, 相互的数字每当一个框架静态确定并开发了这些图表的存在和独特性标准时, 都会存在。他的作品影响了 Culmann 的图形静态, 并被克里莫纳扩展, 其系统的建设力量图表程序携带他的名字。(Maxwell-Cremona 图表).

麦克斯韦还提出了位移互等定理（麦克斯韦互等定理）：在线弹性结构中，B 点单位荷载在 A 点产生的位移，等于 A 点单位荷载在 B 点产生的位移。这个看似简单的结果影响深远：它减少了独立影响系数的数量，可用于实验验证解析模型，并构成现代结构分析中刚度矩阵与柔度矩阵对称性的基础 (Maxwell, 1864c)。工程师使用影响线或对超静定结构应用柔度法时，往往会隐含地采用麦克斯韦互等定理。

6.9 机械的主要历史

这里收集的数字是由他们的参与与 **机械史** 自己。而不是推进新的理论, 他们合成并解释了以前的发展, 形成机械是如何理解和传达的。他们的作品为纪律提供了连续性、视野和关键结构。

6.9.1 伊萨克 • 托丹特 (1820–1884)

伊萨克 • 托丹特 (1820–1884) (Todhunter and Pearson, 1893) 制作了史上最全面的历史记录, 从未写过弹性理论的发展。和 材料力学。他的纪念品 **关于弹性理论和物质力量的历史, 从加利利到现在**由卡尔 • 皮尔森 (Karl Pearson) 在 1886 年出版后, 延伸到 1893 年, 仍然是任何寻求了解弹性如何成为结构力学的基本框架的人不可或缺的参考。

Todhunter 是一位著名的行业的剑桥数学家, 是关于计算、算法、三角测量和解析静态的文本书的作者, 他训练了几代英国学生。但他的持久贡献在于他历史作品: 对变分法的全面调查, 概率理论和数学吸引力理论。(重力与潜力理论) 每个人都以全面的细节记录数学思想的发展。弹性的历史, 在他去世时不完整, 是他最雄心勃勃的项目。

这项工作精心地记录了从加利利奥的梁强度先驱分析中进化数学公式, 通过纳维尔、卡什、波森、绿色和圣文南特的严格处理。Todhunter 分析了原始来源 - 经常用拉丁语, 法语, 德语和意大利语 - 总结了数百个记忆和条约的内容, 方法和结论。他的争论, 围绕着弹性恒定的数量, 边界条件的正确表述和实验结果的解释, 保留了不然会失去历史的细节。

卡尔 • 皮尔森 (1857–1936) 完成和延伸工作后 Todhunter 的死亡, 他自己是一个重要的人物 - 后来被称为数学统计学的创始人 - 并带来了数学复杂化和批判性判断项目。完美的历史从加利利奥 (1638) 通过凯尔文先生和 19 世纪末, 填写了超过 2500 页的三个卷。皮尔森的编辑补充, 特别是关于弹性的分子理论和英国物理学家的贡献, 补充了 Todhunter 对大陆数学的彻底处理。

对于机械学的历史学家和结构工程,Todhunter 和 Pearson 仍然是任何严重调查的起点。工作文件不仅取得了成功, 而且还出现了盲目的争议、优先事项争议以及现在显而易见的概念逐渐澄清。它揭示了应力的理论和 应变现在作为基本材料教导, 经过数十年的努力, 由欧洲最优秀的数学思想所产生的。

6.9.2 史蒂芬 • 普罗科菲耶维奇 • 蒂莫申科 (1878–1972)

史蒂芬 • 普罗科菲耶维奇 • 蒂莫申科 (Shpotivka, 乌克兰, 1878 - Wuppertal, 德国, 1972) 他是二十世纪最著名的结构机械师, 其关于材料力学, 弹性, 振动和稳定性的文本教导了世界各地的工程师一代。他在圣地学习。彼得堡政治技术研究所, 在那里他后来在学院服役, 直到俄罗斯革命后的政治骚乱迫使他在国外。随后在克罗地亚学习 (格拉格) 捷克斯洛伐克 (布拉格) 1922 年移民到美国。经过短暂的时间在皮茨堡威辛豪斯电气公司, 他加入了密歇根大学。(1927) 后来, 斯坦福大学 (1936) 在那里, 他建立了北美应用机械学的突出课程, 并指导了

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

一代将工程学院在全国各地的人口。ASME 蒂莫申科勋章, 自 1957 年以来每年颁发为对应用机械的突出贡献, 荣誉他的遗产。

文本和技术贡献 蒂莫申科的文本书已成为其领域的标准参考, 翻译成数十种语言, 并使用了几十年: **工程中的振动问题** (1928), **材料力学** (1930), **弹性力学** (与 Goodier,1934 年), **弹性稳定理论** (与 Gere, 1936 年), 和 **板和壳的理论** (与 Woinowsky-Krieger,1940 年). 其技术贡献包括 “蒂莫申科 梁理论,” 它负责厚斑的相关术语形, 并且仍然是深斑和三明治结构的准确分析至关重要。

材料力学的历史 他的 **材料力学的历史**出版于 1953 年 (Timoshenko, 1953), 跟踪从古代到现代的固体机械科学的发展, 由一个主实习者的权威, 谁自己推进了这个主题。与 Todhunter 和 Pearson 的完整文档不同, 蒂莫申科 **历史** 强调物理理解和工程应用的发展。他跟踪实验的洞察到物质失败, 弹性和结构稳定 慢慢融入一致的科学框架。这本书讲述了古代世界和复兴时期, 不久就专注于十八、十九、二十世纪初 物质力量的时期。作为工程科学的出现。蒂莫申科的个人认识, 许多二十世纪人物 普兰德尔、福普尔、冯卡曼等 即时到达了他的后期章节, 而他对贡献的相对重要性的判断, 由一生教导和研究所传达。拥有一个纯粹历史账户无法匹配的权威。和 **历史** 它还包含超过 200 个生物绘图和肖像, 保留有关不太熟悉的数字信息, 否则对英语读者来说是不可能的。对于结构工程师来说, 蒂莫申科的工作既提供技术教育, 也提供专业身份 从伽利略的第一次试验分析梁到今天的精致计算方法的传统。它仍然是材料力学最可访问和可读的历史。

6.9.3 雷恩 • 杜加斯 (1897–1957)

杜加斯是一位法国机械学家和科学史学家, 他制作了迄今为止最全面、哲学上最复杂的机械史之一。被教育在**政治学科**他在那里度过了他的职业生涯, 作为机械教授, 继承法国理性机械的传统, 从拉格兰奇, 拉普莱斯和波森。他的历史作品反映了这个背景: 对数学的定义有注意, 对纯粹和应用科学之间的相互作用的欣赏, 以及对机械概念的哲学尺寸的敏感性。

机械史 他的 **机械史** (1950) 翻译成英语, 如 **机械的历史** (1955) (Dugas, 1955) 路易斯 • 德 • 布罗格利 (Louis de Broglie) 的预言, 跟踪了从古希腊到二十世纪的机械思维进化, 揭示了实践需要和理论进步如何塑造动作科学和平衡。工作以希腊静态开始 和电影亚基米德的分析, 亚里士多德和他的继任者的电影猜测, 跟踪中世纪的贡献, 以微妙的方式保持机械知识生存并推进它。科学革命接受了广泛的治疗: 伽利略的电影学, 德卡特的保守原则, 胡格斯的动态, 以及纽顿的大合成。杜加斯随后跟踪了十八世纪分析机械的发展, 通过伯诺利斯、尤勒、德阿伦伯特和拉格兰奇, 以及十九世纪连续机械、热动力学和统计物理学的开发。

哲学深度 杜加斯特别注意机械学的概念基础: 强度定义, 质量, 和无效; 纽顿的法律作为轴或实验性普遍化的地位; 在极端条件方面改革机械的变异原则。这种哲学深度使他的作品与更纯粹的技术历史有所区别。他照亮了在回顾中显而易见的概念 向量的力量性质、质量和体重之间的区别、能量的添加性 如何通过长期的斗争和辩论出现。对于结构工程师来说, 杜加斯提供了基本的背景: 结构分析方法 平衡方程式、虚拟工作、能源原则 是通用机械对特定系统类的应用。了解这些原则是如何发展的, 哪些替代方案被考虑和拒绝, 以及哪些争议参加了他们的接受深化对现在常用的工具的欣赏。杜加斯的合成揭示了结构力学与物理科学更广泛的企业之间的深度联系。

6.9.4 克里福德 • 安布罗塞 • 特鲁斯德尔 3 (1919–2000)

克里福德 • 安布罗塞 • 特鲁斯德尔 3 (洛杉矶,1919 - 巴尔蒂莫拉,2000) 它是二十世纪机械学的一个独特人物: 一个坚持严格的数学家, 一个历史学家在原始语言中阅读原始来源, 以及一个争议主义者, 他喜欢破坏声誉和引发神话。在 Caltech 学习 (斯,1941 年) 和普林斯顿 (博士,1943 年) 他在印第安纳大学度过了大部分职业生涯。(1950–61) 约翰霍普金斯大学 (1961–89). Truesdell 创立杂志 **理性力学与分析档案** (1957) 和 **关于准确科学史的档案** (1960) 确定对两个领域的严格标准。他对连续机械的技术贡献 - 特别是构成方程式和材料的热动力学 - 具有影响力, 但他的历史工作在重新发现科学家如何理解古典物理学的发展方面也同样重要。特鲁斯德尔非常兴奋: 他拒绝飞行, 乘船或火车到处旅行, 并保留了一个巨大的个人图书馆, 他声称包含了关于机械的所有重要的作品。他在拉丁语中与欧洲学者进行了通信, 放弃了整个思维学校, 并用无声的相关术语语, 曾经描述了一位著名物理学家的作品为 “一个无知的色彩, 装饰着常见的文学恩典。” 他的学术能力是传奇的 他保持了

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

几十年的争论与同事关于数学严格或历史解释的点, 经常在学术杂志的页面上进行的毒药甚至震惊经验丰富的学者。

机械史中的论文 他的 机械史中的论文 (1968) (Truesdell, 1968) 和 古典机械史 (Truesdell, 1976) 解散 连续介质力学 的發展 有一个关键的焦虑, 揭示了如何误解、错误和黑暗延迟了弹性, 流体动态和热力学的正式化。体积 收集了关于经典机械的历史, 弹性, 水力学和热力学的文件。特鲁斯德尔以一个工作科学家的眼睛接近他的主题: 他不只是对谁说什么, 什么时候, 但他们是否得到了正确的, 如果没有, 为什么他们的错误持续。他的论文关于应力的历史 和 应变 跟踪这些基本概念　现在看起来是基本的　只是逐步出现, 经过大量的混乱, 关于整体力量和单位区域之间的差异, 在物质行为之间, 位移和应变之间。地质变形。

分子争议 特鲁斯德尔特别照亮了十九世纪弹性的分子争议: 关于是否可以从分子模型中产生的弹性恒定性的辩论 (如果是这样, 那么一个物质可以拥有多少个独立的固体。) 相反, 现象学的态度, 需要作为实验事实来确定宪法关系。他展示了 Cauchy 的分子方法, 虽然在建立应力张量概念方面有成果, 导致错误的预测。(如同所谓“稀常”理论只需要一个弹性恒久的以色列材料) 这个问题已经混淆了几十年。论文是用 Truesdell 的特征性强度和勇气写的。他毫不犹豫地将一个混乱的论点称为混乱, 或者识别后代忽略的一个错误。这个批判性立场, 虽然有时是艰难的, 服务于一个宝贵的目的: 它提醒读者, 科学史不是从无知到知识的胜利之旅, 而是停止的错误过程, 在那里好想法经常被拒绝, 坏想法经常接受。对于习惯于将弹性理论视为定义真理的结构工程师来说,Truesdell 的论文提供了关于这个真理有多难得的健康观点。

除了这些基本作品之外, 作者还没有遇到其他历史性对结构力学的治疗方法, 足够全面或透明, 以便在这里值得参与。这种缺席本身是值得注意的: 结构工程的历史　塑造了人类文明建造环境的纪律　仍然被历史学家所奉献。目前的体积是一个可耻的尝试来解决这个漏洞, 以一种令人惊叹的方式将结构工程的历史带到新一代工程师身上, 他们可能会不太了解智力斗争、虚假开始、洞察的闪光。患者的知识积累, 使他们的职业成为可能。如果这些页面在某个年轻的工程师中唤醒了对我们所有人站在肩上的巨人的欣赏, 作者将考虑他的工作花费得很好。

6.10 可见的女人

毫不犹豫地说, 在本节中讨论的妇女对机械学做出了同等规模的贡献, 如 Euler、Lagrange 或 Cauchy。他们没有。但是, 忽视他们同样是不可思议的, 因为他们的成就 - 与他们所面临的机构障碍相比测量 - 令人惊叹。如果他们是男人, 他们可能不会保证特别提到; 作为一个时代的妇女, 当大学被关闭给他们, 当学术社会拒绝他们的会员资格, 当出版经常要求男性名称时, 他们的存在在历史记录中是值得注意的。我把它们纳入这里, 不是为了扭曲讲话, 而是为了承认机械学的历史, 就像整个历史一样, 是由谁被允许参与的人形成的。

首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學 (1706–1749) 加布里埃尔 • 埃米莉 • 勒托内利耶 • 德布勒特伊（夏特莱侯爵夫人）是法国自然哲学家、数学家和物理学家。出生在贵族, 并获得了异常严格的教育, 她成为新东尼亚物理学在大陆的主要解释者之一。《纽顿的翻译》**数学原则** 在法国 (Newton, 1687) 在她去世前不久完成并在后期出版, 仍然是标准的法国版超过一世纪, 目前仍在咨询。但是, 杜查特不只是翻译者: 她的广泛评论澄清了, 扩展了, 并在某些地方纠正了纽顿的论点, 包括来自大陆数学的发展, 纽顿自己没有使用。

超越的 **原则**她为 **生存** *VIVA* 争议: 关于机械过程中保存的量是否是动力 (mv) 或者我们现在认识到什么是动能 (mv^2). 她 **物理学机构** (Châtelet, 1740) 争论后者, 合成莱布尼齐亚和新顿的思想, 以预测现代能源概念的方式。一个女人可以彻底干预涉及莱布尼兹的争论, 伯诺利斯和法国学院对她的智力和立场的异常性质说话。

索菲 • 杰曼 (1776–1831) Marie-Sophie Germain 是一位法国数学家, 他为数字理论和弹性力学做出了持续的贡献。因性而拒绝进入新成立的 Ecole Polytechnique, 她通过男友获得了讲座笔记, 并在名称下提交了她的早期工作。“莱布兰克先生。” 当拉格兰奇发现了他的匿名记者的真实身份时, 他成为她的导师 - 一个承认让她的工作可靠性, 否则它可能被拒绝。

格雷曼对机械学的最重要的贡献源于她与巴黎学院在 1809 年提出的振动板问题的持久参与, 随后埃尔恩斯特 • 查德尼在振动金属板上的节点模式的戏剧性表现。该学院为这些模式解释的数学理论提供了奖项, 这是几个主要数学家失败的问题。格雷曼提交了 1811 年,1813 年, 最后 1816 年, 当她获得奖项时。(Germain, 1821).

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

她的方法, 虽然在其边界条件的衍生中错误, 产生了一个第四个命令的部分差异方程式统治板块分裂, 一旦由拉格兰奇纠正, 后来由基尔霍夫精化, 成为板理论的基础:

$$D\nabla^4 w = q$$

哪里 D 是灵活的硬度, w 转换 挠度, 和 q 分布荷载 等。这个方程式 - 有时被称为 Germain-Lagrange 方程, 以承认其优先事项 - 仍然是薄板的结构分析中心。一个自学的女人, 主要在孤立工作, 可以为一个问题做出持久的贡献, 涉及拉格兰奇, 波森和纳维尔是一个遗嘱她的能力和决心。

艾米・诺伊特 (1882–1935) 艾米・诺伊特 (Amalie Emmy Noether) 是一位德国数学家, 他的作品转化为抽象算法和数学物理学。雖然她的貢獻主要在结构力学正確的外面, 但她慶祝的理論與保守法則相結合。(Noether, 1918) 提供最深的 基础 为破坏 解析 机械的变量原则 - 包括相遇的 Euler-Lagrange 方程式 (§9.3.2.2).

诺伊特的理论本质上说, 物理系统的每一个连续的同义相匹配于保存量: 时间翻译同义产生能量的保留; 空间翻译对象产生动力的保留, 旋转对象带来角动的保养。希尔伯特和克莱恩在一般相对性方面所要求的这一观点将以前作为单独物理法则出现的东西统一到一个单一的数学框架中。

就像格雷曼在她之前一样, 诺埃特面临着机构排斥。她被允许在希尔伯特的名义下在戈丁根上讲课, 当纳粹在 1933 年驱逐犹太教学院时, 她移民到美国, 两年后去世。爱因斯坦在《 **纽约时报** 她被描述为 “迄今为止最有意义的创造性数学天才, 自从妇女的高等教育开始以来一直产生的。” (Einstein, 1935). 无论是接受这个评估还是不接受, 她的理论仍然对任何寻求了解为什么变量方法工作的人来说都是必不可少的。

6.11 分析与背景

6.11.1 竞争、秘密和科学进步

6.11.1.1 隐藏方法

早期现代时期不仅是科学发现的黄金时代, 也是智力偏见。很久以前, 对手审查的杂志和时间表编写, 科学家们没有正式的机制来设定优先事项 - 所以他们经常使用一个不寻常的策略: 在代码中发布他们的发现。这种做法反映了对知识产权、专业声誉以及科学知识的经济价值的深度担忧, 在一个保养和优先争议可能导致或打破职业生涯的时代。

或由 **吉普赛** (一) 系统地转换一个信息以掩盖其内容的方式, 或者通过 **安格拉姆**在某个句子的字母被转换为一个新的顺序, 或者由加密的拉丁语, 目标是相同的: 在没有揭示领土的情况下种植旗帜。这个奇怪的实践结合了真正的知识盗窃恐惧与复兴时期的幻想, 以便拼图, 桌子 6.5.

這些科學家並不只是小心, 他們是競爭的, 秘密的, 而且往往對彼此非常不安。结果是奇怪的辉煌和怀疑的混合物: 当世界上最伟大的头脑把他们的洞察力融入了摇滚中时, 只有在有人试图偷窃它们的情况下。[54] 桌子 6.6.

例子

胡克

天下之人 ✓

我们需要重新安排这些 14 个字母, 形成一个有意义的拉丁文本, 描述一个科学原则。

首先, 让我们列出我们可用的信件:

基本模式;

[54] 今天, 研究人员使用时间印刷的预印存储库 - 如: *X1* 或 arXiv - 立即设定优先事项, 确保开放性和授权。这代表了早期科学文化的编码秘密的戏剧性转变。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 6.5: 与早期现代科学家使用的加密方法进行比较

方法	技术	关键特征	例子 & 安全
安格拉姆	重定向信	固定字母计算; 简单的转换; 没有系统密钥	胡克: 天下之人 → 西克·维斯 *(Sic Vis)*. 伯诺利: 在 1690 年代末的安格拉姆中隐藏了他的弹性解决方案 模型 *alterum*. 安全: 低
西伯利亚	系统替代	基于规则的编码; 需要解密密钥; 算法方法	Huygens 和 Leibniz: 在卡特纳里邮件中交换的芯片。伯诺利在私人笔记中也使用了替代芯片。安全: 高
标志	多层拼图	结合多种方法; 包括骑行和 Wordplay; 经常有提示	伯诺利: 提出了弹性挑战, 用一个字符串、一条绳子和一个期限 (1690 年收获节日). 安全: 变量
隐藏	保持或提示	没有正式编码; 依赖于遗弃; 临时措施	德卡特: 虚假引用发现。Galileo: 延迟出版, 留在信中结果。安全: 非常低

表 6.6: Anagrams, Ciphers 和更多

科學家	方法	编码文本	解密的意思
罗伯特 • 胡克 § 6.6.6	安格拉姆	天下之人	西克 · 维斯 *(Sic Vis)* (“如延伸, 如力量。”)
	安格拉姆	天下之人, 天下之人,	此分類上一篇:*Sic stabit contiguum rigidum inversum* (“像挂着一个灵活的索所以, 逆转, 站着触摸的片段的一个拱”)
伊莎克 • 纽顿 §6.6.7	字母编辑 Anagram	*6accdae13eff7i3l9n4o4qrr 4s8t12ux*	*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa* (“考虑到包含任何流量数量的方程式, 以找到流量; 反之亦然。”)
加利利奥 Galilei § 6.6.2	长篇文章	香水 香油 香料 无人机	“Altissimum planetam tergeminum observavi 天文学” (“我观察到最遥远的行星有三重形状”)
雷恩´卡特	保持结果	没有芯片, 只有一条线索	引用在光学和地质学的发现, 后来发表
雅各布 • 伯诺利 § 9.3	安格拉姆	*Qrzumu bapt dxqopddbbp poyl fy bbqnfqbfp lty ge mutds udthhtuhs tmixy* 天下之人 天上之人	横坐标轴在纵坐标与切线之间的截段同切线之比，等于纵坐标平方同某一恒定面积之比

- 全字: 14
- 许可:e(1), i(3), o(1), u(1) 六个字符

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 6.7: 可用的字母在 Hooke's Anagram

信	伯爵	信	伯爵	信	伯爵
c	1	i	3	s	3
e	1	n	1	t	2
o	1	u	1	v	1

- 合成:C(1), n(1), s(3), t(2), v(1) 8 共识
- 最常见:I(3), s(3), t(2)

系统的解密方法:

1. 识别常见的拉丁语: 一个 17 世纪的学者会寻找熟悉的拉特语模式:

表 6.8: 常见的拉丁词语我们可以形成

词语	使用信件	意思
ut	天,T	當 / 当
东方	e, s, t	是
et	E、T	和
si	s , i	if
西克	s, i, c	如/如
在	I、N	在
威士	v, i, s	力量 / 强度

2. 寻找技术术语: 鉴于胡克的科学背景, 我们正在寻找机械术语。

表 6.9: 可用的文字的科学术语

潜在的词语	需要的信件	可用?
紧张 (紧张)	以, 以,n,s,i	✓
摩托车 (动作)	m,o,t,u,s	X (没有 M)
威士 (力量)	v,i,s	✓

3. 尝试字组合:

   (a) 第一步: 开始与 "ut"

   Use: `ut` (u,t)
   Remaining: `ceiiinosssv`

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们可以形成 “紧张”? 查看:T(1), e(1), n(1), s(3), i(3), o(1)

Use: `tensio` (t,e,n,s,i,o)

Remaining: `ciissv`

(b) 试点 2: 继续模式: 从剩余的字母 **西斯特**我们可以形成:

Use: `sic` (s,i,c)

Remaining: `isv`

Use: `vis` (v,i,s)

Remaining: none

(c) 解决方案出现: 安排我們發現的詞語:

西克 • 维斯 (Sic Vis)

以下是古典拉丁建筑:

- “ut...sic” = “如同……亦如此”（比较结构）
- “紧张” = 紧张, 伸展 (抽象案例)
- “威士” = 力量, 力量 (提名案例)

接下来我们检查, 通过检查信号计算

表 6.10: 信件使用验证

信	原始	解决方案	比赛
c	1	1 (*sic*)	✓
e	1	1 (*te* 尼西奥)	✓
i	3	3 (十一 *io*, *sic*, *vis*)	✓
n	1	1 (*ten* 不)	✓
o	1	1 (紧张 ***o***)	✓
s	3	3 (十 *sio*, *sic*, *vis*)	✓
t	2	2 (*ut*, ***t*** 恩西奥)	✓
u	1	1 (*ut*)	✓
v	1	1 (*v* 是)	✓
全集	**14**	**14**	✓

最后, 解密的句子翻译为:

“如同紧张, 如同力量”

請注意這

- **1676** 标签: 安格拉姆 发表 设定优先事项
- **1678** 答案: 在 **重复潜力**
- **现代相关性**: 灵活性理论和机械工程基金会

伯诺利 雅各布 • 伯诺利提出的挑战, 以解决埃拉斯蒂卡问题 (§9.3.1)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 天下之人 天上之人 , 天中之人, 天内之人
>
> Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* • 标志

使用桌子 6.11, (Alassi, 2020)

表 6.11: 柏诺利的 ElasticaLOGOGRAPH, (Alassi, 2020)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y	z
1	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	x	y
2	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
3	s	t	u	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

路	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	[2]	1	2	…
西伯利亚	Q	r	z	u	m	u	b	a	p	t	d	x	q	o	p	d	d	b	b	p	p	o	y	l	[u]	f	y	…
投诉	p	o	r	t	i	o	a	x	i	s	a	p	p	l	i	c	a	t	a	m	i	n	t	e	[r]	e	7	…

芯片使用:

- 第 1 行: 向右转
- 行二: 向右转两条路
- 行 3: 六个向右转然后重复模式。

这解释了为什么“Qrzumu bapt...”解密到“portio axis...”- 它是使用你之前显示的替代表, 重复 1-2-3 模式!

纽顿的解析 1676 年, 伊萨克 • 纽顿出版了一张加密图表, 以便为他发现计算的优先事项。(流动方式) 但是, 在保持真实的秘密时, (Newton, 1960). 这个实践是 17 世纪数学家中常见的, 在完整出版之前确保知识产权。

> `6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux`
>
> *Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire; et vice versa*
>
> ---
>
> “给定一个包含任意数量流动量的方程，求其流数；反之亦然。”
>
> Newton, 1960 *“Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676”*

这是一个 **频率 Anagram** 在哪里:

- 数字表明下列字母出现在多少次
- 没有数字的字母出现一次
- 随后, 所有字母都重新安排以形成拉丁文句。

步骤解码:

可用的重定向信件总数:

牛顿的解密信息描述了计算的基本理论 :

- **流动** = 衍生品 (变化率)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 6.12: 打破牛顿的芯片

西伯利亚	意思	西伯利亚	意思
6a	6 字母 A	cc	2 字 C 的
d	1 字 D	a	1 附加 A
e	1 字 E	13e	13 附加 E
ff	2 字母 F	7i	7 字母我
3l	3 字母 L	9n	9 字母 n
4o	4 字母 O'S	4q	4 字母 q
rr	2 字母 r	4s	4 字母 S
8t	8 字母 T	12u	12 字母 U's
x	1 字 x		

表 6.13: 完整字母频率

信	伯爵	信	伯爵	信	伯爵	信	伯爵
a	7	e	14	i	7	o	4
c	2	f	2	l	3	q	4
d	1	n	9	r	2	s	4
t	8	u	12	x	1		

- **流动** = 集成 (积累量)
- 理论定义差异化与整合之间的相反关系

在现代评级中, 牛顿的声明相应于:

$$\text{Given: } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
$$\text{Then: } F'(x) = f(x)$$
$$\text{Conversely: } \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

这个图表是纽顿对与莱布尼兹关于计算发明的突出优先争议的回应。通过在 1676 年发布加密表格, 纽顿后来可以证明他在 1684 年的莱布尼兹出版之前发现了基本原则。

要检查解密, 可以:

1. 在解密的拉丁文本中计算字母
2. 确认它们符合芯片中指定的频率
3. 重新安排字母字母, 以便重建原始图表

这种实践的持久性揭示了科学进步依赖于个人声誉和认可, 而不是后来出现的合作机构结构。

即使是加利利奥, 通过他的望远镜, 无法抵抗将天文学转化为一个密码词游戏。在一个由先知创造或破坏声誉的世界里, 科学实际上正在进步　但经常在锁和图表下。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

即使是加利利奥, 通过他的望远镜, 无法抵抗将天文学转化为一个密码词游戏。在一个由先知创造或破坏声誉的世界里, 科学实际上正在进步　但经常在锁和图表下。

6.11.1.2　争议及其影响

正如我们讨论的 §6.11.1.1 早期现代时期不仅被智力辉煌, 而且也被激烈的竞争、秘密和怀疑所标记。科学家们经常使用基弗、安格拉姆和其他封锁来确保他们的声明, 同时隐藏他们的洞察力。这种隐藏的文化不仅仅是这个时代的探索, 它反映了一个更深的现实: 科学发现已经很长一段时间与竞争、争论和先例问题相结合。

科学革命不仅由个体天才驱动, 而且由复杂的 termindexh 网络驱动。对手合作、智力交流。了解这些个人关系有助于解释发现的快速速度和伴随重大突破的有时可怕争议。

桌子 6.14 文档主要的智力冲突, 塑造了机械的发展。这些争议, 虽然往往是可怕的, 经常加速科学进步, 迫使参与者开发更严格的论点和更清晰的解释。

而不是把这些争议看作是科学进步的不幸偏离, 我们应该把它们视为对快速进展的竞争动态不可或缺。设定优先事项不仅对个人声誉至关重要, 而且对保养赞助、学术职位和机构支座也是至关重要的。在这种意义上, 科学竞争是创新的强大引擎, 即使它对参与者造成了个人痛苦。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 6.14: 机械发展中的重大智力冲突

千元塔里	人物参与	主题	争议的性质	结果 / 影响
16th	Tycho Brahe 對 Kepler	天堂模型	地缘中心妥协 (泰克) 直升机直升器 (凯普勒)	凯普勒的法则占主导地位
16th	加利利奥 vs 教会	希利奥中心主义	伽利略捍卫哥本尼克斯; 教会谴责直升机主义为异教	加利利奥被印基西亚试验
16th	加利利奥 vs Simplicio	亚里士多德科学	阿里斯托利亚观点的萨蒂里克肖像 对话	与教会的激烈冲突
17th	纽顿 vs 胡克	重力的法律	胡克声称优先事项; 纽顿否认这一点	纽顿忽略了胡克 原则
17th	纽顿 vs 莱布尼兹	计算发明	独立的发现引发了民族主义和学术争议	两人最终被批准
17th	博伊尔 vs 霍布斯	科学方法	实验主义 (博伊尔) 反对理性分离 (趣味)	形成现代科学实践
18th	伯诺利家族福德	变分法	雅各布、约翰、丹尼尔之间的争吵和普拉吉主义声明	激励关键进展
18th	Euler vs D'Alembert 主持人	振动线条	关于 PDE 表述 和解释的不同意见	先进分析基础
19th	海洋与海洋	弹性 理论	连续与分子假设在应力-应变模型	Cauchy 后来与 张量 机械相结合
19th	毛泽东 vs Poisson	机械的坚定	Cauchy 批评 Poisson 的论文缺乏数学严格性	Cauchy 的基于张量的理论成为标准
19th	英國 vs 大陸學校	机械	英国人 流动 对大陆的严格性和功能	长期文化分裂

6.11.2 转向现代工程科学

在本章中提到的数字集体地组织了人类如何理解和操纵物理世界的根本转变。从中世纪工艺传统到现代工程科学的过渡不是在夜间发生, 而是通过一系列相互连接的发展, 延伸了三个世纪。

三个关键变化, 这变革的特点:

数学格式化: 从加利利奥的扩展法则开始, 并以纳维尔的差异方程式高峰, 实践者越来越多地使用数学关系而不是实验规则来描述机械现象。这个 **数学** 使其更准确、更广泛的通用化。

机构创新: 科学学院、工程学校和专业社会的成立创造了新机制来产生、验证和传播知识。这些机构促进了合作, 同时加剧了竞争, 这两者都加快了科学进步。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

理论与实践的融合: 像 Coulomb、Navier 和 Bernoullis 这样的人物表明, 抽象的数学分析可以解决真正的工程问题。此集成

理论家和实践者都相信数学机械不仅仅是智力满意, 而且实际上是有价值的。

到 1850 年, 基于现代结构工程的快速发展, 其特点是数学严格性、实验验证和实践应用。

6.11.3 法国工程教育革命

系统工程教育的崛起在法国开始, 在那里雄心勃勃的国家基础设施计划的要求创造了技术培训专业人员前所未有的需求。转型开始于 **桥梁和山脉 ´面** 成立于 1716 年, 以管理法国扩大道路、桥梁和通道网络。起初依赖于学习和实践经验, 这个身体在政府成立时发展成更有意义的东西。**公路和街道学校** 1747 年, 世界第一所民用工程学院。

根據 Jean-Rodolphe Perronet 的指示, **首頁 〉 外文書 〉 西洋文學 〉** *Ponts et Chaussées* 开发了一个革命性的课程, 平衡了严格的数学教学与实用培训在研究, 水力和建筑。学生研究地质学、机械学和计算, 然后将这些原则应用到真正的工程问题上 - 一个从传统工艺学习中根本偏离的教学方法。

这一法国创新的峰值与 **学术/政治**, 成立于 1794 年, 在革命时期。创建为军事和民间服务的工程师培训,Polytechnique 招募了当时最著名的数学家作为学院, 包括 Lagrange、Laplace、Monge 以及本章中提到的几个数字。学校的数学严格课程建立了所有工程学科应该基于系统理论知识而不是实验传统的原则。

这个法国模型迅速蔓延到欧洲和其他地区。美国的 军事学院在 西点成立于 1802 年, 由超级指挥官西尔瓦努斯 • 泰耶 (Sylvanus Thayer) 改造。(1817-1833) 谁在研究 **学术/政治** 在法国的外交任务中。泰勒的重组引入了 *Thayer* **系统**, 做 西点美国的第一所真正的工程学校, 并建立了数学方法, 将统治美国技术教育在十九世纪。

欧盟机构迅速遵循顺序, 桌面 6.15. 卡尔斯鲁赫政治技术 (1825) 维也纳技术 (1815) 采用法国教学方法, 而在普鲁士、奥地利和英国各地的现有军事学院改革了他们的课程, 以强调数学基础。到 1850 年, 法国的创新创造了一个新的国际标准技术教育, 其中包含了现代工程科学的理论和实践的整合。这些机构不仅训练工程师谁将建造工业时代, 但也建立工程作为一个独特的职业与认可标准, 系统知识和社会权威。

6.12 从自然哲学到工程科学

17 世纪和 18 世纪在机械史上发生了深刻的转变, 因为学科从观察和地质学的哲学追求发展到严格的数学科学。在本章中调查的数字　从古代摩西和亚基米德, 通过加利利奥、纽顿和伯诺利斯, 到卡希、纳维尔和圣文恩特　每个人都扮演了这种转变的基本角色。他们的想法不仅为古典机械, 而且为现代结构分析, 弹性, 水力学和变量原则奠定了基础。这种转变既不必不可避免, 也不简单; 它需要智力、机构和文化的变化, 这些变化根本改变了知识的创造和验证方式。

在背景下, 令人震惊的是他们个人贡献的宽度, 而不是连接它们的智力线路网络。许多这些科学家直接受到他们的先驱或导师的影响, 而他们自己的工作深深地塑造了下一代。有些人, 如尤勒, 站在时代之间的桥梁; 其他人, 像纳维尔一样, 通过通过数学框架来正式化实用知识, 在工程科学的时代帮助了乌兹拉。这些人物之间的个人关系　调解、竞争、合作和冲突　与机械科学的快速进展所带来的个人发现一样重要。

也许最重要的是, 这个时期见证了一个新的类型的实习生: 工程师科学家将数学复杂化与实践经验相结合。像库隆布和纳维尔这样的人物证明抽象数学分析可以解决真正的工程问题, 而伯诺利斯和尤勒则表明, 实际挑战可以激发深入的理论洞察力。这种理论和实践的整合已成为现代工程的定义特征, 并且仍然对结构力学至关重要。

转型不仅由个体天才, 而且由深度的机构变革实现。科学学院的成立　伦敦皇家社会 (1660)，该 **科学学院** 在巴黎 (1666) 柏林学院 (1700) 而圣。圣彼得堡学院 (1724) 创建新的知识验证和传播机制。工程学院的创立, 从 **公路和街道学校** (1747) 到 The **政治学科** (1794) 建立了系统的技术教育, 结合数学严格与实践应用。这些机构将工程从通过学习学术学习的工艺转化为基于科学原则的职业。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在本章中查询的标志性文本　从加利利奥 **演讲** 到海军的 **教训**作为那些通过这些工具, 静态知识成为正式科学的车辆。这些书做得比记录的发现多; 他们训练了几代实习生, 制定了严格标准, 并为工程演讲创造了一个常见的语言。大书描绘了从实验技巧到数学严格和计算能力的智力崛起: 从尤克利德的脱发性纯度 **单元** 至新顿的革命性论文, 从纳维尔介绍弹性理论到工程, 到矩阵方法和有限元分析的方法的崛起。

这些文本不仅仅是历史的文件, 它们是结构工程和建筑学科所构建的基础。我们今天解决的问题 - 无论是设计桥梁、滑雪机还是计算模型 - 都由这些作品中记录的概念突破组成。理解它们深化了我们对这个职业的欣赏　不只是作为技术和公式的集合, 而是作为理性、创造力和不断发展的研究线。

随着我们向前探讨从这个历史性的基础中产生的技术发展, 值得记住的是, 每个方程式、每个原则和每个方法背后都有一种好奇心、持久性和智力勇气的人类故事。我们今天练习的结构力学带给了这些令人惊叹的人们的印记, 以及他们生活和工作的非凡时期。

6.12.1 总结表

为了总结本章中讨论的进展, 并突出这些主要参与者的相互连接性, 下面的表格介绍了主题组织的简要摘要。他们一起提供历史导向和知识线的洞察力, 以现代结构分析为基础。

6.12.1.1 主要参与者及其影响力

桌子 6.16 总结了本章中列出的主要人物的寿命、主要成就和相互影响。此表视图作为结构力学在现代时代进化的参考。显示的线条继续塑造当代工程教育和实践, 展示了这些基础人物的持久影响力。

表 6.16: 主要贡献者的概述及其在机械学中的影响

名称 (日期)	大贡献	受影响 / 受到影响
	基础与哲学	
莫西 (c. 470 - 391 ECB)	早期静态; 直升原则; 中国传统的平衡分析。	独立发展; 由西方科学家重新发现
阿基米德 (c. 287-212 ECB)	管道法; 水静态学; 重力的中心; 机械学的数学严格。	基础 为所有随后的静态
莱昂纳多•达芬奇 (1452–1519)	实验观察; 机械设计; 早期结构洞察; 中世纪和现代方法之间的桥梁。	影响后期实验方法; 预测伽利略的实验方法
雷内•德卡特 (1596–1650)	协调地质学; 机械世界观; 阿里斯托利亚物理的拒绝。	影响纽顿, 伯诺利家族
加利利奥 Galilei (1564–1642)	动画学, 规模法则, 材料力学, 实验方法。	纽顿的先驱; 影响胡克
布莱斯　帕斯卡 (1623–1662)	帕斯卡的法律, 实验科学方法。	Torricelli, Fermat; 影响的流体静态
	弹性, 材料的强度, 结构	
罗伯特•胡克 (1635–1703)	胡克的法律; 春天机械; 实验科学。	影响纽顿, 伯诺利斯
雅各布•伯诺利 (1654–1705)	**精力** 理論; 曲折和平衡的射擊; 確率理論。	灵感的 Euler,Daniel Bernoulli

继续在下一页

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 6.16: 主要贡献者的概述及其在机械学中的影响 (继续)

名称 (日期)	大贡献	受影响 / 受到影响
约翰•伯诺利 (1667–1748)	Leibnizian calculus; 先进的机械学和教育。	教导 Euler; 由 Daniel Bernoulli 影响
丹尼尔•伯诺利 (1700–1782)	弹性的变量原则; 水力学; 动态理论。	建议 **弹性** 变量形式到 Euler
查尔斯•奥古斯汀•德库伦布 (1736–1806)	振动法则; 扭转机械; 静态和物质抵抗。	上一篇: 海军; 影响工程科学
克劳德•路易斯航天员 (1785–1836)	泡沫弯曲理论; 弹性和液体机械的方程式。	福里亚的学生; 影响圣文
西门•丹尼斯•波森 (1781–1840)	引入 泊松比; 扩展了 弹性 理论。	争议的海军; 影响圣文
阿德马尔•J.C.B. De Saint-Venant (1797–1886)	扭转的普里斯马特条; 圣文本的原则; 应力分布。	正式化弹性之后的 Navier 和 Poisson
	数学机械	
伊莎克•纽顿 (1642–1727)	动作法则; 重力; **原则**计算 (流动).	与莱布尼兹的竞争; 影响了所有经典机械
福特弗里德•莱布尼兹 (1646–1716)	计算; 差异方程式 **生存** *VIVA*• 科学的机构愿景。	由 Huygens 导师; Johann Bernoulli 教授; 影响大陆数学
克里斯蒂安•休根斯 (1623–1695)	通道理论; 波光学; 中心力; 机械的数学准确性。	导师莱布尼兹; 影响伯诺利斯; 替代新托尼亚方法
莱昂哈德•尤勒 (1707–1783)	解析 机械; 变分法; **弹性** 答案: 数学贡献。	约翰•伯诺利的学生; 发展丹尼尔的变异思想; 影响了所有随后的机械学
饰 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)	德•阿伦伯特的原则: 部分差异方程式。	影响的拉格兰奇;Euler 当代
约瑟夫•路易斯•拉格兰奇 (1736–1813)	拉格兰基机械; 变分法; 解析机械。	统一新顿和变量方法
奥古丁 - 路易斯•卡什 (1789–1857)	压力紧张器; 严格的弹性; 连续机械的基础。	由 Euler 影响; 先驱到现代弹性
乔治绿 (1793–1841)	潜力理论; 绿色的身份和功能; 能量方法。	灵感的数学物理学和领域理论

6.12.1.2 地标出版物

桌子 6.17 列出本章中引用的主要作品, 从古代到二十世纪的时间组织。这些文本标志着在逐步的关键时刻 **数学** 物理现象和工程作为基于科学的学科的出现。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 6.17: 标志性出版物在结构力学的开发

年度	作者	标题	意义
		古代和中世纪基础	
第 5C。BCE	莫西	吉恩 (Mozi, 2013)	中国对静态、肝脏和机械优势的编译
公元 300 元	欧克里德	单元 (Euclid and Heath, 1956)	地质学与解体理性研究
第三 C。BCE	亚里士多德 (?)	机械 (Aristotle, 2000)	早期系统分析简单的机器和力量原则
第 240 章 公元	阿波罗尼亚	康尼克 (Perga, 1896)	科尼克部分的数学处理
第三 C。BCE	阿基米德	收集作品 (Archimedes and Heath, 1897)	基础 的静态, 水化学, 和 平衡
第一 C。BCE	维特鲁维亚	建筑 (Vitruvius and Morgan, 1914)	古典建筑品: 坚固、实用、美观
第一 C。CE	英雄	机械, *Pneumatics* (Alexandria, 1851)	实用机械和水力系统
第 11 集 C	阿尔 • 比鲁尼	图书馆:*Tahqiq* (Al-Bīrūnī, 1910)	静态, 密度测量, 水静态
第 11 集 C	伊本 • 哈伊塔姆	《古兰经》《圣经》 (Haytham, 1989)	数学模型与实验验证
1121	阿尔哈齐尼	处理机械 (Khāzinī, 2001)	中世纪平衡分析与水化学
		复兴和早期现代	
c.1452	阿尔伯蒂	重建建筑 (Alberti, 1988)	第一次全面的复兴建筑处理
十五、十六 c。	莱昂纳多	笔记本 (Vinci, 1938)	机械和物质强度的先驱研究
1543	哥本哈根	革命公交车 (Copernicus, 1995)	希利奥中心模型; 数学模型模式
1570	广播	四本书 (Palladio, 1570)	古典理论与建筑实践的合成
1586	史蒂芬	首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學 (Stevin, 1955–1966)	数学静态转型
1620	巴康	新的器官 (Bacon, 2000)	基础 实验方法
1632	加利利	对话 (Galilei, 1632)	对话关于哥本哈根和普托莱马系统
1637	德卡特	方法的演讲 (Descartes, 1637b)	卡特西亚理性主义; 科学方法的基础
1638	加利利	演讲 (Galilei, 1638)	基础 的 材料力学 和电影
		经典机械与计算	
1673	胡格斯	奥斯基拉托时钟 (Huygens, 1986)	动态、旋转运动、中心力量
1678	胡克	重复潜力 (Hooke, 1678)	胡克的法律和线性弹性
1687	纽顿	原则 (Newton, 1687)	运动法与经典机械框架
1694	J 的。伯诺利	拉米纳 *Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1694)	曲率 弹性射线
1600 年代	莱布尼兹	收集作品 (Leibniz, 1969)	计算和变量方法
1736	Euler	机械	纽顿机械分析改造
1738	D。伯诺利	水力学 (Bernoulli, Daniel, 1738)	流体力学和动态理论

继续在下一页

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

表 6.17: 标志性出版物在结构力学的开发 (继续)

	年度	作者	标题	意义
	1743	阿伦伯特	动态条约 (d'Alembert, 1743)	阿伦伯特的原则
	1744	Euler	发明方法 (Euler, 1744b)	变分法
	1773	科隆	关于一个应用 (Coulomb, 1773b)	结构静态中的变量方法
	1788	拉格兰	机械分析 (Lagrange, 1788)	机械通过变量原则
			十九世纪工程科学	
	1826	船员	教训 (Navier, 1826)	灵活的梁理论和中性轴
1820 年代 - 40 年代		卡西	收集作品 (Cauchy, 1841)	应力张量 和 连续介质力学
	1843	莫塞利	机械原则 (Moseley, 1843)	弹性理论适用于结构
1850 年代 - 60 年代		圣文	收集作品 (Saint-Venant, 1855b)	震动、弯曲、压力集中
	1858	兰克	应用机械指南 (Rankine, 1858)	理论与实践之间的桥梁
	1864	马克思	相反的数字 (Maxwell, 1864a)	对 桁架 分析的相互图表
	1866	科尔曼	图形静态 (Culmann, 1866)	图形静态正式化
	1874	莫克	机械学书 (Mohr, 1874)	莫赫的圆形为应力转型
	1886	托马斯	弹性的历史 (Todhunter and Pearson, 1893)	弹性 發展的歷史報告
			二十世纪	
	1953	蒂莫森科	材料力学的历史 (Timoshenko, 1953)	经典历史调查
	1955	麻烦	机械的历史 (Dugas, 1955)	机械的进化从静态到现代理论
	1968	威胁	机械史中的论文 (Truesdell, 1968)	关键分析 连续介质力学

6.12.1.3 工程教育机构

桌子 6.18 总结了 1740 年至 1850 年间建立的主要工程机构, 展示了法国系统技术教育模式在欧洲及其他地区的普及。

6.12.1.4 大型智力争议

桌子 6.19 文档主要的智力冲突, 塑造了机械的发展。这些争议, 虽然往往是可怕的, 经常加速科学进步, 迫使参与者开发更严格的论点和更清晰的解释。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 6.19: 机械发展中的重大智力冲突

时代	人物	主题	争议的性质	结果
第 16 集 C	加利利奥 vs 教会	希利奥中心主义	加利利奥捍卫哥本尼克斯; 教会谴责直升中心主义	加利利奥被印基西亚试验
第 17 集 C	纽顿 vs 胡克	重力的法律	胡克提出优先事项, 纽顿反对	纽顿忽略了胡克 **原则**
第 17 集 C	纽顿 vs 莱布尼兹	计算	独立发现引发民族主义争议	两人最终被批准
第 18 集 C	伯诺利家族	变分法	雅各布、约翰、丹尼尔之间的争吵和普拉吉主义声明	激励关键进展
第 18 集 C	Euler vs D'Alembert 主持人	振动线条	关于 PDE 表述 的争议	先进分析基础
第 19 集 C	海洋与海洋	弹性 理论	Continuum vs 分子假设	卡西统一了两种方法
第 19 集 C	英國 vs 大陸	机械	英格兰流动对大陆严格	长期文化分裂

6.12.1.5 历史时间表

形象 6.21 在本章中列出的科学家 (和其他人) 在文化和政治历史的更广泛背景下, 展示机械的发展如何在艺术、音乐、文学和治理方面进行平行转变。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 6.15: 欧洲及其他主要工程和技术机构 (1740-1850)

年度	机构	位置	类型	法國影響力 / 評論
1741	皇家军事学院	Woolwich, 英国	军事	法语模型: 炮兵 & 工程师
1747	公路和街道学校	巴黎, 法国	民间	**原始模型** 民用工程
1765	弗里伯格大学	萨克森	采矿	专门的技术培训
1783	矿业学院	巴黎, 法国	采矿	法国国家技术教育
1794	政治学科	巴黎, 法国	军事 / 民事	**初级模型** 欧洲改革
1799	巴奥学院	柏林, 普鲁士	建筑	德國法學方法的改變
1802	美国 军事学院	西点, 美国	军事	原来是传统的, 后来是法国的影响力
1802	皇家军事学院	Sandhurst, 英国	军事	英国军事工程
1809	铁路工程师研究所	圣。北京, 俄罗斯	运输	早期俄罗斯技术学院
1815	克。技术研究所	维也纳, 奥地利	政治技术	直接采用法语课程
1816	皇家炮兵学院	塞戈维亚, 西班牙	军事	西班牙采用法国方法
1817	西点 (变革改革)	西点, 美国	军事	**Thayer 研究 Polytechnique; 完整的法国模型采用**
1822	帝国军事学院	里约热内卢, 巴西	军事	葡萄牙殖民适应
1825	政治學院	卡尔斯鲁赫, 巴登	政治技术	**强大的政治影响力**
1826	伦敦大学学院	伦敦, 英国	大学	工程学院; 世俗教育
1827	政治學院	慕尼黑, 巴伐利亚	政治技术	法语数学方法
1828	政治學院	德雷斯登, 萨克森	政治技术	系统技术课程
1828	皇家军事学院	布雷达, 荷兰	军事	荷兰军事工程学院
1828	圣。圣彼得堡研究所	圣。北京, 俄罗斯	技术	俄罗斯采用西方方法
1829	伦敦国王学院	伦敦, 英国	大学	工程部设立
1832	艺术与制造业中心学院	巴黎, 法国	工程师	法国工业工程
1842	皇家学院	德尔夫特, 荷兰	民用工程	荷兰民用工程学院
1844	国家矿业高等学校	圣埃蒂安, 法国	采矿	法国区域技术学院
1847	Eidgenössische Polytechnische Schule 公立大学	苏黎世, 瑞士	政治技术	瑞士联邦技术大学

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 6.18: 大型工程与技术机构 (1740–1850)

年度	机构	位置	类型	笔记
1741	皇家军事学院	Woolwich, 英国	军事	法语模型: 炮兵 & 工程师
1747	公路和街道学校	巴黎, 法国	民间	**原始模型** 民用工程
1765	弗里伯格大学	萨克森	采矿	专门的技术培训
1783	矿业学院	巴黎, 法国	采矿	法国国家技术教育
1794	政治学科	巴黎, 法国	混合	**初级模型** 欧洲改革
1799	巴奥学院	柏林, 普鲁士	建筑	德國法學方法的改變
1802	美国 军事学院	西点, 美国	军事	原来是传统的, 后来是法国模型。
1815	克。技术研究所	维也纳, 奥地利	政治技术	直接采用法语课程
1817	西点 (变革改革)	西点, 美国	军事	全法国模型
1825	政治學院	卡尔斯鲁赫, 巴登	政治技术	强大的政治影响力
1826	伦敦大学学院	伦敦, 英国	大学	工程学院; 世俗教育
1847	苏黎世 ETH	苏黎世, 瑞士	政治技术	瑞士联邦技术大学

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

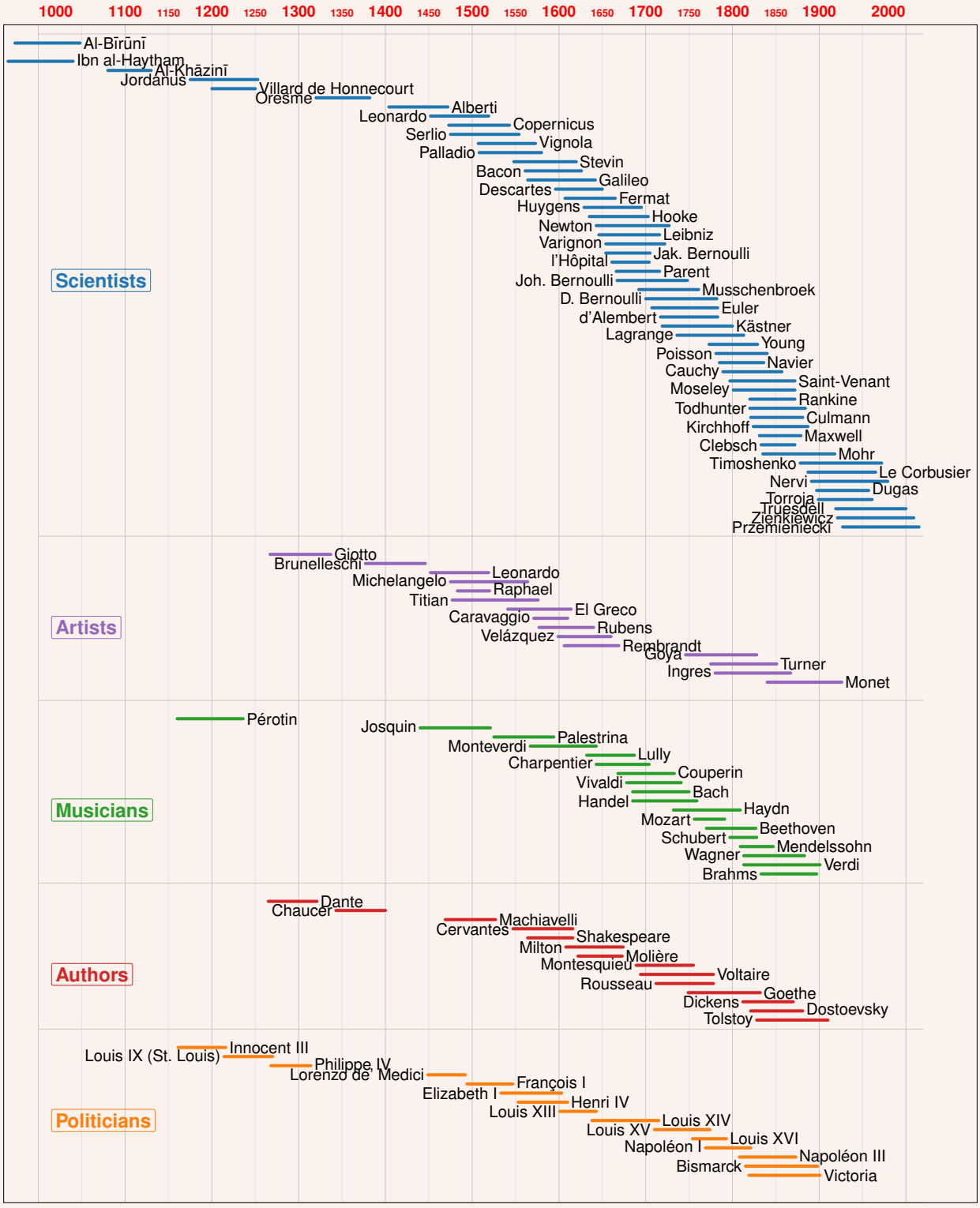


图 6.21: 历史时间线: 科学家、艺术家、音乐家、作家和政治家 (1000–2020). 适应和扩展 Truesdell, 1968 请注意, 科学家列表中的所有名称都包含在本章中。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。



潘尼尼, 潘蒂昂的内部

Pannini 的光明内部占据了超级地质: 缸、半球和光的眼睛。

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Interlude II: 从中世纪的洞察到现代结构力学: (1351-1879)

结构力学和从这三个章节中产生的地质分析的故事是一个令人兴奋的, 有时转变的智力进化故事, 延伸了五个多世纪。远离发现的线性进展, 我们的理解的发展代表着由数十个各国、几个世纪和数学传统的辉煌思想所装饰的复杂地图。一些参与者直接建立在他们的先驱的工作上; 其他人独立重新发现原则; 但其他人追求似乎与此无关的问题, 后来证明是基本的。

这个故事特别令人兴奋的是, 在纯数学的理论突破 奥雷斯梅对曲率的观察、Huygens 对循环的研究、纽顿对计算的发展 如何重复发现在结构工程中意想不到的应用。相反, 实用工程的挑战 - 挂链、相关术语绳、泡柱 - 在数学分析中取得了基本进展。结果是科学讲话, 其中抽象理论和实用应用不可分割地相互结合。

正如我们今天所知道的, 结构力学的成熟性欠它的存在, 而不是任何一个天才, 而是自然哲学家、数学家的积累洞察力, 实验主义者和工程师从中世纪末期到工业革命的范围内工作。有些人, 就像莱昂纳多和加利利奥一样, 做出了基本观察, 这些观察不会被几个世纪完全理解。其他人, 如伯诺利家族一样, 创造了科学王朝, 在那里洞察从一代到一代。然而, 其他人, 如尤勒, 合成并扩展了他们的先驱的工作, 以创造全面的理论框架。

桌子 6.20 介绍了章节中覆盖的主要发展中的时间总结 7, 8, 和 9 揭示这些发现的相互连接性质以及使它们成为可能的人们的惊人的创造力。

表 6.20: 结构力学和地质分析的完整历史时间表 (1351–1879)

日期	贡献者	贡献	章节	意义
1351	尼古拉 • 奥雷斯	曲率的定性概念作为偏离直观	Ch. 8	第一個概念突破向理解 曲率
c. 1490	莱昂纳多 • 达芬奇	挂篮球实验为电线强度	Ch. 7	最早的系统强度测试概念
c. 1500	莱昂纳多 • 达芬奇	**马德里** *Codex* 线性应变分布, 中性轴概念	Ch. 7	伯诺利的梁理论预测 200 年
c. 1500	莱昂纳多 • 达芬奇	卡特纳里画 (重力研究中心)	Ch. 9	挂链问题的早期观察
1614	伊莎克 • 贝克曼	严格延伸观察: “延长线路延伸更多”	Ch. 7	第一次间接参考应变概念
1634	西蒙 • 史蒂芬	证据吊链不是平凡的	Ch. 9	拒绝加利利奥的假设
1638	加利利奥 Galilei	**演讲**: Cantilever 梁分析; 假设催眠是模拟的	Ch. 7, Ch. 9	基本 梁 理论; 错误的催眠假设
1644	雷内 • 德卡特	**哲学原则**: 物质凝聚力的机械解释	Ch. 7	从亚里士多德的转变到机械理论
c. 1646	基督徒 胡格斯	证明链不是平凡; 发现悬挂桥 索是平凡的	Ch. 9	关键区别 凯特纳和帕拉波电缆
1657	基督徒 胡格斯	发明 pendulum 手表	Ch. 8	引发 Tautochrone 问题
1658–1673	基督徒 胡格斯	西克洛伊德作为塔托克隆; 系统进化/侵入理论	Ch. 8	定位 基础 为 曲率
1671	伊莎克 • 纽顿	**方法** *Fluxionum*: 分析曲线公式, 曲线中心	Ch. 8	曲率的第一严格数学处理

审阅稿

日期	贡献者	贡献	章节	意义
1684	福特弗里德・莱布尼兹加利利奥的不可扩展的梁假设		Ch. 7	梁理论中的重要概念进步
1686	福特弗里德・莱布尼兹	通过四点接触定义奥斯卡循环	Ch. 8	地质 基础 为 曲率
1686	马里奥特	线性弹性; 三角压力分布	Ch. 7	第一個現實的梁曲線模型
1690	雅各布・伯诺利	对数学社区的挑战问题	Ch. 9	催化竞争性数学文化
1690	基督徒 胡格斯	发送加密的催眠解决方案	Ch. 9	展示地质方法
1690	约翰・伯诺利	提交通道解决方案与出版条件	Ch. 9	顯示 解析 計算功率
1691	福特弗里德・莱布尼兹	发布催眠解决方案; 减少到逻辑	Ch. 9	表明计算的优势
1691	约翰・伯诺利	曲率衍生的总射线	Ch. 8	系统的解析接近曲率
1691	雅各布・伯诺利	将弹性问题作为加密挑战	Ch. 9	下一篇: 大数学挑战
1692	雅各布・伯诺利	解决直角弹性案例	Ch. 9	第一个解决弹性曲线问题
1694	雅各布・伯诺利	**拉米纳** *Elasticae*: 发行弹性解决方案	Ch. 8, Ch. 9	地质弹性理论与进化结构
1710	无情的帕迪	进一步的催化分析; vectorial 力量概念	Ch. 9	加泰罗尼亚理论的进步
1713	安东尼父母	全 平衡 條件在 梁 曲線; 中性轴	Ch. 7	第一個完整的静力分析曲線
1724	匿名 “LBC”	挑战适度灵活的管道问题	Ch. 9	桥梁催眠和弹性问题
1728	丹尼尔・伯诺利	灵活/弹性线的统一理论; 旋转模块	Ch. 9	第一个系统的梁理论
1728	莱昂哈德・尤勒	附属纸; 一般 平衡 解决方案	Ch. 9	丹尼尔的统一方法
1729	皮埃特・范・穆森布鲁克	实验性屈曲法: $P \propto 1/L^2$	Ch. 9	第一次系统的屈曲实验研究
1739	皮埃特・范・穆森布鲁克	**物理元素** ● 系统性压力测试	Ch. 7	制定实验方法
1742	丹尼尔・伯诺利	建议能源减少对弹性的方法	Ch. 9	变分原理 引入机械学
1744	莱昂哈德・尤勒	**通用方法**: 通过 变分法 的完整弹性解决方案	Ch. 8, Ch. 9	最终 解析 治疗
c. 1750	Euler & 丹尼尔・伯诺利	微型接近: $\kappa \approx d^2y/dx^2$	Ch. 8	工程喷气理论基金会
1757	莱昂哈德・尤勒	Buckling 负载衍生品: $P = \pi^2 EI/L^2$	Ch. 9	第一批 荷载 公式
1758	亚伯拉罕・库斯特纳	现代定义: 曲率 $= d\theta/ds$	Ch. 8	现代曲率概念

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

日期	贡献者	贡献	章节	意义
1771	莱昂哈德 • 尤勒	一般线 应力理论; 准确的静态方程式	Ch. 9	完整的线条理论框架
1773	查尔斯 • 奥古斯汀 • 库伦布	完整的灵活分析; $\sigma = My/I$ 形式	Ch. 7	第一個嚴格的振動 应力 理論
1784	查尔斯 • 奥古斯汀 • 库伦布	扭转 理论: $T = GJ/L \cdot \phi$	Ch. 7	创建 Torsional 分析
1807	汤姆青年	定义 弹性模量; 中三规则	Ch. 7	引入基本物质财产
1855	圣文特酒吧	第一种严格的弹性衍生 $\sigma = My/I$	Ch. 7	基于坚实的理论基础的点燃理论
1862	阿尔弗雷德 • 克莱布什	系统性弹性理论	Ch. 7	加强数学框架
1866	圣文	关于 Clebsch 的通知; 飞机部分仍然是飞机	Ch. 7	完整的理论 基础
1879	阿尔伯托 • 卡斯蒂格利亚诺	能源理论为位移计算	Ch. 9	可系统分析 挠度

发现的模式

从这个时间合成中出现了几个显著的模式:

科学大国和网络 伯诺利家族的多代贡献几乎持续了两世纪, 每一代人都在建立和扩展他们的先驱的工作。同样, 导师与学生的关系 休根教练莱布尼兹、雅各布 • 伯诺利建议约翰、约翰教授丹尼尔和尤勒 创造了智力线路, 加速了发现。

竞争性数学文化 1690 年雅各布 • 伯诺利 (Jacob Bernoulli) 提出的公共挑战格式创造了一个前所未有的竞争环境, 导致理论进步迅速。使用加密解决方案、出版品种和优先争议, 揭示了一个数学社区对名声和偏见以及纯粹的知识感兴趣。

理论实践合成 实用工程挑战多次引发理论突破, 而抽象的数学发展发现了意想不到的结构应用。挂链问题催化了分析机械的开发; 相关术语线导致变量计算; 泡柱建立稳定理论。

地理和临时分裂 某些时期和地区展示了令人惊叹的发现浓度:17 世纪中期荷兰 (史蒂芬,Huygens),18 世纪初的瑞士 - 德国学术世界 (伯诺利斯, 欧勒), 以及 18 世纪末和 19 世纪初的法国工程学校 (科隆布, 圣文特).

数学工具开发 从地质建设的进展 (莱昂纳多, 加利利奥) 通过 解析 地质 (德卡特) 无限计算 (纽顿, 莱布尼兹) 最后, 关于变量方法 (Euler) 揭示了数学复杂化如何使越来越复杂的结构问题得到解决。

这个时间观点揭示了地质学、强度分析和变形理论的显然分开发展实际上是更大的智力革命, 这改变了数学和工程。我们今天所知道的结构力学不是从任何单一突破中出现, 而是来自数十个精彩的人物在几个世纪工作的积累洞察 - 每个人都建立、扩展和偶尔纠正了他们的先驱的工作。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

7 强度, 中性轴, 和灵活压力

摘要

本章节跟踪了从 *15* 世纪末到 *19* 世纪中叶的结构强度分析和内部应力分布的历史进展。

一个重大概念转变发生在 *1500* 年代初, 当它第一次被认可, 结构单元可能失败在轴或灵活负载下, 移动超越传统的焦点在马索尼亚拱稳定。这一实现引发了对灵活压力的内部分布以及应用负载与结构能力之间的基本关系进行密切研究。

發展發生在三個分開但相互連結的線路上。实验传统, 从莱昂纳多的挂篮试验开始, 并通过加利利奥的彩虹分析继续, 建立了结构测试和能力需求评估的基本概念。由德卡特、马里奥特、帕伦特和库隆布推进的实验不断的方法, 逐渐发展了物质行为和内部力量分配的更复杂的模型。最后, 由伯诺利家族和欧勒模拟的解析线路提供了严格的数学框架, 将地质、物质特性和结构性反应联系在一起。

关键步骤包括 *Galileo* 的直径对曲线射击类似,*Mariotte* 的认知线性弹性行为和三角压力分布, 父母应用完整平衡条件, 库伦布系统处理弯曲和旋转,*Young* 介绍弹性模块概念, 圣文的最终基于弹性的衍生, 是基本的旋转应力关系。

显著, 这些调查专注于力量 - 成员能够在没有失败的情况下抵抗内部力量的能力 - 而没有透露负载结构所采取的歪曲形状。这种限制将引发结构力学开发的下一个阶段, 在那里地质分析和歪曲预测将作为同样基本的担忧出现。

7.1 引入 172
7.2 强度 172
7.2.1 莱昂纳多 (≃ 1490) 173
7.2.2 加利利 (1564-1642) 173
7.2.3 贝克曼 (1588-1637) 175
7.2.4 莫斯特布鲁克 (1692—1761) . 175
7.3 内部灵活性压力: 研究三项行为 . . . 176
7.3.1 第一条: 帝国线性 177
7.3.2 二: 帝国主义 - 连续线性 . . . 180
7.3.3 第三条: 解析线性 189
7.4 总结 191
7.5 过渡 193

7.1 引入

与以前的建筑传统不同, 它几乎专门处理了严格的马索尼亚, 在那里结构性失败主要仅限于架子和木头的崩溃。(看章节 31), 在 16 年初发生了重大概念转变。th 世纪。然后, 它被认可 - 也许是第一次 - 结构性 单元 也可能在轴或灵活负载下失败。这一实现引发了密集的研究, 旨在了解灵活压力内部分布。[1]. **加利利奥: 我错了。**

因此, 本章节讨论了早期努力确定结构成员的轴和灵活强度, 以及第一次试图描述灵活压力内部分布。歪曲的研究和弹性理论的发展留给后期章节。

7.2 强度

概念的 **力量** 它是最早的机械特性之一, 吸引了哲学家、建筑师和科学家的注意力。在弹性或变形理论正式化之前很久以前, 防止破裂或崩溃的必要性使一个直观和可观察的担忧变得更加强大。建筑师们实验上知道列可以跳动, 箭头可以打破 - 但为什么他们失败, 在哪些情况下, 仍然不清楚。因此, 力量成为早期机械学家的自然入口点: 它提供了可见的二进制结果 - 破裂或生存 - 这邀请了猜测和量化。与 弹性 或内部的 应力 分布不同, 强度可以通过简单的工具和测试进行研究, 使其成为机械学最早的定量研究的生育基础。

[1] 目前已知的分布是三角性, 与中性轴相比。

审阅稿

7.2.1 莱昂纳多 (≃ 1490)

对于莱昂纳多的生物绘画, 请参见部分 6.4.2.

莱昂纳多想象了什么可能是最简单的机械测试可想象的 - 一个想法体现在他的著名 (虽然从未被处决) “吊篮” 实验, 显示在 图 7.1a. 在此设置中, 从跳跃器逐渐将沙子注入悬挂的篮子, 直到支持电线断裂。破裂的荷载则通过重量积累的沙子来确定。莱昂纳多一直被实验的好奇心和提出基本问题的非凡能力所驱动, 他认为破裂的力量会随着绳子的长度而有所不同 - 从那以后, 现代机械学已经证明是错误的结论。然而, 实验的概念清晰度表明了对物质力量的系统研究的早步。

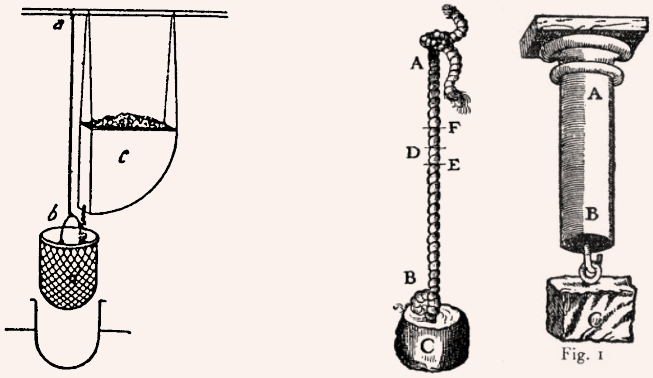
7.2.2 加利利 (1564-1642)

关于 *Galileo* 的生物绘图, 请参见部分 6.6.2.

加利利 (Galilei, 1638) 挑战莱昂纳多的误解, 通过以下对话, 图 7.1b:

> 萨尔维亚说, “我害怕, 辛普利西奥..... 你正在犯同样的错误; 也就是说, 如果你想说一个长的绳子..... 不能像一个更短的长度一样重量。7.1b 只是足以打破绳子, 问辛普利西奥在哪里会发生断裂, 辛普里西奥回答, “让我们说在 D .. , 因为到目前为止, 绳子不够强大支座, 说,100lbs。” 然后, 萨尔维亚蒂把绳子固定在 F 上, 正好在 D 上, 并将重量粘在 E 上, 指出, 在 D 的绳子仍然受到同样的拖动, 因此短片 FE 将在 Simplicio 的接受下再次破裂在 D。
>
> Galilei, 1638

為 Truesdell, 1960, 这是持续机械的压力原则的第一个原始例子。这个对话描述了一个基本概念, 后来将成为应力分析的中心: 内部力量依赖于负载条件而不是仅仅是地质尺寸。



(a) 莱昂纳多　　(b) 加利利

图 7.1: 莱昂纳多和加利利奥的轴力研究

正如我们所知道的, 结构分析开始于加利利奥在前两次讨论中对梁进行处理。“日子” 他的 **关于两个新科学的演讲和数学示威** [2] 1638 年, 加利利奥 74 岁。[3] 在继续前进之前, 让我们遵循他的理性线。(Heyman, 1998b).

[2] 不要与前者混淆 **关于两个主要世界系统的对话**出版于 1632 年。

[3] 五年前, 他被判有罪, 被判处终身监禁, 并被禁止出版任何其他作品。这就是为什么,The **演讲** 它在荷兰 - 在印第安人的范围之外 - 由 Elsevier 家族出版。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

起初, 加利利奥主要担心结构成员的分裂强度。他认为一个柱放平, 并支持在两端以及中心。如果一个终端支持被移除, 他认为, 柱会在中间中断, 因为其中一半会有效地作为一个分支器 - 见图 7.2a. 然后他转向另一个配置: 垂直的柱挂在自由和负载的逐步增加重量在底部, 直到破裂发生, 如图所示。7.1b.

这引发了他的角色之间的迷人的交换, 其中一个 - 使用现代语言 - 提起的概念提醒碎片: “一个终端区域可以包含无限数量的空白,” 或那 “显而易见的固体可能由一个非常大的数量的小部分组成, 具有内在的强度。” 非常像连接的钢材电缆的行为。加利利奥的解释, 据报道 Benvenuto, 1991a 假设固体是由单元组成的。

> 因此, 我认为在自然界中, 一个固体可以被想象为由无数的极其薄的板块或胶片组成, 它们都结合在一起, 并以一种方式连接起来, 整个似乎是一个单一的连续固体。但事实上, 这个身体对任何倾向于把它分开或打破的力量所提供的抵抗, 不是因为大质量, 而是因为这些小线的群众和混乱。
>
> Galilei, 1632 ”Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican”

因此, 我们必须考虑不只是他们的数量, 而且他们的交互程度。与图的参考 7.2b,

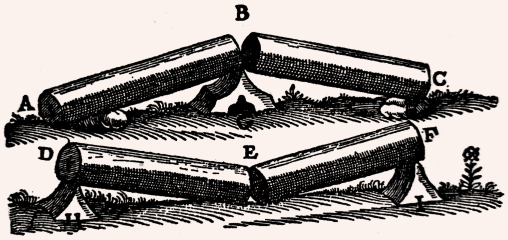
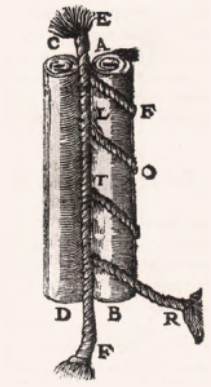


Fig. 29

(a) 打破一个梁



(b) 加利利奥的解释

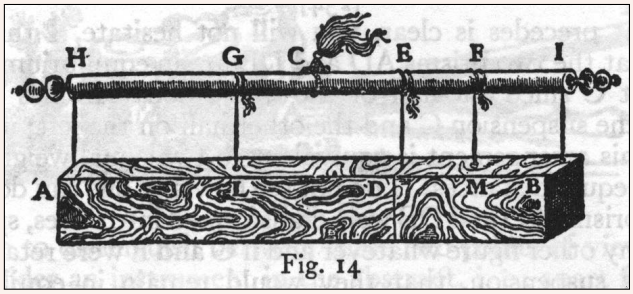


Fig. 14

(c) 利物浦的法则

图 7.2: 加利利奥的道路向种子<梁方向

> 现在, 如果我们想象一片 EF 粘贴在两个紧密的小圆形 AB 和 CD 之间, 并考虑它在它们之间的压力时发生了什么事, 或者再次当它自由滑动时, 甚至当它在其中一个周围直伤时, 我们将观察到非常不同的行为。例如, 在试图从缸中释放它时, 越强烈地拖动过滤器, 就越紧密地向缸施压。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

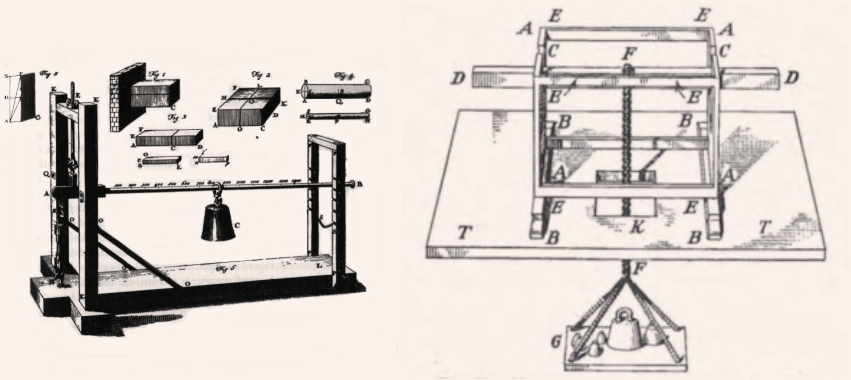
> 从此看来, 计算的不仅仅是物质的力量, 而且它的安排。正如我们所知道的那样, 一根相关术语的抵抗源于它所组成的无数的 empen 线。因此, 在木材中, 我们发现的纤维和纤维运行长度, 使它更抵抗裂缝, 而不是同一长度的绳子。在石或金属缸中, 部分的一致性看起来更大, 尽管由于某些其他水泥而不是绳子或纤维。但是, 即使是这些也可以用足够的力量打破。
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

7.2.3 贝克曼 (1588-1637)

1630 年, 荷兰哲学家和科学家伊萨克 • 贝克曼 (Isaac Beeckman) 提出了一个微妙但有意义的观察, 预测机械学的一个基本概念。他指出, 当重量从绳子中暂停时, "线越长, 重量越低....."[4] 虽然贝克曼没有数学地正式化这一观察, 但他的笔记是我们现在所称之为的第一个已知 - 尽管间接 - 参考。**应变**. 通过直观地将一条绳子的延伸与它所携带的荷载连接, 贝克曼强调了一个身体对强迫的可测量的反应。他的洞察力在几十年的时间里推翻了胡克的法律, 反映了出现的实验意识, 即变形作为一个值得研究的机械现象。贝克曼的作品, 虽然在他的一生中大部分未出版, 影响了当代人如德卡特, 现在被视为现代科学的重要先驱弹性.

7.2.4 莫斯特布鲁克 (1692—1761)

Pieter van Musschenbroek 是最早的实验者之一, 通过系统的紧张测试来调查 材料力学 的轴。1739 年, 他的**物理元素** (Musschenbroek, 1739) 他描述了一系列实验, 其中重量从长电线或轮子中被暂停, 以确定他们在破裂之前可以保持的最大荷载。这些测试, 图 7.3a 它们不仅是因为它们产生了最终抗拉强度的可重复测量, 而且也是因为它们建立了一个方法框架, 以研究物质失败在统一荷载下。Musschenbroek 强调了统一横截面积和材料均匀性在产生一致的结果的重要性 - 这是对材料测试的现代标准的理解。他还对各种材料, 包括金属、木材和动物纤维的比较强度进行了表格, 从而为后续发展压力 - 线条概念奠定了实验基础。Musschenbroek 是一位优秀的实验者, 他还研究了 flexure, 图。7.3b, 和 柱 屈曲 (讨论在 §9.5.1.2)



(a) 压力测试　　(b) Bending 测试

图 7.3: 穆森布鲁克实验 (Musschenbroek, 1739)

[4] 引用在 Drake, 1970, p. 201.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

7.3 内部灵活性压力: 研究三项行为

古代和中世纪结构的压力很低, 因为它们过度设计。(现代代码). 这些架子, 用石头建造的城堡受到了比他们的能力要低得多压力。由于缺乏科学指南, 那些不适当尺寸的人只是崩溃了。(因此, 维特鲁维亚的规模法的重要性). 简单地说, 应力的计算是次要利益; 它是结构的形状, 控制其稳定性。

灵活理论的历史发展揭示了两个主要独立和平行路径, 图 7.4 一个是实验和法语, 另一个是数学和瑞士 - 德国 - 这令人惊讶的是, 在超过一世纪内一直不连接。

第一行, 根源于实验和物理直觉, 开始了 **加利利**, 谁提出了关于梁分裂和扩展的初步问题。它继续通过 **德卡特**, **马里奥特**, **父母**其次, 在工作中完成了 **科隆** 1773 年, 他提出了一项基于内部凝聚的令人惊叹的失败理论。这条路径实现了其完整的解析改进 **圣文** 在十一世纪中期, 其记忆引入了应力分布的概念, 并纠正了许多以前模型的不一致性。这个 “法国之路” 它主要是由分裂、凝聚和实验验证的考虑驱动, 并且仍然基于地质理性和物理可行性。

相反, 第二个独立发展源于雅各布 • 伯诺利 (Jacob Bernoulli) 的作品, 他制定了曲率和应变的原理理论, 并实现了其正式数学表达。**Euler**1744 年, 使用变量原则的弹性曲线衍生。Euler 的 表述 基于 变分法 并基于线性弹性 假设和微小的变形, 先驱了 Coulomb 和 Young 的作品。然而, 尽管产生了一个完整的差异方程式的分散形状的弹性梁, 这一 “瑞士 - 德国之路” 她从法国讲话中毫无疑问地缺席。

很少有证据表明, 库伦布、年轻人甚至圣文也承认了埃勒对梁理论的贡献。这种忽视可以归因于几个因素。首先, 尤勒的作品深沉浸在抽象数学中, 并用拉丁语写作, 这可能限制了实验者对实际结构性行为的循环。其次, 十八世纪的法国科学界主要关注强度和分裂而不是弹性和挠度 - 与库隆布和马里奥特的利益更一致, 而不是与尤勒的理想化假设。最后, 大陆科学传统之间的机构和语言分裂可能阻碍了思想的跨聚合。结果是一个双重的线性: 一个是基于实验强度和失败, 另一个是数学弹性, 完整的合成仅发生在十九世纪末。

这种分离令人震惊, 尤其是由于现代观点认为灵活行为平衡于 Euler 引入的方程式。事实上, 这个方程式最初被那些正式化梁曲折的理论家忽略了, 这表明纪律界限和知识传统如何延迟对立, 即使在强迫以前的工作面前。

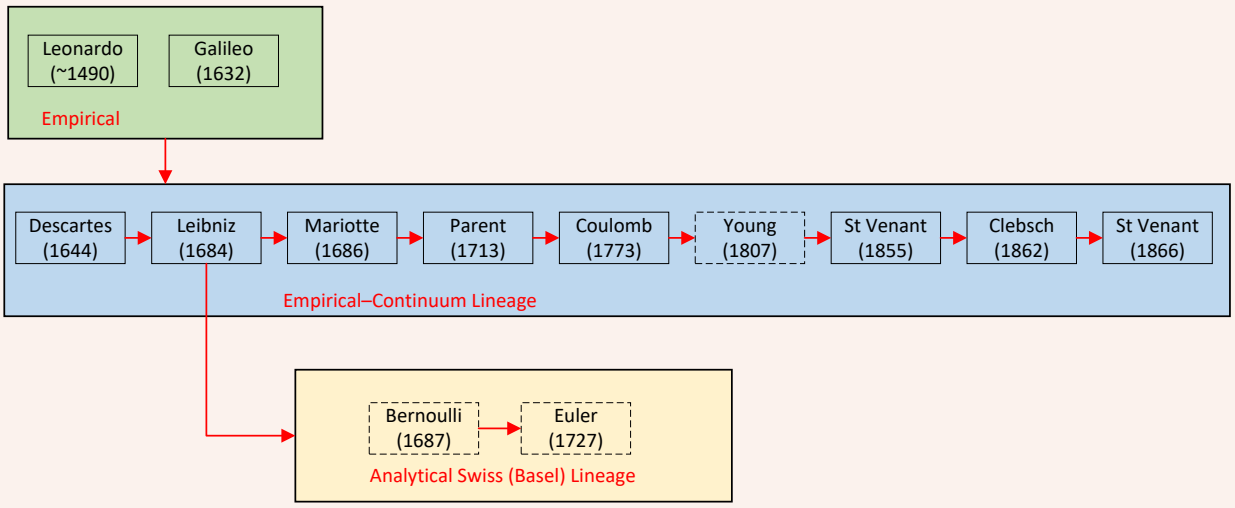


图 7.4: 兩個平行線向柔軟壓力

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

7.3.1 第一条: 帝国线性

这一第一项行动跟踪了梁理论的进展, 通过直接观察、实验和物理合理化。从莱昂纳多的直观绘画开始, 并通过加利利奥的系统分析继续, 这种实验传统强调了关于结构失败的实际担忧。引导这一线路的关键洞察力是闪电破裂, 但理解为什么和预测时需要仔细观察和越来越复杂的机械思维。

7.3.1.1 莱昂纳多 (≃ 1490)

虽然人们普遍认为加利利奥是第一个解决灵活性问题的人, 但从所谓的马德里法典中获得的更新的证据表明他实际上被莱昂纳多 • 达芬奇先行。(Zammattio, 1980).

莱昂纳多关于 flexure 的绘图在 (Da Vinci, 1490 pdf) 在两个单独的片段。

9V 彩色

在第一眼看, 有人可能认为莱昂纳多的绘画, 图 7.5, 代表实验测量记录或早期数学理论。远离它 - 他 “简单” 提出问题后问, 提供少数答案。当答案出现时, 它们通常是投机性的, 并且装饰着合适的圆数在地质比例 - 100、20、4 或分裂如 1/2, 1/4, 和 1/8 。莱昂纳多不是现代意义上的实验主义者。(加利利奥后来就变成了). 他的辉煌在于提出正确的问题, 有时会发出猜测性的答案。

早些时候, 他认识到理解结构的基本组成部分的重要性 树木、柱子、架子和相关术语子 作为建筑科学的正确基础。在图中显示的绘图中 7.5 他清楚地看到了射击的强度。[5] 与其长度、跨部分、支座模式和应用负载有关。他还认为喷雾漏洞作为支持条件和负载的功能。

然而, 他的研究仍然是定性性的: 他缺乏数学工具, 内在的概念。**应力**, 以及对实验验证的任何系统方法。他的作品中没有任何方程式, 也没有任何努力在控制条件下隔离变量。然而, 莱昂纳多的贡献的价值不是解决方案, 而是解决问题的框架。他提出的问题 - 无论是投机性 - 都表明了一个决定性的转变, 以处理结构 单元 作为合理研究的机械系统。他们将为下个世纪的更严格发展奠定了阶段。

这一转变将从加利利奥开始, 他不仅提出了类似问题, 而且也试图回答这些问题 - 使用力量图表、规模论点和真实的实验。

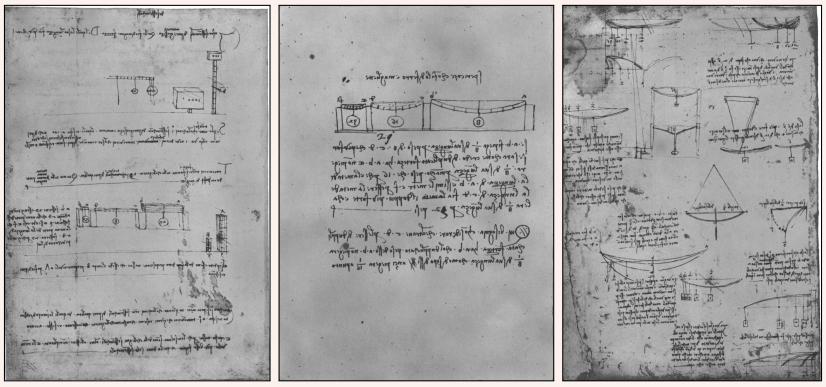
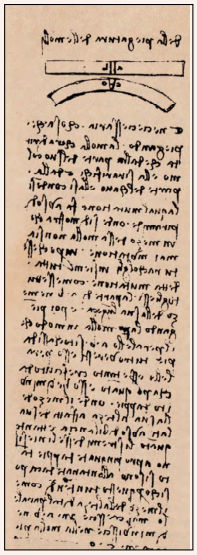


图 7.5: 莱昂纳多的雕塑,Folio 9v

[5]梁 曲率 出现在最近发现的 **马德里** *Codex*, 图 7.6, 而 柱 强度在 图 中被探索 9.24a.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



If a straight spring is bent, it is necessary that its convex part become thinner and its concave part, thicker. This modification is pyramidal and consequently there will never be a change in the middleof the spring. You shall discover, if you consider all of the aforementioned modifications that by taking part a b in the middle of its length and then bending the spring in a way that the two parallel lines, a and b, touch at the bottom, the distance between the parallel lines has grown as much at the top as it has diminished at the bottom. Therefore, the center of its height has become much like a balance for the sides. And the ends of those lines draw as dose at the bottom as much as they draw away at the top. From this, you will understand why the center of the height of the parallels never increases in a b nor diminishes in the bent spring at c o.

图 7.6: 莱昂纳多的绘画,Folio 20v, (Zammattio, 1980)

20V

和 **马德里** *Codex* 写在 1500 年左右, 直到 1965 年重新发现为止几乎 250 年仍然不明。[6] 在 197 页上, 莱昂纳多探讨了机械、静态、地质学和城堡建设等主题。手稿具有显著的历史价值, 而不仅仅是因为它们包含大约 15 个% 莱昂纳多的所有存活笔记, 但也由于内容的质量和技术相关性, 这是其时代最重要的工程交易之一。

在 Folio 84 中, 莱昂纳多分析了一条相关术语栏的变形, 并精确描述了其最外部纤维的反应。他清楚地注意到以下几点:

- 酒吧的内部 (面对曲率的中心) 缩短, 即内部纤维被压缩;
- 外侧长度, 表明外部纤维处于紧张状态;
- 条中轴的长度保持不变; 以及
- 纤维的延长或缩短量是与其距离相比例的。**中性轴**.

在本质上, 莱昂纳多将线性应变分布的原则归结在伯诺利前近 200 年 - 一个令人惊叹的洞察力预测了基于现代梁理论的基本假设。

7.3.1.2 加利利 (1632)

加利利奥随后把注意力转向了老头骨问题。(图 7.2c), (Galilei, 1632) (第二天). 他认为一个单一的固体从平衡梁中被挂在任何端口的绳子暂停。相同性, 梁平衡在其中间点 C. 他接下来假设坚固在某个中间点被切断。D 兩個結果的分支, 暫時由一個共同的線條支持。DE. 因此, 这些分区中的每一个变成原始系统的较小版本, 并对其自己的中心的平衡为重力点。G 左边和 F 右边的。

加利利奥进一步表明, 如果 AD 他们在中间点被单一的绳子支持。LG 和分区 DB 另一条绳子在 MF, 其他支持代码可以被删除, 平衡仍然会保持。他说, 这个比例 CG/CF 等同于 EI/EH 相反, 等同的 DB/AD 最后两种是对部分重量的比例。

[6] 和 **马德里** *Codex* 手稿偶然在西班牙国家图书馆被艺术史学家朱尔 • 皮克斯发现。它们的重要性因莱昂纳多在机械和工程工作的广度和技术深度而立即被认可。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

值得一提的是, 在加利利奥的图表中[7] 什么都没有动, 实际上也没有动。他的理性是完全静态的, 根源于理想化的平衡而不是电影或动力分析.

Galileo 终于准备好解决 Cantilevered 梁 的种子问题 (图 7.7) 一个自此以来已成为理性机械对结构理论的应用图标的配置。会员 $ABCD$ 是普里斯马特的, 并且当一个荷载应用时 C 显然, 如果失败发生, 它将发生在时



图 7.7: 加利利奥的种子<梁

刻 B, 在那里成员被嵌入到墙上。主持人有一定的 **绝对的力量**[8] 也就是说, 抗拉强度之前讨论。在破裂的时刻, 这个绝对力量的时点 B 應用 荷载 的時刻必須平衡相同的點。在此分析中, 伽利略正在有效地考虑到平衡的时刻。**克兰特利夫**[9]. 现代笔记

$$L = \frac{Sh}{2l} \tag{7.1}$$

在 图 7.8a, S 是绝对的 (二、紧张) 成员的强度, 具有宽 B 和深度 d. (如果 梁 具有圆形圆形交叉部分, 那么 Galileo 注意到绝对抵抗的手臂是射线。R.) 在现代应力的观点上, 加利利奥显然承认了一个统一的分布图 7.8b.

加利利奥本人不利用绝对强度的数值值 S 他的担忧主要是计算。**相对** 力量。数量的 $S/2$ 它只是被视为一个给定的物理参数, 进入分析。例如, 加利利奥正确地证明了负载的比例 T 到 X 需要打破直角交叉部分的梁分数 - 当侧向边向平面时 - 等于比例 ca/cb (图 7.8c). 因为部分模块已在表格中正确识别 kbh^2 常态因素 $k = 1/2$ 在 EQ。7.1 没有影响结果。它取消了比例, 并强调加利利奥的理性 - 也许缺乏现代应力概念 - 捕捉了正确的规模行为。[10]

值得注意的是, 加利利奥还不熟悉应力的概念; 他仍然想象了梁的抵抗力。(虚拟) 内部膜被拖动, 如图中所示 7.12a. 这个定性观点后来将被马里奥特精化, 他引入了纤维压力和压缩的更机械解释。(§10.1.2) 通过梁的十字段 - 朝着现代曲线理论迈出早步。

虽然对现代读者来说可能令人惊讶的是, 加利利奥的科学家可能无法正确地识别极压的位置, 但必须考虑到历史背景。在加利利奥时代, 马索尼亚树木占主导地位的结构实践。这种结构的主要担忧不是压缩失败, 而是由于紧张力量而分离附近区块。(章节 31) 最终可能导致崩溃。影响后在莱布尼兹的作品中将正式化什么

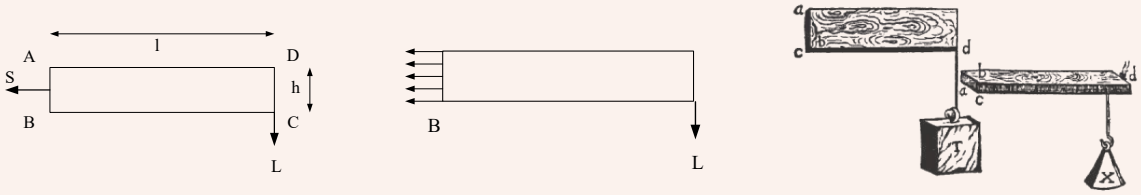
[7]加利利奥的理性, 虽然在平衡和举手的意义上表达, 却预测了现代概念。**中性轴** bend 的。雖然他沒有明確考慮內部壓力或壓力分布, 但他的地質分解和同義論點反映了一個早期的直覺, 某些球體內部的線路仍然不緊張 - 這是一個想法後來將在泡沫理論中正式化。

[8]由 “绝对的力量,” 伽利略是指物质的内在紧张或一致的强度, 即在受内部应力影响时抵抗破裂的能力。这与现代应力分布或弹性行为的概念不同, 因为加利利奥将力量视为一个持续的限制力。

[9]术语 “克兰特利夫” 指向一个相关术语或角带的手臂 - 在这种情况下, 内置和投射的地质学的管层成员 - 改变方向的力量和时刻武器。加利利奥的处理简化了梁到一个静态升高, 受旋转的平衡的影响。

[10]伽利略承认, 强度取决于宽度和高度的平面。(bh^2) 它是历史上重要的, 因为它预测现代部分模块。虽然他的表述缺乏正式的概念应力或弹性变形, 但尺寸洞察反映了一个早期和显著准确的理解结构规模法则。

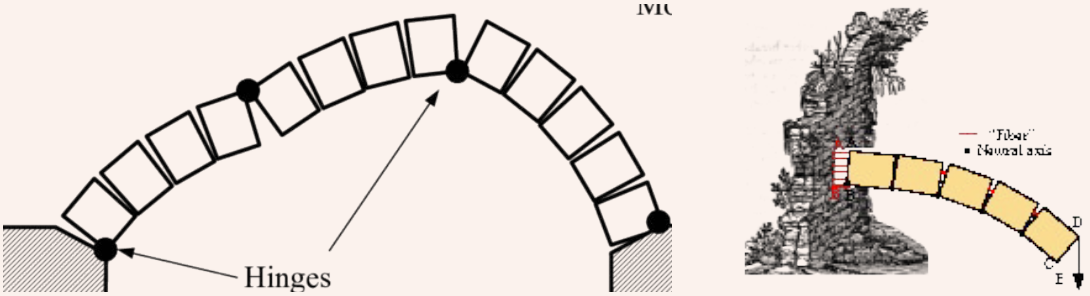
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 破裂的条件 (b) 合成 应力 分布 (c) 比较强度

图 7.8: 加利利奥的假设在确定 cantilevered 梁 的强度 ((a) 和 (b) 适应从 (Heyman, 1998b))

(图 7.10), 图 7.9 它描述了伽利略 (后来是马里奥特) 可能预测的失败模式类型, 由紧张下低纤维分离或破裂统治。



(a) 马森里 拱 (b) 马森里 梁

图 7.9: 挠度的硬 “马索尼 梁”

加利利奥的作品在许多方面都令人惊叹。他不仅是第一个将科学方法应用到结构问题中, 而且也首次引入了“科学方法”的概念。**自由体图表**. 同样重要, 他提出了比较结构的基本概念。**能力** 應用 **需求**一个原则, 仍然是现代工程的核心 实践。[11]

最后, 加利利奥的模型专注于紧张和被忽视压缩。革命的想法, 即有一条线, 后来被称为 **中性轴**应力是零的, 尚未想象。这种限制将推动下一代调查人员寻求对内部力量分配的更全面理解。

伽利略所建立的实验性线路将继续通过研究人员, 他们逐渐改进了他们的洞察力, 纠正错误, 同时建立在他的基本方法, 以治疗弹药作为机械系统的平衡分析。

7.3.2 二: 帝国主义 - 连续线性

第二项行为代表着一个关键的过渡: 同时保持在实验观察的基础上, 调查人员开始思考材料作为持续媒体而不是分散的文件组合。这一转换为了解内部应力分布的新可能性, 并标志着连续介质力学在结构分析的开始。

[11] 虽然加利利奥没有使用现代向量评级, 但他的理性涉及隔离系统的部分, 识别应用力量和反力点, 并考虑旋转平衡 - 预测现代自由体图。同样, 他的对一个成员的内部强度与外部荷载的比较, 这会导致失败, 反映了我们现在称之为能力的早期表述 - 需求评估。这些概念突破为现代结构安全检查奠定了基础。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

7.3.2.1 德卡特 (1644)

对于 *Descartes* 的生物绘图, 请参见部分 *6.6.3*.

1644 年, 德卡特出版了他的 **哲学原则**, 在其中, 他献了许多页面来研究固体抵抗的物理和形态原因。给梅森的一封信 (1638 年) 他写道:

> 至于加利利奥先生, 他提出了身体部分的凝聚力两个原因: 一个是空气, 他称之为自然偏见; 另一个是一种粘着或粘着物质, 它坚持到表面并将它们绑在一起。但这两件事似乎完全是错误的。首先, 我不相信自然会放下一个空气; 第二, 如果这种粘液存在, 它就比它连接的部分更坚固。同样的问题, 就什么把自己的部分放在一起。
>
> Descartes, 1897b Correspondance de René Descartes

德卡特将他的作品的几个部分献给了他对其更广泛的哲学体系的坚固抵抗的解释, 基于粒子相互作用和空白排除。[12] 对德卡特的概念进行更全面的处理 **坚定性** 超越本章的范围。

德卡特的 **拉** *G´* **姆** *´* **特里** (Descartes, 1637b) 它被发表为附件的**演讲** *M´* **德** (Descartes, 1637a) 创建分析地质学, 将古典希腊地质问题与算法象征主义相结合。通过他引入协调轴、曲线的算法代表和系统排除技术, 德卡特将地质学转化为解决路径和建筑问题的一般方法。它的影响力破坏了十七世纪和十八世纪的机械, 提供后来由费尔马特、纽顿和伯诺利斯使用的数学语言。

然而, 德卡特指出一个重要的过渡人物: 尽管他缺乏实验基础, 但他的坚持机械解释和拒绝阿里斯托利亚形式推动了未来的思想家向更多的物质和结构模型的团结。他的对物质的持续观点在应力和应变概念的潜在发展中表现出影响力。

7.3.2.2 莱布尼兹 (1684)

对于 *Leibniz* 的生物绘图, 请参见部分 *6.6.8*.

莱布尼兹对固体机械的兴趣受到加利利奥和马里奥特的旋转理论之间的当代争论的影响。虽然加利莱奥假设射击是完美的硬, 一旦抵抗被克服时突然失败, 但马里奥特引入了实验的洞察力, 表明变形和应变发生在破裂之前。莱布尼兹跟随了马里奥特的理性, 并在他的写作和邮件中承认加利利奥的模型忽略了材料的扩展性。(Leibniz, 1684).

引用从 McDonough, 2016 莱布尼兹注意到, 实验结果 - 特别是马里奥特 (Mariotte) 所进行的实验结果, 他直接与此相匹配 - 表明: “更少的重量足以打破梁比加利利奥想要。” 加利利奥的错误根源, 莱布尼兹争论 (2016, p. 321) 是那 “他认为这是一个完美的硬 梁, 一旦它的抵抗变得过度, 它会在一瞬间被打破。” 反之亦然, 莱布尼兹坚持说, 所有的爆炸 “在某种程度上, 他们可以被拆除之前, 如可见的 … 例如, 一支工作人员在打破之前转动, 以及一条线的例子, 在打碎之前伸出。”

尽管他没有发表关于这个问题的全面论文, 但莱布尼兹通过概念创新为灵活性理论的进化做出了贡献。他认为, 所有的粗体都是无限可分裂的。然而, 他的梁分为线条和元素部分的目的不是反映物理结构, 而是作为一个数学抽象。这种分解 - 在理想化纤维中 (§10.1.2) 单元 - 显然是一个方法结构, 是现代连续模型的先例。

Leibniz 想象这些纤维像保持 梁 单元 在一起的喷雾一样作用 [13]. 在这种精神模式中, 梁作为一个固体块的

[12] 德卡特拒绝了加利利奥对真空的呼吁和任何内在概念。“格莱” 如甲状腺无形。他提出, 物质是由关闭粒子在一个连续的媒体组成的, 他称之为 **全会**否认空白空间的存在。在这种观点上, 固体的抵抗源于这些粒子的不可侵犯性和地质安排, 总是接触和运动。雖然他的解釋是投機性的, 並缺乏實驗的根據, 但它們顯示了一個重要的轉移從阿里士多德形式到完全機械的解釋。纽顿后来会面对并离开德卡特的许多假设, 尤其是他远程拒绝行动, 同时仍然继承了卡特西亚对数学化物理现象的承诺。

[13] 在这一点上,Leibniz 可以被认为是现代独裁单元方法的概念先驱。(他们), 这也是模型继续作为由符合单元连接的硬块组合。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

系统, 由春类纤维沿着其附属表面连接。形象 7.10 描述一个这样的区块 $ABKC$, 作为一个双武装的 lever 子, 在 A. 它连接到附近的表面 DE 单元 如: $1B2B$ 和 $1H2H$, 当一个 荷载 适用时 C 沿着手臂 AC. 虽然这个图表是投机性的, 但它与莱布尼兹的整体模型策略和他对地质逻辑的吸引力一致。

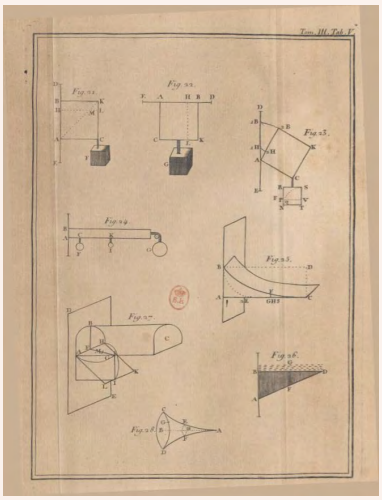


图 7.10: 概念型 梁 由 Leibniz 的地质机械启发 (Leibniz, 1684)

虽然莱布尼兹添加了一些基本上新鲜的射击机械, 但他提出了一个重要的概念基础。正如他自己指出的那样, 他会让其他人开发一个完整的理论。显然他对这个问题没有持续的兴趣, 也许是因为他看到有限的数学深度。然而, 他的结论评论证实了他对数学能照亮物理现象的信念。他写道:

> 因此，只须考察这少数几点，整个问题便可归结为纯粹的几何学；这正是物理学和力学中所追求的。
>
> McDonough, 2016 "*Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years*", p. 112

可以翻译为: "因此, 通过这些少数考虑, 这个主题的整个处理都减少到纯地质 - 这在物理学和机械学的主要欲望。"[14]

最后, 在 *Acta Eruditorum* **编辑** (Leibniz, 1691e)1691 年 6 月, 莱布尼兹指出, 他也打算通过私人信件处理问题。**曲折或曲率的裂缝**, **伸展的尾巴或任何类型的侧路曲折** 尽管他决定推迟出版, 并保留详细信息为私人通信。

7.3.2.3 马里奥特 (1686)

马里奥特正在研究水管的强度, 并开始通过对一定直径管所需的墙厚度进行正确表达来抵抗内部压力。然而, 尽管进行了大量的紧张和旋转测试 (图 7.11a) 他无法与加利利奥的公式和解他的结果。他得出结论, 加利利奥的不可扩展假设是错误的, 所有材料必须在充电时进行某种延伸。(胡克最近才发表著名的法律, **西克 · 维斯** *(Sic Vis)*.)

因此, 马里奥特假设材料以线性弹性方式行事, 在紧张和压缩中表现出相同的行为, 在分裂之前最终最大延伸。保留加利利奥的假设, 中性轴位于该部分的基础上, 马里奥特推出了压力应该分布在一个三角形配置。(图 7.11b) (Heyman, 1998b).

[14] 莱布尼兹的呼吁 **纯地质** 强调早期认识, 地质理能可以提供强大的洞察力复杂的机械行为。这种观点后来证明在处理非线性弹性问题时至关重要, 如 **弹性**, 在地质学统治平衡配置, 超越线性制度。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

当马里奥特考虑了梁的旋转时 (图 7.11af) 他注意到, 紧张部队的总额相当于 $S/2$ 也就是说, 只有半个绝对的抗拉强度在梁 - 和他们的时刻点 D 是 $S/2 \times 2h/3 = Sh/3$ (查看 图 7.11b). 相应的最终 荷载 则由:

$$L = \frac{Sh}{3l} \tag{7.2}$$

哪里 L 是外部 荷载 (被称为 W 加利利奥的表述). 这个结果仅占加利利奥预测的最终荷载的三分之二。(Timoshenko, 1953).

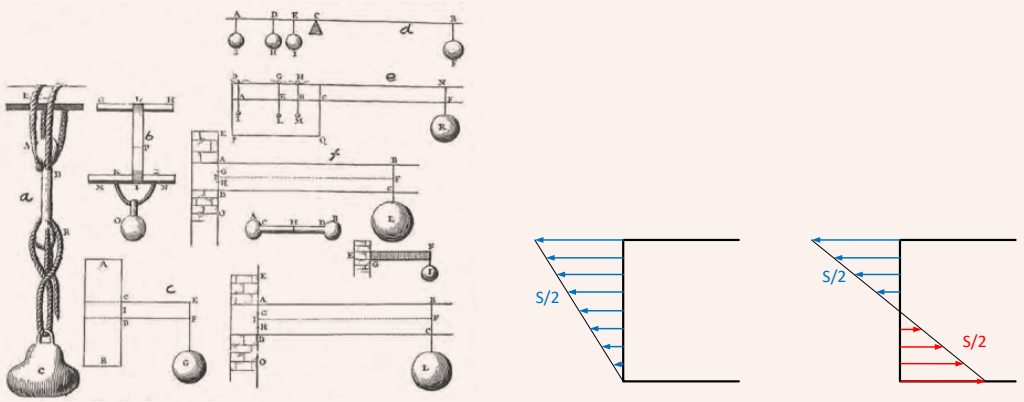
然后, 马里奥特继续前进。再次提到图 7.11a 但是, 他注意到, 在底部的纤维 ID 交叉部分在压缩中, 而上方部分的 IA 紧张中 (图 7.11c). 要计算 荷载 L 需要克服紧密纤维的抵抗力, 他重新使用 Eq。7.2 取代 h 与 $h/2$ 二倍的结果, 导致:

$$L_1 = 2 \cdot \frac{S}{3l} \cdot \frac{h}{2} = \frac{Sh}{3l} \tag{7.3}$$

虽然他对纤维中的力量分布的假设基本上是正确的, 但他在评估紧张势力的时刻方面做了一个错误计算。I. 除了替代 $h/2$ 為 h 在 EQ。7.2 他也应该使用 $S/2$ 而不是 S, 这将带来正确的结果:

$$L_2 = 2 \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{3l} = \frac{Sh}{6l} \tag{7.4}$$

这种监测阻止了马里奥特达到最终荷载射击能力的正确公式。(Timoshenko, 1953). 此后, 该错误已被圣维南特修复。



(a) 马里奥特的测试　(b) 马里奥特的原创　(c) 马里奥特的评论

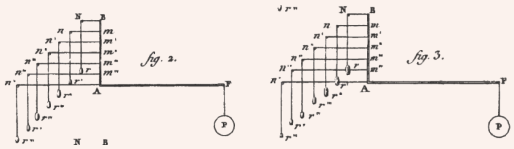
图 7.11: 马里奥特的模型 (Heyman, 1998b)

再次, 应力的概念尚未正式化, 马里奥特的理性仍然密切联系在加利利奥以前的想法上负载, 平行纤维抵抗紧张在梁内。这个基于哲学的解释是由 Girard, 1798 第一九年初 th 世紀: 图 7.12a 重建加利利奥的模型, 由网膜纤维组成, 而图 7.12b 描述了马里奥特对这个概念的改进。尽管阿尔伯特 • 吉拉德工作得很晚, 但他的图表有助于视觉化过渡思维, 前进了基于应力的弹性理论的完整发展。

7.3.2.4 父母 (1713)

而不是自愿将中性轴放入一个 “可能” 立场, 父母承认需要满足所有条件的平衡, (Parent, 1713). 在二维固体机械中, 必须满足三种平衡方程式。父母注意到, 加利利奥有效地满足了只有一个　通过平衡应用的荷载关于满月的时刻。(也就是说, 中性轴在部分的基础上) 与内部力量在破裂的时刻。加利利奥显然忽略了剩下的两个条件: 水平和垂直力量的总结。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 加利利 (b) 马里奥特

图 7.12: 吉拉德的画作《伽利略与马里奥特》模型

父母, 相反, 明确写下水平平衡方程. 他采用了一般线性应变分布 (图 7.13), 允许在紧张和压缩中不平等的弹性模块。在其表述中, 分裂是由密集的应力在纤维中控制的。AT, 虽然压缩 应力 纤维 BX 可能更大。无论其大小如何, 父母声称压缩三角的总抵抗力 CBX 必须等于紧张三角形。CAT 与相应的力量通过点行动 I 和 D 相应。

父母也是第一个认识到对十字路口进行坦克行动的力量的可能性 - 我们现在称之为沙尔压力。

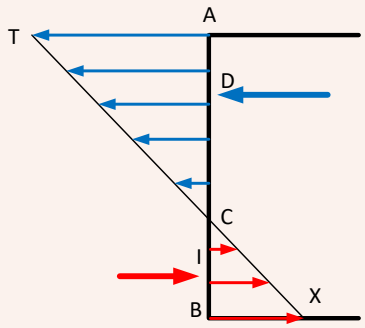


图 7.13: 父母的模型

7.3.2.5 科隆 (1773)

查尔斯 • 奥古斯汀 • 库伦布在分析曲线方面取得了显著进展。第 1773 章 记忆 (Coulomb, 1773b)(关于一个应用的论文 R` 最大和最小为主 ` 些问题 ` 静态相似之处 $\grave{A}$ 建筑) 他研究了内部力量分布, 并正确地应用了所有三个平衡方程式 - 两个方向的力量平衡和一个点左右的时刻平衡。他认为梁是由符合胡克的法则的纤维组成的, 对于弹性行为到失败的情况下, 他估计内部抵抗时刻与最大紧张的应力和部分深度的平方分为比例。$\sigma h^2/6$.

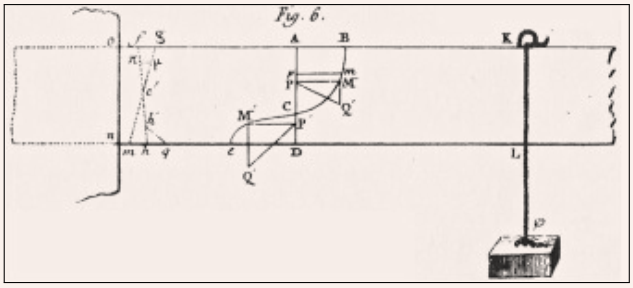
灵活性

雖然這個方程式並沒有由科隆布在這種形式上寫出來, 但他的理論和計算在本質上是相同的。他清楚地确定了紧张和压缩的作用, 讨论了中性轴的转变, 并区分了弹性和硬材料的行为。然而, 他没有从应力的完整线性分布中得出结论, 也没有从弹性理论中证明中性轴的位置。然而, 值得注意的是, 库伦布的治疗主要是基于机械直觉和纤维裂缝的类似性, 而不是弹性的新兴数学框架。他没有从胡克的法则中提取公式, 也没有制定压力兼容性或内部平衡的条件。

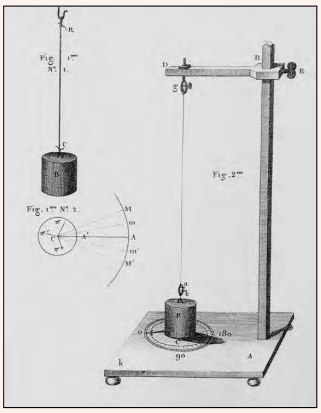
我们将其衍生品列出 (基于 (Timoshenko, 1953))

Coulomb, 1773c 开始他的分析弯曲, 通过检查内部压力分布在一个直角的角膜线, 如图所示。7.14a 讨论在 Timoshenko, 1953. 他的理性可以分为几个关键步骤:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 平衡 由充电的 cantilever



(b) 图尔西亚振动测试设备

图 7.14: 库伦布的实验 (Coulomb, 1773c)

1. **应力 分布在一个部分** 科隆布认为一个跨部分 AD 接近坎特利弗的固定终点。他指出, 上方的 (AC) 将处于紧张状态, 而低部分则处于压缩状态。他将纤维力量分成水平和垂直组件。(由 vector 代表 PQ 和 $P'Q$), 并适用于三个静态方程式。从此, 他得出结论:

   - 和 **水平力量的总数** (由曲线代表 BCe 沿着部分) 必须是零。
   - 和 **垂直力量的总数** 必须等于所应用的 荷载 ϕ.
   - 和 **瞬间总数** 与内部力量有关的 C 必须等于应用的 荷载 的时刻。ϕ 相同的轴。

   他指出, 这些方程式无论物质的构成行为如何保持。

2. **完美弹性案例** 假设梁是由完美弹性材料制成的, 遵守胡克的法律, 库伦布检查了差异性单元。$ofhn$ 在固定结尾。在应用的荷载下 ϕ 初步地平线 fh 转向一个新的位置 gm. 应力分布在跨部分内是由两个三角区域所描述的: fge 在紧张和 emh 在压缩中, 每一个代表应变和应力在纤维上。
   让 σ 當時的最大壓力 应力 f. 库伦布计算了内部抵抗时刻。(為一個 梁 的單位寬度) 如下:

$$M_{\text{int}} = 2 \cdot \sigma \cdot \frac{fe}{2} \cdot \frac{2}{3} fe = \frac{2}{3} \sigma (fe)^2 = \sigma \frac{(fh)^2}{6} \tag{7.5}$$

   引入最终 抗拉强度 的材料 S, 并将荷载的手臂标记为 l 和部分的整体深度 h, 他得出最终的荷载如下:

$$\phi = \frac{Sh}{6l} \tag{7.6}$$

   他得出结论, 可以忽略的力量, 尤其是当手臂 l 比深度更大 h.

3. **绝对严格的压缩案例** Coulomb 接下來認為是一個材料, 如石頭, 假設在壓縮中是堅固的, 並且沒有延伸緊張。他推测, 转角发生在底边的裂缝。h, 并采取统一的紧张应力分布。结果的内部时刻导致一个更高估计的最终荷载:

$$\phi = \frac{Sh}{3l} \tag{7.7}$$

   然而, 比较这种理论预测与实验数据, 库伦布发现荷载过度估计。因此, 他提出, 实际的转角点必须稍微上升。h 在某个点上 h' 因此, 一小部分 hh' 该部分具有压缩力。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4. **意义与背景** 库隆布的分析正确地将静态平衡应用到内部力量, 并显示一个清晰的概念理解在旋转器内的应力分配。[15]

有趣的是, 库隆布没有提到父母的早期贡献, 表明他不知道。相反, 他引用查尔斯 • 波苏特, 谁在他的待遇 *La Construction la plus avantageuse des digues* 建议木材泡沫被视为弹性, 石头则被视是硬。

> 库隆布在分析内部力量时正确使用静态方程式, 并对这些力量在梁的交叉部分分配有明确的想法。
>
> Timoshenko, 1953 History of Strength of Materials

> 库伦布的理论..... 虽然总体上给出正确的结果, 但在原则上是错误的, 因为压力分配不是从知识中获得的, 而是基于实验性的理由进行的。
>
> Todhunter and Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

它是 **直到十一世纪中期** 圣文本通过弹性理论正式化了这些想法, 从而产生了熟悉的关系。$\sigma = My/I$ 并确定中性轴与中心相匹配。因此, 虽然库伦布预测了梁理论的基本原理, 但圣维南特仍然把它放在一个严格的理论基础上。

扭转

1784 年,Coulomb 在扭转上制作了他的记忆。他通过观察由它悬挂的金属缸的旋转波动来确定电线的旋律硬度。[16] 图 7.14b. Coulomb 假设一个旋转线的抵抗曲线是与旋转角比例 ϕ, 并发现这种波动时期独立于旋转的角度 (如果不太大) 因此, 他得出结论, 有比例的旋转和旋转的角度。他随后用相同材料但不同长度和直径的电线进行实验, 并确定旋转 M 将是

$$M = \frac{\mu d^4}{l}\phi \tag{7.8}$$

哪里 l 是长度, d 直径和 μ 物质是恒定的。在现代文学中, 这就是

$$T = \frac{GJ}{L}\phi \tag{7.9}$$

哪里 T, G, J 和 ϕ 是外部旋转, 叶子模块, 波动的瞬间。(J=$\pi d^4/32$ 循环部分) 相应的旋转角度。相应的表达为最大 剪应力 是 $\tau = TR/J$.

库隆布确实产生了这个方程式, 尽管与反对方程的平衡是简单的, 它不清楚 Wo 是第一次使用它。

$$\tau = \frac{TR}{J} \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I} \tag{7.10}$$

然而, 灵活的应力方程式通常被归功于 Coulomb。

7.3.2.6 年轻人 (1807)

看见 §6.6.6 为讨论青年在胡克启动的传统中的贡献。

[15] 库隆布的应力图表和瞬间估计与现代梁理论概念一致, 但在执行中有所不同。今天, 在一个弹性梁的内部时刻被写为 $M = \int_A \sigma y \, dA$ 与 $\sigma = E\kappa y$, 引导到 $M = EI\kappa$, 在哪里 E 是 杨氏模量, κ 是 曲率, 和 I 截面二次矩等。Coulomb 通过对三角形 应力 区块的地质理论来超越这个基于计算的衍生物。此外, 他的破裂治疗使用最终的应力并承认塑料的完整再分配 - 一个概念在边界分析和塑料设计理论后得到了很长时间的正式化。

[16] 值得注意的是, 到那时, 库隆布已经开发了旋转平衡, 并用它在电力和磁性以及粘度的许多定量研究中。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

标签: 模块

1807 年,Young 介绍了一个弹性模量的概念, 以描述材料的坚固性:

> 我们可以用同一物质的某个列的重量表达任何物质的弹性, 这项物质可以称为其弹性模块, 其体重是这样的。任何添加的物质将增加它的比例与附加重量相同, 将其压力缩短一部分物质的直径。
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

它的定义有点变革, 与现代解释略有不同。青春的 “模块的重量” 它具有强度单位而不是应力 , 并符合现代的弹性模量。(E) 由 横截面积 加倍 (A). 值得一提的是, 这种关系早已被 Euler 编写。

此外，杨把我们现在所称的 “剪切” 称为 *detrusion*，并指出：

> 然而, 可以从旋转物质的特性中得出结论, 其强度在粒子与自然位置的距离简单比例上有所不同。而且它也必须简单地比例到它被应用的表面大小。
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

在这里,Young 正确地描述了相关术语形变形和>模块, 并得出结论 (精确) 一个成员的 strength 强度与其横截面积相比例。

第 3 章 十八七

现在, 我们回到问题上。**中性轴**, 经过关于 Young 介绍弹性模量的简短交谈后。青年还研究了中性轴在旋转中的位置。他延伸了父母和库伦布的早期作品, 包括轴力的影响, 如图中所示。7.15.

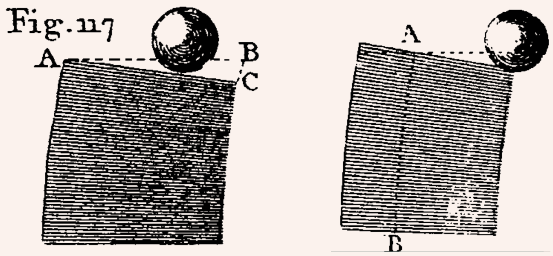


图 7.15: 青春的第三条规则

> **320. 理论**. 当一个力量被应用到一个弹性柱的直角前景形状, 在轴平行方向, 最接近方向线的部件执行抵抗在相反方向; 这些粒子, 在轴之外的距离, 相当于与深度相比例的三分之一和力量方向线的十二倍的距离; 在其自然状态中保持。其余的部分在力量的方向上行动。
>
> Young, 1807 A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts

青年理论 320, 可以被阅读为一个比例性地质声明, 控制长度延伸和压缩的异端负载弹性柱。让一个力量 F 与直角性柱的轴平行行动, 但在转折点上 a 从中枢轴, 柱具有深度 b 走向 bend 的方向。年轻人认为, 长度应变与距离比例不同。y 从力量的行动线, 使纤维更接近该线体验延伸在一个意义上, 而纤维足够遥远体验延长在相反的意义上。有一个中间层, 位于距离 y_0 从轴上, 为此延伸消失, 即 $\varepsilon(y_0) = 0$. 青年决定这个位置, 不是通过解决一个算法应力方程式而来, 而是通过比例的合理性来确定这个位置。y_0 第三个是相对的。b 和 $12a$ 因

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

此, 这 $b : y_0 = y_0 : 12a$. 在现代意义上, 这意味着 $y_0 \propto \sqrt{ab}$, 表达轴力和曲折之间的平衡, 由兴奋性引发。因此, 理论编码了线性比例性。$\varepsilon(y) \propto y$ 在部分的深度上, 预测一个转变中性轴的概念, 并描述了年轻人如何通过长度和力量的比例而不是明确的构成方程式来框架弹性行为。

在这里,Young 描述了中性轴的位置如何与荷载的兴奋性不同, 并介绍了将成为庆祝的什么。**第三条中间规则** 在工程设计中。

然而, 必须指出的是, 青年的展览并不总是清楚。相关材料出现在 58 个讲座的广泛编辑中, 涵盖了各种科学主题。

> 整个部分似乎对我来说非常模糊, 就像其著名作家的许多书籍一样, 在他的科学和语言领域的广泛成就中, 不幸的是, 在数学家的常规语法中明确表达自己并不包括。部分的公式可能在出现时主要是新的, 但由于它们呈现的不吸引力的形式, 它们很少会引起注意。
>
> Todhunter and Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

在青年的时代, 实验连续线路已经建立了梁理论的基本概念大多 - 弹性行为, 应力分布, 平衡分析, 甚至对物质特性的根本理解。然而, 一个完全严格的理论框架仍然是错误的。最终的合成需要数学准确性, 圣文将提供半个世纪后。

7.3.2.7 圣文 (1855)

Saint-Venant 回到 梁 的分析中, 在 Coulomb 的先驱工作后超过 80 年。虽然库伦布已经提出了一个静态正确的表达, 涉及紧张和压缩压力 - 甚至包括类似于现代时刻的表达式 - 压力关系 - 他没有从弹性理论中产生压力分布。它被留在圣文纳特提供的 **第一种严格的衍生** 使用线性弹性的完整框架, 在弯曲下的压力领域。

在他的研讨会中 (Saint-Venant, 1855c) 圣文纳特承认了微小的变形, 一个同性化和以色列的弹性材料遵守胡克的法则, 并在纤维之间的完美连接。在这些假设下, 他证明:

- 和 **中性轴**零长度应力的路径通过梁交叉部分的中心。
- 正应力在纯曲线下与距离线性变化 y 从这个轴, 引导到现在的基本表达:

$$\sigma = \frac{M\,y}{I}$$

这标志着一个转折点: 第一次, 旋转压力公式从内部物质行为和兼容性中脱颖而出, 而不仅仅是平衡。结果取代了实验性或基于纤维的理性, 以灵活的连续方法和密切连接的地质学、物质行为和内部应力分布。

7.3.2.8 克里斯蒂安 (1862)

阿尔弗雷德 • 克莱布什 (1833—1872) 它在弹性理论的正式数学发展中发挥了关键作用。他的主要工作, (Clebsch, 1862b) (**弹性理论 ¨ 祝 K¨ 儿**) 出版于 1862 年后文, 后来翻译为法语 1866 年与圣维南特的详细笔记, 提供了一个系统和严格的介绍统治方程式弹性.

虽然克莱布什没有引入这个概念。**中性轴**他的治疗, 巩固和扩展了圣文的结果, 提供一个更普遍和正式的衍生应力和应变分布在弹性身体。他的曲折治疗包括中立表面出现的条件 - 被定义为变形身体的点位置, 经历零长度应变。这种普遍化有助于巩固泡沫理论的数学基础, 将物理洞察与分析准确相结合。

Clebsch 的工作标志着一个重要的转变到现代的公式, 不仅引入了平衡和变形协调的清晰差异表达, 而且还预测后来的张量基于弹性的治疗。

审阅稿

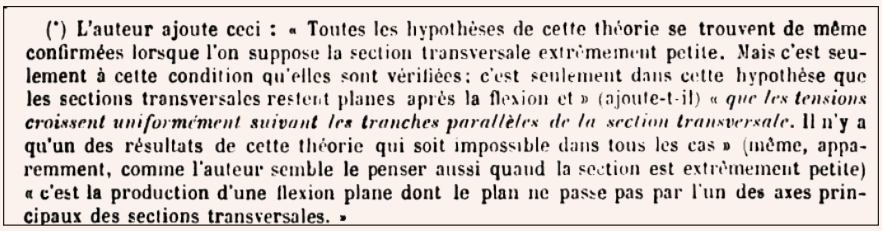
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> Clebsch ... 以令人惊叹的清晰度和准确性表达自己..... 曝光在整个过程中, 严格符合更高的分析方法。
>
> Todhunter and Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

7.3.2.9 圣文 (1866)

Saint-Venant 进一步澄清并通过 1866 年 Clebsch 对 弹性 的法语翻译中提及他的早期作品。(Clebsch, 1866). 基于伽利略、马里奥特和帕伦特的先前洞察, 他修正了马里乌特的错误假设, 飞机部分只依据地质而留在飞机上。相反, 他表明, 这自然而然地来自弹性理论, 在小应变假设下。

形象 7.16 展示了圣文纳特的笔记, 在那里他说 (紧张率均匀增加, 根据跨端的平行分区) 压力在交叉部分的平行滑板上均匀增加。



(*) L'auteur ajoute ceci : « Toutes les hypothèses de cette théorie se trouvent de même confirmées lorsque l'on suppose la section transversale extrêmement petite. Mais c'est seulement à cette condition qu'elles sont vérifiées; c'est seulement dans cette hypothèse que les sections transversales restent planes après la flexion et » (ajoute-t-il) « *que les tensions croissent uniformément suivant les tranches parallèles de la section transversale*. Il n'y a qu'un des résultats de cette théorie qui soit impossible dans tous les cas » (même, apparemment, comme l'auteur semble le penser aussi quand la section est extrêmement petite) « c'est la production d'une flexion plane dont le plan ne passe pas par l'un des axes principaux des sections transversales. »

图 7.16: 提取圣文纳特的笔记 (Clebsch, 1862b)

这些澄清有助于桥梁历史分裂的早期静态公式和一个完全分析的漏洞理论。正如 Todhunter 所指出的那样:

> Saint-Venant 以最简单的分析表明, 十字部分不保留其原始对角..... 也不保留它们原始平面性..... 中立线是直径在十字节上与 荷载 平面轨道的跟踪相结合。
>
> Todhunter and Pearson, 1893 A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials

圣文恩特的两份著名贡献 他的 1855 年纪念碑和 1866 年的笔记本 仍然是基本。他们不仅建立了中性轴理论, 而且也建立了如今所实践的弹性梁理论的核心。

7.3.3 第三条: 解析线性

第三项行为代表了对梁行为的理解根本不同的方法。而不是从观察到的失败模式或实验性应力分布开始, 解析线路以数学原则开始 - 特别是假设材料遵守胡克的法则 - 并使用计算来产生统治弹性变形的方程式。这种方法, 由雅各布 • 伯诺利先驱并由尤勒正式化, 预料到许多结果, 实验传统不会达到另一个世纪。

7.3.3.1 雅各布 • 伯诺利 (1687)

1687 年, 伯诺利是数学教授, 但他对解决物理问题有兴趣。似乎仍然是无限的。有些人认为伯诺利最终是一个好机械师, 因为一个工匠寻求他的建议, 以获得一个规模的梁的最佳形状选择。与这位工匠的谈话形成了伯诺利对弹性结构的研究基础。[17] (Alassi, 2020).

这次对话是在 1687 年 12 月的一封信中向莱布尼兹报告的。

[17]即使今天, 有些人也会说这好 (结构性) 工程机械师, 必须依靠坚实的实验研究。也许是真的, 但谈话更为如此。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这封信包含了莱布尼兹关于坚固抵抗的文章的批评, 并报告说:

> 一个当地的艺术家, 在制作钢板时表现出令人惊叹的精力。我很容易意识到这个人的独特技能, 不太在于建立瑜伽的分裂, 而是在于调整它的厚度, 以至于它不能轻松地被自己的重量和附带的荷载所困扰。
>
> Bernoulli, Jakob, 1855 *"Letter to G. W. Leibniz, December 1687"*

这次与工匠的对话提醒了贝诺利关于坚固的抵抗的莱布尼兹文章。伯诺利指出, 他可以 "减少到计算什么厚度将需要在任何一个约克, 以确保适当的强度, 或者相反, 为一个特定的厚度和长度, 确定它可以承受多少负载 - 这一切都是基于单一的实验进行在同一材料的相关术语。"

挑战一些莱布尼兹的实验结果, 伯诺利提出, 延长取决于两个关键因素: 应用的伸展力量和材料的性质。这封信标志着第一例已知的物质特性在弹性研究中被明确考虑。因此, 伯诺利是第一个认识到这种变形应该通过将每单位区域的强度 (我们现在称之为应力) 与物质纤维在压力下的相对延长 (即应变) 进行描述。这是一个真正的洞察力。

虽然伯诺利显然观察到肠道线的时刻依赖塑料变形 - 对湿度和温度非常敏感的材料 - 他无法正确地解释这种行为。(Alassi, 2020 PDF).

这个字母的价值不仅在其历史内容中, 而且在其独特的社会学性质中。工匠在发展弹性结构理论中发挥了关键作用, 并为伯诺利提供了精确、基于经验的洞察。伯诺利承认了这份贡献, 并在他的邮件中引用了艺术家的意见, 与像莱布尼兹这样的著名人物。尽管当时的约会, 工匠对伯诺利来说并不可见。然后, 像今天一样, 艺术家们 (或技术人员, 在现代的意义上) 他们被视为简单的指示执行者, 负责制作工具或进行实验, 但很少被认为是理论知识的贡献者。然而, 伯诺利看到了工匠不是作为一个工具制造商需要指导的方向, 而是具有宝贵的专业知识。他把他投入了对莱布尼兹的文章的严肃讨论, 并仔细考虑了他的异议。

7.3.3.2 Euler (1727)

Euler 再次承认在十字路口中线性分布轴式紧张, 并将其集成到总的 弯矩 - 这结合了 Leibniz 的方法。(被忽视的全身) 与雅各布 • 伯诺利的那样, 他没有正确地对紧张局势的变化负责。

他的方法, 适应了 Truesdell, 1960 PDF它在下面列出。

當 Euler 考慮循環戒指的振動時 (图 7.17a), 环的无限数部分的灵活性可以以同样的方式分析, 就像一个直梁。在图的左侧 7.17b, 曲率的射线 Ca 是 R 和厚度 Aa 是 c. 右侧, 戒指显示在扭曲的配置。单元的评论 ab 以弓长度 ds, 被选为符合其未经形式的对手。新的曲率射线 ac 是 r, 以及导致的纤维长度增加 AB, 由于应变的轴性, 由 Euler, 1862 PDF:

$$d\tau = E\varepsilon = \frac{R-r}{Rr}\, c\, ds = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) c\, ds \tag{7.11}$$

这个表达式是指单位区域的 轴力 $E\varepsilon$ 以 曲率 的差异为基础, 形成了 Euler 在弹性戒指中的粘度处理的基础。

在 图 7.17cc,Euler 将戒指的物质描述为由弹性线组成的。合并的粒子 $AaeE$ 和 $BbeE$ 它们被认为是弹性胶片, 所以它们越伸长, 它们的力量就越大。角度 $Ee\varepsilon$ 以此为主, 以此為主; 以此之为主。Ee 和 εe 一起。根据 Euler 的说法, 戒指材料的一致性取决于这些内部线产生的力量。

Euler 接下来假设这种一致性是这样一个初始长度的线条集 $FG = f$ 延伸到 $FJ = g$ 可以保持总体重 P (查看 图 7.17cc). 也就是说, 比例

$$\frac{P}{fg}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

它给了一个单元区域的跨部分和一个单元延伸的力量 - 一种表达, 相当于现在所谓的杨氏模量, 并在这里首次出现。

在以前的理论中, 这被认为是随机的:

- 在加利利的作品和莱布尼兹, 瓦里尼昂的作品中, 父母, 物质常态 K 被解释为应力的破裂。这些理论认为应力但忽略了相关的应变.
- 在胡克的理论中, 如后者所精化的一样, 弹性力量被定义为在某个身体中产生一个特定的应变所需的力量 - 但再次, 没有明确的物质稳定。

这里有什么新鲜事, 就是 Euler 的 $P/(fg)$ 被引入为物质弹性恒定, 即平均 应力 (不是力量) 生成特定的弹性应变 (不要打破). 雖然雅各布 • 伯諾利 (Jacob Bernoulli) 的早期作品清楚地表明了這樣一個持續的存在, 但他並沒有明確引入它。其在 Euler 的治疗中显而易见的出现是因为这是第一个需要这样的模块正确解决的问题。

为了量化这些力量的分配, 欧勒继续 (再看图 7.17cc) 答: 让 $eM = x$, 和 $Mm = dx$ 其次, 小区 $MmnN$ 用长度的胶片填满。$\frac{x}{c}d\tau$. 力量的 F_x 拖动 Mn 向前 Nn is:

$$F_x = \frac{P}{fg} \cdot dx \cdot \frac{x}{c} d\tau \tag{7.12}$$

因此, 重量 F 它必须适用于 E 和 ε 相同的时刻, 就点 e 如 F_x 远程行动 x is:

$$F = \frac{x}{c} F_x = \frac{P}{fgc^2} x^2 dx\, d\tau \tag{7.13}$$

集成从 $x = 0$ 到 $x = c$ 给全力 (或“重”) 應用於 E:

$$\text{weight} = \frac{Pc}{3fg} d\tau = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pc^2}{fg} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) ds \tag{7.14}$$

我们现在认识到这一点是经典的时刻　曲率关系:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \qquad \mathfrak{B} = EI \tag{7.15}$$

这里, E 是 杨氏模量 和 I 是 截面二次矩。对于一个直角交叉部分, 并假设中性轴位于孔边, $I = \frac{1}{3}AD^2$, 匹配 Euler 的 表述 在 图 7.17cC。这代表了我们现在所谓的瞬间曲率关系的第一个严格衍生, 即结构力学的基本方程式。

因此,Euler 的介绍 **扩展模块** 具有弹性材料而不是特定样本的特点, 如今被称为青年。(Truesdell, 1968).

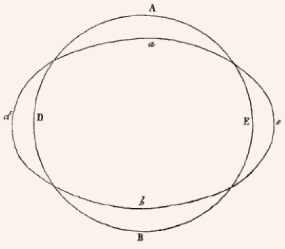
在随后的文件中 Euler, 1760 和 Euler, 1780 尤勒将这些想法呈现得更紧凑, 并更好地解释。特别是, 他明确地定义了扩展的模块, 该模块在他以前的工作中只使用过渡笔记。

尤勒的成就是令人惊叹的: 他从数学原则和胡克的法则中纯粹工作, 在实验传统到达类似结论之前几十年的梁的基本方程式。然而, 这个解析突破仍然大大与实际的结构分析分开, 直到两种传统在十一世纪中期最终相结合。

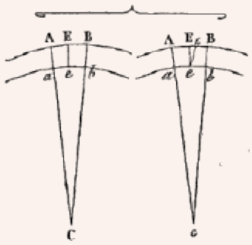
7.4 总结

灵活理论的历史发展揭示了科学理解所产生的复杂而非线性的道路。三个不同的线条 - 莱昂纳多的实验观察, 法国实践实验的传统和瑞士 - 德国数学方法 - 每一个有助于基本的洞察力, 最终将合成现代梁理论。

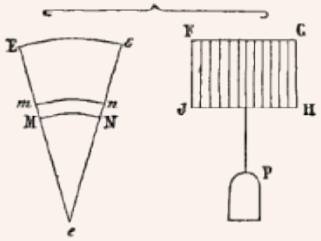
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 奥塞拉指环被 Euler 调查



(b) 图表为 Euler 的第一个衍生伯诺利法从胡克法 (1727)



(c) Euler 的第一定义 扩展模块 ("杨氏模量")(1727)

图 7.17: Euler、Bernoulli 和 Hooke 相聚 (Euler, 1862)

也许最令人震惊的是, 尽管解析和实验传统一直分开了多久, 但解决了相同的基本问题。尤勒的严格数学衍生于 1727 年的时刻与曲率关系, 几十年来预期了许多实际传统所努力实现的结果。然而, 这些实验调查人员 (加利利奥、马里奥特、库伦布和圣文南) 提出了实践工程师实际上需要的问题, 他们回答: 什么时候会打破火箭? 荷载 可以携带多少? 最大的压力在哪里?

在圣文南特的作品中, 这些方法的最终相匹配表明科学进步往往需要数学严格和实践洞察力。现代结构分析从这个合成中受益: 我们使用 Euler 的数学衍生时刻与曲率关系, 在圣文南的应力分销框架内解决了 Galileo 首先提出的实际问题。

桌子 7.1 总结了中性轴概念的主要发展。

表 7.1: 强度和内部应力分布的主要发展

年度	图片 / 事件	工作 / 标题	总结
c. 1490	莱昂纳多 • 达芬奇	挂篮球实验	延迟的篮子的加重负载, 直到电线断裂; 早期实验性探测轴强度, 尽管 (错误的) 预期的长度依赖。
1630	伊莎克 • 贝克曼	關於 string extension (Drake, 1970)	观察到更长的线条在荷载下延伸更多 - 早期间接识别 **应变**.
1638	加利利奥 Galilei	**关于两个新科学的演讲和数学示威** (Galilei, 1638)	Cantilever 通过 lever 类似性; 引入能力需求思维和原体自由理智; 缺乏现代 应力 概念。
c. 1500	莱昂纳多 • 达芬奇	**马德里** *Codex* 福尔。9V (Da Vinci, 1490; Zammattio, 1980)	Sketch 研究提出关于 梁 强度 vs. 长度、部分、支持和负载的问题; 没有方程式的问题框架。
c. 1500	莱昂纳多 • 达芬奇	**马德里** *Codex* 福尔。20V (Zammattio, 1980)	预测线性应变分布和中性轴在伯诺利前几个世纪的旋转。
1644	雷内 • 德卡特	**哲学原则**信给梅森 (Descartes, 1897b)	從“空氣”/空氣轉向機械的連續解釋; 概念橋向应力/应变思考。
1686	马里奥特	打破和打破实验 (Heyman, 1998b; Timoshenko, 1953)	采用线性弹性, 三角压力想法, 但在极端纤维中放置 NA; 衍生物 $L = Sh/(3I)$ 即将错过正确的时刻结果。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

年度	图片 / 事件	工作 / 标题	总结
1687	雅各布 • 伯诺利	关于弹性行为的文章 (Bernoulli, Jakob, 1855; Alassi, 2020)	引入力量延长关系作为物质属性; 种子应力 - 应变思考从艺术家信息的问题。
1691	格特弗里德 W 莱布尼兹	*Acta Eruditorum* 编辑 警告 (Leibniz, 1691e; McDonough, 2016)	加利利奥的不可扩展的梁; 概念纤维/春季分解作为数学模型。
1713	安东尼父母	中性轴 和 平衡 (Parent, 1713)	强制完整 平衡 (力量与时刻) 承认紧张/压缩结果必须平衡, 并注意到紧张 (谢尔) 行动。
1739	饰 Van Musschenbroek	物理元素 (Musschenbroek, 1739)	系统紧张 (和 Bing) 测试; 比较强度; 早期测试方法和数据表。
1773	C、A。科隆	灵活的记忆 (Coulomb, 1773b; Timoshenko, 1953)	适用于所有三个静态方程式; 三角 应力 区块; 最终 荷载 $\phi = Sh/(6l)$ 灵活的案例; 清晰的内部力量概念。
1784	C、A。科隆	扭转 記憶體 (扭转 平衡)	设立 $T = \frac{GJ}{L}\phi$ 行为; 独立于宽度的期限 (小角落) 相似之处, 以便清理。
1807	汤姆青年	关于自然哲学的讲座 (Young, 1807)	定义 (口头) 弹性模量; 讨论 Shear (“破坏”) 中三条规则与荷载的异端轴。
1855	圣文特酒吧	记忆的混乱 (Saint-Venant, 1855c)	第一种严格的弹性衍生物:NA 通过中心; $\sigma = My/I$ 从变形协调 + Hooke 的法则, 而不仅仅是平衡。
1862	阿尔弗雷德 • 克莱布什	灵活性理论 (Clebsch, 1862b)	系统化弹性与更高的分析; 巩固曲线与中性表面作为零长度应变的位置。
1866	圣文 (安东尼。)	法国版 Clebsch (Clebsch, 1866)	澄清飞机部分的结果从弹性; 压力均匀不同在滑板上; 紧密地与应力之间的联系。
1727	莱昂哈德 • 尤勒	弹性戒指 / Beam 曲线 (Euler, 1862)	衍生时刻 - 曲率 $M = EI\kappa$ • 引入明确的模块作为旋转理论中的物质恒定。
1760; 1780	莱昂哈德 • 尤勒	关于弹性运动/公式的跟踪 (Euler, 1760; Euler, 1780)	精致模块化概念和弹性格式; 缩小以前的衍生品, 并将应用一般化。

7.5 过渡

本章所涵盖的调查确定了结构成员强度和压力在荷载下内部分布的基本原则。从莱昂纳多的实验观察到圣文南特的严格弹性理论, 我们已经跟踪了工程师和数学家如何发展我们的理解为什么闪电失败, 以及最大的压力发生在哪里。

然而, 这些基于力量的分析共享了一种共同的限制: 它们专注于成员能够抵抗内部势力而不解决同样重要的问题, 这些成员如何在荷载下变形。知道一个梁可以携带一定的时刻告诉我们没有什么关于它的脱落形状 - 而这种形状控制一切, 从结构稳定到可用性。

从强度分析到变形分析的过渡需要数学革命。以前的研究人员可以依靠静态平衡和物质特性, 分裂形状的

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

研究需要精致的地质概念, 这些概念在 17 世纪才开始出现。挂链和弹性绳索 - 我们将在第 9 章中审查的“大挑战”- 无法解决, 没有深度了解曲线、相关术语子、奥斯卡圆圈以及曲线与其进化之间的数学关系。

下一章 8 将跟踪这个地质革命, 从尼古尔 • 奥雷斯梅关于曲率的定性洞察到纽顿、伯诺利斯和尤勒建立的严格数学框架。这些发展不仅仅是数学抽象, 它们提供了能够解决几个世纪以来自然哲学家所挑战的基本结构问题的重要工具。

了解这个地质基础对欣赏由催眠和弹性解决方案所代表的智力成就至关重要。当雅各布 • 伯诺利在 1691 年提出他的弹性挑战时, 或者当数学社区与挂链的形状作斗争时, 他们不只是解决有趣的谜团。他们正在建立一个理论框架, 这将支持结构力学的所有后续发展 - 从 Euler 的屈曲公式到现代大挠度分析。

这个地质革命　它创造的数学工具和它所实现的概念突破　现在我们就变成了章节。8. 这些发展将为章节设定阶段 9 地质学和机械学在优雅的解决方案中相结合, 以解决结构工程历史上最美丽、最实用的问题。



卡拉瓦乔, 大卫与高利亚的头 *(1609-1610)*

sl 的物理学, 大卫投下的瞬间手臂, 以及超越物质界限的后果　征服质量的强度。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

8 曲线的差异地质

摘要

本章节从其最早的概念根源到其成熟的十八世纪文法中追踪了曲率的地质基础。这里提交的材料是下一章的重要准备。*(§9.3)* 在那里, 弹性问题将详细处理 - 没有了解这里开发的曲率 , 弹性曲线的机械表述不能正确地粘贴。

在差异计算的出现之前, 曲线是通过有意义的地质结构 - 坦根, 正常, 奥斯卡圆圈和进化 - 应用于物理曲线, 如循环, 凯特纳里和相关术语轮。

从尼古拉 · 奥雷斯梅在十四世纪的定性观念开始, 讲故事跟随 *Huygens*、*Newton*、*Leibniz* 和 *Bernoullis* 的逐步改进, 突出于 *Euler* 的变量格式和 *Euler-Bernoulli* 小型接近。*Kästner* 的系统化 曲率 作为对弓长度的限制角度变化的速度, 标志着现代定义的巩固。

该章节还审查了进化者的相互发展, 并涉及, 无论是地质结构还是实用工具, 尤其是 *Huygens* 的循环行程。通过将这些进展置于机械和数学背景下, 讨论强调了曲率的地质传统如何为后来的解析、结构和物理理论提供基本基础 - 特别是雅各布 · 伯诺利 *(Jacob Bernoulli)* 的表述的弹性。这基本上取决于这里建立的地质概念。

8.1 介绍: 曲率和 Elastica 的地质起源 . . 195
8.2 曲率 196
8.2.1 奥斯卡 (1351) 196
8.2.2 纽顿 (1671) 197
8.2.3 莱布尼兹 (1686) 199
8.2.4 约翰 • 伯诺利 (1691) 199
8.2.5 雅各布 • 伯诺利《黄金理论》(1694) 201
8.2.6 凯斯特 (1758) 205
8.2.7 总结 205
8.3 进化 / Involute 206
8.3.1 胡格斯 (1658-1673) 207
8.3.2 实用限制与遗产 208
8.3.3 结论注意事项 208
8.4 从地质曲线到结构力学 209
8.5 等待: 210

8.1 介绍: 曲率和 Elastica 的地质起源

在差异计算之前, 为曲率提供了一种通用语言, 地质结构提供了唯一可行的方式来表达曲线如何弯曲。曲率的理论不是从抽象中产生的, 而是来自自然界遇到的曲线的物理和机械现实: 投向物体的路径、旋转轮子的绳子、挂链的形状。或以灵活的绳子追踪的弓。

早期思想家, 特别是尼科尔 • 奥雷斯姆 (Nicole Oresme) 探讨了图像的曲率作为空间形状很久以前, 卡特西亚框架将正式化这些表现。在十七世纪, 地质工具如坦根、正常、奥斯卡圆圈和曲率的中心是由 Huygens、Newton 和 Bernoullis 严格开发的, 而不是作为抽象实体而是在物理曲线行为中根植的结构。Huygens 特别是, 将 曲率 与动态联系起来, 通过显示一个循环的形状如何控制和进化。纽顿接近曲率作为动作的第二命令效果。雅各布 • 伯诺利介绍了这个词 **弹性** 用地质逻辑来描述它的统治方程式。

虽然后来的发展将把这些想法在分析语言中重新定位, 但本章重点是形成阶段, 当时曲率和弹性仍然主要理解于地质术语。它探讨了这些思想的进化, 从奥雷斯的地质想象力开始, 并在十七世纪末和十八世纪初的精确结构中突出。在路上, 它突出了关键数字 - 休根斯, 纽顿, 莱布尼兹和伯诺利斯 - 谁通过工具, 如进化, 奥斯卡圆圈, 以及无限模的地质计算推进了解曲率。

灵活的 (§9) 特别是, 它出现为地质和机械相遇的量子问题。它的解决方案最终需要变量计算, 但它的表述和早期处理是四分之一的地质传统。理解这个线条是必不可少的, 以了解现代弹性力学和结构形状如何形成。

在这个时期开发的曲率的地质理解后来证明是十一世纪进步的基础, 包括加斯对表面内部的曲率, 里曼尼亚地质学的可能表述的发展。从计算机图形和 CAD 系统到基于爱因斯坦的一般相对性地质框架的现代应用。

审阅稿

8.2 曲率

在我们谈论进化之前, **精力**, (§9.3) 需要引入曲率的概念 - 一个曲线如何弯曲的基本地质量。曲率 描述了曲线偏离是直的程度, 并且在一个 **地方** 感: 它测量在一个特定的点上弯曲, 而不是整个形状。

对于一个循环, 曲率是恒定的, 只是相反的射线: 较小的圆圈更紧密地弯曲, 因此具有更高的曲率. 这个熟悉的案例为定义曲率的一般提供了一个自然基础。现代解决一个可以弹性问题 - 也就是说, 大分裂的阴道化泡沫 - 后来在 §29.2.3, 它是如何理解曲率在梁的长度上有所不同。

早在古代, 尤克利德将坦根定义为触摸一个循环的线条, 而没有穿过它, 但更普遍的曲率概念尚未发展。同样, 经典的四角形问题 - 确定由曲线限制的区域 - 等待计算工具在几个世纪后正式化。

现代曲率, 相反, 被定义为对弓长度的倾斜线的角度变化的速度。在描述的意义上, 它测量曲线旋转的速度。如果曲线是圆圈, 则这种旋转率是稳定的。对于任意曲线, 接受的方法是通过一个圆圈来将曲线定位地接近, 它在某个点上相匹配于它的坦根和曲率。这个最合适的圈子被称为, 根据 Leibniz, **奥斯卡循环** [1] (图 8.1) (Brackenridge, 1992). 它具有与接触点曲线相同的第一和第二衍生品。

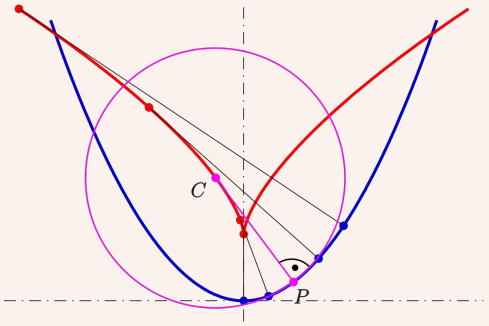


图 8.1: 奥斯卡圆圈 (紫色) 一个平凡的 (蓝色) 目前的位置显示循环集中在 C 和 Tangent 在 P. 红色中显示的中心。

雖然曲率在十七世紀末才被嚴格定義, 但早期對旋轉的洞察力顯然是直到十四世紀。除了尼古拉 • 奧雷斯姆的先驱作品之外 (下一篇 讨论), 精确的数学处理曲率产生独立于牛顿和莱布尼兹的工作。然而, 传统上将曲率的历史发展与进化和涉及的历史关系相结合, 特别是当机械描述从曲线中切断一条线时。(进化者) 发出第二个曲线 (所涉及的) 正如我们讨论的 §8.3.

8.2.1 奥斯卡 (1351)

曲率的概念从埃克利德地质中缺乏, 在那里点、线条和圆圈占据了主导地位, 并且没有关于如何形成曲线曲线的一般观念。直到十四世纪, 曲率的想法作为一个可测量偏离直观性, 首先是由尼古拉 • 奥雷斯姆 (Nicole Oresme) 发出。

在他的 **定位和摩托车的配置** (Oresme, 1351),Oresme 引入了一个定性概念曲率, 将其视为不断变化的尺寸。对于圆圈, 他认识到曲率是逆比例的射线, 并试图将这个想法扩展到更普遍的曲线。虽然他仍然是投机和缺乏形式主义, 但他的观点代表了一个概念突破。他写道:

[1] An **奥斯卡循环** (从拉丁语 **奥斯卡**, “亲吻”) 它是最接近一个曲线的圆圈。它具有相同的坦根和曲率与曲线在那个点, 使其独特的圆圈 “亲吻” 最密切的曲线。这个循环的射线相当于曲率的射程, 其中心位于接触点的正常曲线上。在伯诺利时代, 这个概念提供了测量曲率的主要地质方法, 在解析定义之前开发。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 我们不知道什么, 或关于什么, 曲率的强度是测量。现在我觉得只有两个 [可能的] 途径 [说到 曲率 的尺寸]. 首先, 曲率的增加是其从直度出发的功能, 即距离直度。這是 [要被测量] 根据由直线和曲线组成的角度的数量, 例如, 从直线或曲线构建的一个曲线或可能另一个曲线。
>
> Serrano and Suceavă, 2017 *"A Medieval Mystery: Nicole Oresme' s Concept of Curvitas"*

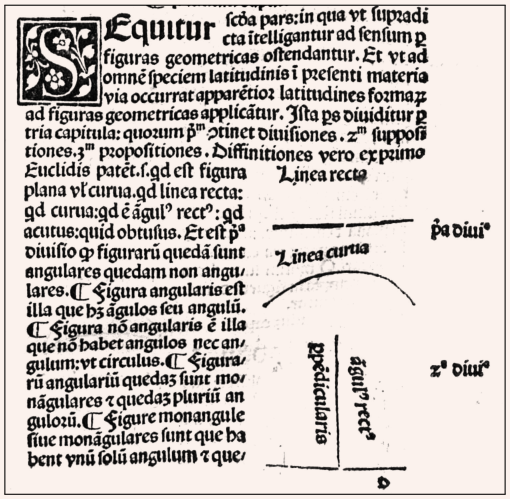


图 8.2: 奥雷斯的曲率

奥雷斯姆不是一个普通的早期学者。他被重新认可, 提出类似于格雷沙姆的法则、分析地质学、自由落下的法则, 物质的结构理论甚至是地球的转角的想法。虽然这些声明中没有一个严格遵守现代审查, 但每一个都反映了他的思维的广度和原始性。(Clagett, 1964).

有趣的侧面注意事项: 奥雷斯梅被认为引入了数学 + 添加的象征。[2]

在许多方面, 奥雷斯梅可以被视为科学革命的先驱。(看见 §5.3). 令人惊讶的是, 在三个世纪之后, 奥雷斯梅的先驱概念化将会过去。(1351) 纽顿的分析论文 (1671) 奥雷斯梅的思想是多么革命性的, 以及它花了多少时间来正式化数学工具。

8.2.2 纽顿 (1671)

牛顿早期关于曲率的作品出现在 1671 年, 在他的种子治疗中 **原名**:*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736), 在那里他解决了正常, 坦根和曲率的问题。至 1665 年 5 月, 牛顿已经开发了曲率的通用公式。$y = f(x)$ 到了 1670 年至 71 年的冬天, 他开始编写所谓的《古兰经》。**系列和流动的方法**.

在这份工作中, 他提出了以下内容:

- 问题 5: "定义曲线的曲率在任何点".
- 问题 6: "曲率的质量在一个点上".

他在卡特西亚坐标中提取了曲率的通用公式, 并以极形形式表达了它。在问题 5 中, 纽顿列出了五个定义条件, 用于确定曲率的射线或中心。(Bardini and Gianella, 2014):

[2] 多元化符号 "x" 由威廉 • 奥格特 (William Oughtred) 于 1618 年引入, 分裂标志 div 1659 年, 约翰 • 拉恩 (Johann Rahn) 和无限的象征 ∞ 约翰 • 瓦利斯在 1655 年。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 一条直线没有曲率。
- 一个循环的曲率是稳定的, 反向比例于其直径。($k = 1/R$).
- 如果一个圆圈在其曲线侧的曲线, 并且没有其他圆圈可以在接触角内登记, 它与此时曲线相同的曲率。
- 曲线的中心是圆圈在一个点上向曲线倾斜的中心, 躺在阴道侧面, 具有相同曲线。要找到它, 必须在两个无限密切的点上跨越正常。

纽顿用地质配置描述了这个结构, 其中正常的 DH 和 dh 交往在一个点 d, 和如 D 方法 P, 限制点成为曲率的中心 C (图 8.3).

> 相同的圆圈到处都有相同 曲率, 在不同的圆圈中, 它是相互比例的直径。
>
> 如果一个圆圈触摸到其角侧的任何曲线, 在某个特定点上, 如果它是如此大的, 以至于没有其他 tang 圆被列入该点的接触角度, 这个圆圈将是相同的 曲率 作为曲线, 在接触点。
>
> 因此, 曲率的中心到曲线的任何点是圆圈的中心平等弯曲, 因此,Radio 或半直径的曲率是部分的旋转到曲線, 在中间结束。
>
> 不同点的 曲率 的比例将从 aequi-curve Circles 的 曲率 的比例, 或从 曲率. 的 Radii 的相互比例中获取。
>
> 目前还有一点解释:
>
> 但有几个症状或特征这个点 C 可以用在其定义中。
>
> Coolidge, 1952 *"The unsatisfactory story of curvature"*
>
> 1. 它是交叉点到弓的交叉, 在点的两侧, 以无限小间隔采取。
> 2. If DC 被想象移动, 同时保持曲线的偏向, 然后 C 會體驗最少的動作, 並作為其中心的转角.
> 3. 如果一个圈子被中心拉动 C 放射 DC, 没有其他圈子可以躺在这个和曲线之间。
> 4. 如果另一个中心 H 一个坦根循环逐渐接近 C 最终, 接触点将相匹配。
> 5. 每一个特性都提供解决问题的方法, 但第一种是最简单的, 并选择。

正如 Huygens 一样, 纽顿认为, 如果一个 (不是通胀) 固定在曲线上, 另一个接近点从两侧接近它, 正常的交叉转向一个精确定义的曲率中心。这是一个圆圈的中心, 与曲线相匹配的曲率 - 没有其他这样的圆可以躺在它和曲线之间。

他拿走了 x 作为独立变量, 与 $\dot{x} = l$ 和 $z = dy/dx$, 结果是卡特西亚坐标中的曲率射线的已知公式:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \tag{8.1}$$

纽顿提供了许多例子, 将这种公式应用到各种曲线。他以下列声明结束了部分:

> 因为所有的地质曲线..... 可以提到右角的定位, 我认为我已经做了足够。任何想要更多的人都会通过自己的努力, 特别是如果作为奖金, 在点的描述中, 我添加一种方法的螺旋。
>
> Newton, 1736 Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam

尽管在曲率理论中取得了这些基本进展, 但纽顿对数学发现的态度与大陆出现的公共挑战传统显著不同。他的系统性曲线分类工作, 包括在 1660 年代和 1670 年代识别 72 种 78 种圆形曲线, 在他一生中大部分未公

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

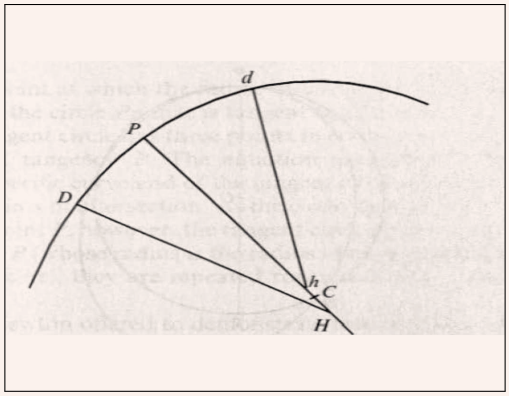


图 8.3: 牛顿的曲率衍生

布。(Whiteside, 1969). 虽然牛顿拥有分析复杂曲形形式所需的数学工具, 包括后来将以弹性理论为中心的模型, 但他从未提出过雅各布 • 伯诺利 (Jacob Bernoulli) 两十年后作为公众挑战的弹性曲线的具体物理问题。(§9.3). 纽顿的私人数学研究和伯诺利兄弟开放数学竞赛之间的这种对比反映了大陆与英语对数学科学研究和传播方法的更广泛差异。

8.2.3 莱布尼兹 (1686)

对于 *Leibniz* 的生物绘图, 请参见部分 *6.6.8*.

虽然牛顿为曲率的分析表达形式化, 但 Gottfried Wilhelm Leibniz 有助于重要地质洞察力。在他发表于该刊的 1686 年论文《De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum》中 *Acta Eruditorum* **编辑** (Leibniz, 1686b), 图 8.4[3] 莱布尼兹讨论了奥斯卡的概念, 并指出, 在垂直上, 当考虑到一个足够小的弓时, 一个奥斯加的孔子并不与曲线本身有意义地不同。

更重要的是, 这篇论文介绍了莱布尼兹的差异计算评级。(使用 dx 和 dy) 并证明其应用于地质问题, 包括涉及过渡曲线的问题。Leibniz 展示了他的 infinitesimals 方法如何在统一的框架中处理坦根问题和四角形, 写出等式。$pdy = xdx$ 引入完整的标志 $\int$ (写作如 f 在原创中).

虽然这篇专门的论文更专注于解析机器, 而不是对曲率的地质定义, 但 Leibniz 的方法强调, 通过无限分析可以理解地质特性。他的评论 - 特别是 d/dx 形状 - 将证明特别多样性表达曲率关系, 最终成为差异数学的标准。

纽顿和莱布尼兹对计算和地质问题的不同方法将引发他们著名的优先争议。虽然牛顿的流动评级对动态非常优雅, 但莱布尼兹的差异评级更适合曲率公式和地质分析中的复杂表达。这种方法学差异将影响数学发展几代, 莱布尼兹的评级最终在欧洲大陆占主导地位, 成为现代标准。

莱布尼兹在这篇论文中的作品, 特别是他对过渡曲线的处理和他的说法, 地质学不应该排除只有通过限制过程才能构建的曲线, 为伯诺利斯、尤勒等后来的差异地质发展奠定了基础。

8.2.4 约翰 • 伯诺利 (1691)

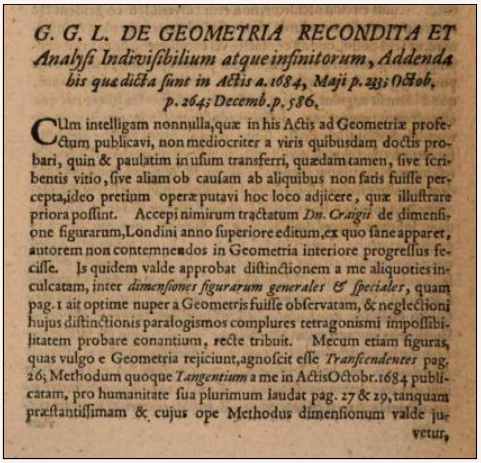
约翰 • 伯诺利 (Johann Bernoulli) 首先在 1691 年手稿中为曲率射线提供了一种通用公式。(Bernoulli, Johann, 1691a). 衍生品是由 Bos, 1974, pp. 36–37 以 图 描述 8.5.

目标是计算曲率的射线。r 在点 B, 表达为:

$$r = BH + HD \tag{8.2}$$

[3]请注意,Libniz 简单地表示 G. G. L. (拉丁文: **吉利尔姆 · 莱布尼蒂斯** *(Gottfridus Guilielmus Leibnitius)*).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, Addenda his quæ dicta ſunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob. p. 264; Decemb. p. 586.

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum *Dn. Craigii* de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimenſiones figurarum generales & ſpeciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogismos complures tetragonismi impoſſibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe *Tranſcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præſtantiſſimam & cujus ope Methodus dimenſionum valde juvetur,

G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET Analysi Indivisibilium atque infinitorum, Addenda to what was said in the Acts of 1684, May p. 233; October p. 264; December p. 586.

Since I understand that several things which I published in these Acts for the advancement of Geometry have been considerably approved by certain learned men, and are even gradually being put into use, but that some things, whether through the fault of the writer or for another reason, have not been sufficiently perceived by some, I therefore thought it worthwhile to add here in this place things that might illuminate the previous ones.

I have indeed received the treatise of Mr. Craig on the measurement of figures, published in London last year, from which it certainly appears that the author has made considerable progress in interior Geometry. He indeed greatly approves the distinction I have repeatedly emphasized between general and special dimensions of figures, which on page 1 he says has been excellently observed recently by Geometers, and to neglect of this distinction he correctly attributes several paralogisms of those attempting to prove the impossibility of squaring [the circle].

He also acknowledges with me that figures which are commonly rejected from Geometry are Transcendentes [transcendental], page 26; He also praises my Method of Tangents published in the Acts of October 1684 most highly for his courtesy on pages 27 & 29, as most excellent and by whose help the Method of dimensions is greatly advanced..."

图 8.4: 莱布尼兹 *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Leibniz, 1686b)

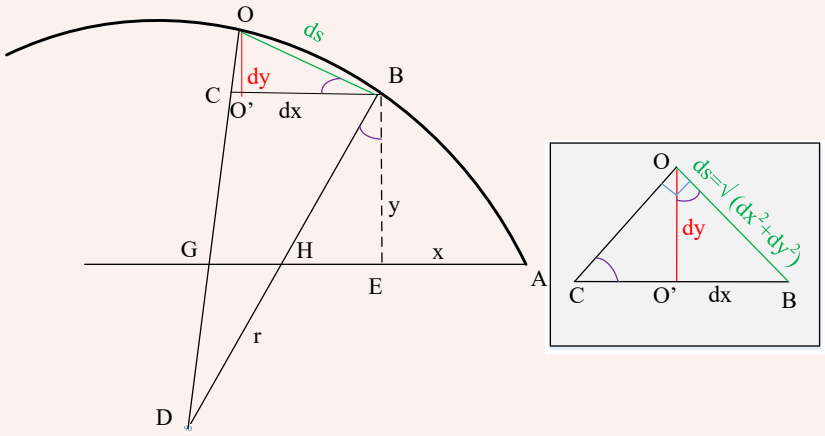


图 8.5: 约翰 • 伯诺利的曲率衍生

1. 因为 $\angle O'BD = \angle HBE$ 三角形 $O'BO$ 和 EBH 相似, 如下:

$$BH = BE \cdot \frac{BO}{BO'} = y \cdot \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \tag{8.3}$$

$$AH = AE + EH = AE + OO' \cdot \frac{EB}{O'B} = x + y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{8.4}$$

2. 接下来, 为 HD:

$$HD = r \cdot \frac{BC}{HG} \tag{8.5}$$

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

3. HG 这是区别的 AH:

$$HG = d(AH) = d\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = dx + dy \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{ddy}{dx} = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx} \tag{8.6}$$

4. 相似的三角形 ($\angle BCO = \angle BOO'$) 我们有:

$$BC = \frac{BO^2}{BO'} = \frac{dx^2 + dy^2}{dx} \tag{8.7}$$

5. 取代 EQ。(8.3), (8.5), (8.6), 和 (8.7) 到 eq。(8.2) 我们得到了:

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \cdot ddy} \tag{8.8}$$

简化使用 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$:

$$r = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy} \tag{8.9}$$

相应的:

$$r = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{8.10}$$

8.2.5 雅各布・伯诺利《黄金理论》(1694)

背景 1694 年, 他 *Acta Eruditorum* **编辑** 记忆, (Bernoulli, Jakob, 1694) 雅各布・伯诺利 (Jakob Bernoulli) 做出了两项不同的, 但相互关联的贡献。

- 首先, 在他所称之为 **天文学** *Aureum* ("radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti") 他以最简单的术语, 例如, 提出了奥斯卡循环的广度的一般分析表达 - 因此是曲率。$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$ 因此, 这 $\kappa = 1/R$. 这是在这里讨论的。
- 其次, 他使用了这个曲率不变的解决方案。**弹性**: 模型一个薄, 不可扩展的条纹在静态平衡, 他结合了一个时刻-曲率法则 (在现代形式 $M \propto \kappa$) 与电影关系 $dx/ds = \cos\theta$, $dy/ds = \sin\theta$, 和 $\kappa = d\theta/ds$ 因此, 将机械平衡转化为曲线的可溶性差异方程。它被覆盖在 §9.3.2.1.

值得一提的是, 这篇论文是他先前提出的挑战的解决方案。(§9.3.1), (Bernoulli, Jakob, 1690a). 因此, 他开始了这篇文章, 说:

> ...relationem fili evolventis seu radii circuli osculatoris (无量子, 实体在 A。缺点 男人。约翰。第 1691 章 第 22 章 七) 在 terminis simplicissimis & 清晰的差异化。早在我们研究悬索时，这一点便已为我们所知；此后，兄长在旅行途中将它告诉了几位学者。与此同时，这一发现对于求解帆形曲面所具有的巨大用途，& 以及眼前的弹性曲线和其他更高深问题，日益清楚地展现在我面前，终于使我不能再把这一黄金定理秘而不宣……
>
> 以最简单、纯粹的差异性形式呈现进化者的关系。(条纹) 或光循环的射线。當我正在研究大教堂時, 這已經已成為我所知道的, 而我的哥哥很快就在我們的旅程中傳達了它給一些人; 同時, 作為這個發現在

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

解决大教會中的巨大用途, 在曲率的流浪中 (弹性) 我們在這裡處理的, 並且在其他更重新審判的事情上對我每天都變得更加清晰, 最終導致了我到這一點, 我不能再向公眾否認黃金理論。

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*

黄金理论衍生

在继续论述之前，设图 I 中任意曲线的无穷小弧段为 ab、bc；密切圆半径 af、bf 分别与其垂直，并相交于渐屈线上的点 f，形成角 afb，其等于角 gbc；后者由延长弧段 ab 与另一段 bc 形成。再截取 $bh = bc$，并设 al、bn、co 以及 bl、hom、gcn 为平行线；前一组表示横坐标的微元，后一组表示纵坐标的微元（即 dx、dy、ddx 等）。我断言，

α. Quod positis 基因元素 ab, bc, hoc est, ipsis ds aequalibus, radius circuli osculatoris seu longitudo fili evolventis af 纳米特

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{item} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

名称 $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (相似之处。△ 罗姆 bmh, hoc 项目 hcb, abf) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$. 七 $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$ 四方 $ddy : ds :: dx : z$. Eodem mode 以色列 $ddx : ds :: dy : z$. Q.E.D.

科罗尔。在任意曲线中，若其各元素相等，则坐标的二阶差分与一阶差分成反比；因为…… $\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$ 埃里特 $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$ 阿德奥克 $ddx : ddy :: dy : dx$; quod ipsum quoque ex sola similitudine △ 罗姆 bmh, hoc, 李克强; UBI co 他的 ddx 阿德 oh 他的 ddy, ut hm ad bm 威尔 bl ad al 他的 dy ad dx.

β. 原名:Positite vero abscissae elementis al, bn, hoc est, ipsis dx aequalibus, erit radius osculantis circuli 直径 af 他的

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

量子 $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (相似的。△ 罗姆 bng, chgNEC 不 hcb, abf) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$ • 攻击 $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$, et $bc = ds$ 埃里特 $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$. Q.E.D. Haud absimiliter ostendetur, 定位 dy Aequalibus, 未来 $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.

His addo nova, de quibus nec Fratri adhuc constat, Theoremata...

在我走向问题之前, 让它在图 我, 某些曲线的一小部分, 无限微小的, ab, bc, 在其中, 光线的奥斯卡循环的旋转。af, bf 在进化阶段的某个时刻 f, 并创造一个角度 afb 平等的角度 gbc 其次, 延伸的部分 ab 与另一方相处 bc 然后让 $bh = bc$ 切断, 并让平行 al, bn, co, 以及 bl, hom, gcn 被理解要提取; 其中前者指示单元的抽象, 后者是常规 (即 dx, dy, ddx 等等。). 我说:

α. 當曲線 单元 ab, bc 相同的, 即当 ds 是平等的, 奥斯卡循环的射线或进化线的长度 af 即

$$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}, \quad \text{also} \quad z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$$

為 $ho : bc :: ho : hc :: hc : bc ::$ (三角形的相似之处 bmh, hoc, 也 hcb, abf) $bm : bh :: ab : bf :: al : ab :: ab : bf :: al : bf :: dx : z$. 但 $ho = hm = nc = bl = nc = ddy$, 和 $bc = ds$ 因此, $ddy : ds :: dx : z$. 同样, 它将被证明 $ddx : ds :: dy : z$. Q.E.D.

可口可乐 在每个曲线中, 当其单元采取相同时, 坐标的第二个差异是相互比例的第一: 因为从那以后

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

$\frac{dx \cdot ds}{ddy} = z = \frac{dy \cdot ds}{ddx}$ 将有 $dx \cdot ddx = dy \cdot ddy$, 因此 $ddx : ddy :: dy : dx$ 它也源于三角形的相似之处。bmh, hoc; 在哪里 co 或 ddx 是为了 oh 或 ddy，相当于 hm 到 bm，或 bl 到 al，或 dy 到 dx.
β. 當单元的 abscissa al, bn 相同的, 即当 dx 是平等的, 奥斯卡循环的射线 af 将是

$$z = \frac{ds^3}{dx \cdot ddy}$$

因为 $gc : bc :: gc : hc :: hc : bc ::$ (三角形的相似之处 bng, chg, 而且 hcb, abf) $bg : bn :: ab : bf :: ab : al :: ab : bf :: ds : dx :: ds : z :: ds^2 : z \cdot dx$; 和 $gc = gn = nc = bl = nc = ddy$, 和 $bc = ds$ 因此, $ddy : ds :: ds^2 : z \cdot dx$. Q.E.D. 同样, 它将被证明是当 dy 我们是平等的, 我们有 $z = \frac{ds^3}{dy \cdot ddx}$.
我把新的理论添加到这些, 即使我的兄弟还不知道。

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"* pg. 264

解决方案的衍生性是由于缺乏微小的假设而简化。然而, 对于弹性曲线的结果差异方程并不在基本功能方面可溶。后来, 丹尼尔 • 伯诺利提出了这个假设, 并能够分析简化方程式。(看见 §9.4.1.3).

与图的参考 8.6, 伯诺利设置:

$$ab = bc; \qquad af \perp ab; \qquad bf \perp bc; \qquad bh = bc; \qquad \Rightarrow al = bm \tag{8.11}$$

下列三角形是 (几乎) 相似之处:

$$\triangle bmh \sim \triangle hoc \quad \text{and} \quad \triangle hcb \sim \triangle abf \tag{8.12}$$

因此, 我们可以写:

$$\frac{ho}{bc} = \frac{ho}{hc} \cdot \frac{hc}{bc} = \frac{bm}{bh} \cdot \frac{ab}{bf} = \frac{al}{ab} \cdot \frac{ab}{bf} \tag{8.13}$$

永恒的 ds 这使得它变得更简单 $\frac{ho}{bc} = \frac{al}{bf}$. 现在:

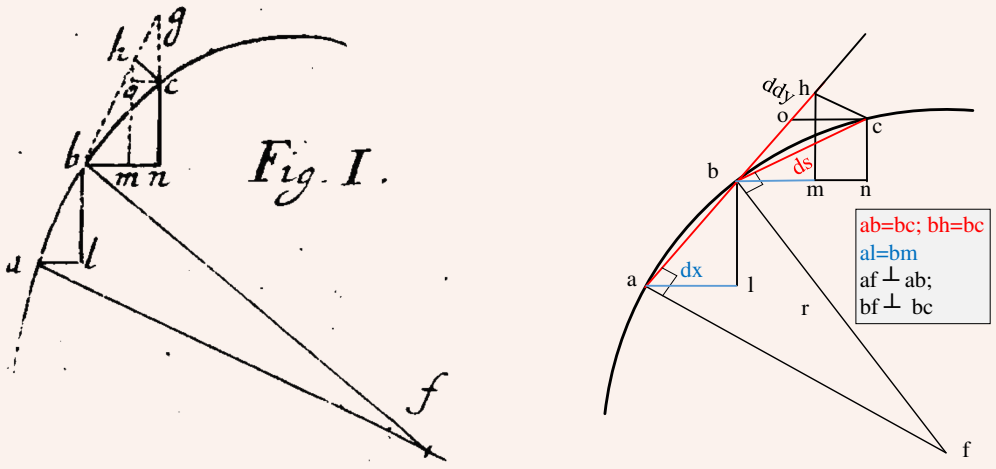


图 8.6: 雅各布 • 伯诺利的曲率衍生

$$bf = r; \qquad al = dx; \qquad bc = ds; \qquad ho = hm - nc = bl - nc = ddy \tag{8.14}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

(忽略签名公约). 因此:

$$\frac{dx}{r} = \frac{ddy}{ds} \tag{8.15}$$

最后:

$$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy} \tag{8.16}$$

永恒的 ds.

假设一个恒定的 ds 相应的接收 s 作为独立变量。

從 图 8.6, *AED* 它是灵活的, 而且 *GLM* 是它的进化。因此, 这个句子 **进化描述** 看上去, 他想把 **涉及** 关于曲线 *GLM* 建造弹性 *AED*. 点 L 在进化中, 相应的点 E 以色列的弹性。L 卡特西亚协调 (p, z); E 有协调 (x, y). 伯诺利清楚地使用进化作为一个地质工具来定义曲率 - 中央的弹性理论。根据定义, 部分 EL 是 曲率 的射线在点 E on *AED*.

虽然雅各布 • 伯诺利的表述是深度地质和非线性, 但它为他的孙子丹尼尔设定了舞台。(§9.3.2.1.2.4) 和 Euler (§9.4.1.2) 从更大的解析视角接近弹性, 导致一个关键的简化。

表 8.1: 比较伯诺利的原始和现代曲率公式

伯诺利的表述 (1694)	**现代 表述**
假设相同的弓 单元 (ds 永久性)	承认功能 $y(x)$ 与 x 作为参数
$z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$	$R = \frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$
使用结束 (无限的) 差异	使用基于限制的衍生品
地质结构与进化	解析 区别
与任何参数化工作	通常是明确的 $y(x)$
基于类似的三角形	基于坦根角度的变化率

标签: Bernoulli (1694) vs. 现代 表述 将伯诺利的公式连接到现代的一个: 从 $z = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$ 使用 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 我们可以写: $ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

因此: $R = \frac{dx \cdot ds}{d^2y} = \frac{dx^2\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y}$

分数器和名称器 dx^2: $R = \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{d^2y/dx^2}$

然而, 现代公式包含一个额外的因素。差异是因为伯诺利的 ddy (第二个区别与 ds 永久性) 微妙的不同于现代 d^2y/dx^2 (二、二是因 x). 正确考虑变量的变化和差异之间的关系时, 一个人得到了:

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \tag{8.17}$$

其余的因素 $[1 + (dy/dx)^2]$ 在编号器中, 计算事实是, 随着曲线的旋转, 投影效果必须适当嵌入。

历史影响 这个理论成为伯诺利解决弹性问题的关键工具。他把它称为他的 “黄金理论” 不是因为他发现了曲率或奥斯卡循环的概念, 而是因为它提供了实用的计算方法..... “缺失的钥匙” 最终允许数学家成功使用弹性曲线。正如他在第 263 页上所说, 以前的尝试 (包括 1 月 1691 年出版的) 处理了奥斯卡循环, 但不以适当的形式解决过渡机械问题。该方法的依赖于差异关系而不是纯地数学结构, 在数学物理学中标志着对解析方法的关键转变, 预测了变分法系统发展。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

8.2.6 凯斯特 (1758)

亚伯拉罕 • 戈特尔夫 • 库斯特纳 (1719 – 1800), 在哥丁根大学教授, 被称为数学的丰富展览者而不是原始研究人员。其多元体积文本书 **数学的起点** (“数学的基础”), (Kästner, 1786) 帮助系统化和普及许多概念在差异地质和分析。

在 1758 年体积中,Kästner 提出了基本上是现代定义的曲率, 将其描述为角度之间的限制比例。$\Delta\theta$ 兩個附近的坦根和弓長之間 Δs 他们之间:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{8.18}$$

这表达了曲率作为曲线沿着坦根的转角的速度, 这将后来在分析地质和现代差异地质中采用的定义。

Kästner 的原始表达方式如下:

> 人可以在某一点, 通过天花板的关系, 在那两种非常紧密的阴道, 在他们之间有沉默的波音, 如果这个无尽的小。
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

翻译:

> 一个线的曲率可以用两个非常接近它们之间的弓的角度形成的角的比例来测量, 因为弓变得无限小。
>
> Kästner, 1786 Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv

这个定义正式化了以前的数学家如伯诺利斯和胡格森所接近的地质, 并将其基于 18 世纪中期成熟的差异计算框架。

在现代分析地质学中, 这个想法进一步正式化。以便在一个由 $y = f(x)$, 曲率 可以写为:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$$

它将 Kästner 的地质观念与今天使用的基于计算的公式相结合。

这种现代定义的曲率将证明是十一世纪进步的基础。它使加斯发展了 **理論** *Egregium*[4] (1827), 这表明, 加西亚曲率是一个内在的表面属性。这种洞察力最终会导致里曼尼地质学的发展, 并为爱因斯坦的一般相对性提供了数学框架, 再次展示了从实际问题中产生的地质概念如何发展到深入的理论工具。

8.2.7 总结

[4](拉丁语为 “令人惊叹的理论”) 它是差异地质的一个主要结果, 这涉及到表面曲线。该理论说, 加西亚曲率可以完全通过测量角度、距离和它们在表面上的变化率来确定, 而不提到表面的具体方式融入环境的 3 维欧克利德空间。换句话说, 一个表面的加西亚曲率不会改变, 如果一个人在没有伸展它的情况下弯曲表面。因此, 加西亚曲率是表面内在的变异。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 8.2: 曲率的开发中的步骤

名称	日期	贡献	代表式	主要工作 / 来源
尼古拉·奥雷斯	1351	曲率和偏离直观之间的概念联系; 质量描述	无 (品质)	定位和摩托车的配置
伊莎克·纽顿	1671	在卡特西亚和极坐标中的曲线分析公式; 通过正常的曲线的地质中心	$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$	原名:*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*
G。W。莱布尼兹	1686	定义奥斯卡循环作为四点交叉曲线的圆圈的边界	无 (地质学)	*Acta Eruditorum* 编辑 (1686 篇文章)
约翰·伯诺利	1691	曲率 通用射线的算法衍生, 通过差异	$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$	未出版手稿 (1691)
雅各布·伯诺利	1694	地质结构通过进化/进化; 曲率中央到弹性理论	$r = \frac{dx \cdot ds}{ddy}$	拉米纳 *Elasticae*, *Acta Eruditorum* 编辑 (1694)
莱昂哈德·尤勒	1744	灵活的变量计算框架; 曲线优化 Euler-Lagrange 方程式	$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$	*Methodus Inveniendi* 线路曲线 *Maximi Minive Proprietate Gaudentes*
Euler-Bernoulli 合作	ca. 1750	小滑接近导致线性梁理论	$\kappa \approx \frac{d^2y}{dx^2}$	Euler 的变量框架 + 丹尼尔的能量原则
A。G。凯斯特	1758	现代定义 曲率 作为对弓长度的坦根角度变化率	$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$	数学的起点

8.3 进化 / Involute

首先由 Christiaan Huygens 引入的进化和参与差异地质概念对曲率, 弹性和催眠的后续覆盖至关重要。这些概念代表了地质思维的峰值, 将纯数学与实用机械结合在一起。

为了把事物放在历史和文化的角度, 在 1691 年,Huygens 表达了他的时代的精神:

> 我经常认为, 自然界常常向我们的观点展示的曲线, 她自己描述的曲線, 就是说, 所有都具有非常显而易见的特性。就像周围遇到的人一样。它是由水流所描述的。直升和超球, 由一个相关术语子的顶部的阴影穿过, 也遇到了其他地方。一个轮子周围的指甲所描述的循环。最后, 我们的教堂, 我们已经注意到了这么多世纪没有检查它。这样的曲线, 我认为值得选择它们为研究, 但不是这些。[曲线] 新建的仅用于使用地质计算。
>
> Blasjo, 2017 Transcendental curves in the Leibnizian calculus ([第 8 章])

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

在差异地质学中, 曲线的进化是其所有中心的曲率的位置。曲线所涉及的是曲线上的点的位置, 因为曲线是从曲线上无缝或围绕曲线旋转。一个参与者的进化是原始曲线。

数学上, 对于一个参数曲线 $\vec{c}(t)$ 进化是由:

$$\vec{E}(t) = \vec{c}(t) + \rho(t)\vec{n}(t) \tag{8.19}$$

哪里 $\rho(t)$ 是曲率的射线和 $\vec{n}(t)$ 是正常单位 向量。参与者可以被表达为:

$$\vec{C}_a(t) = \vec{c}(t) - \frac{\vec{c}'(t)}{|\vec{c}'(t)|}\int_a^t |\vec{c}'(w)|\,dw \tag{8.20}$$

其中整合代表了从曲线上不包围的绳子的弓长度。

一个简单的例子描述了这些概念: 循环进化是它的中心的一个单一点。(所有正常人相遇的地方), 而一个循环的参与者形成了一个螺旋曲线。雖然經常錯過一個阿基米德的螺旋, 該循環的參與實際上是一個獨特的曲線, 其自己的獨特特性 - 一種區別, 將證明至關於發展裝置牙齒設計幾個世紀後。

8.3.1 胡格斯 (1658-1673)

當阿波羅尼亞在他的書五章中討論進化時, **康尼克** (C。200 BC) 这是 Huygens 谁首先开发一个系统理论, 并应用它解决一个实用的机械问题。荷兰数学家、物理学家和天文学家 Huygens 在 1657 年发明了 pendulum 时钟, 后来发现了如何让它真正以色列。他的研究结果在他的主论文中发表 **奥斯基拉托时钟** (1673)(Huygens, 1673) 它被认为是 17 世纪机械上最重要的三项作品之一, 其余两项是加利利奥的作品。**关于两个新科学的演讲和数学示威** (1638)(Galilei, 1638) 纽顿的 **哲学** *æ Naturalis Principia* **数学** (Newton, 1687).[5]

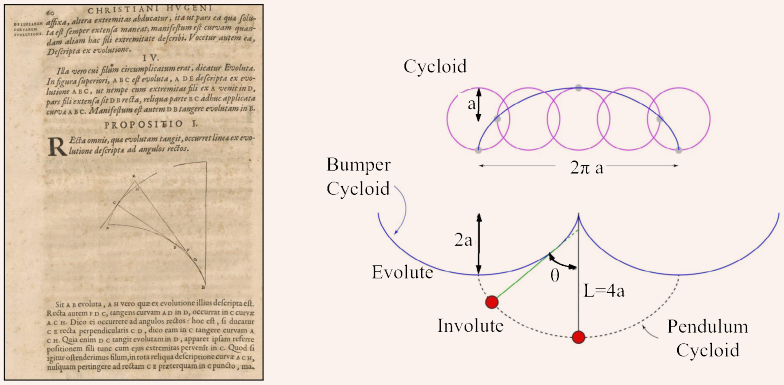


图 8.7: Huygens 的伊索克罗尼亚长度 (Huygens, 1673)

一个简单的 pendulum 的运动时间 (角度低于 5°) 大约是:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{8.21}$$

虽然对于小宽度来说是约隔离性的, 但简单的通道仍然显示随着宽度增加的时间错误。胡根斯是第一个发现这个限制并提出解决方案的。(Zixuan, Jixun, and Zhigang, 2018). 通过地质分析, 他发现, 塔图克隆曲线其中一粒子将同时降至最低点, 无论起点位置如何　是循环。[6].

[5]这三个最重要的 17 世纪机械作品的评估在科学文学史上被广泛接受。
[6]循环是一种曲线, 在一个圆圈上跟踪一个点, 因为它沿着直线旋转。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使循环变成塔图克隆曲线的关键特性是, 从任何点到底部的弓长度的方形与垂直高度差异均匀:

$$s^2 = 8ar \cdot h \tag{8.22}$$

哪里 s 是弓的长度, a 是生成循环的射线, 以及 h 是高度。这种关系与能量保存相结合, 确保降落时间独立于起点位置, 产生一个稳定的时期。

为了让 pendulum bob 跟随一个循环的路径,Huygens 引入了进化和涉及的概念。他的惊人的发现是, 一个循环的参与者是另一个循環。通过将两个交响式循环形状的支票放在 pendulum 的顶部, 该条线会部分围绕这些支票, 因为它滑动。然后, pendulum bob 将追踪一个循环路径 - 涉及的循环检查 - 从而实现严格的伊索克里尼主义。

Huygens 的循环期是:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \tag{8.23}$$

哪里 a 是循环生成圈的射线。(注意到, 一个完整的循环的弓长度是 $8a$ 长度等于长度。$4a$).

胡格斯的衍生是纯粹的地质, 基于比例和 reductio ad absurdum 在亚基米德的方式, 预测技术将后来通过计算正式化。他的进化理论, 开发来解决这个实用的时间保存问题, 成为对差异地质学的研究基本。

8.3.2 实用限制与遗产

尽管它的理论优雅,Huygens 的循环旋转面临着实际挑战: 从绳子围绕切割曲线的振动, 在接触点上穿戴, 以及对循环形状所需的精确制造。这些问题后来被安克尔逃避的发明包围。(1670 年左右) 它允许 pendulums 通过较小的弓, 在那里圆形错误变得不可忽视, 使复杂的循环机制对大多数时间保存应用不必要。

然而,Huygens 为进化者开发的数学框架表现得比他的特定时钟设计更有影响力。其对曲率的地质方法和曲线与它们进化之间的关系为:

- 光学中的可口化研究 (反射或反射的辐射)
- 布拉希斯托克隆问题 (约翰・伯诺利 1696 年) 寻找最快降落的曲线
- 曲线家庭包围的总体理论
- 现代装置设计应用, 其中涉及的轮胎保持稳定的速度比率
- 区别地质学作为数学学科的开发

Huygens 引入的概念将证明对曲线的 曲率 的理解至关重要, 包括弹性和催眠性的曲线　如 Huygens 上所指出的那样, 自然向我们展示并拥有的曲线。“非常出色的属性。”

8.3.3 结论注意事项

进化和涉及的故事模拟了地质学史上一个重复的主题: 实际问题引发理论进步, 最终超越其原始应用。Huygens 寻求建立一个更好的手表, 但相反, 给了数学一个基本框架来理解曲线如何通过它们的曲率属性相互关系。这种实用与理论之间的相互作用, 机械需要和地质美丽之间, 是从 17 世纪开始的大部分发展地质学的特点。

正如我们在本章中所看到的那样, 地质学不仅仅是一个抽象的练习, 而且是一种镜头, 通过它我们可以理解自然世界和我们创造的艺术品。从圆圈分裂的古老问题到涉及的螺旋的现代应用, 地质原则继续塑造我们对空间、运动和形状的理解。进化和涉及, 出生于准确的时间保存的实际需要, 提醒我们, 即使是最抽象的数学概念, 在人类经验的实质性挑战中也经常有根源。

桌子 8.3 总结了本章中提到的主要事件/书籍。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 8.3: 曲率 & Elastica: 主要事件和书籍

年度	作者	书名 / 事件	总结
1351	尼古拉 • 奥雷斯	**定位和摩托车的配置** (Oresme, 1351)	早期定性概念将曲率连接到从直线出发; 先驱到后来的分析定义。
1657	克里斯蒂安 • 休根斯	发明的手表 (事件)	实用时间保留问题, 引发伊索克罗尼亚; 为循环的阶段 (塔图克朗) 解决方案。
1658–1673	克里斯蒂安 • 休根斯	循环性通道 & 进化/进化建设 (事件)	使用涉及的循环通过循环检查以执行伊索克罗尼亚; 进化/进化形式化地质。
1671	伊莎克 • 纽顿	**原名**:*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (Newton, 1736)	分析 曲率 公式 (卡特西亚 / 波拉) 通过交叉正常的曲率中心。
1673	克里斯蒂安 • 休根斯	**奥斯基拉托时钟** (Huygens, 1673)	长度动态硕士论文; 循环作为塔图克隆; 系统使用进化 / 进化。
1686	G。W。莱布尼兹	通过四点接触的圆圈 (事件)	定义圆圈作为一个圆圈的边界与四点接触; 地质基础为曲率。
1691	约翰 • 伯诺利	一般射线 曲率 (未出版手稿)	二、差异性衍生 r • 阿尔及利亚路线到现代 $r = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{y''}$.
1694	雅各布 • 伯诺利	**拉米纳** *Elasticae* (Bernoulli, Jakob, 1744a)	地质弹性通过进化/进化; 曲率 中央到弹性曲线建设的射线。
1744	莱昂哈德 • 尤勒	*Methodus Inveniendi* **线**变分法; Euler-Lagrange 方程式; 准确 (非线性) 以多元化形**路曲线** *Maximi Minive*式的弹性。 *Proprietate Gaudentes* (Euler, 1744b)	
ca. 1750	Euler & 丹尼尔 • 伯诺利	•小斯洛普 (Euler - 伯诺利) 接近 (事件)	线性 曲率 $\kappa \approx y''$ • 收益 $EI\,y'' = M(x)$ 基于古典泡沫理论。
1758	A. G。凯斯特	**数学的起点** (Kästner, 1786)	现代 曲率 $d\theta/ds$ (与弓长度的坦根角度变更率) • 概念的巩固。

8.4 从地质曲线到结构力学

在本章中追踪的地质发展 - 从奥雷斯梅的定性洞察到 Kästner 的严格定义曲率 - 并不是仅仅是数学抽象。他们提供了一个基本的量子语言, 需要制定和解决一个新的物理问题类别: **如何在荷载下扭曲灵活和弹性结构?**

关键观点: 对于任何负载的结构 - 一条挂链, 一条弯曲线, 一个曲折的梁 - 的扭曲形状基本上是由它的特点。**曲率在每一个时刻**. 没有数学机器来描述和计算曲率, 结构力学不能超越原始接近。

考虑到占据章节的两大挑战 9:

凯特纳里 (§9.2): 挂链采用一种形状, 在每个点上, **压力力量平衡体重** 下面的链条。但是, 要写这个平衡数学上需要表达链条的地质 - 具体而言, 弓长度之间的关系。θ 和垂直位置。Huygens 的地质观点 (§8.3.1) 纽顿的计算 (§8.2.2) 和 Leibniz (§6.6.8) 使这可能。结果的差异方程式直接与链 曲率 的分布在其长度。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

灵活的 (§9.3): 雅各布・伯诺利 (Jacob Bernoulli) 的 1691 年至 1694 年的作品, 描述了地质与机械之间的联系。他的挑战问题问: **什么形状在荷载下采用弹性绳子**? 其解决方法直接利用了本章中开发的地质概念:

1. 使用他的 **黄金理论** (§8.2.5) 要用地质方式表达 曲率: $\kappa = d\theta/ds$ 到目前为止, 发展建设 (§8.3) 提供地质基础
2. 引用 A **物理原则**: 弯矩 M 与 曲率 相比例 ($M \propto \kappa$) 第一份明确的声明将内部力量与地质变形联系起来
3. 适用 **机械 平衡**: 时刻必须平衡应用的负载在每个点沿着曲线
4. 结果在 A **差异方程式** 与机械充电相连的曲率地质, 可通过计算技术溶解

这种合成 - 在地质曲率成为变形与内部力量之间的桥梁 - 可能没有在本章中记录的前三世纪地质发展发生。

Huygens 的进化建筑, 最初为循环通道开发 (§8.3.1) 雅各布・伯诺利 (Jacob Bernoulli) 用进化来产生弹性方程式时, 它是必不可少的。进化者提供曲线中心的位置 - 正是需要表达一根相关术语子的形状在其长度上有所不同的方式所需的地质信息。纽顿的奥斯卡圆圈 (§8.2.2) 和 Leibniz (§6.6.8), 起初是一个纯粹的地质概念, 成为一个<梁的物理表现。“想要的” 在每个点上曲线 - 局部圆形接近控制着局部弯矩. angle angle 的角度变化的速度 $d\theta/ds$ 哈斯特纳正式 (§8.2.6) 成为機械 曲率 κ 它在每个梁方程式中出现。

从地质到机械的桥梁: 桌子 8.4 总结了如何在本章中开发的每个地质概念在结构力学中找到直接应用:

表 8.4: 从地质概念到机械应用

地质概念	机械应用
奥斯卡循环 (纽顿, 莱布尼兹)	梁 挠度的本地接近; 确定本地曲线硬度要求
曲率的射线 $\rho = 1/\kappa$	相反的比例为 弯矩: $M = EI\kappa$
作为曲率中心的位置发展	地质构建方法, 以寻找弹性形状
旋转的速度 $d\theta/ds$ (凯斯特)	在梁理论中连接曲线角度到弓长的动画关系
黄金理论 (雅各布・伯诺利)	计算工具解决弹性差异方程式

遗产: 基于曲率的表述由雅各布・伯诺利创立, 由 Euler 精化到变分法 (§9.4.1.2), 并通过 Euler-Bernoulli 小滑接近简化 (§9.4.1.3), 已成为基础的 **所有** 结构性梁理论。每個現代 梁 方程式 - 从簡單 $EIy'' = M(x)$ 到复杂的结尾单元公式 - 跟踪其与本章中开发的地质概念的线性。微小的接近 $\kappa \approx d^2y/dx^2$ 允许基本泡沫理论只是准确曲线公式的线性化。$\kappa = d\theta/ds$ 由伯诺利斯的地质产生的。

因此, 曲率的故事描述了数学物理学的一个深度模式: **抽象的地质观念, 为自己的利益开发, 后来证明不可或缺的描述物理现实。**. 纽顿的光明圈, 胡格斯的进化和伯诺利人的差异地质并没有被创造来解决结构问题 - 没有它们, 现代结构理论就无法存在。Huygens 發展的進化來建立一個更好的時鐘; Jakob Bernoulli 認識到, 同樣的地質機器可以描述閃電如何旋轉。时间保存与结构力学之间的这种交叉生育表明数学工具如何超越其原始应用。

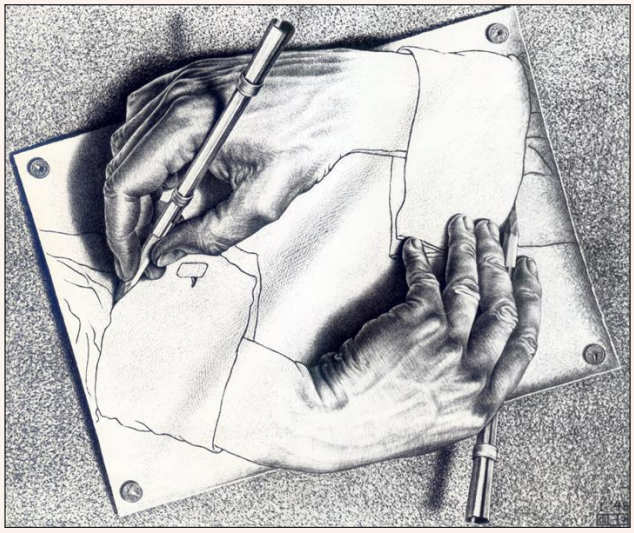
8.5 等待:

在章节 9, 我们将看到这些地质工具如何允许解决定义结构力学的两个问题: 催化和弹性。这些标志着从地质结构到分析解决方案的决定性转变, 从理解抽象曲线到预测负载结构元素的行为。在这里, 本章所设定的地质洞察与挂链和弯曲轮子的物理现实相遇, 导致结构力学历史上最优雅、最实用的结果。

可口可乐问题将显示曲率如何与灵活的索中的内部紧张分布有关。灵活性将展示曲率如何控制应用负载与导致弹性线的变形形式之间的关系。兩個問題都分享了一個常見的數學結構: 一個差異方程式, 將曲率的地質特性與機械量相關。(紧张, 时刻, 荷载). 这个结构, 首先由雅各布・伯诺利认可并由尤勒正式化, 至今仍然是结构分析的核心。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这些挑战也将揭示为什么研究扭曲的形状, 基于以前章节的强度原则和刚刚建立的地质基础, 成为结构行为的完整理解至关重要的。知道一个结构能够抵抗某个 荷载 是不够的, 我们还必须预测它会变形多少, 以及这种变形是否仍然可接受其所定义功能。



MC。马斯克, 绘制手 (1948)

自我参考曲线和不可能的地质学 - 数学通过艺术悖论显而易见。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

9 大挑战: 催眠, 弹性和解析机械的诞生

摘要

本章节探讨了所谓的“大挑战”机械学的发展, 在 *17* 世纪和 *18* 世纪激发了数学和工程领域的决定性进步。开始与 *1690* 年代的天才问题 - 由 雅各布 · 伯诺利 *(Jacob Bernoulli)* 但已解决 莱布尼兹 约翰 · 伯诺利和 *Huygens* - 它强调了如何应用 计算到一个真正的物理问题证明了新分析的力量。雅各布 · 伯诺利的后续弹性挑战标志着另一个转折点, 推动数学向前。变分法, 首先由 丹尼尔 · 伯诺利 *(Daniel Bernoulli)* 和随后精化 欧利。*1724* 年的匿名挑战扩大了调查领域, 要求在一般力量下的灵活和弹性线路的解决方案, 再次引用丹尼尔 · 伯诺利和尤勒的贡献。第 *1759* 章 最后的记忆 柱 屈曲 将地质好奇心转化为结构稳定的核心结果。

第 *1771* 章 以尤勒的教训结束 *Genuina principia*, 在那里他将这些不一样的线条统一为一个全面的歪曲线理论。通过引入平衡线的“一般问题”,*Euler* 正式化了坦克和正常力量结果的概念, 并将其 弯矩, 并区分机械平衡法则与宪法关系。他的合成不仅总结了链条、线条和柱的经典问题, 而且还预测了统治框架。连续介质力学. 故事展示了当初在地质学家中竞赛时提出的挑战最终产生了一个普遍的方法, 从桥梁和塔到材料和生物系统继续支持结构分析。

在这本书中的所有章节中, 这个人证明是最有要求和最有趣的写作, 但也是最智力上奖励和享受。

9.1 数学基础: 从地质到计算 212
9.1.1 希腊遗产: 从欧克利德到地质机械分裂 212
9.1.2 德卡特革命: 协调和阿尔及利亚 213
9.1.3 计算革命 213
9.1.4 从曲线到机械: 桥梁 214
9.1.5 转型完整 215
9.1.6 数学笔记 215
9.2 加泰罗尼亚挑战 (1690 年 5 月至 1691 年 6 月) 215
9.2.1 早期研究 216
9.2.2 挑战 219
9.2.3 三大解决方案 222
9.2.4 埃皮洛格 226
9.3 灵活的挑战 (1690-1744) 228
9.3.1 雅各布 • 伯诺利的挑战 (1690) 228
9.3.2 解决方案 230
9.3.3 第一两项挑战的历史概述 . . 261
9.4 匿名挑战: 问题之间的桥梁 (1724) . . 262
9.4.1 伯诺利 - 埃勒合作: 第一次统一 (1728) 263
9.5 屈曲理论: 从观察到关键负载 270
9.5.1 早期工作 270
9.5.2 Euler(1759) 272
9.6 尤勒的一般理论: 完整统一 (1771) . . 275
9.7 结论 278

9.1 数学基础: 从地质到计算

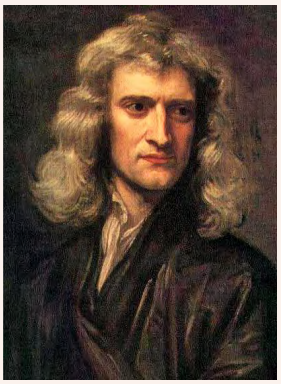
在我们转向挂链、相关术语轮和 bu 柱的大问题之前, 我们必须设置十七世纪的场景: 从地质结构到分析计算的一个基本转变, 使这些机械曲线可追踪。

9.1.1 希腊遗产: 从欧克利德到地质机械分裂

17 世纪的研究人员继承的数学传统, 追溯到埃克利德的历史。**单元的评论** (C。300 元) 地质学是指数学构造的科学。直线和共通。尤克利德的态度 - 以他的定义为例外 坦克 作为一条线触摸一个圆圈在一个点, 而不穿过它 - 为线路、圆圈和它们的交叉提供了强大的方法, 但没有提供更复杂的曲线的一般方法。

古代以来, 希腊数学家分为 **地质学** 曲线 - 可建造的 直线和共通 通常是由简单的算法关系所代表的, 从 **机械**

审阅稿



(a) 伊萨克•纽顿 (1643–1727)



(b) 克里斯蒂安•休根斯 (1629–1695)



(c) 雷恩´卡特 (1596–1650)

图 9.1: Elastica 主角

由创造的曲线 **动作或设备** (螺旋、四角形、四方形).[1] 他们经常被视为外部。“清洁” 地质学, 可解决具体问题但从理论规则中排除。

历史背景 这个作品是基于伯诺利的 1691 个字母。*Acta Eruditorum* **编辑**它设定了优先事项, 同时隐藏了它的方法。解码的图表显示了后来揭示的准确地质关系, 而不是逆转旋转时刻。曲率 法律在某些文学中错误引用 (§6.11.1.1).

这个边界已经持续了近两千年。结构力学 - 催化, 弹性, 进化 - 的曲线坚定地属于机械类别, 使它们抵抗经典的地质方法。

9.1.2 德卡特革命: 协调和阿尔及利亚

这个基础中的第一个克拉克来了当 Descartes, 1637b 有人说, 如果地质测量大小一般, 就没有理由排除更复杂的曲线。[2]

分析地质 - 协调和算法 - 创造了算法操纵工作语言的洛西。突然间, 曲线可以被视为方程式的解决方案。$F(x, y) = 0$, 和地质特性可以通过算法计算衍生。这破坏了地质和机械曲线之间的古老边界, 但对坦根、区域和复杂过渡曲线的一般方法仍然等待着更深的突破。

9.1.3 计算革命

中世纪七十一世纪的进展: 卡瓦利里的不可分割, 托里克利的四角形, 瓦利斯的无限产品, 巴罗的作品。田区双重性, Fermat 的坦根方法 - 设置阶段。决定性的跳跃是由莱布尼兹和牛顿的差异计算, 由伯诺利斯、胡格森和尤勒精化。

莱布尼兹抓住了这种转变的范围在他的争议性 **历史与奥里戈计算差异** (Leibniz, 1858), 图 9.2. 放弃与纽顿的优先争议, 他的技术要求是革命性的:

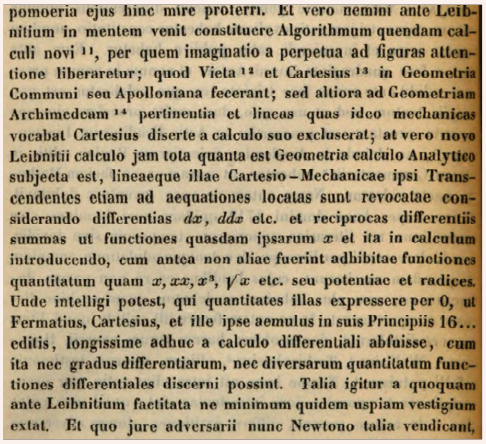
[1] 这个 “地质机械分裂” 它不是指地质学和机械学作为学科之间的分离, 而是希腊曲线的分类是属于纯粹的地质理论。(以欧克利德方法构建) 或实用问题解决 (需要机械设备或动作).

[2] 讽刺的是, 德卡特的工作例子仍然有利于低度的算法曲线; cf. Palomo, 2017.

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 现在, 在莱布尼兹的计算中, 整个地质学都受到了解析计算, 而德卡特称为机械的过渡线也被减少到适合它们选择的方程式, 考虑到差异。dx, ddx, 等, 以及这些差异的逆转金额, 作为职能 x 和此, 只是通过引入计算, 而在此之前没有其他功能是可接受的, 但 x, xx, x^3, $\sqrt{x}$, 等等, 也就是说, 权力和根。
>
> Leibniz, 1858, 翻译为 Child, 1920

他的账户, 当他在纽顿的优先争论中分手时, 准确地捕捉了数学革命, 使过渡曲线分析可追踪。


pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam $x, xx, x^3, \sqrt{x}$ etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,

Latin Transcription:
"pomoeria ejus hinc mire proferri. Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi [11], per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur; quod Vieta [12] et Cartesius [13] in Geometria Communi seu Apolloniana fecerant; sed altiora ad Geometriam Archimedeam [14] pertinentia et lineas quas ideo mechanicas vocabat Cartesius diserte a calculo suo excluserat; at vero novo Leibnitii calculo jam tota quanta est Geometria calculo Analytico subjecta est, lineaeque illae Cartesio-Mechanicae ipsi Transcendentes etiam ad aequationes locatas sunt revocatae considerando differentias dx, ddx etc. et reciprocas differentiis summas ut functiones quasdam ipsarum x et ita in calculum introducendo, cum antea non aliae fuerint adhibitae functiones quantitatum quam x, xx, x³, √x etc. seu potentiae et radices. Unde intelligi potest, qui quantitates illas expressere per 0, ut Fermatius, Cartesius, et ille ipse aemulus in suis Principiis 16... editis, longissime adhuc a calculo differentiali abfuisse, cum ita nec gradus differentiarum, nec diversarum quantitatum functiones differentiales discerni possint. Talia igitur a quoquam ante Leibnitium factitata ne minimum quidem uspiam vestigium extat. Et quo jure adversarii nunc Newtono talia vendicant,"

English Translation:
"...its boundaries may thus be wonderfully extended. And truly, it never entered anyone's mind before Leibniz to establish a certain algorithm of the new calculus [11], by which the imagination would be freed from perpetual attention to figures; which Vieta [12] and Descartes [13] had accomplished in Common or Apollonian Geometry; but the higher things pertaining to Archimedean Geometry [14] and the lines which Descartes therefore called mechanical, he had expressly excluded from his calculus; but truly by Leibniz's new calculus, now all of Geometry, however extensive, is subjected to Analytic calculation, and those lines that were Cartesian-Mechanical, even the Transcendental ones, are reduced to located equations by considering the differences dx, ddx etc. and the sums reciprocal to the differences as certain functions of the x's themselves, and thus introducing them into the calculus, whereas before no other functions of quantities had been employed than x, xx, x³, √x etc., that is, powers and roots. From which it can be understood that those who expressed such quantities by 0, like Fermat, Descartes, and that very rival in his Principia published in 16..., were still very far indeed from the differential calculus, since in this way neither the degrees of differences nor the differential functions of various quantities can be distinguished. Therefore, there exists not the slightest trace anywhere of such things having been practiced by anyone before Leibniz. And by what right do adversaries now claim such things for Newton..."

图 9.2: Leibniz 在计算的范围 (Leibniz, 1858, p. 2–3).

莱布尼兹和纽顿, 通过不同的方法 (差异性 vs. **流动**, 取得了相同的突破: 超越曲线 - 以前仅通过地质结构或数值接近可用 - 对准确的解析处理的对象。

9.1.4 从曲线到机械: 桥梁

在十八世纪, 尤其是通过 Euler 的 **关于分析无限的介绍**现代的概念 A **功能** 与系统曲线参数化相结合。飞机曲线 $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ 我们有:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad \text{(arc-length speed)} \tag{9.1}$$

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad \text{(signed curvature)} \tag{9.2}$$

和 曲率 κ 是奥斯卡圆圈直径的相互性, 代表当地 11 带。” 从曲线上。这种地质量成为通过宪法法律与机械的关键联系。

对于一个弹性线, 将地质与强度连接的基本关系是:

$$M = EI\kappa \tag{9.3}$$

哪里 M 是 弯矩。E 材料模块, I 截面二次矩的 (地质定义), 和 κ 曲率 等。历史上, 这似乎是 $M = \mathfrak{B}/R$ 或 $M = Ek^2\kappa$ 与各式各样的评论为 “模块化。”

这种令人误导的简单方程式将地质曲线理论转化为结构力学. 天文台出现时 $EI \to 0$ (完美灵活的毛巾)• 时时的灵活性 EI 已结束 (可靠但不可扩展的) 屈曲当轴负载与弯曲硬度相互作用时。

9.1.5 转型完整

数学革命是深刻的:

- **阿尔及利亚 vs. 超越曲线**阿尔及利亚曲线满足多元性关系 $F(x, y) = 0$ (圆圈, 精英, 平板). 催眠, 弹性和它们的进化是超越性的 - 正是计算所使可追踪的曲线。
- **从建设到分析**在希腊人和中世纪数学家使用地质结构与压缩和直线, 新分析解决了问题通过 差异方程式和整合。
- **清洁和应用的统一**相同的数学工具揭示了抽象曲线的特性, 也解决了压缩工程问题 - 连锁链, 喷雾漏洞, 列稳定。

有了这个基础, 我们可以欣赏为什么催眠, 弹性和屈曲问题变成了 “大挑战” 17 世纪末和 18 世纪初的数学。这些不是仅仅是抽象的练习, 而是测试新计算是否能真正掌握数千年来抵抗分析的机械曲线。

正如后文将看到的，雅各布 • 伯努利、约翰 • 伯努利和欧拉对这些问题的解答，他们的当代人做得更多, 而不是解决具体的工程问题 - 他们建立了现代结构力学的数学基础, 并在数学物理学中展示了解析方法前所未有的力量。

9.1.6 数学笔记

进化的 **数学评分** 与概念发展相匹配。不同先驱开发了竞争象征性系统, 了解他们的评分有助于阅读主要来源, 表 9.1.

9.2 加泰罗尼亚挑战 (1690 年 5 月至 1691 年 6 月)

悬链线的历史 17 世纪末的研究对现代人来说是一个令人兴奋的 (学术) 读者。这是关于三位突出人物的竞争力。(莱布尼兹、胡伊格斯和伯诺利兄弟) 艾戈 (莱布尼兹希望证明其优越性 “他的” 计算) 秘密通信 (广泛使用网络), 私人通讯 (Leibniz 和 Huygens) 嫉妒 (雅各布和约翰 • 伯诺利), 出版 压力 (由编辑的 *Acta Eruditorium* **编辑**, 而且更多。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 9.1: 差异化 & 集成符号

	差异化	集成 (反差异化)
莱布尼兹	$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$	$\int y\,dx$
拉格兰	$f'(x)$, $f''(x)$, ...	$\int \cdot\,dx$
Euler	$D_x y$, $D_x^2 y$	$\int \cdot\,dx$
纽顿	$\dot{x}$, $\ddot{x}$ (时间率)	“流量” 由 $\dot{x}$ (时间完整); 纽顿不使用 $\int$ 在他的笔记中

笔记: (i) Lagrange 常用原料和 $\int$ 四角形; 正式逆转衍生运营商 (D^{-1}) 后来是。(ii) Euler 使用 Leibnizian $\int$ 和差异运营商 D_x 在不同的背景下。(第三) 牛顿的流动/流动是基于时间的; 地图到现代 $\frac{d}{dt}$ 和 $\int dt$ 至于跨参考机械。

卡特纳里提出了一个基本的挑战: 这是第一 超越曲线 需要 解析解, 使它成为新计算对传统地质方法的关键测试案例。不同于可用于压缩和直线的算法曲线, 挂链的无限细节意味着没有一个简单的地质结构可以确定它的形状。这个问题需要平衡力量, 沿着一个未知的形状曲线 - 正是挑战的类型, 要求 Leibniz 和 Newton 开发的区别方法。

对于伯诺利斯, 图 6.16 它是 A “家庭事务” 因为所有主角都有一种联系:Huygens 是 Leibniz 的导师, 他是雅各布 • 伯诺利的顾问, 他就是约翰 • 伯努利的兄弟, 他也是丹尼尔 • 伯纳利的父亲和尤勒的顾客。

因此, 这是一个值得熟悉的故事。

9.2.1 早期研究

在伯诺利和尤勒的工作之前, 挂链的问题已经抓住了许多人的注意力。

9.2.1.1 莱昂纳多

这个问题被认为是第一次出现的, 当莱昂纳多 • 达芬奇在他的笔记本电脑中绘制了一些挂链时, 图 9.3. 然而, 他更有可能正在寻找他的中心的重力而不是形状。但再次, 我们往往喜欢借给达芬奇很多不值得的发现。后来, 这个问题被解决了。加利利奥认为形状是模范。这个假设是 “破碎” 由 Stevin,Huygens 和其他人。然而, 虽然他们都表明曲线不是一个例子, 但他们无法说挂链的形状实际上是什么。这将等待雅各布 • 伯诺利的挑战。

9.2.1.2 加利利

1614 年，佛兰德数学家艾萨克 • 贝克曼（1588–1637）在笔记中记载了一条悬挂绳索（“让一根绳索悬在梁下……两端固定，使其松弛而自由地下垂”），并画有草图；他也把这个问题交给了笛卡尔。笛卡尔的文稿中有一条页边注，提到 “Isaacus Middelburgensis [Beeckman]” 询问用钉子固定的绳索能否形成圆锥曲线的一部分。然而，没有证据表明笛卡尔曾继续求解，或与贝克曼进一步讨论。[3]

1638 年以后 Galilei, 1638 研究了这个问题, 并且没有任何正式分析说:

[3] 见 Bukowski, 2008；另参 Truesdell, 1960。原始资料可查阅贝克曼的 *Journal*（de Waard 编）以及 *Oeuvres de Descartes*（Adam–Tannery 编）(Beeckman, 1939), (Descartes, 1897a)。

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

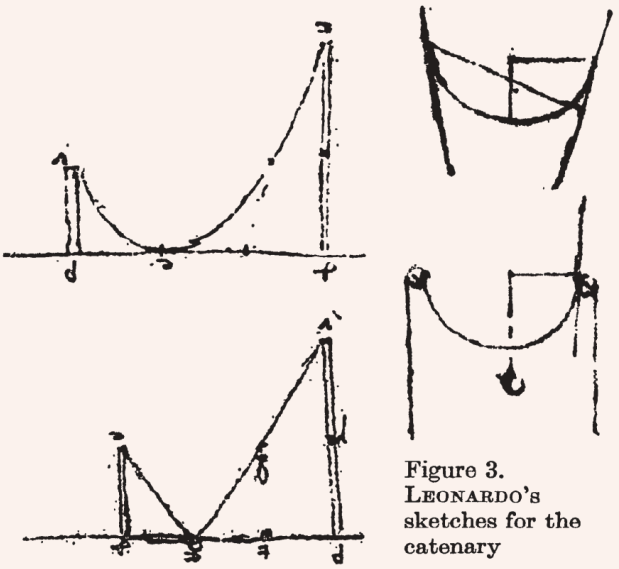


图 9.3: 莱昂纳多的雕塑, 以便从 (Truesdell, 1960 PDF)

> 将两条指甲在适当的高度和同等水平的墙上拖动; 使这些指甲之间的距离是直角的宽度两倍, 希望追踪半巴波拉。在这两条指甲上挂着一根如此长的光链, 以至于它的相关术语的深度相当于普里斯姆的长度。这个链条将采取一个平凡的形式, 因此, 如果这种形状被墙上的点标记, 我们将描述一个完整的模范, 可以分为两个平等的部分, 通过绘制垂直线在两条指甲之间的点中间。
>
> Galilei, 1638 PDF Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze

值得注意的是, 加利利奥已经证明了火箭轨道是模拟的, 认为火箭将具有相同的形状。

9.2.1.3 史蒂芬; (1634)

这个问题也出现在斯蒂文的作品中。(1548 – 1620), 谁的 工作数学 *é* 马丁 它是由数学家阿尔伯特 • 吉拉德 (Albert Girard) 在 1634 年发表的。在静态材料中, 斯蒂文处理涉及岩石的问题; 在边缘笔记中, 吉拉德说:

> ... 因为其他相关术语或的绳子是平凡的线条 *(*如同我曾经在 *1617* 年左右证明的*)* 正如我将在下一卷的结尾后证明的那样。.
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508

1617 年未有的证据不存在。史蒂芬的冠军之后, 吉拉德 (Girard, 1634) 添加更多承诺 (经常在文学中提到) 以便以后公布完整论点:

> 为了满足我以前的承诺, 先前的最后一代, 并且没有现在的休闲时间在这里放下我的整个证据的副本, 我将与我的其他作品, 上帝愿意, 在另一个时刻公开。当科学的研究将比现在更受欢迎。
>
> Stevin, 1987 *Les oeuvres mathématiques*, p. 508（吉拉德的法语）

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

没有这样的证据出现, 吉拉德本人在 1634 年出版时就死了。[4] [5]

9.2.1.4 胡格斯 (c. 1646)

胡格斯 (永久性) 父亲是吉拉德的熟人 (谁写了史蒂芬的作品) 与法国修道士马林 • 梅森交换了联系 (1588 – 1648) (Bukowski, 2008). 梅森经常被称为数学和科学思想的清算室, 因为他与欧洲许多最好的思想家相匹配。作为一个骄傲的父亲, 康斯坦蒂恩 • 休根斯很高兴能告诉梅森他的辉煌的十七岁的儿子克里斯蒂安。

1640 年代, 年轻的 Huygens (在他的青春中) 写给 Mersenne (Huygens, 1888b, p. 28):

> 我将在另一封信中向你发出证据, 证明挂绳或链条不构成一个模范, 以及数学线上的压力应该是什么, 或者没有重力来做一个; 我最近找到了这样的证据。
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1, p. 28

事实上,Huygens 写给 Mersenne:

> *Nulla ergo catena pendet secundum lineam parabolicam*。(因此, 没有链条依据模拟线挂着。)
>
> Huygens, 1888b Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1

然而, 他无法确定曲线的真实形状。

由于吊链本身不是一个模范, 所以 Huygens 说他已经想象了如何用某些外部力量来将该链变成模范的形状。感动了 Huygens 关于挂链的声明,Mersenne 在 11 月 16 日回应希望看到证据。

> 即连锁, 或伸带的绳子, 挂在中间自己的重量之下, 不像加利利奥所提出的那样做一个模范。

他还表示他渴望看到 Huygens 的额外证据, 同时将其迈出一步, 因为他告诉 Huygen 他希望看到什么。

> 它必须是压力来制作上述平凡, 如果你添加, 如有必要, 压力, 以便制作一个超级球和一片精子, 那么你会克服自己。

此月晚些时候,Huygens 向 Mersenne 回应了关于挂链的声明的完整证据。

Huygens 的解决方案是纯粹地质, 图 9.4a (Huygens, 1888b). 有趣的是, 他 “强迫” 挂链是通过在水平投影沿线平等间隔暂停相同重量的模拟。(相反的平等间隔, 沿着线本身). 这是一个关键的区别: 一场大屠杀 (单身链在自己的重量下) 不同于一个模拟悬挂桥 索 (荷载 均匀分布). 胡根斯发现了两种形状, 并理解了它们的不同物理起源。这可能是第一次发现, 悬挂桥的支持电缆是模糊的!

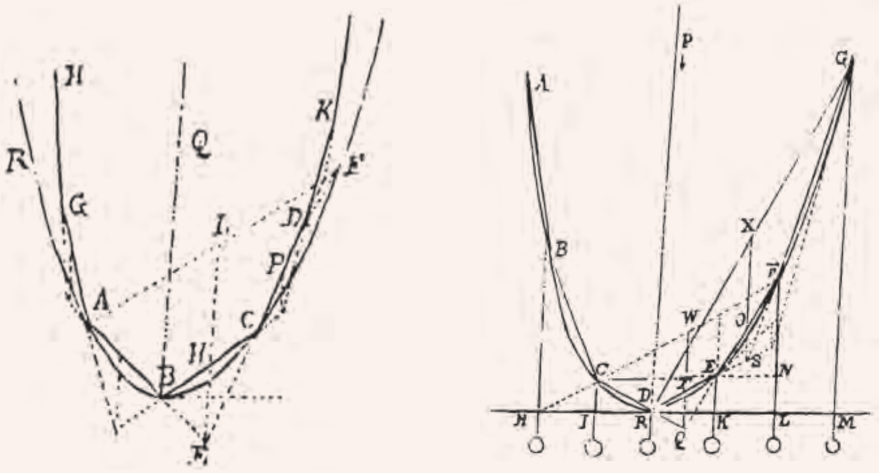
关于 Huygens 的详细解释在 (Bukowski, 2008).

胡伊根斯将他的研究放松四十五年, 直到伯诺利的挑战。(§9.2.2.2)

[4] 看见 (Bukowski, 2008) 和 (Truesdell, 1960) 为讨论。

[5] 与 Fermate 的常见比较 “太狭窄的边界:Fermat 的笔记日期为 *c.* 1637 年, 在 1670 年版的迪奥法南图中印刷后, 而不是 1630 年。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 连锁问题 表述 (提议 8)

(b) 强迫链子像一个模仿一样挂着 (提议 11)

图 9.4: 主持人:Christiaan Huygens (Huygens, 1888b)

9.2.2 挑战

桌子 9.2.2.1 这是这个故事的历史总结, 它 (如同本节的其他部分) 主要是基于最近的精彩研究 Alassi, 2020.

9.2.2.1 标签: terminology

在我们面对伯诺利的挑战之前, 我们将澄清我们将使用的关键术语。

表 9.2: 术语为曲线在 “函数” 家庭 (之后 Alassi, 2020).

期限	物理模型	关键假设 / 荷载	加拿大关系 (指标)
函数	窗帘术语: 形状一个灵活的线条或叶子可以承担在一定负载下 (包括催眠, 弹性,Velaria,Lintearia).	宪法行为和负载因案例而异。目标: 确定 曲率 $\kappa(s)$ 從 平衡。	主问题: 力量/时刻的平衡 $\Rightarrow$ 曲率法; 下面的专业。
加泰罗尼亚 (凯特纳)	连接不扩展, 完美灵活链/索在自己的重量下; 终点固定。	没有弯曲的硬度或粘贴; 单位长度均重 w.	$y = a\cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + C$; 同等 $H\,y'' = w\sqrt{1+(y')^2}$; 曲率 $\kappa = \frac{w}{H}\frac{1}{1+(y')^2}$.
精力	不可延伸、不可磨损的滑板带与弯曲硬度 B (“绝对 弹性”).	宪法法 $M = B\,\kappa$ 外部终端力量/时刻设置 BC。	Euler 形式 (计划): $B\,\theta'' + P\sin(\theta-\theta_P) = 0$ 通过解决方案精英集成 (例如, 直角弹性).

继续在下一页

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

桌子 9.2 (继续)

期限	物理模型	关键假设 / 荷载	加拿大关系 (指标)
威利亚	直角游艇的曲线固定在其角落, 并由风吹。(压缩膜).	灵活下载 (大约) 统一 压力; 不可扩展的线条 (伯诺利理想主义).	成员的 函数由膜中的压力产生的曲线; 伯诺利的地质结构。
线路	直角衣的曲线, 其两侧是垂直支持和负载一个含有流体。	灵活的膜; 转 荷载 与深度不同 (水道).	成员的 函数; 因不均匀的加载而与卡特纳区别的个人资料。

9.2.2.2 雅各布·伯诺利 福尼克 第 1690 章 挑战

凯特纳问题 - 确定由挂链形成的数学曲线 - 在 1690 年代成为新兴计算的一个关键测试案例。这个挑战将证明解析方法对传统地质方法的优势。

十七世纪末, 计算 (纽顿和莱布尼兹的礼貌) 它是出生的, 它的超越 “传统的” 方法 (地质学) 即将被证明, 通过解决卡特纳问题 [6].

1690 年 5 月, 雅各布·伯诺利 (Jacob Bernoulli) 提出了数学界的挑战, 以解决卡特纳问题。[7] (Bernoulli, Jakob, 1690b).

桌子 9.3 提供这个故事的历史概述, 主要是基于优秀最近的研究 Alassi, 2020.

想法是, 数学家可以同时提出出版的解决方案, 确保公平比较方法。解决方案将出现在 *Acta Eruditorum* 编辑, (Bernoulli, Jakob, 1690b)[8].

他特别邀请莱布尼兹和 查尔斯 [9] 试着新的方法来解决这个问题。1690 年, 雅各布·伯诺利 (Jakob Bernoulli) 通过向整个数学社区提出这个问题来扩大这一实践, 并特别要求莱布尼兹和切尔纳豪斯考虑这个问题。起初, 雅各布没有具体的期限, 反映了问题的困难。他描述了问题如下, 图 9.5:

> 现在, 让这个问题提出: 从两个固定点自由挂着一个空线所承认的曲线。我也假设条线是一种线, 在其所有部分都很容易灵活。
>
> Bernoulli, Jakob, 1690b “*Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)*”

9.2.2.3 莱布尼兹的回应和挑战修改; 1690 年晚

虽然在法律上训练, 但莱布尼兹在 1672 年至 1676 年间与胡伊根斯在巴黎学习数学。因此, 莱布尼兹接受了这个挑战, 并在 1690 年底回应, 有效地将雅各布的开端挑战转化为更有结构性的竞争:

[6]它可以是 shown 它在一个直线上滚动一个平板, 它的焦点跟踪一个相关术语。

[7]提出数学问题作为竞赛已经在文艺复兴和早期现代数学家, 包括 Huygens 和 Leibniz 中受欢迎。一般情况下, 一个数学问题提出解决, 挑战者明确邀请一些数学家在一定时间内解决这个问题。(Alassi, 2020).

[8]*Acta Eruditorum* 编辑 (拉丁语为 “考察员的行为”) 是欧洲德语土地的第一期科学杂志, 于 1682 年至 1782 年出版。它是由 Leibniz 自己支持的, 他为 13 篇文章做出了贡献。雅各布·伯诺利和尤勒也发表在其中。它在 “计算战争” (在那里, 牛顿和莱布尼兹各自声称为开发差异计算的信用。和 行动 与莱布尼兹同行, 而《哲学交易》与纽顿同行。).

[9]Tschirnhaus 是一位德国数学家, Leibniz 在巴黎也遇到了。有趣的是, 第 1696 章 下面 1696 年, 雅各布的弟兄约翰·伯诺利提出了问题。(布拉希斯托克朗) 对于读者来说, *Acta Eruditorum* 编辑, 而 Tschirnhaus 是唯一五位数学家之一提出解决方案。Bernoulli 发表了这些贡献 (包括 Tschirnhaus) 与他同在于明年 5 月在报纸上。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 9.3: 催眠解决方案的慢性发展 (基于 (Alassi, 2020 PDF))

日期	从	到	主题
十五世纪	莱昂纳多		偶然观察挂链
1638	加利利	—	假设这是一个模范
1600 年代	阿里, 帕迪		不, 这不是一个模仿。
1690 年 5 月	雅各布 B	莱布尼兹	对莱布尼兹提出挑战 & 查尔斯
1690 年 7 月	莱布尼兹	雅各布 B	接受挑战; 要求解决方案; 设定期限
10 月 9 日 1690	胡格斯	莱布尼兹	发送 A (芯片) 答案: 请参见 Leibniz 的 (芯片)
10 月 13 日 1690	莱布尼兹	胡格斯	注意相似之处; 提到小差异
十一月 18 日 1690	胡格斯	莱布尼兹	请求查看验证的芯片解决方案
1690 年	约翰 • B	AE 编辑	提供条件的解决方案
十一月 31 日 1690		**期限 (没有发布的解决方案 由 Leibniz)**	
1691 年 1 月 6 日	AE 编辑	莱布尼兹	确认约翰 B 的解决方案的接收
1691 年 1 月 27 日	莱布尼兹	胡格斯	下一篇: 接受 Huygens 的解决方案, 但注意另一个曲线
1691 年 2 月 20 日	莱布尼兹	胡格斯	约翰得到了; 他使用了 “my” 计算
1691 年 2 月 23 日	胡格斯	莱布尼兹	其他地质学家可以解决这个简单的问题
十一月 26 日 1691	胡格斯	莱布尼兹	他接受了他的芯片中的滑板; 请与约翰 • B 检查。
1691 年	雅各布 B	AE 编辑	补充: 扩展兄弟的解决方案
十一月 1691	AE 编辑	莱布尼兹	关于雅各布的解决方案
十一月二十六日 1691	莱布尼兹	胡格斯	报告 AE 的 压力 提交其解决方案
1691 年 5 月 5 日	胡格斯	莱布尼兹	封闭包装中的解决方案
1691 年 5 月	莱布尼兹	AE 编辑	提交他和 Huygens 的解决方案
1691 年 6 月	AE 编辑	—	出版三种解决方案
1691 年 7 月	莱布尼兹	胡格斯	发送他对各种提交的意见
1691 年 9 月	胡格斯	莱布尼兹	回复
九月 21, 1691	莱布尼兹	胡格斯	自我辩护反对普拉吉主义指控
十一月 16 日 1691	胡格斯	莱布尼兹	和解; 将研究新的无限计算深度

> 它也假设绳子保持相同的长度, 就像链条一样, 而不是像绳子一样伸展或交叉。这个问题, 由加利利奥提出和自他的时代以来著名的, 还没有达成解决方案。因此, 我应该正当道歉的负担, 特别是因为我非常吸引到其他事务。但是, 这个最被启示的人的人性是如此之大, 我不应该想错过他的第一次峰会。所以我攻击了 [问题] 这是我从未尝试过的, 而且我的钥匙 [二、差异计算] 幸福地开启了秘密的态度。然而, 这个问题比我的前一个更有兴趣, 表现出我们方法的某种独特使用; 所以我认为在发表我的解决方案之前, 值得给别人时间练习自己的技能。因此, 就像在利迪亚石上一样, 我们会知道最好的方法; 这对科学的改进带来了很多影响; 特别是因为这里不是一个复杂的计算问题, 而是艺术。首先, 最贵的 D。T。[查尔纳豪森县] 谁承诺这样的美妙事物, 应该被问到他是否愿意在这里尝试他的方法的力量。但是, 如果在年底之前没有人指示他找到了解决方案, 我会给我的, 上帝愿意。
>
> Leibniz, 1690 *“Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio”*

基本上,Leibniz 完成了两项重大修改:

- 他简化了 **函数** 以不可扩展的链条为主 (其它 **加泰罗尼亚**)
- 他设定了期限。(1690 年底) 他承诺, 如果没有其他人出现的话, 他会揭示他的解决方案。
- 他具体挑战了 Tschirnhaus 展示他的新数学方法。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

从此, 大多数参与者都专注于 **加泰罗尼亚** (不可扩展的链) 比雅各更普遍的 **函数** (扩展线) 问题。

9.2.3 三大解决方案

使用芯片 (加密解决方案) 在下面的交换中, 反映了数学发现的竞争性质以及设定优先事项的愿望, 同时允许同事时间解决问题。

9.2.3.1 约翰 • 伯诺利 (1690 年 12 月提交,1691 年 6 月发布)

与此同时, Bernoulli, Johann, 1691c 他还解决了凯特纳问题, 并于 1690 年 12 月直接向 AE 编辑发送了他的解决方案, 并为其解决方案的发布设立了一个条件: 他希望它同时出版与莱布尼兹的解决方案。约翰提交了他的解决方案, 直到莱布尼斯的期限结束, 但莱布尼兹没有发表他的分析; 相反, 他继续与海根斯的通信。

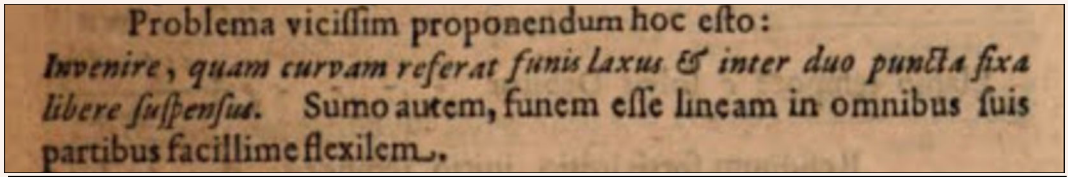
在 1691 年冬季和春季, 莱布尼兹和胡伊根斯之间的交往继续。在 1691 年 1 月 27 日向 Huygens 发送的一封信的邮件中,Leybniz 接受了 Huygens 的辅助曲线也可以用来地质建造大楼。他还提出了一种更有帮助的曲线, 这表明对代表凯特纳曲线有用。可用的许多选项, 一个辅助曲线代表的催眠必须说服 Huygens 这个问题不是很难解决。1691 年 2 月 23 日, 他写信给莱布尼兹:

> 我想还有很多其他地质学家会解决这个问题, 因为告诉你真相并不太难, 除了你要求比我发现的更多。
>
> Bernoulli, Johann, 1691b *"Letter to Leibniz"*

在 1691 年 3 月 2 日的信中, 莱布尼兹告知霍伊格斯, 约翰 • 伯诺利成功解决了这个问题, 并以他的计算可能有助于约翰的想法为荣。承认他提名 Tschirnhaus 的声音不仅令人要求, 而且也故意挑衅,Leibniz 还表示失望,Tschernhaus 不接受挑战:

> 先生 Tschirnhaus 没有咬, 尽管我故意以一种方式说话, 以便引导他进去, 让他有机会使用他的方法, 因为他曾向我们承诺会这么多。甚至间接地谴责我说, 在这些情况下, 普通分析是不够的。
>
> Leibniz, 1691d *"Letter to Huygens"*

1691 年 3 月 26 日,Huygens 在他的第一个芯片中发现了一块铅笔, 发送给 Leibniz 第二个, 这是第一个修正和延长的版本。Huygens 建议 Leibniz 可以传达这个第二个芯片给约翰, 并要求他换取他的。此外,Huygens 在 Tschirnhaus 的沉默中表达了惊喜, 尽管被 Leibniz 提名。忘记期限已经结束,Huygens 希望 Tschirnhaus 在


Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

Problema viciſſim proponendum hoc eſto:
Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus. Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem.

Let this be the problem to be proposed in turn:
To find what curve is represented by a loose rope suspended freely between two fixed points. I assume, moreover, that the rope is a line that is most easily flexible in all its parts.

图 9.5: 雅各布 • 伯诺利 **福尼克** 挑战 (Bernoulli, Jakob, 1690b, p. 219)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

剩下的时间里会出现一些东西。此外, 在这封信中,Huygens 对交换芯片的必要性发表了他的意见, 以确保优先事项和防止争议。

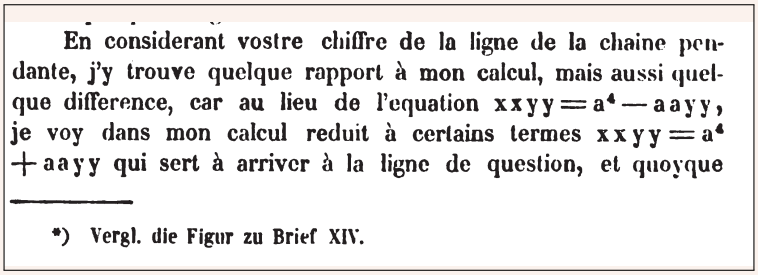
9.2.3.2 胡格斯 (提交于 1690 年 10 月, 发表于 1691 年 5 月)

初始的 CIPHER 解决方案 (1690 年 10 月) 雅各布的挑战对莱布尼兹改编版的第一回应是由他的前导师克里斯蒂安・休根斯 (Christiaan Huygens) 于 1690 年 10 月 9 日发表的。这次交换标志着两位巨人在大道上之间的延长通信的开始。在他的信中,Huygens 以西伯利亚形式封闭了他的解决方案, 指出他年轻时已经与 Mersenne 父亲相匹配。(§9.2.1.4) 在这个问题上, 他已经确定了一个挂链的曲线不是一个模范, 与加利利奥的假设相反。Huygens, 反过来, 期待 Leibniz 通过发送自己的解决方案在西伯利亚相互交换, 指出两者之间他们可以缩短期限。[10] 莱布尼兹提出了。他关闭的芯片包含了他对天体地质结构的产生曲线的方程式:

$$xxyy \propto a^4 - a^2y^2 \tag{9.4}$$

数学交流与改进 (1690 年 10 月 - 1691 年 3 月) 1690 年 10 月 13 日, 没有关闭任何芯片, 莱布尼兹回应 [11] 他发现了与他的计算和差异的一些相似之处, 图 9.6:

> 在考虑到你的数字, 我会发现某种关系到我的计算, 但也有一些差异, 汽车而不是平等。$xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcul reduit à certain termes $xxyy = a^4 + aayy$ 是的, 用来到达问题线, 既然这条线是超越者的数量, 我不会放弃 (首頁 〉 外文書 〉 Supposita ejus constructione) 不能只给受害者, 但是, 在曲线的尺寸上, 其旋转的固体表面和曲线和轴的包含空间的尺寸; 计算给了我这一切, 就像我自己一样。
>
> 考虑到你的挂链的芯片, 我发现一些同意我的计算, 但也有一些差异。而不是平衡。$x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$, 我到达, 当我的计算减少到某些条件时, 在 $x^2y^2 = a^4 + a^2y^2$ 用来达到所需曲线。雖然這個曲線是超越者之間的, 但我仍然能 (一旦建造的) 要提供不僅是曲線, 而且也是曲線本身的測量, 由其 转角 生成的固體表面, 以及由曲線和軸覆蓋的空間的 体积; 計算為我提供了這一切。正如他自己同意的那样。
>
> Leibniz, 1901 *"Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690"*



En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation xxyy = a⁴ — aayy, je voy dans mon calcul reduit à certains termes xxyy = a⁴ + aayy qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque

*) Vergl. die Figur zu Brief XIV.

图 9.6: Leibniz 回复 Huygens, Oct, 1690 (Leibniz, 1923)

Leibniz 指出的区别在于辅助曲线的方程式; 他声称, 他的计算表明:

$$xxyy \propto a^4 + a^2y^2 \tag{9.5}$$

由于没有示威被发送, 所以 Huygens 检查了他的计算, 并且无法找到任何错误, 并怀疑 Leibniz 的计算的准确性。(Alassi, 2020 pdf). 1690 年 11 月 18 日,Huygens 声称, 由于他们的结果之间的唯一差异是一个迹象, 它肯

[10] Huygens 最初误解了时间线, 认为 Leibniz 设定了比年底期限更长的时间。
[11] Huygens 和 Leibniz 以法语作为他们从 Leibnis 的巴黎时期的共同学术语言沟通。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定是由他们不同的方法引起的。[12]. 他再次坚持, 莱布尼兹向他发送完整的解决方案。(Leibniz, 1901, Vol. 9). 然而, 莱布尼兹一直保持沉默, 直到 1691 年 3 月 2 日, 他向胡伊根斯确认约翰 • 伯诺利也发现了自己的解决方案, 而无限数计算肯定应该帮助他。(Leibniz, 1901, Vol. 9).

Cipher 修正和最终提交 (1691 年 3 月至 5 月) 1691 年 3 月 26 日,Huygens 在他的第一张笔中发现了一块铅笔, 并发送给 Leibniz 一个修正和延长的版本。Huygens 建议 Leibniz 可以传达这个第二个芯片给约翰, 并要求他换取他的。此外,Huygens 在 Tschirnhaus 的沉默中表达了惊喜, 尽管被 Leibniz 提名。忘记期限已经结束,Huygens 希望 Tschirnhaus 在剩下的时间里会出现一些东西。在这封信中,Huygens 还表达了他对需要交换芯片的意见, 以确保优先事项和防止争议。

Huygens 写了 Leibniz 另外两封信, 坚持看到他的解决方案, 但 Leibniz 不同意 (Alassi, 2020). 最后,1691 年 5 月 5 日,Huygens 将其最终解决方案发送给 Leibniz 在封闭的封面上, 并写了一封信, 要求他的封闭解决方案传递给 AE。这一点标志着近八个月的通信和对凯特纳问题的方法的完善结束。

出版 (1691 年 6 月) 1691 年 6 月,Huygens 的解决方案与 Johann Bernoulli 和 Leibniz 的解决问题一起出版。*Acta Eruditorum* **编辑**代表了他与 1690 年 10 月至 1691 年 5 月的凯特纳挑战的延长承诺的高峰。

9.2.3.3 莱布尼兹; (提交于 1691 年 5 月, 发布于 1661 年 6 月)

1691 年冬季和春季, 莱布尼兹一直在与海格斯保持广泛的联系, 同时也开发了自己的系统方法来解决 cat 问题。他的解决方案, 最终发表为 “论柔性线在自重作用下弯成的曲线，以及它在求任意多个比例中项方面的重要用途 & 彩虹” (Leibniz, 1691a), 代表了三种解决方案最全面和理论上最深入的处理。

解析 使用差异计算的方法 莱布尼兹的方法模仿了他新开发的差异计算的力量。与 Huygens 的地质方法不同,Leibniz 将催眠视为一个纯粹的解析问题, 建立基于挂链的每个单元上运作的物理力量的差异方程式。他的方法始于基本原则, 即在每个点上, 链必须在平衡的力量下。紧张和重力.

考虑到连锁的无限数单元并应用力量平衡, 莱布尼兹得出特征性差异方程式的凯特纳里。他的系统使用差异性使他能够在问题的物理参数方面直接表达曲线协调之间的关系。

连接到 Logarithms 和 Hyperbolic Quadrature 也许最显著的是, 莱布尼兹认识到, 凯特纳问题基本上与超级球的四角形有关 - 基本上, 与逻辑功能。正如他在 1691 年 7 月 24 日写给 Huygens 的那样, 他发现两者都是催眠和其他过渡问题。“只需要建造超级球的四角形” 而他有 “把一切都缩小到洛加里特。

这个观点是革命性的。Leibniz 表明, 可用我们现在所承认的超波功能来表达催眠, 建立地质曲线与解析表达式之间的直接连接, 涉及曝光和逻辑。这种缩小为逻辑, 不仅提供了最优雅的数学描述, 而且也是数值计算的最实用的方法。

全面的数学治疗 Leibniz 的解决方案超越了只是找到曲线方程。他的论文展示了如何使用催眠器 “相似的媒体 & 彩虹” (找出任何数量的平均比例和逻辑), 展示曲线在解决其他数学问题的实用应用。他提供了方法:

- 在任何点上寻找帐篷的坦克
- 计算曲线的任何部分的弓长度
- 定位地点在天堂下方
- 计算表面面积和体积的坚固革命形成通过旋转大道

系统方法论 莱布尼兹的态度是它的系统性普遍性。虽然 Huygens 和 Johann Bernoulli 发现了对凯特纳问题的具体解决方案, 但 Leibniz 开发了一个全面的解析框架, 可以应用到整个类似问题的类型。他的方法提供了他所称的 “最好的所有可能的建筑, 对于超越者,” 建立差异计算作为解决这些问题的偏好工具。

莱布尼兹提出解决方案 *Acta Eruditorum* **编辑** 1691 年 5 月, 它出现在 6 月份的提议中, 与 Huygens 和 Johann Bernoulli 的解决方案一起, 完成了将卡特纳里作为对物理问题的计算应用的一个突出成就的解决方法的三位一体。

[12]在此交换中,Huygens 收到了这个名字。**催眠** (Leibniz, 1901, Vol. 9).

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9.2.3.4 出版和最终决议;1691 年 6 月

1691 年 3 月 21 日, Mencke 告知 Leibniz Jakob Bernoulli 的文章和其 **附加信息** *Ad Problem Funicularium*. 因为雅各布的文章会违反约翰的请求, 所以他们决定在同一个主题上发表它, 将包含解决问题的解决方案。1691 年 4 月 20 日, 莱布尼兹通知霍伊格斯, 他被 AE 的编辑迫使提交他的答案。莱布尼兹也解释了约翰的解决方案发布安排, 并证实他自己没有看到。他也拒绝向约翰询问一个芯片, 因为约翰直接将他的答案传递给 AE 的编辑, 并要求一个芯子可能引起了怀疑。他提醒说, 比赛的期限已经过去了很长时间, 他告知 Huygens 他很快将他的分析提交出版, 并敦促 Huygen 做同样的事情。Leibniz 保证 Huygens 的编辑们意识到 Huygen 早已解决了这个问题, 他们会以保密的方式处理他的解决方案。

1691 年 5 月 5 日,Huygens 在封闭的封面上向 Leibniz 发送了他的解决方案, 并写了一封信, 要求他的封闭解决方案被传递给 AE。与此同时, 莱布尼兹在 1691 年 5 月提出了自己的出版解决方案。1691 年 6 月,AE 发布了所有主要解决方案, 图 9.7, 以及描述订单和编辑收到的答案的日期的一张预告片。编辑把雅各布 • 伯诺利的文章放在三个解决方案后。



274 ACTA ERUDITORUM

SOLUTIO PROBLEMATIS FUNICULA-rii, exhibita a Johanne Bernoulli, Basil. Med. Cand.

ANnus fere est, cum inter sermocinandum cum Cl. Fratre mentio forte incidisset de Natura Curvæ, quam funis inter duo puncta fixa libere suspensus format. Mirabamur rem omnium oculis & ma-

(a) 约翰 • 伯诺利

MENSIS JUNII A. M DC XCI. 277

DE LINEA IN QUAM FLEXILE SE pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales & Logarithmos. Autore G. G. L.

PRoblema Linea Catenaria vel Funicularis duplicem usum habet; unum, ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quæ hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectu esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensione

(b) 莱布尼兹

CHRISTIANI HUGENII, DYNASTÆ IN Zulechem, solutio ejusdem Problematis.

SI Catena CVA suspensa sit ex filis FC, EA utrinque annexis, ac gra- TAB. VII. vitate carentibus, ita ut capita C & A sint pari altitudine, deturque Fig. 2. angulus inclinationis filorum productorum CGA, & catenæ totius positus, cujus vertex sit V, axis VB.

1. Liicebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata LH dividat æqualiter axem BV. Jam si angulus CGA sit 60, erit inclinanda a puncto A ad axem recta AJV, æqualis $\frac{2}{3}$ AB, cui ducta parellela LR, tanget curvam in puncto L. Item si latera GB, BA, AG sint partium 3, 4, 5, erit AIV ponenda partium $4\frac{1}{2}$.

(c) 胡格斯

SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I. DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam secent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c, ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales, ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam Wallisio & Barrovio considerari cœpta est; nec

(d) 雅各布 • 伯诺利

图 9.7: 1691 年 6 月 *ACTA* **埃鲁迪特** 解决雅各布 • 伯诺利 (Jacob Bernoulli) 的灾难挑战

9.2.3.5 出版后分析与遗产

一旦所有解决方案都被公布, 莱布尼兹给了胡伊格斯关于每个数学描述的相似性和差异的意见。1691 年 7 月 24 日向 Huygens 的一封信 (Leibniz, 1691c) 他提到约翰 • 伯诺利 (Johann Bernoulli) 使用他的新方法, 通过数学等级将问题减少到超球的四角形:

> 正如普通的纯方程只需开方即可求解，纯超越方程也可化为求和或求积。正如方程分析尚未臻于完善，我的方法也尚未完善到总能把所有超越问题化为单纯求积。不过，我已经开辟了这条道路，并取

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 得了相当进展。先生，您提出的两个问题起初都给出受约束的超越方程，但二者都可化为求积；我甚至发现，构造它们只需双曲线的求积。当我能把这些问题化为求积时，便认为已克服最大的困难。然而，要使这一方法臻于完善，还必须完成求积理论。
>
> 正如普通的纯方程式一样, 它是通过简单的根提取来解决的; 同样, 纯过渡方程被减少到金额或四分之一。正如对方程的分析尚未完美; 同样, 我还没有如此完美我的方法, 以至于我总是可以将所有这些超越问题减少到单独的四角形。然而, 我已经开启了道路, 甚至是相当先进的。另外, 你向我提出的两个问题, 先生, 即时给出一个受影响的超越方程式, 两者都可以减少到四分之一; 甚至我发现它们只需要建造超级球的四分之二。當我能把這些問題縮小到四角形時, 我相信我已經克服了最大的困難。但是, 为了完美这个方法, 也需要完成四方教义。
>
> Leibniz, 1691c *"Letter to Christiaan Huygens"*

莱布尼兹的计算的准确性使他怀疑其他人可能会欺骗他的方法。然而, 当这种怀疑出现了关于加泰罗尼亚解决方案时, 莱布尼兹在 1691 年 9 月 21 日的一封信中辩护自己, 声称《公证书》的编辑对约翰·伯诺利的贡献进行了严格的保密。除此之外, 莱布尼兹还指出 Huygens 犯下的各种错误。他曾在 1688 年 6 月的《文法》中发表了一篇文章, 称为"安古洛接触与奥斯库利"在那裡, 他將相关术语子降至弓的分數的合計; 他應該把 相关术语子的連結到超球的四角形。1691 年 11 月 16 日的一封信中,Huygens 的回应作为争议的和解。他表示, 他渴望深入研究新的无限计算, 最终了解催眠和超级球的四角形之间的关系。

尽管如此, 即使在解决雅各布·伯诺利的挑战之后, 胡伊根斯仍然支持他的地质方法与莱比尼兹的解析方法相匹配。这一点反映了数学方法学的世代过渡, 而 Huygens, 代表古老的地质传统, 渐进地来欣赏莱布尼齐亚计算的力量, 他仍然更舒服于他的技术。雖然 Huygens 最終學會在某些情況下應用新計算, 但他從未完全放棄了古典地質方法的偏好。解决卡特纳挑战标志着数学史上沉浸的时刻。莱布尼兹的解决方案作为对他的当代人, 尤其是胡格斯, 对无限计算的力量和有用性的强烈示威。通过这个解决方案, 他能够提出一个通用方法来找到机械曲线的数学描述 - 一种方法提供了一个系统的方式来处理涉及数学无限的问题。(Palomo, 2017), 建立差异计算作为主导的解析工具, 随后的几个世纪。

Huygens 的回应 (Huygens, 1888a) 直到 1691 年 9 月 1 日, 他承认他没有连接催眠室与超级球的四角形。显然, 他怀疑莱布尼兹和约翰·伯诺利可能在出版之前分享了他们的解决方案。*Acta Eruditorum* **编辑**. 这可以解释他们的程序之间的巨大相似之处, 正如他以不太可怜的声音向莱布尼兹表达的那样。尽管约翰·伯诺利承认, 超球的四角形可以用来绘制催眠, 但莱布尼兹走得更远, 把一切都缩小到逻辑中, 并这样做, 决定未来数学将如何发展:

> 我甚至在我的解决方案中添加了这个最后一个数字的重力中心, 即它的区域。M。Huyghens 通过假设下列四角形来提供曲线的建设: $xxyy = a^4 - aayy$ 而 M。约翰·伯诺利和我自己, 把卡特纳里与超级球的四角形有关; 这位最后一个是对一个偏见曲线的四方形的绝对正义使用, 而我的一部分, 我把一切都缩小到洛加里特。我以这种方式确定了对超越者的表达类型, 以及所有可能的构造中最好的。事实上, 你所需要知道的一切都是一个独特的恒定的比例, 这将使你能够发现无数点, 只使用普通地质学, 并且没有再需要四方或修正。
>
> Huygens, 1888a *"Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691"*

9.2.4 埃皮洛格

9.2.4.1 遗忘的统一

现代奖学金已经揭示了雅各布·伯诺利通过他的总体差异方程式衍生, 成功统一了凯特纳和弹性问题, 达到他在发行他的原始 1690 挑战时设定的目标。(Alassi, 2020). 这个令人惊叹的成就仍然埋在他的私人笔记本中,

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

并被他的当代人和后来的历史学家都未认可。尽管尼古拉斯 (I) 伯诺利 (图 6.16) 把这项工作纳入雅各的 **多种邮件** in 1744, (Bernoulli, 1744) 它的意义被忽略了。

雅各布的贡献被遗忘的性质显而易见, 当一个匿名数学家使用 LBC 的初始品在 1724 年 8 月的论文中恢复了卡特纳挑战时。*Acta Eruditorum* **编辑** (Anonymous, 1724). 这个新的表述呼吁分析那些链条 “适度灵活” 和 “真实的” 而不是理想化完美灵活的原始问题的链条。LBC 的挑战基本上改革了雅各布的更广泛的功能问题, 表明莱布尼兹的狭窄解释如何完全将雅各普的原始视觉转移到数学记忆中。

莱昂哈德 • 尤勒 (Leonhard Euler) 在 1728 年以一种解决方案来应对这个挑战, 这将能够从统一的方法中产生两种催化和弹性曲线。因此, 数学史学家传统上信托了尤勒, 而不是雅各布 • 伯诺利, 首先将这两个问题结合在一起　一个承诺超过雅各普的先驱工作超过三十年。(Alassi, 2020). 这个历史观察是数学发现失去科学记忆的最重要的案例之一, 仅仅在几年后独立重新发现。

9.2.4.2 数学遗产

1690 年至 1691 年间的灾难挑战被莱布尼兹、胡伊根斯和约翰 • 伯诺利胜利地解决, 但其智力复仇在解决方案在 Acta Eruditorum 中出现后很长时间继续。在 1692 年周围的安静中, 雅各布 • 伯诺利 (原来的挑战者) 无法解决自己的问题, 就开始了更深入的数学冥想。(Bernoulli, Jakob, 1677–1705). 在他的私人笔记本书《冥想》中工作, 他开始看到超越单一挂链的连接。凯特纳里亚不孤单: 它属于一个家庭, 其中包括维拉里亚。(航行曲线),Lintearia (线路曲线) 和弹性 (弹性曲线). 雅各布把这些作为统一的数学原则的表现, 开发了一般差异方程式, 统治了它们所有。这个隐私的洞察力, 几个世纪以来隐藏在他的笔记本电脑中, 预测了三十多年, 莱昂哈德 • 尤勒后来将成为变分法的角石。因此, 在数学竞争对手之间的争论中开始的加泰罗尼亚挑战发展成了一些更大的东西 - 一个窗口进入自然曲线的基础统一, 揭示了一个简单的挂链可以照亮从弹性射击到滑板的数学结构。

9.2.4.3 雅各的悖论

这个挑战介绍了数学最突出的讽刺之一: 杰科布 • 伯诺利 (Jakob Bernoulli), 他自信地提出了寻找挂链曲线的挑战, 成为他时代唯一的主要数学家无法解决自己的问题。雅各布 • 伯诺利没有为他提出的挂链问题提供解决方案, 这是他的弟弟约翰在一场有时可怕的竞争中经常提到的一点, 延续了雅各克于 1705 年去世。(Deakin, 2007; Alassi, 2020). 虽然莱布尼兹、胡金斯和最令人尴尬的是, 他的弟弟约翰在 1691 年 6 月出版了优雅的解决方案。*Acta Eruditorum* **编辑**雅各布保持着阴谋的沉默。雅各在数学的学生约翰, 以无形的相关术语语抓住了这个失败。

> 我的弟兄的努力是失败的; 我更幸运, 因为我发现了技能。(我说, 没有夸张, 为什么要隐藏真相?) 要把它全部解决。
>
> n.d. Jakob Bernoulli

雅各布所设计的挑战, 以展示新计算的力量, 而不是成为学生超越大师的公开表现。也许, 最令人震惊的是, 这只是他的隐私。**冥想** 笔记本 (Bernoulli, Jakob, 1677–1705) 远离公众的审查, 雅各布后来将深度了解曲线统一家庭。(Alassi, 2020) 就好像数学上帝把最深的秘密保留给自己失败的人。

有关分析细节，请参见 §30.3.3

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

9.3 灵活的挑战 (1690-1744)

9.3.1 雅各布 • 伯诺利的挑战 (1690)

上一篇: 与工人对话

在提交雅各布 • 伯诺利的庆祝弹性挑战之前, 值得休息一个小但揭示文本有时标记了他的 “与工人对话” (Bernoulli, Jakob, 1691)[13]. 在几段短篇中, 伯诺利与一位经验丰富的机械学家进行了虚构交换, 他从研讨会实践中描述了薄木条是如何弯曲的 - 粘贴的作用、坚固度的限制以及当丹尼尔负载被移除时不可避免的回归。伯诺利列出, 但轻微地挑战了这些规则的观察, 并建议 “成人数” 必须遵守一个精确的数学法则, 可以从第一原则中产生的, 而不是无限的实验。他结束了, 宣布一场完整的示威会随之而来, 有效地邀请学到的世界解决变量弹性问题很快就会出现。*Acta Eruditorum* 编辑 (1691 – 1694).

这个文学仪器是故意的。伯诺利的选择对话格式, 以加利利奥庆祝活动为标志 对话其在萨尔维亚蒂、萨格雷多和辛普利西奥之间充满活力的辩论, 已成为向学者和读者提出自然哲学的模型。§6.6.2 和 §6.6.2. 像伽利略一样, 伯诺利使用对话来戏剧化实验知识和数学抽象的相遇。

作品不包含任何方程式, 也不引入任何变分法; 它的价值在于从艺术直觉到严格理论的过渡。对于现代读者来说, 它作为技术来源而不是文化预言, 强调伯诺利与实用机械的参与, 承认可用的科学辩论的加利利传统, 并指出简化假设 - 无重量, 轻松。不可扩展的轮子 - 在其中他很快会提出他的著名挑战。

背景

直到 1690 年, 加利利奥、德卡特、马里奥特和其他自然哲学家的研究主要集中在强度问题上 - 破负载、应力分布和失败模式 - 将结构成员视为基本硬体。伯诺利的 1690 出版物将标志着材料力学中的深刻转变。而不是只问一个结构什么时候会失败, 他试图理解它如何弯曲和变形, 引入弹性的持续游戏进入机械学研究。

主纸

雅各布 • 伯诺利的文章 (Bernoulli, Jakob, 1690a)[14] 标题 *Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, &* 首頁 〉 外文書, 在分析史上占据了独特的位置 [15].

当时, 莱布尼兹的差异计算仍然处于童年时期, 其解决混凝土问题的能力必须向一个怀疑数学社区展示。在此出版物中, 伯诺利的贡献提供了这种表现。他将新方法应用到三个相互连接的问题:

旋律螺旋: 雅各布探讨了逻辑螺旋的特性, 计算了它们的弓长度、相关术语和区域, 并突出其令人震惊的自我类似性属性。更具体地说, 他表明从中心引导的射线在恒定的角度交叉螺旋, 而这些射线形成了相应的弓长度时的地质进展。

洛克索德罗姆 (拉姆布线): 面对一个领域的导航, 伯诺利分析了跨越所有梅里迪亚人的曲线在稳定的角落 - 船舶在持有稳定的交车时跟随路径。这些线路, 跟踪在球场上不断携带的混合物, 连接了计算机与导航和地图的实际需求。他开发了计算距离和长度差异的方法, 沿着这些路线。

[13] 从严格的科学角度来看, 这种对话对弹性数学不多。它的重要性在于展示一个领先的十七世纪数学家如何从一个实习工人那里寻找洞察力。不幸的是, 这种相互交流今天很少发生: 当代研究人员很少寻找熟练的工匠来启发解决问题或应用自己的理论进步。更多关于此交换的历史背景的详细信息可在 (Alassi, 2019).

[14] 现代奖学金 (Alassi, 2020) 它已经确定了附件和安格拉姆属于 1690 篇文章, 发表于同年 6 月。旧文学中 1691 的参考是错误的。

[15] 曲率的地质基础不熟悉的读者 - 包括奥斯卡循环、进化和坦根角度变化的概念 - 强烈鼓励首先咨询章节 8 这些基本概念从历史起源, 通过成熟的形式发展。所提出的材料是理解随之而来的弹性问题的机械表述的前提条件。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

三角形的区域: 他介绍了地质结构和分析公式, 以确定分支三角形的区域, 应用于天文学和地图。这项工作揭示了无限的方法如何与经典螺旋三角学相互作用。

这些主题之间的联系是方法学的, 而不是主题。每个问题都需要新开发的差异计算的精致应用: 逻辑螺旋描述了由差异关系定义曲线分析技术; 洛克索德罗姆分析涉及曲线表面上的细节集成; 区域三角工作将地质理性与分析计算相结合。这些数学工具自然地引导了伯诺利到弹性问题 - 另一个差异方程式挑战涉及曲线形状在物理限制下, 但需要开发尚未完全提出的变量方法。

基本上, 这篇论文展示了新计算在多元数学领域的力量和多样性, 高峰于其附件中宣布的苛刻的弹性问题。

附件中的挑战

1690 年, 雅各布在与莱布尼兹合作时, 他遇到了数学物理学中最重要的问题之一。

> Occasione Problematis funicularii moz in aliud non minus illustre delapsi sumus
>
> 當我們發生了 fun 子問題時, 我們很快就遇到了另一個不太明顯的問題。[问题]
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"*

> 借悬链线问题之机，我们转向另一个同样著名的问题，即梁、张弦拱或各种弹簧因自重、悬挂荷载或其他任意压缩力而产生的挠曲或曲率；著名的莱布尼茨也曾在差不多同一时期写给我的私人信件中适时指出这一方向。由于假设的不确定性和情形的多样性，这一问题似乎比前一个问题困难得多，尽管这里需要的不是冗长计算，而是技巧。我通过最简单情形的解（至少在前述伸长假设下）成功开启了问题的奥秘；不过，为仿效那位卓越人物并给他人留下尝试各自分析的空间，我暂且压下解答，以谜语将其隐藏，并将在秋季集市上公布钥匙与证明。
>
> 但是, 当我们在处理 Funicularia 问题时, 我们 [雅各布 • 伯诺利和莱布尼兹] 我遇到了另一个令人惊叹的问题。它是关于旋转或曲线的箭头, 拖动的尾巴, 或自愿的弹性带, 这是由自己的重量或挂重或任何其他旋转力量造成的。著名的先生 Leibniz 在一封信中将我的注意力转向这个问题。不管是因为 主条目: 信任区 假设或许多案例的多样性, 似乎比以前的问题更难解决。在这里, 需要一个精心计算而不是一个无聊的计算。幸运的是, 通过最简单的案例解决 (至少在上述假设下, 延伸是与扩展力量的比例。) 解决这个问题的门对我开放。作为最著名的男人 [莱布尼兹] 已经完成了, 我也会让其他人一些时间试图分析这个问题。因此, 我将暂时坚持这个解决方案, 并将其隐藏在一个 Logogogriph 中。在收获节期间, 我将公布解决方案和证据。
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"*

挑战, 发表在 *Acta Eruditorum* **编辑**, 有效地信号从固体的静态转向弹性曲线的数学理论。尽管牛顿在 1670 年代私人探索相关形状 (§8.2.2), 这是伯诺利的公共表述为该领域系统发展奠定了基础。

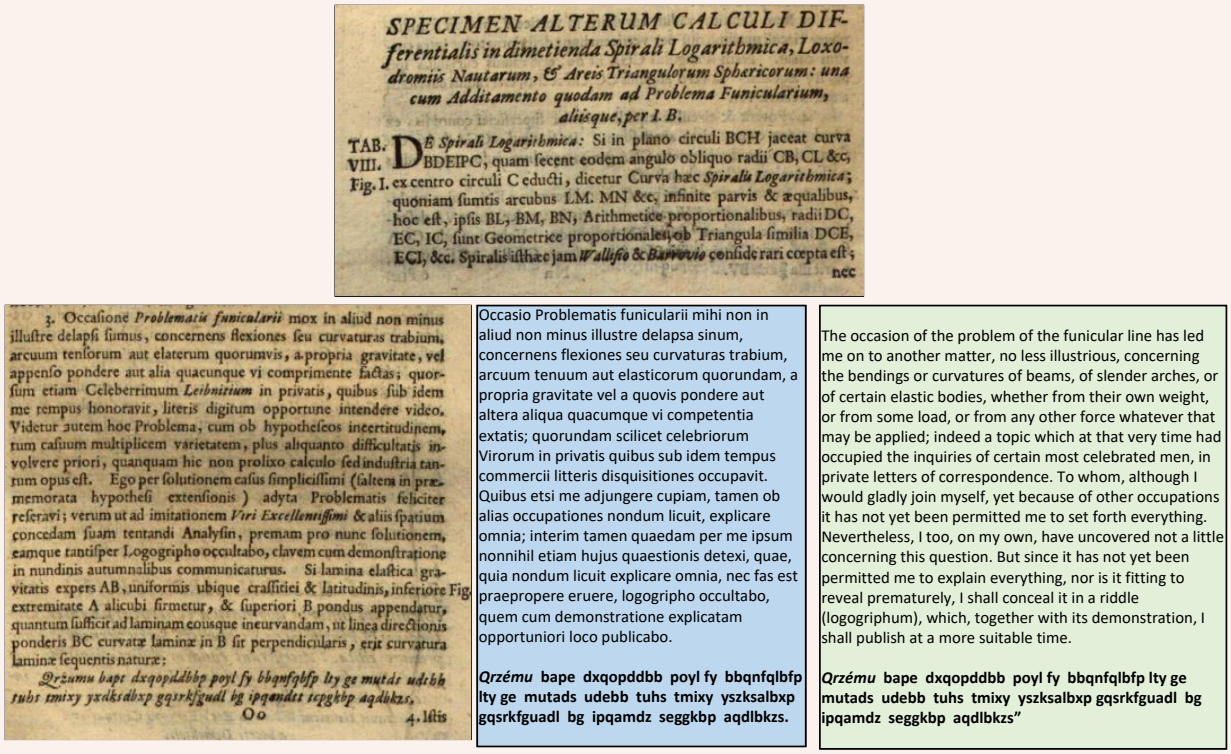
伯诺利采用了一种复杂的策略: 他宣布自己拥有一个解决方案, 他将隐藏在一个 **标志** (§6.11.1.1 桌子 6.6):

> Qrzumu bapt dxqopddbbp poylfy bbqnfqbfp ltyge murds udıbb tubstmixyyxdksdbxpgqsrkfgudl bg ipqandtt tcpgkbp aqdbkzs
>
> Bernoulli, Jakob, 1690a *"Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum"* • 标志

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

他承诺将揭示吉普赛和其解决方案的两者。巴塞罗那!收获节日 1690 年 10 月 [16]. 这种战略方法为多种目的服务: 它设定了他对发现的优先事项, 给了当代人时间独立尝试这个问题, 并允许他额外的时间来完善他的数学处理。



SPECIMEN ALTERUM CALCULI DIFferentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, per I. B.

TAB. VIII. Fig. I.

DE Spirali Logarithmica: Si in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam fecent eodem angulo obliquo radii CB, CL &c, ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc Spiralis Logarithmica; quoniam sumtis arcubus LM. MN &c, infinite parvis & æqualibus, hoc est, ipsis BL, BM, BN, Arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, sunt Geometrice proportionales; ob Triangula similia DCE, ECI, &c. Spiralis isthæc jam Wallisio & Barrovio conside rari cœpta est; nec

3. Occasione Problematis funicularii mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenuorum aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere aut alia quacunque vi comprimente factas; quorsum etiam Celeberrimum Leibnitium in privatis, quibus sub idem me rempus honoravit, literis digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum multiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori, quanquam hic non prolixo calculo sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi; verum ut ad imitationem Viri Excellentissimi & aliis spatium concedam suam tentandi Analysin, premam pro nunc solutionem, eamque tantisper Logogripho occultabo, clavem cum demonstratione in nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elastica gravitatis expers AB, uniformis ubique crassitiei & latitudinis, inferiore Fig extremitate A alicubi firmetur, & superiori B pondus appendatur, quantum sufficit ad laminam eousque incurvandam, ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B sit perpendicularis, erit curvatura laminæ sequentis naturæ:

Qrzumu bape dxqopddbbp poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutds udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdzs seggkbp aqdlbkzs.

Oo 4. Istis

Occasio Problematis funicularii mihi non in aliud non minus illustre delapsa sinum, concernens flexiones seu curvaturas trabium, arcuum tenuum aut elasticorum quorundam, a propria gravitate vel a quovis pondere aut altera aliqua quacumque vi competentia extatis; quorundam scilicet celebriorum Virorum in privatis quibus sub idem tempus commercii litteris disquisitiones occupavit. Quibus etsi me adjungere cupiam, tamen ob alias occupationes nondum licuit, explicare omnia; interim tamen quaedam per me ipsum nonnihil etiam hujus quaestionis detexi, quae, quia nondum licuit explicare omnia, nec fas est praepropere eruere, logogripho occultabo, quem cum demonstratione explicatam opportuniori loco publicabo.

Qrzému bape dxqopddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs.

The occasion of the problem of the funicular line has led me on to another matter, no less illustrious, concerning the bendings or curvatures of beams, of slender arches, or of certain elastic bodies, whether from their own weight, or from some load, or from any other force whatever that may be applied; indeed a topic which at that very time had occupied the inquiries of certain most celebrated men, in private letters of correspondence. To whom, although I would gladly join myself, yet because of other occupations it has not yet been permitted me to set forth everything. Nevertheless, I too, on my own, have uncovered not a little concerning this question. But since it has not yet been permitted me to explain everything, nor is it fitting to reveal prematurely, I shall conceal it in a riddle (logogriphum), which, together with its demonstration, I shall publish at a more suitable time.

Qrzému bape dxqopddbb poyl fy bbqnfqlbfp lty ge mutads udebb tuhs tmixy yszksalbxp gqsrkfguadl bg ipqamdz seggkbp aqdlbkzs"

图 9.8: 伯诺利的挑战 (Bernoulli, Jakob, 1690a)

到达 1690 年 10 月的期限时, 其他数学家没有提交任何解决方案。而不是立即揭示他的答案, 正如承诺的那样, 伯努利选择继续私人开发解决方案。到 1692 年, 他在私人科学日记中完成了对直角案例的分析。**冥想** *CLXX* 标题 *Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura* (一个曲线的四角形, 由它的进化追踪一个相关术语的曲线) (Bernoulli, Jakob, 1692).

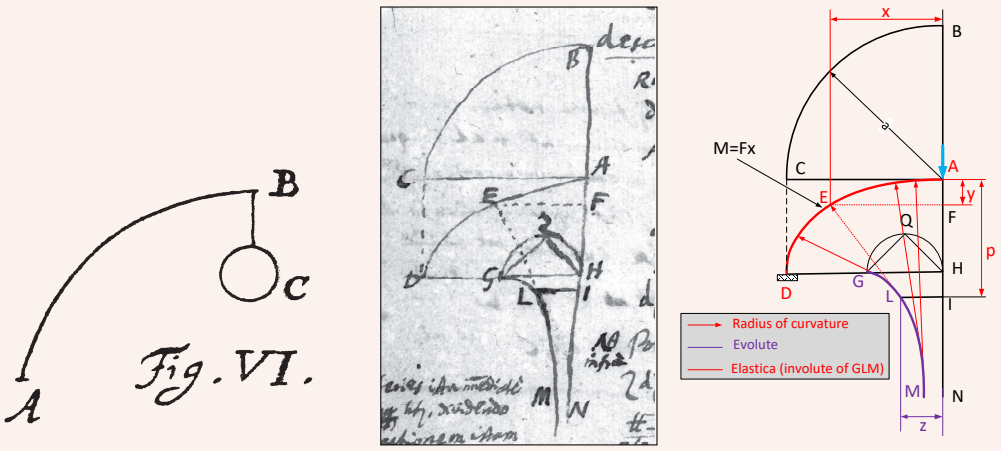
桌子 9.4 提供挑战答案的概述

9.3.2 解决方案

伯诺利本人通过一个安格拉姆提供了他在挑战中提到的解决方案。(有两种版本, 其中有). 胡格森立即回应, 讨论了伯诺利的解决方案。尤勒在 1732 年提供了一个地质解决方案, 随后是雅各布的孙子丹尼尔, 谁在 1742 年种植了种子的变量计算, 欧勒后来正式化于 1744 年, 图 9.10c.

[16]巴塞罗那 **春季** (收获公平)1471 年由帝国特权建立, 传统上始于 10 月的最后一个星期六, 持续两周。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 图片来源: 雅各布・伯诺利 (Bernoulli, Jakob, 1692)　(b) 现代重建 (基于 (Levien, 2008))

图 9.9: 雅各布・伯诺利的弹性

表 9.4: 以拉斯蒂卡挑战的时刻线

日期	事件
1690 年 6 月	雅各布・伯诺利提出弹性问题 **模型** *alterum* (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690	Bernoulli 在 Anagram 中编码解决方案 (标志) (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690 年 10 月	期限 (巴塞尔收获节日) 交付; 没有提交的解决方案。
1692	雅各布在私人完成解决方案 **冥想** CLXX (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
1694 年 6 月	雅各布出版 **曲线** *Laminae Elasticae* 用解码解决方案 (Bernoulli, 1694).
1694	Huygens 发布批评, 识别多种弹性配置 (Bernoulli, 1694).
1694	雅各布回应 Huygens, 捍卫他的方法的普遍性 (Bernoulli, 1694).
1696	约翰・伯诺利提出布拉希斯托克隆挑战 (Bernoulli, Johann, 1696).
1697 年 5 月	约翰发布使用光学类似的布拉希斯托克隆溶液 (Bernoulli, Johann, 1697a).
1724	匿名 (LBC) 挑战将问题扩展到适度灵活的线条 (Anonymous, 1724).
1728	丹尼尔・伯诺利 & Euler 发布统一的灵活 - 弹性线理论 (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1732	Euler 發表 **解决问题** 具有通用地质框架, 结合弹性和灵活曲线 (Euler, 1732).
1742 年 10 月	丹尼尔写信给欧勒提出能源减少原则 (**DanielBernoulli1742toEuler**).
1744	Euler 發表 **发明方法** 系统变量解决方案 (Euler, 1744b).
1744	雅各布的完整弹性工作编写在后家中 **奥姆尼亚歌剧** (Bernoulli, Johann, 1713).

9.3.2.1 雅各布・伯诺利的解决方案 (1694)

历史背景 伯诺利的解决方案, (Bernoulli, Jakob, 1694), 图 9.11 他的作品是基于他的 1691 字母的。*Acta Eruditorum* **编辑**它设定了优先事项, 同时隐藏了它的方法。解码的图表显示了后来揭示的准确地质关系, 而不是在某些文学中错误引用的反向旋转时刻/曲率法则。(§6.11.1.1).

> 沉默三年之后，我终于履行诺言；但为了补偿读者可能认为不公的延误，我将附加一些利息，因为弹性体的曲率并非只在一种情形下讨论，(首頁 〉外文書 〉文學 〉西洋文學) sed generaliter in quacunque

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 雅各布 • 伯诺利 (1655-1705)

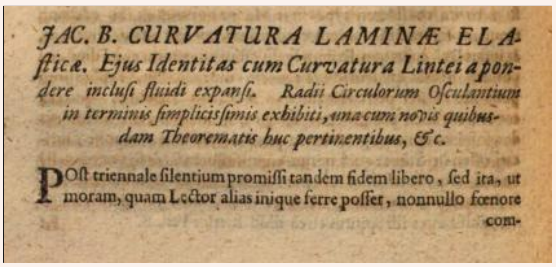


(b) 丹尼尔 • 伯诺利 (1700-1782)



(c) 莱昂哈德 • 尤勒 (1707-1783)

图 9.10: 弹性理论的建筑师: 巴塞罗那数学灯台 (维基百科)



JAC. B. CURVATURA LAMINÆ ELA-
ſticæ. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pon-
dere incluſi fluidi expanſi. Radii Circulorum Oſculantium
in terminis ſimpliciſſimis exhibiti, una cum novis quibus-
dam Theorematis huc pertinentibus, &c.

POſt triennale ſilentium promiſſi tandem fidem libero, ſed ita, ut
moram, quam Lector alias inique ferre poſſet, nonnullo fœnore
com-

JAC. B. CURVATURA LAMINAE ELASTICAE. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

Jakob Bernoulli. Curvature of the Elastic Lamina. Its Identity with the Curvature of Linen expanded by the weight of included fluid. Radii of Osculating Circles exhibited in the simplest terms, together with certain new theorems pertaining to this, etc

图 9.11: 雅各布 • 伯诺利的曲线 Laminae Elasticae (Bernoulli, Jakob, 1694)

Extensionum hypothesi constructam exhibeo... 这个问题早在伽利略时代便已著名；伽利略曾猜想这条曲线与悬索线一样是一条抛物线。

三年的沉默之后, 我终于履行了我的承诺, 但以显著的利益来补偿延迟, 并在一个情况下展示了弹性身体的曲率。(原来承诺的) 但是, 一般而言, 在任何扩展假设下.....
因为这个问题已经自加利利奥的时代以来已成为著名的, 他怀疑这种曲线, 就像凯特纳里一样, 是一种平凡。

Bernoulli, Jakob, 1694 *"Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus"*

伯诺利对加利利奥和其他人失败的企图提出了他的工作, 强调他取得解决问题的成就。"在任何扩展假设下"是一个一般框架而不是特殊案例。读者首先提到 §8.2.5 由 Bernoulli 的 曲率 衍生。

灵活性特征化

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[保持整个拉丁语和英语翻译, 就像你有它一样。]

Bernoulli, Jakob, 1694 "*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*" pg. 272

正确的

这代表了伯诺利对直角弹性的解决方案　一个特定的案例, 其中一端固定的弹性梁被重量包围, 直到负载端的坦根变成对力量方向的偏差。虽然不是所有弹性问题的完整解决方案, 但这项工作讲述了变分法的系统发展, 并提供了 17 世纪数学方法对超级问题的显著洞察力。

伯诺利的方法集中在一个复杂的地质结构, 将物理弹性问题转化为曲线生成问题。其方法可以如下总结:

1. 以一定的曲线开始 AFC 代表的 "紧张法"　应用力量之间的关系 AE 造成的紧张 EF
2. 建造四方圆圈 GKL 与曲线下的区域相同的区域 AFC
3. 每一个点 E 在基地上 AB 找到相应的紧张 EF 建造辅助曲线 AN 通过一个特定的地质程序
4. 弹性曲线 AQR 因此, 由此建造的交叉线产生。

关键的观点是, 伯诺利认识到弹性基本上与我们现在称之为精密集成物相关, 但通过地质修正而不是解析整合解决了它。

伯诺利将其关键地质关系列为:

Portio axis applicatam 接口 & 以此为主, 以此為主; 以此, 以之为主。

一般和坦根之间的轴的部分属于坦根本身, 因为普通的方位在某种恒定的区域。
Bernoulli, Jakob, 1694 "*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*" pg. 272

然而, 这个声明必须在伯诺利的具体地质框架内被理解。和 "Portio 轴" 它指的是它的构造中的一个特定的部分, 而不是现代术语中的单纯的字体。具体而言, 如果我们提到:

- Q 作为弹性曲线的点
- P 像普通人的脚一样, Q 到轴 AB
- p 如同在那时的坦克 Q 跨越轴

然后伯诺利的财产规定:

$$\frac{Pp}{Qp} = \frac{QP^2}{C}$$

哪里 C 它是与弯曲硬度和应用充电相关的恒久区域。

现代视野 从现代的角度来看 (1740 年代由 Euler 开发。), 弹性问题正在寻找曲线 $y(x)$ 以减少旋转能量:

$$I = \int_0^L \frac{\kappa^2}{2EI}\, ds$$

根据边界条件, 在 $\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ 是 曲率。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

和 Euler-Lagrange 方程式为此变量问题产生:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{(1+(y')^2)^{1/2}}\right) = \frac{P}{EI}$$

哪里 P 是应用的 荷载. 这导致了差异方程式:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\sin\theta$$

哪里 θ 它是坦根与水平的角度。这相当于一个 pendulum 的方程式, 并在其溶液中产生精密集成物　伯诺利通过他的地质方法遇到的同样的精密组成物。

超越自然的认可 伯诺利明确承认, 他的解决方案涉及过渡曲线。他指出, 弹性曲线 “不能由任何孔子部分的四角形构建” 它需要我们现在所理解的形状的精密一体:

$$s = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 - \sin^2\phi}}$$

他的地质方法通过曲线修复有效地实现了这一整合　根据 1694 年可用的数学工具, 这是一个令人惊叹的成就。

历史意义 这项工作代表数学的几个初步:

- 第一個解決一個特定的機械問題案例
- 早期系统处理将成为什么的精密功能理论
- 创始人工作在什么后来将被正式化为变分法
- 经典地质方法与新兴解析技术之间的桥梁

伯诺利对直角弹性的地质解决方案一直很重要, 直到尤勒在 1744 年使用变量的计算进行全面分析处理, 这解决了对任意边界条件的一般弹性问题。然而, 地质洞察力仍在提供有价值的直觉, 以了解基于弹性变形问题的深数学结构。

伯诺利对这个本质上超越的问题的纯地地质解决方案的优雅是 17 世纪数学天才最优秀的例子之一, 表明地质理能如何解开未来的几十年来不会直接攻击解析的问题。

连接到服装问题

[保持整个拉丁语和英语翻译, 就像你有它一样。]

Bernoulli, Jakob, 1694 “*Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus*” pg. 275-276

物理二元性 除了主要的弹性问题之外, 伯诺利发现了一个令人惊叹的物理双重性, 这表明了基于他的地质解决方案的深数学结构。他注意到, 同样的弹性曲线也描述了平衡的灵活膜或衣袋的形状, 充满液体并固定在两个点。

这种连接比数学好奇心更为明显　它揭示了两个物理上不同的系统。(硬 梁 在 荷载 下弯曲, 并包含 流体 的 灵活膜) 可以由相同的地质关系统治。这是一个早期的观察, 什么将成为数学物理学的一个基本原则: 不同的物理机制可以产生相同的数学描述, 当基础地质限制是相当的。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

物理平等 伯诺利的见解可以通过每个系统统治的平衡条件来理解:

以色列: 硬 梁 在应用负载下经历弯曲变形, 与 曲率 κ 与 弯矩 相比例 M 通过关系 $\kappa = M/(EI)$, 在哪里 EI 代表灵活性硬度。

流体 填充膜: 灵活且不可扩展的衣服含有液体在水静 压力 下, 当地 曲率 由膜紧张之间的平衡决定。T 和 压力 差异 Δp 在曲线界面上。

数学等级是因为两种系统满足曲率与力量分配之间的相同基本关系。(旋转时刻在粘膜中的弹性, 水静压力). 伯诺利的地质结构占据了这个共同的结构。

力量分析与关键关系 伯诺利的详细力量分析揭示了几个定量关系, 这两种物理实现与其地质平等相区分:

统一的紧张原则: 膜保持 **不断的紧张** T 其长度, 相当于关闭的 流体 的总重量。这与弹性梁相矛盾, 在那里 弯曲应力的长度不同, 最弱于自由端。(更接近点 R 在他的笔记中).

功率方向: 当膜突然从其限制中释放出来时, 产生的水静力量在角落行动。θ 到地平线, 在哪里 $\tan\theta = EF/Ei$ 在伯诺利的地质记录中。对于具体的直角案例, 整个衣服在一个正确的角度被排出。

强度大小: 膜的总水力强度与含有 流体 的绝对重量有关。$2:1$. 这一点源于在曲线膜表面上整合的压力水位分布。

平衡 轴位置: 平衡的轴通过一个由切割决定的点 Ao 从 AB 这样的那 $Ao:AB = 1:\sqrt{2}$. 显然, 这个轴是 **不** 通过终点的坦根线交叉 - 一个地质微妙, 伯诺利明确指出。

地质优化 伯诺利观察到一个令人震惊的极端属性: 在所有平等周边曲线中 (以色列曲线) 延伸相同的终点, 弹性曲线最大限度地将中心距离基线。这是一个早期的例子, 以色列的优化 - 问题将系统地解决在变分法十年后。

他用一个明确的类似性与凯特纳里, 指出 “令人惊叹的爱情” (**阿菲尼特米拉姆**) 兩對物理問題之間:

- 凯特纳 (挂链) 和 Velaria (航行曲线)
- 精力 (梁) 和 流体 填充膜曲线

在每对夫妇中, 一个问题涉及自我重量 (海洋, 海洋) 另一方面, 外部负载 (灵活性, 液化 压力) 然而, 数学结构表现出深刻的相似之处。

历史意义 这种双重性表明了伯诺利的深度物理直觉。他承认, 他的地质结构已经捕获了一些关于平衡状态的基本东西在连续介质力学中, 超越了弹性射线的具体背景。这一点完全通过地质合理化实现, 没有解析工具, 后来会使这些连接更加系统。

服装 - 弹性双重性预测机械和数学物理学的几个重要发展:

- **膜理论:** 数学框架分析薄, 灵活的结构在压力负载下, 系统地开发于 19 世纪
- **变量原则:** 不同物理系统可以分享常见的数学结构, 当它们尽量或最大限度相同时。功能性 (能量、行动等。)
- **物理类似:** 使用数学方程式将解决方案方法转移到不同物理领域之间, 这是 19 世纪数学物理学的中心技术。

伯诺利的认可这个双重性, 通过纯粹的地质理在 1694 年实现, 提供了理解为什么他的弹性解决方案仍然是问题的最终处理超过半个世纪。他的地质方法暗示地抓住了 Euler 后来通过变分法在 1744 年明确的变量结构。物理双重性作为实验证据, 他的数学方法已经确定了关于变形体的机械真正基本的东西。

9.3.2.1.1 反力 从 Huygen (1694)

克里斯蒂安 • 休根斯在伯诺利的解决方案出现之前也表达了怀疑。给莱布尼兹的一封信 16 日 11 月 1691 年, 他写道:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 我不能等到看到什么先生。伯诺利老年人将为春天的曲率生产。我没敢希望有人能在这里带来任何清晰或优雅的东西, 所以我从来没有尝试过。
>
> Huygens, 1691 Lettre à G.W. Leibniz

當伯諾利的 **拉米纳** *Elasticae* 1694 年 6 月出版,Huygens 迅速在同一期刊上发表了正式批评。(Fraser, 1991). 在与莱布尼兹的私人邮件中,Huygens 更注明:

> Mr. 伯诺利的三年的工作相当大, 只要他所提到的所有内容都是真实的; 他也很荣幸。至于春的原则, 我认为他已经利用了它, 并且是真实的, 测量曲率的辐射与春节的力量相反的比例, 尽管, 在我看来, 它不仅是外部表面, 而且内部也同时缩短。如果这个原则不是独一无二的和真实的, 而是线条 *AFC* 这是一个曲线, 依赖于无限的许多实验, 我应该发现他的所有研究非常虚假和不值得花费的时间。即使现在, 他所发现的一切似乎对我来说是毫无用处的, 但只有那种美丽而微妙的相关术语子, 当一个人没有什么可以更有成效地使用数学的时候。
>
> 这是一个奇怪的假设, 采取每个曲线的四角形作为给予的, 如果构建一个问题结束了这个 (除了圆圈和超球的四角形之外) 我应该认为没有什么是实现的, 因为即使机械上也不知道如何进行任何事情。先生 伯诺利确定了弓的曲率 *A* 只有在某些情况下, 当坦克在末尾 *E*, *F* 是平行的, 我认为连接的线条 *EF*. 它将继续给出真正的弓形状 *B* 又一次, 从 *C* 其端向彼此指向的; *D* 他们在哪里聚集在一起, 以及 *G* 他們在那裡越過, 並且被一群人抓住。*HI*.
>
> Huygens, 1694 Lettre à G.W. Leibniz

事实上,Huygens 以特征性的烦恼性反应, 考虑到伯诺利的解决方案的完整性。承认伯诺利的作品的数学复杂性, 胡伊根斯认为它只解决了一个特定的案例 - 他所称之为 “直角弹性” (曲线 A 在图中 9.12) 在那里, 弹性条形状大约形成一个正确的角度。根据方法准确性,Huygens 证明了多种弹性曲线配置是可能的, 取决于应用的力量和边界条件, 如 1694 图中所示, 描绘了各种弹性形状。(曲线 A 通过 G). 他说, 伯诺利的地质方法是不完整的, 因为它无法计算可能带有裂缝的情况。(曲线 C 和 D) 遭受更复杂的变形 (曲线 G) 或显示不同的终点方向。这种令人震惊的批评证明是显而易见的: 尤勒 1732 的地质解决方案处理了一些这些限制, 随后雅各布的孙子丹尼尔, 谁在 1742 种植了种子的变量计算, 埃勒后来正式化于 1744 年。最后, 提供所有可能的弹性配置的完整分类, 而 Huygens 的严格标准则要求。

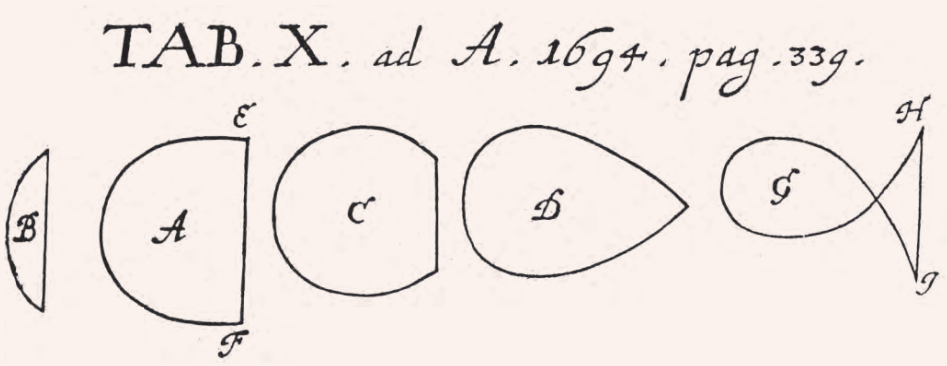


图 9.12: 1694 年,Huygens 反对伯诺利的解决方案。

伯诺利对这些批评表示慈悲。随后的笔记, 后来发表于 1694 年 (Bernoulli, 1694) 他解释说, 他的地质方法并

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

不局限于“直角”案例, 因为各种弹性形状可以通过选择不同的整合恒定而产生。他坚持他的解决方案是普遍和完整的, 同时慷慨地信任 Huygens 和 Leibniz, 以促进进一步澄清。

> 从我近年来发表的内容来看, 图形地质学家先生 胡格斯和先生 莱布尼兹被定义接受特别审查, 其中一些部分他们批准, 其他部分更隐藏在声明中, 他们增加了假设, 而在这里他们提出了争议, 并在那里他们表达了他们的公开分歧。我决定将一些后续的想法添加到前者中, 并以顺序和热情来解释我所看到的几个问题。因此, 为了满足那些最著名的人的愿望, 以及从隐藏的自然遗迹中越来越多地将真理的纯粹漏洞带入日光。
>
> 曲率的射线是相反的, 如伸展力量 (更真实的, 如延长) 这两位非常著名的人认为我已经用作一个开始, 从第一次发现的方程式中得到了学习, 而不是开始的结论。
>
> 如果先生 胡金斯对此感到一些怀疑, 认为不仅是外部表面扩展, 而且是内部合约, 他应该对先生提出了这种反对。Leibniz 不是我, 谁只接受了这个十年后从原则的作者。但我承认, 当我第一次想到这个问题时, 同样的反对就出现了, 因为任何可能延伸的东西也应该容易压缩。
>
> Bernoulli, 1694 “*Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae*”

9.3.2.1.2 介入

9.3.2.1.2.1 莱布尼兹 生活的 关于能源概念的进化 变量计算的发展, 在 17 世纪和 18 世纪没有对能量思维的概念进化进行思考, 就无法理解。这个进化的中心是 Gottfried Wilhelm Leibniz 的介绍 **生存** *VIVA* (字面上 “ “活力”), 一个概念, 将基本上重新理解机械哲学, 并提供概念基础以后以能源为基础的方法优化问题。

此部分为下一步发展奠定了丹尼尔 • 伯诺利的基础 (§9.3.2.1.2.4) 和 Euler (§9.3.2.2) 下面讨论。

1686 年: 莱布尼兹 生活的 (卡特西亚机械的挑战) 1686 年, 莱布尼兹出版 “布雷维斯: 错误的记忆卡特西” (德卡特的显著错误的简短示范) 在 *Acta Eruditorum* **编辑** (Leibniz, 1686a)[17], 基本上挑战卡特西亚机械。

雷内 • 德卡特 (René Descartes) 提出了保守原则。**哲学原则** (Descartes, 1644), 提出宇宙中的运动量 - 测量为尺寸总数 $\sum mv$ 通过神圣的保守而保持着永恒。与现代动机保守不同, 德卡特的表述忽略了方向性属性, 并依靠神学论点, 上帝是完美和不可改变的, 将保持同样的整体数量的运动他最初给予宇宙。

Leibniz 通过精心构建的思维实验, 针对了德卡特的冲突规则和其哲学基础的数学不足。他认为两个平等的身体弹性冲突, 一个移动, 一个休息。德卡特的规则预测, 总规模量 mv 要保留, 莱布尼兹证明了这种违反的实验观察, 并导致物理荒谬。更基本地说, 他表明, 德卡特的保守法则未能考虑到身体能够完成工作。一体从高度下跌 h 購買 速度 $v = \sqrt{2gh}$ 和能力升力另一个身体到相同的高度。这个能力 - Leibniz 所称的 **生存** *VIVA* 是相对的。mv^2 不是 mv.

通过这些例子, 莱布尼兹发现, 尽管德卡特确定了一个重要的保守原则, 但他错误地确定了保存量。相反,Leibniz 提出了真正的保存量是 **生存** *VIVA* 被定义为 $\sum mv^2$. 他说, 这 “活力” 代表一个身体产生效果的能力的真实尺寸, 即克服抵抗力、升力重量或压缩喷射的能力。与卡特西亚人不同 mv 即使在个人身体完全失去了运动时, 也可以保存。**生存** *VIVA* 捕获了在移动身体中内在的活力。

Leibniz 的术语反映了他的更广泛的哲学计划。他区分了 **莫尔图** (死亡力量), 代表静压或紧张, 以及 **生存** *VIVA* (活力) 代表动作的动态力量。这种区别体现了他对自然的理解, 而不是粒子之间的地质关系。

关于 Vis Viva 争议及其解决方案 Leibniz 的提议揭示了已被称为 “生活在争论中,” 这是一个热烈的辩论, 几十年来一直在欧洲自然哲学的主导地位。卡特西亚人捍卫动力保守 ($\sum mv$) 利比尼西亚人支持 VIS VIVA 保守 ($\sum mv^2$). 争论涉及许多领先的思想家, 包括伯诺利家族, 他们一般支持莱布尼齐派的立场。

[17] 全名: **布雷维斯: 错误的记忆 *C* 笛卡尔及其他人关于自然定律的观点, 依照该观点他们认为, *D* 自然始终保持相同的运动量; 这一观点在力学中也常被误用。** 德卡特和其他人对自然法则的可见错误, 他们希望上帝始终保持同样的动作量, 他们在机械事务中也滥用。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

莱布尼兹的 VIS VIVA 和现代动能之间的数学关系是简单的: mv^2 不同于我们的 $\frac{1}{2}mv^2$ 只有一半的恒定的因素。这种因素对保养论据毫无意义, 因为通过一个恒定的产量来增加保存的数量会使另一个保存的量变得更加多。重要的是莱布尼兹的观点 v^2 不是 v, 捕获运动与机械效应之间的基本关系。

直到 19 世纪才完全解决争议, 当时很明显, 动力和能量都代表着不同的保守原则。瞬间 (mv) 在所有相互作用中保持, 而动能 ($\frac{1}{2}mv^2$) 它仅在弹性碰撞中保存。两种量都证明是机械系统的理解至关重要的, 但在分析中有不同的用途。

从动态到潜力: 力量概念的扩展 Leibniz 的 vis viva 建立的概念框架对随后的发展表现出显而易见。如果有移动物体 "活力" 比例为 mv^2, 自然哲学家开始问, 在应力下的静态体是否可能有类似的 "潜在力量" 或存储的能力产生动作。

这种概念扩展证明对弹性系统的理解至关重要。压缩的春天或相关术语灯显然拥有在释放时产生运动的能力, 但这种能力不能用 Leibniz 的原始 Viva 来描述, 它仅适用于已经移动的身体。数学界逐渐发展了这种观念, 即弹性变形存储了一种潜在的 Visa, 可以在释放时将其转换为动态 Visa。

在 1740 年代, 像丹尼尔 • 伯诺利这样的精致思想家使用了类似的术语。"生命潜力" 描述此存储容量。这代表了莱布尼兹的原始动态焦点和我们现在认识到的势能之间的概念桥梁。数学形式 $\int \frac{ds}{R^2}$ 丹尼尔提出的 弹性能量代表了莱布尼齐亚思想的自然延伸到变形和限制问题。

Vis Viva 和现代能源概念 18 世纪 VIVA 概念与现代能源术语之间的关系可以如下总结:

- **莱布尼兹的 VIS VIVA** (mv^2) = 现代 动能 ($\frac{1}{2}mv^2$) 只因一个恒定的因素而有所不同。
- **生活潜力** 现代 势能, 代表存储的运动能力
- **全景 VIS VIVA** 现代全机能 (基因 + 潜力)
- **莫尔图** = 静态力量和压力, 类似于强制概念在现代静态

从 Vis viva 到现代能量思维的概念进化需要几个关键的洞察力, 在 18 世纪逐渐出现。首先,VIS VIVA 的认可可以存储在扭曲的弹性系统和重力配置中。二、理解, 完全的生命 (基因 + 潜力) 在许多机械系统中保持稳定。第三, 数学计算 Visa 的技术在复杂系统中涉及限制和不同力量。

对变量计算的影响 vis viva 框架在多种方式证明对变量计算的发展至关重要。首先, 它提供了物理上有意义的量, 可以优化 - 系统自然发展, 以尽量减少潜在的 VIS VIVA 或保存总 VISVIVA。其次, 它提供了一个统一的视野, 可以通过能源考虑而不是力量分析来解决各种机械问题。第三, 它建立了数学前例与四方形状工作 (v^2, κ^2) 这将是对变量功能的中心。

后来，丹尼尔 • 伯努利以 "vis viva potentialis" 表述其弹性能原理（§9.3.2.1.2.4），把一个成熟的概念框架推广到新的领域。他认识到弹性平衡对应于势活力的最小值，这是莱布尼茨思想在优化问题中的自然应用。这个概念基础对欧拉随后把变分方法数学化和系统化（§9.3.2.2）至关重要。

vis viva 的历史重要性超越了它作为现代能源概念的先驱作用。它代表了从地质学到动态思维在机械学的根本转变 - 从自然视为根据地质法则移动粒子的集合, 以理解它作为力量和能量转型的网络。这种视野的转变证明对数学革命至关重要, 这使得系统性变量计算能够实现。

9.3.2.1.2.2 布拉希斯托克隆挑战 (1696)

17 世纪末的数学社区被强烈的智力竞争所特征, 领先的数學家定期提出挑戰性的問題, 以考試彼此的方法, 並建立他們的聲譽。其中最突出的竞争对手是伯诺利兄弟, 雅各布和约翰。(§6.6.9), 其专业关系结合了合作与竞争, 因为他们推出了新开发的差异计算的边界。

两兄弟都为数学做出了重大贡献: 雅各布通过他对无限序列和概率理论的工作, 约翰通过他在差异计算和机械方面的技术的发展。他们的关系是复杂的, 标志着相互尊重彼此的能力, 以及专业竞争, 以获得他们一代的领先数学家认可。这种竞争动态在这一关键时期将证明是推动数学创新至关重要的, 特别是因为欧洲大陆数学家在新兴的莱布尼兹 - 纽顿优先争端期间试图展示他们的计算方法的优势。

约翰开始了他的论文, 在这个时代的主要数学杂志上。*Acta Eruditorum* 编辑以勇敢的宣言, 关于差异计算的转型力量 (Bernoulli, Johann, 1696 PDF):

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 自各种无穷方法兴起以来，几何学取得了多大进展，可由无数发明加以证明；其中微分学无可争议地居于首位。坦率地说，即使不谈前代，这些成果在我们这个时代也曾被视为无望……
>
> ---
>
> 自从无限的各种方法变得明显以来, 地质学取得了多大进展　其中差异计算将以没有人为基础而占据第一位　一千个发现的例子证明。这些发现, 如果允许说出真相, 在我们这个时代仍然被认为是绝望的。(没有说过以前的时刻)..."
>
> Bernoulli, Johann, 1696 *"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur"*

写在拉丁语, 当时的学术语言法语, 约翰系统地讨论了几个数学主题, 证明了这些新解析方法的力量:

1. 批评卡特西亚地质学的限制
2. 循环属性和通用化
3. 超级特性
4. 地质建筑问题
5. 关于 Leibniz 和 Tschirnhaus 的评论
6. 表面问题

经过对传统地质方法的差异计算的优越性进行方法定义后, 伯诺利将他的处理与他最著名和影响力的贡献结束。和 布拉希斯托克隆问题看起来几乎是一个最终的挑战 - 即将基本上重新探索数学景观的一个问题, 图 9.13:

> 問題 novum ad cujus 解决 Mathematici invitantur。
>
> 在竖直平面内给定两点 A 和 B（见图 5），求运动质点 M 的路径 AMB，使其在重力作用下从 A 点由静止开始下降，并在最短时间内到达 B 点。
>
> Ut harum rerum 爱好者 & 为了使人们更愿意尝试这个问题，应当知道它并非表面看来的纯粹思辨，也绝非毫无用途；事实上，它不仅在力学中，而且在其他科学中也有重大用途，虽令人难以置信。临时 (以便预先回应某些人的草率判断，) 虽然直线 AB 是端点 A & 与 B 之间的最短路线，却不是下降时间最短的路线；后者是几何学家熟知的曲线 AMB。若今年结束前无人命名它，我将为它命名。
>
> ---
>
> 这是一个新的问题, 其中数学家被邀请解决。
> 在垂直平面上有两个 A 和 B 点。(查看 图 5) 要把它交给一个移动 [粒子] M 是 AMB 的路径, 沿着它的重力下降并从 A 点开始移动, 它可能在最短的时间内到达另一个 B 点。
> 因此, 以便这些事物的爱好者被鼓励和带有更有利的精神来试图这个问题, 让他们知道它不只是猜测, 因为它实际上看起来, 好像它没有用; 因为它拥有最伟大的。[应用] 甚至在其他科学, 而不是机械学, 没有人会轻易相信。同时 (以便我肯定会忽视某些人的急性判断。) 虽然 AB 直线是 A 和 B 终点之间最短的, 但它在最短的时间内没有经过; 但是有一个非常熟悉地质学家的 AMB 曲线, 我将命名。如果到今年年底, 没有人会把它称为
>
> Bernoulli, Johann, 1696 *"Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur"*

挑战及其数学意义 布拉希斯托克隆问题 [18]1696 年由约翰 • 伯诺利提出为数学界的一个公开挑战, 他问: 考虑到不同高度的两个点, 它们连接的曲线是什么, 其中一个粒子在重力下滑动。(从休息开始) 要在最短的时间内旅行吗? 这个令人欺骗的简单问题隐藏了深刻的数学复杂性, 因为它不是寻找一个数字或函数来优化某种数量, 而是整个数字。**曲线**一个由无限数点定义的地质对象。

[18]术语 "布拉希斯托克朗" (从希腊 **布拉希斯**最短的, 和 **时间**, 时间) 由约翰 • 伯诺利自己提出, 当他在 1696 年对数学社区提出这个问题时。这个问题需要一个粒子从一个点向另一个滑动的曲线, 在最短的时间内只有重力。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

问题的革命性质在于它需要优化所有可能曲线的空间, 而不仅仅是真实数字或终端尺寸参数的空间。这是一个根本不同于 17 世纪数学主导的算法优化问题的数学挑战。在传统的优化寻找能最大限度或最小限度功能的变量值的情况下, 布拉希斯托克隆问题需要找到能优化集体的功能本身　我们现在所认识的功能优化。

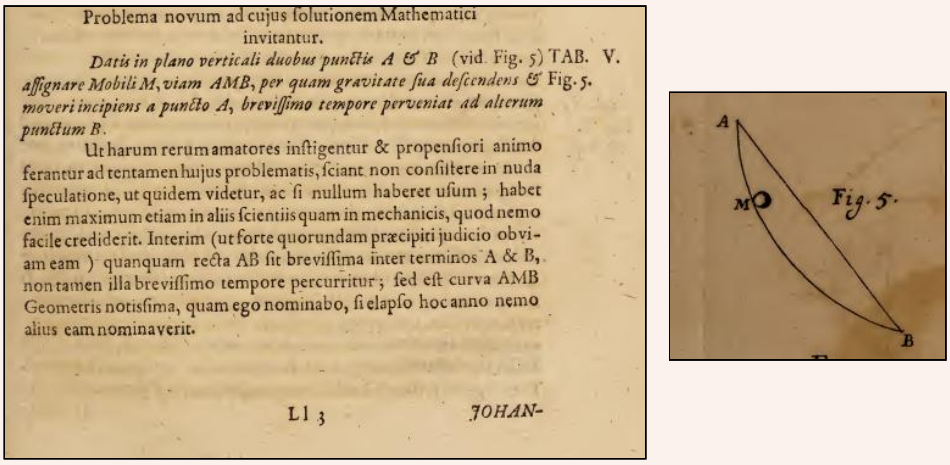
问题的欺骗性简单性掩盖了深刻的物理洞察力。虽然直觉可能表明最短的路径 (一条直线) 也将是最快的, 约翰的洞察力, 基于加利利奥以前对坠落的尸体进行调查, 承认粒子可以通过最初降落更紧地获得速度, 即使这意味着旅行更长的距离。这个原则后来会发现深刻的联系 法尔马特在光学中最少时间的原则, 建立了对物理学至关重要的优化原则。

这个问题吸引了当时最著名的数学家, 包括伊萨克 • 纽顿、戈特弗里德 • 莱布尼兹、吉拉姆 • 德。醫院與雅各布 • 伯諾利 每位数学家都采用不同的技术来接近这个挑战, 这表明了可用的数学方法的多样性以及对这种优化问题需要更有系统的方法。纽顿在皇家硬币的职务中回归后, 在一个晚上就以名为解决了这个问题, 并匿名提交了他的解决方案。虽然流行的传说声称, 伯诺利立即承认纽顿的作者权, 并表示他可以 **用他的相关术语子识别狮子**, 这个彩色的引用似乎是一个后来的历史化, 而不是记录的事实。竞争表明, 虽然个人问题可以通过天才的方法解决, 但数学社区缺乏处理功能优化的一般框架。

根据莱布尼兹的建议, 伯诺利战略地延长了挑战到 1697 年复活节通过印刷的一张名为“计划”的宽板, 发表在格罗宁根。1697 年 1 月 1 日在格雷戈里亚日历中, 这个更伟大的版本开始了一个直接挑战数学精英。(Bernoulli, Johann, 1697b):

> 我, 约翰 • 伯诺利, 谈论世界上最辉煌的数学家。对于聪明的人来说, 没有什么比一个诚实而挑战性的问题更有吸引力, 其可能的解决方案将使人闻名并保持为永久的纪念碑。
>
> Bernoulli, Johann, 1697b Programma [extending the brachistochrone challenge]

布拉希斯托克隆问题在数学中标志着一个沉水的时刻, 确定了什么将被称为变分法. 解决方案 - 最佳曲线是循环 - 在莱布尼兹 - 纽顿优先争议中, 在关键时刻展示了欧洲大陆解析方法的力量。更深入地说, 解决问题建立了乐观化原则, 后来在拉格兰机械中蓬勃发展, 布拉希斯托克隆作为自然界似乎如何遵循优化一定数量的路径的模范。这一原则最终会为理论物理学中最基本的知识做出贡献, 从最少行动的原则到现代领域理论。


Problema novum ad cujus ſolutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) TAB. V. *aſſignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate ſua deſcendens & moveri incipiens a puncto A, breviſſimo tempore perveniat ad alterum punctum B.*

Ut harum rerum amatores inſtigentur & propenſiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, ſciant non conſiſtere in nuda ſpeculatione, ut quidem videtur, ac ſi nullum haberet uſum; habet enim maximum etiam in aliis ſcientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB ſit breviſſima inter terminos A & B, non tamen illa breviſſimo tempore percurritur; ſed eſt curva AMB Geometris notiſſima, quam ego nominabo, ſi elapſo hoc anno nemo alius eam nominaverit.

L l 3 JOHAN-

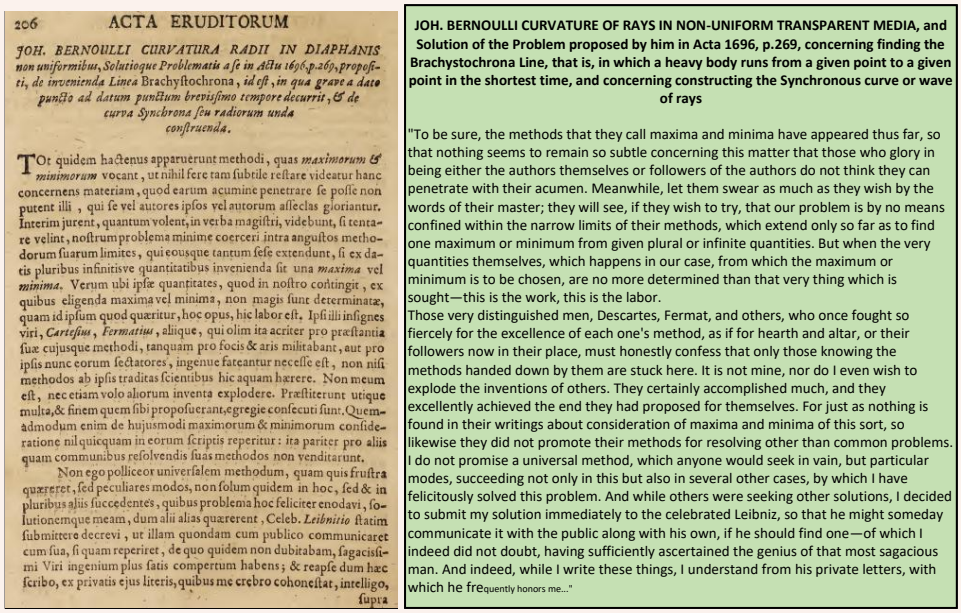
Fig. 5.

图 9.13: 约翰 • 伯诺利的布拉希斯托克隆挑战 (Bernoulli, Johann, 1696)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9.3.2.1.2.3 约翰・伯诺利的解决方案 (1697) 约翰・伯努利 1697 年的论文 **非均匀透明介质中的光线曲率：最速降线问题的解答** [19] (Bernoulli, Johann, 1697a) 产生于这一竞争环境，是数学史上的分水岭。该文于 1697 年 5 月发表于 *Acta Eruditorum*，对后来被视为变分法奠基问题的课题给出了巧妙解答。论文为涉及泛函而非普通函数的优化问题确立了数学先例；这一概念飞跃直到欧拉 1744 年的巨著才得到完整系统化。

但让我们从第一页开始, 图 9.14 这个令人惊叹的开幕式揭示了约翰・伯诺利的急性意识, 他正在面对一个根



206 ACTA ERUDITORUM

JOH. BERNOULLI CURVATURA RADII IN DIAPHANIS non uniformibus, Solutioque Problematis a se in Actu 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, & de curva Synchrona seu radiorum unda construenda.

TOt quidem hactenus apparuerunt methodi, quas *maximorum & minimorum* vocant, ut nihil fere tam subtile restare videatur hanc concernens materiam, quod earum acumine penetrare se posse non putent illi, qui se vel autores ipsos vel autorum assecias gloriantur. Interim jurent, quantum volent, in verba magistri, videbunt, si tentare velint, nostrum problema minime coerceri intra angustos methodorum suarum limites, qui eousque tantum sese extendunt, si ex datis pluribus infinitisve quantitatibus invenienda sit una *maxima* vel *minima*. Verum ubi ipsæ quantitates, quod in nostro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis sunt determinatæ, quam id ipsum quod quæritur, hoc opus, hic labor est. Ipsi illi insignes viri, *Cartesius*, *Fermatius*, aliique, qui olim ita acriter pro præstantia suæ cujusque methodi, tanquam pro focis & aris militabant, aut pro ipsis nunc eorum sectatores, ingenue fateantur necesse est, non nisi methodos ab ipsis traditas scientibus hic aquam hærere. Non meum est, nec etiam volo aliorum inventa explodere. Præstiterunt utique multa, & finem quem sibi proposuerant, egregie consecuti sunt. Quemadmodum enim de hujusmodi maximorum & minimorum consideratione nil quicquam in eorum scriptis reperitur: ita pariter pro aliis quam communibus resolvendis suas methodos non venditarunt.

Non ego polliceor universalem methodum, quam quis frustra quæreret, sed peculiares modos, non solum quidem in hoc, sed & in pluribus aliis succedentes, quibus problema hoc feliciter enodavi, solutionemque meam, dum alii alias quærerent, Celeb. *Leibnitio* statim submittere decrevi, ut illam quondam cum publico communicaret cum sua, si quam reperiret, de quo quidem non dubitabam, sagacissimi Viri ingenium plus satis compertum habens; & reapse dum hæc scribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro cohonestat, intelligo, supra

JOH. BERNOULLI CURVATURE OF RAYS IN NON-UNIFORM TRANSPARENT MEDIA, and Solution of the Problem proposed by him in Acta 1696, p.269, concerning finding the Brachystochrona Line, that is, in which a heavy body runs from a given point to a given point in the shortest time, and concerning constructing the Synchronous curve or wave of rays

"To be sure, the methods that they call maxima and minima have appeared thus far, so that nothing seems to remain so subtle concerning this matter that those who glory in being either the authors themselves or followers of the authors do not think they can penetrate with their acumen. Meanwhile, let them swear as much as they wish by the words of their master; they will see, if they wish to try, that our problem is by no means confined within the narrow limits of their methods, which extend only so far as to find one maximum or minimum from given plural or infinite quantities. But when the very quantities themselves, which happens in our case, from which the maximum or minimum is to be chosen, are no more determined than that very thing which is sought—this is the work, this is the labor.
Those very distinguished men, Descartes, Fermat, and others, who once fought so fiercely for the excellence of each one's method, as if for hearth and altar, or their followers now in their place, must honestly confess that only those knowing the methods handed down by them are stuck here. It is not mine, nor do I even wish to explode the inventions of others. They certainly accomplished much, and they excellently achieved the end they had proposed for themselves. For just as nothing is found in their writings about consideration of maxima and minima of this sort, so likewise they did not promote their methods for resolving other than common problems. I do not promise a universal method, which anyone would seek in vain, but particular modes, succeeding not only in this but also in several other cases, by which I have felicitously solved this problem. And while others were seeking other solutions, I decided to submit my solution immediately to the celebrated Leibniz, so that he might someday communicate it with the public along with his own, if he should find one—of which I indeed did not doubt, having sufficiently ascertained the genius of that most sagacious man. And indeed, while I write these things, I understand from his private letters, with which he fre

图 9.14: 约翰・伯诺利 (Johann Bernoulli)1697 年解决布拉希斯托克罗恩挑战 (Bernoulli, Johann, 1697a)

本上新的数学问题。其在传统优化之间的区别 - 寻找 “其中一个最大或最少的多元或无限数量 “和布拉希斯托克隆挑战, 在 “数量本身..... 不是比所寻求的東西更有決定性,” 它正是从终端维度到无限维度优化的概念跳跃。约翰承认, 德卡特、费尔马特和他们的追随者的现有方法可以解决搜索空间定义的问题, 但当优化本身不得不确定不仅最佳值, 而且最佳功能时却失败。这一洞察力表明了 1697 年的数学复杂性, 几十年来预测了参数优化与功能优化之间的正式区别, 这将成为变量计算的中心。

这段经文也照亮了 17 世纪末数学的知识文化和竞争动态。约翰对他的先知的批评 - 那些 “以主人的言语发誓。” 找到自己 “停留” 面对新的挑战, 反映了他对他的创新方法的信心以及这个时代的激烈数学竞争。然而, 他同时承认, 这些早期数学家 “much 取得了很多” 他的对莱布尼兹的偏见声音揭示了数学进展, 无论是协作还是竞争性的清晰理解。他的谦虚的拒绝, 他只提供 “特殊模式” 而不是 “普遍方法” 他的光学类似性, 而布拉希斯托克隆的辉煌性, 实际上需要系统的普遍化, 即在接下来的几十年中会出现。[20].

[19] 全题：**非均匀透明介质中的光线曲率，以及他在《学报》*1696* 年第 *269* 页所提出问题的解答：求最速降线，即重物从给定点到另一给定点以最短时间下落的曲线，并构造同步曲线或光线波。**

[20] 约翰的批评学者谁 “以主人的言语发誓。” 抵抗超越已设立方法的界限的问题, 与当代学术动态相反。这种态度在历史上强加了坚持已建立的范式, 从亚里士多德自然哲学的抵抗到数学动作描述, 最终将归功于伽利略和纽顿机械, 到更新的例子。现代结构工程师有时发现自己受到方法传统的限制, 当面对问题如进步崩溃分析或非线性动态行为的结构在极端负载下。广泛依赖于线性弹性分析和简化梁-柱模型, 虽然计算效率高, 并且稳定良好, 证明不足以理解世界贸易中心崩溃等事件中观察到的复杂失败机制。(National Institute of Standards and Technology (NIST), 2005) 需要开发新的最终单元方法和多层次模型技术, 挑战了传统设计哲学。对方审

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

布拉希斯托克隆的挑战吸引了当代最著名的数学家, 包括伊萨克·纽顿、戈特弗里德·莱布尼兹、吉拉姆医院和雅各布·伯诺利的解决方案。每个人都使用不同的技术来解决这个问题, 但约翰的解决方案因其新方法和深入的物理洞察力而表现得特别有影响力。

约翰·伯诺利的光学分析与解决方法 约翰·伯诺利的解决方案展示了与数学天才相结合的美妙物理洞察力。无法依靠系统变量方法 (尚未存在的) 他采用了一个优雅的光学类似, 基于费尔马特的最短时间原则。他的关键洞察力是将重力领域视为一个分裂的中间, 在那里 "反射指数" 它与高度不同, 从而将机械问题转化为光学问题。

数学表述将旅行时间视为 $\int \frac{ds}{v(y)}$, 在哪里 $v(y) = \sqrt{2gy}$ 代表粒子的 速度 在高度 y. 通过应用 斯内尔的反射法则, 考虑到粒子的增加速度随着它下降, 约翰证明, 最佳路径必须是 **循环**—曲线由一个点跟踪在圆圈旋转沿着直线的边缘。约翰立即承认了这一令人惊叹的结果, 并指出 "hanc ipsissimam Cycloidem seu tautochronam Hugenianan, esse nostram Brachystochronam quaesitam" (这个非常相同的西克洛伊德或胡吉恩斯的塔托克隆曲线是我们所寻求的布拉希斯托克罗纳。). 这个解决方案揭示了对直觉的深度结果, 即最快降落的路径不是最短的距离。(一条直线) 不是最尖锐的初始降落, 而是最佳平衡快速初始加速度与总路径长度的曲线。

约翰的方法的数学优雅在于他承认, 从光学转移到机械学的优化原则, 预测其 最少的行动原则, 后来将成为理论物理学的基础。然而, 他的方法虽然是天才的, 但仍然是问题特定的, 缺乏一般性需要系统地处理其他变化的问题。这个解决方案是辉煌的, 但不容易普遍化　一个限制, 这将激励更有系统的方法的发展。

数学限制与一般方法的需要 尽管它的概念突破, 约翰的 1697 解决方案揭示了 18 世纪初数学家在处理涉及曲线的优化问题时面临的数学限制。他的光学类似性, 虽然成功的布拉希斯托克隆, 没有提供系统框架攻击其他变量问题。每个新的优化问题涉及功能将需要自己的天才方法, 使领域比系统科学更多的艺术。

这种方法差距变得越来越明显, 因为数学家面临额外的优化挑战。布拉希斯托克隆的解决方案强调了数学方法的一个关键需要: 没有一般技术来产生最佳曲线必须满足的差异方程式。约翰的成功与循环是显而易见的, 但它没有提供一个明确的路径解决其他变化的问题, 如弹性, isoperimetric 问题, 或者曲线的总体问题, 尽量减少自愿的整合物。

这种方法制限延伸到存在问题和解决方案的独特性。虽然约翰证明, 循环解决了布拉希斯托克隆问题, 但数学框架来证明它提供了独特的全球最低限度, 或者确定什么时候变量问题承认解决方案, 仍然缺乏。这些基本问题将需要一个系统的方法, 几十年后会出现。

后期变量框架发展的影响 布拉希斯托克隆问题深深地影响了后来的对优化思考, 并将直接引发系统变化的方法的发展。承认, 虽然约翰的光学类似能精彩地解决一个特定的问题, 但数学需要能够处理任何涉及功能的优化问题的一般原则, 对数学界越来越明显。

最终出现的革命观点是开发一种系统的方法来产生最佳曲线必须满足的差异方程, 无论具体功能如何优化。这个 "差异值方法" 它将提供约翰的态度所缺少的一般框架　一种方式, 将任何变量问题转化为差异方程式, 其解决方案产生了最佳曲线。

1697 Brachistochrone 和后来的弹性解决方案之间的连接比仅仅是历史序列更深。兩個問題都在尋找最適合整體數量的曲線: 布拉希斯托克羅尼減少旅行時間 $\int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$ 但是, 当灵活性减少时 应变能 $\int \kappa^2 ds$. 后来发展的天才是认识到, 两种问题 - 事实上, 所有变化的问题 -都可以用相同的系统方法解决。

灵活性问题最终将代表直接应用的总体 布拉希斯托克隆问题提出的变化原则, 但不能系统地利用。约翰需要问题具体的物理洞察 (光学模拟) 系统的方法将提供适用于任何功能优化问题的一般程序。灵活性不仅会成为另一个解决的问题, 而且是系统变量计算的力量的表现。

新数学纪律的诞生 因此, 约翰·伯诺利的 1697 解决方案是当数学家第一次面对在无限维度空间功能优化概念挑战时的基本时刻。虽然使用的具体技术　光学类似和斯内尔的法则　不会普遍化, 但通过优化原则可以找到曲线的基本观点会证明是革命性的。

布拉希斯托克隆问题确定了机械和地质学中的许多基本问题可以被改为变量问题。这种洞察力, 不仅对后

查过程, 虽然对于维护标准至关重要, 有时可以延续约翰批评的非常智力保守主义 - 在接受的范式中有利于加剧进展, 超越可能使现有的方法过旧的革命方法。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

续的弹性工作至关重要, 而且对数学物理学的整个随后的发展至关重要的。从 汉密尔顿在机械学的原则到现代物理学的理论, 自然现象经常与优化原则相匹配的认识跟踪其起源约翰 1697 的突破。

约翰 • 伯诺利的论文, 尽管很短暂, 却不知不觉地打开了一个全新的数学分支。这个分支的系统发展将等待 1740 年代的关键概念贡献, 但概念基础 - 认识到优化可以决定不仅数字, 而且整个功能 - 已经确定了。布拉希斯托克隆从一个挑战性的问题转变为什么将成为数学最强大的理论框架的基本例子。

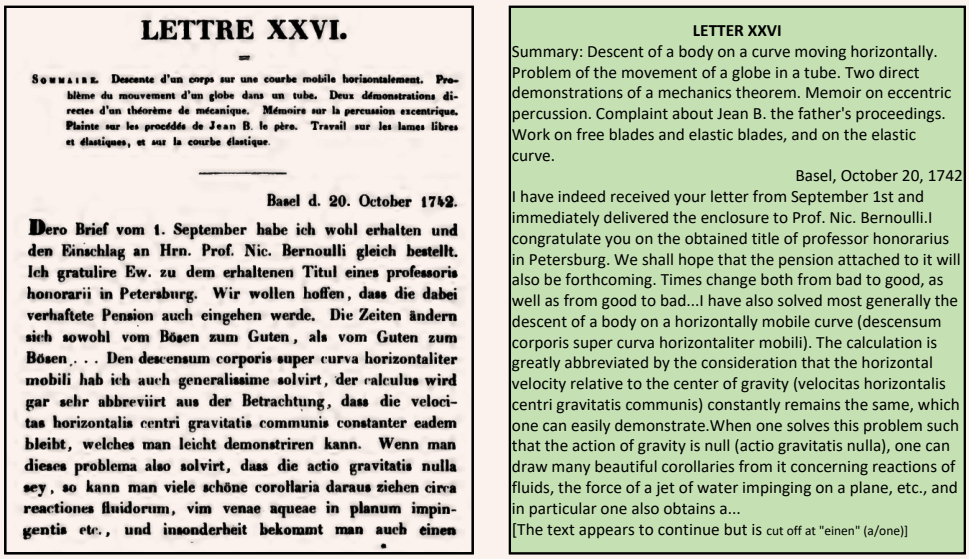
数学差距:1697 年至 1740 年代 约翰的突破后的时期被偶然试图通过 ad hoc 方法解决个体变异问题所标记。数学家遇到了 isoperimetric 问题, 关于挂链的问题 (卡特纳), 和各种曲线优化挑战, 但每一个需要自己的天才方法。数学界逐渐意识到, 一个系统的框架是绝望地需要的。

在过去的几十年里, 有几个关键进展为未来的进步奠定了基础。对差异方程的理解深化, 处理边界条件的方法改进, 优化与差别方程之间的概念关系变得更加清晰。然而, 在一个系统的方法下将所有变量问题统一的基本观念仍然是虚假的。

正反对这个数学背景, 丹尼尔 • 伯诺利将于 1742 年做出他的关键贡献, 承认能量减少的物理原则可以为约翰的问题特定的光学类似和真正的一般变化的框架提供概念桥梁。这种洞察力将证明对即将到来的变量计算的系统发展至关重要。

9.3.2.1.2.4 丹尼尔 • 伯诺利的解决方案 (1742)

此部分审查了丹尼尔 • 伯诺利的一封令人惊叹的信 莱昂哈德 • 尤勒 (Leonhard Euler)1742 年 10 月 20 日出生。(**DanielBernoulli1742toEuler**) 这是一个关键的转变, 在发展 变量方法, 图 9.15. 丹尼尔的技术问题是指在一个移动管内的球体的运动, 代表了从原来的布拉希斯托克隆挑战中直接进化, 但有添加复杂性层, 暴露了现有的方法的限制。约翰的 1696 问题 (Bernoulli, Johann, 1696 PDF) 仅在重力下, 丹尼尔的管道问题引入了动态限制和移动参考框架: 球必须按照管道规定的路径, 而管本身则按某些规定的运动移动。它创造了一个有限的 优化问题, 最佳运动不仅取决于重力, 而是球的无效性、管道的运动和限制力量之间的相互作用。



LETTRE XXVI.

Sommaire. Descente d'un corps sur une courbe mobile horizontalement. Problème du mouvement d'un globe dans un tube. Deux démonstrations directes d'un théorème de mécanique. Mémoire sur la percussion excentrique. Plainte sur les procédés de Jean B. le père. Travail sur les lames libres et élastiques, et sur la courbe élastique.

Basel d. 20. October 1742.

Dero Brief vom 1. September habe ich wohl erhalten und den Einschlag an Hrn. Prof. Nic. Bernoulli gleich bestellt. Ich gratulire Ew. zu dem erhaltenen Titul eines professoris honorarii in Petersburg. Wir wollen hoffen, dass die dabei verhaftete Pension auch eingehen werde. Die Zeiten ändern sich sowohl vom Bösen zum Guten, als vom Guten zum Bösen. . . . Den descensum corporis super curva horizontaliter mobili hab ich auch generalissime solvirt, der calculus wird gar sehr abbreviirt aus der Betrachtung, dass die velocitas horizontalis centri gravitatis communis constanter eadem bleibt, welches man leicht demonstriren kann. Wenn man dieses problema also solvirt, dass die actio gravitatis nulla sey, so kann man viele schöne corollaria daraus ziehen circa reactiones fluidorum, vim venae aqueae in planum impingentis etc., und insonderheit bekommt man auch einen

LETTER XXVI

Summary: Descent of a body on a curve moving horizontally. Problem of the movement of a globe in a tube. Two direct demonstrations of a mechanics theorem. Memoir on eccentric percussion. Complaint about Jean B. the father's proceedings. Work on free blades and elastic blades, and on the elastic curve.

Basel, October 20, 1742

I have indeed received your letter from September 1st and immediately delivered the enclosure to Prof. Nic. Bernoulli.I congratulate you on the obtained title of professor honorarius in Petersburg. We shall hope that the pension attached to it will also be forthcoming. Times change both from bad to good, as well as from good to bad...I have also solved most generally the descent of a body on a horizontally mobile curve (descensum corporis super curva horizontaliter mobili). The calculation is greatly abbreviated by the consideration that the horizontal velocity relative to the center of gravity (velocitas horizontalis centri gravitatis communis) constantly remains the same, which one can easily demonstrate.When one solves this problem such that the action of gravity is null (actio gravitatis nulla), one can draw many beautiful corollaries from it concerning reactions of fluids, the force of a jet of water impinging on a plane, etc., and in particular one also obtains a...

[The text appears to continue but is cut off at "einen" (a/one)]

图 9.15: 丹尼尔 • 伯诺利给埃勒的信 (**DanielBernoulli1742toEuler**)

传统的地质方法, 需要约翰的天才光学模拟来解决甚至更简单的布拉希斯托克隆, 在面对这种移动限制问题时变得无形。然而, 丹尼尔的基于能量的原则可以通过将整个系统的能量视为统一数量来优雅地处理这些复杂性, 而不是试图通过改变协调系统跟踪个别力量组件。丹尼尔的信中的语言混合反映了数学本身这个更广泛的过渡时刻。正如数学语言从纯粹的地质描述转向更多的解析表达式一样, 数学的字面语言从普遍的拉丁语转向更可用的垂直通信。丹尼尔在德语解释和拉丁技术术语之间无缝的交换, 反映了他的方法进展: 他正在

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

开发基于能源的变量原则, 可以系统地处理整个限制优化问题的类别, 其中包括约翰的原始布拉希斯托克隆和这些更复杂的管道动态作为特殊案例。

丹尼尔的关键方法学洞察力在他的声明中出现:

> 以我为本, 以其他原理为本; 以我為本, 也以其他宗教为本。
>
> 既然我使用完全不同的原则, 我也必须采用完全不同的名称。
>
> **DanielBernoulli1742toEuler**

这揭示了一个基本的范式转变, 从地质和电影学方法到以能源为基础的方法, 这将证明历史上是转型性的。

通信网络 Euler-Bernoulli 通信是 18 世纪最重要的科学交流之一。莱昂哈德 • 尤勒 (1707-1783) 丹尼尔 • 伯诺利 (1700-1782) 他们在职业生涯中保持了广泛的沟通, 讨论机械、数学和物理方面的问题。[21].

灵活能量表达与物理直觉 在 1742 年 10 月的信中, 丹尼尔 • 伯诺利介绍了弹性能量的最早明确表达之一:

$$\int \frac{ds}{R^2} \tag{9.6}$$

哪里 ds 是弓长度 单元, R 是放射的 曲率, 和 $\frac{1}{R^2}$ 代表曲率的方形。

这个表达式代表一个弹性线或梁的旋转能量, 但伯诺利的表述是基于物理直觉而不是严格的衍生。他的理性跟随了几个直观的步骤: 认识到弹性能量应该集中在梁最严重地弯曲的地方。(建议依赖曲率 $\kappa = 1/R$) 直觉这个能量应该以四方的尺寸进行变形, 跟随与其他物理系统的类似性, 并理解总能量应通过整合本地能量密度沿着梁的长度获得。

丹尼尔说, 他认为 (“我会得到”) 这

> 死 生存 *VIVA* potentialis laminae elasticae insita müsse minima seyn”
>
> 灵活板中的潜在 Viva 必须是最小的。
>
> **DanielBernoulli1742toEuler**

这是一个令人惊叹的物理直觉例子, 超过一世纪前面是严格的数学衍生 - 正确的理论基础将通过 卡西的连续介质力学 (Cauchy, 1823), 波伊森的弹性理论 (Poisson, 1829), 和 基尔奇霍夫 1859 板 理论 (Kirchhoff, 1859).

变量方法与数学框架 伯诺利明确提到使用 “以色列方法” (方法的 以色列问题) 解决弹性曲线问题, 涉及限制功能优化和发现尽量减少能量的曲线。报告获取 “1 等式差异 4ti ordinis” (a 第四条 差异方程式) 从他的变量方法 - 显而易见, 因为 Euler-Bernoulli 梁方程式实际上是第四个顺序, 证明了变量原则和差异方程之间的联系两年前的 Euler 系统发展的 Euler。拉格兰方程式。

这封信讨论了一个以两个点固定的特定长度的弹性相关术语的总体问题, 在终点上设定了紧密的方向, 代表了最早的表格之一。弹性理论中的边界值问题。

概念创新 这封信展示了几个关键进展: 弹性能量作为曲线的组成部分, 对物理问题应用以色列测量技术, 自然配置减少能量的想法, 以及物理学与先进计算之间的联系。1742 年, 这封信传递了埃勒的 **发明方法** (Euler, 1744b), d’Alembert 的振动线工作 (D’Alembert, 1747) 和拉格兰的 **机械分析** (Lagrange, 1788).

制定系统发展阶段 丹尼尔的 1742 表述的弹性能量原则和他的应用以色列方法创造了一个机会和一个挑战数学社区。他的物理洞察力很深 - 承认自然配置能量减少会证明所有理论物理学都至关重要。然而, 他的方法仍然与具体问题有关, 缺乏处理变量问题的全部范围所需的系统框架。

[21]对于 Euler-Bernoulli 邮件的完整数字版, 请参见 Bernoulli–Euler Online (BEOL) 项目 , 其它 Euler Archive, 和 The Early Modern Letters Online (EMLO) 数据库, 所有提供可搜索的文本、代数据和原始字母的高分辨率扫描

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

数学差距很明显: 而丹尼尔可以表达能量表达 $\int ds/R^2$ 并应用以色列测量技术来产生四级差异方程式, 没有通用方法将自愿的变异问题转化为相应的差异平衡。每一个新能量 功能需要自己的天才方法, 就像约翰的布拉希斯托克隆需要五十年前的光学模拟一样。

这种方法制限将引发 Euler 的系统调查。戴尼的观点被吸收 能量最小化, 并通过它们的通信见证了变化的方法的力量, 尤勒认识到需要一个普遍框架 - 一个系统的方法可以处理任何功能优化问题, 无论涉及弹性能量, 地质学。或完全新的物理原则尚未被发现。从物理直觉的能量原则到其严格的数学表述的过渡, 是 18 世纪科学中最重要的进步之一。丹尼尔的信为这一关键过渡提供了独特的窗口, 因为在 1744 年出现的革命合成阶段。

9.3.2.1.2.5 以色列问题 vs. 变分法 在我们研究 Euler 的变量方法之前, 我们需要背景化 Ceretain 术语。

以色列问题代表了从古代地质问题的优化挑战的特定类别, 最著名的是迪多的问题: 在固定周边界的所有关闭曲线中, 其中包含最大区域? 这些问题是由于需要优化一个地质或物理数量, 同时保持对另一个数量的限制。

变分法, 相反, 是开发的综合数学框架以系统地处理以 operimetric 问题, 以及许多其他类型的功能优化。虽然以色列问题为发展变量方法提供了关键动机, 尤其是 1700 年代初的伯诺利兄弟争论, 但结果的数学理论远远超越了限制优化, 以涵盖任何涉及功能优化的问题。

表 9.5: 以色列问题 vs. 变分法

视角	以色列问题	变分法
定义	优化问题与地质限制 (例如, 固定周边)	通用数学框架优化功能
范围	具体类型的限制优化	广场覆盖所有功能优化
历史时期	古代起源 (迪多的问题), 案例案例解决方案直到 1700 年代	1696 年系统发展 (布拉希斯托克朗) to 1744 (Euler)
数学结构	Optimize $I[y]$ subject to $J[y] =$ constant	Optimize $I[y] = \int F(x, y, y')dx$ (限制或不限制)
解决方法	拉格兰多元: $\delta(I - \lambda J) = 0$	Euler-Lagrange 方程式: $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$
经典例子	循环 (max 区域, 固定周边) 迪多的麻烦, 限制布拉希斯托克隆	Brachistochrone, 弹性, 地质学, 最低表面,Fermat 的原则
关键贡献者	雅各布 & 约翰 • 伯诺利 (争议 1697-1701) 拉格兰 (多元化方法)	约翰•伯诺利 (1696) 爱尔兰 (1744) 拉格兰 (1788)
现代关系	变分法的附件 (限制问题)	一般理论包括特殊案例的以色列问题

在当代数学中, 以色列问题构成了变量计算的有限分支。虽然他们历史上引发了系统变化的方法的开发, 但现在它们在功能优化更广泛领域中代表着一个重要的类别, 包括有限和无限的问题。

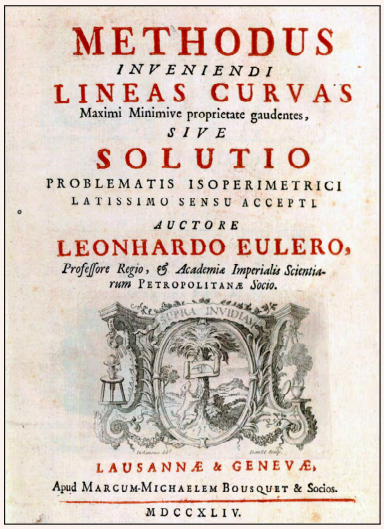
9.3.2.2 Euler 的解决方案 (变分法) (1744)

1744 年 埃塞勒 *Methodus inveniendi lineas curvas maximi* **最小属性加德特** (Euler, 1744b), 图 9.16a, 代表在数学分析中取得了突出成就, 既是因为变分法的系统发展以及其创新应用。工作是由

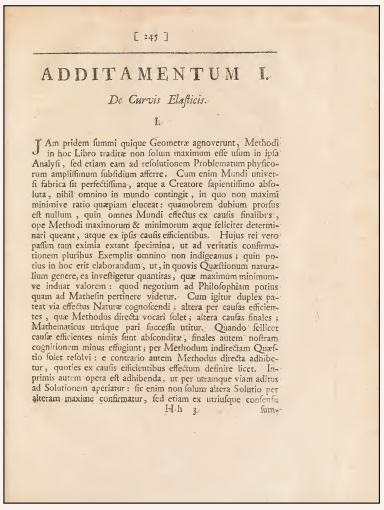
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 六大章节, 于 1743 年 7 月交给出版商
- 1743 年 12 月发行了两项附件, 第一项处理弹性曲线, 第二项处理最少行动的原则。

这个结构反映了埃勒的方法: 主要体设定了所谓经典变分法的理论基础, 包括埃勒差异方程式。(此分類上一篇: Euler-Lagrange Equation) 虽然附件通过挑战性应用展示了这些新方法的力量, 但我介绍了其对弹性问题的解决方案。出版于 1744 年 9 月, 这篇论文使尤勒成为变分法第一阶段的主要创作者, 并将他定为他时代最伟大的活数学家。弹性解决方案的战略定位在附件中, 而不是主要文本中, 强调了尤勒如何将其视为他新开发的变量原则的复杂应用, 而非对自己的权利做出基本理论贡献。


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

(a) *Methodus iveniendi* 线路 (Euler, 1744b)


[245]
ADDITAMENTUM I.
De Curvis Elasticis.
I.
JAm pridem summi quique Geometræ agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditæ non solum maximum esse usum in ipsa Analysi, sed etiam eam ad resolutionem Problematum physicorum amplissimum subsidium afferre. Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quæpiam eluceat: quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes Mundi effectus ex causis finalibus, quæ Methodi maximorum & minimorum æque felicitet determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus. Hujus rei vero passim tam eximia extant specimina, ut ad veritatis confirmationem pluribus Exemplis omnino non indigeamus; quin potius in hoc erit elaborandum, ut, in quovis Quæstionum naturalium genere, ea investigetur quantitas, quæ maximum minimumve induat valorem: quod negotium ad Philosophiam potius quam ad Mathesin pertinere videtur. Cum igitur duplex pateat via effectus Naturæ cognoscendi; altera per causas efficientes, quæ Methodus directa vocari solet; altera causas finales; Mathematicus utráque pari successu utitur. Quando scilicet causæ efficientes nimis sunt absconditæ, finales autem nostram cognitionem minus effugiunt; per Methodum indirectam Quæstio solet resolvi: e contrario autem Methodus directa adhibetur, quoties ex causis efficientibus effectum definire licet. Imprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus ad Solutionem aperiatur: sic enim non solum altera Solutio per alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque consensu
Hh 3 sum-

(b) 附件 *I: De curvis elasticis* (Euler, 1744a)

图 9.16: Euler 的 1744 条例在 变分法 上 (Euler, 1744b)

主体: 基础的变量计算 主要工作六章设定了变量计算的系统基础。Euler 的革命贡献 [22] 这是他的系统方法, 寻找优化整合功能的曲线。这是一个基本上新的数学问题, 而不是找到优化功能的值, 目标是找到优化的功能。

对于形式的整体功能:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} Z(x, y, p, q, r, \ldots)\, dx \tag{9.7}$$

哪里 $p = dy/dx$, $q = dp/dx = d^2y/dx^2$, $r = dq/dx = d^3y/dx^3$, 等,Euler 介绍了革命概念的 “ “差异价值” 他写了整体差异。Z as:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots \tag{9.8}$$

在哪里:

$$M = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p} \tag{9.9}$$

$$Q = \frac{\partial Z}{\partial q}, \quad R = \frac{\partial Z}{\partial r} \tag{9.10}$$

[22] 本部分主要基于授权的英语翻译和评论 Oldfather, Ellis, and Brown, 1933.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

关键的观点是, 对于功能 I 要有极端, 它的 “差异价值” 必须消失:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots \right) \delta y \, dx = 0 \tag{9.11}$$

因此, 必须有自愿的变化。δy, 整合必须消失, 产生我们现在所谓的 Euler-Lagrange 方程式:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial Z}{\partial p} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial Z}{\partial q} - \frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial Z}{\partial r} + \cdots = 0 \tag{9.12}$$

这种系统的方法, 从优化原则中取出差异方程式是全新的, 并将革命不仅机械学, 而且整个数学物理学。在六章中, 尤勒将这个框架应用到经典问题, 包括布拉希斯托克隆、以色列问题和各种地质优化挑战, 展示了他的方法的普遍性和力量。

Euler 在他的方法方法中强调了双重验证的重要性:

> Inprimis autem opera est adhibenda, ut per utramque viam aditus 此分類上一篇: sic enim non solum altera alteram maxime confirmatur, sed etiam ex utriusque consensu 是的, 我看到了波利普塔特姆。
>
> 但是, 必须特别努力看到解决问题的两种方法都开放; 因为这样, 不仅一个解决方案是另一个强大的, 而且更重要的是: 从两种解决方案之间的协议, 我们确保最高的满意度。
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes 第一部分

这种双重验证的原则将证明在附件中的弹性问题的处理中非常重要。

附件一: 应用到 Elastica 在主要章节中建立了变量计算的总体框架后,Euler 在第一附件中转向其最具挑战性的应用。**附件** *I: De curvis elasticis* (Euler, 1744a), 图 9.16b. 这个应用不仅仅是模拟性的, 它受到丹尼尔 • 伯诺利的关键物理观念的动机, 并代表了他新数学框架的力量最优雅的表现之一。

丹尼尔 • 伯诺利的洞察与通信 在 1742 年给尤勒的一封信中, 丹尼尔 • 伯诺利提到, 以一种特定的表达方式来实现弹性方程式, 即我们现在所称之为 “弹性” 的。应变能 - 被最小化为 平衡:

> 我想知道，阁下是否能以如下形式求解弹性薄片曲率问题：给定长度的薄片固定在位置已知的两点，且这些点处的切线方向也已知……这是弹性曲线最一般的构想；但我还没有找到这种形式的解，除非采用等周问题的方法，并假定弹性薄片内蕴的势活力必须取极小值，正如我曾向阁下提到的那样。由此我得到一个四阶微分方程，但尚未能充分化简，以证明通常的弹性曲线方程是一般解。
>
> 我想知道你是否不能在这种情况下解决弹性拉米娜的曲率, 一个长度的拉米纳固定在两个点与特定位置, 并且这些点的坦根也被放在位置上。這是最常見的想法, 但我還沒有在這種情況下找到一個解決方案, 由以色列方法, 考慮到我的假設, 潜在的 vis viva 內在於柔軟的 lamina 必須是最低的, 正如我提到的之前。因此, 我得到了第四个顺序差异方程式, 我无法减少足以表明一般弹性方程的常规方程保持。
>
> **DanielBernoulli1742toEuler**

请注意,A **拉米娜** 它指的是薄、平坦、灵活的带或梁 - 基本上现代工程师会称之为弹性梁, 或者是直径。Euler 假设 lamina 是 slender (长度 ≫ 宽度 ≫ 厚度) 与应用负载相比, 无重量, 长度不延伸, 弹性 (返回原始直配置, 当不加载时). 想象一个统治者在一端, 并被一个力量在另一边, 或潜水板。拉丁语术语 “拉米娜” (意义 “薄 板”) 它是 18 世纪的标准术语, 适用于任何滑板结构的单元, 主要通过曲率而不是伸展。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> 我知道, 我知道, 你死了, 你活了, 潜力是可爱的。
>
> 我假设在 板 灵活的潜在 Viva 必须是最小的。
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

> “此外，我自然地把原本直线、现已弯曲的弹性薄片的势活力表示为 $\int(ds/R^2)$。”
>
> 我表达一个弹性板的潜在 VIVA, 自然直但曲线, 通过 $\int(ds/R^2)$
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes

这封信也揭示了圣地的可怕状态。1742 年的政治过渡中, 圣彼得堡学院迫使学者战略化 (而当) 出版, 它反映了十八世纪学术生活的艰难现实, 其中高级学者经常将他们的青少年的工作归功。

变量 表述 的 Elastica 基于丹尼尔 • 伯诺利的 1742 年关于最低能量的关键观点, 尤勒将弹性问题定义为一个 变分原理. Euler 以特征性准确地描述问题:

> ut, inter omnes curvas ejusdem longitudinis, quae non solum per puncta A & B 在他的点子里, 以正直的位置为定义, 以定义的位置是定义。$\int \frac{ds}{R^2}$ 最小
>
> 在所有曲线之间, 同一长度的曲线不只是通过点 A 和 B 但在这些点上, 也有一种直线, 即曲线在哪个值中确定。$\int \frac{ds}{R^2}$ 是最低的。
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, 部分 2

关键概念突破是认识到弹性曲线符合减少总能量功能的配置:

$$I = \int \left[\frac{1}{2} EI\kappa^2 + V(x,y) \right] ds \tag{9.13}$$

第一個用語代表柔軟的 应变能 (与 曲率 的方位相比例) 和 $V(x,y)$ 代表 势能的外部力量。

为了纯粹的弹性 (没有外部力量) 这将减少到:

$$I = \int \kappa^2 \, ds = \int \frac{1}{R^2} \, ds \tag{9.14}$$

这种能量表述提供即时的物理洞察力, 从以前的方法已经缺乏。它解释:

- **为什么选择具体解决方案**: 自然选择将总能量减少的配置
- **多种解决方案分支**不同边界条件导致能源功能的不同最低值
- **稳定性**: 最低能量配置是内在稳定的
- **通用能力**同一原则适用于所有弹性问题

能量原理立即解释了 Huygens 的 1694 观察多种可能的弹性曲线形状: 不同边界条件和负载参数导致不同的能量功能最小, 每一个代表物理可实现的配置。

直接衍生和验证 依靠双重验证原则, 尤勒通过已知的机械原则来产生同样的方程式, 从而确定变量程序的有效性。在附件的开头部分中,Euler 通过变分法的方法验证了丹尼尔的猜测。附件的大部分部分将其用于对弹性拉米纳的机械进行直接方法的研究, 不与变量数学相连。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在他的直接衍生中,Euler 认为一个拉米娜 AB 它是建立在一个 支座 在 B, 图 9.17. 两者 B 到达拉米纳的 B 被视为固定。在另一端 A 一个无重的绳子被粘贴, 从结尾 C 由一根力量 P 行动 [23]. 拉米纳的重量被认为是不可忽视的, 与 P.

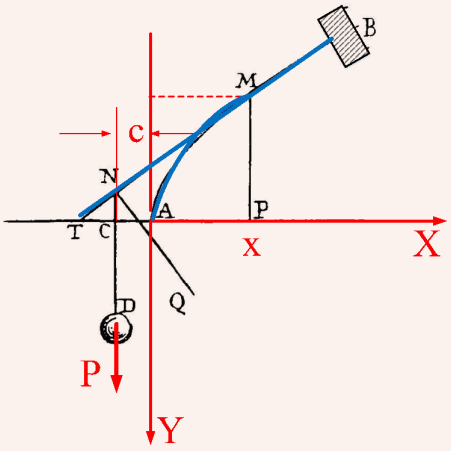


图 9.17: Euler 的直接方法 “自由体图”
与 图 相比 9.28 关于 Euler 的后续通用化 (1771) 第 1744 章 精彩的画面

Euler 使用一个由 A 起源的卡特西亚协调系统, 以便 y 轴与力量方向相匹配。P. 让 M 以坐标为点, 在拉米纳上 x 和 y. 以外部力量为主的时刻 M 是 $\mathfrak{M} = P(x + c)$, 在哪里 c 距离是从 A 到这一点 C. 抵抗的 “弹性力量” (今天我们要称之为 弯矩) 关于 LAMINA 的 M 由 Euler 所认为的表达 Ek^2/R, 在哪里 Ek^2 这是一个测量的数量。“坚定性” 拉米娜和 R 是的, 曲率的光线在 M. 在 平衡 中, 这两个表达式必须是相同的:

$$\mathfrak{M} = P(c + x) = \frac{\mathfrak{B}}{R} \tag{9.15}$$

哪里 $\mathfrak{B} = Ek^2$ 被称为 “ “ “模块化”

曲率的射线表达已经由 雅各布 • 伯诺利 (Eq. 8.17)

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

取代这个表达式 R 到 eq。9.15 并集成,Euler 获得:

$$dy = \frac{-P\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)}{\sqrt{\left(E^2k^4 - P^2\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + f\right)^2\right)}}dx \tag{9.16}$$

哪里 f 这是一个整合的连续性。Euler 更愿意以他以前通过变量程序获得的整体形式重新表达这一点:

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}{\sqrt{\left(a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2\right)}}dx \tag{9.17}$$

[23]值得注意的是, 在尤勒的方法中, 弹性曲线提供了一个统一的模型, 坐标系统一向一向方向。P. 假设, 这就是为什么我们使用 “Eulerian” 这个词。(vs. 拉格兰) 坐标系统, 用于大转换或流体力学。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里, 数量 a, α, β 和 γ 与 EQ 的联系。9.16 根据关系:

$$P = \frac{-2Ek^2\gamma}{a^2}; \qquad c = \frac{\beta}{2\gamma}; \qquad f = \frac{\alpha}{2\gamma} \tag{9.18}$$

力量的方向 P 由常态的标志决定。γ • 为了积极 γ 它指向积极的 Y 轴, 对负的方向。γ 它指向负的 Y 轴方向。

Euler 承认了弹性行为的基本组成部分, 即使没有现代 应力 分析理论。正如他在他的讨论中所指出的那样, 关于旋转模块:

> Haec Autem 绝对弹性 Ekk 首席执行官 ab natura materiae, ex qua lamina est fabrefacta; unde alia materia magis, alia minus elatere prodita dici solet. 第二季度以色列的长度是拉米娜, 表达 Ekk 乌比克长度是拉米娜 • 德瓦特 • 埃塞 • proportionalis,si cetera sint paria。Tertio vero crassities laminae plurimum confert ad valorem ipsius 还需要确定 Ekk，其性质似乎是，塞特里斯 • 帕里布斯 Ekk 放松了 Crasitiei Quadratum。联系人特纳维特表达式 Ekk 理性 共用 ex ratione 主条目:Laminae simplici,ac duplicata crassitiei 拉米纳
>
> 现在这个绝对的弹性 Ek^2 首先, 它将依赖于从哪种材料中制成的绳子的性质。此外, 在第二位, 它依赖于绳子的宽度, 以便表达 Ek^2 到处都应该是平等的宽度, 其他事物都是平等。但第三, 绳子的厚度有助于确定它的价值。Ek^2 它似乎是以这种方式组成的, 而其他事物是平等的。Ek^2 与厚度的平面相比例。Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes 第 40 章

这个令人惊叹的洞察力预测了我们现在所理解的惯性矩的一个梁的十字部分, 证明了 Euler 的深度物理直觉。他的变量和直接方法之间的完美合并提供了精确的双重验证, 以至于埃勒如此高, 确认了他的新数学方法的有效性和丹尼尔 • 伯诺利的能量原则的物理准确性。

9.3.2.2.1 弹性物种分类

历史上, 数学家倾向于分类数学对象。[24] Euler, 在部分 **原名**:*Enumeratio curvarum elasticarum* 想确定, 要确定 “这些弹性曲线的无限多样性。” 它开始于 EQ。9.17 把轴的起源翻译成距离。$\beta/2\gamma$ 设置 $\gamma = 1$, 并将平衡减少到:

$$dy = \frac{\alpha + x^2}{\sqrt{a^4 - (\alpha + x^2)^2}}dx$$

记住这 $a^4 - (\alpha + x^2)^2 = (a^2 - \alpha - x^2)(a^2 + \alpha + x^2)$ 和设置 $\alpha = a^2 - c^2$ 他得到了:

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}dx \tag{9.19}$$

这个方程式构成了 Euler 对弹性曲线或拉米纳的图形研究的基础。[25] (两种术语可交换。). 图 6 的 图 9.18,A 是坐标系统的起源和 AE 和 AB 是积极的方向。x 和 y 相应的轴。M 这是曲线上的典型点。AMC. 外部力量 P 在积极的行动中 y 方向在 A. Euler 表示, 这些点 A 和 B 可以被视为由紧张线连接 P 以平等和相反的力量为 P 行动在 B.

[24] 提到 §3.2.3 对于希腊人来说, 德卡特的集体飞机曲线、纽顿列出的圆形形式等。

[25] 在此背景下,A **拉米娜** 它指的是薄、平坦、灵活的带或梁 - 基本上现代工程师会称之为弹性梁, 或者是直径。Euler 假设 lamina 是 slender (长度 ≫ 宽度 ≫ 厚度) 与应用负载相比, 无重量, 长度不延伸, 弹性 (返回原始直配置, 当不加载时). 想象一个统治者在一端, 并被一个力量在另一边, 或潜水板。拉丁语术语 “拉米娜” (意义 “薄 板”) 它是 18 世纪的标准术语, 适用于任何滑板结构的单元, 主要通过曲率而不是伸展。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

与曲线相关的两个重要量是力量。P 和角落的阴影 $\angle PAM$ 由 Tangent 在 A 和 The x 轴:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2Ek^2}{a^2} \\ \sin(\angle PAM) &= \frac{a^2-c^2}{a^2} \end{aligned}$$

这个表达式在哪里 P 它是从 Eq 获得的。9.18 和 $\sin(\angle PAM)$ 它是由 $\tan(\angle PAM) = (a^2-c^2)/c\sqrt{2a^2-c^2}$ 通过设置获得的 $x = 0$ 在 EQ。9.19.

Euler 注意到系统分类的价值:

> Cum igitur videamus non solum Circulum in curvarum Elasticarum classe contineri, sed etiam in ipsis infinitam varietatem locum habere; operae pretium erit hic enumerationem omnium variarum specierum in hoc curvarum genere contentarum 建立。Hoc enim modo non solum indoles harum curvarum 以此为主, 以此為主; 以此是以此的。ex sola figura dijudicare licebit, ad quamnam speciem curva 格式提到必须。
>
> 因此, 我们注意到不仅是圆圈属于弹性曲线的类别, 而且更重要的是, 这些弹性的曲线无限多样性。它将值得同时列出所有不同类型包含在这个曲线的类别。因为这样, 不仅这些曲线的性质会更深入地被感知, 而且在任何情况下, 无论提供什么, 也可以从简单的数字中决定哪个阶级形成的曲线应该放置。
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes 第 14 章

Euler 通过两种补充方法提出了弹性曲线的系统分类:

1. **数学品种** 9 基本类别 (品种 I - IX) 由参数定义 c^2/a^2 根據嚴格的数學分析 (第 25 条至第 33 条的处理)
2. **描绘的数字**图 3、4、V 表中有二十八个图表, 显示这些物种的各种表现和应用。

不同物种是通过考虑角度 PAM 获得的, 因为它在价值变化从 90° 到 −90° 如表中所示 9.6 和 图 9.18.

表 9.6: Euler 的 9 种弹性物种, 定义参数

品种	部分	参数范围	物理描述
I	§25	$c \to 0$	直线 (自然状态)
II	§26	$0 < c^2/a^2 < 1$	简单的曲线, 没有通胀
第三	§27	$c^2/a^2 = 1$	直角弹性
IV	§28	$1 < c^2/a^2 < 1.652$	影响曲线
V	§29	$c^2/a^2 = 1.652$	自我触摸配置
VI	§30	$1.652 < c^2/a^2 < 2$	自我交叉路口
七	§31	$c^2/a^2 = 2$	无形曲线
八	§32	$c^2/a^2 > 2$	多重定期流浪
IX	§33	特殊限制	循环

每种物种都以:

1. 强度参数: $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 初步角度: $\sin(\angle PAM) = \frac{a^2-c^2}{a^2}$
3. 曲率分布沿曲线

28 个数字不平等分布在 9 种中。相反, 它们反映了某些配置的实际重要性、特定案例的数学复杂性以及需要描述边界条件和限制行为。

表 9.7: 28 个数字在 9 种中分布

品种	描述	数字数量
I	直线	1 (图 1)
II	简单的曲线	6 (鱼。2, 3, 4, 6, 23, 26)
第三	直角弹性	3 (鱼。5, 24, 25)
IV	影响曲线	4 (鱼。7, 8, 16, 19)
V	自触	1 (图 9)
VI	自我交叉	4 (鱼。10, 11, 12, 20)
七	无形	2 (鱼。12, 15)
八	多彩彩	6 (鱼。17, 18, 22, 27, 28)
IX	循环	1 (图 21)
特殊/应用案例		2 (鱼。13, 14)

和 (混乱) 数字的多样性服务于几个目的:

物种中的参数变异 每个物种都包含一个连续的参数范围 c^2/a^2. 多个数字表明曲线形状如何在单一物种内发展, 因为这个参数有所不同。

限制条件效应 相同的数学物种在不同边界条件下可以以不同的方式表现出来:

- 固定终点
- 固定免费 (坎特利弗) 配置
- 密集的连接
- 应用时刻与点力量

工程应用 图 13 和 14 显示实用应用:

- 图 13: 重量暂停 (类似于催眠的行为)
- 图 14: 墙壁的山脉 (结构性应用)

过渡和限制案例 数个数字捕捉了物种之间的关键过渡, 表明一种形状在负载参数变化时不断变成另一种。

* 数学意义

Euler 的分类代表了几个数学突破:

1. **第一次系统性税收**答:The 九种物种提供所有可能的弹性变形的完整分类, 根据这些假设。
2. **连接到 精英集成**准确的解决方案需要精密集成, 使此成为这些特殊功能最早的物理应用之一。物种 II 至 IV 的弓长度可以表达为:

$$s = \int_0^x \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(c^2-x^2)(2a^2-c^2+x^2)}} \tag{9.20}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 9.8: Euler 的 28 個数字將其 9 種柔軟的地圖

形象	表	品种	描述	关键特性	部分
1	第三	I	直线	自然状态, 没有曲率	25
2	第三	II	简单的 Bent Rod	地平线在基地	26
3	第三	II	强力加载的坎特利弗	重量在自由的终点	26
4	第三	II	曲线 Cantilever	单身 曲率	26
5	第三	第三	直角弹性	90° 终点	27
6	第三	II	简单的曲线	基本变形	26
7	第三	IV	S 曲线与通胀	初步自我接近	28
8	IV	IV	图 8 组成	交响曲接近	28
9	IV	V	自我触摸路径	联系在 $\angle PAM = 40°41'$	29
10	IV	VI	自我跨越路径	单一交叉	30
11	IV	VI	无形交叉	不平等的	30
12	IV	七	接近无情	近垂直探测器	31
13	IV	特殊案例	暂停重量	实用应用	-
14	IV	特殊案例	墙上山	工程应用	-
15	IV	七	无情的行为	无限延伸	31
16	V	IV	多种侵入	定期模式	28
17	V	八	有限的 oscillation	与平行相结合	32
18	V	八	复杂多轮	多重交叉	32
19	V	IV	延伸 S 曲线	大宽度	28
20	V	VI	三角路	Sharp 角度 在 Node	30
21	V	IX	循环限制案例	统一射线	33
22	V	八	定期波浪	多期	32
23	V	II	Shallow 拱	微小的歪曲	26
24	V	第三	深 拱	大 曲率	27
25	V	第三	模拟形状	交响式加载	27
26	V	II	简单的曲线变量	不同界限	26
27	V	八	复杂的定期	多重限制	32
28	V	八	极端配置	最大变形	32

这个整体不能在基本功能方面进行评估。

3. **变分原理**: 分类是从减少势能功能的结果:

$$\int \frac{ds}{R^2} = \text{minimum} \tag{9.21}$$

哪里 R 是曲率的射线。

下表显示了九种 Euler 的数学方程式和地质特性:

* 关键属性和澄清

关于数学结构的几个重要点:

- **物种 I**: 直线是限制案例如 $c \to 0$ 代表自然的 (未形成) 以色列的弹性状态。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 9.9: Euler 的弹性物种: 地质特性和曲线方程

品种	名称	曲线方程式或弓长度	地质特征
I	线路直	$y = 0$ (直线)	自然状态; $R = \infty$; $c \to 0$
II	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	简单的曲线; 没有肿胀; $0 < c^2/a^2 < 1$; convex; trochoid-like 为小 c
第三	Elastica 直角	$AC = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{128} + \cdots\right)$	轴坦克在 A; $c^2/a^2 = 1$ 区域关系: $4AD \cdot AC = \pi a^2$
IV	–	$dy = \dfrac{(a^2 - c^2 + x^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}$	影响点; $1 < c^2/a^2 < 1.652\bullet$ 子可以自我交叉
V	–	$c^2/a^2 = 1.651868$	自我触摸; 极端相遇; $AD = 0$ 点角 $81°22'$; $\sin(\angle PAM) = 0.651868$
VI	–	类似于四种	自我交叉; 接触之外的延伸; $1.652 < c^2/a^2 < 2$ 点角范围: $81°22' - 112°57'$
七	–	$y = c\sqrt{c^2 - x^2} - \dfrac{c}{2}\ln\dfrac{c + \sqrt{c^2 - x^2}}{x}$	对基层的无同情 AB; $c^2/a^2 = 2$ 点角 $112°57'$ 点击 Node $x = 0.2884c$ 从中心
八	–	$dy = \dfrac{(x^2 - c^2 + g^2)dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(x^2 - g^2)}}$	多种相关术语子; $c^2/a^2 > 2$ 与平行边界相连的 $x = \pm c$ 和 $x = \pm g$ 没有感染
IX	循环	$R = \text{constant} = a^2/(hq)$	循环; 限制案例; 单一 曲率

Victor E. Saouma
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译; 译文可能存在错误。
 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

审阅稿

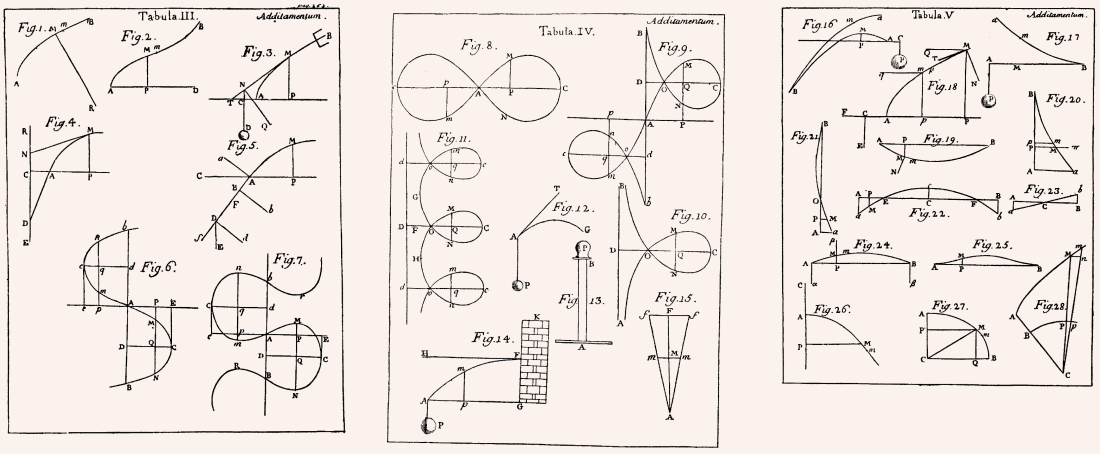


图 9.18: Euler 的精力 “品种” 根据 荷载 参数 c^2/a^2

- **物种 III**: 直角弹性具有特殊特性, 轴是紧的曲线在点 A. 尤勒发现了令人惊叹的区域关系: 水平和垂直投影的产物平等 $\pi a^2/4$.
- **品种 V**: 关键参数值 $c^2/a^2 = 1.651868$ 相应的 $\sin(\angle PAM) = 0.651868$, 生产第一个自我触摸配置。
- **品种 VII**: At $c^2/a^2 = 2$, 曲线对基线变得无同情。节点 (自我交叉点) 发生在 $x = 0.2884c$ 有一个节点的角度 $112°57'$.
- **物种 VIII** 为: $c^2/a^2 > 2$, 曲线展示了多个边界之间限制的旋转 $x = \pm c$ 和 $x = \pm g$.

* 物种与人物之间的关系

Euler 的 28 个数字描述了这些 9 种数学物种的各种表现。分配不均匀, 因为:

- 某些物种 (如二、八) 展示在他们的物理成就中更大的多样性
- 实用工程应用有利于某些配置
- 物种之间的过渡案例需要多种描述

数学分类 (桌子 9.9) 提供理论基础, 而 28 个数字显示了这些数学抽象的物理现实。

数学解决方案和完整的分类 对于纯弹性与曲率 κ,Euler 的方法提供第四个命令差异方程式:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \lambda \frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}$$

哪里 λ 是由边界条件定义的参数。这个方程式可以更优雅地写在曲率和弓长的意义上如下:

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} = \lambda\kappa$$

解决方案取决于标志和大小 λ:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

为 $\lambda > 0$:

$$\kappa(s) = A\cosh(\sqrt{\lambda}s) + B\sinh(\sqrt{\lambda}s)$$

为 $\lambda < 0$:

$$\kappa(s) = A\cos(\sqrt{|\lambda|}s) + B\sin(\sqrt{|\lambda|}s)$$

为 $\lambda = 0$:

$$\kappa(s) = A + Bs$$

通过系统的参数分析,Euler 确定了上述九种不同类型的弹性曲线, 每个相应于参数的不同范围。λ 和不同的物理配置, 从直线通过各种曲形形式到完整的循环。

Elliptic 综合解决方案 尤勒的分析表明, 精确的解决方案包括弹性组成部分, 使弹性成为物理问题的早期例子之一, 需要这些先进的特殊功能。弹性曲线的参数代表性采取了形状:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{cn}(u,k)\,du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{sn}(u,k)\,du$$

哪里 cn 和 sn 是雅各比 精密功能与模块 k 由边界条件定义。

对直角弹性 (雅各布 • 伯诺利的原始挑战),Euler 显示曲线长度可以表达为:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}K(k)$$

哪里 $K(k)$ 它是第一类的完整精英组成部分。应用力量与产生的扭曲之间的关系包括:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

这种弹性理论与精英组合之间的联系是革命性的, 提供了准确的解决方案以前无法处理的问题, 同时推动了显著的数学发展。

从分类到准确的解决方案 虽然 Euler 的九种类别分类提供了对弹性行为的完整质量理解, 但获得定量解决方案需要精致的数学工具。各物种统治的差异方程, 尤其是 Eq 中的基本关系。9.19 不能用基本功能解决。相反, 它们的准确解决方案需要使用精密集成物 - 在埃勒时代仍在开发的特殊功能。这个数学挑战使弹性问题成为 18 世纪分析中的驱动力, 推动了数学上可能的边界。

Elliptic 综合解决方案 尤勒的分析表明, 精确的解决方案包括弹性组成部分, 使弹性成为物理问题的早期例子之一, 需要这些先进的特殊功能。弹性曲线的参数代表性采取了形状:

$$x(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{cn}(u,k)\,du$$
$$y(\phi) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int_0^{\phi} \mathrm{sn}(u,k)\,du$$

哪里 cn 和 sn 雅各比以模块的精密功能 k 由边界条件定义。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

对直角弹性 (雅各布・伯诺利的原始挑战),Euler 显示曲线长度可以表达为:

$$s = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} K(k)$$

哪里 $K(k)$ 它是第一类的完整精英组成部分。应用力量与产生的扭曲之间的关系包括:

$$P = \frac{\sqrt{2\lambda^3 EI}}{K(k)^2}$$

这种弹性理论与精英组合之间的联系是革命性的, 提供了准确的解决方案以前无法处理的问题, 同时推动了显著的数学发展。

柱屈曲：欧拉第一公式 1744 年 埃塞勒 **发明方法** (Euler, 1744b) 它包含了比以弹性曲线为主的理论更多: 在第 37 节中隐藏的是其对结构稳定最著名的贡献的基因。在那里, **几乎通过**他写下了后来被称为 Euler 屈曲公式的关系。在本节中, 我们重新审视了早期出现并重建了一个现代衍生品从它的物种我弹性。在 §9.5.2 然后, 我们将转向他的 1759 记忆。(Euler, 1759) 在那里, 尤勒终于认识到公式的真正意义, 并将其置于柱稳定性的一般理论的中心。

> Nisi ergo onus geftandum 天空 P 毛泽东 Fit Quam $\pi^2 Ekk/a^2$, nulla prorsus incurvatio erit metuenda; 反真相 王子 P fuerit majus, columna incurvationi resistere non poterit. Manente autem elasticitate columnae, atque adeo ejus crassitie eadem, pondus P 其能够安全承受的荷载与柱高的平方成反比；而该柱，二元<四角 «<五角<三角<四方<三方<四人<三人<五人<四子<三子<四。
>
> 因此, 除非 荷载 P 要有重量, 要大于 $\frac{E\pi^2 k^2}{a^2}$, 绝对不会害怕弯曲; 另一方面, 如果重量 P 要大, 柱将无法抵抗旋转。现在, 当列的弹性以及其厚度保持相同时, 重量 P 它可以无危险地携带的, 将是逆向比例于列的高度的四分之一; 而一个列高两倍, 只能携带负载的第四分之一。
> Euler, 1744b Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes 第 37 章

这个公式, $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ 现代笔记 (Euler 的位置 Ekk 相应的 灵活性硬度 EI 和 a 到 柱 长度 L) 它是结构力学中最重要的成果之一, 目前仍然是工程设计的关键。这项工作标志着结构稳定理论的诞生, 从实验实践转化为科学学科。

此声明的现代解释如下:

隐藏的公式在类 I (1744)

1744 年 埃塞勒 **发明方法** 包含弹性曲线的完整分类为 9 种不同的物种 (§9.3.2.2.1) 但埋在一流物体内, 代表着几乎直的配置, 给了埃乌勒一开始无法识别的深刻洞察力。接下来的 Fraser, 1991 我们正在探讨这个被忽视的发现。

对于类 I, 参数比例 c^2/a^2 它是无限小, 意思是角度 $\angle PAM \simeq 90°$ 和分区 ACB 它只是稍微弯曲。因为 c 它是小于 a,Euler 的整体弹性方程式 (9.19) (重复在这里)

$$dy = \frac{a^2 - c^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} dx \tag{9.22}$$

哪里 a 和 c 是由边界条件和适用的负载定义的参数, 与比例 c^2/a^2 不同类型的弹性曲线。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

步骤 1: 应用类 I 条件: 对于类 I 的定义特点是, 参数比例 c^2/a^2 它是无限的微小。数学上, 这意味着 $c^2 \ll a^2$, 这使我们能够做出以下接近:

$$a^2 - c^2 \approx a^2$$
$$2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2$$

将这些接近替换为 Eq。9.22:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 + x^2)}} dx$$

步骤 2: 简化名称: 因为我们正在考虑在一个非常直 柱 中的小变形, x^2 相比之下, 小 a^2. 因此:

$$\sqrt{2a^2 + x^2} \approx \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

这给了我们:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}} dx$$

步骤 3: 小型变形的进一步接近 对于初始 屈曲 的 straight 直配置特征, 协调 x 与参数相比, 它很小。a. 在此范围内:

$$a^2 + x^2 \approx a^2$$

取代这个接近:

$$dy = \frac{a^2}{a\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}} dx = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}} dx$$

步骤 4: 最终形式 因果从方形根底下的连续:

$$dy = \frac{a\, dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \tag{9.23}$$

这个简化方程式描述了一个柱的形状在屈曲的边缘。数学接近与物理假设相匹配:

- $c^2/a^2 \ll 1$: 柱 仍然非常直
- 小小 x 缺陷是无限的
- $\angle PAM \simeq 90°$: 基地上的坦根是垂直的

整合此表达成果 $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c}$. 对于一半长的柱 f 边界条件导致 $f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$. 取代强度参数 $P = \frac{2Ek^2}{a^2}$ 给了:

$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \tag{9.24}$$

这个结果包含了一个令人惊叹的影响,Euler 只提到过渡: 需要一个终极力量, 甚至产生一个无限的曲线柱. 物理意义 - 这代表了结构稳定的关键边界 - 将持续十三年。

结论 尤勒的弹性分类在两个层次上运作:9 种数学物种的理论框架和 28 个数字的实用描述。这种双重方法 - 将严格的数学分析与全面的视觉文档结合在一起 - 建立了一个方法模式, 影响了科学分类在各个学科, 从晶体图到生物 taxonomy。九种和 28 个数字之间的显而易见差异并不反映一个矛盾, 而是 Euler 的数学框架内的弹性行为丰富。

更基本地说, 这项工作是数学物理学的第一个完整分类之一, 表明如何系统参数变量能够产生在物理体系中可能行为的整个频谱。Euler 的变量原则、差异方程式和精英集成的合成确定了弹性作为一个角石问题, 继续传达现代计算力学和非线性动态。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9.3.2.3 现代变量框架

强形: 经典 Euler-Lagrange 变分法的历史发展, 从雅各布·伯诺利的弹性调查到埃勒在他的系统治疗中 **通用方法**建立了基本原则, 并证明了变量方法的力量。我们今天使用的数学框架基于这些古典基础, 同时包括现代概念, 提供更严格和更广泛的应用。为了充分欣赏变量方法的优雅和实用性, 从当代数学角度来研究 Euler-Lagrange 方程式是指示性的。现代变量分析采用了可接受功能空间的准确定义, 系统性弱点的表达方式扩展了经典方法的范围, 以及严格的自然与基本边界条件的分类, 澄清了对限制的适当处理。这些当代工具不仅比早期先驱更清楚地启示了基础数学结构, 而且还通过计算方法如有限元法的复杂工程和科学问题能够系统地应用变量原则。该方法的严格介绍在章节中提供 47.

在 结构工程 (和机械) 可以从两个不同的角度接近:

纽顿 平衡, 动机的平衡 (平衡).

拉格兰 方法: 能量平衡 (热力学).

另一方面, 计算变量的基本问题是找到一个功能。$u(x)$ 这样的那

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{9.25}$$

它是静态的。

$$\delta\Pi = 0$$

哪里 δ 指示了 **变量运营商** (不要与衍生品混淆)

我们定义 $u(x)$ 要成为一个功能 x 在间隔中 (a, b), 和 F 成为一个已知的真实功能 (如 能量密度) 我们定义了 **域名** 函数作为属于函数空间中的函数类别的可接受功能集合而不是协调空间中的区域。(这就是一个功能的情况。).

查找功能 $u(x)$ 哪些极端 Π. 所以, 让 $\tilde{u}(x)$ 成为极端功能的邻近路径的家庭 $u(x)$ 假设在最后一点 $x = a, b$ 他们相匹配。定义 $u(\tilde{x})$ 作为极端化的路径和某些自愿的变异的总数, 图 9.19.

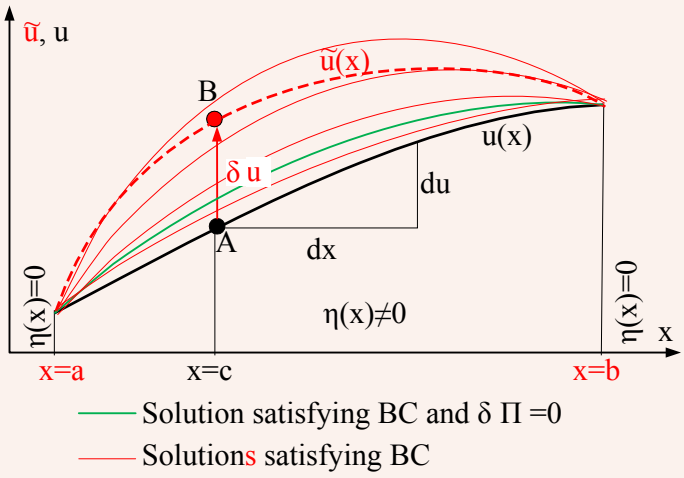


图 9.19: 变量和差异运营商

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\tilde{u}(x,\varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x)$$

哪里 ε 这是一个小参数, 而且 $\delta u(x)$ 是的, **变量** 由 $u(x)$ 这导致

$$\underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I}\,(x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II}\,(x=a,b)} = 0 \tag{9.26}$$

每个字符都必须是零。

1. 第一部分将给我们 **欧拉方程**.
2. 第二部分将使我们能够定义 **边界条件**.

我在 EQ。9.26 给出强大的形状。

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{9.27}$$

这种差异方程式被称为 *Euler-Lagrange* **方程式** 与相关的 Π 这是一个必要的条件 $u(x)$ 极端化 Π.

审查 Eq 的第二部分。9.26, 允许我们定义边界条件, 图 9.19.

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{9.28}$$

可以通过以下组合实现。

$$\begin{array}{llllll}
\eta(a)=0 & \text{and} & \eta(b) & =0 & \text{Essential} & \Gamma_u \\
\eta(a)=0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{and} & \eta(b) & =0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Natural} & \Gamma_t
\end{array}$$

作为一个例子: 支持统一负载的闪电的总潜能 p 被授予

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right)dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F}dx$$

我們要從第一個變化中獲得 Π. 整合部分两次

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w\right)dx \\
&= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w)dx \\
&= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w\right]dx \\
&= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{Ess.}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{Ess.}}}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p\right]}_{\text{Euler Eq.}}\delta w dx = 0
\end{aligned}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{for all x}$$

是指支配的差异方程式和边界条件, 由

重要		自然
$\delta w' = 0$	或	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	或	$(EIw'')' = -V = 0$

弱形: 加勒金/重量残留方法 请注意, 该过程可以通过 伽辽金法 转换。(章节 52) 它将强大的形状差异方程式转化为软弱的形状, 通过测试函数来增加统治方程。$v(x)$ 在域内整合。部分集成则用于减少衍生品的顺序, 将其分布在测试和测试功能之间, 同时自然地包含边界条件。这个过程产生了一个变量声明, 在那里解决方案被寻找在一个由基础功能紧张的终端维度子空间。

对于梁的灵活性, 请考虑第四个命令差异方程所提供的强大形状:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q(x), \quad x \in [0, L] \tag{9.29}$$

哪里 $w(x)$ 是 挠度。EI 是灵活的硬度, 以及 $q(x)$ 是 分布荷载。通过测试函数的多元化 $v(x)$ 并集成:

$$\int_0^L v(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)dx = \int_0^L v(x)q(x)dx \tag{9.30}$$

二次应用部分集成, 转移衍生品 w 到 v, 并包含适当的边界条件, 产生弱形状:

$$\int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2}dx = \int_0^L v(x)q(x)dx + \text{boundary terms} \tag{9.31}$$

这个弱的 表述 只需要 C^1 连续性而不是 C^3 由强大的形状所要求的连续性, 使其适合最终单元分辨。

9.3.3 第一两项挑战的历史概述

五十年来, 弹性问题的发展延伸了五十年, 桌子 9.10 总结了这个时间表的进展。

这个时间表描述了灵活性从地质挑战到数学物理学的基本问题的发展, 展示了数学突破往往需要几十年的精化在多代科学家中。这个问题的解决, 建立了结构力学的数学基础和变量原则, 将成为理论物理学的中心。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 9.10: 雅各布 • 伯诺利 (Jacob Bernoulli) 对差异计算和弹性问题的研究, 从第一次出版到后期完成。

年份/期限	出版 / 来源	内容与意义
1670s	纽顿 (未公布)	研究的弹性类似曲线私人但没有发布结果 (§8.2.2)
1689	**首頁 〉外文書 〉** *Specimen primum calcululi differentialis* (伯诺利 1689) (*Acta Eruditorum* **编辑**)	伯诺利的第一次示范莱布尼齐亚计算; 对基本问题的应用; 方法的编程展示。
1690 年 6 月	**型号**:*Alterum Calculi Differentialis* (1690 年 伯诺利) (*Acta Eruditorum* **编辑**)	主体处理逻辑螺旋、洛克索德罗姆和螺旋三角形。至关重要 **關於** *Funicularia* **問題** 放置在一个著名的 Anogram 中编码的弹性问题 (Bernoulli, Jakob, 1690a).
1690 年 10 月	截止日期过去了; 没有其他数学家提交的解决方案。	
1692	**冥想** *CLXX* (伯诺利 1677-1705) (个人日记)	伯诺利在他的科学笔记本中私人完成了他的弹性解决方案 (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
1694 年 6 月	**曲线** *Laminae Elasticae* (*Acta Eruditorum* **编辑**)	发布完整的弹性解决方案,配有芯片解密、数学证据和“曲率上的黄金理论”- 一个关键的解析工具, 用于弹性曲线问题 (Bernoulli, 1694).
1694	Huygens 的批评和 Bernoulli 的回应	发表的交流 *Acta Eruditorum* **编辑** 清晰多元弹性配置 (Bernoulli, 1694).
1690 年代末～1700 年代初	变量和以色列文档	相关发展由伯诺利斯和莱布尼兹扩展方法曲率和最小化。
1744	**奥姆尼亚歌剧** (雅各布 • 伯诺利, 后世, 由 G 编辑。克里米亚)	伯诺利的完整弹性工作从 **冥想** 和手稿 (Bernoulli, Johann, 1713).
1744	欧利, **发明方法**	使用 变分法 的最终系统处理, 基于 Bernoulli 的 基础 (Euler, 1744b).

9.4 匿名挑战: 问题之间的桥梁 (1724)

适应从 (Truesdell, 1960)

1724 年 8 月, 一份令人挑衅的笔记在 **行动考察员**, 图 9.20 标题“名人重复向地质学家提出的问题, 尤其是那些是伦敦和巴黎皇家社会的成员。” (Anonymous, 1724). 这个挑战, 神秘地签署的“LBC[26],” 提出下列问题:

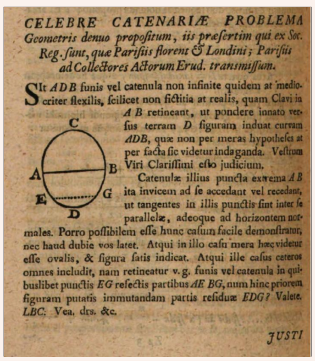
[26]尽管有仔细的科学调查, 但这一点的身份签名者从未建立过。正如 Truesdell 指出的那样, “LBC, 谁是是的, 需要等待几年的答案。” (Truesdell, 1960). 到目前为止, 作者仍然不明。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

让 ADB 成为一个绳子或小链, 不无限但适度灵活。即不是想象的, 而是真实的, 在 A 和 B 的指甲保持固定, 所以以自己的重量, 它降落在 D 的地面上, 并承担曲线。ADB 的数字。这个数字, 似乎不被调查的只是假设, 但实际事实, 是你的判断, 最具幻觉的人。

假设这个链接的极点 A 和 B 或退出相同的, 所以这些点上的坦根是平行的一个另一个, 因此正常到地平线 (即垂直). 这这种情况是可能的, 很容易被证明, 毫无疑问没有不知不觉的你。然而, 在这种情况下, 曲线似乎是一个相关术语形, 如数字足够说明。但是, 这个案例包括所有其他: 为例如, 如果连锁或绳子在任何点 E 和 G 上保持固定, 中间部分 AE,BG 被移除, 你认为数字的其余的 EDG 是否会被改变? 告别。

Anonymous, 1724 "*Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores actorum erud. transmissum*", pg. 366


CELEBRE CATENARIÆ PROBLEMA
Geometris denuo propositum, iis præsertim qui ex Soc. Reg. sunt, quæ Parisiis florent & Londini; Parisiis ad Collectores Actorum Erud. transmissum.

Sit ADB funis vel catenula non infinite quidem at mediocriter flexilis, scilicet non fictitia at realis, quam Clavi in A B retineant, ut pondere innato versus terram D figuram induat curvam ADB, quæ non per meras hypotheses at per facta sic videtur indaganda. Vestrum Viri Clarissimi esto judicium.

Catenulæ illius puncta extrema A B ita invicem ad se accedant vel recedant, ut tangentes in illis punctis sint inter se parallelæ, adeoque ad horizontem normales. Porro possibilem esse hunc casum facile demonstratu, nec haud dubie vos latet. Atqui in illo casu mera hæc videtur esse ovalis, & figura satis indicat. Atqui ille casus ceteros omnes includit; nam retineatur v.g. funis vel catenula in quibuslibet punctis E G resectis partibus AE BG, num hinc priorem figuram putatis immutandam partis residuæ EDG? Valete.

LBC. Vea. drs. &c.

JUSTI

CELEBRE CATENARIÆ PROBLEMA,
Geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent Londini; Parisiis ad Collectores Actorum Erud. transmissum.

Sit ADB funis vel catenula non infinite quidem at mediocriter flexilis, scilicet non fictitia at realis, quam clavi in A B retineant, ut pondere innato versus terram D figuram induat curvam ADB, quae non per meras hypothèses at per facta sit videtur indaganda. Vestrum, Viri Clarissimi, esto judicium.

Catenulae illius puncta extrema A B ita invicem ad se accedant vel recedant, ut tangentes in illis punctis sint inter se parallelae, adeoque ad horizontem normales. Porro possibilem esse hunc casum facile demonstratur, nec haud dubie vos latet. Atqui in illo casu mera haec videtur esse ovalis, et figura satis indicat. Atqui ille casus ceteros omnes includit: nam retineatur, v.g. funis vel catenula in quibuslibet punctis E G resectis partibus A E, B G, num hinc priorem figuram putatis immutandam partis residuae E D G? Valete.

LBC: Vea, drs. &c.

The Famous Catenary Problem,
proposed anew to geometers (especially those of the Royal Societies flourishing at Paris and London; sent from Paris to the Editors of the Acta).

Let ADB be a rope or small chain, not infinitely but moderately flexible, namely not imaginary but real, which nails at A and B hold fixed, so that by its own weight it descends toward the earth at D and assumes the curved figure ADB. This figure, which does not seem to be investigated by mere hypotheses but by actual facts, is for your judgment, most illustrious men.

Suppose the extreme points A and B of this chain approach or recede from one another, such that the tangents at those points are parallel to one another, and therefore normal to the horizon. That this case is possible is easily demonstrated, and without doubt is not unknown to you. Yet in that case the curve appears to be an oval, as the figure sufficiently indicates. But that case includes all the others: for if, for example, the chain or rope be held fixed at any points E and G, the intermediate parts A E, B G being removed, do you think the figure of the remaining part E D G is thereby altered? Farewell.

LBC: Vea, drs. &c.

图 9.20: 第 1724 章 匿名挑战 *Acta Eruditorum* 编辑 (Anonymous, 1724) 以神秘的方式签名 "LBC"

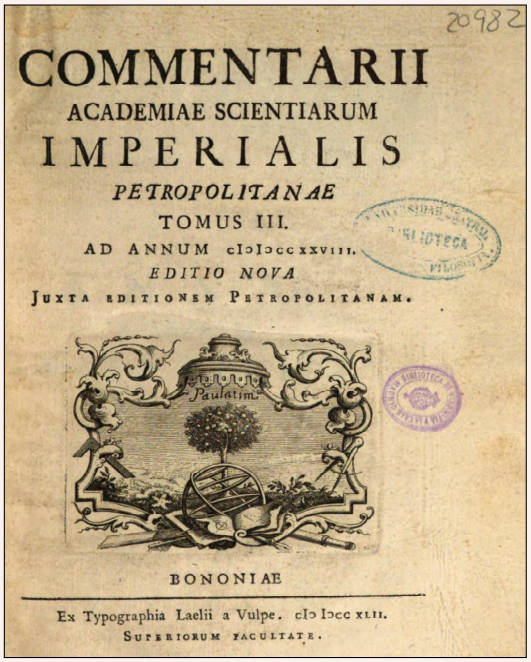
这个挑战与经典的凯特纳问题根本不同。通过引入最终硬度的单元 - 一个特征将完美灵活的链条和弹性轮子之间的差距交叉。和统一的难度是两种不同的机械合并。定义: 在紧张势力方面表达的催眠问题, 和弹性问题, 表达在旋转时刻的意义上 (Truesdell, 1960). 雅各布 • 伯诺利 (Jacob Bernoulli) 就这样说了。在他的原始弹性论文中提出问题, 要求调查 "类型由曲线产生的, 当弹性带按自己的重量在除了被暂停的重量," 但是, 这个问题仍然没有触摸。三十多年来。虽然这 1724 的挑战似乎没有被注意到。首先, 它的解决方案将装备丹尼尔 • 伯诺利的主题和尤勒的第一次关于统一梁理论出版于 1728 年。

9.4.1 伯诺利 - 埃勒合作: 第一次统一 (1728)

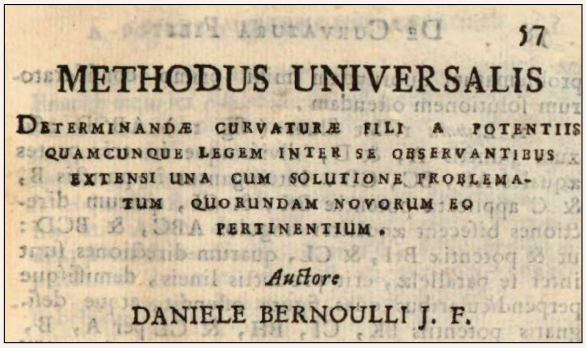
第 1728 章 圣 圣彼得堡、丹尼尔 • 伯诺利和莱昂哈德 • 尤勒主宰了结构力学的新兴理论: 两者都曾经由雅各布 • 伯诺利的先驱工作所影响, 作为青年成员帝国科学院, 他们参与了友好的竞争解决相同的问题。丹尼尔 • 伯诺利 (Daniel Bernoulli) 二十八岁, 他是已有名的科学家, 而二十一岁的尤勒则只出版了三篇论文。

以後, 正如埃利爾自己所說的那樣, "最近, 著名的先生伯诺利和我提出了这个问题, 并认为它不是不优雅的, 我们攻击了它, 并获得解决方案同时同意彼此相处得好" (Euler, 1728, pg. 70). In 1728 年 2 月, 各人共通了灵活和弹性统一理论。行, 其文件连续出现在相同的体积首頁 〉 外文書 〉 西洋學院 *Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 图 9.21 (Bernoulli, Daniel, 1744, pg. 57-63) (Euler, 1728, pg. 64-77). 此同时出版的标志链形线理论与弹性线理论的首次成功统一——非常有问题的 LBC 提出了四年之前。

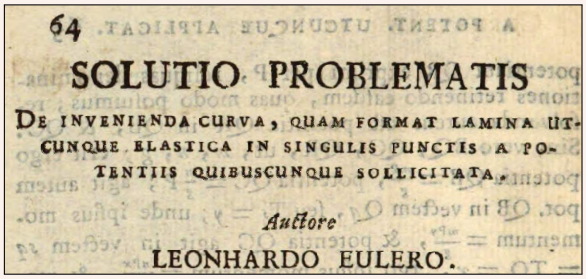
第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



一个特殊问题



丹尼尔 • 伯诺利 (Bernoulli, Daniel, 1744)



莱昂哈德 • 尤勒 (Euler, 1728)

图 9.21: 丹尼尔 • 伯诺利和莱昂哈德 • 尤勒的破坏 1728 年出版物 (Euler, 1728).

9.4.1.1 丹尼尔 • 伯诺利 (建立 Moment-曲率 原则) 1728

第 1728 章 圣 圣彼得堡, 丹尼尔 • 伯诺利出版了一个突破性的作品, 将建立理论基础为所有随后的梁理论。他的纸张 (Bernoulli, Daniel, 1744) 标题 **确定受遵循任意相互关系定律之力所拉伸的线之曲率的通用方法** (普遍方法, 以确定一条由各自之间的任何法则所追随的力量延伸的线的曲率。), 引入了基本的时刻-曲率关系, 携带他的家庭名称, 图 9.22.

伯诺利的革命贡献是承认 弹性抵抗必须与 曲率 的比例。工作在一个受其自己的重量和应用负载的泡沫, 他确定, 总旋转时刻在任何点都必须等于材料的弹性抵抗力。

对于一个受自我重量的喷射元素, 伯诺利表明, 瞬间的贡献来自长度分区的重量。s is:

$$g\sigma s(x - x_e) = g\sigma s\left(x - \frac{1}{s}\int_0^s x\,ds\right) = g\sigma \int_0^s s\,dx$$

哪里 g 重力 加速度 σ 梁 的重量为单位长度, 并且 x_e 代表该部分的中心位置。

从应用重量增加时刻 P, 伯诺利的关键观点是, 这个总时刻必须由材料的弹性抵抗平衡:

$$\mathcal{M} = \frac{B}{r} \tag{9.32}$$

哪里 B 代表什么伯诺利称之为 “包装模块” 和 r 是曲率的射线。这是瞬间曲率关系的第一个明确声明 - 所有梁理论的基础。

因此, 伯诺利的平衡方程变成:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

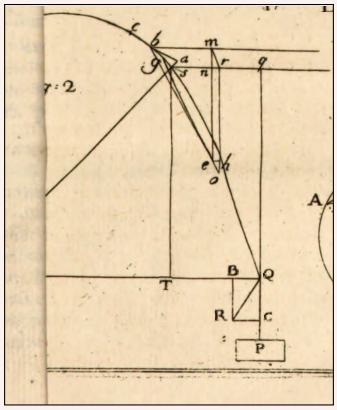


图 9.22: 伯诺利的梁分析显示自我重量和应用荷载效果

$$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r} \tag{9.33}$$

伯诺利的 1728 年作品通过引入时刻曲线原则, 建立了结构机械学的概念基础。然而, 他的方法仍然很大程度上是地质和案例特定的, 缺乏系统的数学框架需要处理一般负载条件和边界限制。

1728 年, 伯诺利的数学技术限制了他相对简单的负载案例。涉及自愿分配的负载、物质特性不同或一般边界条件的复杂问题, 仍然超越其方法的范围。这种限制在激励后来的数学发展方面是至关重要的。

伯诺利的 1728 贡献提供了基本的物理洞察力 - 这种弹性抵抗力与曲率相比例 - 但缺乏数学机械来充分利用这一洞察。基本方程式 $\mathcal{M} = B/r$ 它是正确的, 但系统地应用到复杂问题需要数学方法尚未存在。

物理理解和数学能力之间的这种差距在激励后续发展方面是至关重要的。1728 年后数学家面临的挑战很明显: 如何建立系统的解析方法, 基于伯诺利的基本洞察力来处理自愿的负载条件、复杂地质和一般边界限制。

伯诺利的 1728 瞬间与曲率关系在现代结构分析中保持不变。每個今天的 梁 計算都遵循他第一次提到的原则: $M = EI\kappa$, 在哪里 EI 符合他的 “包装模块” B. 这近三世纪的连续性, 证明了他的观点的基本性质和其对结构力学的持久意义。

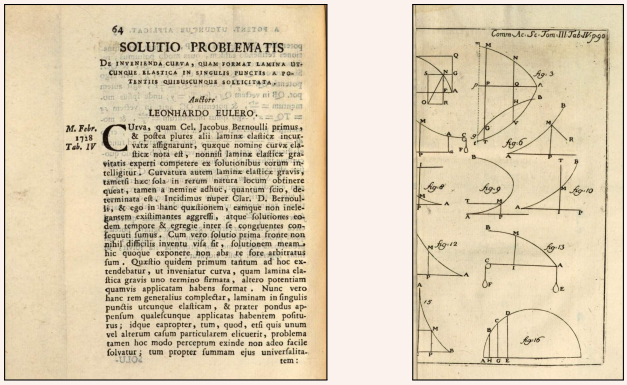
9.4.1.2 Euler (从地质观察到数学革命) (1732)

四年后, 伯诺利建立了时刻曲率原则, 尤勒在 1732 年的工作中面对数学挑战。**解決問題的曲線**, (Euler, 1732), 图 9.23, 代表在机械学中充满水的时刻, 建立了三个基本贡献: (1) 第一一般理论在单一数学框架下统一弹性和灵活曲线, (2) 基本的弹性假设 $M = \upsilon\kappa$ 它基于所有现代梁理论, 以及 (3) 系统地质方法揭示了 18 世纪数学技术的力量和限制, 最终激励了变量计算的发展。

历史背景与埃勒的革命观点 1732 年, 尤勒解决了弹性问题。(Euler, 1732) 他回答雅各布 • 伯诺利的 1691 个挑战, 显著扩大了范围。尤勒的开头言语揭示了他的深刻洞察力:

> 天花板,Cham Cel。雅各布 • 伯努利最先、随后又有多人给出了弹性薄片的弯曲形状……从他们的解可以看出，这些结果只适用于受自重作用的弹性薄片。
>
> 著名的雅各布 • 伯诺利 (Jacob Bernoulli) 首先将其归咎于曲线的弹性相关术语, 仅适用于无重量的弹性 相关术语; 而在自然界中, 所有弹性体都具有重量。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



64

SOLUTIO PROBLEMATIS

DE INVENIENDA CURVA, QUAM FORMAT LAMINA UTCUNQUE ELASTICA IN SINGULIS PUNCTIS A POTENTIIS QUIBUSCUNQUE SOLLICITATA.

Auctore

LEONHARDO EULERO.

M. Febr. 1728. Tab. IV

CUrva, quam Cel. Jacobus Bernoulli primus, & postea plures alii lamine elastice incurvatæ affignarunt, quæque nomine curvæ elasticæ nota eſt, nondum lamine elasticæ gravitatis experti competere ex solutionibus eorum intelligitur. Curvatura autem lamine elastice gravis, tametſi hac fola in rerum natura locum obtinere queat, tamen a nemine adhuc, quantum ſcio, determinata eſt. Incidimus nuper Clar. D. Bernoulli, & ego in hanc quæſtionem, eamque non ineleganter exilimantes aggreſſi, atque ſolutiones eodem tempore & egregie inter ſe congruentes conſequuti ſumus. Cum vero ſolutio prima fronte non nihil difficilis inventu viſa ſit, ſolutionem meam hic quoque exponere non abs re fore arbitratus ſum. Quæſtio quidem primum tantum ad hoc extendebatur, ut inveniatur curva, quam lamina elastica gravis uno termino firmata, altero potentiam quamvis applicatam habens format. Nunc vero hanc rem generaliius completar, laminam in ſingulis punctis utcunque elaſticam, & præter pondus appenſum qualeſcunque applicatas habentem poſituras; idque eatenus, tum, quod, etſi quis unum vel alterum caſum particularem elicuerit, problema tamen hoc modo perceptum exinde non adeo facile ſolvatur; tum propter ſummam ejus univerſalitatem:

图 9.23: Euler, 1732 解決問題的曲線

> Euler, 1732 “*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*”

这一观察确定了一个基本的限制: 所有以前的解决方案仅适用于无重的弹性条纹, 而真正的弹性的身体总是有体重。Euler 的目标是解决一般问题。**重型弹性板** 在自愿的充电条件下。

基本的弹性假设 Euler 的最革命性的贡献是承认 **弹性抵抗率为 曲率**. 他提出, 当弹性单元按力量旋转时, 弹性瞬间与弹性强度和转角角度均等:

$$M = \frac{v}{r} = v\kappa$$

哪里 v 它是灵活的力量和 $\kappa = 1/r$ 是 曲率。这正是现代梁理论的基本关系, 今天写作为 $M = EI\kappa$ 哪里 EI 符合 Euler 的参数 v. 这一观点, 显而易见的回报, 是革命性的 18 世纪初, 形成了基础为所有随后的结构力学.

主方程式与地质分析 通过系统地质分析, 涉及两项关于力量分辨率和时刻计算的基本细节, 尤勒引发了他的主方程:

$$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$$

请注意, 在 图 中 9.23:

- 图 3、显示强度分辨率的基本地质设置
- 图 6、显然是指在不同点周围的时刻计算。
- 鱼。8-10: 显示不同曲线配置 (可能的催眠和弹性曲线)
- 图 12-13: 展示不同的负载场景和边界条件
- 图 15: 显示什么似乎是风负载的海洋或膜
- 图 16: 显示半循环配置

在哪里:

- v = 弹性强度 (灵活性硬度)
- r = 曲率的射线
- E, F = 应用的终端负载在垂直和水平方向
- P, Q = 分布式负载单位长度
- x, y 卡特西亚协调

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

Euler 的主方程式的现代解释 Euler 的主要方程式是 **时刻 平衡方程** 对于一个梁 , 表达为曲率. 他的 1732 文本代表了弹性曲线时刻平衡的第一个总体声明。

现代的瞬间曲率关系:

$$M = EI\kappa = \frac{EI}{R} \tag{9.34}$$

在哪里:

- M = 内部 弯矩
- EI = 灵活性硬度 (弹性模量 × 惯性矩)
- $\kappa = 1/R$ = 曲率
- R = 曲率的射线

现代的同等性是 **弹性曲线的差异方程式**:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.35}$$

梁 配有分布负载 $q(x)$ (垂直) 和 $p(x)$ (地平线) 最后的力量 V 和 H:

$$M(x) = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.36}$$

结合方程式 (9.35) 和 (9.36) 我们获得了现代对方等式:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Vx + Hh + \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int_0^x p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.37}$$

$$\text{Euler's } \frac{v}{r} \leftrightarrow \text{Modern } \frac{EI}{R} = EI\kappa \tag{9.38}$$

$$\text{Euler's } v \leftrightarrow \text{Modern } EI \tag{9.39}$$

$$\text{Euler's } Ex + Fy \leftrightarrow \text{Modern } Vx + Hh \tag{9.40}$$

$$\text{Euler's } \int P\,dx + \int Q\,dy \leftrightarrow \text{Modern } \int q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \int p(\xi)h(\xi)\,d\xi \tag{9.41}$$

值得注意的是, 尤勒的 1732 地质方法捕获了我们今天通过基本梁方程式所表达的相同物理学, 这表明他的数学框架尽管几乎有三个世纪的随后发展。

革命统一原则 超越建立基本的平衡方程, 尤勒最深入的洞察力是认识到, 完美灵活的身体可以通过设置来描述相同框架。$v = 0$:

$$0 = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy \tag{9.42}$$

这种统一的处理揭示了一个基本的洞察力: 催化物、弹性曲线和其他机械曲线不是分开的数学实体, 而是同一个家庭成员, 只有在弹性参数的价值上才有所不同。这表明了尤勒在不同物理现象中感知基本数学统一的独特能力。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

展示框架力量: 卡特纳解决方案 为了证明他的框架的多样性,Euler 展示了它如何系统地恢复已知结果。共用大教堂 (完美灵活的线条在统一垂直充电下 $dP = a\,ds$, $Q = 0$, 和 $E = 0$), 设置 $v = 0$ 在他的统一方程式中, 它提供:

$$0 = Fy + \int_A^M P\,dx \tag{9.43}$$

通过系统地质分析使用关系 $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$ 和适当的整合技术, 这减少到熟悉的催化方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Fy}{\sqrt{a^2y^2 - F^2}} \tag{9.44}$$

这种衍生品描述了一般框架如何系统地恢复已知的结果, 同时提供更深入的地质洞察力基础机械。尤勒的方法的系统性质与以前用于单个曲线类型的 ad hoc 方法明显相矛盾。

引人注目的挑战: 重弹性拉米娜 當 Euler 試圖他的主要目標 - 在自己的重量下解決沉重的柔軟滑板 - 他遇到了根本不同的數學挑戰。為一個 梁 與重量 密度 a 每单位长度, 分布的负载创造一个时刻分配与弓长度比例, 导致:

$$\frac{v}{r} = \int as\,dx \tag{9.45}$$

哪里 s 代表从参考点到所考虑的位置的弓长度。

这个方程式呈现了一个圆形数学依赖性, 证明了 18 世纪的方法不可分割。根本的困难是, 两条弓长度 s 和曲率 的射线 r 是未知曲线形状的功能本身 $y(x)$. 具体而言:

弓长度: $s = \int_0^x \sqrt{1 + (dy/d\xi)^2}\,d\xi$

曲率: $\frac{1}{r} = \frac{d^2y/dx^2}{(1+(dy/dx)^2)^{3/2}}$

取代这些关系, 将埃勒的方程式转化为一个 包含未知功能的整合差异方程式 $y(x)$ 其衍生品以极度非线性方式。正如 Euler 自己指出的那样, 这种方程式 “不能轻易完成” 使用 1732 年可用的数学技术, 创造了所有基本解决方法的数学依赖。

数学限制与革命的种子 尤勒的 1732 限制揭示了更强大的数学工具的需要:

1. **集成困难**: 物理重要案例产生集成不能用可用的技术评估
2. **Ad hoc 方法**每个问题都需要特定的地质结构, 缺乏系统性
3. **失踪 优化原则**没有基本的物理原则从数学可能性中选择解决方案

这些限制, 尤其是重弹性拉米纳案例, 清楚地表明, 基本的机械问题需要数学工具尚未存在 - 最终激发了尤勒的发展。1744 年变量计算。

与现代理论和历史影响的联系 Euler 的 弹性假设建立了现代结构分析的概念基础。今天的 Euler-Bernoulli 梁 理论直接从这项工作中产生, 与基本关系 $M = EI\kappa$ 不变的形状。弹性模量的 E 和 惯性矩 I 在现代评级中, 它与 Euler 的 “灵活的力量” 参数 v. 这种连续性表明, 尤勒 1732 的地质洞察正确识别了结构工程中中心的基本物理学。

系统地质方法, 最终被变量方法所替代, 为解析机械制定了模板: 识别基本物理原则, 开发表达这些原则的数学框架, 并应用系统解决技术。这种方法成为数学物理学的标准。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

解析革命的遗产与桥梁 尤勒的 1732 年作品代表了一个关键时刻, 地质洞察揭示了现有数学方法的力量和限制。通过清楚地证明, 重要物理问题超越了当前技术的能力, 这项工作为开发变量计算提供了关键动机 - 数学革命将允许系统解决机械优化问题。

单一框架下的弹性和灵活曲线的统一, 模拟了尤勒对基本数学统一感知的天才。这种方法成为 18 世纪数学物理学的特点: 寻找通用原则, 通过常见的数学结构来解释各种现象。

最重要的是,Euler 的弹性假设的识别 $M = v\kappa$ 提出了概念的基础, 在其中建立了所有随后的梁理论。每個現代的结构分析最終都會追溯到這個關於曲率與柔軟抵抗之間的關係的基本觀念。

因此,1732 年的作品既是地质机械的顶峰成就, 又是更强大的数学方法的必要性明确的表现　完美地将其置于 17 世纪地质传统与后世解析革命之间的桥梁。18 世纪。

9.4.1.3 Euler-Bernoulli 理论

现代术语 “Euler-Bernoulli 梁 理论” 反映了一项仔细的历史贡献, 承认两者的补充贡献。丹尼尔 • 伯诺利的 1728 年物理洞察和尤勒的 1732 年数学框架。这种双重定义, 虽然是当代工程文学的标准, 值得对其历史准确性和术语本身的发展进行审查。

伯诺利: 和 “伯诺利” 该名称的组成部分主要荣誉丹尼尔 • 伯诺利 1728 年成立的基本 瞬间曲率关系 $\mathcal{M} = B/r$. 这代表了第一個明確的認識, 以至於柔軟抵抗是相對的曲率 - 角石的洞察力, 在那裡所有後來的梁理論都放鬆。然而, 这项授予也暗示地承认了伯诺利家族的更广泛遗产, 特别是 雅各布 • 伯诺利的 1691 表述原始弹性问题, 引发了整个领域的调查。

丹尼尔 • 伯诺利的贡献基本上是概念性的: 承认, 在梁的内部时刻必须相当于材料的弹性抵抗力。灵活性硬度分为曲率的射线。这种洞察力提供了弹性变形的物理原则, 但缺乏对复杂负载场景系统应用所需的数学机械。

Euler 的: 尤勒的 1732 年作品将伯诺利的物理洞察力提升到一个全面的数学理论。虽然 Euler 基于丹尼尔 • 伯诺利建立的时刻曲率原则, 但他的贡献是转变性的, 而不是仅仅是加剧性的:

1. **系统方法论** Euler 开发了数学方法, 可以系统地应用到各种负载条件。
2. **一般 平衡方程**其主方程式包括在统一框架内任意的弹性属性、分布负载和边界条件。
3. **理论统一**欧勒证明, 弹性曲线和完美灵活曲线属于相同的数学家庭。

尤勒的数学复杂化使伯诺利的物理原则实用, 将孤立的洞察力转化为结构力学的工作理论。

组合名称 “Euler-Bernoulli 梁 理论” 这些基本论文发表后不立即出现。术语进化反映了工程社区的两项贡献的重要作用的逐步认可:

早期时期 (1732-1800): 现代参考通常以单独的贡献为信用, 而尤勒的工作因其数学全面性和实用性而获得突出。

19 世纪发展: 随着喷雾理论在工程教育和实践中变得系统化, 伯诺利的瞬间曲线原则的基本性质与尤勒的数学方法一起获得了越来越多的认可。

现代标准化: 催眠的 “Euler - 伯诺利” 命名成为 20 世纪工程文学的标准, 反映了科学共识, 这两项贡献对整个理论至关重要。

双重分配精确反映了梁理论的历史发展, 承认伯诺利的物理洞察力和仅仅是尤勒的数学框架构成了一个完整的弹性射线理论:

- **伯诺利的限制**在建立基本原则时, 他的 1728 工作缺乏系统的方法来解决复杂问题。
- **Euler 的依赖性**尽管开发了精致的数学技术, 但尤勒的方法基本上依赖于伯诺利的瞬间与曲率关系。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- **补充需要**完整的理论要求物理理解和数学机械

现代梁方程式 $M = EI\kappa$ 与 平衡 关系相结合 $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$ 直接体现了两个历史贡献:

$$\text{Bernoulli's insight:} \quad \mathcal{M} = \frac{B}{r} \rightarrow M = EI\kappa \tag{9.46}$$

$$\text{Euler's framework:} \quad \frac{v}{r} = f(\text{loading}) \rightarrow EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \tag{9.47}$$

这种连续性表明, "Euler - 伯诺利" 定义比历史公约更重要, 它准确地识别了现代结构分析统治的数学关系的概念起源。

一些历史记录强调了理论发展的不同方面:

- **雅各布 • 伯诺利强调**: 承认 1691 弹性挑战为基本问题声明
- **Euler 原始**重点是 Euler 的全面数学处理, 作为决定性的理论进步
- **集体发展**观察梁理论从更广泛的 18 世纪数学物理学家社区中出现

但是, 标准 "Euler - 伯诺利" 命名仍然是历史上防御和教学价值, 清楚地识别了两个基本组成部分: 物理原则和数学框架。

简而言之, 这个术语 "Euler-Bernoulli 梁 理论" 代表一个准确的历史特征, 承认丹尼尔 • 伯诺利 1728 时与曲率关系提供的基本物理洞察力以及埃勒 1732 年地质分析开发的系统数学框架。这种双重定义反映了他们的贡献的补充性质, 以及完成梁理论需要物理理解和数学复杂性的历史现实。

在近三世纪的工程发展中, 这种术语的持久性证明了基本贡献和它们所代表的历史分配的准确性。

9.5 屈曲理论: 从观察到关键负载

与凯特纳和弹性不同, 列泡的问题不是在竞赛中产生的, 而是作为尤勒自身的创意延伸以前的工作。

9.5.1 早期工作

9.5.1.1 莱昂纳多 (ca. 1490s)

莱昂纳多写了一篇关于柱子、箭头、绳子和弓的短暂处理, 提供定义规则而不是虚假趋势。(Truesdell, 1960, p. 20). Truesdell 讨论了 Leonardo da Vinci 对结构性行为的显著先进的定性理解。他指出, 莱昂纳多研究了实验和概念的柱子。(图 9.24a) 试图理解为什么有些人通过弯曲失败, 而其他人则通过破裂失败。根据 Truesdell, 莱昂纳多认识到负载地质的重要作用: 当荷载的垂直行动线通过柱子的中心轴时, 会员它在压缩中干净。在这种情况下, 莱昂纳多认为 - 正确地在定性意义上 - 单元 短缺没有侧 挠度. Truesdell 随后与加利利奥、马里奥特和尤勒的后期 解析 治疗相矛盾, 描述了复兴直觉如何逐渐转向完全数学的旋转和稳定理论。之前数学认可现在被理解为异端负载和屈曲引发的 bend。

从分散的评论中, 莱昂纳多提出了对最终的比例规则。荷载 P 柱 的区域 A 直径 d 和长度 L, 如

$$P \propto \frac{\sqrt{A}}{L}, \qquad P \propto d^2. \tag{9.48}$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 9.11: 比较分析: Bernoulli 1728 vs Euler 1732 对 梁 的贡献

视角	1728 年 伯诺利	1732 年
首要创新	第一個明確的瞬間 - 曲率 關係: $\mathcal{M} = B/r$	基本的弹性假设: $M = v\kappa$ 具有系统地质框架
数学方法	特定负载案例的地质分析与时刻计算	系统地质方法, 使用两个基本线条和一般平衡原则
应用范围	带有自我重量和应用点负载的泡沫	仲裁性弹性属性, 分布负载 (P, Q), 以及一般边界条件
关键管理方程式	$g\sigma \int_0^s s\,dx + Px = \frac{B}{r}$	$\frac{v}{r} = Ex + Fy + \int_A^M P\,dx + \int_A^M Q\,dy$
统一成就	限于 梁 混合加载问题	统一的弹性曲线, 完美灵活的身体 (卡特纳) 所有中间案件
物理洞察	弹性抵抗率为 曲率	灵活的身体作为限制案例出现时 $v = 0$• 完整的物理理解
问题成功解决	• 梁 低自重 • 点 荷载 应用 • 任意角度的力量	• 常见的卡特纳衍生 • Parabolic 加载案例 • 正常的强力应用 • 合并的正常 / 潜力力量 • 所有完美灵活问题
主要限制	• 每个案例的 Ad hoc 方法 • 仅限于简单的充电 • 没有系统的框架 • 无法处理复杂的边界	• 重型弹性拉米纳入口 • 综合融入困难 • 没有优化原则 • 地质方法缺乏普遍性
数学工具	基本地质分析, 时刻平衡, 重力计算中心	先进的地质线条, 系统时刻理论, 一般差异方程式, 参数方法
方法性特征	问题特定的地质结构	系统方法: 识别原则 → 一般方程式 → 适用于具体案例
处理负载	自我重量加上可见的应用力量	一般分布式加载: 垂直 (P) 地平线 (Q) 加上终端负载 (E, F)
历史背景	基于雅各布叔叔的弹性工作	回应雅各布 • 伯诺利的 1691 个挑战, 扩展范围
它所证明的	瞬间 - 曲率 关系对弹性行为至关重要	这种关系可以系统地应用, 以解决各种机械问题。
未解决的東西	复杂地质, 分布负载, 优化问题	重弹性拉米纳, 需要极端原则的变异问题
现代遗产	瞬间 - 曲率 关系不变: $M = EI\kappa$ (300 年以上)	Euler-Bernoulli Beam 理论基础, 动机发展的变量计算
关系	提供的基本物理原则	建立在伯诺利的基础上系统数学方法

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

字面上, 这些生存的规则是 **相互不一致** (自从 $A \sim d^2$ 第一個關係預測 $P \sim d/L$). 鉴于神经不确定性, 谨慎的解释是莱昂纳多说, 只有质量趋势: 强度下降长度和增加的跨部分大小, 但他没有统一的弹性稳定法 (Timoshenko, 1953). 在现代的意义上, 他感知的 **屈曲 趋势** 长, 滑板在轴下压缩。

9.5.1.2 皮埃特 • 范 • 穆森布鲁克 (1729)

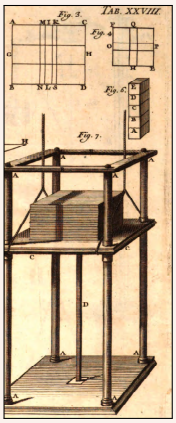
一位领先的实验者, 范穆森布鲁克明确攻击了团结和稳定问题。**实验**. 使用 图 的装置 9.24b 他确定, 在压缩滑板前提样品时的荷载限制相反不同。**广场** 长度, 他提出了一个实验规则的直角部分:

$$P \propto \frac{h^2 B}{L^2}, \tag{9.49}$$

哪里 h 是被曲折的侧面厚度 (其它 "贝特" 侧面) 和 B 是另一面 (Van Musschenbroek, 1729). 和 L^{-2} 扩展是历史上关键点 (它预测了功能依赖性, 后来会出现在 Euler 的理论中。). 部分展览 (h^2 而不是灵活的 $EI \sim Bh^3$) 指示观察到的限制反映了在失败之路上的曲折/裂缝效应, 而不是清洁的弹性不稳定。然而, 这就是 **第一次系统性研究** 压缩器官的侧 挠度 显示, 并在 Euler 的分析之前大约十五年。



(a) 莱昂纳多与屈曲相关的绘画



(b) 瓦恩 • 穆森布鲁克的机器 (1729)

图 9.24: 早期压缩研究专注于轴不稳定现象。

9.5.2 Euler(1759)

虽然范穆森布鲁克的实验已经确定了实验 L^{-2} 对于柱失败的规模法则, 对屈曲不稳定性理解的理论基础来自一个意想不到的来源:Euler 在弹性曲线上的工作。在变量计算中开始的数学练习最终会提供结构稳定性第一严格理论。

1759 年, 尤勒向柏林学院提交了一份论文。(Euler, 1759) 代表了他 1744 年弹性作品的关键重新审查, 图 9.25. 开幕式, 翻译为 Euler, 1759 她揭示了他的热爱的认识:

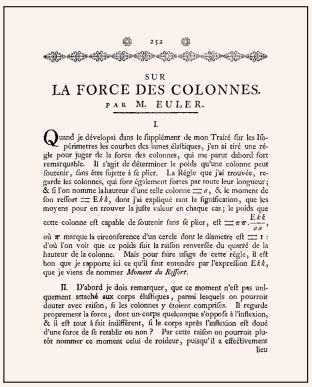
> 當我對以色列的條件進行了一些協議, 這是一個令人驚嘆的結論。它是由一个柱子可以携带的负担, 而无关紧要。我找到了一个规则, 其中一个地方为一个长度的角落平等, 在他们的高度; 和你说话。a 列

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的高度, 和 P Ekk 对于抗弯刚度矩，一根这样的柱在不发生弯曲的情况下所能承受的荷载将为……$= \frac{\pi\pi \cdot Ekk}{aa}$, π 标签: 周围的直径 $= 1$. 因此, 这项负担是因而逆转的, 因为它在殖民地的高度。

当我开发了弹性曲线在我的治疗的补充, 我从他们得出一个结论, 关于强度的柱子打击我非常显而易见。它涉及一个列可以支持的负载, 而无需泡沫。我所发现的规则适用于恒定的横截面积列; 如果我们指定柱的高度 $= a$, 和抵抗的时刻 $= Ekk$, 荷载 这样一个 柱 可以 支座 没有 屈曲 $= \pi\pi.Ekk/aa$, 在哪里 π 表示一个直径 $= 1$ 的圆圈的周围。从此我们得出结论, 荷载是逆向比例的四分之一的高度的柱.

Euler, 1759 “*Sur la force des colonnes*”



SUR
LA FORCE DES COLONNES.
PAR M. EULER.

I.

Quand je développai dans le supplément de mon Traité sur les lignes isopérimetres les courbes des lames élastiques, j'en ai tiré une règle pour juger de la force des colonnes, qui me parut d'abord fort remarquable. Il s'agit de déterminer le poids qu'une colonne peut soutenir, sans être fujette à se plier. La Régle que j'ai trouvée, regarde les colonnes, qui sont également fortes par toute leur longueur; & si l'on nomme la hauteur d'une telle colonne $= a$, & le moment de son reffort $= Ekk$, dont j'ai expliqué tant la fignification, que les moyens pour en trouver la juste valeur en chaque cas; le poids que cette colonne eſt capable de ſoutenir ſans ſe plier, eſt $= \pi\pi \frac{Ekk}{aa}$; où π marque la circonférence d'un cercle dont le diametre eſt $= 1$: d'où l'on voit que ce poids ſuit la raiſon renverſée du quarré de la hauteur de la colonne. Mais pour faire uſage de cette régle, il eſt bon que je rapporte ici ce qu'il faut entendre par l'expreſſion Ekk, que je viens de nommer *Moment du Reſſort*.

II. D'abord je dois remarquer, que ce moment n'eſt pas uniquement attaché aux corps élaſtiques, parmi leſquels on pourroit douter avec raiſon, ſi les colonnes y étoient comptées. Il regarde proprement la force, dont un corps quelconque s'oppoſe à l'inflexion, & il eſt tout à fait indifférent, ſi le corps après l'inflexion eſt doué d'une force de ſe rentablir ou non? Par cette raiſon on pourroit plûtôt nommer ce moment celui de roideur, puiſqu'il a effectivement lieu

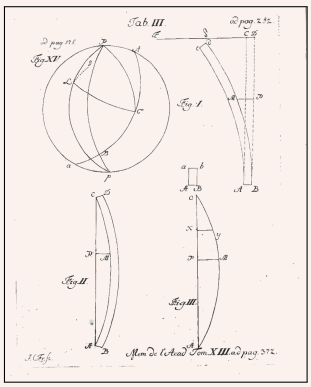


图 9.25: 由 Euler 在 屈曲 上的一篇文章 (Euler, 1759)

这代表了我们现在所知道的 Euler 屈曲公式的第一个明确的组合: $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ 现代的评级。

尤勒的 1757 年作品将这个概念普遍化, 超越纯粹弹性身体, 强调 “抵抗时刻” Ek^2 更广泛地应用:

它本质上涉及到任何身体抵抗曲率的变化的一种力量, 并且完全毫无意义的是这种身体在灵活后是否被赋予恢复其原始形状的力量。因此, 我们最好把这个时刻称为坚固的时刻。**路由时刻**因为它发生在所有抵抗灵活的身体中, 无论它们是弹性还是不弹性。

Euler, 1759 “*Sur la force des colonnes*”

二、Euler (1759) 而现代 “物种 I” (§9.3.2.2.1) 接口从同一开始弹性四角形, 表达压缩的弹性线曲线:

$$dy = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}}\, dx. \tag{9.50}$$

这种关系源于弯曲的坚固性平衡。EI (Euler 的 Ekk), 轴 荷载 P, 和曲率, 并构成共享的起点。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

由 I 物种驱逐出 (Euler, 1744a)

1. 从 EQ 开始。(9.50).
2. 假设 $c^2 \ll a^2$ (品种 I 条件). 接近:

$$a^2 - c^2 \approx a^2, \quad 2a^2 - c^2 + x^2 \approx 2a^2 + x^2.$$

3. 太小 x 进一步简化:

$$dy \approx \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx.$$

4. 集成:

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{x}{c}.$$

5. 将边界条件应用到顶部: $f = \dfrac{\pi a}{2\sqrt{2}}$ 半长度 f.
6. 与 $P = \dfrac{2Ek^2}{a^2}$ 获取

$$P = \frac{Ek^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}.$$

7. 全身长度 $L = 2f$ 和 $Ek^2 = EI$,

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}.$$

(Euler, 1759) (原始)

1. 引入 EQ。(9.50) 其前的弹性理论。
2. 对于 straight 直案例, 将其减少到线性 ODE:

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} + P\,y = 0.$$

3. 解决方案:

$$y(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right).$$

4. - 的结尾: $y(0) = 0, y(a) = 0$.
5. 无情的解决方案 $\Rightarrow$ 自己的条件:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,a = \pi.$$

6. 因此, 关键的荷载:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{a^2}}$$

Euler 的路径通过 平衡 差异方程式, 并将双重化解释为稳定边界。我接近的物种在弹性四角形上使用明确的无同位素来达到相同的状态。两者都揭示了相同的物理法则: 关键 屈曲 荷载 与长度的方形相反不同。图 9.26

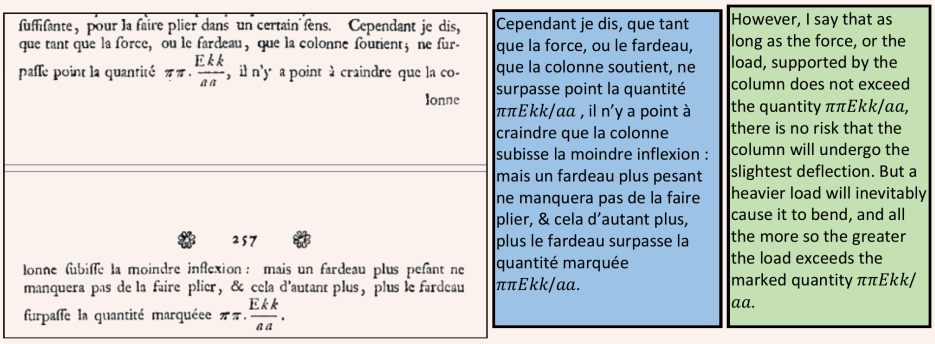


图 9.26: Euler, 1759 关键 屈曲 荷载 的声明

尽管这一突破, 尤勒的分析包含了显著的限制, 这些限制只能通过后续发展来解决:

缺失不稳定概念: Euler 未能承认这一 Eq。9.24 代表一个小 荷载 超过关键值的增加将导致大变形和潜在失败。概念的 “关键” 负载和结构不稳定将不会完全发展, 直到很久之后工作稳定理论。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

不正确的跨部分属性: 尽管奥利尔正确地承认了这一点。Ek^2 测量了硬度, 他错误地猜测到一个直角梁的宽度 b 和厚度 h, 旋转模块是相对的 Ebh^2. 正确的关系涉及 $Ebh^3/12$ 但是, 惯性矩和合适的应力分布分析的概念直到库伦布的工作才会出现。(1773) 其次在梁理论中取得了进展。

影响与遗产

Euler 的关键 屈曲 荷载 衍生品是 结构力学 中最重要的成就之一。公式 $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ 范 • 穆森布鲁克的实验 L^{-2} 同时提供理论框架来理解为什么这种行为发生。

更基本地说, 这项工作引入了关键负载的概念在结构分析 - 这个想法, 结构不能通过物质破裂而失败, 而是由于地质不稳定。这种洞察力将证明是革命性的, 建立了基础在结构稳定方面的所有后续工作, 并将工程从实验工艺转化为基于数学原则的科学。

从埃勒的数学衍生到工程应用的路径也表明, 理论突破往往是如何先于实际解释。虽然 1744 年的变量方法提供了正确的数学关系, 但理解其物理影响需要继续进行研究, 并在物质行为和结构分析中开发补充理论。

结论

关键负载的衍生代表了从雅各布 • 伯诺利的弹性挑战开始的数学传统的高峰。如 Fraser, 1991 观察到, 尤勒真的站在巨人的肩膀上: 雅各布 • 伯诺利 (Jakob Bernoulli) 得出弹性方程式。Huygens 提出了定义混合形状的问题, 纽顿引发了系统分类的主题, 而丹尼尔 • 伯诺利则提出了变化的方法。尤勒的独特成就是决心和解析洞察力, 他追求并将这些想法转化为统一理论。

尤勒的方法 - 将弹性的基本方程式视为物理分子, 受实验定义和数学发展的影响 - 预测了数学物理学的后续发展。然而, 与随后的积极主义方法不同, 这些方法强调数学只是一个操作工具, 尤勒实现了数学和物理概念的基本整合。这种合成不仅在他对弹性问题的概念化中显而易见, 而且在他认识到数学分类可以揭示物理行为的完整范围。

屈曲 公式 $P_{\text{critical}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ 因此, 它代表了更多的实际工程结果。它建立了关键负担和结构不稳定的概念, 将工程从实验实践转化为基于数学原则的科学 - 一个转变, 其影响延伸到现代计算力学和稳定分析。

9.6 尤勒的一般理论: 完整统一 (1771)

到 1770 年代初, 所有可变线的主要挑战都被发出并解决。

伟大的挑战的序列几乎像戏剧在阶段一样展开。首先由雅各布 • 伯诺利提出的催眠, 最终被定义为 莱布尼兹 约翰 • 伯诺利和胡伊根斯 - 也许, 讽刺的是, 不是雅各布自己 (§9.2). 不久之后, 雅各布又提出了他自己部分解决的弹性问题, 而尤勒在 1744 年完成。(§9.3), 由一个重要的 interlude 协助, 其中变分法首先是由丹尼尔 • 伯诺利设计的, 然后严格精炼的 Euler。1724 年的匿名挑战 (§9.4) 添加了进一步的动力, 由丹尼尔 • 伯诺利和欧勒采取并解决。最后, 峰会与尤勒庆祝的 1759 纪念碑到达, 这将数学好奇心转化为结构机械的中心结果。

到 1771 年, 尤勒已经准备好将这些海滩合并。看见每一个问题都被解决了, 他现在只想把它们变成一个单一的分析织物。在他的 **真实的原则** (Euler, 1771) 他提出了可以正确地称之为 A 的 **大统一理论** 可扭曲的线条,[27] 把平衡和动作放在一组统治方程式下, 图。9.27.

> “关于完全柔性体与弹性体平衡和运动状态理论的真正原理。”

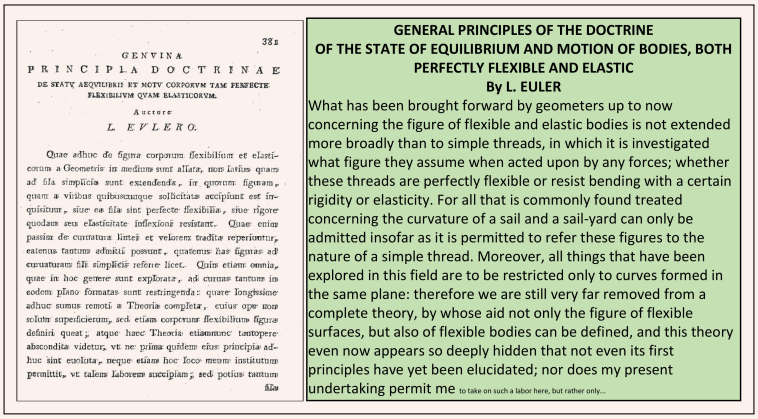
[27] 在现代物理学中, 寻找一个 “大统一理论” 它将强大、弱势和电磁力量结合在一起, 反映了埃勒的愿望将凯特纳、弹性和屈曲问题分为一个分析系统。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> “平衡教义的真实原则和身体的运动, 无论是完美灵活还是弹性。”
> Euler, 1771 “ *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*”, p. 1

通过这条勇敢的开幕线, 尤勒宣布他的意图建立一个普遍的机械变形线, 将伟大的挑战推成一个单一的理论系统。

这份声明明确了尤勒的意图: 建立灵活和弹性线路的第一种真正普遍机械。



GENVINA
PRINCIPIA DOCTRINAE
DE STATV AEQVILIBRII ET MOTV CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM ELASTICORVM.
Auctore
L. EVLERO.

Quae adhuc de figura corporum flexibilium et elasticorum a Geometris in medium sunt allata, non latius quam ad fila simplicia sunt extendenda, in quorum figuram, quam a viribus quibuscunque sollicitata accipiunt est inquisitum, siue ea fila sint perfecte flexibilia, siue rigore quodam seu elasticitate inflexioni resistant. Quae enim passim de curuatura linteï et velorum tradita reperiuntur, eatenus tantum admitti possunt, quatenus hae figurae ad curuaturam fili simplicis referre licet. Quin etiam omnia, quae in hoc genere sunt explorata, ad curuas tantum in eodem plano formatas sunt restringenda: quare longissime adhuc sumus remoti a Theoria completa, cuius ope non solum superficierum, sed etiam corporum flexibilium figura definiri queat; atque haec Theoria etiammunc tantopere abscondita videtur, vt ne prima quidem eius principia adhuc sint euoluta, neque etiam hoc loco meum institutum permittit, vt talem Laborem suscipiam; sed potius tantum fila

GENERAL PRINCIPLES OF THE DOCTRINE OF THE STATE OF EQUILIBRIUM AND MOTION OF BODIES, BOTH PERFECTLY FLEXIBLE AND ELASTIC
By L. EULER

What has been brought forward by geometers up to now concerning the figure of flexible and elastic bodies is not extended more broadly than to simple threads, in which it is investigated what figure they assume when acted upon by any forces; whether these threads are perfectly flexible or resist bending with a certain rigidity or elasticity. For all that is commonly found treated concerning the curvature of a sail and a sail-yard can only be admitted insofar as it is permitted to refer these figures to the nature of a simple thread. Moreover, all things that have been explored in this field are to be restricted only to curves formed in the same plane: therefore we are still very far removed from a complete theory, by whose aid not only the figure of flexible surfaces, but also of flexible bodies can be defined, and this theory even now appears so deeply hidden that not even its first principles have yet been elucidated; nor does my present undertaking permit me to take on such a labor here, but rather only...

图 9.27: Euler “大团结” 纸张 , (Euler, 1771)

一般问题和应力原则

在 1771 年, 埃乌勒提出了他所称之为 “一般问题” 线 平衡: 飞机曲线 BMA 随意分配的力量, 图 9.28. 想象力切断曲线在一个点 M 隔离分区, 他取代了切断的部分与同等 应力 结果 - 一种坦加力 T 一个正常的力量 V, 和一个内部 弯矩 $\mathfrak{M}$. 这种结构是现代应力结果分析的概念种子。

在现代内在的笔记中表达 (Euler 的拉丁衍生品使用不同的符号和略有不同的标志条约) 平衡方程式阅读

$$\frac{dT}{ds} + V\frac{d\phi}{ds} = -F_t, \tag{9.51}$$

$$\frac{dV}{ds} - T\frac{d\phi}{ds} = -F_n, \tag{9.52}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{ds} - V = 0, \tag{9.53}$$

哪里 $r^{-1} = d\phi/ds$ 是曲率和 ϕ 标志着坦根角 (在欧勒的公约中, 经常是滑角的补充。).

统一和普遍化大挑战

尤勒的通用方程式包括, 作为特殊情况下, 经典问题变形线:

凯特纳 (灵活链): If $\mathfrak{M} = 0$ (没有沉默的坚固) 和 $F_t = 0$, $F_n = g\sigma$ (自重单位长度), 方程式减少到由 Leibniz,Johann Bernoulli 和 Huygens 解决的催眠问题。

精力 (灵活的 ROD): 与 $F_t = F_n = 0$ (没有分布的负载) 和宪法法 $\mathfrak{M} = EI/r$ 这是雅各布 • 伯诺利 (Jakob Bernoulli) 首次提出的弹性方程式, 并于 1744 年由尤勒 (Euler) 完全开发。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

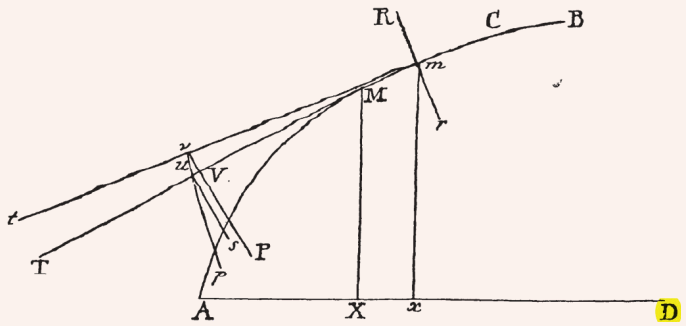


图 9.28: Euler 对一般 平衡 的图表 (Euler, 1771).

柱 屈曲 (1759): 适用于轴负载的原始柱, 相同的框架产生了线性稳定状态。Euler 以前有 (1759) 取消关键 荷载 $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ 对于倾斜的端子; 在更广泛的 1771 设置中, 这似乎是一个特定的特征值 (双重化) 一般理论中的问题。

> "终端 $d^3\phi$ *ad differentialia quarti gradus assurget.* 相反的差异。"
>
> "第三个衍生术语上升到第四个命令的差异方程式。"
> Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 12

此段落突出 Euler 的方法如何自然产生更高的命令弹性方程式, 在结构分析中标志着。

一般线 平衡 (1771): 最重要的是,1771 条例表明相同的方程式统治 任何 随意的坦克和正常的荷载分布下线, 有或没有弯曲硬度。Euler 本人强调了他的解决方案的适应性:

> "把我们的解推广到其他情形并不困难... ..."
>
> "我們的解決方案也會不難適應其他情況。"
> Euler, 1771 "*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*", p. 13

这一新的一般性层面将分析从特殊案例提升到通用平衡线的原则, 并在记忆的附属部分中提高到动作问题。(振动线和弹性轮子) 因此, 在一个方法中将静态和动态联系起来。

关闭前景

这些作品结合起来, 标志着 Euler 的计划在可变线上完成。1744 年弹性提供了数学基础; 列上的 1759 纪念碑展示了解决中央工程问题的力量; 1771 年, 对话引发了平衡的普遍理论和灵活和弹性线路的动作。在这一进展中, 尤勒将连锁、轮子和列的孤立挑战转化为一个解析框架的一面, 这不仅统一了他世纪的机械, 而且也预测了现代应力结果和连续的制定统治原则。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

概述: 从挑战到科学

从个人挑战到统一理论的进化, 在机械科学中表现出根本性的转变。1690 年代的加泰罗尼亚问题证明了计算在优化中的新力量。雅各布 • 伯诺利的弹性挑战推动了数学转向变化的方法。屈曲问题揭示了抽象理论如何预测工程结构中的关键现象。

尤勒 1771 的一般理论将这些成就总结为一个全面的框架:

- **统一地质与机械**连接 曲率 和直接与内部力量结果的歪曲;
- **应力 原则**: 引入 T (坦克), V (正常), 和 $\mathfrak{M}$ (瞬间) 作为基本数量;
- **提供的通用方法**格式化 平衡 方程, 独立于物质法则, 与宪法关系提供关闭;
- **与物质行为区分的电影**清晰地分开的地质描述与宪法假设;
- **允许系统分类**显示了完美灵活和弹性线路如何作为一般框架的特殊案例出现。

旅程从 加利利奥对梁对欧勒的差异方程式的强度的定性评论延伸了近两世纪的数学和机械发展。大挑战作为催化剂, 引导计算、变量分析和物理合理化的进步。他们在尤勒的一般理论下最终统一, 证明了具体的、有意义的问题如何揭示普遍原则。

遗产远远超越原始问题。现代结构分析 - 从天花板到悬挂桥梁, 从微规模材料到 DNA 分子 - 留在最初通过解决这些“简单”问题关于吊链, 相关术语轮和压缩列的基础上。在这个意义上, 伟大的挑战实现了他们的最高目标: 从实验工艺转化为数学科学。

> “把我们的解推广到其他情形并不困难……”
>
> “我們的解決方案也會不難適應其他情況。”
> Euler, 1771 “ *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*”, p. 13

尤勒的关闭笔记占据了他 1771 年的记忆精神: 一个框架不限于特殊问题, 但开放、可适应和持久。

9.7 结论

加利利奥对梁强度的定性反思之路 (§7.2.2) Euler 的普遍方程式的歪曲线延伸了近两个世纪, 并将机械从一个由模拟和实验导向的工艺转化为数学科学。每个挑战都扮演着决定性的角色: 凯特纳里揭示了计算在解决优化问题中的力量; 灵活的压力数学向变量方法和更高的顺序差异方程式; 匿名 1724 问题将这些洞察力扩展到更普遍的强度法则; Euler 的 屈曲 公式确定了结构稳定理论的预测力。

尤勒的 1771 年合成标志着这一进展的高峰。通过编写平衡线的“一般问题”, 他引入了应力结果的概念机械 - 压力力量, 正常力量和弯矩 - 并从物质反应中分开了动态平衡。在这样做中, 他预测了连续介质力学的原则, 并提供了一个系统的方法, 其中特定案例如链条、线条和柱作为一个框架的专业化出现。

这些巨大的挑战的遗产是深刻的。在欧洲领先的地质学家中, 知识分子竞赛开始了结构的机械化, 并为现代工程分析奠定了基础。今天, 从桥梁和滑板的设计到微结构和生物分子的模拟, 在链条、轮子和列的研究中首次形成的方程式仍然是基本的。这些问题的历史表明, 追求具体的挑战有时会揭示自然现象统治的普遍原则, 以及数学在与物理观念相结合时如何将工程从实验实践提升到预测科学。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 9.12: 三大挑战的统一时间表:Catenary、Elastica 和 Anonymous Challenge

日期	挑战	事件
c. 1490s	早期研究	莱昂纳多 • 达芬奇在笔记本中挂着链条。
1614	早期研究	Isaac Beeckman 注意到挂绳问题, 并与德卡特讨论。
1634	早期研究	史蒂芬的 **工作数学** *é* **马丁** 发表后文, 与吉拉德的笔记声称一个偏见的催眠。
1638	早期研究	加利利奥正在调查这家公司, 但错误地认为它是模拟性的。(Galilei, 1638).
c. 1646	早期研究	年轻的 Huygens (17 岁) 向 Mersenne 证明, 凯特纳里不是平凡的。
1670s	早期研究	牛顿研究弹性类似曲线私人, 但没有公布他的结果。
1690 年 5 月	凯特纳	雅各布 • 伯诺利 (Jakob Bernoulli) 提出 **函数** 挑战在 *Acta Eruditorum* **编辑** (Bernoulli, Jakob, 1690b).
1690 年 6 月	精力	雅各布 • 伯诺利提出弹性问题 **模型** *alterum* 被编码为 Anagram (Bernoulli, Jakob, 1690a).
第 1690 章 晚了	凯特纳	Leibniz 接受挑战, 重定向它, 专注于 **催眠**.
1690 年 10 月 9 日	凯特纳	Huygens 用芯片解决方案回应。
1690 年 10 月 13 日	凯特纳	Leibniz 回應 Huygens 不使用 cipher。
1690 年 10 月	精力	巴塞罗那收获节日截止日期已过去; 没有提交解决方案。
第 1690 章	凯特纳	约翰 • 伯诺利向编辑提交他的解决方案 *Acta Eruditorum* **编辑** (Bernoulli, Johann, 1691c).
1691 年 1 月 27 日	凯特纳	Leibniz 承认 Huygens 的辅助曲线方法。
1691 年 2 月 23 日	凯特纳	Huygens 表示对问题的困难有信心。
第 1691 章 二	凯特纳	Leibniz 告知 Huygens 约翰的成功解决方案。
1691 年 3 月 21 日	凯特纳	雅各布 提交 **附加信息** *Ad Problem Funicularium*.
1691 年 3 月 26 日	凯特纳	Huygens 发送修正的芯片。
1691 年 5 月 5 日	凯特纳	Huygens 和 Leibniz 提出最终解决方案 (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a).
1691 年 6 月	凯特纳	三种解决方案 (希格斯, 莱布尼兹, 约翰 • 伯诺利) 同时发表在 *Acta Eruditorum* **编辑** (Huygens, 1888a; Leibniz, 1691a; Bernoulli, Johann, 1691c).
1692	精力	雅各布 • 伯诺利将以私人方式完成弹性解决方案 **冥想** *CLXX* (Bernoulli, Jakob, 1677–1705).
1694 年 6 月	精力	雅各布出版 **曲线** *Laminae Elasticae*, 解码的安格拉姆和揭示 “黄金理论” (Bernoulli, Jakob, 1694).
1694	精力	Huygens 发表评论, 识别多种弹性配置 (曲线 A-G).
1694	精力	雅各布对 Huygens 有礼貌的回应, 捍卫他的地质方法的一般性。(Bernoulli, 1694).
1696	相关	约翰 • 伯诺利提出了布拉希斯托克隆挑战 *Acta Eruditorum* **编辑** (Bernoulli, Johann, 1696).
1697 年 1 月	相关	约翰通过印刷的布拉希斯托克隆期限延长 **计划**.
1697 年 5 月	相关	约翰使用光学类似的布拉希斯托克隆溶液出版; 纽顿, 莱本兹,Hô 皮塔尔, 雅各也解决了 (Bernoulli, Johann, 1697a).

继续在下一页

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

桌子 *9.12 (继续)*

日期	挑战	事件
1724 年 8 月	匿名	匿名挑战 (签名“LBC”) 出現在 *Acta Eruditorum* 编辑 关于“适度灵活”链 (Anonymous, 1724).
1724–1727	匿名	这个挑战大多是无意识的; 没有即时的回应。
1728 年 2 月	匿名	丹尼尔 • 伯诺利和欧勒独立提交统一的灵活线路解决方案 (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	匿名	两项解决方案连续发表在 首頁 〉外文書 〉西洋學院 *Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. 3 (Bernoulli, Daniel, 1744; Euler, 1728).
1728	匿名	丹尼尔建立了基本时刻 - 曲率 关系 $\mathcal{M} = B/r$ (Bernoulli, Daniel, 1744).
1729	相关	Pieter van Musschenbroek 发布实验 屈曲 研究显示 $P \propto L^{-2}$ 扩展 (Van Musschenbroek, 1729).
1732	匿名 / Anonymous	Euler 發表 解决问题一般地质框架, 结合弹性和灵活曲线: $M = v\kappa$ (Euler, 1732).
1742 年 10 月 20 日	精力	丹尼尔•伯诺利 (Daniel Bernoulli) 写信给欧勒提出能源减少原则:“vis viva potentialis”必须是最小的。(**DanielBernoulli1742toEuler**).
1742	精力	丹尼尔表示弹性能量 $\int ds/R^2$ 第四条 差异方程式 (**DanielBernoulli1742toEuler**).
1744 年 7 月	精力	Euler 提供主要章节 发明方法 到出版商 (Euler, 1744b).
第 1744 章	精力	Euler 提供 2 个附件: Additamentum I (弹性) 和二 (最少行动) (Euler, 1744b).
1744	精力	*Methodus inveniendi* 线路曲线 发表, 介绍了变量计算的第一系统处理 (Euler, 1744b).
1744	精力	Euler 分类九种弹性曲线 (品种 I - IX) 具有完整的数学特征 (Euler, 1744a).
1744	精力	雅各布的完整弹性工作在后面出现 奥姆尼亚歌剧, 编辑 由 加布里埃尔 • 克拉默 (Bernoulli, Jakob, 1744b).
1759	屈曲	Euler 发布其列布克式公式 $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ 第 1744 章 被我所指的 (Euler, 1759).
1771	统一	Euler 發表 真实的原则 将所有三个挑战统一为一个普遍的歪曲线理论 (Euler, 1771).
1771	统一	Euler 引入了“一般问题”与 应力 结果: 探险力量 T 正常的力量 V, 和弯矩 $\mathfrak{M}$ (Euler, 1771).

表 9.13: 在统一时间表中提到的出版物

作者 (s)	年度	引用	标题	描述
加利利奥 Galilei	1638	(Galilei, 1638)	演讲和数学示威	错误地提出, 阴道曲线是模拟的; 提供基本工作 梁 强度和结构力学
雅各布 • 伯诺利	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690b)	麻烦 *Funicularium*	对数学社区的挑战 *Acta Eruditorum* 编辑, 要求由挂链形成的曲线

继续在下一页

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

桌子 *9.13* (继续)

作者 (s)	年度	引用	标题	描述
雅各布・伯诺利	1690	(Bernoulli, Jakob, 1690a)	型号:*Alterum Calculi Differentialis*	将弹性问题置于一个图形中编码的解决方案上; 承诺在 10 月巴塞罗那收获节公布解决方案
约翰・伯诺利	1691	(Bernoulli, Johann, 1691c)	解决问题 *Funicularii*	1690 年 12 月提交给编辑, 并于 1691 年 6 月与 Leibniz 和 Huygens 一起出版。
克里斯蒂安・休根斯	1691	(Huygens, 1888a)	解决問題的問題	使用辅助曲线开发的 Huygens 地质催化溶液; 通过与 Leibniz 的芯片通信
戈特弗里德・W.・莱布尼茨	1691	(Leibniz, 1691a)	论柔性线在自重作用下弯曲形成的曲线	莱布尼茨的链形线解建立了与对数函数和双曲函数的联系；这是最全面的论述
雅各布・伯诺利	1692	(Bernoulli, Jakob, 1677–1705)	冥想 *CLXX*	雅各布的私人科学笔记本包含他的完整弹性解决方案; 在他一生中仍然没有公布
雅各布・伯诺利	1694	(Bernoulli, Jakob, 1694)	拉米纳 *Elasticae*	第一次出版的弹性解决方案与“黄金理论”相关曲线向旋转时刻; 分解 1690 anagram
雅各布・伯诺利	1694	(Bernoulli, 1694)	答案是 *Dn*。胡格尼	对 Huygens 的批评, 辩护他的地质方法的一般性, 以解决弹性问题。
约翰・伯诺利	1696	(Bernoulli, Johann, 1696)	问题新	布拉希斯托克隆挑战 *Acta Eruditorum* 编辑成为变分法的创始问题
约翰・伯努利	1697	(Bernoulli, Johann, 1697a)	*Curvatura radii in diaphanis non uniformibus*	利用光学类比和费马原理求解最速降线；证明摆线是下降时间最短的曲线
匿名 (LBC)	1724	(Anonymous, 1724)	庆祝催眠问题	匿名挑战“适度灵活”链, 将纯粹灵活的通道和硬弹性曲线之间的差距结合起来
丹尼尔・伯诺利	1728	(Bernoulli, Daniel, 1744)	*Methodus universalis determinandae curvaturae fili* 通用方法	建立基本时刻-曲率关系 $\mathcal{M} = B/r$ 它成为所有 梁 理论的基础
莱昂哈德・尤勒	1728	(Euler, 1728)	解決問題的曲線	灵活和弹性线路的第一次统一理论; 与丹尼尔・伯诺利 (Daniel Bernoulli) 的论文连续发表, 以回应 1724 年的挑战
皮埃特・范・穆森布鲁克	1729	(Van Musschenbroek, 1729)	物理实验	实验 屈曲 研究确定 $P \propto L^{-2}$ 以实验方式扩展法律, 三十年前的尤勒理论

继续在下一页

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

桌子 *9.13* (继续)

作者 (s)	年度	引用	标题	描述
莱昂哈德 • 尤勒	1732	(Euler, 1732)	解決問題的曲線	一般地质框架与弹性假设 $M = v\kappa$ 在单一理论下统一弹性和灵活曲线问题
丹尼尔 • 伯诺利	1742	(**DanielBernoulli1742toEuler**)	给 Euler 的封信 (10 月 20 日)	建议能量减少原则的弹性; 表达弹性能量作为 $\int ds/R^2$ 第四条 差异方程式
莱昂哈德 • 尤勒	1744	(Euler, 1744b)	*Methodus inveniendi* 线路曲线	变量计算的系统发展, 包括 Euler-Lagrange 方程式; 标志处理设定领域
莱昂哈德 • 尤勒	1744	(Euler, 1744a)	附件 *I: De curvis elasticis*	完整的弹性解决方案, 分类九种不同物种 (I - IX) 使用系统变量方法
雅各布 • 伯诺利	1744	(Bernoulli, Jakob, 1744b)	奥姆尼亚歌剧 (后世)	完整收集的作品, 包括以前未出版的弹性手稿 **冥想** 作者:Gabriel Cramer
莱昂哈德 • 尤勒	1759	(Euler, 1759)	关于殖民地的力量	由 柱 屈曲 公式衍生 $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ • 热情地认识到 1744 年作品中的物种 I 的重要性
莱昂哈德 • 尤勒	1771	(Euler, 1771)	*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii*	大统一介绍了与应力结果的变形线的一般理论 (平常力量, 正常力量, 弯矩)

文化背景 (1670–1790)

这个时期的桥梁是晚期巴洛克、罗科和早期古典时代　绝对主义的时代, 逐步走向启蒙理性。科学、艺术和哲学都分享了一种与和谐、秩序和比例相同的迷恋, 后来被浪漫主义所预见的情感表达性丰富。

意大利

作曲家: 安东尼奥 • 维瓦尔迪 (1678–1741) 例外的巴洛克活力;Domenico Scarlatti (1685–1757) 先进的键盘虚拟性; Giovanni Battista Pergolesi (1710–1736) 约翰尼 • 帕西耶洛 (1740–1816) 帮助形成早期漫画歌剧。
注: 意大利分裂的法院和教会保护支持艺术, 即使科学领导人向北移民。

法国

作曲家: 饰 Jean-Baptiste Lully (1632–1687) 弗朗索瓦•库佩林 (1668–1733) 和 Jean-Philippe Rameau (1683–1764) 塑造法国巴洛克:Christoph Willibald Gluck (1714–1787) 在巴黎工作, 改革的歌剧。
作家和哲学家: 伏尔泰、蒙特斯基耶、迪多和鲁塞奥 (也是作曲家) **哲学家** 关于启蒙的。拉辛和莫利埃将古典伟大与现代戏剧结合在一起。
画家 : 安东尼 • 沃特奥 (1684–1721) 精致的 Rococo 优雅;François Boucher (1703–1770) 饰 Jean-Honoré Fragonard (1732–1806) 以其感性为主; Jacques-Louis David (1748–1825) 以新古典主义和即将到来的革命为主。
注: 巴黎成为欧洲知识产权的首都; **百科全书** 它反映了科学精神, 系统化所有知识。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

德国

作曲家: 约翰 • 塞巴斯蒂安 • 巴赫 (1685–1750) 乔治 • 弗里德里克交易 (1685–1759) 乔治 • 菲利普 • 特莱曼 (1681–1767) 主持人: 第一世纪; 约瑟夫 • 海登 (1732–1809) 沃尔夫甘格 • 阿马德乌斯 • 莫扎特 (1756 年至 1791 年, 奥地利仍然是德国文化的中心。) 引领古典过渡。
作家和哲学家: 格托弗里德 • 威尔赫姆 • 莱布尼兹 (1646–1716) 桥梁科学与物理学;Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781) 现代德国戏剧; 克洛普斯托克和赫德预期浪漫主义; 戈特 (1749–1832) 和 Schiller (1759–1805) 时间结束了。
艺术家: 安东尼 • 拉斐尔 • 梅恩斯 (1728–1779) 约翰 • 佐法尼 (1733–1810) 以新古典风格为主。
注: 圣罗马帝国的法庭修炼工作支持多种护理, 并与柏林和戈丁根的新科学学院相匹配。

瑞士

作家和思想家: 饰 Jean-Jacques Rousseau (1712–1778) 基因改造了欧洲思想和音乐美学;
注: 瑞士的智力生活体现了启蒙宇宙主义, 在科学和艺术界限上产生多元化。

合成

在欧洲各地, 艺术与科学共享了秩序和比例的共同追求, 后来由个性和情感平衡。同样的理性主义引导纽顿、伯诺利斯和尤勒, 在新古典主义中发现了视觉表达, 而在启蒙哲学中则发现了智力体现　思想与艺术的统一, 在浪漫转变之前定义了欧洲。



加拉瓦乔, 朱迪特 · 贝希登 · 霍洛弗内斯 *(1599-1602)*

决定性行动的关键时刻 - 大挑战需要在最大紧张点解决。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

10 连续机械: 结构分析基金会

摘要

本章探讨了从分子到连续理论的范式转变 弹性 这是在 *19* 世纪发生的, 建立数学基础。现代结构分析放松的。智力革命开始于承认, 弹性行为不能通过基于物质点之间的中心力量的简单分子模型充分解释。这些模型的失败 - 特别是他们的预测 泊松比 所有材料均等于四分之一, 促进了物质作为一个由田野方程制统治的持续中间的基本重定义。

该章节跟踪了法国数学学校的贡献, 特别是卡什的 引入 应力张量船员的 理论与实践的合成, 以及绿色 基于革命潜力的表述. 这些发展, 集中在显著的 *1820* 年至 *1860* 年期间, 将弹性从实验规则的集合转化为严格的数学科学。

除了历史故事之外, 章节介绍了基本平衡法则。保存 质量动机和能量它是连续机械的普遍基础。对立理论的处理 表明物质特定的行为是通过客观性原则的特点物质同义, 和热动态一致性. 出现的连续框架, 尤其是其以能源为基础的变量, 提供了工程师将在未来几十年内开发的结构分析实用方法的理论基础设施。

这个讲话的中心是减少机械方法和现象学连续的表达之间的方法紧张, 反映了微观结构与宏观行为之间的关系更深的哲学承诺。这个讨论的解决方案, 支持连续介质力学同时承认两种方法的限制, 模拟了如何实验证据和数学优雅可以共同引导科学进步。

10.1 分子 *vs* 弹性的连续理论 284
10.1.1 概述 285
10.1.2 从加利利奥到法国分子学校 . 285
10.1.3 不断的态度上升 285
10.1.4 比较表 286
10.1.5 哪个理论占主导地位? 287
10.1.6 历史参考 287
10.2 连续介质力学 289
10.3 引入 289
10.3.1 法国革命和现代弹性的诞生 . 289
10.3.2 连续机械与弹性理论的基础 . 290
10.4 完整的数学框架 299
10.4.1 Euler 和 质量 的保留 299
10.4.2 卡西 (1789-1857) 平衡线性动力 300
10.4.3 角度瞬间的平衡 301
10.4.4 克劳斯 (1822-1888) 汤姆森 (1824-1907) 和 Duhem (1861-1916) 热力学法则) 301
10.4.5 第二法则 (英特罗菲不平等): 302
10.4.6 历史发展与现代合成 302
10.5 宪法理论: 物质行为 303
10.5.1 一般框架 303
10.5.2 零 (1925-2017) 和客观性: 材料的原则框架差异 303
10.5.3 绿色 (1793-1841) 和超弹性 . 304
10.5.4 看见 (1850-1919) 物质同义 . 305
10.5.5 科尔曼 (1930-1992) 和零: 热力限制 306
10.5.6 历史观点: 从帝国主义到理论 306
10.5.7 连接到 结构分析 307
10.5.8 一个名字里有什么? 机械的进化与其实践者 307
10.6 结论 314

10.1 分子 *vs* 弹性的连续理论

到 19 世纪初, 由 Euler、Lagrange 和 Bernoullis 开发的变量原则和解析机械提供了强大的数学工具来理解机械系统。然而, 一个基本问题仍然没有解决: **固体中的弹性变形的性质是什么**? 兩個競爭的答案出現, 每個反映了微觀結構與宏观行為之間的關係的深度不同的哲學承諾。

分子和连续的对话方法与弹性 它不仅仅是技术的, 它代表了数学物理学的更深的方法分裂。. 弹性 應該從第一個原則中取出, 从物质微观结构的假设上升? 或者, 如果它是现象学的。描述连续的物体通过领域方程,

审阅稿

而不引用基于原子结构。这个问题动画了许多 19 世纪初的机械, 形成了我们现在所认识的连续介质力学的发展。

此争议的解散对结构分析产生了深刻的后果. 表述的连续性最终占据了主导地位, 特别是其基于潜力的变量。基于能源原则提供了理论基础 , 在其中 Navier,Clapeyron 和后来的工程师将构建实用方法分析箭头, 板块和框架。理解这种范式变革, 因此对于对法国贡献的评价至关重要。到 连续介质力学, 我们在下一个部分审查, 采取了他们所做的具体形式。

首先, 我们将描述两个竞争的理论框架和试验危机, 这迫使分子方法进行重新评估。

10.1.1 概述

弹性理论历史上通过两个主要的范式发展:

1. **分子 (或机械) 理论**试图通过模拟物质来解释 弹性 的分离粒子 (原子或分子) 通过机械互动 (经常中央) 力量。
2. **连续理论**它将物质视为一个连续的媒体, 并通过像应力和应变这样的领域变量描述弹性反应。

在连续理论中, 出现了两种不同的表达式:

- **通用连续 表述**应力 被表达为 应变 的功能, 而不假设它源于潜力。
- **基于潜力 表述**: 应力 由一个尺寸 应变 能量密度 函数衍生 W 是的, $\sigma = \partial W / \partial \varepsilon$. 这个子组也被称为超弹性。

这些框架反映了不同的哲学: 分子理论根源于纽顿机械 低调主义: 持续理论 (特别是基于潜力的形式。) 基于变量原则 热动态一致性.

10.1.2 从加利利奥到法国分子学校

加利利奥介绍了由纤维纤维组成的材料的想法 (§7.3.1.2), 一个假设, 占主导地位的早期模式的力量和变形。这种视觉为灵活性体质解释奠定了基础。

19 世纪初, 法国机械师 - 特别是海军 (1821) 卡西 (1822-1823) 和 Poisson (1829) 弹性是由物质点组成的, 通过中央力量相互作用。1821 年, 纳维尔首先从分子假设中产生了连续方程式, 引导卡希的更有系统的发展, 尽管卡希后来为应力和应变理论提供了更全面、更严格的框架。这种方法, 坚定地根源于分子机械学和新顿的第一原则, 对分析思维的法国学校有着强烈的吸引力。

然而, 一个根本问题出现了: 分子理论预测泊松比 - 在单轴负载下转向应变的比例 - 必须对所有以色素材料完全等于 1/4。这是在物质点之间采取中央力量的直接数学后果。实验明显违反了这一预测, 表明泊松比在材料之间显著不同。(圆形显示值接近 0, 而橡胶接近 0.5). 这种差异, 以及模型的预测只有一个独立的弹性恒定在需要两个的地方, 引起了深刻的怀疑中力分子模型的有效性。(Capecchi, Ruta, and Trovalusci, 2010 ; Todhunter and Pearson, 1893).

因此, 分子理论的核心失败是它的预测, 泊松比必须在所有以色素材料中等于四分之一 - 由于物质点之间的中心力量。实验表明, 这种比例显著不同。(科尔克 ≈ 0 橡胶 ≈ 0.5) 决定性反对分子框架, 揭示自然需要两个独立的弹性恒定而不是单一的恒定预测分子理论。

10.1.3 不断的态度上升

为了克服分子模型的局限性, 弹性的连续公式在 1830 年代至 1850 年代逐渐获得突出。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

卡西 把应力和应变的基因放在一个连续的身体内, 制定什么将成为通用连续模型。然而, 即使他开发了连续介质力学的数学框架, 他一开始就保持了基于分子相互作用的机械类似, 试图和解两种方法。

乔治绿在他的著名 1837 年至 1839 年的光和弹性论文系列中, 他引入了一个突破性的基于潜力的方法。承认物质统治的真正分子法则仍然不明, 甚至当时是不可知的, 他勇敢地提出, 弹性行为可以用一个可扩展潜力功能来描述, 而没有提到基于分子机制。他的模型基于变分法和能源原则, 产生了两个独立的弹性恒定性 - 符合实验结果, 并标记了现在所谓的超弹性的第一个完整的表述。(Green, 1839a; Green, 1839b).

尽管它的实验性成功, 格林的态度遇到了初始抵抗, 特别是在法国, 在那里机械解释根源于新托尼原则是哲学偏好。即使像拉梅、克莱佩龙和年轻的圣文南特这样的辉煌理论家, 在 1840 年代就争论了为什么传统分子理论失败, 却拒绝放弃减少主义理想。[1]

转点逐渐到来。**圣文**起初是分子方法的倡导者, 在 1850 年代成为连续理论最有效的支持者之一。他的半逆方法的开发, 以解决弹性问题, 以及他不断预测的系统实验验证, 有助于确定理论的可靠性。基督教研究的 Bravais, 1866 进一步照亮了问题, 表明分子结构涉及地质安排比简单的点相互作用更复杂, 有助于桥梁概念差距之间的原子和连续描述。

10.1.4 比较表

视角	分子理论	连续理论
安东尼	细微粒子	连续的中间
应力 衍生品	来自互动力量	从宪法法
宪法形式	基于中央力量	**(a)** 一般: $\sigma = f(\varepsilon)$ **(b)** 基于潜力: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$
哲学	缩小, 机械	现象, 变量
主要支持者	胡克, 海军,Poisson,Cauchy (早点), 凯尔文, Maxwell	卡西 (一般) 绿色 (潜力), 拉梅, 圣威尼斯, 皮奥拉, Kirchhoff
灵活的常态	预言一 (鱼类比例 = 1/4)	允许 2 个独立的连续
治疗麻醉症	从轻微的结构	通过交互式的 W 或 f
历史主导地位	1820 年代至 1840 年代	从 1850 年代到
现代角色	分子动力学基础, 多层模型	FEM 核心和固体机械; 潜在模型在超弹性和终端变形的关键

表 10.1: 与弹性的分子和连续理论相矛盾, 有两种连续性。

[1]这揭示了法国寻找基于第一原则的解析优雅和更实用的英国实验主义之间的更深的方法对比, 强调现象学适当性和实验性适合。法國傳統, 由 École Polytechnique 模範, 評估數學的嚴格性和根據基本機械法則。英国方法, 受到剑桥数学教派传统的影响 (剑桥大学的传统和非常严格的考试系统, 原来标记了学习课程和最终考试, 特别为数学学生排名“Wranglers”而闻名。), 他们更愿意提出现象关系, 如绿色的应变能函数, 如果他们同意观察, 即使没有机械的理由。这种哲学分裂将继续影响 19 世纪的机械发展, 法国人逐渐欣赏现象学方法的力量, 当基本机制仍然是黑暗。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10.1.5 哪个理论占主导地位?

直到 19 世纪末, **连续理论** 弹性在工程和应用机械方面具有决定性优势。分子模型未能预测关键实验结果 - 特别是 Poisson 比例限制和需要两个弹性恒定性 - 与强大的解析和基于连续的计算方法的崛起相结合, 导致理论共识的根本变化。

连续的表达, 即 **基于潜力模式** 获得特殊的突出性, 以模型灵活 (逆转) 材料, 特别是在 20 世纪热动态一致的组成理论的发展之后 (例如,Truesdell 和 Noll,Coleman 和 Null). 该框架也证明是由于 Rivlin,Mooney 和其他人的工作而对大型变形和非线性弹性至关重要。一般的连续模型, 不需要潜力, 提供模型的灵活性, 无缝, 和时间依赖的行为。

然而, 分子理论在 20 世纪通过统计机械和后来计算分子动态经历了显著的复兴。今天, 他们在多层次的方法中补充了连续模型, 用原子模拟传达了连续构成关系 - 一个合成, 这将让 19 世纪的分子和连续学校都满意。

10.1.6 历史参考

主要来源: 捐助者

作者	年度	引用	标题	描述
船员				
船员	1821	(Navier, 1821)	《平衡的法则与身体坚固的弹性运动》	第一次由分子假设产生的连续方程式
船员	1827	(Navier, 1827a)	《平衡的法则与坚固的身体运动》	扩展版与完整的数学发展
卡西				
卡西	1822	(Cauchy, 1822)	关于体内平衡和运动的研究	应力 概念的初始 表述
卡西	1823	(Cauchy, 1823)	关于体内平衡和运动的研究	系统发展 应力张量
卡西	1828	(Cauchy, 1828)	《平衡条件》或《内部运动的规则》	一般 平衡 对弹性体的方程式
卡西	1829	(Cauchy, 1829)	关于平衡和点材料系统的运动	分子 弹性力学 中央力量
鱼				
鱼	1829	(Poisson, 1829)	以平衡和精灵身体的运动为纪念	综合分子理论; 介绍泊松比
鱼	1831	(Poisson, 1831)	纪念在精致环境中的运动传播	电波传播在弹性媒体
绿色				
绿色	1828	(Green, 1828)	关于数学分析对电力和磁性应用的论文	引入潜在功能方法
绿色	1837	(Green, 1837)	关于光的反射和反射	早期应用于光学弹性
绿色	1839	(Green, 1839a)	关于光的反射和反射法则	開發 应变能 功能
绿色	1842	(Green, 1842)	关于在水晶媒体中的光的宣传	延伸到无神经材料
法拉利 (ed.)	1871	(Ferrers, 1871)	乔治·格林的数学论文	收集作品与评论

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

作者	年度	引用	标题	描述
拉梅和克莱佩隆				
拉米 & 克莱普里昂	1831	(Lamé and Clapeyron, 1831)	*Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes*	共用工作室内 平衡 的固体
拉米 & 克莱普里昂	1833	(Lamé and Clapeyron, 1833)	关于全球液体冷却的固化纪念	使用 弹性 冷却问题
拉米	1852	(Lamé, 1852)	关于数学理论的讲座	全面的治疗;Lamé constants
克莱普里昂	1857	(Clapeyron, 1857)	计算一支弹性放松式放松的水瓶座	连续射击的三个时刻理论
圣文				
圣文	1855	(Saint-Venant, 1855b)	*Mémoire sur la torsion des prismes*	半逆方法; 扭转理论
圣文	1856	(Saint-Venant, 1855c)	关于普里斯米亚的灵感	延伸到普里斯马特条的灵活性
圣文	1864	(Saint-Venant, 1864)	关于内部运动平等的设立纪念	塑性 超越弹性限制
勇敢				
勇敢	1850	(Bravais, 1850)	关于系统的记忆, 由点分布定期	常规点分布; 轻度理论
勇敢	1866	(Bravais, 1866)	基督教研究	晶体结构和分子安排
早期基金会				
加利利	1638	(Galilei, 1638)	*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*	材料力学; cantilever 梁 理论
胡克	1678	(Hooke, 1678)	*De Potentia Restitutiva*, 或春天	第一個 表述 的 弹性 法则 (胡克的法律)
Euler	1744	(Euler, 1744b)	*Methodus Inveniendi* 线路曲线 (附件: 曲线弹性)	变量计算; 弹性曲线
其他重要贡献者				
皮奥拉	1833	(Piola, 1833)	*La meccanica de' corpi naturalmente estesi*	皮奥拉压力紧张器; 变量格式
吉尔吉斯	1850	(Kirchhoff, 1859)	超越平衡和死亡运动一层弹性滑板	板理论与弯曲和伸展

二级和历史来源

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

作者	年度	引用	标题	描述
托马斯 & 皮尔森	1886–1893	(Todhunter and Pearson, 1893)	关于弹性理论和材料强度的历史	维多利亚时代历史
蒂莫森科	1953	(Timoshenko, 1953)	材料力学的历史	工程发展前景
威胁	1960	(Truesdell, 1960)	灵活或弹性物体的理性机械 1638-1788	17 世纪至 18 世纪的全面分析
威胁 & 零	1965	(Truesdell and Noll, 1965)	机械学的非线性领域理论	现代连续介质力学框架
萨博	1977	(Szabó, 1977)	**机械原理史**	全面的历史 (在德国)
格拉特纳 - 吉尼斯	1990	(Grattan-Guinness, 1990)	法语数学的转变,1800–1840 年	法国学校的详细分析
欢迎	1991	(Benvenuto, 1991a)	引入结构力学的历史	双重结构机械史
爱情	1927	(Love, 1927)	关于数学弹性力学的治疗	经典的处理与历史记录
卡佩奇	2010	(Capecchi, Ruta, and Trovalusci, 2010)	虚功 法律的历史	现代机械史的观点

10.2 连续介质力学

这一章节标志着对连续机械的分析框架的过渡, 其中物质体被模拟为由现场变量如移动、紧张和压力所统治的持续媒体。重点是 19 世纪成熟的概念和数学发展, 当机械从大多差异化和地质思维转变为基于分析的系统理论。注意力是指向统治方程式、宪法关系和稳定性标准的表述, 通过这些标准物理直觉转化为一致而预测性的数学结构。

这里提交的材料集中在这个晚期思想的巩固, 突出如何基本概念 - 内部力量, 变形, 平衡和稳定 - 在连续框架内严格定义并相互连接。该处理是故意简短的, 但数学上完整的, 描述了连续介质力学如何提供基础在其中现代结构分析和工程理论最终被构建。

10.3 引入

10.3.1 法国革命和现代弹性的诞生

十六、十八世纪是 “主导” 由英国、荷兰、德国、意大利和瑞士自然哲学家或科学家。当然, 马里奥特和库伦布在其他人中间有几次侵入, 但法国的贡献是最小的。(尽管巴黎为莱布尼兹和胡伊根斯提供了会议场所).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

然而在 19 世纪，法国率先把科学原理应用于实际问题；著名的 *École des Ponts et Chaussées* 和 *École Polytechnique* 分别创建于 1747 年和 1794 年。后者由 Gaspard Monge 在法国大革命期间创立，1804 年由拿破仑一世改为军事院校。这两所学校成为众多杰出工程师任教或求学的摇篮。前者的相关人物包括 Cauchy、Clapeyron、Fourier、Lagrange、Lamé（1795–1870）、Monge 和 Poisson；后者包括 Cauchy（1789–1857）、Darcy、Navier、Freyssinet 和 Saint-Venant（1797–1886）。有些人物（如 Navier 和 Saint-Venant）被两校同时列为校友。

纳维尔的理论工作关于梁灵活和连续的射击, 首次出版于 1826 年。*Leç* **我們**, 提供理论的基础影响后来的结构工程. 一般的梁理论, 包括被称为伯诺利纳维尔假设 (该飞机部分仍然是飞机和正常到中性轴) 以 19 世纪的结构设计为基础。然而, 主要项目如罗伯特 • 史蒂芬森的 Britannia Bridge (1850) 它主要依赖于威廉 • 费尔巴恩 (William Fairbairn) 的广泛实验测试和埃顿 • 霍格金森 (Eaton Hodgkinson) 的实验公式, 而不是纯粹的解析方法。桥的管道设计通过 Ferbairn Millwall Iron Works 的精致规模模型测试被验证, 这代表了新兴理论与实用实验验证的婚姻。(Clark and Stephenson, 1850; Charlton, 1982).

10.3.2 连续机械与弹性理论的基础

10.3.2.1 科隆 (1736-1806) 和工程 基础

查尔斯 • 奥古斯汀 • 德库伦布 (1736-1806) 将理论机械与实用工程之间的差距解开。一个在法国殖民地广泛服务的军事工程师, 库隆布将严格的数学分析与仔细的实验结合在一起。他的记忆 **论文关于一个应用的规则的最大和最小到一些问题的静态, 与建筑相关** (1773) (Coulomb, 1773b) 它在科学对结构设计的方法中表现出重量。与专注于抽象机械原则的当代人不同, 库隆布解决了直接相关建筑问题:

1. **地球理论 压力**库伦布开发了第一个理性理论, 以计算侧面地球压力在维持墙壁。使用虚功原理与假设飞机失败表面相结合, 他得出:

$$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 K_a$$

   哪里 K_a 是活性地球 压力 比例。这项工作为现代地质工程提供了基础, 目前仍在概念上有效。
2. **焦虑理论**经过广泛的实验, 库伦布发现, 振动力与正常强度相对应, 独立于接触区。$F = \mu N$ 这就是他的名字。他区分静态和动态震动, 并承认地面凝聚的作用, 提出:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi$$

   这种振动法则成为与接触界面和土-结构相互作用结构分析的基本。
3. **梁柱理论**: Coulomb 研究了 flexure 的射击的强度, 建议在 tensile 应力 达到关键值时出现失败。他的列泡沫分析, 虽然比 Euler 更不复杂, 处理了实用的方面, 如异端负载和物质缺陷,Euler 的理想化理论忽略。

库伦布的遗产不仅仅是具体的公式, 而且在他的方法: 结合解析机械与实验验证和地质

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

理。他的工作表明, 理性机械可以应用于真正的工程问题, 影响了学院的实践方向, 并建立工程机械作为一个与纯数学分开的学科。

19 世纪在机械学的数学处理中发生了显著的转变, 从粒子和硬体的分散分析到可变固体的持续处理。这一革命几乎完全是法国的成就, 从新成立的新智力环境中产生的。**政治学科**和 **公路和街道学校**. 在几十年内, 一组精彩数学家和工程师建立了所有现代结构分析的理论基础。

10.3.2.2 拉格兰 (1736-1813) 分析基金会

约瑟夫 • 路易斯 • 拉格兰奇 (1736-1813), (§6.7.5) 尽管在图林训练, 但他花了最有成效的年份在巴黎, 并在成立时成为 Ecole Polytechnique 教授。他的 **机械分析** (1788) (Lagrange, 1788 PDF) 革命化机械, 用纯粹的解析方法取代地质理。对于结构力学特别重要的是:

> 有关分析细节，请参见 *§24.2.3*

1. **虚功原理的评论**拉格兰奇的优雅表述的虚功提供了基础在结构分析中的能量方法。他证明, 对于一个平衡的系统, 所有力量通过任何兼容的虚拟转移所做的虚拟工作是零:
$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$
这个原则后来将成为位移方法和有限元分析的基本。
2. **通用协调**拉格兰奇介绍了通用坐标, 从地质限制中解放机械, 通过最小坐标分析复杂系统。
3. **变分法的评论**虽然以前由 Euler 开发, 但 Lagrange 系统化了变量方法, 这证明在弹性中提出边界值问题至关重要。

拉格兰奇的解析方法深深地影响了下一代法国数学家, 确定了连续介质力学将开发的方法。

10.3.2.3 Fourier 的 (1768-1830) 数学方法

约瑟夫 • 福里亚 (Joseph Fourier) (1768-1830), 另一位光明在 Ecole Polytechnique, 通过他的主要贡献 **热量分析理论** (1822) (Fourier, 1822). 在专注于热导,Fourier 的工作对机械有深刻的影响:

1. **部分差异方程式** Fourier 展示了物理现象如何通过部分差异方程式与适当的边界条件来描述 - 一种方法将直接转移到 弹性 问题。
2. **Fourier 系列**其代表函数作为无限系列的三角形函数的方法提供了强大的工具, 以解决弹性中的边界值问题。
3. **尺寸分析**福里亚对物理尺寸的系统方法影响了弹性恒定和物质特征的形成方式。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

尽管 Fourier 并没有直接在弹性上工作, 但他的数学框架证明是连续机械的后续发展必不可少的。

10.3.2.4 卡西 (1789-1857) 和应力的概念

奥古丁 - 路易斯 • 卡什 (1789-1857) (§6.7.6) 它是数学弹性力学的主要建筑师。在他的工作期间, 在 Ecole Polytechnique (1816-1830) 他制作了一系列记忆, 将弹性定为严格的数学科学。(Cauchy, 1827; Cauchy, 1828 PDF). 他的最深刻的贡献是引入应力张量 - 一个概念跳跃, 解决了两世纪的混乱关于内部力量在固体的性质。

此分類上一篇: 沒有应力的力量

在 Cauchy 之前, 自然哲学家和工程师与 **部位上的力量** 没有一个清晰的概念应力作为一个强烈量在一个点。加利利, 在他分析的 cantilever 梁 (1638) 说话, 关于 “绝对抵抗” 一个跨部分 - 总力量, 而不是分散的强度。马里奥特 (1686) 和父母 (1713) 加利利奥的梁理论是通过认识到 “纤维” 一方面, 中性轴处于紧张状态, 而另一方面则处于压缩状态, 但它们仍然是抵抗性作为整个部分的属性。

科隆 (1773) 在他的分析中, 在闪电和维持墙壁时, 他采取了关键的步骤来考虑 **分配** 通过一个部分的力量, 并引入了失败发生在一个关键强度达到时的想法。然而, 即使库伦布也没有一个普遍的框架来描述内部力量的状态在一个自愿的点上通过坚固的飞机。

根本的困难是: 与外部力量不同, 在确定的点或表面上行动, 内部力量依赖于 **想象的切割** 一个人通过身体。通过一个地平线传输的力量, 一般不同于通过垂直线传送的力量。怎样才能描述一个 “内部力量的状态” 在一个问题上, 答案取决于哪个飞机考虑?

Cauchy 的解析:The 应力张量

> 有关分析细节，请参见 *§O.2.2*

Cauchy 的天才是要承认这种显而易见的复杂性隐藏着一个基本的简单性。在 1822 年至 1827 年的记忆中 (Cauchy, 1822; Cauchy, 1823) 他提出了对 **引力 向量** $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ 每单位区域的力量, 传递在一个可想象的表面上与单元正常 $\mathbf{n}$. 向量的拖动取决于有关点和表面方向。

随后,Cauchy 通过一个美丽的论点, 涉及一个无限的特拉赫德龙的平衡, 证明, 拖动向量在 **任何** 飞机可以从拖动引擎计算到正确的 **三** 相互的飞机。具体而言, 如果我们知道飞机上的拖动对飞机的 x, y, 和 z 轴, 我们可以通过简单的线性操作找到任何飞机上的拖动。

图 10.1: Cauchy 的 Tetrahedron 论点。一个无限的特拉赫德龙从身体中切断, 有三个面孔在坐标轴上和一个倾斜的面孔与单元正常。$\mathbf{n}$. 平衡的 Tetrahedron, 因为它的尺寸缩小到零, 产生关系 $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

卡什特拉赫德龙论点

考虑从身体内部切断无限的特拉赫德龙 (形象 10.2). 三个面孔是对坐标轴的偏向, 与区域 dA_x, dA_y, dA_z 第四面是具有外部正常单位的 plane 飞机。$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 和区域 dA. 基于地质:

$$dA_x = n_x\, dA, \quad dA_y = n_y\, dA, \quad dA_z = n_z\, dA$$

三个坐标面上的拖动引导器是 $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)}$, $-\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$ (因为外部正常的点在这些面孔的负协调方向). 面部上的拖动是 $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$.

强度 平衡 需要 (忽略身体的力量, 规模为体积 $\sim dA^{3/2}$ 与表面力量相比, 它变得不可忽视。$\sim dA$ 如同泰特拉赫德龙的):

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} dA - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} dA_x - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} dA_y - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)} dA_z = \mathbf{0}$$

取代地质关系, 并将其分为 dA:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = n_x \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)} + n_y \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)} + n_z \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$$

這是 **卡什的理论**任何飞机上的拖动是 **线性功能** 正常的单位。定义的 **应力张量** $\boldsymbol{\sigma}$ 如 矩阵

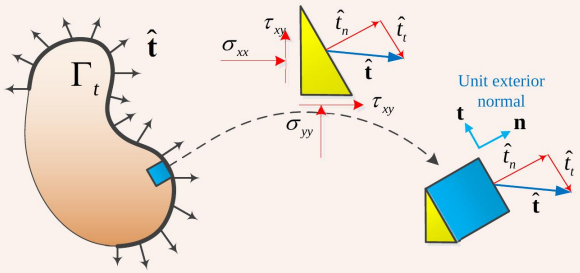


图 10.2: 表面力量

的列是坐标板上的拖动引导器:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

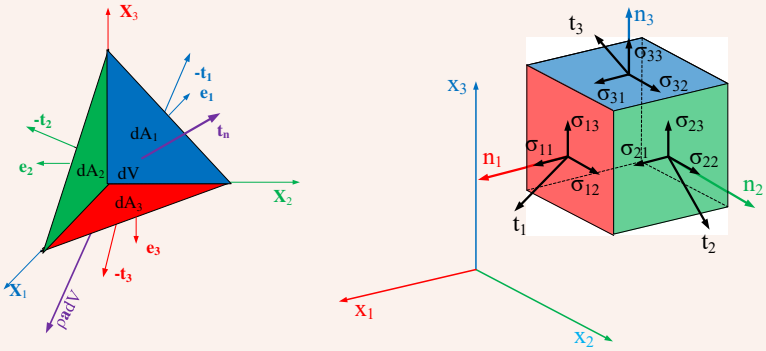
平衡 (10.3.2.4) 变成:

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

这个单一方程式包含了 Cauchy 的两世纪拼图的解决方案。证据依赖于 **泰特拉赫德龙论点** (图 10.3): 考虑一个无限的三面相匹配与坐标飞机 - 每个携带相应的 应力 组件 σ_{ij} 和一只可怕的面孔 ABC 与外部单位正常 $\boldsymbol{n}$ 和区域 dA. 随着 tetrahedron 缩短到一个点, 每个

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

坐标方向的 平衡 的力量需要拖动。$\boldsymbol{t}$ ob 面上只能在三方坐标面上的拖动方面表达出来　正是线性关系。(10.3.2.4). 应力张量的评论 $\boldsymbol{\sigma}$ 完全描述一个点的内部力量状态; 在任何飞机上通过那个点的拖动是由线性操作获得的。(10.3.2.4). 应力 既不是一个尺寸, 也不是一个 向量但是一个 **张量**—从单元正常 vectors 线性地图 $\boldsymbol{n}$ 拖动 vectors $\boldsymbol{t}$.



(a) 泰特拉德龙　　(b) 压力

图 10.3: 卡西:Tetrahedron 到应力

相同性 应力张量

考虑到无限的特拉赫德龙的平衡时刻 (或, 相同地, 一个无限的圆圈),Cauchy 证明 应力张量是相同的:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

这将从 9 到 6 个独立应力组件的数量减少。同义有深刻的后果: 它保证了三种相互偏见的存在。**主要方向** 随之而来, 拖动是纯粹正常的。(没有 Shear) 与相应的 **主要压力** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

基本方程式

有了应力张量在手中,Cauchy 衍生了基本方程式的连续介质力学:

1. **平衡 方程式** (在身体力量的缺乏下):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

   与同等方程式相似 y 和 z 方向。在小型笔记中: $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.

2. **路线移动关系** (小小的歪曲):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

3. **宪法关系** Cauchy 最初提出了一种与 应力 和 应变 有关的分子理论, 尽管他的 表述 将由随后的研究人员精化。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

莫赫的图形演示 (1882)

应力张量, 由于其所有优雅, 对实习工程师来说仍然有点抽象。1882 年, 克里斯蒂安 • 奥托 • 莫赫 提供精彩的图形解释, 使张量概念可用 (Mohr, 1882b). **莫赫的圈子** 代表飞机上的所有可能的正常和剪应力组合, 通过一个点作为循环中的点。(或者, 在三维中, 在三个圈子上).

主要压力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 正应力 σ 和 剪应力 τ 在任何飞机上满足:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

最高 剪应力 在飞机上发生 45° 主要方向和平等 $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. 莫赫的圈子成为工程师不可或缺的工具, 能够快速地图形定义自愿飞机上的压力, 并在塑性和断裂力学中形成失败标准的基础。

历史意义

Cauchy 的介绍应力张量代表了 18 世纪方法的完整中断。而不是研究具体的结构性单元 (, 列), 他制定了适用于任何连续的弹性媒体的一般领域方程式。概念上的跳跃　承认压力是一种紧张器, 而不是 vector　几乎是连续机械史上最重要的进步。

正如 Truesdell 所观察到的那样,Cauchy 的作品将机械转化为一种科学。**力量** 到一个科学的 **田野**. 一个持续的身体的状态不是在差异性点上的分歧力量, 而是由张量领域不断在空间中变化。这个领域理论观点, 首先为应力实现, 后来将扩展到应变, 温度, 速度, 以及所有其他量的连续物理。

压力紧张器仍然是所有现代结构分析的基础。无论是使用分析方法、终端元素或分子动态,Cauchy 压力压缩机都提供了描述内部力量的语言。推出两世纪后, 它是机械史上最有影响力的智力成就之一。

10.3.2.5　鱼的 (1781-1840) 比率和 Cauchy 的简化

西门 • 丹尼斯 • 波森 (1781-1840) (§6.7.2),Cauchy 在 Ecole Polytechnique 的一位同事, 为弹性理论做了一些关键贡献。(Poisson, 1829):

泊松比:

波伊森发现, 当弹性条线长度伸展时, 它会侧面合并, 横向长度应变的比例是物质恒定的:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{lateral}}}{\varepsilon_{\text{longitudinal}}}$$

首先, 他预测 (不正确, 基于分子模型) 这 $\nu = 1/4$ 对于所有材料。雖然這個特定的價值是錯誤的, 但 Poisson 的比例概念對柔軟性理論成為根本性的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

以色列物质等级:

Poisson 简化了 Cauchy 的以色素材料方程式, 将独立的弹性恒数数量减少到两个。对于以色列物质, 应力-应变关系采取以下形式:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

哪里 λ 和 μ 是永恒的 Lame (虽然这份评论后来出现).

板 理论:

波伊森还开发了弹性板的理论, 将泡沫理论扩展到两个维度, 并为板块分裂提供了统治区别方程式。

有关分析细节，请参见 章节 34

10.3.2.6 船员的 (1785-1836) 合成和应用

饰 Claude-Louis-Marie-Henri Navier (1785-1836) (§6.7.3 作为一个严格的理论家和实用工程师, 他占据了独特的地位。从巴黎综合理工学院毕业后，他成为法国国立桥路学校教授，并从 1819 年起任教直至去世。

海军方程式:

獨立於 Cauchy, 並使用不同的方法,Navier 得出基本方程式的弹性. 他的方法, 基于物质点之间的分子力量, 导致平衡方程式的转移。(海军方程式):

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

哪里 $\mathbf{u}$ 是转移 vector 和 $\mathbf{f}$ 代表身体力量。

理论与实践之间的桥梁:

Navier 的伟大成就是将 Cauchy 和 Poisson 的抽象数学翻译成实用工程应用。他的 **教學的概述** (Navier, 1826) 成为工程学生的标准文本, 介绍:

- Beam 理论源于整体弹性方程式
- 实用结构中的压力和缺陷的计算方法
- 分析连续和内置射线 (详细讨论在部分 11.3.1)
- 应用于桥梁、建筑物和机器

Navier 展示了 连续介质力学 的精致数学可以提供实用的设计公式。其著名的梁方程式:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$$

它已成为结构工程师的标准工具 - Cauchy 的田野方程式的直接后裔, 但足以实用计算。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

10.3.2.7 拉米的 (1795-1870) 灵活的连续

加布里埃尔 • 拉梅 (1795-1870) 先后任教于巴黎综合理工学院和法国国立桥路学校，为弹性理论带来了数学严谨性与物理洞察 (Lamé, 1852).

永恒的 Lame:

拉梅改造了以色列材料的构成方程式, 即现在有两个弹性恒久体。λ 和 μ. 一般化胡克的法则变成了:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

哪里 δ_{ij} 这是克罗纳克尔德拉, 也是爱因斯坦峰会公约的适用。

这些恒例与更熟悉的工程参数有关:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

解决方法:

Lamé 开发了系统的方法来解决 弹性 问题, 特别是对具有地质同位素的身体 (火柴、缸). 他的工作在压力下的厚墙缸仍然是一个经典的解决方案, 广泛用于压力船舶设计。

10.3.2.8 圣文 (1797-1886) 半逆方法

主持人 Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) (§6.7.8) 它代表了 19 世纪法国弹性理论的峰值。他毕业于巴黎综合理工学院，职业生涯大部分时间任职于法国国立桥路学校；在那里，他编辑并详细注释了纳维著作的第三版 摘要 (Navier, 1864 PDF).

半逆方法:

Saint-Venant 的伟大创新是解决 弹性 问题的半逆方法。而不是解决与边界条件的差异方程式的整个系统 (经常不可能) 他会:

1. 采用基于物理直觉的 应力 或 位移 字段的表格
2. 确保此假设符合 平衡 和 变形协调
3. 从边界条件中确定剩余的未知

这种实用的方法为以前无法解决的问题提供了解决方案。

圣文的原则:

也许他最有影响力的贡献是他的名字的原则:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 圣文 1855memoire
>
> 如果在一个弹性体的表面小部分上运作的力量被替换为另一个静态相当于表面相同的部位上的力量系统, 这种负载的重分配产生了本地压力中的重大变化, 但对距离上的压力具有不可忽视的影响, 与其力量变化的表面线性尺寸相比。

这个原则在实践问题中证明了简化边界条件的使用, 并成为工程分析的基础。

经典解决方案:

Saint-Venant 的记忆提供了最终解决方案:

- **非循环相关术语的旋转** (Saint-Venant, 1855a) 他表示, 十字部分在扭转期间不会留下飞机 (威胁), 由各个跨部分形式的统治方程式和解决方案产生的。
- **梁的弯曲**他改进了梁理论, 计算了叶形变形, 并为基本理论提供了纠正。
- **灵活性、紧张性和压缩的普里斯马特带**他的全面处理在一个常见的数学框架下统一了各种负载条件。

有关分析细节，请参见 §23.2

10.3.2.9 Clapeyron 的 (1799-1864) 能源方法

巴诺伊特 • 保罗 • 埃米尔 • 克莱皮伦 (1799-1864) 尽管最为热动力学家所知, 但通过他对能源方法的研究, 他为结构力学做出了基本贡献。(Clapeyron, 1834).

克莱皮伦的理论:

关于弹性能量的理论 (详细讨论在部分 48.1.6.1) 表明, 在弹性身体中的应变能相当于外部力量所做的工作的一半:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \frac{1}{2}\int_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}\, dS + \frac{1}{2}\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, dV$$

这一结果成为结构分析中的能源方法的关键。

三分钟方程式:

Clapeyron 的后续工作 (Clapeyron, 1857) 不断的爆炸 (部分 11.3.2) 提供实用的工具, 将抽象弹性理论与结构工程实践之间的差距。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

10.3.2.10 法國的成績在前景

这些法国数学家和工程师的贡献, 集中在一个令人难以置信的短期 (1820 年至 1860 年), 建立了连续机械和弹性理论作为严格的数学科学。几个因素使这一非凡的成就:

1. **机构 支座**该学院提供了一个独特的环境, 数学家和工程师一方面工作, 与研究明确评估以及教学。
2. **数学索菲斯特**法國數學分析的傳統, 來自拉格蘭奇, 提供必要的工具來表達和解決部分差異方程式弹性.
3. **工程动机**民用工程的实际要求, 尤其是铁路和桥梁建设, 为理论发展提供了动机和验证。
4. **智力连续性**每个世代都系统地建立在其先驱的工作上, 学生成为教授并扩大他们的导师的工作。

到 1860 年, 连续介质力学的理论基础基本上完整。这个世纪剩余的挑战将是把这个数学框架转化为结构分析的实用方法, 这些方法可以让工程师练习而不需要先进的数学物理学掌握。

10.4 完整的数学框架

经过对连续介质力学的历史发展和关键贡献者的研究, 我们现在介绍了整个理论所依赖的数学基础。基本平衡法则 - 质量的保留动机和能量超越任何特定的物质, 代表普遍的物理原则。这些法律与物质特定的宪法关系相结合 (在下一部分讨论), 提供一个完整的数学框架来描述连续媒体的行为。

这些平衡法则的表述在现代形式中逐渐发生在 19 世纪, 尽管它们的物理内容早已被理解。1820 年代, 卡希的作品在我们今天认识的形状中建立了线性动力平衡。热动态法则虽然在 1840 年代至 1850 年代由克劳西乌斯提出的汤姆森 (凯尔文先生) 其他人, 直到 20 世纪杜赫姆的作品之前没有系统地融入连续介质力学。特鲁斯德尔和科尔曼.

10.4.1 Euler 和 质量 的保留

保守大众国家的原则, 即大众不能在连续内创造或毁灭。(Euler, 1757b) (Euler, 1757a). 材料体积 $V(t)$ 被表面限制 $S(t)$ 与材料相结合, 这个原则被表达为:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

哪里 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 是 质量 密度 在位置 $\mathbf{x}$ 和时间 t.

应用 Reynolds 运输理论, 并指出整体必须消失, 任何有意志的材料体积提供本地形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

哪里 **v** 是 速度 字段。這是 **连续性方程式***.

对于不可压缩的材料 ($\rho = \text{constant}$) 这就简化了:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

在拉格兰的描述中, 根据材料粒子, 质量的保存采取了 elegant 优雅的形状:

$$\rho_0 \, dV_0 = \rho \, dV$$

在 0 字段标记参考配置数量, 或相当于:

$$\rho_0 = \rho J$$

哪里 $J = \det(\mathbf{F})$ 是张量变形格拉迪安的雅各比人。**F**.

10.4.2 卡西 (1789-1857) 平衡线性动力

线性动态的平衡代表了纽顿对连续性的第二法则。对于物质 体积, 动力的变化率相当于所应用的力量总数:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \int_{S(t)} \mathbf{t} \, dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \, dV$$

哪里 **t** 是拖动 向量 (各单位区域) 在地面上, 以及 **b** 代表每单位的身体力量 质量 (如 重力).

Cauchy 的基本洞察力是承认拖动向量 在某个点上, 线性依赖于外部单位正常 **n** 到表面:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

哪里 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 Cauchy 应力张量. 这种关系, 被称为 *Cauchy* **的 应力 原则**, 是连续介质力学的角石之一。

应用差异理论并定位整体形式, 产生了 Cauchy 的动作方程:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$$

哪里 D/Dt 标记物质时间衍生品。组件形式 (使用爱因斯坦总结):

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i$$

关于 Elasostatics 的问题 (没有 加速度) 这将减少到:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

平衡方程式,Cauchy,Navier 和他们的当代人在 1820 年代产生。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10.4.3 角度瞬间的平衡

角动的平衡表明, 物质的体积角动变率相当于所应用的时刻:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \mathbf{x}\times\rho\mathbf{v}\,dV = \int_{S(t)} \mathbf{x}\times\mathbf{t}\,dS + \int_{V(t)} \mathbf{x}\times\rho\mathbf{b}\,dV$$

在不存在分配的夫妻压力 (身体夫妇), 这个原则导致一个令人难以置信的简单但深刻的结果:Cauchy 应力张量必须是相同的:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{or} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

这种同义条件将应力张量的九个独立组成部分减少到六个, 由 Cauchy 认可并为弹性理论的所有后续发展至关重要。这意味着在某个时候, 应力状态可以完全描述为三种正常压力和三种平面压力。

应力张量的同步具有深刻影响。它保证有三种相互正确的主应力方向。每一个时刻, 与自己的观察者一致 $\boldsymbol{\sigma}$ 只有正常的压力才会行动。

10.4.4 克劳斯 (1822-1888) 汤姆森 (1824-1907) 和 Duhem (1861-1916) 热力学法则)

10.4.4.1 第一法 (能量平衡):

鲁道夫 • 克劳西乌斯 (Clausius, 1850; Clausius, 1854; Clausius, 1879) 威廉 • 汤姆森 (Thomson, 1848; Thomson, 1851; Thomson, 1855) 和 Duhem (Duhem, 1891; Duhem, 1911; Duhem, 1893).

热力学的第一法则将机械能量平衡扩展到包括热效应。对于材料 体积, 总能量的变化率 (Kinetic Plus 内部) 相当于完成的工作速度加上供热率:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+e\right)dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dS + \int_{V(t)} \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dV - \int_{S(t)} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dS + \int_{V(t)} \rho r\,dV$$

哪里 e 是每单位的具体内部能量 质量, $\mathbf{q}$ 是热流 向量, 和 r 是每单位的热供应 质量。

使用 Cauchy 的应力原则, 并应用差异理论, 产生了当地形式:

$$\rho\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla\cdot\mathbf{q} + \rho r$$

哪里 $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$ 是变形率 张量 (速度格拉迪安的交响部分).

术语 $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ 代表 应力 的功率 - 压力按 单位体积 工作的速度。对于经过逆转变形的弹性材料, 该工作将作为弹性应变能存储, 并且可以完全恢复。

对于纯粹的机械问题, 在那里热效应是不可忽视的, 第一法则减少到关于机械能量的声明。在 Elasostatics 中, 动能是零的, 过程是近静的, 由外部力量进行的工作存储为应变能:

$$W_{\text{ext}} = U$$

这种能量平衡是基于克莱皮龙的理论和变化的原则, 成为结构分析的中心。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10.4.5 第二法则 (英特罗菲不平等):

克劳西乌斯提出了热力学的第二法则。(英特罗菲不平等)

第二条热力学法则通过克劳西斯-杜赫姆不平等对物质行为施加基本限制。. 在其本地形式中, 它指出, 内特罗菲产量必须不负:

$$\rho\frac{D\eta}{Dt}-\frac{\rho r}{\theta}+\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)\geq 0$$

哪里 η 是每单位 质量 的具体输入和 θ 这是绝对的温度。

使用第一法则来消除 r 延伸条款导致分散不平等:

$$\rho\left(\frac{D\psi}{Dt}+\eta\frac{D\theta}{Dt}\right)-\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}+\frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta\leq 0$$

哪里 $\psi=e-\theta\eta$ 是赫尔姆霍茨自由能量。

用于以色列流程的弹性材料 (θ = constant) 第二法则要求应力工作等于自由能量的变化率:

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}=\rho\frac{D\psi}{Dt}$$

这种热动态限制为绿色的论文提供了理论基础, 即弹性材料承认压力能量密度功能 - 分子理论家争取从原始原则中产生的关系。热动态方法优雅地侧面细节分子级别, 声称能量存储和可逆转性足以保证潜力存在。

10.4.6 历史发展与现代合成

這些平衡法則的表述在超過一世紀內發展:

- **1820s (海军, 海军)**: 安定了对弹性固体的线性动力平衡, 由 应力 平衡 方程式衍生。识别了应力张量的同位素。
- **1840 年至 1850 年 (克劳西乌斯, 汤姆森, 兰金)** 制定了热力学的第一和第二法则, 用于宏观系统, 起初在热发动机和热力循环的背景下。
- **1850 年至 1860 年 (圣文, 汤姆森)** 开始将热动态概念纳入连续介质力学, 尽管主要用于液体和热导。
- **1900 年至 1910 年 (幽灵)** 系统地制定了连续媒体的热力学, 引入了内部变量对分散过程的概念。
- **1960s (托雷斯德尔, 科勒曼, 零)** 建立了现代热力学框架, 展示了第二法则如何通过克劳西乌斯 - 杜赫姆的不平等和科勒曼 - 零程序限制宪法关系。

现代的合成, 在 20 世纪开发, 证明这些平衡法则, 与正确制定宪法关系相结合。(部分 10.5), 为连续介质力学提供完整和一致的框架。平衡法则是普遍的, 它们适用于所有持续媒体, 而宪法关系占据物质特定的行为。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

对于弹性理论, 关键的洞察力是平衡法则本身不足以确定身体的反应。三个动力平衡方程式为应力的六个独立组件提供三个方程。(由于同义). 这个差距是由应力连接到变形的宪法关系关闭, 下一部分的主题。

10.5 宪法理论: 物质行为

平衡法则在上一节中提出的普遍适用于所有连续媒体 - 它们表达了超越物质类型的基本物理原则。然而, 只有这些法律不能预测某种特定的材料如何应对所采取的力量。钢材 和橡胶都满足相同的动力平衡方程, 但在相同负载条件下表现非常不同。这种物质特定的行为被捕获 **宪法关系**数学表达式, 连接电影量 (歪曲, 应变 率) 以 Kinetic 量为 (应力、热流).

宪法理论的发展代表了连续介质力学的伟大智力成就之一。19 世纪的分子和现象学方法之间的辩论最终导致了一般原则, 指导所有材料的构成模型。这些原则 - 客观性物质同义热动态一致性逐步从理论和实验观察中产生。(Truesdell and Noll, 1965).

10.5.1 一般框架

对于弹性材料, 本构关系表达了应力作为变形功能。其最常见的形式:

$$\sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$$

哪里 $\mathbf{F}$ 是张量的变形格拉迪特。$\mathbf{X}$ 标记物质点, 以及 $\hat{\sigma}$ 这是宪法职能。

这似乎简单的说法隐藏了深刻的问题:

- 什么样的形状, 该功能 $\hat{\sigma}$ 拿?
- 物理学对这个功能施加了哪些限制?
- 物质同位素如何限制反应?
- 什么时候可以 应力 从潜在的衍生 (应变能 功能)?

这些问题的答案源于理论分析、实验观察和热动态理性的组合。现在, 我们正在考虑统治宪法关系的关键原则。

10.5.2 零 (1925-2017) 和客观性: 材料的原则框架差异

对于任何 本构关系 的基本要求是 **客观性** 或 **材料 框架 差异性**物质反应必须独立于观察者。如果我们旋转实验室或超越一个固体运动, 材料内的内部力量不应该改变。这个原则, 由 Walter Noll 在 1958 年系统地制定。(Noll, 1958) 它对宪法关系的形式提出了基本限制。

数学上, 考虑两个观察者与时间依赖的转角相关 $\mathbf{Q}(t)$ 和翻译 $\mathbf{c}(t)$:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t)$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

客观性原则要求 Cauchy 应力转换为:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$$

这种看似无害的要求有深刻的后果。它意味着应力不能直接依赖于变形格拉迪安 $\mathbf{F}$ (不客观的) 但是, 只有在客观的扭曲措施上。正确的测量是正确的 Cauchy-Green 变形张量:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

或相反的 $\mathbf{C}^{-1}$, 或绿色 Lagrange 应变张量:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

对于小型变形, 在哪里 $\mathbf{F} \approx \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, 这减少到熟悉的无限性应变张量:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$$

因此, 客观性原则为制定宪法关系提供了一个基本指南: 只使用客观的动态措施。

10.5.3 绿色 (1793-1841) 和超弹性

An **弹性材料** 是目前的 应力 仅依赖于当前的变形, 无论变形历史或变形率:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}) \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{C})$$

更有限制的阶级 **催眠性** 或 **绿色弹性材料**為什麼 应力 來自一個尺度 应变 能量密度 函數 W:

$$W = W(\mathbf{C})$$

应力 以以下方式确定:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{J}}\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{F}^T$$

哪里 $J = \det(\mathbf{F})$.

对于小型变形, 这显著简化。如果 $W = W(\boldsymbol{\varepsilon})$ 然后:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

这正是 1839 年的绿色宣言。(Green, 1839a) 可从潜在功能中产生的弹性应力。绿色所引入的现象后来以热动态为准: 对于隔热弹性变形, 赫尔姆霍茨自由能作为应变能功能, 第二法则保证其存在。

一般弹性和超弹性材料之间的区别至关重要:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **总体弹性**: $\sigma = \mathbf{f}(\varepsilon)$ 与 $\mathbf{f}$ 任意
- **催眠性**: $\sigma = \partial W/\partial \varepsilon$ 与 W 一个 Scalar 功能

超弹性材料具有特殊特征: 应力-应变的关系是同步的。如果我们写:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

因此, 超弹性需要:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{klij}$$

这种同义, 被称为 **相互关系**减少独立的弹性恒定的数量。对于一般的无菌弹性材料, 可能有 $6 \times 6 = 36$ 独立组件 C_{ijkl}. 应力 和 应变 的同位性将其减少到 21, 但超弹性 (存在的 W) 将其进一步减少到最常见的 21 个独立恒例。

10.5.4 看见 (1850-1919) 物质同义

实质材料经常拥有内部结构 - 晶体拉特, 纤维方向, 涂层 - 这使他们的反应方向依赖。**材料交互式** 这种方向依赖性。晶体系统和它们的弹性同步的系统分类是由 Woldemar Voigt 在他对晶体物理学的全面处理中建立的。(Voigt, 1910).

材料相同度是转角 $\mathbf{G}$ 参考配置, 让物质反应不变:

$$W(\mathbf{G}^T\mathbf{C}\mathbf{G}) = W(\mathbf{C})$$

所有这些旋转的组合都形成了 **物质交响组**. 不同同位素群体具有不同的物质类别:

- **三角形** (没有同义)21 个独立的常态
- **单元诊所** (一架同步飞机)13 个独立的常态
- **正统** (三架正方形交米特飞机)9 个独立的常态
- **超越以色列** (旋转式同位素的一个轴) 五个独立的常态
- **以色列** (所有旋转都是交互式)2 个独立的恒例

对于以色列物质 - 那些没有偏好方向的人 -W 只能依赖于不变的 $\mathbf{C}$ (或相同的, ε). 对于小型变形, 最常见的形式是:

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

哪里 $I_1 = \mathrm{tr}(\varepsilon)$, $I_2 = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\varepsilon)^2 - \mathrm{tr}(\varepsilon^2)]$, $I_3 = \det(\varepsilon)$.

对于线性弹性与小条, 保持只有四方术语在应变:

$$W = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\varepsilon)^2 + \mu \mathrm{tr}(\varepsilon^2)$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

什么是收益:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$$

这正是普遍化的胡克的法则。与 Lamé 连续 λ 和 μ 拉梅在 1852 年提出的本构关系是线性弹性理论的主导。二个独立的常态 (λ, μ) 或同等 (E, ν) 是以色列弹性反应所需的最低限度, 正是结论, 分子理论的实验矛盾被强迫在连续学校。

10.5.5 科尔曼 (1930-1992) 和零: 热力限制

二、热力学的第二法则对宪法关系提出了基本限制, 超越客观性和物质同义性所施加的限制。Clausius-Duhem 的不平等, 当应用于以色列变形的弹性材料时, 产生了几个关键要求。系统利用热动力限制来阻止宪法关系, 由科尔曼和诺尔在 1963 年的研讨会论文中开发。(Coleman and Noll, 1963).

1. 应变能的存在: 对于隔热过程, 第二法则要求应力工作是完美的差异性。这相当于要求应力源自一个潜力 - 从热动态原则中正当化绿色的 postulate。

2. 应变能的相容性: 应变能 功能 $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ 它必须是物质稳定性的转换。数学上:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \xi_{ij} \xi_{kl} > 0 \quad \text{for all non-zero } \xi$$

这确保坦根密度矩阵是积极定义的, 这是稳定的平衡配置所必需的条件。

3. 对弹性恒久的限制: 对于以色列线性弹性, 热动态稳定需要:

$$\mu > 0 \tag{10.1}$$
$$3\lambda + 2\mu > 0 \tag{10.2}$$

这些翻译到熟悉的工程要求:

$$E > 0 \quad \text{(positive Young's modulus)} \tag{10.3}$$
$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad \text{(bounds on Poisson's ratio)} \tag{10.4}$$

顶部链接 $\nu < 1/2$ 相应于压缩性限制, 而 $\nu > -1$ 保留 应变能 积极。真正的材料满足这些界限, 大多数工程材料 $0 < \nu < 0.5$.

底部界限规定分子理论的预测 $\nu = 1/4$ 是普遍的, 实验表明相关术语接近 0, 而橡胶接近 0.5。热动态框架自然地适应了这种变化, 在那里分子理论不能。

10.5.6 历史观点: 从帝国主义到理论

构建理论的发展, 描述了实验、理论和数学抽象之间的相互作用:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

17 世纪至 18 世纪 (胡克,Euler) 对强度和歪曲之间的比例性观察。胡克的法则是关于喷射, 由尤勒将其通用到斑点和列。

1820 年至 1840 年 (海洋, 海洋和海洋) 试图从分子模型中产生构成关系。导致错误的预测 (单一弹性恒久, $\nu = 1/4$) 建立了数学框架。

1837-1839 (绿色): 应变能 功能的现象性 postulate。预测两个弹性恒定, 匹配实验。法国机械师的抵抗, 他们想要第一原则衍生。

1850 年至 1860 年 (圣文, 托姆森, 布拉维斯) 承认分子结构比假设更复杂。增加对持续方法的接受。

1960 年代至 1970 年代 (特鲁斯德尔, 零, 科勒曼) 现代理性热力学。系统性表述的客观性, 物质同位素和热动态限制。

现代理解合成了这些历史线条: 宪法关系必须满足客观性。(框架 差异性) 必须尊重物质同义, 必须是热动态可接受的, 对于弹性材料, 理想情况下应该从潜在功能中产生的。这些原则, 而不是分子细节, 统治了宪法模型。

10.5.7 连接到 结构分析

对于 19 世纪的结构工程师来说, 宪法理论提供了 Cauchy 的抽象领域方程和实用计算之间的关键联系。一旦对物质建立了压力线的关系, 无论是通过绿色的能量功能还是拉梅的恒久性, 工程师都可以:

1. 结合电影关系 ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$)
2. 与宪法关系 ($\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}$)
3. 和 平衡 方程式 ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$)

以 位移 的定义为分区方程式。纳维尔的方程式正是代表这种结合, 以色列的弹性动力学。对于泡沫, 同样的方法产生了熟悉的方程式 $EI\frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$.

因此, 构成关系将抽象连续理论与结构分析的实用方法之间的差距交叉 - 这些方法是纳维尔、克莱皮伦和其继承人开发来分析不确定的结构, 这是下一章的主题。

10.5.8 一个名字里有什么? 机械的进化与其实践者

什么是名字? 我們所稱之為玫瑰的, 以任何其他名字都會像甜味一樣氣味。但是在机械科学中, 名称很重要。条款 **连续介质力学**, **弹性**, **固体机械**, 和 **材料力学** 它们在现代文学中经常被交换使用, 产生了显著的混乱。这个术语不明确的反映不仅仅是知识史, 而且是职业身份本身的转变: 从 **自然哲学家** 和 **建筑工程师** 十七世纪, 通过专业的崛起 **工程师** 和 **机械师** 在十九世纪, 到二十世纪的专门学术学科。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10.5.8.1 结构分析师的变化的身份

在我们能够理解纪律名称的进化之前, 我们必须欣赏实践者自己是多么激进地转变了。

普遍学习的时代 (1600-1790) 在十七世纪和十八世纪初, 那些研究结构的强度的人没有统一的专业身份。加利利奥 Galilei (1564-1642) 是 A **自然哲学家**这个术语包括我们现在分为物理学、天文学、数学和机械学的内容。他的研究 梁 强度 (看见 §7.2.2) 它与天文观察和实验一起出现, 所有在自然法则的理解伞下团结起来。

罗伯特 • 胡克 (1635-1703) 模仿了这个普遍主义, 甚至更严厉: 他同时是皇家社会的实验库拉特, 建筑师。(伦敦大火后建造建筑) 微观学家, 机械理论家。他的著名 **特斯拉**:*Tensio sic vis* (看见 §6.6.6) 它不是在结构力学的治疗中出现, 而是在所有类型的喷发和弹性身体上进行的一项工作。

在法国, 那些关心建筑的人持有标题 **建筑师** 或 **工程师**但这些还不是我们今天所知道的专业。马里奥特 (1620 年至 1684 年, 参见 §7.3.2.3) 进行了水压、植物生理学和平等设施的喷雾裂缝实验。菲利普 • 德 • 拉租 (1640-1718) 流动地在数学教授的职位之间移动, 皇家学院建筑师和桥梁建设顾问。纯数学、应用科学和工程实践之间的现代区别尚未存在。

查尔斯 • 奥古斯汀 • 德库伦布 (1736 年至 1806 年, 参见 §10.3.2.1), 写在十八世纪末, 拿着标题 **军事工程师**军事工程师, 其职责包括建筑设计、调查和行政任务以及他的理论研究。他的记忆在地球上的压力和梁强度被提交给 Académie des Sciences 不是作为学术演习, 而是作为军事建设的实用指导。

没有被称为 **材料力学** 或 **弹性**只有一 **机械** (广泛建造) 其应用于实际建设问题。书籍 如 标题 **工程师的科学** (贝利多 1729) 或 **水力建筑** (贝利多 1737-1739), 反映理论知识与实践艺术的融合。

职业工程师的诞生 (1790-1850) 法国革命和拿破仑时代引发了决定性的转变。创立 Ecole Polytechnique (1794) 教堂: 桥梁和街道 (1795 年重建) 创造了工程师的系统性专业教育 - 不再通过学习或自我研究, 而是通过严格的数学培训。这些机构的毕业生是 **桥梁和街道工程师** (桥梁和道路工程师) 或 **军事工程师**, 具有定义职业道路、标准化知识和企业身份的专业人士。

至关重要的是, 这一代人带来了前所未有的数学复杂化到结构问题。克劳德 • 路易斯航天员 (1785 年至 1836 年, 参见 §6.7.3) 虽然他被训练为工程师, 但拥有数学能力与纯数学家竞争。1826 年他的 **教學的概述** 代表了一个新的合成: 严格的数学衍生在工程应用服务。海军和其当代人称他们的田野 **机械应用** (应用机械) 把它从 **理性机械** (理性机械) 拉格朗奇和其他人开发的抽象数学理论。

术语 **弹性** (弹性) 在这个时期出现, 以描述固体逆转变形的数学理论。奥古丁 - 路易斯 • 卡什 (1789 年至 1857 年, 参见 §6.7.6 和 §10.3.2.4) 雖然主要是一位數學家, 但他的基本記憶在**固体或液体弹性身体的平衡和运动**. 1830 年代, **灵活的身体** 得到了技术意义: 一个连续的固体, 其应力依赖于应变通过确定的数学关系。

但是, 专业身份仍然是流体. 主持人 Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797 年至 1886 年, 参见 §6.7.8) 持有标题 **桥梁和街道工程师** 但他的职业生涯大部分是在理论研究而不是建筑项目。他是工程师吗? 一个机械师? 数学物理学家? 他的当代人使用了所有这些术语, 反映了纪律界限仍然可穿越的事实。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

纪律晶体化 (1850-1900) 十一世纪中叶见证了分开的专业和纪律身份的晶体化。在英国, **民用工程师** 成为一个认可的职业, 通过民用工程师机构建立 (1828 年《宪法》). **机械工程师** 作为机械工程师机构的独立身份出现 (1847). 大学校长设立了 **应用机械** (剑桥,1875) 和 **工程师** (各个机构).

术语 **弹性力学** 以英语为标准, 通过 **乔治•加布里埃尔•斯托克** (1819-1903) 威廉•汤姆森, 凯尔文先生 (1824-1907), 两位教授自然哲学, 他们为弹性理论做出了巨大的贡献。**爱德华 • 霍格 (Edward Hough)** (1863-1940) 以其纪念品为传统, **关于数学弹性力学的治疗** (1892-1893) (Love, 1927), 建立 **弹性** 作为一个认可的数学学科, 从纯机械和工程实践中分开。

在德国, 技术大学 (**技术高中**) 建立一个平行生产系统 **工程师文凭**毕业工程师与深度理论培训。克里斯蒂安 • 奥托 • 莫赫 (1835 年至 18 年, 看 §11.4.2), 德雷斯登聚合物学院教授, 体现了这个传统: 他的文本书 **技术机械** (1860) 统一的理论机械与工程应用。

到世紀末, 就有一個嚴格的共识: **机械** 提到力量和运动的科学; **弹性力学** 或者只是 **弹性** 对弹性固体的数学理论; **材料力学** (**材料的抵抗力**, **坚固的**) 对工程应用; 以及 **应用机械** 对机械原则更广泛地应用工程问题。

二十世纪专业化 (1900-1970) 二十世纪带来了越来越多的专业化和分支名称的多样性。**史蒂芬 • P 蒂莫森科** (1878-1972), 在俄罗斯训练, 在美国工作, 字面上写了定义现代术语的文本书。他的 **材料力学** (1930) (Timoshenko and Gere, 1976) 定了这个期限为本科教学, 而他的 **弹性力学** (1934 年, 与 JN 善良) (Timoshenko and Goodier, 1970) 编码 **弹性** 对于毕业生学习。他的后来 **弹性稳定理论** (1936) 将稳定作为半自主领域。

术语 **坚固的机械** 它逐渐出现, 显然是美国工程学校在 1940 年代至 1950 年代的第一次, 以涵盖弹性, 塑性, 振动性, 以及其他无缝现象在一个窗帘下。美国机械工程师协会 建立应用机械系 (1927) 后来发展成不同的分区, 为不同特种。到中世纪, 一个人可以专业地识别为 **坚固的机械师** 或 **弹性**, 有不同的杂志, 会议和研究社区。

二十世纪最具戏剧性的发展, 是 **连续介质力学** 作为一个抽象的数学纪律。克里福德 • 特鲁斯德尔 (1919-2000), 在约翰霍普金斯和后来印第安纳大学工作, 推广连续介质力学作为一个统一的领域理论涵盖所有物质行为。他的日报 *Archive for* **理性机械与分析** (1957 年成立) 与沃尔特 • 诺尔的谈话 (1925-2017), **机械学的非线性领域理论** (1965) (Truesdell and Noll, 1965), 建立了连续介质力学作为一个严格的轴学理论, 主要吸引应用数学家和理论物理学家。

到 1970 年, 现代纪律景观基本上是完整的。大学部门提供课程 **材料力学** (低学), **先进 材料力学** 或 **弹性力学** (第一年毕业生), **连续介质力学** (先进的毕业生), 以及各种专门主题在 **坚固的机械**. 专业身份越来越紧密地与这些特定领域有关: 一个人是连续机械学家、弹性学家和结构分析师。或计算机工程师.

10.5.8.2 从专业身份到纪律内容

面对这种发展专业身份的背景, 我们现在可以理解结构力学的智力内容和方法是如何在四个分开但超越的领域中加密的, 创造了当今术语混乱。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

材料力学: 工程帝国主义者 (1600-1790) 我们现在所称之为 **材料力学** 根據加利利奧的實際調查 (梁 强度, 见 §7.2.2) 马里奥特 (加利利奥的错误修复, 见 §7.3.2.3) 和 Coulomb (地球压力, 震动, 喷气理论, 见 §10.3.2.1). 这些先驱建立了一个工程学科, 其特点是:

- 简化一维模型 (布, 列, 沙夫)
- 测试中的现象观察
- 使用强力聚合物的地质合理化 和时刻 平衡
- 直接可应用于设计问题
- 基本数学工具 (基本计算)

这种方法基本上是实用的: 每个结构性单元都需要自己的专门处理, 没有对一般领域理论的要求。方法论在本科工程教育中仍然存在, 通常在类似的学位下 **材料力学**, **材料力学**, or **固体工程机械**. 现代啤酒书籍 & 约翰斯顿、希伯勒或吉尔 & 蒂莫申科基本上遵循了 300 年前建立的相同的教育方法, 以现代例子和安全因素更新。

弹性: 法国数学学院 (1820-1850) 术语 **弹性** (**以色列理性理论**) 在法国数学物理学在革命后的几十年里显著蓬勃发展。三个数字定义了这个领域:

船员 (看见 §6.7.3) 接近弹性从分子基础, 衍生部分差异方程式的弹性固体从中央力量相互作用粒子之间。他的 1821 年记忆和 1826 年的讲座建立了弹性作为数学物理学的分支。

卡西 (看见 §6.7.6) 采取补充路径, 开发弹性作为连续领域理论 没有对分子结构的说法。他的介绍 应力张量密度和分布关系, 以及差异平衡方程式 (1822-1828) 创建了今天仍然使用的数学框架。

圣文 (看见 §10.3.2.8) 合成这些方法, 并展示了边界价值问题 可以解决实用工程兴趣的机构 - 其 扭转 记忆 (1855) 和灵活性研究确定了弹性的频道问题。

法國學校創建 **弹性** 作为一个数学学科, 其特点是:

- 使用三维通用数量进行三维连续编写
- 线性宪法 (胡克的法律 一般化到 3D)
- 部分差异方程与边界条件
- 承诺在可能的情况下准确 解析解
- 先进数学的应用 (复杂变量, 潜力理论, 无限系列)

这种传统在爱情中达到了它的 apotheosis **数学 弹性力学** (1892-1893) 它仍然是半个世纪以来英语的最终参考。现代 弹性 文本书 - 蒂莫森科 & Goodier、Sokolnikoff、Barber - 继续强调解析解方法, 但现在由数值方法补充。

固体的机械: 德国 - 俄罗斯 - 美国合成 (1850-1960) 德国技术大学、俄罗斯科技学院和美国工程学校开发了一种平行传统, 强调:

- 实验验证与理论发展
- 包括无情的行为 (塑性克里普疲劳)
- 实用应用的图形和近距离方法

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- 稳定理论 和 动力分析
- 能源方法 和变量原则

关键数字包括 Mohr (图形方法, 应力循环, 见 §11.4.2) 八月 Föppl (1854-1924) 他的儿子 Ludwig Prandtl (1875-1953), 谁先驱了塑性理论, 关键是蒂莫森科, 其文本定义了这一领域的几代人。

术语 **固体机械** (或 **坚固的机械**) 在二十世纪中期逐渐出现, 以涵盖这个更广泛的范围 - 弹性 扩展到包括任何结构材料的机械行为。现代固体机械包括:

- 线性和非线性 弹性
- 塑性和限制分析
- 维斯科拉斯蒂 和 Creep
- 断裂力学 和损害
- 稳定和屈曲
- 结构动力学
- 计算方法 (五)

这是现代民用和机械工程研究生课程的内容, 反映在文本书籍如 Fung 的 **坚固机械的基础** 马尔文的 **引入一个连续的媒体的机制**或 Boresi & 施密特的 **先进的材料力学**.

最后, 这个术语的标志性 **结构工程师** 讨论在 §11.2.

连续介质力学:Axiomatic 抽象 (1945-1970) 第二次世界大战后, 数学家寻找一个统一的框架, 超越固体流体区别。**威胁** 和零, 在他们的处理中 **机械学的非线性领域理论** (1965), 提出 **连续介质力学** 作为 Axiomatic Field Theory 由: 特征:

- 连续体的通用电影 (变形, 动作)
- 平衡法则 (质量、动力、能量) 独立于宪法
- 宪法理论 通过符合一般原则的功能
- 框架 差异 物质同义 作为 Axioms
- 热力限制 关于宪法反应
- 极端数学普遍性和抽象性

在这个框架内, 弹性、Viscosity、塑性都变成了宪法理论的特殊案例。现代连续介质力学, 如 Gurtin 的文本书中所呈现 **引入 连续介质力学** 或 Holzapfel 的 **非线性固体机械**, 为计算机机械和复杂材料的研究提供理论基础 (生物组织、聚合物、粒子媒体).

然而, 这种普遍性是可用性的代价。在 Truesdell-Noll 的传统中, 连续介质力学主要引用应用数学家和理论物理学家。大多数工程课程继续教授老, 更具体的弹性和固体机械的公式, 为先进的研究或专门的研究提供连续机械。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

10.5.8.3 今天的纪律景观

这些历史轨道已经晶体化为分开但超越的领域, 总结在表中 10.4.

表 10.4: 机械理论比较: 历史和技术前景

视角	材料力学	弹性	固体的机械	连续介质力学
创始人格	加利利奥, 马里奥特, 库伦布, 父母	海军, 卡西, 圣文, 爱情	泰莫森科, 布拉格, 丘, 德鲁克	特鲁斯德尔, 零, 埃里克森
历史时期	1638-1850 (学前数学)	1820-1900 (数学表述)	1900-1960 (工程合成)	1945-1970 (Axiomatic 抽象)
国家学校	意大利、法国实验	法國工學	德國 TH, 俄羅斯, 美國	美国, 意大利
职业身份	建筑师、军事工程师	工程师, 自然哲学家	工程教授	应用数学家
范围	简化结构 单元 (1D)	弹性固体 (3D 连续)	所有固定的行为	所有持續的問題
数学级别	基本计算, 地质学	PDEs, 向量计算, 复杂变量	PDE、通风器、变量计算	抽象 张量 分析, 功能分析
宪法法律	线性弹性 (暗示性)	线性弹性 (胡克的法律)	弹性、塑料、粘性、损害	任何宪法功能
歪曲	小 应变 只有	通常小 应变; 一些大	小或大; 非线性	仲裁; 完整 几何非线性
哲学	实用的实验性	数学准确性	工程现实主义	Axiomatic 严格
典型问题	梁挠度、柱屈曲、轴扭转	应力 浓度、接触、厚缸	结构故障、塑料崩溃、裂缝	理论基础, 存在理论
解决方法	手册公式, 桌子	解析 (Airy 应力, 复杂变量)	FEM, 限制分析, 大约	一般变量原则
关键文本	吉尔 & 泰莫森科; 啤酒 & 约翰斯顿 • 希伯勒	爱情; Sokolnikoff; Timoshenko & 善良	蒂莫森科 (不同) 马尔文 (Malvern)	威胁 & 天下之人; 天下, 天下。
教育背景	Sophomore / Junior 学士学位	高级毕业生 / 第一年毕业生	毕业生 (MS / PhD)	先进的毕业生 (博士)
目前使用	通用工程课程	美国下跌; 欧洲强大	研究中的主导	专门 (应用数学, 生物机械)

10.5.8.4 术语条约与关系

这些领域之间的关系可以通过历史降落和逻辑内容来理解:

历史降落:

$$\text{材料力学} \rightarrow \text{弹性} \rightarrow \text{固体的机械} \rightarrow \text{连续介质力学}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

每个领域都通过普遍化、数学化或抽象其先驱而出现。灵活性正式化和普遍化了材料机械的压力分析。固体的机制延伸了弹性包括在 20 世纪研究中发现的无线现象 (塑性 , 碎片, 裂缝). 连续介质力学 抽象了所有可变物质领域理论常见的数学结构。

逻辑容器:

$$\text{连续介质力学} \supset \text{固体的机械} \supset \text{弹性} \supset \text{材料力学}$$

在范围方面, 每个领域都是其继任者的专业化。连续介质力学 适用于所有连续物质; 固体的机械限制固体材料; 弹性 进一步限制可逆转变形; 材料力学 对 应力 分布和问题地质进行额外简化假设。

术语中的混乱源于这些字段共享过渡问题和方法的事实。梁曲折问题可以在四个层面上解决:

- **材料力学**使用 $\sigma = My/I$ 基本的梁理论
- **弹性**解决比哈蒙方程式 $\nabla^4 \phi = 0$ 适当的边界条件
- **固体的机械**包含 塑性 在支持、余额压力或时间依赖效果
- **连续介质力学**: 作为限制 边值问题 表述 的例子, 展示了一般原则

相同的物理状况, 数学复杂性不同水平, 不同的假设, 不同的洞察力。

10.5.8.5 本书中采用的条约

为了明确和一致, 我们在整个工作中采用以下术语:

- **连续介质力学**: 连续物质的一般数学框架, 包括基本概念 (压力、紧张、平衡法则) 独立于宪法行为。用来讨论基本概念或现代抽象的表达。
- **弹性** (或 **弹性力学**) 数学理论的线性弹性固体, 强调准确或半解析解到边界值问题。在讨论十九世纪法国传统和经典解决方法时使用。
- **固体的机械** (或 **坚固的机械**): 更广泛的工程科学固体材料行为, 包括塑性, 粘性, 损伤和裂缝。用来讨论二十世纪的发展和现代研究。
- **结构分析** (或 **结构理论**): 实体结构系统的固体机械应用 (火柴, 火柴、火柴), 包括解析和数值方法. 使用在讨论工程实践和设计时。
- **材料力学** (或 **材料力学**) 简化, 单维工程方法用于介绍课程和初步设计。使用在讨论基本治疗或历史作品预言严格的连续的公式时。

在讨论历史发展时, 我们使用该时期和作者的术语, 承认十九世纪作家使用 **弹性** 现在我们可以区分为连续介质力学, 这 **材料力学** 它在 1900 年之前是普遍的, 而且 **坚固的机械** 它主要是二十世纪的硬币。读者必须始终在背景下解释历史术语, 理解纪律界限在培训期间比当今专门的学术课程中显而易见得更少。

从自然哲学家到专门的坚实机械师的进化　从加利利奥的地质表现到特鲁斯德尔的异理严格　不仅代表了智力进步, 而且是我们如何组织知识和专业身份的根本转变。一个名字里有什么? 在这种情况下, 我们了解物质的机械行为的整个历史, 并结构我们的对其分析方法。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

10.6 结论

本章节跟踪了从弹性的分子理论到现代结构力学统治的全面连续框架的令人惊叹的智力之旅。在这里审查的范式转变 - 从减少主义试图从分子力量中引导物质行为到基于领域方程和能量原则的现象学表达 - 代表了机械史上最重要的时刻之一。

分子理论的失败, 因其错误预测泊松比而被传染 不足的弹性恒定, 迫使我们如何模型变形固体的基本重新概念化。法国数学学校特别是 Cauchy、Navier、Lame 和 Saint-Venant, 建立了应力发动机的数学仪器、应变测量和构成关系, 形成基础的连续介质力学. 绿色对应变能函数的勇敢性, 虽然最初抵抗, 最终在 20 世纪热动态证明时显得明显。

普遍平衡法则保留质量的动力和能量, 以及内特罗比不平等, 提供所有连续理论必须运作的框架。这些法律超越材料类型, 适用于液体、固体和更复杂的材料。然而, 平衡法则本身无法预测物质反应; 它们必须由宪法关系补充。它可以捕捉物质特定的行为。

表述的基本原则 - 客观性, 物质同步性, 热动态可接受性 - 从理论合理化和实验观察的相互作用逐渐产生。对于弹性材料, 基于潜力的表述 (超弹性) 它表现出特别强大, 保证能量储存, 并为材料模型提供系统的框架。二个独立的弹性恒定对以色列物质所需 (拉米的 λ 和 μ, 或相当于 杨氏模量 和 泊松比) 代表实验现实所要求的最小复杂性 - 分子理论家从第一原则无法得出的结论。

1860 年取得的合成令人惊叹: 一个完整的数学框架, 能够描述连续弹性媒体在任意负载和边界条件下的机械行为。卡西的应力张量与动态变形协调、构成关系和平衡等式相结合, 产生了部分差异等式的系统, 可以原则上预测任何弹性身体的反应。

然而, 仍然是一个关键的挑战。一般的弹性力学, 其所有数学优雅, 最自然地应用于简单地数学的连续体。真正的结构 - 火柴, 框架, 弓箭, 悬挂桥梁 - 由分散的成员组成, 连接到关节, 充电条件比可用于解析解的人更复杂。工程师如何利用连续介质力学的功率来实现实用的结构分析而不在每个点上解决复杂的部分差异方程式?

答案是专门的方法, 利用了结构性单元: 梁理论、位移方法、强度方法、不确定的结构能源原则的具体地质和负载。纳维尔通过对持续的冲击分析引发了这个翻译, 从而产生了统治方程式。$EId^4y/dx^4 = q(x)$ 一般三维理论。Clapeyron 的能量方法三个时刻的理论后来, 麦克斯威尔和卡斯蒂格利亚诺的进展代表了该计划的连续改进: 从通用持续理论中提取具体工具工程师需要结构分析。

这是这些实用的方法　纳维尔在静态不确定的结构上的工作克莱皮龙的理论, 以及系统分析程序的后续发展 - 我们现在转向。这些方法代表了连续介质力学的第一次成功应用, 以解决结构工程师中最重要的问题, 将抽象领域理论与实践计算之间的差距结合起来。本章所设定的连续框架提供了严格的基础; 下章的结构方法表明其工程成果。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



卡拉瓦乔, 基督的降临 *(1603-1604)*

受分布负载的身体, 重量通过持续接触转移 - 在人形压力领域进行冥想。

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

11 结构分析 在最后: 合成 & 应用

摘要

最后一章将连续介质力学的合成转化为实用的结构分析 - 抽象的弹性理论转变为分析实际工程结构的系统方法。从纳维尔在 *1820* 年代对静态不确定射线的处理开始, 我们通过马克斯威尔的相互理论、莫赫的地质方法、卡斯蒂格利亚诺的能量原则、穆勒 · 布雷斯拉乌的力量方法、曼尼和班丁的位移方法跟踪发展。哈迪克罗斯的瞬间分布 - 统治结构工程超过一个世纪的方法。

接下来, 该章节探讨了 *1950* 年代至 *1960* 年代的计算革命如何将这些经典方法转化为矩阵公式。特纳和同事的直接刚度法和克劳的有限元法不是从古典理论中脱颖而出, 而是通过数字计算实现已设立原则的系统实施。

这个章节补充了历史的弓开始与加利利奥的强度和运动实验, 展示了如何两个世纪的理论发展发现实用的表达方法, 实现了数学理论, 计算能力和工程设计之间的关闭。

11.1 引入 316
11.2 结构工程, 标签 317
11.3 早期发展: 静态不确定的漏洞 318
11.3.1 船员 (1785–1836) 第一种系统治疗 318
11.3.2 克莱普里昂 (1799–1864) 标签: 三瞬间方程式 319
11.4 转向一般方法 319
11.4.1 马克思 (1831–1879): 互等定理 320
11.4.2 莫克 (1835–1918): 地质方法和类似 320
11.4.3 卡斯特里亚诺 (1847–1884): 能源方法 321
11.4.4 布雷斯拉夫 Müller-Breslau (1851–1925): 系统化和影响线 321
11.4.5 力量方法: 变形协调和灵活性 322
11.4.6 基本概念与程序 322
11.4.7 力量方法: 总结和遗产 324
11.5 位移方法: 从理论到实践 324
11.5.1 理論基礎: 早期堅固的表達 . 324
11.5.2 Slope-Deflection 方法: 系统式编写 325
11.5.3 哈迪克罗斯 (1885–1959) 时刻分配方法 326
11.5.4 扩展和变量 328
11.5.5 位移方法: 总结和遗产 329
11.6 影响线和移动负载 330
11.6.1 温克勒 (1835–1888)● 早期發展 330
11.6.2 穆勒 - 布雷斯拉夫的原则 . . 331
11.6.3 应用和遗产 331
11.7 向矩阵表述: 概念桥到计算 331
11.7.1 矩阵古典方法的结构 331
11.7.2 从 Iteration 到矩阵解决方案 332
11.7.3 手计算的界限: 设置计算阶段 332
11.7.4 结论: 连续性和转型 332
11.8 结构分析的基本要求 333
11.9 捐助者的时间总结 335
11.9.1 结论 338

11.1 引入

七千年后, 第一台图形平板录制了工程知识, 并在连续介质力学的基础上建立了两世纪后, 我们到达了历史之旅的顶峰: 数学理论和结构实践的合成进入现代计算分析。

以前的卷子跟踪了结构力学作为数学科学的逐步出现。我们见证了伽利略的实验, 证明物质力量是可量化和由理性法则统治的。我们跟随了牛顿的机械转化为数学纪律。我们观察了连续介质力学的进展 - 卡希的应力理论, 纳维尔的领域方程式 - 改变了我们对材料如何响应荷载的理解。每個進步都延伸了可計算的範圍, 但仍然有一個關鍵的挑戰: 如何將這些抽象理論適用於實際結構, 其複雜度超過解析解.

审阅稿

本章探讨了如何通过开发结构分析作为一个独特的工程学科来解决这个挑战。基于上一章所设立的弹性理论的数学基础, 机械学进入了一个新的决定的阶段 - 一个越来越由结构工程的需求驱动。应力、应变和弹性的抽象格式 (查普。10) 在十九世纪初, 数学家的工作已经成熟了, 现在在分析现实结构中发现了混凝土的表达: 桥梁、框架和弓箭, 其复杂性扭曲了静态定义系统的简单。挑战不再是定义物质法则, 而是系统地将其应用于成员的集会, 其中内部力量不能由平衡单独推翻。

在这个过渡中, 从不断的到差异的, 从一般的弹性力学到具体的结构科学, 出现了一代新思想家。法国工程师 (海军和克莱皮隆), 英国马克斯威尔, 意大利卡斯蒂格利亚诺和德国教授 (穆尔和布雷斯拉夫) 转化为结构分析的机械, 引入了强大的能量理论和变形协调 **未定** 不是不可解的, 但 **优雅可量化。**

转型发生在两个阶段, 由数字计算分开。第一阶段, 大约为 1820 年至 1950 年, 观察到手计算方法的开发: 系统分析静态不确定结构的程序。本章节跟踪了这些分析方法的进化, 结合了弹性理论和结构设计的方法 - 后来将形成转移和坚固的方法的基础, 以 20 世纪结构分析为中心。从纳维尔在不断的射击上进行的先驱工作到克莱皮伦的三分钟方程, 从麦克斯威尔的相互理论到卡斯蒂格利亚诺的能量原则, 从莫赫的时刻区域理论到哈迪十字节的分布 - 讲话跟踪了概念洞察如何逐渐分解为一般方法。以统一的结构来分析复杂结构。

第二阶段, 从 20 世纪 50 年代开始, 见证了这些经典方法进化为矩阵可用于计算机实施的公式, 在有限元法中高峰。这种讲故事令人兴奋的是在显而易见的革命下, 不断的启示。有限元法 不是作为经典理论的中断而出现, 而是它的系统延伸。单元的固度矩阵、组合程序和能量原则直接跟踪马克思威尔、卡斯蒂格利亚诺及其当代人的概念。计算机改变了可以计算的, 而不是正在计算的。

因此, 章节分为两个主要部分。第一個考慮手計算方法, 從 Navier 的持續打擊到能量原則和变形协调條件, 以 Hardy Cross 的瞬間分配為頂峰 - 手計算的頂點。第二部分探讨了数字计算机如何允许转化为矩阵方法: 波音的直接硬度方法, 克劳的延伸到连续媒体作为终端元素方法, 以及计算结构分析的快速成熟进入当代实践的主导模式。

这样做, 这篇章节完成了从加利利奥对力量和运动的实验开始的历史弓, 通过了连续介质力学的伟大描述。它在现代计算结构分析的诞生中突出, 这是一个最终实现了理论、计算和设计之间的关闭。

现在, 让我们来看看这种合成是如何实现的。首先, 让我们来看看这个词的起源。“结构工程”.

11.2 结构工程, 标签

结构工程的现代技术内容很长一段时间前进了现代名称。在十八世纪和十九世纪初的大部分时期, 我们现在所团体的 “结构分析” 和 “结构工程” 它分布在民用工程, 建筑, 静态, 材料力学, 和 (后来) 弹性. 在十九世纪, 结构规模的增加, 新材料 (铁, 然后钢材), 以及扩展的解析工具套件 (稳定性、弹性理论、能量方法、图形静态以及最终矩阵方法) 鼓励在民用工程领域更清晰的专业化。在英语中, 这种专业化不是由一个单一的行为反映出来。“金钱” 但通过在专业和公开使用中逐步稳定术语。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

对于英语使用, 最防守的日期来自牛津英语词典。记录了诺恩的句子 **结构工程** 1859 年最早的证据 (*structural engineering, n.* n.d.) 专业的诺恩 **结构工程师** 1867 年最早的证据 (*structural engineer, n.* n.d.). 订单是历史上可行的: 活动标签在职业标题之前变得常见。到 20 世纪初, 这个称号是机构统一的; 在英国, 现在被称为结构工程师机构的机构追踪其起源于 1908 年, 并报告了 1922 年的现名。(*Our history* 2026). 制度性采用并不是词语的第一次出现, 但它是职业稳定的重要标志。

法语和德语实践表现出相同的基本专业化, 但具有不同的语言学途径。在法语中, 英语后来标记的作品 "结构工程" 历史上, 它是通过这样的句子编写的。**计算建筑, 材料的抵抗**, 和 **建筑理论**而不是通过一个单一的职业标题, 与 "结构工程师。" 职业身份也被机构背景强烈塑造 (主要是大生态和身体。), 与工程角色通过民用工程和建筑导向的标题表达。在德语的背景下, 一个独特而广泛使用的定义是 **巴斯塔克** (字面上 "建造静态") 它作为一个象征范围理论, 计算方法, 以及它们的应用到真正的荷载带结构。(Kurrer, 2008 PDF). 库里勒强调了领域的广度和语言问题: 不同语言争取严格和简要地命名一个包括理论、计算和实践的域; 在德语中, **巴斯塔克** 已成为广泛接受的术语 (Kurrer, 2008 PDF).

术语 **结构分析** 它最好被理解为方法标签而不是专业标题。历史上, 相同的活动在老年标题下出现 (例如, "静态" 或 "结构理论") 只有后来才变成一个明确命名分析行动的标准化句子: 确定负载系统的内部力量、歪曲和稳定。因此, "结构工程师" 和 "结构分析" 它应该被视为十九世纪和二十世纪初的专业差异化产物: 前者以英语命名一个实习身份, 后者以现代术语更古老的智力根源的解析程序越来越正式。

11.3 早期发展: 静态不确定的漏洞

虽然灵活的理论在十八世纪统治了科学景观 (查普。7), 它是静态不确定的射击的分析, 占主导地位十九。这种发展是由铁路时代和金属建设的出现直接激发, 这自然导致了不断的喷射和固定喷射的广泛使用。(安卡斯特) 支持。

静态不确定结构的根本挑战是, 只有平衡方程式不足以确定所有未知的力量和反应。额外的方程必须从变形协调条件中得出 - 要求扭曲结构保持连续性和适当支持。这种区别的认可, 以及利用它的方法的系统发展, 代表了十九世纪结构力学的伟大智力成就之一。

11.3.1 船员 (1785–1836) 第一种系统治疗

铁建设的出现和 1820 年代铁路网络的扩张创造了紧急的实用问题, 古典机械学没有解决。铁桥和铁路维亚杜克经常使用连续的喷射, 扩展多层支持 - 配置不能单独分析平衡方程式。正是在这一背景下，法国国立桥路学校教授克洛德-路易 • 纳维扩展了早期关于弹性梁的研究，作出了可能是首次明确讨论结构超静定性的工作。

1826 年, 他的 **教训** (Navier, 1826 PDF, p. 33),Navier 可能成为第一个系统地分析静态不确定的梁 - 具体而言, 在三个支持器上进行梁. 1833 年第二版 (Navier, 1833 PDF) 延长此治疗 **安卡斯特** (cl cl) 更复杂的连续 梁 配置。

纳维尔对基本问题的认识在他的声明中显而易见:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 如果一个负载在同一垂直平面上支持超过两条倾斜线, 或者在不相同平面上的三条倾向线, 则平衡条件在某些边界之间保持不确定。各行的方向上施加的力量。
>
> Navier, 1826 Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines

纳维尔的方法结合了平衡方程式与基因条件的变形协调由弹性曲线的差异方程。对于多个支持的持续冲击, 他承认每个中间支持的分裂必须消失, 提供额外的平衡需要确定回归反应。他的方法, 虽然是具体的持续的冲击, 建立了基本原则, 将指导所有随后的发展在十九世纪: **静态不确定性是通过引用变形协调的变形来解决.**

11.3.2 克莱普里昂 (1799–1864) 标签: 三瞬间方程式

> 有关分析细节，请参见 *§25.3*

.

1857 年, 贝诺伊特 • 克莱皮龙 (Benoît Clapeyron) 发表了他的著作。“三个时刻理论” (Clapeyron, 1857). 这种优雅的结果提供了连续三次支持梁的旋转时刻之间的直接关系, 消除需要与弹性曲线的差异方程直接工作。

為持續的 梁 與長度延伸 ℓ_1 和 ℓ_2 连续三次支持与时刻之间 M_1, M_2, 和 M_3 克莱皮隆的方程式采用了以下形式:

$$M_1\ell_1 + 2M_2(\ell_1 + \ell_2) + M_3\ell_2 = -6\left(\frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2}\right)$$

哪里 A_1 和 A_2 代表其区域的 M/EI 仅支持的字符串在应用加载下图表。

三瞬间方程式代表了概念突破。而不是用多边条件解决差异方程式, 工程师现在可以直接为未知的支座时刻写算法方程。為一個持續的 梁 超過 n 支持, 这得到了 $n-2$ 同步的线性方程式 - 一个问题, 可以通过计算方法在十一世纪中期轻松解决。(Timoshenko, 1953).

克莱皮伦的理论成为分析连续射击的标准方法, 并在工程学校广泛教授近一个世纪。它的影响力远远超出了它的即时应用: 它证明, 系统的算法方法可以通过案例分析取代案例, 指向 20 世纪的通用矩阵方法。

11.4 转向一般方法

虽然克莱皮伦的理论优雅地解决了不断的梁问题, 但它仍然是对这种结构类型的具体。更广泛的问题仍然存在: 可以想象一个通用方法, 适用于任何静态不确定结构 - 框架, 架子, 架子的 - 无论配置如何? 答案是通过开发能源方法和虚功原理概念, 将统一在一个共同的理论框架下处理不确定的结构。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

11.4.1 马克思 (1831–1879)：互等定理

有关分析细节，请参见 §24.2.2

.

强力方法的理论基础是由詹姆斯 • 克勒克 • 麦克斯威尔 (James Clerk Maxwell) 在他的著名 1864 年论文中提出的。**关于计算平衡和框架的密度** (Maxwell, 1864c). 尽管麦克斯威尔主要记得他对电磁理论的革命贡献, 但他的关于结构力学的工作也同样深。他对结构问题的兴趣源于他的特征性方法: 寻求数学统一, 面对显然不一样的物理现象。

麦克斯威尔的相互理论说, 对于一个线弹性结构, 在点上有位移 i 由于一个单位 荷载 在点 j 等于 位移 的点 j 由于一个单位 荷载 在点 i:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

这种看似简单的结果有深刻的后果。这意味着柔度矩阵 (与驱逐的力量联系) 必须是相同的, 成为结构分析基本的属性。麦克斯威尔使用这个原则来产生系统的程序, 以计算相关术语和框架中的缺陷。他的理论允许系统计算灵活率, 从一个依赖直觉的艺术转化为基于方法的科学。

麦克斯威尔的 1864 年论文也介绍了现在所谓的麦克思威尔理论, 用愚蠢的负载计算缺陷 - 一个技术将由其他人独立重新发现和普遍化。他的评级和系统的方法预测了矩阵方法, 几乎一世纪后会出现。(Timoshenko, 1953; Charlton, 1982).

11.4.2 莫克 (1835–1918): 地质方法和类似

德雷斯登多理学教授克里斯蒂安 • 奥托 • 莫赫 (Christian Otto Mohr) 在 1868 年至 1906 年间为结构力学做出了许多基本贡献。他的图形方法和结构行为的地质解释工作为工程师提供了强大的实用分析工具。

莫赫的圈子为应力 雖然不直接與未定義的結構有關, 但 Mohr 的循環 (1882) 代表 应力 州已成为机械中最广泛使用的工具之一 (Mohr, 1882a). 优雅的地质结构允许即时视觉主要压力和最大剪应力 - 概念, 对理解结构失败至关重要。

时刻区理论

有关分析细节，请参见 §22.3.4

莫赫的瞬间区域理论 (1868) 提供一个地质方法, 以计算漏洞和漏洞的射线 (Mohr, 1868):

第一理论: 弹性曲线上的两个点之间的曲线变化相当于下方的区域。M/EI 这些点之间的图表。

第二个理论: 一个点与另一个点的坦根垂直偏离等于第一刻。M/EI 图表区域关于第一点。

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

这些理论, 从基本的梁方程式产生的 $d^2y/dx^2 = M/EI$, 允许工程师通过整合并直接与区域和中心工作 - 计算轻松地进行图形或简单的算法。

分析方法

有关分析细节，请参见 §22.3.4.7

莫格也开发了 **灵活 荷载** 或 **合成 梁** 分析, 将挠度问题转化为同等时刻问题。通过处理 M/EI 图表作为一个合并梁的负载, 实际梁的偏差和折叠可以从合并 梁中的页面和时刻中找到 - 这是一种优雅的转变, 大大简化了计算。(Timoshenko, 1953).

11.4.3 卡斯特里亚诺 (1847–1884): 能源方法

有关分析细节，请参见 §48.5

意大利铁路工程师阿尔伯托 • 卡斯蒂格利亚诺 (Alberto Castigliano) 在多伦多理工学院仍然是学生。他的博士论文, 出版于 1873 年, 后来扩展在他的 1879 处理 (Castigliano, 1879), 建立了能量方法作为结构分析的强大工具。卡斯蒂格利亚诺的工作直接受到铁路桥梁设计的实用需求的动机, 其中复杂结构配置的快速分析至关重要。

卡斯蒂格利亚诺的第一理论 与 位移 相比, 总 应变能 的部分衍生品相当于相应的应用强度:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i$$

这个理论, 虽然在理论上重要, 发现的实用应用比他的第二理论少。

卡斯蒂格利亚诺的第二个理论 与强度相比, 总 应变能 的部分衍生值相当于相应的 位移:

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i$$

这个结果, 有时被称为单位荷载理论, 成为挠度计算的工作组。与 应变能 的结构

$$U = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int \frac{N^2}{2EA}\,dx + \int \frac{V^2}{2GA}\,dx$$

挠度在任何方向的任何点, 可以通过与应用的区别找到 (或傻瓜) 荷载在这个方向。

对于静态不确定的结构, 卡斯蒂格利亚诺的理论提供了一个直接的方法: 放弃力量可以被视为未知的, 以及变形协调条件。(在某些地方, 缺陷必须消失。) 提供必要的方程式。这种方法, 被称为最少工作的方法, 表示, 解放力量分配自己, 以尽量减少总的应变能. 铁路工程师对该方法的系统可应用性进行了评估, 因为它对复杂桥梁配置有系统的可用性。(Charlton, 1982).

11.4.4 布雷斯拉夫 Müller-Breslau (1851–1925): 系统化和影响线

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

有关分析细节，请参见 §28.3

柏林 Charlottenburg 技术高等学校教授 Heinrich Müller-Breslau 在他的纪念品处理中总结和系统化了对无限结构的各种方法。**更新的** *Festigkeitslehre* **方法** (Müller-Breslau, 1886).

一般力量方法 表述 穆勒 • 布雷斯拉夫以其最普遍的形式介绍了力量方法。对于一个结构与 n 静态不确定度, 程序是:

步骤 1: 选择 n 回归力量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 除去相应的限制, 创造一个静态定义 “初级结构。”

步骤 2: 计算转移 δ_{ij} 路由器的位置 i 因单位值的折扣 j 更多散步 δ_{i0} 由于所载的负担。

步骤 3: 执行 变形协调 - 转移到转折地点必须符合实际的 支座 条件:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

哪里 Δ_i 已知的支座移行 (经常零).

这个系统的 n 方程式在 n 不知不觉决定了所有的救援力量。该方法是系统的, 普遍的, 适用于任何结构。

影响线 Müller-Breslau 还开发了影响线理论 - 图表显示一个特定的力量或时刻如何变化, 因为单位 荷载 穿过结构 (Müller-Breslau, 1887). 他的影响线构建原则指出, 对于某个特定的力量或时刻的影响线具有相同的形状, 如在该力量或瞬间被给予单位值并允许结构变形时产生的挠度曲线。

这种地质解释为工程师提供了强大的图形方法, 以分析在移动负载下的结构 - 铁路桥梁设计至关重要, 是十九世纪末的主导工程挑战。(Timoshenko, 1953; Charlton, 1982).

11.4.5 力量方法: 变形协调和灵活性

有关分析细节，请参见 章节 25

Maxwell、Mohr、Castigliano 和 Müller-Breslau 的贡献, 虽然有所独立发展, 形成了将成为统一解析框架的重要组成部分。麦克斯威尔建立了相互理论和灵活性指数的概念; 莫赫提供了计算故障的地质方法; 卡斯蒂格利亚诺证明了能源原则的力量, 以确定转移和变形协调条件; 穆勒 • 布雷斯拉夫开始了系统化工作。這些不一樣的洞察中所產生的, 是一種一般方法, 適用於任何静態不確定的結構 - 一種方法將被稱為力量方法, 或替代, 柔度法.

本节介绍了力量方法, 不是作为一个单个人的发明, 而是上述理论发展的合成。在二十世纪的转折点上, 这种方法已经变成了一种系统的程序, 在每个工程学校都教导。在审查其遗产和限制之前, 重要的是要了解这些先驱的洞察力统一为一致的解析框架的基本概念和逻辑结构。

11.4.6 基本概念与程序

在研究历史发展之前, 必须了解强力方法的基本逻辑, 这反转了结构分析的正常序列。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

静态不确定性学位

有关分析细节，请参见 §19.1.4

一个结构是静态不确定的, 只有平衡的方程式不足以确定所有未知力量。静态不确定性程度, n, 代表超过 平衡 的额外方程的数量。例如:

- 简单支持的 梁: 确定 ($n = 0$)
- 固定终端 梁: 不确定与 $n = 3$ (兩個瞬間反應和一個垂直反力是 redundant)
- 连续 梁 超越 m 支持: 不确定与 $n = m - 2$
- 关闭的 框架 或 桁架: 不确定性取决于会员数量, 关节和 支座 条件

强力方法程序 强力方法将某些力量或反应视为主要无知, 特别是 n 回归的力量。系统的程序是:

步骤 1: 选择 Redundants。 选择 n 力量 (反动或内部力量) 如下人。选择是自愿的, 但影响计算效率。把这些称为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

步骤 2: 创建基本结构。 取消与红色相匹配的限制, 创造一个静态定义的初始结构, 只有平衡可以分析。这往往意味着移除支持, 切断成员或引入粘贴。

步骤 3: 分析基本结构。 计算在转折地点的迁移, 因为:

- 使用的货物: 移行 δ_{i0} 放松的位置 i
- 每個折叠器的單位價值: 柔軟度率 δ_{ij} = 位移 在位置 i 由于单位在位置上的力量 j

步骤 4: 执行 变形协调. 实际的结构必须是持续的, 适当支持。因此, 在转移地点的转移 (计算为 荷载 效果和减少效应的超级) 必须平等的实际限制条件:

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j = \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

哪里 Δ_i 已知的支座移行 (通常为硬支持零).

步骤 5: 解决中断者。 这个系统的 n 方程式在 n 不知不觉决定了所有解放的力量 X_j.

步骤 6: 超级。 一旦被发现, 所有其他力量和时刻都由原始结构解决方案的超越和解体效果所追随。

為什麼 11 柔度法"? 该方法被称为柔度法, 因为它与灵活性率工作。δ_{ij} 与驱逐的力量有关。柔度矩阵的 $\mathbf{F} = [\delta_{ij}]$ 它是表述的核心。对于 线弹性结构, 这个 矩阵 是相同的 (马克思所能证明的) 肯定定义。

物理解释 力量方法包含一个基本原则: **自然分发力量满足平衡和变形协调**. 平衡在每个阶段都满意 (选择基本结构), 而变形协调提供额外的限制, 决定力量如何分布在旋转路径之间。这种方法将结构分析的两个基本要求分开, 即平衡和变形协调 - 而不是同时处理它们。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这种方法的理论基础主要是通过马克斯威尔、莫赫、卡斯蒂格利亚诺和穆勒布雷斯拉夫的作品建立出来, 我们现在正在审查他们的贡献。

11.4.7 力量方法: 总结和遗产

到 1900 年, 强力方法完全开发并广泛教授。其优点是明确的: 系统和总体 (适用于任何静态不确定结构) 基于健康的物理原则 (变形协调 的歪曲), 为线弹性结构提供准确的解决方案, 并与计算工具在预算时代可行的实施。

首要限制是计算: 灵活性因素 δ_{ij} 需要广泛的计算, 解决多个方程式的系统是无聊的。对于高调的结构 (大框架, 连续的泡沫与许多螺旋) 这个方法变得不实用。一个持续的冲击超过十个支持需要解决八个同时方程; 一个多历史框架可以轻松地产生二十或更多的未知。

这种实用的限制将引发替代方法的开发 - 位移 方法和其后裔, 硬度方法 - 这将通过基本重新理解哪些量应该被视为未知的二十世纪 结构分析 统治。

11.5 位移方法: 从理论到实践

位移 方法代表了从力量方法的视野中的根本转变。而不是以未知的形式处理和满足变形协调的力量, 而不是以位移方法来处理转移。(具体, 共同旋转和翻译) 不知不觉和满足平衡。这种逆转, 虽然概念上微妙, 却证明是计算革命性的。

关键观点是, 未知的选择基本上影响计算效率。考虑一个简单的门户 框架: 强度方法需要解决支持中的反动反应 (外部力量), 而位移方法直接解决合体旋转 (内部迁移). 对于具有固体关节的 框架 , 这种基于 位移 的方法通常涉及较少的未知 - 往往显著较少。

位移 方法的發展發生在從 1860 年到 1930 年代的幾個階段, 高達了 Hardy Cross 的分配方式, 這將統治 结构分析 三十年。

11.5.1 理論基礎: 早期堅固的表達

位移方法的概念种子出现在十一世纪中期的一些作品中, 尽管它们直到二十世纪初才完全开花。

克里斯蒂安 (1862): 桁架 由 Stiffness 分析 1862 年, 格丁根理論物理學教授阿爾弗雷德 • 克萊布什 (Alfred Clebsch) 在他的影響力研究中提出了 **弹性理论 ¨祝 *K*¨ 儿** (Clebsch, 1862a) 一个优雅的算法, 分析三维 pin 合并管道。对于每个组合,Clebsch 介绍了三个未知的卡特西亚位移组件。一个典型的线连接两个节点连接六个位移组件, 并且对于稳定的结构, 完整的方程式系统是从平衡, 地质学和胡克的法则。

克莱布什的描述本质上是直接硬度方法的早期形式, 他用成员硬度而不是灵活性工作, 并通过地质兼容性和平衡来收集它们。巴雷 • 德 • 圣文特 (Barré de Saint-Venant) 在 1883 年发表了一篇法国翻译, 并发表了广泛的评论。(Saint-Venant, 1855c) 他指出, 这种方法跟踪了纳维尔 1826 年讲座笔记, 在那里纳维埃分析了一个力量的分裂, 沿着三条同行线, 考虑到变形。(Navier, 1826, p. 33).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

圣维南特声称, 在他自己的讲座中, 他在 1838 年的笔记中提出了 **该方法的基本原则, 以确定反应的强度和时刻。**1843 年, 他曾说过 **对于这些类型的问题, 总是有相同的数量的方程式与未知的时, 结构成员被压缩、延伸或压缩和旋转。**虽然历史上的优先事项仍然有点不清楚, 但概念框架在中世纪显然出现。

曼德拉 (1880) 标签: Iterative Solutions 1880 年, 慕尼黑的年轻助理海因里希 • 曼德拉 (Heinrich Manderla) 提出了一种分析不明的关节直接工作的固体关节框的方法。(Kurrer, 2003 PDF). 曼德拉不仅在旋转方面制定了平衡方程式, 还提出了一种以色列的解决方案程序, 即五十年后将统治结构分析的方法。他的作品获得了有限的即时认可, 但在发展中形成了一个重要的概念联系。对于他的创新贡献, 曼德拉获得了慕尼黑聚技术特别奖。

莫克 (1892): 分布与发展 奥托 • 莫赫 (Otto Mohr) 在 1892 年关于二级压力的论文中 (Mohr, 1892) 提出了曼德拉的方法的改编版本, 这使得德国工程师们对该方法更加关注。莫赫的治疗澄清了物理解释: 合体旋转是具有固态连接结构的自然自由度, 并在合体中提供支配方程式的平衡。二次时刻的计算在特鲁塞, 而接近 (假设弯曲效应不会大大影响协调方向的节点转移), 证明了基于位移的表述的实用性。

11.5.2 Slope-Deflection 方法: 系统式编写

有关分析细节，请参见 §27.2

在 20 世纪初, 斯洛普分解方法出现了作为结构分析的第一个完整和系统的转移基础的方法。该方法直接表达了成员结尾时刻, 并在每个关节上执行了平衡, 为未知旋转提供了一种方程式。

班德森 (1914) 标签: 欧洲发展 德国工程师 Axel Bendixen 在 1914 年发布了最早的系统介绍, 将成为挠度方法。(Bendixen, 1914). 对于一个长度的梁 L 最终旋转 θ_A 和 θ_B 和相对结尾 位移 Δ,Bendixen 为最后的时刻所产生的表达:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^{FEM} \tag{11.1}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^{FEM} \tag{11.2}$$

哪里 $\psi = \Delta/L$ 是 转角 和 $M_{AB}^{FEM}, M_{BA}^{FEM}$ 是由于会员负载而确定的终点。

这些折叠 挠度 方程式提供了成员终点时刻之间的直接关系 (需要满足 平衡 的) 和联合迁移 (未知者). 通过写下每个组合的平衡方程式 - 即在一个组合中相遇的成员终点时刻的总数必须相当于任何应用的组合时刻 - 结果是未知组合旋转的方程系统。

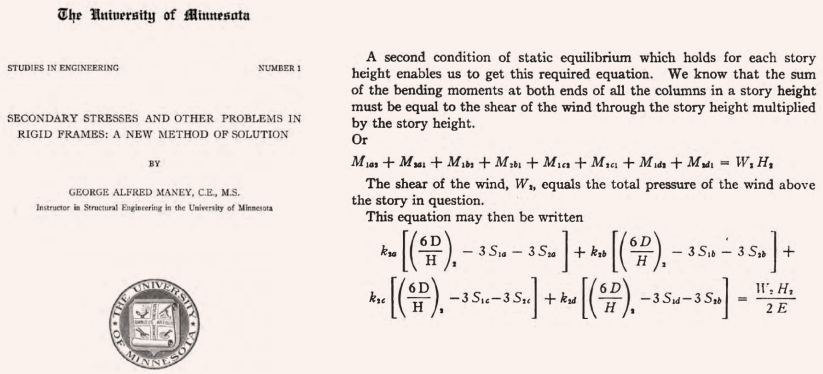
曼尼 (1915) 美国系统化 乔治 A。明尼苏达大学教授 Maney 在 1915 年著名的论文中独立开发和系统化了挠度方法。(Maney, 1915 PDF). 他的工作开启了一个明确的实际需要声明 (图 11.1):

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> 随着现代钢材和混凝土结构的规模和复杂性日益增加, 无限压力理论的相对实用重要性显著增加了, 因此开发可行的方法将成为办公室设计师的重要性。从纯粹的理论观点来看, 无限压力领域多年来一直是一个相当精心完成的领域, 但许多标准分析方法留下了很多需要作为办公设计工作方法。相信任何缩短详细工作并减轻纯粹数学困难的攻击系统都会受到专业的欢迎。
>
> Maney, 1915 "*Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution*"

该方法表达了一个支座的每一侧时刻, 以接近的单元的强度和 (未知) 转角的角度。接下来, 平衡的方程式 (包括 "固定终端行动") 每一个合体都被写作, 导致在未知的合体旋转方面形成一系列线性方程式。$\boldsymbol{\theta}$. 一旦每个成员的转角确定, 可以轻松地取代并获得时刻。显然, 这是一个位移方法, 预测到矩阵的定义会出现几十年后。



The University of Minnesota

STUDIES IN ENGINEERING NUMBER 1

SECONDARY STRESSES AND OTHER PROBLEMS IN RIGID FRAMES: A NEW METHOD OF SOLUTION

BY

GEORGE ALFRED MANEY, C.E., M.S.
Instructor in Structural Engineering in the University of Minnesota

A second condition of static equilibrium which holds for each story height enables us to get this required equation. We know that the sum of the bending moments at both ends of all the columns in a story height must be equal to the shear of the wind through the story height multiplied by the story height.
Or

$$M_{1a_2} + M_{2a_1} + M_{1b_2} + M_{2b_1} + M_{1c_2} + M_{2c_1} + M_{1d_2} + M_{2d_1} = W_2 H_2$$

The shear of the wind, W_2, equals the total pressure of the wind above the story in question.
This equation may then be written

$$k_{2a}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1a} - 3S_{2a}\right] + k_{2b}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1b} - 3S_{2b}\right] +$$
$$k_{2c}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1c} - 3S_{2c}\right] + k_{2d}\left[\left(\frac{6D}{H}\right)_2 - 3S_{1d} - 3S_{2b}\right] = \frac{W_2 H_2}{2E}$$

图 11.1: Maney 的 1915 年草案的滑板分解方法 (Maney, 1915)

Maney 的清晰介绍和工作例子使该方法可用于实习工程师。他承认, 对于许多结构, 合并翻译可以被忽视或单独处理, 简化分析仅用于合并旋转。这个 **挠度 无侧面** 版本证明是非常有效的连续打击和单个故事框架 (Maney, 1915).

优点和限制 挠度方法提供了比强度方法更大的优势: 对典型的框架不太了解 (只有共同旋转与所有反动势力) 系统的表述在其中会员属性通过平衡而不是变形协调结合, 自然扩展到结构具有固体关节, 并直接确定时刻在所有关键位置。

然而, 它仍然需要解决一个系统的同步方程式 - 大型结构的重要计算负担。十個故事 框架受風充電的可能需要 40-50 組合旋轉如未知, 解決時間為熟練工程師 2-3 日。这引发了寻找可以避免明确的平衡解决的方法。

11.5.3 哈迪克罗斯 (1885–1959) 时刻分配方法

> 有关分析细节，请参见 *§27.3*

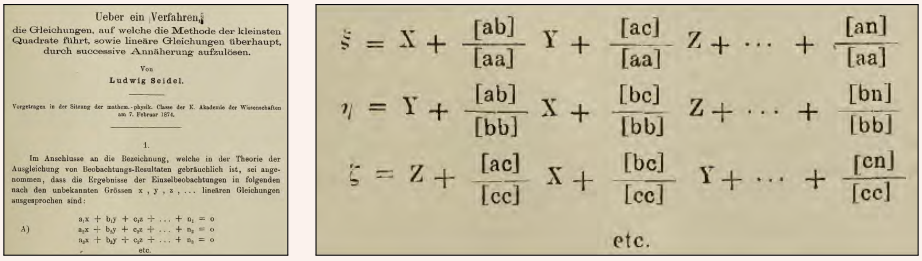
时刻分配方法, 由 Hardy Cross 于 1930 年引入 (Cross, 1932), 革命化 结构分析. 它将同

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

步方程式的解决方案转化为一个以最小计算的方式进行的异常过程, 通常在一张纸上手动。如果有人咨询原始程序, 会受到读者提交的评论非常多的印象。[1].

历史背景: 寻找伊特拉 到 1930 年, 分析多历史框架受侧负载的 (风或地震) 它已经成为一个压力实用的问题, 特别是在美国, 钢材框架与硬连接是标准的建设。挠度方法, 虽然有系统性, 需要解决大型方程式系统。对于十个故事的框架与固体关节, 这可能涉及三十或多个同时方程 - 在电子计算之前时代的一个令人震惊的计算任务。

有趣的是, 数学家长期以来一直拥有线性系统解决的异常方法。卡尔 • 弗里德里希 • 加斯 (Carl Friedrich Gauss) 在 1823 年对他的学生格林 (Gerling) 提出了异端态度, 而菲利普 • 路德维奇 • 冯 • 西德尔 (Philippe Ludwig von Seidel) 则于 1873 年正式制定了这种方法。(Seidel, 1873) (图 11.2). 加斯 - 塞德尔方法解决了一个系统 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 通过重复的 iteration, 使用更新值一旦它们成为可用。然而, 这些方法需要仔细关注相匹配标准, 并为工程师提供了对结构行为进行分析的物理洞察力不足。


Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen.

Von

Ludwig Seidel.

Vorgetragen in der Sitzung der mathem.-physik. Classe der K. Akademie der Wissenschaften am 7. Februar 1874.

1.

Im Anschlusse an die Bezeichnung, welche in der Theorie der Ausgleichung von Beobachtungs-Resultaten gebräuchlich ist, sei angenommen, dass die Ergebnisse der Einzelbeobachtungen in folgenden nach den unbekannten Grössen x , y , z , ... linearen Gleichungen ausgesprochen sind:

A) $a_0x + b_0y + c_0z + \ldots + v_0 = 0$
$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + v_1 = 0$
$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + v_2 = 0$
etc.

$$x = X + \frac{[ab]}{[aa]}Y + \frac{[ac]}{[aa]}Z + \cdots + \frac{[an]}{[aa]}$$
$$y = Y + \frac{[ab]}{[bb]}X + \frac{[bc]}{[bb]}Z + \cdots + \frac{[bn]}{[bb]}$$
$$z = Z + \frac{[ac]}{[cc]}X + \frac{[bc]}{[cc]}Y + \cdots + \frac{[cn]}{[cc]}$$
etc.

图 11.2: 西德尔的 1873 次连续接近方法解决线性系统 (Seidel, 1873). 虽然数学上听起来, 但缺乏工程师所寻求的物理解释。

伊利诺伊大学结构工程教授哈迪 • 克罗斯从工程师的角度来解决这个问题。他的关键观点是重新解释数学异语作为一个物理过程: 而不是同时满足所有平衡方程式, 为什么不连续执行它们? 通过释放一个关节而产生的临时不平衡, 当附近关节被释放时会得到纠正 - 而这个过程将转向正确的解决方案。

瞬间分配过程 十字路口的方法始于所有关节人工固定, 防止转角。由于负载而定义的终端时刻, 为每个会员计算。其次, 与此相结合的限制是 **释放**每個會議中不平衡的時刻, 分配給會議成員的比例。这种分布在附近的关节中产生不平衡, 然后释放并平衡。这个过程重复异常, 不平衡迅速下降到不可忽视的值。

关键概念是:

强度因素: 為 惯性矩 的成員 I 和长度 L 远端固定:

$$K = \frac{4EI}{L}$$

分布因素: 与多个会员的联合会议, 不平衡时刻分为会员 i is:

$$DF_i = \frac{K_i}{\sum K}$$

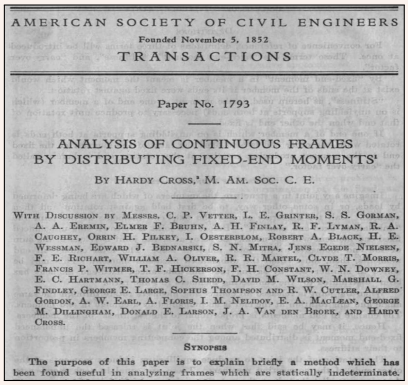
[1] 与现代不同, 早期工程读者详细研究技术文章, 并定期向作家发送评论和批评。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

超越因素: 當一瞬間 M 應用於固定終端 梁 的某一端, 一瞬間 $M/2$ 它在遥远的结局被引发。这种超越 1/2 的因素对 iterative 过程至关重要。

影响与采用 瞬间分配方法立即被认为是转型。十字架的文件在 ASCE 程序中 (Cross, 1932) (Cross and Morgan, 1932) 成为结构工程历史上最引用的之一。在几年内, 该方法在全球几乎每个工程学校都被教授。实习工程师可以分析以前需要咨询专家的结构。

该方法的成功延伸超越结构分析. 克罗斯本人通过应用相同的异常哲学来分析管道和电路中的流量分布, 证明了其更广泛的可用性。(Cross, 1936), 承认这些系统共享相同的数学结构的网络平衡, 图 11.3.


AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1793

ANALYSIS OF CONTINUOUS FRAMES BY DISTRIBUTING FIXED-END MOMENTS

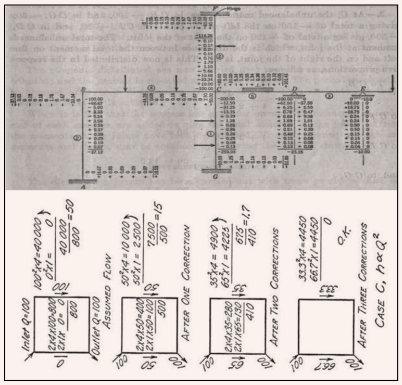
By Hardy Cross, M. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. C. P. Vetter, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. A. Eremin, Elmer F. Bruhn, A. H. Finlay, R. F. Lyman, R. A. Caughey, Orrin H. Pilkey, I. Oesterblom, Robert A. Black, H. E. Wessman, Edward J. Bednarski, S. N. Mitra, Jens Egede Nielsen, F. E. Richart, William A. Oliver, R. R. Martel, Clyde T. Morris, Francis P. Witmer, T. F. Hickerson, F. H. Constant, W. N. Downey, E. C. Hartmann, Thomas C. Shedd, David M. Wilson, Marshall G. Findley, George E. Large, Sophus Thompson and R. W. Cutler, Alfred Gordon, A. W. Earl, A. Floris, I. M. Nelidov, E. A. MacLean, George M. Dillingham, Donald E. Larson, J. A. Van den Broek, and Hardy Cross.

Synopsis

The purpose of this paper is to explain briefly a method which has been found useful in analyzing frames which are statically indeterminate.

(a) 十字架的 1930 年标志纸 (Cross, 1932)



(b) 应用于框架和管道网络 (Cross, 1936)

图 11.3: Hardy Cross 转型论文

该方法的成功源于其物理清晰度, 工程师们明白了每个步骤都取得了什么。它只需要没有平衡解决的算法操作, 是自我纠正。(一个循环中的错误在后续引用中被纠正) 保持灵活 (分析师可以随心所欲的准确度停止), 并证明适用于小型或大型结构。

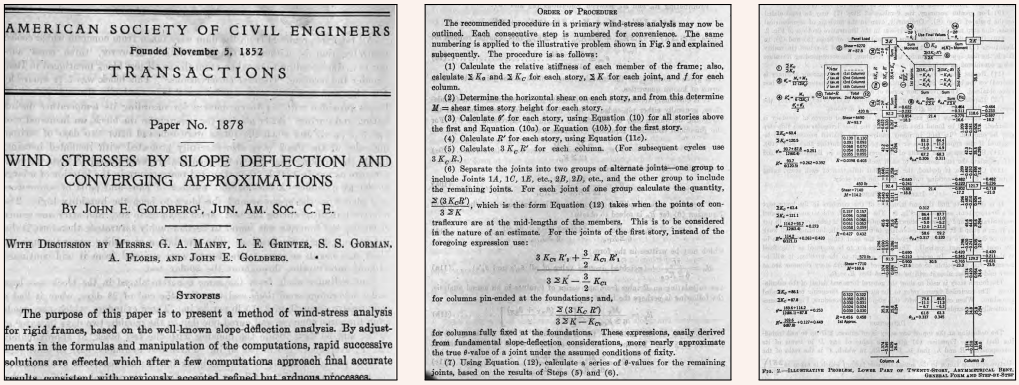
时刻分布在 1930 年至 1960 年间占主导地位的结构分析, 当时数字计算机开始允许将其替换的矩阵方法。

11.5.4 扩展和变量

黄金 (1934): 侧 荷载 分析 虽然克罗斯的瞬间分布革命了没有侧面框架的分析, 但侧面负载提出了一个更复杂的挑战。克罗斯的原始表述中确定侧路移动需要一个复杂的异常程序, 这让许多工程师感到沮丧, 特别是在加利福尼亚州, 地震分析在破坏性的 1906 年圣弗朗西斯州地震和其无数后冲击之后变得至关重要。

约瑟夫 E。戈德伯格在 1934 年解决了这个挑战。(Goldberg, 1934) 以分配合体粘贴的方法 (旋转) 而不是瞬间。戈德伯格的态度与克罗斯的方法相似, 但在未知的路径上进行了连续接近而不是未知时刻。(图 11.4). 对于侧面框架,Goldberg 的方法提供了更直接的路径到解决方案, 分布围绕框架的线条, 直到不平衡变得可接受微小。分配后, 可以快速找到每个楼层的侧面偏差, 然后计算每条线和列的最后时刻。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
Founded November 5, 1852
TRANSACTIONS

Paper No. 1878

WIND STRESSES BY SLOPE DEFLECTION AND CONVERGING APPROXIMATIONS

By John E. Goldberg[1], Jun. Am. Soc. C. E.

With Discussion by Messrs. G. A. Maney, L. E. Grinter, S. S. Gorman, A. Floris, and John E. Goldberg.

Synopsis

The purpose of this paper is to present a method of wind-stress analysis for rigid frames, based on the well-known slope-deflection analysis. By adjustments in the formulas and manipulation of the computations, rapid successive solutions are effected which after a few computations approach final accurate

Order of Procedure

The recommended procedure in a primary wind-stress analysis may now be outlined. Each consecutive step is numbered for convenience. The same numbering is applied to the illustrative problem shown in Fig. 3 and explained subsequently. The procedure is as follows:

(1) Calculate the relative stiffness of each member of the frame; also, calculate ΣK_{ft} and ΣK_c for each story, ΣK for each joint, and f for each column.

(2) Determine the horizontal shear on each story, and from this determine M = shear times story height for each story.

(3) Calculate θ' for each story, using Equation (10) for all stories above the first and Equation (10a) or Equation (10b) for the first story.

(4) Calculate R' for each story, using Equation (11c).

(5) Calculate $3K_c R'$ for each column. (For subsequent cycles use $3K_c R$.)

(6) Separate the joints into two groups of alternate joints—one group to include Joints 1A, 1C, 1E, etc., 2B, 2D, etc., and the other group to include the remaining joints. For each joint of one group calculate the quantity, $\frac{\Sigma(3K_c R)}{3\Sigma K}$, which is the form Equation (12) takes when the points of contraflexure are at the mid-lengths of the members. This is to be considered in the nature of an estimate. For the joints of the first story, instead of the foregoing expression use:

$$\frac{3K_{c1}R'_1 + \frac{3}{2}K_{c1}R'_1}{3\Sigma K - \frac{3}{2}K_{c1}}$$

for columns pin-ended at the foundations; and,

$$\frac{\Sigma(3K_c R')}{3\Sigma K - K_{c1}}$$

for columns fully fixed at the foundations. These expressions, easily derived from fundamental slope-deflection considerations, more nearly approximate the true θ-value of a joint under the assumed conditions of fixity.

(7) Using Equation (12), calculate a series of θ-values for the remaining joints, based on the results of Steps (5) and (6).

图 11.4: 黄金伯格 1934 年对挠度的调整为风荷载分析 (Goldberg, 1934)

戈德伯格的论文在结构工程教授中产生了广泛的讨论, 讨论集中在计算效率和物理解释。讨论部分, 覆盖了十页, 包括当时的领先学者的评论。一些讨论集中在计算时间 - 大约 500 分钟对 1800 分钟的手动计算为一个多历史框架. 有趣的是, 一些评论家问是否 **即时分配方法** 它只是一种方式 **放松应变在想象力上, 需要视觉化结构的物理扭曲**. 相反, 一位评论家赞扬了 Maney-Goldberg 方法: **分析 框架 的简单性、速度和准确性, 实际上令人惊讶。**

主要优点是它的快速计算的初步接近的终端旋转在线条和列, 因此准确的初始估计的终点时刻。这种旋转的物理接近形成了 Maney-Goldberg 方法的心脏, 证明对风负载建筑设计有价值。尽管有承诺, 但这种方法很快被克罗斯的方法的改进和后来的计算机方法所夸张。在 MATLAB 中, 现代化的实施是由 Saliklis and Parker, 2014.

南威尔 (1935) 答: 放松方法 理查德 • 萨图威尔 (Richard Southwell) 在牛津独立工作, 于 1935 年开发了放松方法。(Southwell, 1935). 南威尔的物理解释是优雅的: 想象一个最初不负载的框架, 结合限制阻止任何位移. 当应用外部负载时, 框架保持不受压力 - 所有 荷载 都受到限制。逐步 **放松** 这些限制将 荷载 转移到框架。如果在每个阶段, 带有最大的荷载的限制放松, 则剩余的限制力量将下降到零。物理上显而易见的是, 将更多的外部荷载转移到框架中, 直到最终由限制所载的剩余力量变成较少。主条目: 信任区 在应用的货物中 (图 11.5).

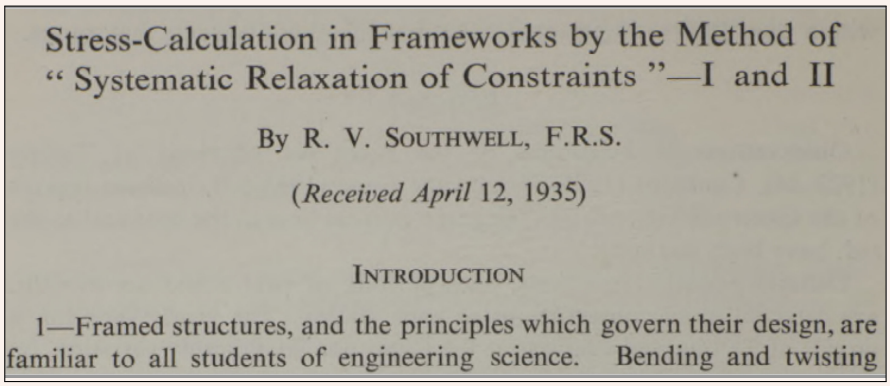
南威尔在开发他的方法时不知道克罗斯的 1930 年论文, 后来承认这两种方法是 **基本上相当于**. 然而, 南威尔注意到一个重要优势: 虽然时刻分布特别适合硬框架。(美国实践中常见的), 放松方法同样适用于附带的相关术语子。(英国实践中更常见). 南威尔的更普遍的定义后来会影响数学方法的开发, 以解决大型方程式系统。

时刻分配方法主宰了结构分析实践, 直到 1960 年代出现最终的单元方法。放松方法, 虽然在结构分析中不太突出, 发现了广泛的应用于计算力学, 在那里放松基于 iterative 溶剂仍然被广泛用于解决大型分裂系统的方程式。

11.5.5 位移方法: 总结和遗产

位移 方法, 在其轴的 挠度 和瞬间分配的体现中, 代表了超越力量方法的概念进步。通过与移植作为主要未知的工作, 并满足平衡, 它减少了对典型结构的不知数量, 为硬关节结构提

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



Stress-Calculation in Frameworks by the Method of "Systematic Relaxation of Constraints"—I and II

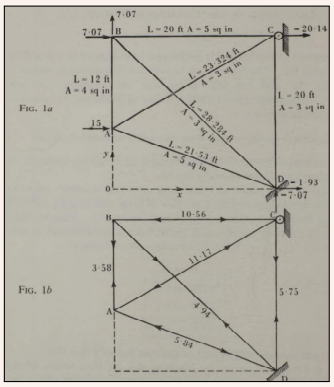
By R. V. SOUTHWELL, F.R.S.

(*Received April* 12, 1935)

INTRODUCTION

1—Framed structures, and the principles which govern their design, are familiar to all students of engineering science. Bending and twisting

(a) 南威尔 1935 年论文



(b) 應用於 pin-jointed trusses

图 11.5: 南威尔的放松方法 (Southwell, 1935)

供了更自然的表述, 导致有效的 iterative 解决程序。(分配时刻), 并建立了坚固性方法的智力框架。

最重要的是, 移植方法的哲学 - 组合成员密度关系并实现平衡 - 将成为矩阵结构分析的基础, 最终是终端元素方法。Cross、Goldberg 和 Southwell 的 iterative 方法将转化为现代放松和大规模计算分析的 iterativ solver 方法。

11.6 影响线和移动负载

虽然位移方法在静态负载下转化了固定结构的分析, 但民用工程师面临着另一个挑战: 受移动负载的结构。特别是铁路桥梁要求工程师不仅在单一的荷载位置下确定力量, 而且当火车穿过结构时可能的最大强度。对于设计目的, 关键问题是: 移动荷载应该在哪个位置设立, 以创建一个特定的位置的最大时刻、表或反力?

这个问题需要一个不同的解析框架 - 一个捕捉了一个结构量如何变化, 因为一个荷载单元在整个结构中移动。答案是通过影响线理论的开发, 这将成为铁路桥梁设计必不可少的挑战, 在十九世纪末的结构工程.

11.6.1 温克勒 (1835–1888)● 早期發展

布拉格德国波利技术教授艾米尔 • 温克勒 (Emil Winkler) 早期为移动负载下的结构理论做出了贡献。第 1868 章 他的爱情 (Winkler, 1875) 引入了构成结构数量的变异的概念 (反力, 瞬间, Shear) 作为一个单位 荷载 通过结构。

Winkler 承认, 在静态定义结构中的任何强度或时刻的 影响线 可以纯粹从静态中构建, 将单位 荷载 的位置视为一个未知的参数。然而, 对于不确定的结构, 影响线包含了结构变形 - 需要能量方法或灵活性指数由 Maxwell 和其他人开发。(Timoshenko, 1953).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

11.6.2 穆勒 - 布雷斯拉夫的原则

如前所述 (§11.4.4),Müller-Breslau 的基本贡献是认识到影响线有直接地质解释: **某个特定的力量或时刻的影响线具有相同的形状, 如当该力量或瞬间给予单元转移或旋转时产生的分裂曲线, 并且结构可以随之扭曲。** (Müller-Breslau, 1887).

这个原则将影响线的结构从无聊的计算转化为优雅的图形结构。一位工程师能够定性地绘制脱落的形状, 从而确定移动荷载在哪里产生了最大效应 - 对于初步设计和结构行为理解而不可估量的。

11.6.3 应用和遗产

影响线理论成为确定移动列车负载下的最大力量至关重要, 分析集中负载系列。(轮子负载) 优化结构形式以尽量减少最大效应, 并在不同 荷载 位置下理解结构行为。

虽然在现代实践中不太突出 (计算机分析可以有效地评估多个 荷载 案例), 影响线仍然对结构行为的理解具有概念意义, 并且仍用于包装分析和荷载定位研究。

11.7 向 矩阵 表述: 概念桥到计算

1826 年至 1930 年间开发的手计算方法, 从克莱皮伦的三分钟方程式到克罗斯的时刻分布, 代表了更多的天才计算短篇。它们经常随意包含了概念框架, 后来将被正式化为矩阵结构分析和终端元素方法。了解这个连接, 揭示了结构分析中的计算机革命不是经典方法的中断, 而是它们的自然延伸。

11.7.1 矩阵 古典方法的结构

考虑一个连续的 梁 或 框架 的 挠度 方程式。每个会员连接合体 i 和 j 最后的时刻可以表达为:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_i^{FEM} \\ M_j^{FEM} \end{Bmatrix}$$

这是一个成员的形状密度关系。$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{d}^e + \mathbf{f}_0^e$, 在哪里 $\mathbf{k}^e$ 是 刚度矩阵的成员, $\mathbf{d}^e$ 會員 位移 向量 , 並且 $\mathbf{f}_0^e$ 固定终端力量。

当 Maney 在每个组合中执行平衡时, 为一个整个结构收集了挠度方程式:

$$\sum M_i = 0 \quad \text{at each joint}$$

他随意构建了一个全球刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 通过会员团体的组合, 提供系统:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$$

哪里 $\boldsymbol{\theta}$ 代表所有共同旋转和 $\mathbf{M}$ 所有应用的时刻 这正是在 1950 年代正式实现的结构固态方程式。(Turner et al., 1956 PDF).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

同样,Mohr 的灵活性比例 δ_{ij}—位移在位置 i 由于单位 荷载 在位置 j 以 柔度矩阵 格式 $\mathbf{F}$. 穆勒 • 布雷斯拉夫的力量方法系统地收集了这个柔度矩阵并转换了它。(概念上, 通过解决变形协调方程式) 寻找回归的力量。因此, 强力方法随意与:

$$\mathbf{FX} = \boldsymbol{\Delta}$$

连接回归力量 $\mathbf{X}$ 到 变形协调 移行 $\boldsymbol{\Delta}$.

强度与位移方法之间的双重性 - 灵活性和坚固性公式之间 - 在古典方法中是本质性的, 但只有在计算机时代的矩阵公式中才会被完全认可和利用。

11.7.2 从 Iteration 到 矩阵 解决方案

Hardy Cross 的瞬间分布方法提供了从经典到计算方法的最清晰的桥梁。十字会承认, 在形式上写下, 斯洛普-挠度方程式:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \sum_j C_{ij} M_j$$

它可以以二进制的方式解决, 而不是同时。其分发和运载操作是, 在矩阵的术语中, 一个 Gauss-Seidel 引用应用于系统。$\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$.

十字路口方法的革命性不是数学原则 (Gauss-Seidel 引用) 但物理的解释: 工程师可以视觉化每个 iteration 作为一个物理过程释放和限制关节。这种物理洞察使该方法可用和可靠。

在计算机时代, 同样的洞察力会向大型终端单元系统提供信息。直接解决方案之间的选择 (相似于解决<挠度方程式) 以色列的解决方案 (与分配时相似) 它将取决于问题大小、分裂性结构和所需的准确性　经典方法预期的考虑。

11.7.3 手计算的界限: 设置计算阶段

到 1950 年, 手工计算方法已经达到其实用限制。受风负载的十大框架可能需要 40 至 50 个联合旋转, 如未知 (slope-挠度 方法)5 至 10 个分配时刻周期, 精心编写, 由熟练工程师计算 2 至 3 天, 并通过独立重新计算来验证以捕获算法错误。

对于更复杂的结构, 有三维框架、支柱或拥有数百名成员的结构 - 手工方法无论表述有多聪明, 都变得不实用。

限制因素不是概念性的, 而是计算的: 形成和解决大型方程式系统, 即使有所有对能量方法、相互理论和异常程序的了解, 在实用工程时间层内超越了人类能力。

数字计算机在 1950 年代出现, 将消除这一限制。但是关键的是, 概念框架已经准备好了: 单个成员的密度关系, 通过变形协调和平衡组合, 直接或异常方法解决。从手工计算到计算分析的转变将是规模和速度, 而不是基本方法。

11.7.4 结论: 连续性和转型

手计算方法的历史揭示了关于工程科学的一个强大的真相: 重大进展往往代表了现有思想的精化和系统化, 而不是革命性的断裂。有限元法, 当它在 1950 年代出现时, 有些人将被介

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

绍为一个激进的创新。然而, 它的概念基础 - 通过平衡和兼容性、能量原则和双重的力量和驱逐形式的成员属性的组合 - 都存在于纳维尔、麦克斯威尔、莫赫、卡斯蒂格利亚诺、穆勒 • 布雷斯拉夫、马尼和克罗斯的作品中。

改變的是能力在規模上工作: 收集硬度矩阵成千上萬的单元, 解决數千方程式的系統, 視覺化和傳播複雜三次元結構的過程結果。计算机使工程师能够将建立的原则应用到前所未有的复杂性问题上。

从手动计算到有限元分析的桥梁, 因此不是需要跳跃的切斯姆, 而是不断发展的路径。下一部分探讨了这条路径是如何发展出来的　在幻灯片规则和计算表时代完善的方法是如何转化为现代结构分析定义的计算方法。

11.8 结构分析的基本要求

有关分析细节，请参见 *§17.1.2.2*

从物理学到领域方程式

跟踪结构分析的历史发展从 Navier 的第一通过 20 世纪中叶的矩阵公式进行系统处理, 我们休息, 消除统一每个遇见的方法的基本原则。到目前为止..... 而且每一种方法都还没有来。[2] (§10.5.7):

1. **平衡**内部力量必须平衡外部负载。结构的任何元素都不能经历不平衡的力量; 在每个时刻, 压力领域必须满足静态方程式。(或动态) 平衡.
2. **宪法法律**: 压力必须根据材料的机械特性与线条有关。材料告诉我们, 力量和形状是如何连接的　无论是线性弹性、塑料或其他方式。
3. **变形协调 的移行**变形必须是地质一致的。结构保持不停; 它不会分裂或超越自己。线条必须源于一个单值, 连续的位移字段, 符合支座条件, 并保持成员之间的连接。

违反任何这些要求的解决方案不只是接近 - 这是错误的。一个完美的平衡中的应力字段是毫无意义的, 如果它意味着一个不存在的材料。一个完全连续的移动领域不会告诉我们什么, 如果产生的压力违反平衡。三个要求不是我们可以选择的独立选项, 而是任何物理可行的解决方案必须满足的同时要求。这个原则, 听起来很简单, 是触摸石, 对任何结构分析方法都必须被判断。

[2] 在静态定义的结构中, 只有平衡方程式才会产生完整的力量分配。宪法和变形协调条件仅适用于位移计算或结构静态不确定时成为必要。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

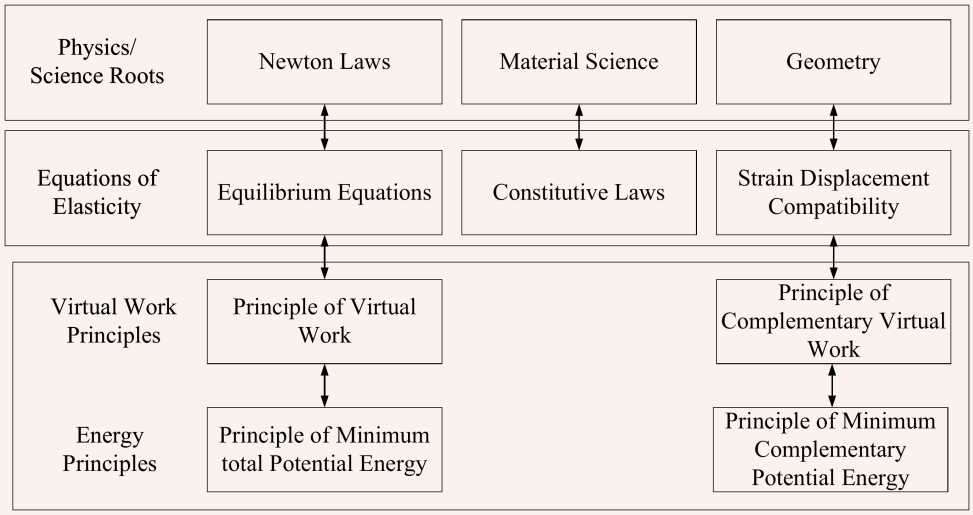


图 11.6: 纽顿物理学 (顶部) 通过田野方程式 (中间) 拉格兰的变异原则 (底部).

三级 表述

形象 11.6 结构力学的逻辑架构显示在三个下降级别, 每个代表一个不同的方式表达相同的基础物理现实。

在顶部站着的 **物理基础**原始的科学, 其余的一切都源于。牛顿的法律统治了力量的平衡; 物质科学描述了物质如何应对负载; 地质学限制了持续的身体如何变形。这些不是数学构造, 而是关于物理世界的实验真相, 通过观察和实验建立了几个世纪。

中间线代表了 **新或** *vectorial* **表述**. 在这里, 物理基础被放入差异方程式和向量字段的语言。平衡方程式表达了牛顿的法则, 即压力紧张器的消失差异 在连续中每一个位置的力量平衡。宪法法律将物质行为转化为应力和应变紧张器之间的算法关系。线路移动方程式将地质一致性编码为转移 vector 领域和线路紧张器之间的差异关系。这个表述, 主要由 Cauchy、Navier 和 Saint-Venant 在十九世纪开发, 将力量作为初级数量处理, 并通过向量操作和部分差异方程进行进展。它是“强大的形状” 弹性 - 直接, 直观, 并明确与力量平衡物理相关。

底线代表了 *Lagrangian* **或能量 表述**. 在这里, 相同的物理内容在规模能量功能和变异原则的语言中重新出现。而不是通过差异方程式来执行平衡的定义, 我们将解决方案描述为最小化整体势能 - 或同等的配置, 其中虚功消失。这一深刻的重新表述源于拉格朗日，并由格林、卡斯蒂利亚诺等人加以完善；它以标量取代向量，以积分陈述取代微分方程，并以能量驻值条件取代力的平衡。拉格兰的方法揭示了结构力学的深双性, 并为接近和计算方法提供了自然框架。

两种形式 新顿语和拉格兰语 是数学上相当的。通过解决中行差异方程式所得的每一个解决方案, 都可以通过极端化底行能功能来实现。然而, 它们在性格上有所不同: 新顿的表述讲述力量和平衡; 拉格兰的表述讲解能量和减少它。结构分析的历史发展可以被视为这种等级的逐步认可, 利用任何形式证明最方便的问题。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

拉格兰吉的双重性表述

在拉格兰框架本身内, 还有另一个双重性, 显示在图的底部的两个列。11.6. 这种双重性反映了位移和强度之间的区别, 在动态和静态数量之间。

左侧, 虚功原理 - 由 Lagrange, 1788 在他的 *Mé* 卡尼克分析 到静态的 Bernoulli, Johann, 1725 其能量对手, 最低总值势能的原则, 提供在位移根源的变量声明。这些原则表明, 在所有可视化转移领域中, 真正的解决方案尽量减少全部潜力能量, 或者相同地说, 虚拟工作消失于任何兼容的虚拟转移。從 位移 的假設開始, 自動滿足 变形协调, 呼籲憲法法來獲得壓力, 然後通過能量減少實施 平衡, 這種方法確保所有三個要求都被滿足。此 表述 已成为 位移 方法的理论 基础 , 最终是现代 有限元分析.

右侧是补充 表述。补充虚拟工作的原则和最低补充潜力能量的原则提供实用的变量声明。这些原则, 通过工作发展 Crotti, 1888 和 Engesser, 1889, 声称, 在所有静态可接受的应力字段中, 真正的解决方案尽量减少补充能量。從 应力 的假設開始, 自動滿足 平衡 , 呼籲憲法的法律來獲得壓力, 然後通過能量減少執行 变形协调 , 這種雙重方法也確保所有三個要求都被滿足 - 但在相反的順序中通過。這種表達基於力量方法和柔軟性方法, 在電腦時代之前主導了結構分析。Castigliano, 1879 与能源衍生品相关的理论, 分别为转移和力量, 提供了工程师利用这些原则的实用工具。

宪法法律的核心作用

宪法在这个建筑的各个层面都占据了中心地位。在新顿表述中, 它们提供了应力和应变传感器之间的算法链接。在拉格兰语中, 它们定义了所有能量产生的密度。没有物质行为连接力量和变形, 任何表述的两侧将保持不连接　平衡不会说什么关于位移, 而变形协调不会说任何关于应力。

图像的交响式结构 11.6, 其在拉格兰级的双路线, 解释了为什么硬度方法和柔度法必须在正确应用时产生相同的结果。它们是相同基础物理学的不同通道　一个开始于转移。(满足 变形协调 第一) 和工作向平衡, 另一开始与力量 (满足 平衡 第一) 和工作向变形协调。两者都呼吁宪法立法, 以解决差距。任何方法都不能逃避这三个基本要求; 它们只是在执行的顺序上有所不同。

11.9 捐助者的时间总结

表 11.1: 结构分析的贡献者: 一个时间总结

作者	日期	引用	主要贡献
多元化基础			
莱昂哈德•尤勒 (1707–1783)	1744		变分法; 基于 FEM 的变量原则

继续在下一页

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

桌子 *11.1* 从前一页继续

作者	日期	引用	主要贡献
约瑟夫•路易斯•拉格兰奇 (1736–1813)	1788		分析机械; 变量机械的定义
雷利先生 (1842–1919)	1870s		振动的能量方法; 雷莱里茨方法的先驱
威尔特•里茨 (1878–1909)	1909	(Ritz, 1909)	变量接近方法; 转移基于终端元素的概念模板
波里斯•加勒金 (1871–1945)	1915	(Galerkin, 1915)	重量废物方法;FEM 从变异原则中解放
理查德•科伦特 (1888–1972)	1943	(Courant, 1943)	三角形子域的部分测试功能; 通过微型支座分散矩阵
手计算方法: 力量方法			
克劳德•路易斯航天员 (1785–1836)	1826	(Navier, 1826)	静态不确定的斑点的初步系统处理
贝诺伊特•克莱皮伦 (1799–1864)	1857	(Clapeyron, 1857)	连续射击的三时方程式
阿尔弗雷德•克莱布什 (1833–1872)	1862	(Clebsch, 1862a)	早期 位移 方法 3D pin 附带的拖拉机
詹姆斯•克莱克•麦克斯威尔 (1831–1879)	1864	(Maxwell, 1864c)	反对理论: 灵活性因素
克里斯蒂安•奥托•莫赫 (1835–1918)	1868	(Mohr, 1868)	瞬间区域理论; 合并梁类似;Mohr 的循环
艾米尔•温克勒 (1835–1888)	1868	(Winkler, 1875)	移动负载的早期影响线理论
菲利普•冯•塞德尔 (1821–1896)	1873	(Seidel, 1873)	线性系统的伊特拉式方法 (盖斯•塞德尔)
阿尔伯托•卡斯蒂格利亚诺 (1847–1884)	1879	(Castigliano, 1879)	能源方法; 与应变能有关的理论与力量和转移
海因里希•曼德拉	1880		框架分析使用关节旋转为未知
圣文特酒吧 (1797–1886)	1883	(Saint-Venant, 1855c)	评论将 Clebsch 与 Navier 以前的工作联系起来
海因里希•穆勒 - 布雷斯拉夫 (1851–1925)	1886	(Müller-Breslau, 1886)	强力方法的系统化; 影响线原则
手计算方法: 位移方法			

继续在下一页

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

桌子 *11.1* 从前一页继续

作者	日期	引用	主要贡献
艾克斯•本丁 (1881–1946)	1914	(Bendixen, 1914)	Slope-挠度 方程式 (欧洲发展)
乔治 A。曼尼	1915	(Maney, 1915)	Slope-挠度 方法 (美国系统化)
哈迪克罗斯 (1885–1959)	1930	(Cross, 1932)	瞬间分配方法
约瑟夫 E。黄金	1934	(Goldberg, 1934)	横向 荷载 分析的折叠分布
理查德•索威尔 (1888–1970)	1935	(Southwell, 1935)	放松方法
结束差异			
卡尔•皮尔森 (1857–1936)	1905	(Pearson, 1905)	关于女士的实验调查
路易斯•弗里•理查德森 (1881–1953)	1911	(Richardson, 1911)	结论差异分析方法
矩阵 方法和完成 单元			
约翰•阿吉里斯 (1913–2004)	1954	(Argyris and Kelsey, 1960)	矩阵 结构分析; 能源原则; 非线性分析 基础
MJ 的特纳,RW。克里斯蒂安,C。马丁,LJ 顶级	1956	(Turner et al., 1956)	直接刚度法; 三角飞机 应力 单元
迈克尔 J 转机 (1909–1985)	1959	(Turner, 1959)	正式曝光 直接刚度法
雷 W 克劳斯 (1920–2016)	1960	(Clough, 1960)	金钱 “有限元法” 延伸到连续媒体
爱德华 L 威尔逊 (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	第一個非線形 有限元分析
纳丹 M 纽约 (1910–1981)	1959		时间步行方法为动力分析
艾尔威尔逊 & RW 的克劳斯	1962	(Wilson and Clough, 1962)	第一個動態 有限元分析 (矩阵 表述 新标志方法)
奥克 Zienkiewicz (1921–2009) & 吉克切恩	1965	(Zienkiewicz, 1967)	首页 > 单元 文本书

继续在下一页

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

桌子 *11.1* 从前一页继续

作者	日期	引用	主要贡献
JS 的 原文 (1924–2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	关于矩阵结构分析的系统文本书
吉尔伯特·斯特兰 & 乔治修复	1973	(Strang and Fix, 1973)	FEM 的数学相遇理论

11.9.1 结论

本章节跟踪了结构分析的进化, 从 Navier 在连续喷射上的先驱工作, 通过开发静态不定义结构的一般方法, 高峰于矩阵的方法和统治当代实践的有限元分析。

几个主题从这个历史性弓中出现:

从具体到一般: 早期方法 (海军的连续冲击, 克莱皮龙的三个时刻) 具体的结构形状。渐进地, 出现了更普遍的方法, 麦克斯威尔的相互理论, 卡斯蒂格利亚诺的能量方法, 穆勒 - 布雷斯劳的系统力量方法。这一向一般的进展在矩阵方法中达到其高峰, 处理所有结构 (最终, 一切都继续) 在统一的框架内。

强度和位移方法的补充性: 十九世纪, 两种方法都发展出来 力量的方法 (马克思, 莫赫, 卡斯蒂格利亚诺) 位移 方法 (挠度, 分配时刻). 每个提供的优点, 取决于结构和分析师的偏好。矩阵 方法统一了这些方法, 同时保持了 位移 方法的计算优势。

理论与计算: 每个主要进展都是通过可用的计算技术实现的。克莱皮隆的方程式可以用手解决。瞬间分布使多故事框架的分析实用。矩阵方法需要数字计算机。理论洞察和计算能力之间的相互作用在整个过程中取得了进展。

物理洞察力和数学强度: 最好的方法结合物理理解 (莫赫的地质解释, 克罗斯的异常平衡) 数学严格 (麦克斯威尔的相互理论, 能源原则). 这种组合使方法既可靠又可教导。

与 连续介质力学 的连续性: 在此期间, 结构分析仍然是由 Cauchy、Navier 和其当代人建立的连续介质力学的基础。能量原则、变形协调条件、宪法关系, 都跟着在十九世纪初发展的基本理论。

现代结构分析师, 与精致的终端单元软件工作, 站在一个漫长的智力发展链的结束。由软件自动计算的元素密度矩阵包含了同样的灵活性原则, 而 Navier 则源于第一原则。集合过程反映了麦克斯威尔的相互理论。解决方案算法实施了由 Bendixen、Maney 和 Cross 开发的位移方法哲学。

了解这个历史发展提供了更多的历史观点, 它提供了一个洞察力, 为什么方法工作如他们所做, 什么时候它们是适当的, 以及如何可以扩展。古典方法仍然对教学有价值 (提供物理直觉) 对于初步分析 (提供快速估计) 为了验证 (计算机结果对手计算的检查).

随着 结构分析 继续进展, 向 非线性分析 转动反应、优化、主条目: 信任区 量化, 是基于两世纪的基础。十一世纪的先驱们所取得的合成, 将连续介质力学的抽象数学转化为结构分析的实用方法, 创造了一个继续成长的纪律, 同时仍然是真实的根源。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



威尔梅, 天文学家 *(1668)*

学者的手向天空的世界走来: 理论最终打破了现实结构。

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

12 计算方法

摘要

这个章节跟踪了计算方法的开发在结构分析 - 基本上需要解决分辨的方程式系统的方法, 从而仅通过数字计算成为实用。開始與 *Richardson* 的有限差分法為应力分析 *(1911)*, 我们通过 *Argyris* 的能量制定和生产直接固态方法的波音 - 伯克利合作来跟踪矩阵结构分析的出现。该章节以克劳的名称为有限元法 *(1960)* 第一個應用程式是為了分析, 以及非線形和動態能力的快速發展。纳斯特的决定 *(1969)* 放弃强度方法标志着基于位移的公式的胜利, 定义现代计算力学.

12.1 终结区别方法 340
12.1.1 皮尔森和理查德森:DAM 应力分析 (1905–1911) 340
12.1.2 Iterative 解决方法 342
12.2 矩阵 结构分析 343
12.2.1 克隆: 网络分析与结构类似 . 343
12.2.2 约翰 • H 阿尔及利亚 (1913–2004) 343
12.2.3 空中空间 (德尔塔翼) 背景:1950 年代 344
12.2.4 NBS / 海军; Samuel Levy . . 344
12.2.5 波音; 特纳和直接刚度法 . . . 346
12.3 有限元法的 349
12.3.1 数学基础 349
12.3.2 优先事项和术语: 什么是 (而不是) 有限元法的 352
12.3.3 雷 • 克劳 (1920–2016) 353
12.3.4 早期计算机与伯克利计划 . . 354
12.3.5 Norfork Dam: 第一大应用 . 354
12.3.6 非线性和动力分析 (1960–1962) 354
12.4 巩固和分散 356
12.4.1 奥利格 • 齐恩基维奇 (1921–2009) 356
12.4.2 莱特 • 帕特森会议 (1965) . . 356
12.4.3 理查德 • 加拉格 (1927–1997) 357
12.4.4 强力方法与硬度方法的讨论 . 358
12.4.5 纳斯特兰的决定 (1969) . . . 358
12.4.6 一般化 358
12.4.7 文本书与全球采用 359
12.4.8 现行影响与应用 360
12.5 总结和关键贡献 360
12.6 结论 362

12.1 终结区别方法

第章 手数计算方法 11 对待了差异化的结构系统 框架、信条、持续的冲击 但面临计算规模的基本限制。即使是一个适度的多场框架也可能涉及 40 到 50 个转移无知; 形成方程式并手动进行排除和后置替代, 可以花费几天的集中工作。无休止的程序减少了这一负担, 但仍然是劳动激烈的, 并没有提供系统的道路到故意复杂的问题。

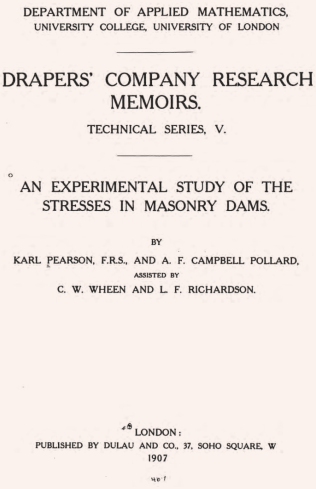
与结构分析的这些发展相匹配, 一个单独的调查线试图解决统治连续媒体的部分差异方程式。最终差异方法, 它替代衍生品的算法差异在一个相关术语子上, 提供了一个数字途径到弹性问题可以通过分析手段 - 打开可能的手动方法永远无法解决。

12.1.1 皮尔森和理查德森:DAM 应力分析 (1905–1911)

卡尔 • 皮尔森 (1857–1936) 伦敦大学学院教授和数学统计学的创始人, 被委托完成纪念作品。Todhunter and Pearson, 1893 当他还没有四十岁的时候。有趣的是, 一位数学家后来被吸

审阅稿

引到 1900 年代初应用弹性问题。其中包括在马索尼亚女士的压力和分布, 他通过模型实验和伴随理论工作进行调查。(Pearson, 1905; Pearson et al., 1907), 图 12.1.


DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS,
UNIVERSITY COLLEGE, UNIVERSITY OF LONDON

DRAPERS' COMPANY RESEARCH MEMOIRS.

TECHNICAL SERIES, V.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE STRESSES IN MASONRY DAMS.

BY

KARL PEARSON, F.R.S., AND A. F. CAMPBELL POLLARD,
ASSISTED BY
C. W. WHEEN AND L. F. RICHARDSON.

LONDON:
PUBLISHED BY DULAU AND CO., 37, SOHO SQUARE, W
1907

图 12.1: 皮尔森在女士的实验工作 (Pearson et al., 1907)

皮尔森和合作伙伴对他们所取得的限制感到不安。引入他们的 1907 年纪念品强调, 广泛的时间花在寻找现实的钻石对象的近距离解决方案:

> 目前在伦敦大学学院应用数学系的过去三年中对模型女士进行的工作报告, 如同在类似研究中经常发生一样, 还包含了几乎没有一批研究的报告。实验和理论, 已进行或尝试。很多周, 不夸张说几个月, 已经花在努力获得不是准确的, 但接近的平衡解决方案。(第三) 合适 (a) 到目前的类型 DAM 对比, 以及 (b) 到我们实验证明的是基层上的广播的一般形式。如果到目前为止我们在这些尝试中失败了, 那么这并不意味着成功可能不会随后伴随着我们的或可能是别人的努力。
>
> Pearson et al., 1907 An experimental study of the stress in Masonry Dams

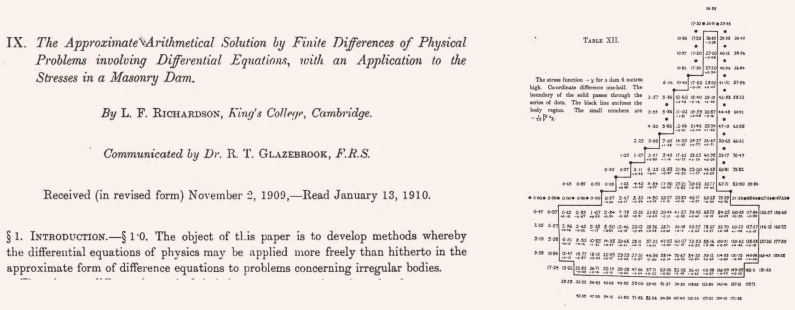
在这项工作中被认可的助理之一是路易斯 • 弗里 • 理查德森。(1881–1953). 雖然皮爾森承認他的解析努力是失敗的, 但他認識到成功後來可能由其他人達成 - 事實上, 這是理查德森自己, 在幾年內, 生产了最早的系统工程应用之一, 以替换弹性的统治部分差异方程式。**终点差异方程式在一片面板上**以实用的注意力为 **不规则的边界** (“边界点” 相反 “身体点”) 到计算现实解决结果的算法系统 (Richardson, 1911), 图 12.2. [1]

理查德森在此背景下的贡献可以总结为:

1. 通过中央差异将连续问题推向终端组合的 mesh-point 方程式
2. 通过特殊处理边界点管理地质复杂性
3. 通过连续接近解决结果的线性系统　现在广泛被称为半端式解决方法。**理查德!方法**—补充了梅什的精化和抽象的想法, 后来与他的名字密切相关。

[1]理查德森的论文经常被其杂志体积年引用 (1911) 作品本身于 1909 年收到, 并于 1910 年初阅读。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



IX. *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam.*

By L. F. Richardson, *King's College, Cambridge.*

Communicated by Dr. R. T. Glazebrook, *F.R.S.*

Received (in revised form) November 2, 1909,—Read January 13, 1910.

§ 1. Introduction.—§ 1·0. The object of this paper is to develop methods whereby the differential equations of physics may be applied more freely than hitherto in the approximate form of difference equations to problems concerning irregular bodies.

Table XII.

图 12.2: 理查德森的终点差异分析为一个 DAM 应力问题 (Richardson, 1911 PDF)

抽象技术　使用逐步精炼的面板上的解决方案来估计准确的解决方案　现在普遍被称为**李克强!抽象** 它仍然是数值分析的核心。

结构计算中的位置。 对于复杂的地质学, 最终差异的空间分辨后来将大多取代有限元法. 然而, 最终差异 **时间步行** (例如, 中央差异制度, 纽马克的方法) 依然在 结构动力学 中重要, 许多终端单元实施将 FEM 的空间分辨与终端差异的时间集成相结合。

12.1.2 Iterative 解决方法

精英 DPE 的最终差异分辨产生了大型线性方程式系统, 具有分散、结构化对比矩阵。理查德斯承认了这个直接解决方案。(加西亚排除) 它对大型系统不实用, 并开发了异端方法。

加斯 - 塞德尔连接。 理查德森所使用的 iterative 方法与 Philipp Ludwig von Seidel 密切相关。1874 年被描述 (Seidel, 1873 PDF) 解决 最小二乘法 问题的系统 (§L.2.3.1). 方法　使用所有其他未知的最新值连续更新每一个未知的方法　显然早已被加斯传达。他的学生格林 (1823) 虽然塞德尔可能不知道这一点。技术已被称为 *Gauss - Seidel* **方法**.§27.4 它提供了瞬间分配方法与加斯西德尔二重分析程序之间的密切匹配的突出例子。

连续过度放松 (抱歉). 通过引入过度放松参数实现了显著的 加速度 $\omega > 1$:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

哪里 $r_i^{(k)}$ 它是其余的 i 和方程式。最佳的选择 ω 它依赖于问题的光谱特性; 在有利的情况下,SOR 可以显著加快对比与基本的 Gauss-Seidel iteration 相比。

这些 iterative 技术将证明是必不可少的, 不仅对最终差异问题, 但后来对于从最终 单元 分辨率中产生的大型分裂系统。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

12.2 矩阵 结构分析

第章 手数计算方法 11 即旋转, 瞬间分布, 即包含所有矩阵结构分析的成分。所需要的是: (1) 系统的 矩阵 评分, 以组织计算; (2) 计算机能够处理产生的系统。两者都出现了第二次世界大战后的十年。

计算机没有改变结构分析计算的内容; 它改变了结构分析, 可以计算的东西。

12.2.1 克隆: 网络分析与结构类似

加布里埃尔 • 克隆 (1901–1968) 在通用电气公司工作, 开发了对结构分析产生深刻影响的电网分析的压缩方法。1944 年, 他写的《 “弹性结构的探测分析和同等循环” (Kron, 1944) 显示电网和结构系统之间的深刻相似之处。

克隆的 “泰林的方法” 将一个大型系统分解为子系统, 分别分析每个系统, 然后通过变形协调条件重新连接 - 预期现代的子结构技术 在 有限元分析 中。他的张量评级, 虽然最初不熟悉结构工程师, 提供了一个数学上严格的框架转型协调系统。

12.2.2 约翰 • H 阿尔及利亚 (1913–2004)

约翰 • 阿吉里斯 (1913–2004), 图 12.14a 发表一系列文章, 四个主题 **飞机工程** 在 1954 年至 1955 年期间, 这代表了矩阵结构分析的正式化的一大步。后来收集并扩展到 Argyris and Kelsey, 1960 .

阿吉里斯对卡斯蒂格利亚诺的能量理论和麦克斯威尔的相互原则进行了明确研究, 并将其列入适合系统计算的矩阵评级。他强调了力量之间的双重性。(灵活性) 和 位移 (坚定性) 格式:

> 灵活性和坚固性的进展之间的类似性..... 显然表明, 与未知的结构分析同时必须有一个相应的理论, 如未知的不变。
>
> Argyris and Kelsey, 1960 Energy theorems and structural analysis

其表二中的侧面演示 (图 12.7a) 证明, 经典力量方法和位移方法正经过完全相似的步骤一个概念澄清, 帮助工程师了解基于不同的方法的数学单位。

Argyris 的贡献包括:

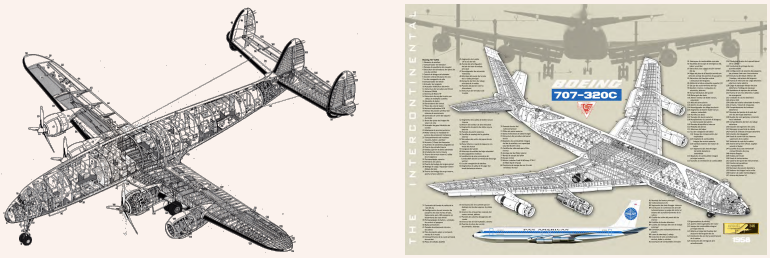
- 系统 矩阵 评分为 结构分析
- 能量原则的清晰曝光在矩阵形式
- 框架连接经典方法到计算实施
- 非线性分析基金会通过加剧性表达式

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

12.2.3 空中空间 (德尔塔翼) 背景:1950 年代

历史背景 在 1940 年代末和 1950 年代初, 从常规直翼到滑板和德尔塔曲线配置的快速过渡创造了结构分析问题, 经典梁基于的方法不再适当。德尔塔翅膀结合了低视比率、薄覆盖板、不平行螺旋和高调的荷载路径, 产生了间隔弯曲、管道弯曲和扭转之间的强烈连接。结果的 应力 和变形模式无法通过简化一维理想化, 特别是在根区域和多层布局, 可靠地捕获。这些缺点不仅仅是理论性的: 它们直接限制了飞机设计的准确性和效率, 当时性能边界正在缩小, 实验性调节成本昂贵。

计算机结构分析的冲动主要来自航空航天行业。直到 1950 年代初, 压迫商用和军用飞机 (图 12.3) 它已成为复杂的组合的绳子, 螺旋和薄板形成高微的梁和壳类似的配置。



(a) 洛克希德恒星 (1943–1958)　　(b) 波音 707 (1958–1979)

图 12.3: 1950 年代的商用飞机

对于这种结构, 古典力量方法基于麦克斯威尔的作品莫格和卡斯蒂格利亚诺 “当板块可以保守地模型为在计划中运载的海报时, 它非常适合。通过审判性选择压缩强力系统和实验验证, 即使是高方面比例的旋转后翼也可能被容纳。(Felippa, 2001). 古典位移方法 (彩色挠度) 同样在振动和空气分析中发现的应用, 在那里准确的位移计算是必不可少的。

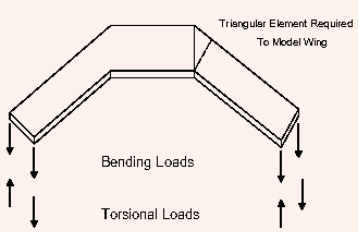
但是, 军用飞机的要求正在变化。超声波飞行的德尔塔形翼需要双维板单元的自愿地质 - 三角和四方 - 这不能再作为单维成员理想化 (图 12.4a). 这个 “德尔塔威格挑战” 引领新解析和计算方法的开发。

12.2.4 NBS / 海军; Samuel Levy

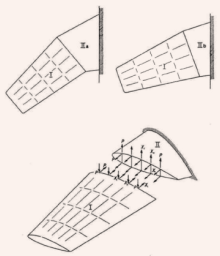
冷战期间, 国家标准局 (NBS,NIST 的先驱) 与美国航空局保持密切、持久的研究合作。海军。高速、滑动和德尔塔曲线配置的海军要求在结构分析方法上提出了前所未有的要求, 特别是对于高压、薄墙空气框架, 经典简化假设崩溃。通过在 NBS 进行的赞助研究计划, 并由海军资助, 专门团体 - 如 Samuel Levy 领导的飞机结构集团 - 开发了先进的解析公式, 明确为新兴数字计算设备设计。

Levy, 1953 这是一个标志性纸张, 不幸的是在航空航天文学之外很少提到。它是最早的系统性试图以计算可处理的方式, 矩阵为导向的方式提出德尔塔问题, 并引用了波音下面讨论的工作。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) Swept-back Delta 翼测试结构 (Clough and Wilson, 1999)



(b) 基于灵活性解决方案的尝试 (Argyris and Kelsey, 1960)

图 12.4: 德尔塔翼问题和早期解决试图

> 分析方法是一致的歪曲之一。由翅膀所携带的 荷载 被认为是 (1) 那是由 sp 和覆盖叶子在长途弯曲的, (2) 被带走的绳子和覆盖的叶子, 在相关术语式弯曲, 以及 (3) 由覆盖表在扭转中运行的。荷载由这三种机制所运行的, 是根据边缘和螺旋的合并中的缺陷来确定。这些负担的总额, 表达在缺陷的意义上, 相当于应用的外部力量在合并。结果的方程式为合金中的差异解决。由于脱落, 曲折和旋转压力反过来确定, 从而提供完整的变形和应力分析翅膀。
>
> Levy, 1953 *"Structural analysis and influence coefficients for delta wings"*

该方法是基于原则的 **常见的歪曲**在其中, 翅膀的结构性反应完全表达在位移变量的有限组合的意义上 - 也就是说, 边缘和螺旋连接的偏差。翅膀概念上分解为相互作用的荷载携带机制: 螺旋和覆盖板的间隔弯曲, 边缘弯曲和覆蓋板的管道弯曲以及主要由覆盖表运行的扭转。(图 12.5). 每個機制都會有助於同一結合差異的內部力量, 因此實施動力 变形协调.

平衡 是通过在每个合并中将内部力量的总和与外部应用的负载等同, 执行。

$$P_r = L_r^S + L_r^R + L_r^T,$$

它, 在所有联合会上聚集在一起, 引导到全球关系。

$$\{P\} = [A]\{y\},$$

哪里 $[A]$ 是由三种机制的超越所获得的合成刚度矩阵。因此, 缺陷是从

$$\{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

其次, 内部力量和压力通过后置恢复。

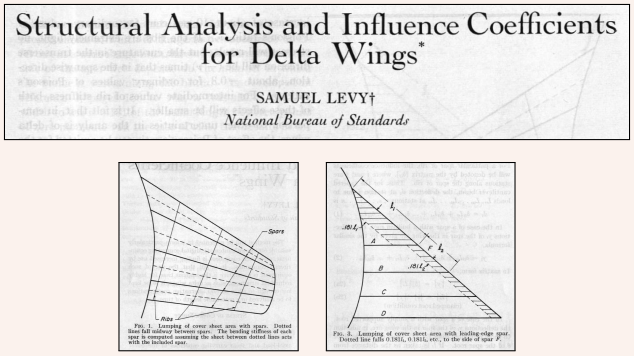
在个人成员层面上,Levy 也写了当地符合关系。$\{y\} = [\delta]\{L\}$ 相同的硬度形状 $\{L\} = [\delta]^{-1}\{y\}$. 历史上,Levy 的表述是位移中心和基于矩阵的, 但仍然是问题特征: 分解到结构机制适应了德尔塔翅膀, 而单元抽象尚未普遍。因此, 他的作品最好被理解为一个关键的过渡步骤, 以坚定性为基础的分析, 而不是作为一个有限元法在现代意义上。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Levy（1953）：协调变形法

$$\{P\} = [A]\{y\}, \qquad \{y\} = [A]^{-1}\{P\},$$

点 平衡 是直接写的, 在合成缺陷的意义上, 和组合的 刚度矩阵 $[A]$ 由基于机制的坚固性贡献的过渡获得 (, rib bending, 扭转).


Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings*

SAMUEL LEVY†

National Bureau of Standards

图 12.5: 细节的 Levy, 1953

12.2.5 波音; 特纳和直接刚度法

1952 年 6 月,Ray W。克劳斯 (1920–2016) 随后, 一位年轻的助理教授在 UC 伯克利加入了波音作为夏季学院成员, 在 M 的监督下。乔纳森 • 特纳 (Clough, 2004). 被分配给结构动力学单元,Clough 的任务是分析一个大型德尔塔曲线结构模型的振动和挠度特征。最初的企图将翅膀作为一个单维射线元素的组合证明不够, 确认了古典理想化的限制已经在当代德尔塔曲线研究中被确定。

特纳的关键概念动作, 明确地表达在 Turner et al., 1956要把结构分析整合在节点转移方面, 而不是内部力量。二是基本条件: 平衡的力量和变形协调的变形。当节点转移被视为未知时, 静态决定的变得无关; 正确的位移字段是对平衡满意的。

该方法是通过提醒线性弹性春天的基本关系来引入的,

$$F = k\,\delta,$$

并将其扩展到使用 矩阵 评级的多度自由系统,

$$\{F\} = [K]\{\delta\}.$$

全球 刚度矩阵 $[K]$ 它是通过直接总结的硬度矩阵的单个结构单位 - 线条, 螺旋, 边缘, 轴承和板块 - 每一个提到一个常见的节点协调系统。

运营上,Turner 定义了建造的 $[K]$ 列为列: 虽然所有节点自由度都保持固定, 则单一的移植组件在一个节点上被强加; 必须执行该移植的力量占据相应的列。在限制条件的实施之前,

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

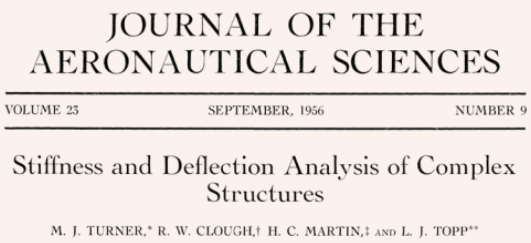
矩阵是单一的, 反映了硬体模式。支持条件是通过消除规定的迁移组件来实现的, 从而产生一个单独的减少系统。

Turner (1956–1959): Direct Stiffness Method

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \qquad [K] = \sum_e K^e,$$

每個 单元 刚度矩阵 K^e 通过超越来促进全球稳定。移动首先解决; 内部力量和压力随后是背部替代。

Turner 在 AGARD 结构与材料小组会议上提出了该程序的第一次正式展览 (Turner, 1959), 强调组合的算法性质和其适合数字计算。他还指出, 非线性问题 - 由于大缺陷或热效应而产生的 - 可以通过加剧的线性化与密度更新来解决, 预测非线性分析的后续发展。


JOURNAL OF THE
AERONAUTICAL SCIENCES

VOLUME 23 SEPTEMBER, 1956 NUMBER 9

Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures

M. J. TURNER,* R. W. CLOUGH,† H. C. MARTIN,‡ AND L. J. TOPP**

图 12.6: 矩阵 结构分析 (Turner et al., 1956)

直接刚度法的最终巩固不是通过一个新的概念进步, 而是通过它的系统编码。这个角色是由 Przemieniecki 在他的标志文本中完成的 **矩阵 结构分析 的理论** (Przemieniecki, 1968). 直接描绘了波音的进展和特纳的 AGARD 格式,Przemieniecki 介绍了硬度方法作为一个统一的基于元素的框架, 适用于相关术语、板、框、网和盘。通过标准化评级, 澄清矩阵分裂和限制排除, 并强调算法实施, 这本书将先进的研究方法转化为一个可教导和广泛采用的工程工具。通过这项工作, 直接硬度方法成为现代矩阵结构分析的基础和最终元素的即时先驱。

有关分析细节，请参见 §42.2.2

该方法的主要创新是:

- **单元 密度矩阵:** 每个结构成员都具有刚度矩阵的特点。$[k]$ 關於 单元 終端勢力到終端移行: $\{f\} = [k]\{d\}$
- **转变为全球协调:** 元素矩阵, 自然表达在当地坐标, 转化为一个共同的全球坐标系统
- **由超级组成:** 全球结构 刚度矩阵 $[K]$ 由所有 单元 的合并贡献组成, 尊重连接性
- **分配和解决方案:** 主持人: 硬度方程式 $\{F\} = [K]\{D\}$ 被分为分离已知和未知的移行, 然后解决为未知。
- **返回替代:** 单元 终端力量从 单元 密度矩阵和计算的转移中恢复

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

术语 “直接” 这种方法与以前的灵活性有所区别。(力量) 方法 他们需要确定哪些力量是回报的。硬度方法直接与未知的移行工作, 不需要确定折扣。每个结构, 确定或不确定, 均匀处理。(Przemieniecki, 1968).

直接刚度法的功率在其系统, 算法性质中:

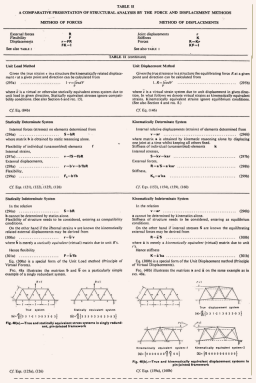
1. 定义 单元 和节点
2. 生成 单元 硬度矩阵 (从标准公式)
3. 转变为全球协调
4. 集合全球 刚度矩阵
5. 实施边界条件
6. 解决 $[K]\{D\} = \{F\}$ 移居的
7. 恢复单元力量

每个步骤都遵循定义规则, 使方法理想的计算机实施。到 1960 年, 这种方法被编码为结构分析程序。

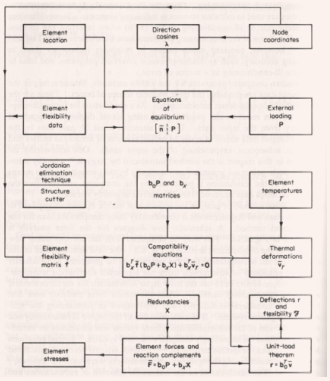
12.2.5.1 灵活性与稳定性: 持续的讨论

自 1950 年代中期以来, 一直存在关于柔度法对硬度方法的优越性的争论。

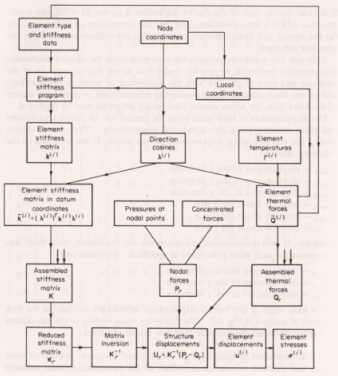
表二的侧面介绍 Argyris and Kelsey, 1960 , 图 12.7, 试图证明经典的力量方法和位移方法正经过相同的步骤序列。后来, Przemieniecki, 1968 [2] 出版了他的研讨会书, 比较了两种方法的许多例子。



(a) 阿尔吉里斯的平板比较



(b) 力量方法



(c) 位移 方法

图 12.7: 强度与位移方法的比较 (Argyris and Kelsey, 1960 ; Przemieniecki, 1968)

一些工程师最终能够写 Fortran 程序, 得出结论, 这些方法具有相似的能力, 选择一个或另一个是味道问题。大多数结构组, 坚持传统, 选择了古典力量方法。但是, 试图实施的几位

[2]它引入了许多概念和笔记, 目前正在使用。它仍然是关于这个主题的最佳书籍之一。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

工程师都注意到一个显著的差异。而在直接刚度法之前，它没有分解的双对手，出现了 (Felippa, 2001 PDF).

传奇古典力量方法代码在许多航空航天公司继续使用。分裂提醒了爱因斯坦在被问及老守卫的反力到新物理学时的一个答案: “我們沒有說服他們，我們把他們留下來。” 1940 年代和 1950 年代雇用的结构工程师经常在 60 年代担任管理职位，支持古典力量方法。毕竟，所有需要的都是算法，让计算机自动选择好转换器。这些人花了大量的努力。“结构切割” 在 1960 年代。

12.3 有限元法的

转型: 从直立性到终端单元。 到 1950 年代末，直接刚度法已经达到成熟和完全普遍的算法形状。结构是理想化为分散组件的集合，单元硬度矩阵被集成到一个全球系统，边界条件由限制消除施加，并首先解决了转移，以后置替代恢复的力量。未解决的不是计算程序，而是它的解释和范围。具体而言，直接固态方法主要是在骨骼和粘膜结构的背景下开发出来，其中元素自然相匹配于可识别的物理成员。

有限元法的关键概念步骤是认识到，基于坚固性相同的框架可以系统地应用于 **不断的媒体** 通过将人工分区引入 单元 与假设的 位移 字段。这个步骤统一了矩阵结构分析与变量和接近理论在数学和机械独立开发。因此，有限元法不是作为替代的直接刚度法，而是它的自然扩展从差异性结构组合到随意地理的继续。

12.3.1 数学基础

波音开发的矩阵方法包含了所有将成为有限元法的成分。缺少的是将工程实践与数学理论相连的统一概念框架。这个框架通过数学家的工作同时发展。

里奇 (1878–1909). 威尔特 • 里茨 (1878–1909) 开发了对变量问题的接近技术: 表达未知功能作为可接受功能的线性组合，与通过能量减少来确定的比例 (Ritz, 1909).[3]

画廊 (1871–1945). 波里斯 • 加勒金 (1871–1945) 通过重量化废物的方法，超越变异问题的扩展接近方法 (Galerkin, 1915) 需要统治方程的剩余值为正确的选择重量功能。

在计算结构机械学中，加勒金的方法不仅仅是变量技术的历史普遍化; 它是结合终极差异、能量方法和终极元素的统一原则。通过将 平衡 在整体意义上通过剩余的正确性到可接受变化的空间,Galerkin 提供实用的弱形状。当测试和重量功能相同时 (Bubnov - 加勒金的選擇) 结果的 表述 正是基于 位移 的 有限元分析 中使用的。在这个意义上，有限元法最好不是作为一个单独的发明而被视为一个特定的 Galerkin 分歧应用于部分多元接近空间。

有关分析细节，请参见 §52.3.4

亚历山大 • 赫尔尼科夫 (1941). 亚历山大 • 赫尔尼科夫 (1896–1984) 一位俄罗斯 - 加拿大结构工程师，介绍了 **轻微的模拟** 解决 弹性 問題 (Hrennikoff, 1941). 他的 “框架方法” 替换一

[3] 雷利先生 主持人，引导到名称 “Rayleigh - Ritz 方法”

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

个连续的板块或膜, 以相当于一维条元素的平面, 其集体行为接近连续的。尽管仅限于直角域, 无法处理自愿地质学, 但这种方法建立了对一个持续域的分离为更简单的元素组合的基本概念　最终元素分析的概念核心。

理查德 • 科伦特 (1888–1972). 理查德 • 科伦特 (1888–1972) 独立于赫恩尼科夫, 从纯粹的数学角度接近问题, 引入了三角形分区在 1943 年对美国数学社会的讲话中定义的精细试验功能。(Courant, 1943).

流动开始了经典的 Rayleigh-Ritz 方法的审查, 其中一个人试图尽量减少功能性。$I(\phi)$ 通过线性组合的协调函数来接近解决方案 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, 图 12.8:

$$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n \tag{12.1}$$

各方因子 c_i 它是通过将这种表达式替换为变量问题, 并解决从最小化状态产生的线性方程的结果系统来确定:

$$I(\phi_n) = F(c_1, \ldots, c_n) = \min . \tag{12.2}$$

虽然理论上听起来, 但库兰特注意到这种方法的实际限制:

Ritz's construction proceeds as follows: We start with an arbitrarily chosen system of "*coordinate functions*"

(13) $$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots,$$

which should satisfy the two conditions:
(a) Any linear combination

(14) $$\phi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$$

of them is admissible in the variational problem.
(b) They should form a complete system of functions in the sense that *any* admissible function ϕ and its relevant derivatives may be approximated with any degree of accuracy by a linear combination of coordinate functions and of their corresponding derivatives, respectively.

If we begin with such a system of coordinate functions, it is clear that for n sufficiently large and for a suitable choice of the coefficients $c_1, c_2, \cdots, c_n$ of (14) we can find admissible functions ϕ_n for which $I(\phi_n)$ differs arbitrarily little from d. In other words, it is possible to find a minimizing sequence $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n, \cdots$ as a sequence of linear combinations of the coordinate functions. In order to obtain such a minimizing sequence we choose the c_i in the following manner. We consider any function ϕ_n defined by (14) and substitute it in our variational problem. $I(\phi_n)$ then becomes a function $F(c_1, \cdots, c_n)$ of the n parameters c_i which we may now determine from the ordinary minimum problem of the calculus

(15) $$I(\phi_n) = F(c_1, \cdots, c_n) = \min.$$

图 12.8: 电流介绍 审判葬礼 (Courant, 1943)

> 挑战应用数学家的发明技能的困难是找到合适的协调功能, 并估计结果的准确性。从实用的角度来看, 几乎任何成功都取决于协调功能的选择。如果这些功能没有适当考虑问题的个性, 计算的任务将变得绝望。
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

有关分析细节，请参见 §48.6

电流随后转向终极差异方法, 在许多情况下注意到它们的优越性, 因为 "最终差异直接与函数本身的值相连, 没有交叉媒体, 如更或少有意志的协调功能。" 这种观察引发了他提出一个关键的重新解释, 这将成为最终元素方法的概念基础:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 如果变量问题包含不超过第一条命令的衍生品, 则最终差异方法可以依赖于 Rayleigh-Ritz 方法, 并在竞争中考虑到只有功能。ϕ 它们是线性的, 在我们网的分子中, 它们是由网的方形图形形成的三角形。对于这种多层功能, 整合物变成以最终值数量表达的金额。ϕ 在净点和最低条件中, 变成了我们的差异方程式。
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

这里的关键洞察力很深: 而不是选择整个域范围内的全球协调功能, 可以使用简单。**线性线性** 函数定义在三角形分区上。在每个三角形上, 函数 ϕ 线性变化, 连续性在附近三角之间的共享边缘进行。未知的数量变成简单的功能值 ϕ_i 在垂直上 (网点) 关于三角形。當這樣的線形 (聚合物) 函数被替换为变量集成, 如 Dirichlet 集成。

$$D(v) = \iint_B \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy, \tag{12.3}$$

整体减少到仅涉及节点值的最终金额, 而变量条件为这些未知提供一系统线性算法方程式。

电流立即承认这一解释的普遍化:

> 这种解释提出了一个广泛的通用化, 提供了巨大的灵活性, 似乎具有显著的实际价值。而不是从四角形或直角网开始, 我们可以从一开始就考虑任何具有偏向的多层表面。(最好是三角形) 网。我們的整體再次成為最終數量, 最低條件將是價值方程式。ϕ 在网点上。虽然这些方程式看起来比原始差异方程更简单, 但我们获得了更好的适应性对问题的数据的巨大优势, 因此我们经常可以通过非常少的数值计算来取得良好的结果。
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

在他的地址附件中,Courant 展示了关于圣文特 扭转 问题的方法, 用于多连接的跨部分一个平方 框架 与一个平方洞。利用同步, 将计算域减少到十字部分的八分之一, 他采用了经典 Rayleigh-Ritz 方法与多元性试验功能以及他的新三角网络方法。最后, 他提到:

> 在净三角形中, 我们的功能被选择为线性, 因此变量问题导致线性方程式。u_i.
>
> Courant, 1943 "*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*"

结果表明, 旋转硬度的快速 convergence S: 案例 (a) 兩個未知的經歷 $S = 0.344$ • 案例 (b) 三个未知的礼物 $S = 0.352$ • 案例 (c) 五个未知的作品 $S = 0.353$ 和案例 (d) 與九個未知 相符的普通有限差分法 也給了 $S = 0.353$. 令人惊讶的是, 即使是最紧密的三角形, 只有两个未知的节点值抓住了硬度在 3 内。% 相似的结果。

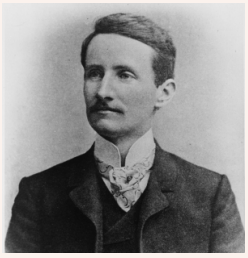
库兰特通过对该方法的广泛可用性评估和前景声明结论:

> 这些结果本身和比较表明, 三角网的普遍化方法似乎有好处。... 它显然可以适应任何类型的域, 远远

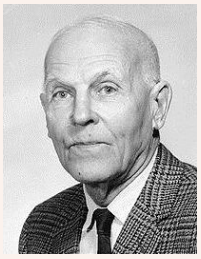
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 超过 Rayleigh-Ritz 程序, 在其中构建可接受的功能通常会提供决定性的障碍。在一个单独的出版物中, 它将展示如何将该方法扩展到板块问题和其他涉及更高的衍生品的问题。
>
> Courant, 1943 *"Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations"*

这个承诺的延伸到 板 问题—要求 C^1 四级方程式的连续性 - 会比 Courant 报道预期的更具挑战性, 并将占据最终单元研究人员未来几十年。然而, 目前已经存在了基本的概念框架: 对边界值问题的近距离解决方案可以通过将域分为简单的地质单元, 并在这些单元上定义部分多元性测试功能来构建。并通过变分原理确定未知的节点参数。


(a) 威尔特 • 里茨 (1878–1909)


(b) 波里斯 • 加勒金 (1871–1945)


(c) 格林尼科夫 (1896–1984)


(d) 理查德 • 科伦特 (1888–1972)

图 12.9: 有限元法的数学基础

被隔离,Courant 的表述经常被引用 - 回顾 - 作为最终的单元想法的第一次出现。从不同的纪律角度提出了类似的声明, 对于几项刚刚审查的发展。为了避免从这种逆转标签中产生的混乱, 有助于明确如何在当前历史记录中使用术语和优先事项。

12.3.2 优先事项和术语: 什么是 (而不是) 有限元法的

在历史文学中, 围绕有限元法的优先争议往往源于不同用途的术语而不是关于基础数学或算法的根本分歧。期限前的长时间 "结尾 单元" 被引入, 数学家开发了基于变量原则的强大接近技术。(里奇) 重量化废物 (画廊), 以及对子域的部分性试验功能 (流动). 这些贡献构成了基本的数学基础, 但它们本身并不是工程分析的一般计算方法。

相比之下, 在 1950 年代航空航天工程中开发的矩阵固体制成提供了集合和解决平衡方程式的大型系统的完整、算法程序, 但最初是以结构组件而不是分散的连续性为框架。最终元素方法出现时, 这两条发展线团结起来: 不断的媒体被分散到由假设的转移领域授予的终端子区, 他们的行为是由相同的基于密度的组合原则统治的, 以前用于差异结构。

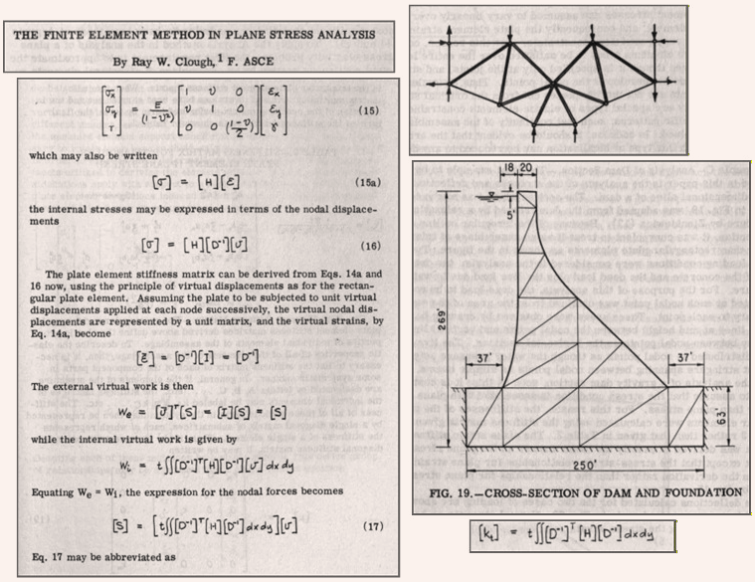
在这个计算中, 最终元素方法因此不被理解为一个单一的发明可以归因于一个个体, 而是数学接近理论, 矩阵结构分析和数字计算的相似性。优先声明取决于哪些方面 - 数学, 算法或术语 - 被强调; 清晰度最好通过明确区分这些角色。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

12.3.3 雷 • 克劳 (1920–2016)

第二届 ASCE 电子计算会议于 1960 年 9 月在皮茨堡举行，为克劳提供了机会向民用工程社区介绍该方法。主要的挑战是选择合适的名字。在波音，“直接刚度法” 描述了集合程序，但不是对不断媒体分歧的必不可少创新，以便将被假设转移领域的元素。

注意到对最终差异的类似性　但承认弹性的方程式在分歧区域独立应用　克劳决定这些建筑区应该被称为“结尾单元。” 他的论文被称为“飞机压力分析的终端元素方法” (Clough, 1960), 图 12.10.


THE FINITE ELEMENT METHOD IN PLANE STRESS ANALYSIS

By Ray W. Clough,[1] F. ASCE

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau\end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_x\\ \epsilon_y\\ \gamma\end{bmatrix} \quad (15)$$

which may also be written

$$[\sigma] = [H][\epsilon] \quad (15a)$$

the internal stresses may be expressed in terms of the nodal displacements

$$[\sigma] = [H][D'][v] \quad (16)$$

The plate element stiffness matrix can be derived from Eqs. 14a and 16 now, using the principle of virtual displacements as for the rectangular plate element. Assuming the plate to be subjected to unit virtual displacements applied at each node successively, the virtual nodal displacements are represented by a unit matrix, and the virtual strains, by Eq. 14a, become

$$[\bar{\epsilon}] = [D'][I] = [D']$$

The external virtual work is then

$$W_e = [\bar{v}]^T[S] = [I][S] = [S]$$

while the internal virtual work is given by

$$W_i = t\iint [D']^T[H][D'][v]\,dx\,dy$$

Equating $W_e = W_i$, the expression for the nodal forces becomes

$$[S] = \left[t\iint [D']^T[H][D']dx\,dy\right][v] \quad (17)$$

Eq. 17 may be abbreviated as

FIG. 19.—CROSS-SECTION OF DAM AND FOUNDATION

$$[k_i] = t\iint [D']^T[H][D']dx\,dy$$

图 12.10: 克劳的 1960 年纸名为有限元法 (Clough, 1960)

论文结束了留下相关的观点:

> 以前的例子表明了最终元素方法对飞机压力问题的分析一般可用性。结果似乎表明，这种方法是非常有效的，只要线性压力变量在元素中被认为是合理代表实际压力变量的。因此，当压力实际上以非线性方式有所不同时，需要采取足够小的单元以便在接近的单元中表现出非线性的线性变异。除了这种限制之外，似乎一个非常紧密的麦沙接近可以在许多问题上产生良好的结果。
>
> 这种分析方法的一个重要优点是它与其他类型的结构系统的分析完全兼容，如框架、管道等。因此，分析一个由这样的单元组成的系统没有问题。只需要确定不同类型的单元的硬度矩阵。
>
> Clough, 1960 *“The finite element method in plane stress analysis”*

当提交时，论文产生了很少的即时影响　所需的方法“自动数字计算机” 目前尚未为典型结构工程师提供。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

12.3.4 早期计算机与伯克利计划

1957 年, 克劳在伯克利开启了一门名为 “矩阵分析 的结构。” IBM 701 型号, 具有 16 位内存的 4K, 已安装在工程学院。它可以解决最多 40 个方程式; 只有紧密的面板是可行的。

毕业生, 爱德华 • L。威尔逊 (1931–2024), 不满意的努力需要解决终端元素问题, 使用可用的矩阵算法程序。1958 年, 他开始开发一个基于直角飞机压力元素的自动终端元素程序。经过几个月学习编程 IBM 701 之后, 威尔逊制作了一款有限容量半自动程序。

1959 年,IBM 704 安装了 32K 32 位記憶體與浮動點算法, 大約比 IBM 701 快 100 倍。这使得实用结构的分析与精细面板, 从研究好奇心转化为实用的工程工具。

威尔逊的编程努力在 SAP 中高峰 (结构分析 程式), 他自由分发到大学和工程公司在世界各地。这种开放传播策略加速了有限元法的采用, 并建立了一个在伯克利共享软件开发的传统, 影响了几代结构分析代码。

12.3.5 Norfork Dam: 第一大应用

UC Berkeley 拥有长久的丹麦研究传统。1920 年代,R.E 教授 戴维斯对 Hoover Dam 进行了研究。在 20 世纪 50 年代末,Oroville Dam 的模型和材料研究由 Raphael、Eberhart 和 Pirtz 教授进行。很自然的是, 新开发的最终单元程序的第一个主要应用将是到一块石头。

根据博士的建议 小岩区工程师团的顾问罗伊 • 卡尔森 (Roy Carlson) 提出了一项建议, 分析诺福克钻石 - 一个重力钻石与温度引发的垂直裂缝在中心附近。该提案表明, 该方法能够模拟具有不同材料特性的自愿地质结构, 在钻井和基础中。

克劳的提议通过了理查德 • 麦克尼尔 (Richard MacNeal) 的模拟计算机提议 Cal-Tech - 被认为是最先进的国家。诺福克项目提供了一个机会, 将方法扩展到非线性分析在水静充电下切割。威尔逊和毕业生伊恩 • 金 (Ian King) 进行了详细的分析。重要工程结论: 破碎的钻石是安全的。

工程师团队报告 (Clough, 1962) 1962 年提交, 并在里斯本的计算机工程使用研讨会上提出了相关论文。(Clough and Wilson, 1962). 这只是第二次。“结尾 单元” 它在伯克利以外的纸张标题上出现。

12.3.6 非线性和动力分析 (1960–1962)

同一年 (1960) 看到第一個非線形 有限元分析 的發行。威尔逊在克劳的指导下在 NSF 项目上工作, 写了一篇由 Ramberg-Osgood 方程定义的非线性时刻曲线关系的双维框架分析计划。. 负载被应用的增加, 产生一个 pushover-type 分析 (Wilson, 1960), 图 12.12.

> 在本文中介绍的 荷载 增加方法提供了一种具有非线性材料特性的结构分析的一般方法。这种方法将结构的分析接近一系列结构的整体分析, 每个结构在外部 荷载 的微小增加下行线性。在这种接近中所涉及的错误可以尽可能小, 只要减少荷载增幅。
>
> Wilson, 1960 *“Matrix Analysis of Nonlinear Structures”*

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

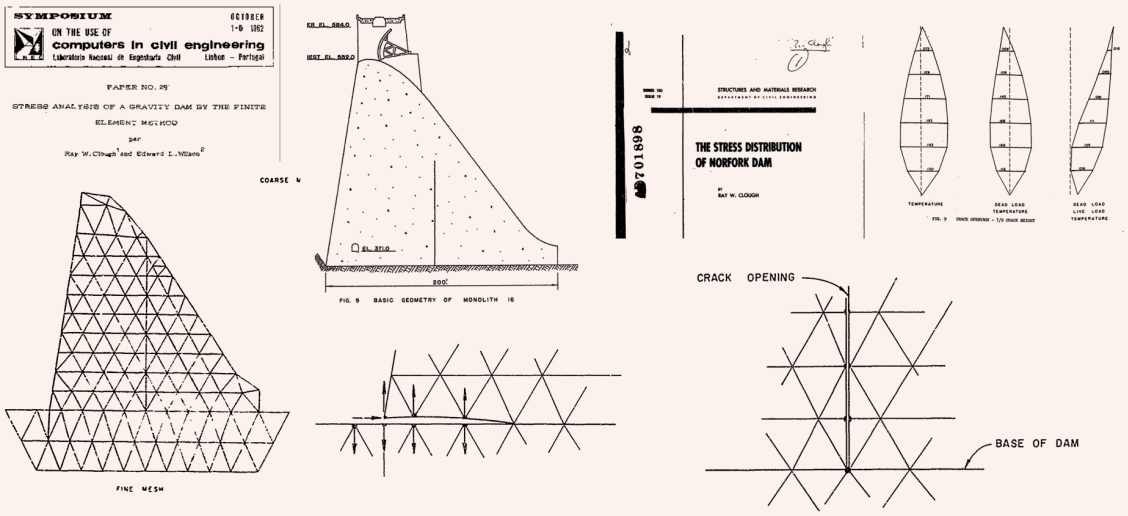


图 12.11: 诺福克 DAM 有限元分析 (Clough, 1962; Clough and Wilson, 1962)

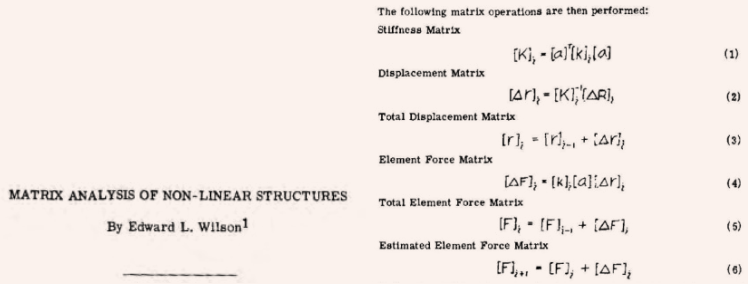


图 12.12: 第一個非線形 有限元分析 (Wilson, 1960)

威尔逊和克劳在 1962 年里斯本研讨会上提出了另一个突出论文, 关于一步一步的动态反应分析 [4] (Wilson and Clough, 1962). 这篇论文在矩阵中提出, 形成了 Nathan M 开发的时间步骤算法。纽约 (1910–1981). Newmark, 在伊利诺伊大学结构工程的突出人物, 于 1959 年引入了其无条件稳定的整合计划。(Newmark, 1959). Wilson-Clough 实施消除了每一步通过初始 矩阵 逆转的需要, 使 Newmark 的方法 适用于大型终端单元系统的实用性, 图 12.13.

> 在本文中介绍的步骤方法提供了一个系统的程序, 以确定被任意加载的质量系统的动态反应。在矩阵形式中的步骤方程式的制定, 使系统的反应能够通过重复的矩阵操作序列来确定。此外, 每次时间增加的 iteration, 由其他程序所要求, 通过初始 矩阵 逆转被排除。
>
> Wilson and Clough, 1962 *"Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis"*

[4] 当应用的 荷载 的频率 (激情) 一个结构低于其最低的自然振动频率的三分之一, 然后我们可以忽略无情的影响, 并将问题视为一个 quasi-静态, 否则是动态。分析必须进行。对于非常灵活的结构, 即使是缓慢应用的荷载也可能需要一个动力分析.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

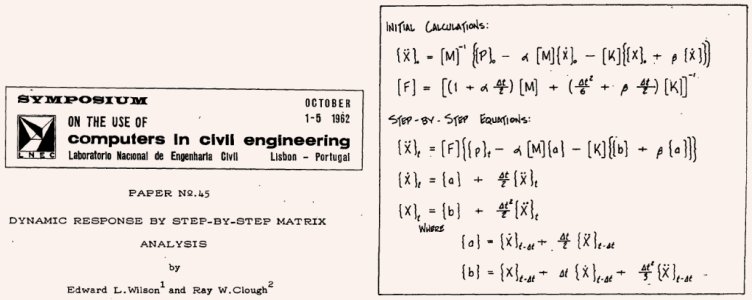

SYMPOSIUM
ON THE USE OF
computers in civil engineering
Laboratorio Nacional de Engenharia Civil Lisbon – Portugal
OCTOBER
1-5 1962
PAPER N2.45
DYNAMIC RESPONSE BY STEP-BY-STEP MATRIX ANALYSIS
by
Edward L.Wilson[1] and Ray W.Clough[2]
INITIAL CALCULATIONS:
STEP-BY-STEP EQUATIONS:
WHERE

图 12.13: 第一個動態 有限元分析 (Wilson and Clough, 1962)

这项工作是克劳在地震工程上越来越关注的先例, 在他的经典文本中突出。(Clough and Penzien, 1975).

有关分析细节，请参见 *§53*

12.4 巩固和分散

12.4.1 奥利格 • 齐恩基维奇 (1921–2009)

奥尔吉尔 • 塞西尔 • 齐恩基维奇 (1921–2009), 图 12.14c 出生在英格兰的波兰父亲, 建立了有限元法作为工程分析的普遍工具。在爱丁堡大学的应力分析工作后, 他于 1957 年搬到威尔士大学斯旺西, 在那里他建造了世界上最重要的计算力学组之一。他的 1967 年文本与 Y.K。陈相关术语 **结构和连续机械的终端元素方法**, 是第一个完全致力于这个主题, 并在世界各地训练了一代工程师。Zienkiewicz 的区别在于他无情地延伸了结构力学 - 到流体动态、热转移、电磁和结合多物理问题 - 证明最终的单元提供了几乎所有数学物理领域方程式的统一框架。他的文本的随后出版物, 最终扩展到三卷, 成为最终参考。他与布鲁斯 • 伊朗斯合作, 制作了等参单元表述, 他的 Swansea 集团先驱适应式清洁、混合方法和时间依赖分析。通过他的书籍, 他的学生, 以及他的编辑领导 **国际杂志为数值方法在工程**,Zienkiewicz 比任何人都多, 以便在国际上传播 有限元法。

12.4.2 莱特 • 帕特森会议 (1965)

最终元素方法的国际巩固的一个关键事件是 1965 年 10 月在莱特 - 帕特森空军基地举行的结构机械中的矩阵方法会议。此次会议将来自世界各地的结构分析主要研究小组聚集在一起, 为与此同时发展的大部分思想交流提供了论坛。

审阅稿

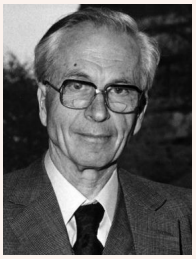
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

12.4.3 理查德 • 加拉格 (1927–1997)

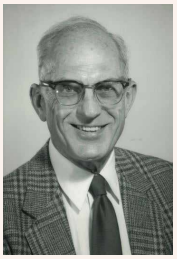
理查德 H 加拉格 [5] (1927–1997) 康奈尔大学, 主持了一次专门致力于有限元法的会议。阿吉里斯提出了对固体、板块和相关术语的应用, 以及包括自然区域坐标中的六节三角层平面元素以及自然容量坐标中十节固定 tetrahedral 元素的新元素配置。会议表明, 该方法从波音、伯克利、斯图加特和苏旺西的孤立发展中成熟到一致的国际纪律。

此前,Gallagher 曾制作过 AGARDograph 69, **关于矩阵结构分析方法的相关研究** (Gallagher, 1964), 由 AGARD 结构和材料小组委托的一项全面调查。1964 年, 该报告系统地比较了在空中框架行业实践的强度和位移方法, 并通过多网翼结构的广泛分析评估了单元公式。该研究对理想的详细比较和错误来源的公平评估使其成为工程师选择竞争方法的重要参考。

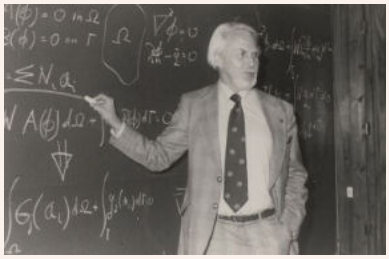
加拉格本人成为单元理论的主要贡献者, 特别是对于壳结构, 以及他的文本书。(Gallagher, 1975) 提供了另一个重要途径, 以便该方法的传播。



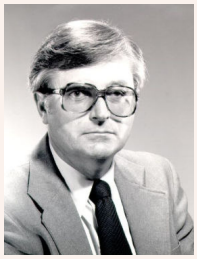
(a) 阿尔及利亚 (1913–2004)



(b) 克劳斯 (1920–2016)



(c) Zienkiewicz (1921–2009)



(d) 威尔逊 (1931–2024)



(e) 加拉格 (1927–1997)

图 12.14: 有限元法的现代创始人

[5]加拉格被列入这个幻灯片, 因为他是作者最喜欢的教授作为科恩尔大学毕业生, 在那里他讲课关于最终元素, 结构优化和相关术语。在后来的过程中, 他可以从第八个命令的差异方程中得出统治一般壳理论, 几乎没有看他的笔记。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

12.4.4 强力方法与硬度方法的讨论

在 1950 年代末和 1960 年代, 关于武力相对价值的辩论继续。(灵活性) 和 位移 (坚定性) 方法。阿尔吉里斯的侧面比较 (图 12.7) 它展示了通过类似步骤进行的方法。Przemieniecki, 1968 [6] 提供系统的比较, 多种例子。

一些工程师可以写 Fortran 程序的结论, 这些方法有类似的能力; 选择它们之间是味道问题。大多数航空航天团体, 坚持传统, 支持力量方法。但是, 执行这两项工程师注意到显著的差异。直接刚度法 没有双重对手, 符合其算法简单性 (Felippa, 2001).

遗传力量方法代码在许多航天公司继续。正如菲利普帕所指出的那样, 分裂回忆起爱因斯坦关于老守卫的反力对新物理学的答案: “我們沒有說服他們, 我們把他們留下來。” 1940 年代至 1950 年代雇用的工程师, 现在在管理中, 赞助了力量方法。实质性努力被投入到 “结构切割”—自动排序算法 - 在 1960 年代。

12.4.5 纳斯特兰的决定 (1969)

最终决议通过机构决议。1965 年,NASA 提出建造 NASTRAN 的要求。最终的单元系统呼吁同时开发与同一能力相同的位移和强度版本, 包括动态和屈曲。兩個合同被授予:MSC (位移 版本) 和马丁 (强力版本).

到 1969 年, 开发的力量版本被取消。这标志着强力方法的终结, 作为一般用途结束单元程序的严重竞争对手。基于位移的表述已成为普遍标准。

12.4.6 一般化

虽然 有限元法 起源于 结构力学 , 但其基本的数学框架 变量原则和重量的剩余公式适用于分离域 证明适用于任何由部分差异方程式统治的 边值问题 。如 图 12.15 表明, 固体机械的统治方程式, 流体力学, 热导向, 分散和电导向都共享相同的数学结构, 只有在物理意义上区别的领域变量和材料因子。

在每个情况下, 最终的单元分辨率产生了熟悉形式的系统。$[K]\{u\} = \{F\}$, 在那里, 密度矩阵、节点不认识和强力 vector 采取问题特定的解释。这种普遍性早已被 Zienkiewicz 和 Swansea 的合作伙伴认识, 他们系统地将该方法扩展到热转移、海面流动、电磁以及最终结合多物理问题。有限元法 因此超越了其起源, 作为飞机 应力 分析的工具, 成为几乎所有工程科学中主导的 数值 技术。

桌子 12.1 详细描述了每个问题类别的字段变量和物质恒定的物理解释, 由最终 单元 框架统一。

[6] 本书引入了许多概念和笔记, 目前仍在使用。它仍然是这个主题最好的治疗方法之一。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

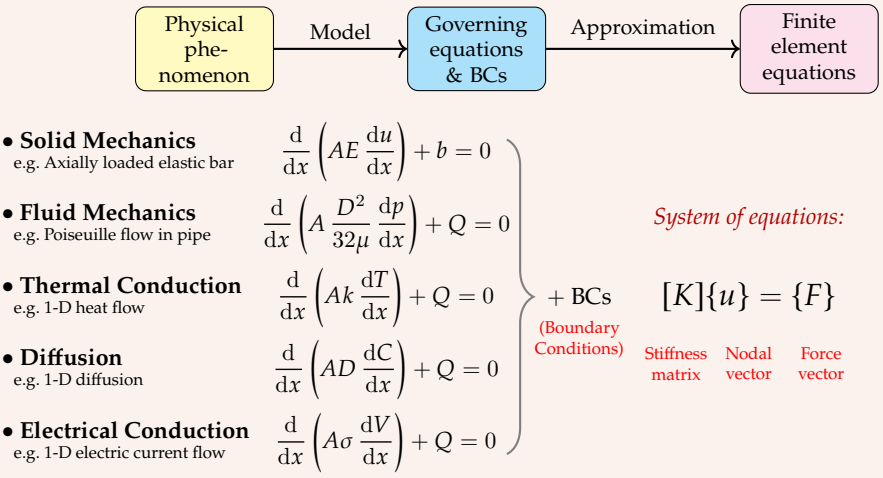


图 12.15: 有限元法的普遍化到多种物理学科: 尽管有不同的统治方程式, 但它们都具有相同的算法结构。

表 12.1: 不同物理问题的分类

物理问题	保守原则	国家变量	流	材料持久	来源	本构方程
弹性身体的变形	平衡的力量	位移 或力量	应力 或 应变	杨氏模量，泊松比	体力或拖动	胡克的法律
电网	平衡 的流量	电压或强度	电流	电导性	外部电负载	基尔什霍夫的法律
扭转	保存 势能	应力 或 Warping 功能	旋转的速度	剪切模量	−2× 曲线的角度	胡克的法律
热转换	能量保存	温度	热流	热导力	内部或外部热量	福里尔的法则
流体 流量	保持动力	速度	剪应力	可见性	身体力量	库存的法则
通过色情媒体流动	保存 质量	水力头	流率	可行性	流体 来源	达尔西的法律
电动化	保持电流	电力潜力	电流	允许性	负担	库伦布的法律
磁性	磁性潜力保留	磁性潜力	磁流	磁性透明度	目前	麦克斯威尔的法则

12.4.7 文本书与全球采用

第一本专注于有限元法的文本书是由 Zienkiewicz, 1967. 特别注意: 即使在这个基本文本中,DAM 分析也出现在示例中。(Zienkiewicz and Cheung, 1964; Zienkiewicz and Cheung, 1965) 这是对大规模、地质上复杂结构的自然相似性早期指示。

Zienkiewicz and Taylor, 2000 生产了全面的治疗, 培训了世界各地的工程师一代, 涵盖了各种物理学的单元表述, 以色列单元, 数值积分, 非线性和动力分析, 以及适应式面板精炼.

布鲁斯 • 伊朗, 与 Swansea 的 Zienkiewicz 合作, 引入了以色列参数概念 (1966)—使用相同的交叉功能, 用于地质和位移字段 (Irons, 1966). 这种优雅的描述使曲线元素界限能够准确地呈现, 通过加乌斯四角形在一个母元素上进行系统数字集成, 并统一了多种元素类型的处理。这个隔离参数概念成为几乎所有现代终端单元实施的基本。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

数学基础是由 Strang and Fix, 1973 建立严格的对立理论, 该方法提供了其理论认证。

12.4.8 现行影响与应用

到 1980 年,FEM 已成为工程分析的数值方法主导地位。商业代码 (安西斯, 阿巴库斯, 纳斯特兰, 阿迪娜等等。) 能够分析前所未有的复杂性结构和系统。今天,FEM 是 Ubiquitous:

- **结构:** 建筑物、桥梁、飞机、航天器、汽车
- **生产:** 金属形成、铸造、机械模拟
- **生物机械:** 骨机械, 软组织分析, 手术规划
- **地质学:** 基金设计, 隧道分析, 地震反应
- **多物理:** 加热结构, 流体结构相互作用

FEM 将工程设计从基于经验的艺术转化为模拟导向的科学。原型在物理制造前几乎可以测试。优化可以探索设计空间的命令大小比以前可能。

然而,FEM 的经典方法　力量方法、位移方法、能量原则　仍然显而易见。单元 刚度矩阵只是连续硬度操作器的差异模拟。由超级位置组成, 以虚功原理为标志。解决过程跟随了马克斯威尔、卡斯蒂格利亚诺和他们的当代人建立的相同的移动力量平衡逻辑。

12.5 总结和关键贡献

桌子 12.2 总结了在 结构分析 中计算方法的主要贡献者, 按类别按时间安排。

表 12.2: 结构分析中的计算方法的主要贡献者

贡献者	年度	参考	贡献
结束区别方法			
卡尔·皮尔森 (1857–1936)	1905	(Pearson, 1905)	关于 DAM 压力的实验研究
路易斯·弗里·理查德森 (1881–1953)	1911	(Richardson, 1911)	有限差分法 for 应力 分析; 理查德森抽象
***Iterative* 解决方法**			
菲利普·路德维格·冯·西德尔 (1821–1896)	1874	(Seidel, 1873)	Gauss - Seidel 二元化方法
***FEM* 的数学基础**			
威尔特·里茨 (1878–1909)	1909	(Ritz, 1909)	变量接近方法 (雷利 - Ritz)

继续在下一页

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 12.2 – 继续

贡献者	年度	参考	贡献
波里斯•加勒金 (1871–1945)	1915	(Galerkin, 1915)	重量化废物的方法
亚历山大•赫尔尼科夫 (1896–1984)	1941	(Hrennikoff, 1941)	轻量级模拟; 弹性 的框架方法
理查德•科伦特 (1888–1972)	1943	(Courant, 1943)	对三角形子区的部分性试验功能
矩阵 结构分析			
加布里埃尔•克隆 (1901–1968)	1944	(Kron, 1944)	张量方法; 网络分析; 基础结构概念
约翰•阿吉里斯 (1913–2004)	1954–55	(Argyris and Kelsey, 1960)	能量理论的矩阵格式; 力量 - 转移二元性
直接刚度法 和 *Finite* 单元			
MJ 的 特纳,RW。克里斯蒂安,C。马丁,LJ 顶级	1956	(Turner et al., 1956)	直接刚度法; 三角飞机 应力 单元
M。乔纳森•特纳 (1909–1985)	1959	(Turner, 1959)	直接刚度法的正式曝光; 非线性扩展
纳丹 M 纽约 (1910–1981)	1959	(Newmark, 1959)	纽马克时间集成方法
雷 W 克劳斯 (1920–2016)	1960	(Clough, 1960)	命名 “有限元法” 延伸到连续媒体
伯克利发展			
爱德华 L 威尔逊 (1931–2024)	1960	(Wilson, 1960)	第一个非线性有限元分析;SAP 程序
RW 的 克劳斯 & 艾尔威尔逊	1962	(Clough, 1962)	Norfork Dam 分析; 第一大 FEM 应用
艾尔 威尔逊 & RW 的 克劳斯	1962	(Wilson and Clough, 1962)	第一個動態 FEM 分析; 矩阵 Newmark 方法
文本和分布			
拉特•帕特森会议	1965		FEM 研究的国际巩固
布鲁斯 M 伊朗 (1924–1983)	1966	(Irons, 1966)	等参单元 概念
奥克 Zienkiewicz (1921–2009) & 吉克 切恩	1967	(Zienkiewicz, 1967)	首页 > 单元 文本书

继续在下一页

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

表 12.2 – 继续

贡献者	年度	参考	贡献
JS 的 原文 (1924–2015)	1968	(Przemieniecki, 1968)	关于矩阵结构分析的系统文本书
吉尔伯特•斯特兰 & 乔治修复	1973	(Strang and Fix, 1973)	FEM 的数学相遇理论
理查德 H 加拉格 (1927–1997)	1975	(Gallagher, 1975)	完成元素文本; shell 元素开发
软件开发			
NASA / MSC / 马丁	1965–69		NASTRAN 开发; 强制版取消 1969 年

12.6 结论

在本章中追踪的计算方法 - 从理查德森的最终差异, 通过矩阵结构分析到终端元素方法 - 并不是从经典结构机械学中脱颖而出, 而是由数字计算所允许的系统扩展。

主要发展是:

1911: 理查德森的有限差分法为应力分析 第一个系统性的数值方法对连续问题

1954–1956: Argyris 的能量原理矩阵的制定; Turner-Clough 合作产生直接硬度方法

1959: 特纳的直接刚度法正式曝光; 纽马克的时间集成计划

1960: 克劳的名称为有限元法; 第一个非线性 FEM 分析

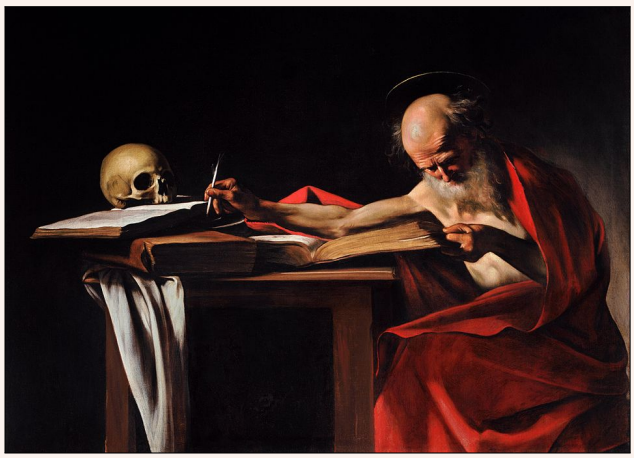
1962: 第一位动态 FEM 分析; 诺福克 Dam 分析展示实用应用

1965–1969: NASTRAN 开发和基于 位移 的方法的胜利

元素密度矩阵、组合程序和现代终端元素分析的能量原则直接跟踪麦克斯威尔、卡斯蒂格利亚诺及其十九世纪当代人的概念。计算机改变了可以计算的, 而不是正在计算的。

今天的结构分析师, 用精致的终端元素软件工作, 能够以数百万度的自由度解决系统, 站在开发弓的结束, 从纳维尔的第一次处理无限射击开始。原则仍然是两世纪前建立的; 只有应用范围改变了。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



卡拉瓦乔, 圣耶路撒冷写作 *(1605-1606)*

学者将知识从手稿到印刷到代码, 是保存和传播方法的永恒任务。

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

13 从阿巴库斯到算法: 科学与工程计算的历史调查

摘要

计算机的进化是不可分割的, 与数学、工程和科学理性。从最早的手动设备到现代数字生态系统, 计算有逐步自动化象征性操纵, 释放人类智力以概念的理解而不是重复性算法。这个章节它提供了一个正式的历史概述这一发展, 与特别重点是塑造科学和工程的工具实践。故意排除固态方法的历史并完成 单元 格式, 这些格式被覆盖在后面的章节。

13.1 引入 364
13.2 古代和早期计算设备 364
13.3 机械自动化和早期计算机 366
13.4 巴贝奇与洛夫莱斯：程序设计的概念起源 368
13.5 类似科学计算 (1900–1945) 369
13.6 数字革命 (1945–1960) 369
13.7 编程语言和早期科学软件 370
13.8 关键计算发展时间表 371
13.9 早期工程与结构软件 (1960–1980) . . 371
13.10 PC 时代与工程计算的扩张 (1980–2000) 372
13.11 现代计算生态系统 (2000 - 现有) . . . 373
13.12 技术写作和报告的进展 374
13.13 结论 375

13.1 引入

这个章节跟踪了现代生产的长智弓。科学计算, 从最早的手动设备开始引导到整合的数字生态系统, 现在支持工程实践。从 abacus 和 logarithmic 表到 帕斯卡 和 Leibniz 的计算机, 讲述表明机械自动化如何基础为 Babbage 和 Lovelace 的概念进步。和二十世纪引入了模拟差异分析师, 其次是数字革命是由 ENIAC、EDSAC 和最早的存储项目建筑。编程语言的成熟, 特别是福特, 催化了工程软件的开发從 SAP 和 NASTRAN 到 ABAQUS 和 ANSYS。个人计算,MATLAB 数学, 最终 Python 改变了速度、规模和科学分析的重复性。第四章 结束了现代工作流包括 BIM、参数模拟和基于云的模拟, 反映一个纪律, 在那里计算能力现在不可分割的工程创造力和严格。

13.2 古代和早期计算设备

阿巴克斯

最早使用的计算机是 Abacus。, 其起源长久传递位置数字。在各种形式, 它出现在梅索波塔米亚, 希腊, 中国和日本。和 abacus 包含两个核心想法: 立场评分和明确国家代表, 图 13.1. 每個比德或對方相符於一個差異的值, 以及系统国家过渡的算法收入。长久在正式分析之前, 阿巴库允许商人和管理人员以精确、可重复的算法进行。

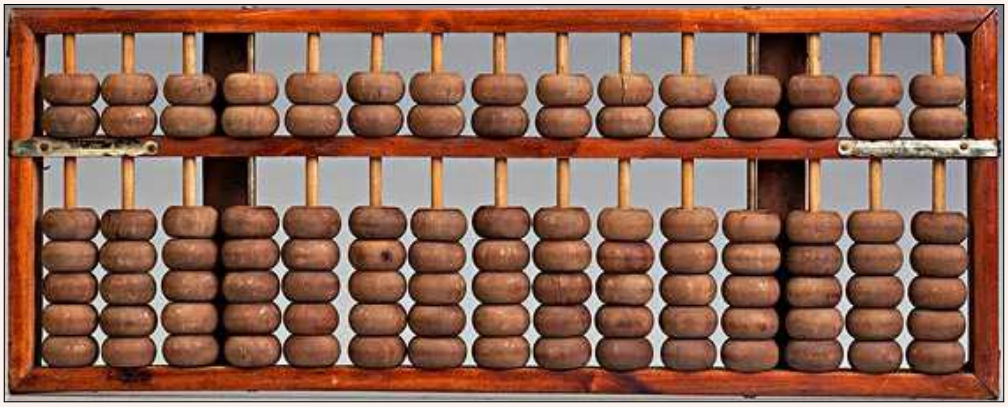


图 13.1: 传统的中国阿巴克斯 (苏珊)

Napier 的 Logarithms 和 Oughtred 的 Slide Rule

Napier, 1614 1614 年引入的逻辑, 提供了一个激进的数值计算的简化。与他们的数字相连路透,Napier 显示, 多元化可以通过**添加** 路理学, 分为 **交付** 他们。在他自己的话:

> **"在这些比例中, 麻烦的多样性转向了添加和分为微字"。**
> 约翰 • 纳皮尔 *Mirifici Logarithmorum Canonis* **描述** (1614)

这种转变加速了天文计算。导航、调查和早期工程工作。简单的现代例子描述了纳菲尔的观点 [1]. 亨利布里格斯很快通过引入基地 10 逻辑来补充纳皮尔的工作并发布广泛的印刷表, 这些表仍然是标准工具几个世纪。

基于 Napier 的概念突破, Oughtred, 1632 引入斯莱德规则 1632 年, 使用 2 滑动 Logarithmic Scales。三百多年来, 斯莱德规则是工程师的主要计算工具。允许快速繁殖、分裂、根提取和, 在专门的形状、三角和外观操作; 见图 13.2.

在十九世纪末和二十世纪初, 工程滑板规则非常精致和纪律特定的。结构工程师使用它们来计算部分属性, 滑动率, 风压力、可接受的压力和时刻比例 - 经常在与钢材设计手册相结合。早期滑雪器的设计非常依赖这些工具。

在此背景下,Hardy Cross 的瞬间分配方法, 于 1930 年推出, 扩散快速部分, 因为它的异常算法是理想的适合 Slide 规则计算 该方法不需要解决大型系统。平衡同时; 相反, 它过去和平衡的时刻通过一系列简单的操作, 可以是在逻辑层面上有效地进行。

[1] 例如, $\log(3 \times 4) = \log 3 + \log 4$. 使用常见的 Logarithms, $\log 3 \approx 0.4771$ 和 $\log 4 \approx 0.6021$ 因此, 他们的金额 1.0792 收益 $10^{1.0792} \approx 12$ 正确的产品。分区也同样处理: $\log(12/3) = \log 12 - \log 3$.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

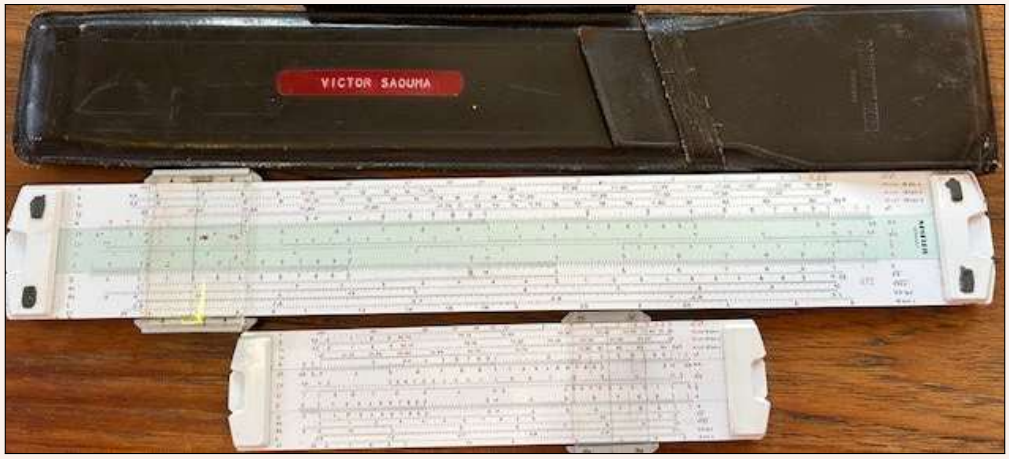


图 13.2: 作者大学滑板规则

13.3 机械自动化和早期计算机

帕斯卡的添加机

In 1642, Pascal, 1645 建造机械添加机 (其它“帕斯卡林”) 使用引擎列车自动添加和缩小。车辆通过发动机的机械传播。雖然昂贵而有限的范围, 帕斯卡林标志着一个概念断裂: 日常的算法可以分配到机器。

Leibniz 的步行回归

Gottfried Wilhelm Leibniz 通过发明扩展机械计算走过的鼓。他的“步行回归”(Leibniz, 1691b) 可以通过重复添加和分解进行多元化和分裂。Leibniz 著名地提到, 逻辑争议基本上可以是以计算为定, 预测算法的概念, 图 13.3.

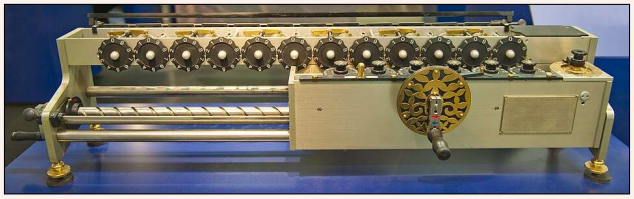


图 13.3: Leibniz 的步行回归

工业时代计算机

在十八世纪和十九世纪, 更坚实的计算机器被开发为银行和保险, 但它们仍然机械上复杂而昂贵。工程师们主要依靠在滑板规则和表格上, 大多数结构和机械计算。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

电子手持计算机在 1970 年代初出现, 开始由公司如 Casio、图等先驱模型 13.4 引入的一些第一台电子计算机进入商业市场。这些早期设备替换了机械计算与集成计算电路和 LED 显示器, 提供前所未有的速度和移动性。



图 13.4: 早期卡西奥电子计算机 (ca. 1970)

Hewlett-Packard 很快跟随了更先进的科学和可编程的工具, 建立一个主导存在工程师 1970 年代末和 80 年代初的 HP 系列 - 包括 HP 的 10C、图 13.5, HP 11C, 和 HP 15C - 引入了许多用户 **逆转波兰评论** [2] (RPN) 一个系统, 在其中运营商先于运营商。RPN 消除了需要的偏见和关键压缩减少, 但需要一个概念转型, 可以是非直觉; 作者自己的 HP 第 10 章 留下一个令人兴奋的回忆首先, 我认为这种转变可能不正确。



图 13.5: 作者的第一台计算机

[2]波兰语评论 (RPN) 是 A 基于 stack 的输入系统, 其中运营商被输入 **之前** 其它运营商。例如, 要计算 $3+4$, 一个 RPN 计算器需要 `3 4 +`它将 3 和 4 推到一个内置站点, 然后适用于运营商。父母不需要 (例如, 要计算 $(3+4)\times 5$ 一个进来 `3 4 + 5 *`). RPN 减少关键点和麻烦复杂性, 但它可以对用户感到反直觉习惯于标准 Infix 评级。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这些计算机代表了滑板规则之间的关键桥梁计算和现代数字工具: 可携带、准确、很久以前, 个人计算机变得可编程。今天的科学和图形计算机 - 无论是从 Casio, 德克萨斯州工具, 或 HP– 继承这个线条, 提供象征性操作, 矩阵操作和数值解决方案不可想象的是逻辑规模的时代。

13.4 巴贝奇与洛夫莱斯：程序设计的概念起源

区别发动机和解析发动機

查尔斯 • 巴比格 (Charles Babbage) 提出了区别引擎的机制。使用最终差异计算多元表。他的广视觉, 解析发动机 , 走得更远。如在他的著作中, 后来在 Babbage, 1864， 该解析 引擎包含一个 “商店”(记忆) 一 “千里”(算法单位), 点击卡输入, 条件分支和输出设备。在概念, 它预测了现代存储程序的建筑计算机

Ada Lovelace 和象征性计算

Lovelace, 1843 提供关于 Babbage 解析的详细笔记引擎在她翻译的 Menabrea 的论文, 13.6. 她承认, 该机器可以操纵一般符号, 而不仅仅是数字。其中包括经常被认为是第一个发布的算法, 因为计算伯诺利数字。因此,Lovelace 提出了对在任何工作一般用途计算机存在之前, 编程很好。

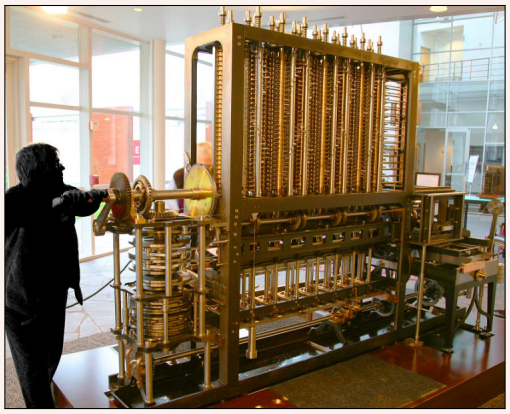


图 13.6: Babbage 的 解析 引擎

尽管他们的概念亮度, 巴比格的发动机从未在他的一生中, 由于财务、政治和生产限制。二十年代末的部分重建然而, 几个世纪都证明了其机械可行性。设计。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

13.5 类似科学计算 (1900–1945)

机械集成器与类似思维

在二十世纪初, 工程师开始设计机器。直接体现了数学方程式的结构。机械整合者通过旋转磁盘实现连续集成和旋转器; 差异性曲线和连接构建的金额和差异。这些设备实施了类似计算: 行为物理系统是方程式的解决方案。

布什的差异分析师

Bush, 1931 描述了 MIT 建造的差异分析器 1920 年代和 1930 年代, 图 13.7. 该机器使用多种机械集成器由冲刺和旋转增强器结合的单位, 以解决系统常见的差异方程式。工程师用它学习梁漏洞、振动和动态系统在数字前模拟是可能的。

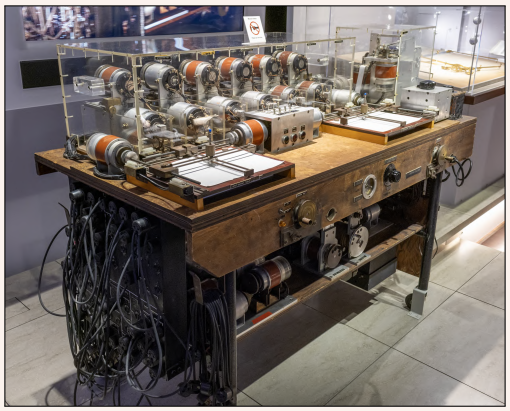


图 13.7: 布什的差异分析师

差异分析师和相关的类似设备发挥了重要作用在弹道, 飞机设计和早期核研究。他们提供实时解决方案, 但仅限于机械准确性、流动性和复杂性。这些限制提供了强烈的动机追求电子数字计算。

13.6 数字革命 (1945–1960)

终结

电子数值集成器和计算机 (终结), 开发在宾夕法尼亚大学和宣布在 1946 年, 图 13.8 被广泛观察作为第一台大规模电子数字计算机。它包含在命令 18000 个真空管, 可以执行几千每秒操作 (Eckert and Mauchly, 1946). 需要重新编程电缆和设置插板, 但 ENIAC 证明电子计算是实用的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

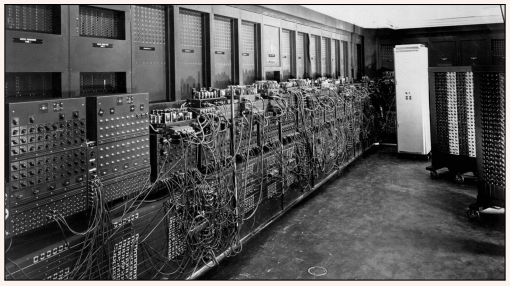


图 13.8: ENIAC 计算机

Von Neumann 建筑与存储项目

约翰 • 冯 • 纽曼和他的合作伙伴提出了存储计划建筑, 其中程序指示和数据居住在一个共同的记忆 这个概念, 在早期关于 EDVAC 设计的报告中提到, 它成为几乎所有随后的数字计算机的图标。和存储程序的想法从硬件中分开算法, 使灵活再编程, 没有物理转换。

EDSAC 和 UNIVAC

电子延迟存储自动计算器 (EDSAC) 建在剑桥和第一次运营在 1949 年, 是第一实用存储程序机。Wilkes, 1951 记录其运营和使用。在同一时间,UNIVAC I 被交付给美国。审查办公室于 1951 年成为第一家商业可用的存储程序计算机 (Corporation, 1951).

EDSAC 和 UNIVAC 标志着从实验原型转向实用科学和行政计算。早期结构性不同领域的程序和数值分析很快实施在这样的机器上。

13.7 编程语言和早期科学软件

早期数字计算机以机器代码或组合编程, 限制实用科学代码的复杂性。和引入高级语言改变了这个图像。

福特和阿尔戈尔

Backus, 1957 被描述为 Fortan (公式翻译) 被释放的 1957 年 IBM。FORTRAN 允许工程师表达数值算法使用阿尔及利亚笔记, 轴承和漏洞。作者翻译这些以有效的机械代码为准。福特迅速变成了数值计算机的主导语言, 今天仍然很重要。

ALGOL, 在 1950 年代末引入, 有助于结构化控制流构建和解散影响后来的语言规则, 如 C、帕斯卡和其他很多。虽然在工程实践中使用较少与 FORTRAN 相比,ALGOL 的概念贡献非常重要。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

计算中心和集合处理

大学和实验室设立中央计算中心配备了主框。工程师准备了 FORTAN 代码卡片, 提交工作给一个运营商, 等待印刷的输出。Debugging 通常需要多次提交周期。这个包装处理制度形成早期计算工作流和鼓励算法效率

13.8 关键计算发展时间表

年度	千里
ca. 2000 年欧洲	Abacus 广泛使用
1614	Napier 引入 Logarithms (Napier, 1614)
1632	奥特雷德的滑板规则 (Oughtred, 1632)
1642	帕斯卡的添加机 (Pascal, 1645)
1690s	Leibniz 的步行回归 (Leibniz, 1691b)
1830s	Babbage 解析 引擎概念 (Babbage, 1864)
1843	Lovelace 的笔记在解析发动机上 (Lovelace, 1843)
1925–1931	布什的差异分析师 (Bush, 1931)
1946	ENIAC 操作 (Eckert and Mauchly, 1946)
1949	EDSAC 操作 (Wilkes, 1951)
1951	UNIVAC 我交付 (Corporation, 1951)
1957	福特释放 (Backus, 1957)
1960s	SAP、STRUDL、NASTRAN、早期 ANSYS 等。(Wilson, 1969; NASA, 1968)
1978	首张阿巴库斯发布 (*ABAQUS User's Manual* 1978)
1984	MATLAB 引入 (*MATLAB User's Guide* 1984)
1988	数学介绍 (Wolfram, 1988)
2000s	Python 科学架构,BIM, 参数工具 (Foundation, 2001)

表 13.1: 科学和工程计算机的主要步骤的时间线

13.9 早期工程与结构软件 (1960–1980)

1960 年至 1980 年期间, 目睹了普遍用途的出现。工程软件, 自动化了许多结构分析任务。

SAP 和 STRUDL

加利福尼亚大学, 伯克莱 结构分析的计划 (SAP) 它被开发为基于固态的一般用途的代码框架 和 有限元分析 (Wilson, 1969). 随着时间的推移,SAP 发展 SAP IV、SAP90、最终 SAP2000 和 ETABS。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

格鲁吉亚科技, 斯图尔 (结构设计语言) 它被开发为一个集成系统结合分析、设计和数据管理。它这是一个域特定的结构的早期例子之一。语言。

纳斯特兰、安西斯和阿巴库斯

纳斯特 (NASA 结构分析) 第一次在 1960 年代发达的 NASA 赞助, 提供标准化输入格式和广泛的最终 单元 能力的频谱 (NASA, 1968). 它变成了一个航空航天和机械分析的参考平台。

ANSYS, 其根源可以追溯到 1970 年代初, 发展成一个通用多物理环境 (Swanson, 1971). ABAQUS, 首次发布 1978 (*ABAQUS User's Manual* 1978), 专门从事非线性终端单元分析, 后来扩展到覆盖广泛的材料和充电条件。

所有这些代码都最初在主框计算机上使用, 输入准备在印刷卡和结果打印在线打印机。

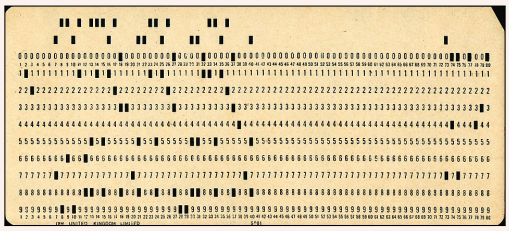


图 13.9: Punch 卡和包处理工作流

13.10 PC 时代与工程计算的扩张 (1980–2000)

1970 年代末的微处理器和个人计算机的出现 1980 年代初, 分散计算。工程师不再依赖仅在主框架上; 他们可以在桌面上进行重大分析机器

互动计算

互动计算取代包提交和鼓励探索模型。图形界面开始补充或替换基于文本的输入文件, 特别是记忆和图形能力改进。

马特拉

马特拉 它最初是在 1970 年代末发达的。由 MathWorks 于 1984 年推出, 成为数值的核心工具。线性算法、信号处理、控制和结构动力学 (*MATLAB User's Guide* 1984). 其矩阵导向的语言, 内置解决方案, 以及图形使它成为快速的原型和教学理想。

数学

数学 由引入的 Wolfram, 1988, 合并的象征性操纵, 数值解决方案和视觉化。对于工程师来说, 它提供了强大的衍生和验证解析表达式, 解决象征性差异方程式, 探索参数依赖。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

结构性软件的扩展

随着 PC 的功率增加, 结构性软件变得更加可用:

- SAP2000 和 ETABS 提供了全面的建筑分析和设计工具。
- STAAD 在民用和工业市场扩展。
- ADINA 提供先进的非线性和多物理能力。
- 安全的解决点和基础。

这些程序允许工程师可视化模式格式, 应力周围, 以及时间历史的回应, 以一种方式在主框时代不实用。

随着 结构分析 软件已成为虚假的, 对其滥用有很好的担忧已经出现。(Powell, 2008 PDF).

13.11 现代计算生态系统 (2000 - 现有)

Python 和开源科学计算

2000 年代初,Python 变成一个大科学计算平台, 由图书馆如 NumPy 支持, SciPy 和 Mattplotlib。Python 软件 基础 正式化了语言发展 (Foundation, 2001). 与木星的到来笔记本电脑,Python 成为一个标准的环境可重复计算研究。

对于结构工程师来说,Python 允许完成单元的编写框架, 概率模拟, 数据处理为结构性健康监测, 并与外部溶剂结合。

高性能计算

现代结构和地震模拟往往需要高性能计算机 (HPC). 平行解决方案,GPU 加速度, 和云平台可以:

- 大规模非线性动态分析
- 斯托卡斯特模拟与许多实现,
- 流体结构或热机械模型。

HPC 已将以前的学术表达式转化为实用工具风险和风险评估。

构建信息模型 (BIM) 与参数设计

构建信息模型 (BIM) 集成建筑、结构和建筑信息在一个单一的数字模型。软件如 Revit 和 Tekla Structures 允许地质、材料、负载和连接的协调。和行业 基础 类 (IFC) 标准数据交换方便分析软件、BIM 平台和制造工具之间。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

参数和生成设计工具 (格拉斯霍普, 迪纳莫) 更多扩展模型能力, 允许地质和托波学基于规则或优化标准。这些工具可以实现性能。引导的设计复杂结构形状, 经常与单元 解决方案。

13.12 技术写作和报告的进展

从手稿到 Word 处理器

历史上, 科学通信依赖于手写手稿和机械式型号。审查工作激烈, 而且数学评分需要专门的型号。型作家標準化外觀, 但沒有支座方程式或自動化参考。早期单词处理器缓解编辑, 但未设计对于大、平衡薄的技术工作。

微软 Word

微软 Word 和类似的工具使文档创建广泛可用, 但方程式编辑、跨参考和图书管理层对大型项目保持脆弱。一本书, 有数百方程式、数字和引用, 保持一致性在这样的环境中, 很难。

LaTeX

LaTeX 由 Leslie Lamport 开发, 已成为最终标准为科学类型化。其数学准确性、文学一致性和编程能力使其只有可行的平台, 为此规模和复杂性的技术工作。没有灵活性和自动化提供的 LaTeX 是行動超链接、跨参考、自定义宏、数字和广泛的引用网络 - 这本书可能没有被制作。不常规词汇处理器, 包括 Microsoft Word, 可以管理这里需要结构、数学和参考一致性。几乎每个数字、方程式、表格和引用在这个 体积 中都是由通过 LaTeX 宏, 确保清晰度、可再生性和一致性演示。

马克思

Mathcad 是一种工程计算环境, 将数学、文本和图形集成到一个单一文件中。13.10. 它允许工程师使用标准数学评分进行象征性和数值计算, 而不是编程合成。它的定义特点之一是, 计算和解释文本无缝共存, 使创建自我文档技术报告。

单位以原始方式进行处理, 显著降低尺寸错误的风险。工程师可以直接在控制方程式旁边插入字符、表和参数研究。

其工作表模型使假设、公式和结果立即可见和可追踪。Mathcad 还支持同一计算文件内嵌入文档、超链接和格式化评论。

由于其透明度和可读性, 它在机械、民用、电气和航空航天工程中广泛使用。它特别有价值的设计检查, 代码遵守计算和验证最终单元结果。

今天,Mathcad 已成为许多工程办公室的标准工具。[3] 将严格分析和清晰的技术沟通之间的差距解决。

[3]我长期以来一直支持 - 到目前为止失败 - 要求所有的学生家务在 Mathcad 中提交, 既是为了节省我们解

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

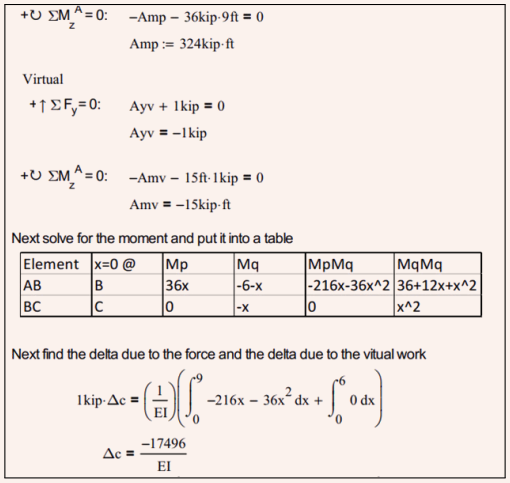


图 13.10: 例子 MathCad

附件 J 提供了一个广泛的集合的 MathCad 例子相应的结构分析问题在整个本书中解决。

13.13 结论

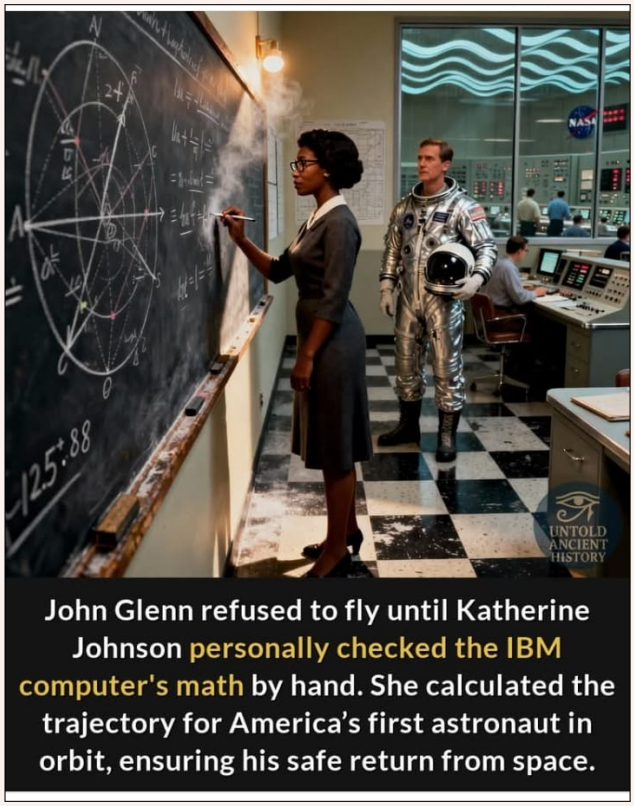
计算的开发, 从阿巴库到现代算法生态系统, 反映了一个持续的努力来自动化和扩展人类理性。每个阶段 - 逻辑, 滑板规则, 机械计算器, 类似机器、数字计算机、编程语言以及集成软件环境 - 扩大了工程师的能力模型、分析和设计复杂系统。

现代结构分析, 数值模拟和数据驱动设计放下这个线条。在本章中描述的方法和工具形成计算 基础 , 其中更先进的 解析接下来的章节的技术正在构建。

密手稿的麻烦, 也训练学生在实践中广泛使用的软件平台。它还会使发现欺诈更容易, 因为计算工作流变得透明。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



自我解释

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

14 力量的进化与虚拟原则

摘要

本章讲述了机械学两个基本概念的平行和相互发展: 力量 和虚功原理. 从古埃及和梅索波塔米亚的神圣力量个性化开始, 我们通过希腊自然哲学跟踪机械理的逐步出现, 在那里亚里士多德的自然与暴力运动之间的区别几乎统治了两千年。讲故事通过伊斯兰学者的中世纪贡献 谁精化了概念的 梅尔 (印象)—和拉丁学生, 特别是 *Jordanus de Nemore* 的虚拟移动使用 "定位 重力。"

复兴和科学革命是决定性的转折点。史蒂芬的 克劳特克朗 示威 *(1586)* 它引入了永恒运动不可能作为平衡的标准, 而加利利奥则以简单的机器来论述力量和位移之间的交换。德卡特提出了对无限的转移至关重要的认识 "动作开始"—是静态的适当数量,*Torricelli* 改造了平衡作为重力的中心变量状态。这些线条由约翰 · 伯诺利 *(Johann Bernoulli)* 组成, 他的 *1715* 年信给瓦里尼昂提供了虚拟速度原则的第一个总体声明: 在平衡时, 通过他们的虚拟移动增加的力量数量消失了。

该章节以十八世纪的系统化为峰, 由德 · 阿伦伯特 *(d'Alembert)*, 他通过他的无情力量原则将虚功扩展到动态, 以及拉格兰奇 *(Lagrange)* 机械分析 *(1788)* 将原则提升到所有机械的基础 - 纯粹通过无单一图表的算法操作表达。我们还审查了 *Lazare Carnot* 对地质动作和机器理论的贡献, 以及 *Fourier* 对不平等限制的延伸。一个时间表总结了从阿里斯托尔到莫赫的主要发展。

14.1 引入 377
14.2 古代与神圣 379
14.2.1 埃及 379
14.2.2 梅索波塔米亚 380
14.2.3 印度 380
14.3 古典古代与自然哲学 381
14.3.1 希腊人 381
14.3.2 罗马人, 普洛丁 (204–270) . . 387
14.3.3 比桑丁, 菲洛波诺斯 (490–570) 388
14.4 中世纪和学术主义 389
14.4.1 伊斯兰学者 389
14.4.2 乔丹斯 • 德 • 内莫尔 (约 1225 - 1260) 和位置 重力 390
14.4.3 中世纪: 巴黎大学 390
14.5 复兴与科学革命 392
14.5.1 莱昂纳多 • 达芬奇 (1452-1519) 392
14.5.2 贝多芬 (1530 – 1590) 393
14.5.3 帕迪 (1636–1673) 393
14.5.4 西蒙 • 史蒂芬 (1548–1620) . 394
14.5.5 加利利 (1564-1642) 397
14.5.6 凯普勒 (1571–1630) 400
14.5.7 德卡特 (1596–1650) 402
14.5.8 托里克利 (1608–1647) 407
14.5.9 瓦利斯 (1616–1703) 409
14.5.10 莱布尼兹 (1646–1716) 409
14.5.11 纽顿 (1642–1726) 410
14.5.12 丹尼尔 , Daniel (1700-1782) . 412
14.5.13 1715 年约翰 • 伯诺利的信 . . 412
14.5.14 瓦里尼奥 (1654–1722) 414
14.5.15 阿伦伯特 (1717–1783) 415
14.5.16 坎特 (1724 – 1804) 420
14.5.17 拉格兰 (1736–1813) 420
14.5.18 四人 (1768–1830) 423
14.5.19 拉萨 • 卡诺特 (1753–1823) . 424
14.6 埃皮洛格 425
14.7 结论 425

14.1 引入

在他的书中 "科学与假设" (科学与希波特 èse) 点点点 é Poincaré, 1905 著名讲述人道主义 某种程度的力量概念的起源 [1].

[1]他写道:"一个身体的加速度相当于它的力量, 分为它的质量。这个法律可以通过实验来验证吗? 如果是这样, 我们必须测量在发音中提到的三个大小: 加速度, 强度和质量. 我承认加速度可以被测量, 因为我超越时间

审阅稿

事实上, 概念的 **力量** 和 **虚功** 它是机械学中最基本的, 但它们的故事很少被讲述在一起。这是一种忽视, 对于在亲密对话中发展的两个想法: 理解力量的进展不断要求新的原则平衡, 而虚拟工作理性的精化反过来澄清了什么。“力量” 必须说。本章讲述了这种双重进化的一种统一的故事, 从古代神话人物化到现代结构分析的基础的分析描述中, 大约有二十五个世纪。

我們開始以力量作為神的特質 - 埃及人 **尼特**梅索波塔米亚 **恩利**, 圣经的 **沙特**在转向希腊人之前, 自然哲学取代了神学作为理解物理世界的框架。亚里士多德的自然和暴力动作之间的区别, 尽管最终是错误的, 建立了西方思想到科学革命才会统治的概念词汇。他的追随者在 校园生產的 **机械**第一篇文章寻求一个统一的解释机械优势, 发现它在 “奇妙的” 循环的属性。相反, 亚基米德提出了严厉的地质证据, 但没有一般原则 - 一个限制, 德卡特后来将描述为解释。**什么** 发生但不 **為什麼**.

中世纪时期有两种平行发展。在伊斯兰世界中, 科学家如 Avicenna 和 Al-Baghdadi 精化了阿里士多德的印象力量概念在理论上。**梅尔**, 一个内部趋势, 保持火箭的运动, 这预先了后来的动力概念。在拉丁欧洲,Jordanus de Nemore 介绍了 “位置 重力” 在倾斜飞机上的身体的有效重量 即暗示地引用虚拟转移的想法, 但却不承认它们是这样的。巴黎大学的布里丹的动态理论和奥雷斯梅的电影观念为即将到来的革命奠定了进一步的基础。

復興帶來了一個新的實驗精神。莱昂纳多 • 达芬奇 (Leonardo da Vinci) 列出简单机器的属性; 西蒙 • 史蒂文 **克劳特克朗** (1586) 由倾向飞行的法则从永恒的动作不可能产生的, 这是可识别的。“虚拟” 在性格上。加利利奥提出了基本的交易: 在速度中获得的损失。然而, 这些洞察力仍然分散, 缺乏统一的原则。

决定性合成是在 17 世纪。德卡特坚持说, 平衡不依赖于终端动作, 而是依靠无限的转移。“动作开始” 並顯示了坦根的建設如何擴展這種理性到曲折的限制。Torricelli 改造了 平衡作为变量状态: 重体的系统在 平衡, 如果和只有没有可接受的运动可以降低他们的常见中心的 重力. 瓦利斯将这些想法普遍化为自愿的力量方向, 而莱布尼兹则有助于哲学深度。(其它 **生存** *VIVA* 争论) 一个象征性计算的开始适合指定的数量。

石头是由约翰 • 伯诺利 (Johann Bernoulli) 放置的。在 1715 年 2 月 26 日给瓦里尼昂的一封信中, 他提出了虚拟速度的基本原则: 对于任何平衡的系统来说, 通过虚拟转向而加倍的力量总数都消失。瓦里尼昂承认结果为 “如此普遍, 如此美丽” 她立即寻求出版许可。通过这个单一的声明, 两千年的不同观念统一到一个适用于任何机械系统的原则。

十八世纪将这个原则转化为基础的解析机械。阿伦伯特的 **动态条约** (1743) 虚功 延伸到动态, 通过简单的用途来处理无情术语作为力量: 加速体可以被视为在 平衡 在印象和无情力量的结合作用下。拉格兰的 **机械分析** (1788) 系统化整个主题, 引入通用坐标, 并表明限制力量自然出现为变量问题的拉格兰多人。他的著名荣誉 这项工作不包含一个图表 证明了解析方法的力量。拉扎尔 • 卡诺特 (Lazare Carnot) 提出了对 **地质动作** 和**活动时刻**将抽象原则与机器的实用科学之间的差距结合起来。福里亚将框架扩展到不平等限制, 向现代接触机械开门。

在这个故事中, 有两个主题重复。首先, 是中间的紧张。**什么** 和**為什麼**—在某个特定的平

测量的困难。但如何测量强度和质量? 我们甚至不知道他们是什么。什么是质量? 牛顿回答: “ 量和密度的产物”... 什么是力量? “它是,” 拉格兰的回应, “移动或倾向于移动一个身体”

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

衡状态所持有的示范中 (阿基米德) 和原则, 解释为什么它必须遵守 (拉格兰,Lagrange). 第二是从一个神圣的属性, 到移动物体的质量, 到数学数量的逐步抽取力, 其对虚拟转移的影响定义。到我们故事的结尾, “力量” 已成为结构工程师用这个术语的意思: 在工作表达中, 位移的双重, 可从应力到 Cauchy 的整体恢复。

也提到 (在本章中间接) 这是力量的预告片概念。事实上, 在向量中最基本的数学想法之一[2] 分析是添加向量 的想法。二个向量 的总数具有共同起源点的定义为向量起源在同一点, 并延伸到相反的边缘图的对称, 由两个原始 vector 定义。某些物理实体, 如速度和力量, 可以组成一个相似的方式, 并且从此的通信中得出很多向量分析的有用性。(Crowe, 1994).

一个速度的平行图的想法可以找到在不同的古希腊作家和一个平行图的概念在十六世纪和十七世纪的力量并不不寻常。19 世纪初, 物理学的平行图实体经常出现在合同中, 这种使用间接引导到向量分析, 为这个想法提供了一个令人惊叹的例子如何将 vectorial 实体用于物理应用 (Crowe, 1994). 将对部队的平行图的覆盖与下列内容进行互动。

向量的概念直到 19 世纪才被威廉 • 罗旺 • 汉密尔顿引入。[3] (工作在他的 **四角形** 阿尔及利亚) 不要与向量计算混淆[4]. 因此, 在力量的平行图中, 所有下列参与者都缺席了 vector 的概念。

第四章 结束了关于物理学的四个基本力量的一篇文章　一个提醒我们结构性 “力量” 最终是电磁的起源　和一个时间表总结了从古代到十九世纪的主要发展。跟随这篇讲话的读者, 我们希望获得不仅历史观点, 而且更深入地欣赏为什么虚功原理在结构力学中占据如此中心地位。

14.2 古代与神圣

这个部分是基于 *Concepts of Force* 由 Jammer, 1957.

14.2.1 埃及

F

如[5] 早期社会变成了城市文明, 统治世界的不可预测力量的概念转化为自然力量结构化的思想。渐渐地, 这些力量被定义为强大的精神或神。古代神话, 在早期作为基本的系统化信

[2]有趣的是, 概念 A “向量” 直到 19 世纪才出现, 甚至不是德卡特是解析地质学的父亲。(阿卡 “协调地质学” 阿卡 “卡特西亚地质”) 想到了它。

[3]谁也是第一个提取条款的 “滑雪” 和 “张量” (但是, 它提到一个四角形的长度。它是 Voigt, 1898 1898 年, 他给了现代意义的).

[4]吉布斯 (美国物理学家) 和 Heaviside (英国科学家) 后来独立开发了向量计算, 以更好地解释麦克斯威尔方程式。

[5]此章题为两个主要主题: **力量** 和**虚拟原则**. 为了帮助读者保持轨道, 主要关心力量的材料在边缘上标志着 F 材料主要涉及虚拟原则 V 二、有意义地涉及的部分都被标记为 FV.
如果你发现这个章节有点分离 - 或者有时重复 - 这只是因为它开始为两个单独的章节 (“力量” 和 “虚拟力量”) 后来, 他们仔细合并了。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

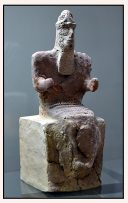
仰体系, 涵盖了宇宙学和什么可以被视为“物理学”科学前时代。在这个框架内, 力量的概念经常被定义为神或灵。

被视为神性实体的抽象力量概念可以追溯到古埃及, 特别是在十九大君主制和后来的文学中。提到如“尼特”它被概念化为个人的神性, 体现了上帝的力量, 而不是被定义为一个天主教或天使中介。神的力量概念被描述为由太阳神 Re 发送的强大实体, 以满足一个请求。“尼特”它不仅包括暴力和狂热, 而且在其最早的描述中也包含了秩序和道德的单元。

作为一个描述, 以色列的名称的希拉格式表现“天下之人”图 14.1a 在其中, 刀具的形象代表了上帝力量的概念。



(a) “天下之人” (Jammer, 1957)



(b) 恩利



(c) 沙达伊

图 14.1: 与古代的力量相关的神

14.2.2 梅索波塔米亚

F

在梅索波塔米亚文明中, 人口面临着常见而不可预测的自然现象, 如风暴、风暴和洪水, 导致毁灭。这些力量被人格化为 **恩利**, 暴风雨的神, 象征着动态和变革, 与天空神相矛盾。**安娜** 代表稳定和持久。**恩利** 它体现了宇宙中的原始力量和组织原则, 作为对混乱的监管机构。

圣经上帝与力量的概念的联系是显而易见的, 通过许多引用将他的名字与圣经中的强度、权力和强度的术语相连。例如, 如言语“哈利,”“可能”“权力”,“力量”和“强力”经常用来描述神圣的属性。一些科学家认为, 这个名字“沙特” (这是以色列神的名字之一。) 可能源于一种 Semitic root 的含义“大力量, 大力量”进一步强调上帝的全能。神圣的传奇和力量概念之间的类似联系也可以在其他古代语言中找到。

14.2.3 印度

F

雅纳斯 [6] 吉娜的追随者 (**瓦尔德哈曼**) 与佛陀同期生活在周围的人, 发展了一个现实和相对主义的原子多元主义。(**安东尼亚**). 值得注意的是, 他们没有将力量的概念纳入其中, 它与西方科学相矛盾, 在那里力量的想法起着根本作用。

[6] 雅纳斯强调非暴力 (避免伤害昆虫), 真理, 不偷窃, 塞利巴主义, 和不拥抱 (一些阿斯塞蒂克僧侣和修女, 实践极端形式的阿斯西蒂克主义, 包括放弃世界上的附属性 (如服装) 因此, 练习裸体。) 作为核心原则。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在雅娜物理学, 类别的 **阿吉瓦** 它分成几个组件: 物质。(**波格拉**) 空间 (**阿卡斯**) 动作 (**达尔玛**) 休息 (**阿德哈玛**), 和时间 (**卡拉**). **达尔玛** 和 **阿德哈玛** 相应地提到运动和休息的条件。它们是无形的, 被动的, 只是促进或阻碍运动或休息, 与支持鱼的运动的水或地球为物体提供基础。首先, 它是 “时间” 它启动了 “活动” (**克里亚**) 和 “改变” (**帕里尼亚**) 没有采取与西方力量概念相似的动态代理角色。

在雅典里, **达尔玛** (运动) 和 **阿德哈玛** (休息) 与卡尔玛密切相关。. 虽然卡尔玛的概念主要属于一个人的行为的道德和道德后果, 但它对物理领域也有影响。

卡尔马 (Karma) 在雅尼主义中, 是指从意志行动中产生的道德残留物或后果的积累。每個行為, 無論是物理、口頭或精神, 都會在靈魂上留下一個印記, 被稱為卡爾馬。这些卡尔米粒子依赖于灵魂, 并影响其未来的经历和情况。

卡尔马与物理世界之间的关系, 包括运动和休息, 可以理解如下:

卡尔马与行动: 根據傑恩哲學, 卡爾馬是由意圖行動產生的。当一个人参与涉及运动或休息的行为时, 他们积累了相应的卡尔米后果。例如, 如果有人犯下暴力行为 (参与动作) 它们积累了可能导致未来的痛苦经历的卡尔米粒子。同样, 涉及限制或非暴力行为的行动 (参与休息) 它也产生了卡尔米克的后果。

卡尔马和条件: 卡尔马被认为影响一个人的生活条件和情况, 包括他们的身体环境和经验。过去行动的卡尔米后果可能塑造促进或阻碍运动和休息的条件。例如, 有利的卡尔米影响可能会导致舒适的环境引导休息, 而不利的卡拉马可能会导致阻碍运动的障碍或挑战。

卡尔玛与解放: 在贾尼主义中, 最终目标是实现解放。(**莫斯科**) 出生与死亡的循环 (**萨姆斯拉**) 使灵魂脱离卡尔米克奴隶制。这种解放是通过精神实践实现的, 旨在清洁灵魂并抛弃积累的卡尔马。通过超越卡尔马的影响, 人们被认为能够从世界上的限制中获得永恒的幸福和自由的状态, 包括与运动和休息有关的人。

因此, 虽然卡尔玛主要属于道德后果, 但它的影响力扩展到生活的各个方面, 包括物理领域。卡尔马的积累和分解与一个人的运动、休息和世界存在的整体条件的经历密切相关。

14.3 古典古代与自然哲学

14.3.1 希腊人

希腊对机械的态度既是哲学的, 也是实用的。他们倾向于在自然哲学的背景下讨论机械原则。

古希腊人, 自然哲学 它基本上是研究自然世界及其现象, 包括我们现在所处理的分离学科, 如物理学、生物学、化学和天文学。与现代科学不同, 它不依赖于实验, 而是由观察、逻辑理性和理论猜测形成。希腊自然哲学提出了将西方世界的知识文化定义的基本概念和方法, 并影响了罗马和中世纪伊斯兰学者。它在早期现代时期失去了好处, 最终引发了科学革命。(§ 5.3).

这种连续性是关键的, 因为虽然梅索波塔米亚调查广泛依赖于长期观察, 但希腊科学越来

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

越强调抽象理智。他们的调查经常依靠有限的 - 有时表面性的 - 实验证据，随后是逻辑推迟和理论论点。

然而，我们将简要地描述主要影响者的个人资料，图 14.2.



(a) 英雄 (b) 柏拉图 (c) 亚里士多德 (d) 波西多尼 (e) 阿尔及利亚

(f) 普洛蒂诺 (g) 菲律宾 (h) 阿维森纳 (i) 巴格达

图 14.2: 力量概念的主要早期影响者

14.3.1.1 英雄 (494-434 公元前)

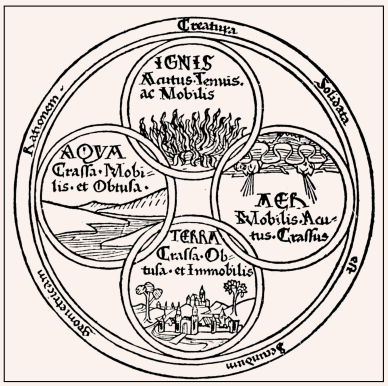
英雄，图 14.2a 他是一位古希腊哲学家和诗人，生活在公元前 5 世纪左右。他出生于阿克拉加斯。(现代农民) 西西里，当时是希腊殖民地。他最著名的是他对前苏格拉底哲学和他的宇宙理论的贡献。

帝国教派提出了对立两大力量的必要性。“爱情” (菲律宾, 菲律賓) 和 “冲突” (尼克斯) 它与地球、水、空气和火的四个元素一起分类。14.3. 爱情作为一致的强力结合在一起的存在，同时冲突导致单元之间的分裂和分裂。这种周期性爱与争吵的相互作用，类似于一个生物体的呼吸，反映了 Empedocles 的医学背景，从生理学中引发了他对宇宙的理解。与物理吸引力相似的爱情，源于生理学中的联盟概念。埃姆佩多克尔不寻求宇宙过程的机械解释，因为他认为动物生物比人类制造的机制基本上更简单，血液流动和流动在身体中作为其生理学类似的基础。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。



(a) 农民



(b) 四元素说（火、气、水、土）

图 14.3: 英雄 (關於)

他的哲学思想在古希腊思想中具有影响力，后来哲学家包括阿里斯托特和斯托克人继续研究和讨论。

14.3.1.2 柏拉图 (427-348 公元前)

柏拉图，14.2b 埃佩多克尔的两名代理人被解释为吸引力和拒绝，并建议他们在交换序列中行动，而赫拉克利图认为这些力量同时行动。 F

柏拉图，受到他的形态学的影响，与动作起源问题争论。在他的对话中“法律”（书 10）他探索各种运动类型，如旋转、转角和组合，最终把它们推回自发的运动 生命与灵魂的基本原则。[7]

> **雅典陌生人**然後我們必須說，自我動作是所有動作的起源，也是第一個在事物中發生在安息之間。如同在行事中，是变革的最古老、最强大的原则，而由另一个改变而却引导另一个。是第二。
> **克莱尼亚斯，一个克里特**答：完全是真的。
> **阿特。**在这个论点的阶段，让我们提出一个问题。
> **是的。**问：什么问题？**阿特。**如果我们看到这个力量存在于任何地上的水域，或燃烧物质，简单或合成 - 我们应该如何描述它？
> **是的。**你想问，我们应该称之为自我移动的权力生活吗？
> **阿特。**我做。
> **是的。**答：当然我们应该。
> **阿特。**“当我们看到灵魂在某事上，我们不应该做同样的事情，我们也不应该承认这就是生命吗？”
> **是的。**答：我们必须
>
> Plato, 350 BC Laws, Book X

然而，柏拉图的著作在解释实际动作时不适用这种形态力量概念。例如，在柏拉图的观点上，重力，导致地球物体的下降运动，与他的整体力量概念无关。相反，另一个未解释的假设被引入：类似事物的倾向团结在一起：地球因此吸引到地面，水到水，火到火。

[7]请注意，加利利奥后来使用了同样的对话形式来推进他的想法。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

这当然意味着每个单元都有自己的指定区域在太空。这个概念认为, 在太空中有指定区域, 或者 “自然地点”, 对于单元, 后来也被亚里士多德采用。

14.3.1.3 亚里士多德 (第 384 章 公元前)

亚里士多德 , 图 14.2c 柏拉图的弟子, 亚历山大伟大的老师。但是, 通过这个重力的地质化, “重力吸引力的想法在几个世纪以来被自然哲学所驱逐出境。[8] V

为了他的机械合适, 亚里士多德仅限于力量的概念, 因为该机构参与了 **推或推**忽略了柏拉图的力量概念, 即物质内在或我们今天可以称之为能量。他继续说 “因为只有当外在的某事移动某事, 或者让它反对自己的内在倾向时, 我们才会说这件事是由强力发生的; 否则我们也不会说这是由强迫发生的。”.

亚里士多德没有提到他认为强度应该被测量的单位。可以假设, 重量单位可能已经被用来这个目的, 因为重量是历史上最早的力量来测量, 并一直被用作其他力量的参考, 直到现代。希腊人可能用重量来测量的力量, 在手术中使用肝脏, 如油压。然而, 亚里士多德把重量看作是自然运动的表现而不是推或拖动的力量。因此, 重量不能作为根据亚里士多德测量力量的标准单位。

他的理论是基于他的观察。他看到物体在被撤离时会休息。(这样一辆车会来休息, 当马停止拖着它时。). 除此之外, 如果物体跌倒, 它们会通过一个中间, 如空气或水。(再次, 通过真空的动作被认为是不可能的。). 简而言之, 亚里士多德看到了一个世界, 在那里总是有对动作提供的抵抗: 这就是动作的现实。因此, 在亚里士多德的框架中, 力量被概念化为一个对象的推或拖动, 导致它遭受暴力运动, 他将其分类为

自然 根据亚里士多德的说法, 自然运动是对物体的本质, 由它们的基本性质驱动。例如, 重物体倾向于落下, 因为它们的自然倾向是寻找自己的。“自然地点” 在地球的中心。

暴力 反之亦然, 动作是由外部力量对物体施加的动作。亚里士多德认为, 物体需要一个持续的外部力量来维持与其自然趋势相反的运动。例如, 推一块石头会使它垂直移动, 但运动会停止。[9] 一旦力量被移除, 因为石头的自然倾向是来休息。

. 在暴力动作中, 一旦代理人停止引起它, 运动也会停止: 换句话说, 物体的自然状态必须保持安静, 因为亚里士多德不应对震动。它在亚里士多德的框架内尚未被视为一种力量。虽然亚里士多德包括一个外部代理人 “让一个身体反对自己的内在趋势” 在力量的类别下, 他没有内心原则。. 因此, 强制性动作的延续不能被视为 “内部趋势” 因此, 震动不能被视为力量。

火箭的动作是亚里士多德运动理论的一个点。根据他的理论, 这种动作很难解释, 因为一个火箭的动作, 作为一个暴力, 要求一个单独的移动, 必须不断与事物移动接触。

亚里士多德接受了帝国分类。对于他来说, 地球和水被认为是重的单元, 倾向于向下移动到地球的中心。(**重力**, 而空气和火被认为是轻的单元, 倾向于上升超过密度单元 (**莱维塔**). 这是对 **重量与轻度理论**. 因此, 在真空中, 没有维持运动的媒介, 而在抵抗不存在时, 对象将以无限速度移动! (这样 **自然空白**).

[8] 直到后来, 随着文艺复兴时期科学理解的进步和像伽利略和牛顿这样的人物的工作, 重力吸引力的概念才得到了接受, 并成为我们现代物理学的理解中不可或缺。

[9] Poincaré, 1905 写的: “如何他们能否相信动作因动作而停止?”

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

重要的是要注意, 这种无效的概念与亚里士多德物理学外。亚里士多德和他的追随者认为, 一个身体仅由不断的外部力量的行动保持在运动中。亚里士多德物理学也被称为 **周边** 假设, 在历史上重复的主题的力量概念提到自然运动的概念和区别自然和暴力运动。

值得注意的是, 从科学的角度来看, 在亚里士多德思想中物理学和形态的融合证明有害。几乎 19 个世纪以来, 他的作品具有权威地位, 阻止了进一步的进步。例如, 他的重点是旋转运动在直线运动前的先驱阻碍了机械法则的探索和发现, 如 Bache、Kepler 和 Newton 等人物所面临的挑战所证明。

亚里士多德讨论了力量的平行图的问题。Barnes, 1984 引用 **机械**

> 现在, 如果一个身体的两个转移在任何固定的比例, 结果的位移必须是直线, 这个线是图表的序列, 由该比例所引导的线。谈话也是真实的。显而易见的是, 如果一个点通过两次转移移动在直径上, 它必然根据平行图的侧面比例移动; 否则它不会沿着直径移动。[a]
>
> Aristotle, 2000 Mechanica, Mechanica 1: 848b. Cf. 23: 854b- 855a
>
> [a]阿里斯托特的参考跟随标准贝克数, 其中数字提到页面和伊曼努埃尔 • 贝克的 1831 版的柱分区。**亚里士多德歌剧** (例如, “848b” 是指页面。第 848 章 右).

14.3.1.4 阿基米德 (公元前 287 至 212 年) 标签: 示威 “什么”

阿基米德 (287-212 ECB) 她在他的生活中采取了完全不同的态度。**平衡的计划** (关于平衡的计划) (Archimedes, -250). 如本文 评论 , “虽然亚里士多德将机械学与物理理论联系起来, 旨在普遍合成, 但亚基米德认为静态是一种合理和自主的科学, 基于几乎自我显而易见的论文, 并建立在严格的数学示范上。” (Benvenuto, 1991a).

在书中 I (答案。6–7) 阿基米德斯说, 利弗法则 其最普遍的形式: “兩個大小, 無論是可測量或不可測量的, 在相互比例的距離平衡” (Archimedes, -250). 他的证据在 **尺寸** (尚未 “力量”) 以明确的地质结构为基础: 选择一个点 C 在一条线上 DE 以便对满体的分区满足相互比例 (是的, $A : B = DC : CE$) 然后, 显示它将大小放在 D 和 E 以 平衡 为 C. 在可衡量的案例中, 他将武器分成平等的部分, 并将平衡减少到同步组合; 在不可衡量的案例上, 他通过接近来扩展论点, 保持相同的比例结论。(Archimedes, -250).

一个现代的方式 **视觉化** 同樣的理性是通過一個思想實驗, 在那裡大小由許多平等的小代表。“重量” 均匀散布沿线 (形象 14.4). 以单一的 分布荷载 开始, 超越总长度 $(p+q)$ 已知 (因同义) 平衡其中间点 O. 将尾巴分成两部分长度 $2p$ 和 $2q$ 每個部分, 相同的交互論點, 可以被一個單一結果比例其長度取代。(以, $2p$ 和 $2q$) 在自己的中间点行动。这些中间点在距离 q 和 p 从 O 因此, 原始分布式系统的 平衡 意味着两个集中负载的 平衡. $2p$ 和 $2q$ 把手放在手上 q 和 p 即, 在相互形式的法则 $2p \cdot q = 2q \cdot p$, or $p : q = p : q$ (同等 $A : B = DC : CE$ 在 Archimedes 的评论中).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

书 I。**我提出下列事项:**

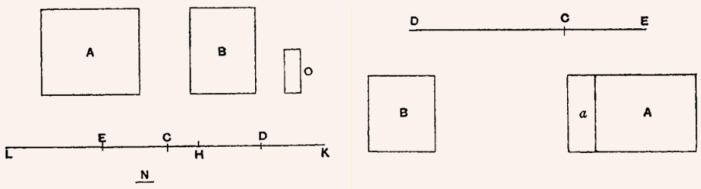
1. 平等距离的重量在平衡中相同。不平等距离的平等重量不在平衡但倾向于更远的重量。
2. 如果, 在某些距离的重量在平衡中, 有些东西被添加到一个重量, 它们不在平衡 但倾向于那重量, 到添加了。
3. 同样, 如果任何东西被从一个重量, 它们不是在平衡但倾向于重量, 从中没有得到任何东西。
4. 当平等和类似的飞机数字相匹配时相同的, 他们的重力中心相似。
5. 在不平等但相似的数字中, 重力 将以相同的方式定位。相似地定位的与类似的数字有关, 我指的是这样的点, 如果直线路从他们中拉到平等的角落, 他们使平等。与相应侧面相匹配的角度。

.....

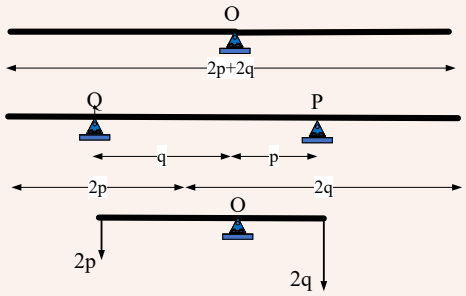
提议 6、7。

兩個大小, 無論是可測量 [普里 6] 或不可估量的 [普里 7] 平衡距离, 相互比例于大小。

Archimedes, -250 De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)



(a) 原始



(b) 现代解释 (适应从 (Salencon, 2017))

图 14.4: 阿基米德的证据《利弗法》

这个证据是数学上严格的, 但作为德卡特 后来我会看到, 它“明确解释 **四位一座** 但不 **伊塔座位**” 是顯示 **什么** 发生但不 **為什麼** (Descartes, 1898). 亚基米德斯不引用任何一般原则; 每台机器都需要从具体的投标中进行自己的表现。

有人可以假设, 静态的父亲阿基米德对力量概念有深入的理解。但是, 这不是事实。事实上, 他对武力概念的贡献是最小的。他的方法主要是地质, 重点是距离和重量。值得注意的是, 在他的时间里, 重量和力量被认为是完全分开的概念。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

14.3.1.5 波西多尼 (135 - 51 B.C.) 和斯托克

F

与亚里士多德的观点不同的是, 力量是从物质中产生的, 并在主题中存在的, 波西多尼奥 , 图 14.2d 把力量看作是物体之间的关系中基本和内在的。强力, 对他来说, 是相互通信, 一 同情心 相互作用的物体, 通过力量系统统一宇宙。

这种斯托克的力量概念, 在那里代理人和忍耐人是不可分割的, 反映了他们对宇宙团结的信念。斯托伊克在这个想法和概念之间形成平行。“同情心” 在医学中, 身体的一部分疾病影响整个, 将这个概念扩展到宇宙。引入一个基础, 无论是物质还是精神, 以解释其运作的作用。“同情心” 它反映了对亚里士多德的力量概念的一种承诺。

只有在斯托克人身上, 力量的概念就采取了新的方向。探讨天体和天体的运动之间的关系, 引发了这种转变。这项调查并不是新鲜的; 亚里士多德以前提到了这一点, 强调吸引力和推动力来解释现象。根据他的说法, 太阳的运动产生风, 然后推动海水, 导致潮流。然而, 波西多尼奥以不同的方式对待这个问题。他去加德斯学习一手的故事, 收集相关事实和数据。他观察了与天体周期相匹配的节点的定期性。Poseidonius 通过这个现象的概念来解释 色彩 普遍的紧张。

14.3.2 罗马人, 普洛丁 (204–270)

F

概念的 “同情心” 作为力量的形式, 在罗马时代的科学、哲学和神秘文学中也发挥了重要作用。普洛蒂诺 , 图 14.2f, 这个时代的著名哲学家, 经常归功于远程行动。

魔法和天文学, 这些在罗马时期和中世纪的智力生活中是核心主题, 似乎在普洛蒂诺斯的力量概念中发现了合理化。根据冥王星的说法, 魔法通过类似和不同物体之间的同情联系运作。同情的魔法是指在宇宙的一部分引发某种状态, 相信相应状态在其他地方产生。

因此, 罗马人的力量概念受到各种哲学传统的影响, 包括希腊人的传统。斯托克 , 这对罗马思想产生了重大影响, 也为他们的理解力量做出了贡献。在斯托克哲学中, 力量经常被视为宇宙的内在方面, 统治物体之间的相互作用。它与斯托克对命运和决定的信念密切相关, 以及他们强调生活在与自然的和谐。此外, 罗马工程师和军事战略家通过他们在基础设施建设和发动战争工作开发了实用的力量理解, 尽管这些人更关心武力的应用而不是它的理论基础。总的来说, 罗马的力量概念是由哲学思想和实践观念的组合形成的。

在后期拉丁文学中, 物理力量和奥克斯特机构的概念经常在没有区别的情况下混合在一起。术语 威尔图 通常包括这两个概念。此外, 因为 Vulgate 翻译通常会让希腊语 动态 如 威尔图同一术语用于在物理和宗教背景下描述力量。

概念的 “同情心” 它也被用来为天文学提供逻辑支座。“同情心” 它被用来解释月亮对相关术语星的影响, 正如冥王星所做的那样, 以及它对生物的影响。普鲁克斯扩展了这个想法, 声称天体领域影响世界事件。

普洛蒂诺提出了这个问题: “星星有什么效果”? 他看到了星星, 就像柏拉图作为永恒和神圣的生物一样, 表达了世界灵魂的全知。与忠实的亚里士多德人不同, 他们像普托利米那样

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

拒绝了远程行动, 并试图通过接触力来解释 tid。(如大气流、热量和光) 冥王星将宇宙和天文学影响归功于“同情心”他认为, 它是宇宙的各个部分之间存在的关系。

14.3.3 比桑丁, 菲洛波诺斯 (490–570)

F

约翰 • 菲洛普诺斯 , 图 14.2g 也被称为约翰 • 菲洛普诺斯或格拉马里亚人约翰, 是一位拜占庭哲学家、神学家和科学家, 在公元前 6 世纪生活。他出生于埃及亚历山大。菲洛波诺斯在哲学、神学和自然科学等各个领域做出了重大贡献。

在哲学上, 菲洛波诺斯最为著名的他的批评亚里士多德的物理学, (Philoponus, 1993). 他提出了关于动作的亚里士多德观点, 反对对物体自然休息状态的概念, 并提出外部力量是必要的, 以保持一个物体在动作。这挑战了亚里士多德的动作观念, 并为后来的物理学发展奠定了基础, 特别是在复兴时期和科学革命期间。菲洛波诺斯提出了几个阿里士多德的概念, 其中包括阿里斯托尔的运动理论和力量的概念。亚里士多德提出, 外部力量是必要的, 以保持对象在运动中, 一旦力量被移除, 对象会来休息。然而, 菲洛普诺斯不同意这个概念。

菲洛波诺斯首先明确反对亚里士多德的解释, 一块扔石头, 放下手后, 不能被它背后的空气推得更远。然后他继续:

> 相反, 某些无形的动态力量必须由投射器分配给火箭。因此, 压缩空气对这一动作有任何贡献, 或者很少。但是, 如果移动的物体必然以这种方式移动, 那么当一支箭或一块石头必然被扔掉并反对它的倾向进入空白空间时, 同样的过程会更容易发生。除此之外, 没有什么需要的。
>
> Philoponus, 1993 Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5

.

这个最后一句话的目的是表明, 在空虚空间中 - 阿里斯托尔拒绝 - 而与阿里的观点相反, 一个移动的身体将继续移动。

根據理性和實驗, 他得出結論, 必須有不合理的 或 **倾向** (物体在某种力量的影响下向某个方向移动或加速的倾向) 引力是由火箭吸收的, 并导致它的运动, 直到它被抵抗所消耗。

对于 Philoponus 来说, 倾向是由投影机分配给火箭。”并继续提出“Impetus”的概念。. 他提出, 动物的物体拥有一个内在的 强力或迫使他们移动, 即使缺乏外部力量。根据菲洛波诺斯的说法, 这种冲动是对物体的持续运动负责的, 并且可以解释在自然界观察到的各种现象。换句话说, 运动是由身体的一些属性保持的, 当它被设置为运动时分配。值得注意的是, 对于他来说, 这个概念 **无情的力量** 它也解释了自然的运动, 如自由体落和天空的运动。这将是复兴时期的一个问题。值得注意的是, 菲洛波诺斯用两个不同的表达方式来打动: 动力能力。(**动态**) 金正恩力量 (**能量**). 兩種表達在他的理論中指定一個概念, 接近今天的能量概念, 但它們遠離阿里士多德的潛力和現實觀念。

因此, 菲洛波诺斯被认为是建立一些现代, 更批判性思维和科学分析的基础, 打破一些最错误的方面阿里士多德和柏拉图逻辑通过扭曲他们的理论重力.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

14.4 中世纪和学术主义

中世纪时期看到基督教神学与亚里士多德物理的融合, 通过斯科拉斯蒂主义, 试图用宗教教义合理化自然现象, 但经常缺乏实验性实质。文艺复兴引发了观察和实验的转变, 为科学革命奠定了舞台。像伽利略和牛顿这样的人物是关键的, 牛顿的动作法则和普遍重力法则的表述在科学背景下晶体化了力量的概念。现代物理学已经将这些想法扩展到更全面的理论, 如电磁和量子机械, 进一步改进了我们对力量的理解。

14.4.1 伊斯兰学者

F

14.4.1.1 阿维森纳 (980–1037)

阿布 • 阿里 • 哈萨因 • 伊本 • 阿卜杜拉 • 伊恩 • 西纳, 图。14.2h, (被称为 Avicenna) (980-1037) 重复了亚里士多德的作品, 并开发了一个更复杂的动作理论。他说, 一枚火箭从他的 “移动” **梅尔** 与物体重量相关的数量 (重量) 它有助于运动。因此, 每一个承认的物体 “收获的行为” (**阿尔 · 梅尔**) 从外面必须有某种自然倾斜。**梅尔 · 阿加西** 它是由震动减少的。目前尚不清楚是否 **梅尔** 它还考虑到速度, 在这种情况下, 这实际上是纽顿后来开发的动力概念的早期先驱。因此, 阿维森娜同意投射者向一枚火箭发出强迫, 但与菲洛波诺斯不同, 他认为这是一种暂时的美德, 即使在真空中也会下降, 他把它看作是持久的。需要外部力量, 如空气抵抗力来分散它。

但是, 对于阿维森纳来说, 倾向本身不是一个力量, 而是一个 **移动的力量的工具** 要把自己的行动传达到移动的东西。和 **梅尔** 它是永久性的, 但可破坏的。如同阿里斯托特一样, 阿维森纳分为一个 “天然梅尔” (**梅尔** *Tabīʿī*), 这是自然体落的运动的原因, 以及 “暴力梅尔” (**梅尔 · 卡斯特** *ī*) 是火箭运动的原因。如果没有抵抗, 例如, 在一个空白中, 它会像它产生的动作一样无限地持久。他还说, 空中的一枚火箭不会停下来, 除非它被攻击。(符合牛顿的第一法则。).

14.4.1.2 巴格达 (1080–1165)

F

阿里斯托利亚的另一个批评 “印象的理论” 真主的使者阿布 • 巴拉卡特 • 巴格达迪 (Abu'l-Barakat al-Baghdaadi)[10] , 图 14.2i 谁写的《**古兰经**》《**穆塔伯**》他否认了亚里士多德的想法, 即一个稳定的力量产生统一的运动。他在速度和加速度之间做出区别, 并表明强度与加速度, 而不是速度, 因此预测纽顿的第二法则动作。他说, 移动者引发了强烈的倾向。(**梅尔 · 卡斯特** *ī*) 在移动上, 而这种情况会减少, 因为移动对象自从从移动中远离。

他修改了阿维森纳的理论, 并指出 **梅尔 · 卡斯特** *ī* 它是自我消耗的, 所以在一个空白中可能有一个暴力动作, 这将结束没有外部抵抗。

[10]也被他的希伯来起源名字巴鲁克 • 本 • 马尔卡称为, 在他从犹太教转向伊斯兰教之前。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

14.4.2 乔丹斯 • 德 • 内莫尔 (约 1225 - 1260) 和位置 重力

V

乔丹斯 • 德 • 内莫尔 他是中世纪最重要的机械学家, 在他对重量科学的研究中, **超级示威者** *Ponderum* (与后者密切相关 **理性波德里斯** 分析倾斜飞机, 通过比较 “速度” (移居) 在不同倾向的飞机上重量。他的论点是, 一架飞机上的重量更大。“位置 重力” (**重力**:*Gravitas Secundum*) 因为它在飞机沿着的某个动作上降落得多, 但毫无意义地呼吁虚拟转移, 尽管没有将它们视为这样的。这种定位重力的概念, 根据限制方向有效地分解重力, 是令人震惊的原始贡献。(至少在其明确、有序的形式) 它代表了对有限机械系统的现代理解的一个关键步骤。

14.4.3 中世纪: 巴黎大学

F

中世纪巴黎大学是一家由主要自治团体组成的公司。这不仅适用于其分为四个不同的艺术学科, 神学, 法律和医学, 但是事实的四个国家的艺术学院。在这个可爱的机构中, 布里丹和奥雷斯梅肯定会被打破。

奥雷斯米是一位自然哲学家和神学家, 而布里丹的专业知识仅限于他多年来在艺术学院担任艺术硕士的自然哲學。布里丹几乎专门对亚里士多德的评论。奥雷斯的遗产是完全不同的。他不仅评论了亚里士多德的六个条约, 但他写了几乎两次关于各种主题的许多条约。

14.4.3.1 布里达 (1295-1358)

饰 Jean Buridan (约翰内斯 • 布里达努斯) 改进了理论 **印象** 它提出了一个移动的对象拥有 F



(a) 布里达　　(b) 奥斯卡

图 14.5: 布里丹, 奥雷斯梅

某种力量或冲动, 保持它的运动。与古典的亚里士多德观点不同, 它认为物体只移动, 只要一个力量不断地应用于它们, 布里丹的理论建议, 如果没有外部力量对它进行行动, 物体将继续以稳定的速度移动。(Buridan, 1991). 换句话说, 布里丹引入了无效的概念, 其中一个对象保持其运动状态, 除非它被外部力量攻击。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

他还建议, 空气抵抗部队和重力将逮捕尸体。布里丹还指出, 给一个身体的冲动增加了它的运动速度和物质的数量。. 显然, 我们现在正在接近和接近现代动态概念。与纽顿不同, 这仍然是一个定性描述:

> 放弃投射手的手后, 将被投射者给出的冲动驱动, 并将继续移动, 只要冲动保持比抵抗更强。如果它是无限的, 它不会被反对势力抵抗它或某种东西倾向于反对动作所削弱和腐败。
>
> Buridan, 1991 John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics

至于天堂的冲动, 他写道

> 當上帝創造了世界時, 他以他喜悅的方式將每一個天上的奴隸轉移到他身上。當他把它們推動時, 他對它們的衝動感到印象深刻, 而他沒有再要把它们推動..... 在天體中, 他所感動的衝动後來並不減少或腐敗。因为天体没有倾向于其他运动。没有任何抵抗力, 这种迫害会腐败或压迫。
>
> Buridan, 1971 John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo

因此, 在天体的动作情况下, 冲动是上帝所印象深刻的力量, 导致它们永恒。**循环** 动作。这种冲动的概念有助于描述所有类型的运动: 重体的地面、暴力和自然运动, 以及天体的非物质身体的运动。

布里丹还指出, 印是一种变量品质, 其强度由物质的速度和数量决定。因此, 一个跌倒的身体的加速度可以从它的逐步积累的冲动单位的角度来理解。其中一个重大陷阱 **印象** 理论是, 布里丹认为它是原因而不是动作的结果。(大差异). 尽管有革命性的影响, 但布里丹并没有使用“冲动”的概念来改变机械科学。他不是加利利的先驱, 在其他许多方面仍然是无知的亚里士多德人。

通过引入无情的概念, 并强调实验观察在自然世界的理解中的作用, 布里丹仍然为 16 世纪和 17 世纪的科学革命开辟了道路。

14.4.3.2 奥斯卡 (1320-1382)

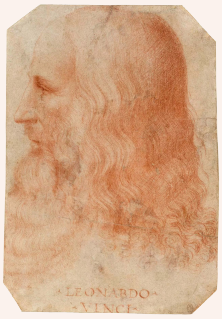
奥斯卡 (§8.2.1) 扩展到布里丹关于火箭动作和冲击保存的想法, 进一步发展了对冲击或相互作用期间可能在身体之间传递冲击的概念。奥雷斯米在数学的背景使他能够以定量观点接近运动问题。他用数学理性来讨论冲动和动作, 为加利利奥和牛顿等人物的后期数学处理奠定了基础。

他的关于亚里士多德和他自己的自然哲学条约的评论在中世纪末和复兴时期被广泛阅读和影响。他的作品有助于传播和普及布里丹和其他中世纪思想家的想法, 包括与冲动和动态相关的想法。

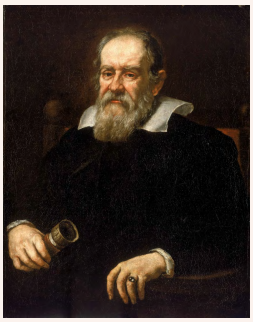
布里丹和奥雷斯梅对冲动理论的贡献在 16 世纪和 17 世纪科学革命的智力基础的准备中发挥了关键作用。从亚里士多德物理学和对自然研究的更实验性和数学上严格的方法的转变, 非常归功于像布里丹和奥雷斯梅这样的人物的洞察力和论点。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

14.5 复兴与科学革命


(a) 莱昂纳多


(b) 贝多芬


(c) 加利利


(d) 凯普勒


(e) 德卡特


(f) 莱布尼兹

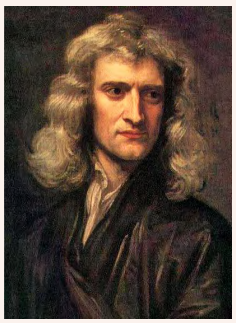

(g) 纽顿

图 14.6: 莱昂纳多、本德蒂、伽利略、凯普勒、德卡特、莱布尼兹、纽顿

14.5.1 莱昂纳多 • 达芬奇 (1452-1519)

毫无疑问, 莱昂纳多, 图 14.6a, (§7.2.1) 他很清楚布里丹的理论, 他肯定有关于力量的概念写些什么。(Vinci, 1938 PDF). F

这就是莱昂纳多的力量定义。

> 我说, 这种力量是一种精神的美德, 一种不可见的力量, 通过意外暴力, 由动作引起, 引入并注入身体, 从他们的自然习惯中被吸引和偏离。给他们一个活跃的生命, 一个美妙的力量; 它迫使所有的创造物改变形状和位置, 它愤怒地走到其想要的死亡, 并将根据原因多样化。慢性使它伟大, 速度使它软弱。它是由暴力产生的, 死于自由。它越大, 它越快消耗自己。它愤怒地追逐反对它的毁灭, 它渴望打败, 杀死它的原因, 阻碍它, 赢得它, 它自杀; 它变得更强大, 通过找到更大的障碍。一切都以愤怒逃到死亡。被强迫, 会阻止一切。没有它, 什么都不会移动。身体出生的地方, 它不会长大, 体重和形状也不会改变。没有任何动机是可持续的。它在疲劳中生长, 在休息中消失。被封锁的身体没有自由。而且经常, 通过动作, 它产生新的力量。
>
> Vinci, 1938 PDF The Notebooks of Leonardo da Vinci

莱昂纳多所定义的是相当模糊的, 或许我们今天称之为动能.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

14.5.2 贝多芬 (1530 – 1590)

约翰尼 • 贝内德蒂, 图 14.6b 修正了成熟的冲动理论, 坚持印象强度单独产生直线运动: F

> ...,[任何] 身体物质的部分, 当任何外部动机力量对它产生印象时, 在其本身移动时, 自然倾向于在直线上移动, 而不是曲折的道路。
>
> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

贝内德蒂使用一个熟悉的例子, 一块石头旋转在一个滑板上, 说循环运动是强迫的, 而不是自然的, 身体“寻找”一条直路一旦释放。

然而, 广为引用的描述石头的漫长路径, 以及声明印象深刻的冲动逐渐不断下降, 不是贝内德蒂。它起源于以前的巴黎教堂, 特别是萨克斯尼亚的阿尔伯特, 谁给了他的 Quaestiones 超级物理版本。他的表述读到:

> 当火箭从滑板上释放出来时, 它走着它的道路, 自然作为它的指南, 从它已经离开滑板的点, 沿着一个线条向循环, 它最后做了。现在是真的, 印象深刻的冲动逐渐和不断下降。
>
> Saxony, 1988 Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis

阿尔伯特的论文强调了贝内德蒂缺席的两个点: 释放的坦根线地质学, 以及由于抵抗而导致的冲动崩溃 - 这两者都是十四世纪巴黎学校的特点。

贝内迪特 (Drake, 1976) 相比之下, 运动速度的增加是力量持续行动的结果, 而自然倾向下降。(**重力**) 保持稳定。在一个重体的背向上移动中, 没有空气抵抗, 印象深刻的冲动只会直接驱动身体, 只要它比本质的下向倾向更强。因为下向趋势是稳定的, 两国之间出现了假设的冲突; 随着印象深刻的冲动减弱, 它们最终平衡, 自然倾向将身体带回地球。贝内德蒂与布里丹不同的问题在上述段落的继续中变得明显:

> 因此, 由于身体的重量而引起的下降倾向, 即时进入, 并与感动的力量相结合, 不允许线长久保持直立, 而是使其迅速变成曲折。因为身体是由两个力量移动的, 一个被强力所影响, 另一个是自然所影响。
>
> Benedetti, 1585 Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber

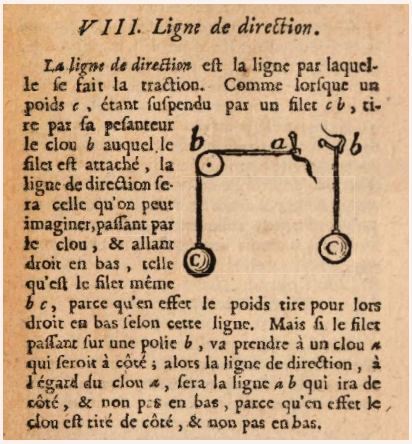
14.5.3 帕迪 (1636–1673)

F

帕迪是武力分辨率和平衡概念的早期先驱之一。他制定了数学技术, 以分析结构的稳定性和机械系统内的力量分配。他还为了解 力量的平行图, 一个地质方法来确定产生的力量在受多种力量的身体上发挥作用。他的工作有助于建立基于力量的数学原则平衡, 并为后续发展在静态领域设置了基础。, 图 14.7.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



VIII. Ligne de direction.

La ligne de direction eſt la ligne par laquelle ſe fait la traction. Comme lorſque un poids *c*, étant ſuſpendu par un filet *c b*, tire par ſa peſanteur le clou *b* auquel le filet eſt attaché, la ligne de direction ſera celle qu'on peut imaginer, paſſant par le clou, & allant droit en bas, telle qu'eſt le filet même *b c*, parce qu'en effet le poids tire pour lors droit en bas ſelon cette ligne. Mais ſi le filet paſſant ſur une polie *b*, va prendre à un clou *a* qui ſeroit à côté; alors la ligne de direction, à l'égard du clou *a*, ſera la ligne *a b* qui ira de côté, & non pas en bas, parce qu'en effet le clou eſt tiré de côté, & non pas en bas.

图 14.7: 平衡 的概念 Pardies, 1710

14.5.4 西蒙 • 史蒂芬 (1548–1620)

F/V

在力量

F

西蒙 • 史蒂芬, 图 14.8 荷兰数学家, 以水静态学的纪律为基础, 是第一个确定了 **平衡** [11] 武力, 也被称为 **力量的平行图**.

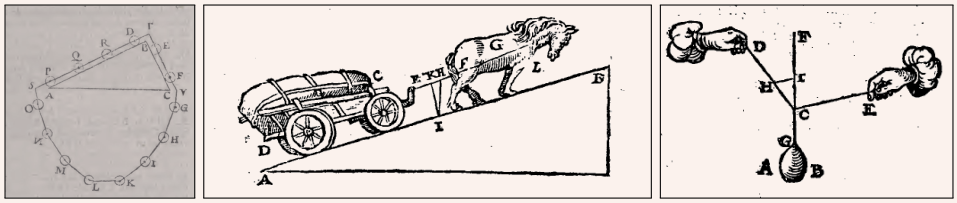


图 14.8: 西蒙 • 史蒂芬 (1548 – 1620)

他的治疗 (Stevin, 1586) 在静态上覆盖了重力中心的确定, 静态应用 (**威格达特**) 和水素的 (**水重**), 图 14.9. 有趣的是, 在这篇文章中, 他还重申了对德语语言的卓越性的信念。他说, 荷兰语是科学用途的最佳语言, 因为它结合了简短与清晰度。[12].

史蒂芬 (Miller, 2017) 比较由两个支持重量的轴承所执行的力量与需要支座的强度相匹配, 单一垂直轴承。在他的描述中, 图 14.10, 重量 AB 它可以通过单一的线索支持。CF, 在哪

[11] 请注意, 人们常常错误的是, 纽顿的第三法则..... **对于每个行动, 有一个平等和相反的反力**提供为两个力量的平衡, 平等和反对方向行动和反力。但法律实际上说, 如果一个身体 A 施加力量 F_a 在身体上 B 然后身体 B 要有平等和相反的力量。F_b 在身体上 A. 没有平衡因为力量 F_a 和 F_b 它在不同的身体上, 一个在身体上。A 其余的身体 B.

[12] 事实上, 多年来在美国, 毕业生 - 特别是化学和物理学的学生 - 被要求学习德语。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿


DIALECTIKE
OFTE
BEVVYSCONST.
Leerende van allen saecken recht ende conſtelick Oordeelen, Ock opcnende den weech tot de alderdiepſte verborghentheden der Natueren.
Beſchreven int Neerduytſch door Simon Stevin van Brugghe.
Tot Leyden,
By Chriſtoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.
Fig. 5
DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.
Tot Leyden,
Inde Druckerye van Chriſtoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
CIↃ. IↃ. LXXXVI.
Fig. 6
292
GEORGE EASTON

图 14.9: 史蒂芬的主要出版物 (Stevin, 1586)

里 C 是重量中心的重力, 或由两个字符串 CD 和 CE. 在后者, 由绳子执行的力量可以通过从绳子到垂直的平行绘制找到: 如果需要的总强度为支座重量与一个绳子。(是的,The "整个普里斯姆的重量") 是相对的 CI 然后, 组件的力量向 D 是相对的 CH, 在哪里 H 通过绘制线路而发现 HI 与其它组件的力量平行向 E. 同样, 並描繪另一方的平行, IK, 给出与向导向的力量相对的强度 E 即 CK. 兩個組成力量, 均等於平行表的側面, 相同的效果與單一力量均等。CI 是 diagonal。

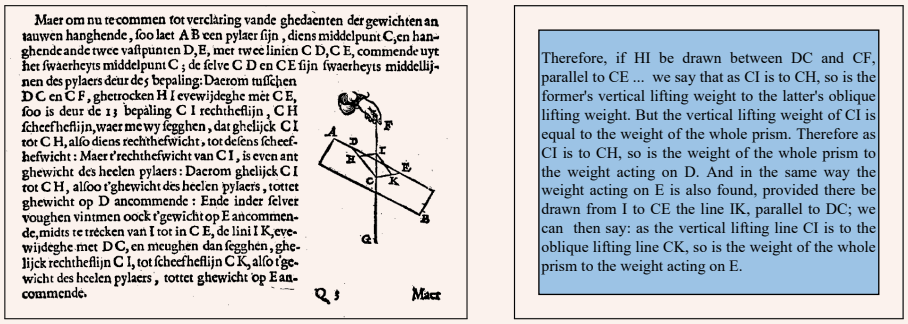

Maer om nu te commen tot verclaring vande ghedaenten der gewichten an tauwen hanghende, ſoo laet AB een pylaer ſijn, diens middelpunt C, en hanghende ande twee vaſtpunten D, E, met twee linien C D, C E, commende uyt het ſwaerheyts middelpunt C; de ſelve C D en C E ſijn ſwaerheyts middellijnen des pylaers deur de ſ bepaling: Daerom tuſſchen D C en C F, ghetrocken H I evewijdeghe met C E, ſoo is deur de 13 bepaling C I rechthefliin, C H ſcheefhefliin, waer me wy ſegghen, dat ghelijck C I tot C H, alſo diens rechthefwicht, tot deſens ſcheefhefwicht: Maer t'rechthefwicht van C I, is even ant ghewicht des heelen pylaers: Daerom ghelijck C I tot C H, alſoo t'ghewicht des heelen pylaers, tottet ghewicht op D ancommende: Ende inder ſelver voughen vintmen oock t'gewicht op E ancommende, midts te trecken van I tot in C E, de lini I K, evewijdeghe met D C, en meughen dan ſegghen, ghelijck rechthefliin C I, tot ſcheefhefliin C K, alſo t'gewicht des heelen pylaers, tottet ghewicht op E ancommende.
Q 5
Maer
Therefore, if HI be drawn between DC and CF, parallel to CE ... we say that as CI is to CH, so is the former's vertical lifting weight to the latter's oblique lifting weight. But the vertical lifting weight of CI is equal to the weight of the whole prism. Therefore as CI is to CH, so is the weight of the whole prism to the weight acting on D. And in the same way the weight acting on E is also found, provided there be drawn from I to CE the line IK, parallel to DC; we can then say: as the vertical lifting line CI is to the oblique lifting line CK, so is the weight of the whole prism to the weight acting on E.

图 14.10: 史蒂文的描述一个由一个或两个相关术语子支持的身体; (Stevin, 1586) 和 (Miller, 2017)

尽管出现, 但这不是一个真正的平行规则的力量。只有数量的尺寸计算; 指向是给出的 **初步**. 至关重要的是, 斯蒂文并不表明组件力量必然会以某个特定的方向产生一个结果 垂直。他只是假设这将是这样的。将直接信息投入到建筑中, 但不从建筑中提取。因此, 最好的情况下, 这是一个规则, 将一个特定的规模大小分成另两个; 力量不被视为指向大小, 或 **维克特**.

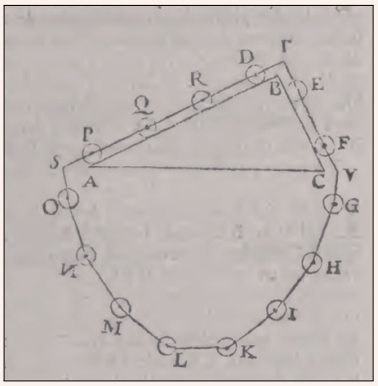
然而, 斯蒂文证明, 在一个身体上行动的力量可以被地质形态所代表, 并且由其添加来确定产生的力量。这个原则提供了数学框架, 分析对身体的多重力量的影响, 并为纽顿运动法则的后续发展奠定了重要基础。

也提到 §14.5.4 更多关于斯蒂文的标志性处理。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

克洛特克朗和虚功

斯蒂芬与他的著名人物做出了决定性的贡献 **克劳特克朗** (w 的罪恶) (w 的罪恶) 1586 年示威 (Stevin, 1586 PDF). 一连串平等空间的球被拉在三角相关术语上 (形象 14.11) 它必须在平衡中, 否则它将是永恒的动作　斯蒂文认为显然不可能。从此, 他得出倾斜飞机的法则。史蒂文对这个证据如此自豪, 以至于这张图像在他的书籍的封面上出现了标题。“奇迹是奇迹” (魔法不是魔法).




DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.
TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
CIↃ. IↃ. LXXXVI.

图 14.11: 史蒂芬的 **克劳特克朗** 示威。

如同三角形的右边与左边之比，左边球的平衡重量也成相同比例，天下之道, 必定是真理的。

天花板。设 ABC 为一直角三角形，其平面垂直于地平线，底边 AC 平行于地平线；在边 AB 上放置球 D，且 AB 为 BC 的两倍；在 fijde BC een cloot E, euewichtich ende euegroot met den cloot D.

是的, 我放心。天下之人, 天下的天下, 天上之人。天花板 D。

特布里特。我們的頭蓋骨是由三角大道 (ABC) 和 Verthien Clooten,Euegroot。euewichtich, ende euewijt van malcandcren als E,F,G,H,I,K,L,M,N,O,P,Q,R,D, al ghefnoert an een lini, 天下之人, 天下的天下, 天上之人。

特斯拉。四、四、五、五, 四、三、四, 四, 五, 五、四等, 四等。天下之人, 天下不行, 天上不行。(莫格希利克 • 瓦尔) 四 D、R、Q、P。八个 clo 子, 满满的相关术语子, ende d’ander fes rijfen。

天下之人, 天下的天下, 天下的天下。以人为主, 以人為主; 以人是以人, 以 人为主。天下之人, 天下的天下, 天上之人。

因此，正如线段 AB 与 BC 之比，球 D 与球 E 也具有相同的比例。

正如三角形的右侧是左边, 那么 “站重” 左边的空间到右侧站着的球体重。

注: 让 ABC 成为一个三角形, 其飞机对地平线是偏向的, 基地 AC 与地平線平行。在 AB 侧面, 即 BC 双重的, 让有一个 D 分支; 在 BC 侧面的一个 E 分支, 相当于 D 的重量和大小。
需要: 证明它作为 AB (2) 到 BC (1) 因此, 在 E 领域的固定重量是与固定重量的固定重域 D。

准备: 让我们在三角形 ABC 周围, 做一个四十个领域的草坪, 大小和重量均等。空间, 标签为 E、F、G、H、I、K、L、M、N、O、P、Q、R、D, 所有线路都通过它们的中心, 以便它们可以转向这些中心.....

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> **证据:** 如果四个分支 D、R、Q、P 的站重不等于两个分支 E、F 的站体重, 那么一或者另一边会更重.....
> 八个圈子会向下旋转, 其他六个将上升。
> 但是, 如果是這樣的, 的傷口會再次向左轉動, 向右升起; 因為原因總是是同样, 这将永远持续下去, 而各个领域本身就会产生一个永恒的动作, 这是虚假的。
> 因此, 正如 AB 线到 BC 一样,D 是 E 线的。
>
> Stevin, 1586 De Beghinselen der Weeghconst

史蒂芬所说的话:

- **倾向飞机的法则 (机械优势).** 为了无情的接触, 力量 (或 “有效重量”) 需要沿着一个倾斜是比例的倾斜长度: 在斯蒂文的评论,

$$\frac{D}{E} = \frac{AB}{BC},$$

  越长, sl (同等高度) 需要的拖动越小。
- **现代相同的公式。** 為重量 W 在一个角落的倾斜 θ 长度 L 和高度 h,

$$P = W \sin\theta = W\frac{h}{L},$$

  因此, 两种不同高度的拉姆需要与其长度相反的比例的力量。
- **概念链接到 “虚拟” 理性。** 史蒂文以矛盾为主: 如果力量不平衡, 系统会围绕一个封闭的圈子运行, 并产生永恒的运动。由于这是不可能的, 网络驱动趋势必须在平衡中被取消　后来的虚拟工作和虚拟部署论点的亲密先祖。

史蒂文可能认为这种衍生物是治疗中最重要的, 这将解释为什么 克劳特克朗 看起来像一个标题页面 Vignette (形象 14.11).

14.5.5 加利利 (1564-1642)

加利利奥 Galilei , 图 14.6c 它在机械史上处于一个关键的结合之处。他的贡献分为两个相互相关的领域: 最终将取代冲动理论的无效概念, 以及预测后来的基于能量的机械平衡的原创虚拟工作论。

從 Inpetus 到 Inertia

在他的 数学演讲和演讲, 关于机械学的两个新科学 & 地方运动 (Galilei, 1638) 加利利奥启动了一个现代的动力概念, 以冲动为一个效果和运动的测量作为重量和速度的功能。他的飞机和落体的实验导致他制定了无效的原则, 这表明一个对象将保持其运动状态　无论是在休息中还是在不断的速度上移动　除非外部力量采取行动。这个原则挑战了亚里士多德的观点, 物体在不受外部影响时自然会休息, 并为牛顿的第一条动作法则提出了基础。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

让我们记住, 冲动的理论意味着在没有力量的情况下, 一个对象会来休息; 无情的概念是不明白的。加利利奥自己的言语标志着过渡:

> 我已经注意到, 物理身体有倾向。向某些动作, 如重体向下, 哪个动作以其内在的财产为主, 并且没有需要特殊的外部移动, 每当它们不被阻止某些障碍。但是, 在其他动机中, 他们有一个反复, 如同重体向上移动, 因此他们从未以这种方式移动, 除非被暴力扔掉。通过外部移动。最后, 他们的一些动作它们是无关紧要的, 像重体一样向水平运动。[a] 到他們沒有任何傾向, 也沒有偏見。因此, 除去所有外部障碍, 重体与地球相集中的区域表面将是无关紧要的。休息或向任何地平线移动。它将留在曾经被放置的状态中。即, 如果放置在安静的状态, 它将保留它; 如果向西移动, 例如, 它将保持在这个运动中自己。一艘船, 一旦经过安静的海洋的一些冲动, 将不断地环绕我们的世界, 从来没有停止..... 如果..... 所有外部障碍可以被消除。
>
> Galilei and Drake, 1990 *"Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)"*
>
> [a] 对于加利利, "地平线" 这意味着一个身体的运动, 即 不 向或远离地球的中心。

加利利奥首次引入了内心的概念。[13] 我们注意到, 它开始于 **循环性内心** (天体的身体), 然后扩展到船只走 **周围** 这个世界。不幸的是, 没有直接、明确的提及 **线性内立**虽然它可能肯定是从观察船的航行中得出的结论 (假设沿着一个直线观察者). 这就应该等到纽顿。简而言之, 加利利奥从 *IMPETUS* **机械到经典的内向** 机械

值得一提的是, 加利福尼亚后来 (in 1632) 得出结论, 基于这种初始的无情假设, 不可能说一个移动对象和一个静态对象之间的区别, 没有任何外部参考来比较它..... 一项爱因斯坦原则后来会被包容。雖然非常不可能, 但他直接受到伽利略的啟發:

> 拯救。因此, 我们仍然坚持不动的想法, 除非我们的脚带我们。
>
> 你所说的是真实的, 亲爱的 Simplicio, 如果你看到的对象在动作中, 而你仍然保持静态观察它。但是, 如果你們在水井裡, 當水井和你們一同被地球旋轉所帶走的時候, 你們就看不見這一點一小時或一千天。难道, 在永恒中, 你也必被水瓶的口所征服吗? 在这种情况下, 地球的移动或不移动对你采取行动的方式, 不能从水井的口中得到认可, 而是从某个不同的物体中得到认识, 而不是分享同样的动作状态 或者我应该说: 休息的。
>
> Galilei, 1632 "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

机械的黄金规则

V

加利利奥除了在内心工作之外, 还将机器的效率与力量行动的距离相连, 他以预测后来的虚拟工作理性的方式这样做。. In **机械** (Galilei, 1594) 他对机械工具提出了一般限制。没有任何设备能够真正增加力量, 而无需补偿速度损失。(与此同时, 随着时间的增长). 他的 表述 是明确的:

[13] 对无情思维的先驱在早期印第安传统中出现; 这一点是, 加利利奥给出了一个不寻常明确和物理上有理由的说法。(首先, 在圆形/水平形式) 它是系统地使用的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> 可 è，使用这些机械所获得的力有多少，就会在时间和速度上损失多少 à.
>
> 也就是说, 通过他们的手段获得的任何东西都以同样的时间和速度失去。(速度).
>
> Galilei, 1594 Le mecaniche

这种补偿原则　后来在文本书中流行, 如 **机械的黄金规则** (一) 任何有效的利润必须由相应的速度损失支付。(或同等, 增加移动力量行动的距离和时间。).

加利利奥立即注意到这份声明可能看起来悖论, 因为 (和相关安排) 可能增加力量 **没有** 需要更长的移动器的行程, 而不是移动身体:

> ... senza che il motore si muova per più 长途旅行, 移动。
>
> 没有移动器走过比移动身体更长的旅程。
>
> Galilei, 1594 Le mecaniche

换句话说, 他的分析框架是倾向的飞机和简单的机器在相应的角度。“旅行” (**旅行**) 移动功率和荷载; 然而, 他的解释仍然在时间语言和速度中包含。[14]

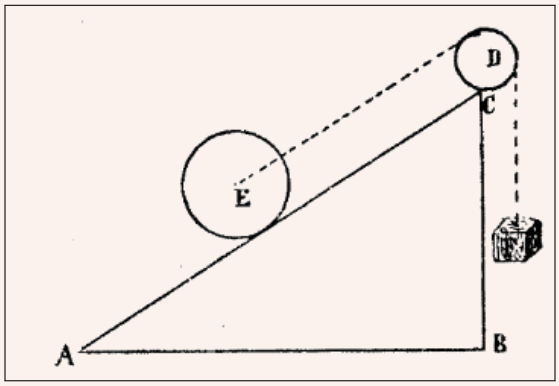


图 14.12: 加利利奥的飞机研究 (Galilei, 1594)

为了解决悖论的出现, 加利利奥回到倾斜飞机。并在地质控制的环境中比较动作。重要的是, 不只是指南沿着的距离, 而是垂直对重力的变化。现代笔记 (理想化, 无缝) 增加一体重 W 通过高度 h 沿着飞机的长度 L 需要力量

$$P = W\,\frac{h}{L} = W \sin\theta,$$

因此, 该产品 $P\,L$ 平等 $W\,h$. 机器只通过增加距离来减少所需的力量。(因此, 在相似的时刻,) 通过它, 使用的力量必须采取行动。加利利奥在速度和时间方面表达了这一转折点, 而不是“工作 ,” 但内容是相同的: **一个人不能在没有支付的情况下获得机械优势。** (Galilei, 1594).

[14] 与后期基于工作的描述相反, 加利莱奥经常通过速度和时间的电影比较来争论, 这是一种更接近以前的框架。(尼古丁前) 关于动机的讨论。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这个思维线与西蒙·斯蒂文的早期倾向计划论点相匹配, 基于 **克劳特克朗**史蒂文从永恒运动不可能的平衡, 从这种平衡中恢复了统治倾斜板的比例性。加利利奥从机器的角度达到相同的物理限制, 强调力量和距离之间的必要差距。(因此, 时间) 由此, 力量行动。斯蒂文和加利利奥一起展示了两个补充的路径, 以一个原则为标准, 后来在虚功的语言: 机器不能创造机械优势而没有准确的补偿。“付款” 在动作中 (Stevin, 1586; Galilei, 1594).

因此, 加利利奥的 “黄金规则” 是后来的虚拟位移和虚拟工作格式的亲密先祖: 对于一个理想的机器在平衡中, 任何可接受的小动作都被限制, 以便应用力量的净工作取消。. 后来, 作家将以更有系统的解析语言重复相同的异常, 但中央洞察力已经存在于加利利奥的机械写作中, 并再次被视为 **演讲** 在简单机器和力量传输的更广泛背景下 (Galilei, 1638).

数学限制与历史背景

伽利略缺乏卡特西亚分析地质和计算的数学框架, 纽顿后来将命令。虽然他的当代凯普勒制定了他著名的三个法则, 但加利利奥的数学贡献仍然有限, 在自然界往往是虚思主义或简化。例如, 加利利奥试图找到中性轴 (§7.2.2) 证明这个限制。因此, 毫不奇怪的是, 加利利奥没有具体制定与无效有关的方程式　这必须等待纽顿。

加利利奥, 被认为是 “物理学的父亲” 或 “实验机械师的父亲,” 成功地赢得了哥本尼亚主义的冠军, 同时身体接近教皇 (保留亚里士多德的地质观点). 因此, 值得注意的是, 当加利利奥对他的支座对宇宙的直观进行审查时, 他的当代乔丹·布鲁诺 (1548–1600) 遇到了更艰难的命运。在加利利奥被迫在罗马天主教会面前重复他的直觉信念时, 意大利哲学家和多米尼亚牧师布鲁诺遭受了迫害, 最终因他对直觉主义和其他由宗教当局认为遗传性的宇宙理论而被处决。

14.5.6　凯普勒 (1571–1630)

讨论希洛克中心宇宙的出现, 超越了本书的范围。然而, 离开地质中心的转变引发了对力量和冲动概念的重新审查, 这些概念是本章的重点。

快速提醒: 巴奇的工作涉及大量的观察收集, 仔细记录天体的运动, 并将数据编写到表中。尽管他的实验方法的准确性, 但这些观察缺乏一致的数学框架或物理解释。[15]. 缺乏全面的理论基础意味着巴奇的观察仍然与天体机械的更深入了解不联系。

这是约翰内斯·凯普勒, 图 14.6d 最后, 他提供了这些观察所需要的数学模型, 与他的行星运动法则。然而, 对基本原则的完整解释不得不等待牛顿和他的普遍重力理论的突破性工作。(Kepler, 1609). 简而言之, 凯普勒是第一个寻找 **量子力定义**让我们看看如何。

但首先, 我们应该注意到凯普勒是双重的: 在同一作品中, 力量的概念有时被称为灵魂, 有时也被称为物理, 几乎机械的身体量。显然, 即使他, 也一直在争取自己从亚里士多德中脱颖而出。在他的 **神秘宇宙** *1* 凯普勒仍然保持着天堂的传统力量概念, 作为灵魂动画身体并指导他们的正确动作。

[15]这类似于进行大量的物质测试, 限制我们自己在分布表中排列它们。缺少的是一个超级数学组成模型来解释其基础现象。

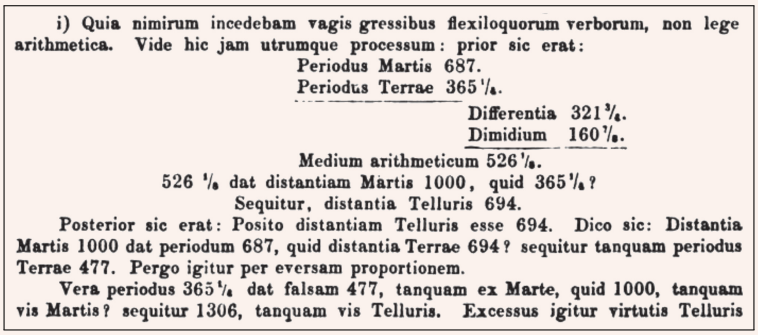
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿
F

凯普勒想到了重力力量的普遍性质, 并称之为重力 “被动性” 而不是活动。他到达了与某些月球位置的偶然时期的结论。由于这些研究, 有些人提出了月亮引起的理论。凯普勒同意这些对月球理论的支持者, 但在一个重要的意义上普遍化了这些发现: 海洋被月球吸引得更重。包括海洋在内的物体被地球吸引。图 14.13.

凯普勒在他的第一次天文学处理中寻找动态解释行星运动 **新天文学**. 在本书的介绍中, 他写道:

> 这里是重力的真实教义。重力 是与相关的身体之间的相互关心, 其倾向于团结和结合它们。(什么样的磁力学) 當地吸引石頭時, 而不是石頭向地球傾斜。即使我们把地球的中心放在世界的中心, 它不是要把重体带到这个世界的中心, 而是要把它们带到周围的身体的中心上, 即地球的中心。因此, 无论地球在哪里被运送, 重体都因其动画的教义而被携带。
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologia, seu physica coelestis

事实上, 在同一方面 **新天文学** (1609) 他提到发现, 一个星球的轨道是 “一条垂直路径, 完美精密”. 他表示, 他通过执行 “大多数工作证据和 ... 计算在大量的观察”. 他还明确表示, 他的成功是基于拒绝普托利米的态度, 他认为太阳的中间运动, 而不是它的显而易见运动。根据凯普勒的说法, 彼得利米觉得这两种动作之间不会有明显的差异, 所以他选择了以前的计算方法。哥本哈根 (1473 – 1543) 和布拉格 (1546 – 1601) 彼得利米跟随了, 但对于凯普勒来说, 这不是进去的途径。在他的早期研究中, 他已经指出应该考虑到显而易见的动作, 也就是说, 参考点应该是太阳的真实身体。但是, 这还不够。对于凯普勒来说, 计算与观察的成功匹配是不够的; 在观察中隐藏的模式必须能够获得物理解释。这种模式应该符合三个分开的领域, 这些领域共同构成了凯普勒对天文学所需改革的框架: 地质、物理和观测。(Hon and Zik, 2009).



i) Quia nimirum incedebam vagis gressibus flexiloquorum verborum, non lege arithmetica. Vide hic jam utrumque processum: prior sic erat:

Periodus Martis 687.
Periodus Terrae 365 1/4.
Differentia 321 3/4.
Dimidium 160 7/8.
Medium arithmeticum 526 1/8.

526 1/8 dat distantiam Martis 1000, quid 365 1/4?
Sequitur, distantia Telluris 694.

Posterior sic erat: Posito distantiam Telluris esse 694. Dico sic: Distantia Martis 1000 dat periodum 687, quid distantia Terrae 694? sequitur tanquam periodus Terrae 477. Pergo igitur per eversam proportionem.

Vera periodus 365 1/4 dat falsam 477, tanquam ex Marte, quid 1000, tanquam vis Martis? sequitur 1306, tanquam vis Telluris. Excessus igitur virtutis Telluris

图 14.13: 凯普勒计算 (Kepler, 1855)

值得注意的是, 凯普勒从未提到 (现代概念) 在他的写作中, 他是无情的。观察到星系速度在周围是最高的, 在周边是最低的, 凯普勒相信太阳在这种现象中的作用基本上是物理的。**比精神更有机**.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> 如果你替代这个词“灵魂”这个词“力量”你們有原则，在那裡基於火星等的天地物理學。以前，我相信行星运动的原因是灵魂，因为我被 J 的教义所吸引。C。关于摩托车智能的 Scaliger 但是，当我意识到这些动机会导致距离太阳的减轻时，我得出结论，这种力量是身体上的东西，如果不是那么合适，至少在某种意义上。
>
> Kepler, 1609 Astronomia nova: Aitiologıa, seu physica coelestis

在那里我们有它!

最后，他的作品预测了重力法则的发现，因为他认识到行星上的力量必须是一个放射性，吸引力的力量集中在太阳上。这是从亚里士多德的强力概念作为一个有意义的阻力的一个显著退出。

14.5.7 德卡特 (1596–1650)

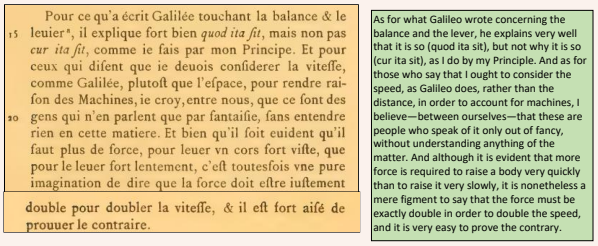
雷内 • 德卡特 (René Descartes) 为力量概念和虚功原理做出了关键贡献。凯普勒在哪里“机械，”提交结论 (和方程式) 从观察中，德卡特　让我们不要忘记他是伟大的哲学家。(*Cogito Ergo Sum* 加密货币)• 采取更有投机性的方法。他的概念解释了基于哲学原则的身体如何移动和互动，尽管他的方法缺乏凯普勒的工作数学形式主义和预测力。

有趣的是，天主教德卡特在荷兰度过了大部分生活，他加入了荷兰新教国家军队作为雇佣兵，并研究了西蒙 • 斯蒂文建立的军事工程。这些是荷兰黄金时代的年代，其文化开放性与法国更压迫的环境相矛盾。

更多关于 Descarts 的文章 §6.6.3.

力量与冲动

德卡特 [16] 力量概念的贡献是提出替代 ontological[17] 在这一理论框架中，传统的冲力概念已无容身之处，见图 14.14.


Pour ce qu'a écrit Galilée touchant la balance & le leuier*, il explique fort bien *quod ita ſit*, mais non pas *cur ita ſit*, comme ie fais par mon Principe. Et pour ceux qui diſent que ie deuois conſiderer la viteſſe, comme Galilée, plutoſt que l'eſpace, pour rendre raiſon des Machines, ie croy, entre nous, que ce ſont des gens qui n'en parlent que par fantaiſie, ſans entendre rien en cette matiere. Et bien qu'il ſoit euident qu'il faut plus de force, pour leuer vn cors fort viſte, que pour le leuer fort lentement, c'eſt toutesfois vne pure imagination de dire que la force doit eſtre iuſtement double pour doubler la viteſſe, & il eſt fort aiſé de prouuer le contraire.

As for what Galileo wrote concerning the balance and the lever, he explains very well that it is so (quod ita sit), but not why it is so (cur ita sit), as I do by my Principle. And as for those who say that I ought to consider the speed, as Galileo does, rather than the distance, in order to account for machines, I believe—between ourselves—that these are people who speak of it only out of fancy, without understanding anything of the matter. And although it is evident that more force is required to raise a body very quickly than to raise it very slowly, it is nonetheless a mere figment to say that the force must be exactly double in order to double the speed, and it is very easy to prove the contrary.

图 14.14: 雷内 • 德卡特 (1596–1650)

[16] 更多关于 Descartes 的文章 §6.6.3

[17] 文学: 哲学的分支，涉及存在、存在或现实的性质。在更简单的意义上，它处理了关于事物基本上是什么问题，它们是如何存在的，以及它意味着什么东西存在。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

德卡特的概念的冲动主要集中在地球上的身体的运动, 而不是天体。它更关心解释地球运动, 如火箭的运动, 而不是行星的轨道运动。他的方法是定性, 用来解释运动的持久性而不是提供精确的数学理论。

在他的 **哲学的原则** (1644) 德卡特说, 上帝是 “动作的普遍和主要原因” 他保留了他最初在宇宙中创造的动作和休息的总量, 以他的方式。“普通的竞争。” 后来, 德卡特解释说, 上帝保留了物质世界。“以同樣的行為, 並根據同樣法律, 如他第一次創造它時。” 在 **原则**神的创作行为与他的保存行为的识别, 用来证明上帝引导那些由冲突所产生的移动转移, 保留了他最初创造的动作和休息的总量。(Schmaltz, 2003).

根据德卡特的说法, 宇宙充满了所谓的物质。“埃特里,” 而这个乙烯一直在不断的运动中, 形成滑板或相关术语虫。包括太阳、行星和恒星在内的天体被这些涡旋带走, 就像流动中的物体一样:

> 但我希望你现在考虑到这个地球的重力也就是说, 它是把所有的部分团结在一起的力量, 并使他们都倾向于自己的中心, 每个人多或少根据它們是多或少大而堅固的; 它們不僅是一樣, 而且由只有在這裡, 那個小天地的部分, 它周圍, 旋转的速度比自己做得更快, 周围的中心也倾向于更有力量, 以便从中撤退, 因此把他们推回那里。
>
> Descartes, 1927 Selections

在这里, 德卡特试图表明, 形成大相关术语的更大粒子在其中心位置的地球不断向周围转动, 因为它们的大量; 地质物质, 紧缩在巨大的圆圈。不能如此容易地向外 压力 产生, 因为这种乙醇物质 (Jammer, 1957 PDF).

虚拟移动和坦根建筑

V

根据斯蒂文的地质观点, 德卡特为虚功原理带来了前所未有的清晰度, 将其从比例规则转化为所有静态的基础。他的贡献, 保留在他广泛的邮件中 (Descartes, 1898 PDF), 代表着一个决定性的概念进步: 认识到只有 **无限的** 转移问题, 而这 **空间**不是速度 - 是机械优势的正确测量。

基本原则 (1637). 向 Christiaan Huygens 写信 1637 年 10 月 5 日, 伴随他的短暂的处理。**用这些工具来解释, 可以用微小的力量举起重大的负担。** 德卡特以令人惊叹的清晰度表达了基本原则:

> 所有这些机器的发明都基于一个原则, 即同样的力量可以升力重量, 例如 100 英镑, 高达两英尺, 也可以升力, 重量 200 英镑高达一英尺。或重量 400 公斤, 高达一英尺半, 等等等, 只要它适用于他们。
>
> Descartes, 1898 PDF Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Huygens, 5 October 1637, AT I, 435–436

這表達了貨物產品的保留, 通過垂直轉移 - 超形相似於亞里士多德的比例法則, 但有關的差異: **没有时间或速度的参考**. 和 “力量” 德卡特说, 这不是一场即时的努力, 而是一场 **行动**

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

通过产品测量的重量和高度。正如他以后解释的那样, 这项行动 “兩個尺寸,” 与需要的力量不同, 仅仅是保持一个重量在休息时, 这只有一。

无限的地质学 位移 (1638). 德卡特在一封令人惊叹的信中向梅森纳提出了他的原则的全部影响。1638 年 7 月 13 日。在这里, 他提出了决定性的概念。**初步动作** “运动的开始” 并展示了如何将他的原则应用于被阻止在曲折的道路上移动的身体。

关键洞察力早在信中出现:

> 从此显然得出结论, 每个身体的相对重量, 或者什么是相同的东西, 必须用到支座它的力量, 并防止它在某个位置下跌时, 必须由 **运动的开始** 支持的力量要做, 要么举起它, 要或跟随它, 如果它降落。因此, 这个运动所描述的直线和这将标志着身体在中间接近地球中心的比例是相同的, 它的绝对和相对重量之间。
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 228–229

这个段落的几个特点值得强调。首先, 这个句子 “运动的开始” (**运动的开始**) 德卡特的信号不关心终极的转移, 而是无限的转变 一个点上的限制地质, 而不是通过可测量的距离的路径。其次, 他使用条件性情绪。(“**要做的事情**,” “**将描述**”) 表明, 我们不考虑真正的迁移, 但 **潜力** 这些人。这打开了对概念的门。**虚拟性** 此后, 约翰 • 伯诺利就这样解释了。

几行后, 德卡特明确了他的理性无限的性格:

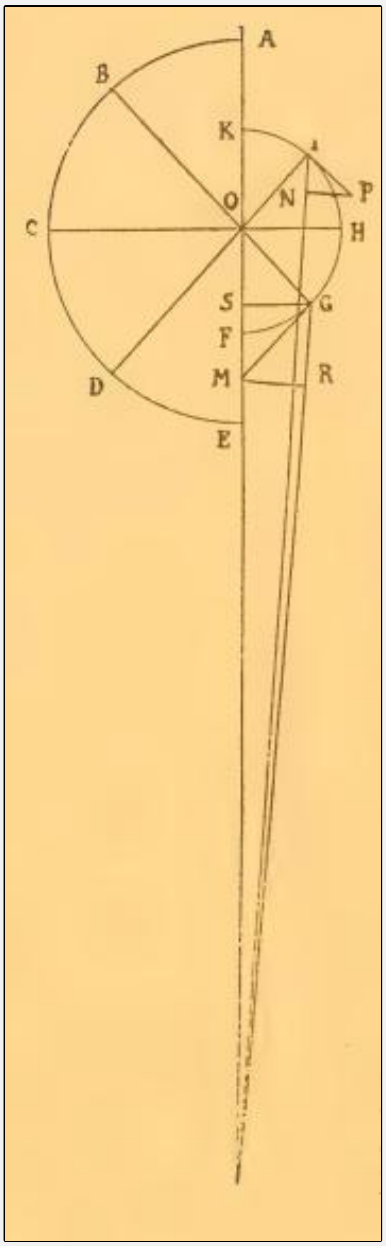
> 注意我说的 **开始下载**而且不只是降落, 因为只有降落的开始才需要考虑。
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 233

这是一个决定性的声明。重要的是不是终极运动, 而是无限的动作。**开始** 动作的。

楼梯和坦根建筑。 德卡特通过三个例子描述了他的原则: 相关术语, 倾斜的飞机, 和绳子。举起的例子特别重要, 因为它表明如何应对这些强迫运动在曲线路径的限制。完整的通道值得引用, 因为它代表了前拉格兰静态最清晰的曝光之一:

> **例子 3 - The Lever。**

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



让 *CH* 當時的支持下, *O* 以这种方式, 当它升高或下降时, 终结 *C* 描述半循环 *ABCDE* 而结局 *H* 半循环 *FGHIK* 哪个半循环 *O* 是中心。除此之外, 不要考虑它的厚度或重量, 但要把它视为一个数学直线, 其中点 *O* 谎言 现在注意到, 虽然它移动的力量或力量描述了整个半循环。*ABCDE* 沿着这条线行动 *ABCDE* 雖然重量 (我想在另一端) 也描述了半圆。*FGHIK* 然而, 它并没有被这个曲线的长度提升。*FGHIK* 但是, 只有直线的长度 *FK*. 因此, 这种重量移动的力量与其重量的比例不应以两圈直径或两周围之间的比例来衡量。但更是在第一的周围和第二的直径之间。

更要考虑的是, 这种力量不一定是如此之大, 以便在接近时移动绳子。*A* 或近 *E* 就像它接近的时候 *B* 或近 *D* 既不那么美好, 那是靠近 *B* 或近 *D* 就像它接近的时候 *C*. 原因是体重在这些位置上升较少。这很容易看到, 假设线 *COH* 与地平线相匹配, *AOF* 要把它切成右角, 一个人拿着点。*G* 同等距离点 *F* 和 *H*, 而这一点 *B* 同等距离点 *A* 和 *C* 但是, 当他引导 *GS* 与地平线相匹配, 一个注意到线 *FS*, 这标志着这个重量在线上行动时增加的程度 *AB* 它比线路小得多 *SO*, 这标志着它在线上行动时上升的程度 *BC*.

现在, 要准确地测量这个力量在曲线的每个点上应该是什么。*ABCDE* 要想, 它在那里以同样的方式行事, 就像它在圆形倾斜的飞机上拖着重量一样; 而这个圆形的每一个点的倾斜。(或 Spherical) 飞机必须通过触摸循环的直线测量。例如, 当权力在 *B* 要找出它必须对重量的比例, 那时在 *G* 要把坦根拉出来。*GM* 另一条线从点 *G*, 如 *GR* 它向地的中心直伸, 然后从点 *M* 以意志在线上 *GM* 德拉 *MR* 右边的角落 *GR* 要注意的是, 这个体重的重量在 *G*, 是要在那个地方所需要的力量, 以保持它或沿着循环移动它。*FGH* 如同线 *GM* 是为了 *GR*. 因此, 如果线 *BO* 假设线路是双重的 *OG* 此时此刻的力量 *B* 要在这个时候才有重量。*G* 一半线的 *GR* 到整个线路 *GM*; 如果 *BO* 和 *OG* 是平等的, 这种力量必须在这个重量作为整个线 *GR* 到整个线路 *GM* 等等。

同样, 当力量在 *D* 要知道那时的重量是多少。*I* 重量, 一个人必须绘制坦克 *IP* 而直线 *IN* 到地中间的中心; 从 *P*, 在意志上在坦根上, 绘制 *PN* 右边的角落 *IN* 以便在线之间的比例 *IP* 一半线 *IN* (在案例中 *DO* 被定位为双重 *OI*) 相应于重量和必须在点上的力量之间。*D* 要移动它。对于其他人来说也是如此。

现在, 我觉得这三个例子就足以确保我提出的原则的真实性, 并证明在静态中常见处理的一切都依赖于它。因为 wed 和相关术语只是弯曲的飞机, 而机器组成的轮子则仅是直升机。…

Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 13 July 1638, AT II, 235–237

这一分析中关键的动作是通过它的曲线路径取代。**坦克** 到目前为止。这是一个差异地质结构: 坦根捕捉了允许运动的即时方向, 以及比例。*GM* : *GR* 它在这种精确的配置中提供了机械优势。在现代语言中, 我们会说, 德卡特正在计算重力组成部分沿着限制方向 - 或相当于, 评估虚功为一个无限的位移沿着坦根。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

太空, 不是速度。德卡特完全意识到, 他的方法与他先知和当代人不同, 其中许多人在速度方面制定了机械原则。1638 年 11 月 15 日, 在一封信中向梅尔森写道, 他与加利利奥的态度相矛盾:

> 加利利以平衡和更轻松的方式写作, 他解释得很清楚。**四位一座**但是不 **伊塔座位**正如我按照我的原则所做的那样。为那些不信我所要考慮的速度, 作為加利利亞, 而不是空間, 為了使機械的理性, 我相信, 在我們之間, 有沒有說話的東西。没有理解这一点。…
>
> 至于加利利奥写的关于平衡和升高, 他解释得很好。**发生了什么** 但不 **为什么会发生**正如我通过我的原则所做的那样。至于那些说我应该考虑速度, 因为加利利奥, 而不是空间, 负责机器, 我相信, 在我们中间, 他们是人谁只从幻想说话, 没有理解任何事情。…
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 15 November 1638, AT II, 433–434

这段经文揭示了德卡特的信念, 他的原则不仅提供了一个正确的规则, 而且是一个真实的规律。**解释**. 伽利略和其他人可以追溯到的法则, 但他们的速度引用隐藏了机械优势的真正原因。1638 年 9 月 12 日的一封同事信中, 德卡特解释了为什么他故意从他的论文中排除速度:

> 不是速度的差异使这些重量必须是相同的双倍, 而空间的差距… 如果我已经在这个小静态处理的任何部分表现出任何技能, 那么我愿意知道它比其他任何东西都更多。因为关于速度没有解释真正的重量, 以及整个世界的系统, 不可能说出任何好或坚定的东西。现在, 因为我不想这样做, 所以我找到了一个办法来忽略这个考虑, 并将其他人从中分开, 以便我能在没有它的情况下解释。
>
> Descartes, 1898 Correspondance, mars 1638 – decembre 1639, Descartes to Mersenne, 12 September 1638, AT II, 353–355

这是一个令人惊叹的方法论。德卡特承认, 对速度的完整处理需要一个动态理论 - 关于力量如何产生加速的解释, 这反过来需要了解重力本身的性质。通过纯粹在空间转移方面制定静态, 他实现了一个自我包含的理论, 不依赖于物理学中未解决的问题。虚拟工作的原则, 在德卡特的手中, 成为一个纯粹地质表达平衡, 独立于任何动态假设。

德卡特的遗产

德卡特对虚功原理的贡献可以总结为四个点:

1. **基本原则**答:The “力量” (行动) 需要 升力 的重量是由产品体重和高度测量的, 该产品在所有简单的机器上保存。这将斯蒂文的观点普遍化为静态的普遍轴。
2. **无限观点**: 重要的是不是最终 位移 但 “动作开始”● 无限的 位移 兼容限制。这将原则从一个关于实际动机的声明转化为一个关于 **虚拟** 移居。
3. **坦克建筑**: 对于曲线限制, 适当的 位移 按限曲线沿线测量。这种地质结构允许该原则适用于自愿的机械系统。
4. **太空超越速度**适用于静态的变量是空间移动, 而不是速度。这种静态与动态的分离是一种故意的方法选择, 给了原则其特征性的一般性。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

德卡特的表述很快被约翰·瓦利斯普遍化 (1616–1703) 谁在他的 **机械** (1670–1671) 将原则扩展到自愿的力量: “发动力量的前向或后向运动, 无论如何, 都是由这些力量的产品所获得的, 它们的前向或背向运动在这些力量方向上估计。” (Wallis, 1670). 这是约翰·伯诺利 谁, 在下一个世纪, 将给原则其最终的表述和它的名字: 原则 **虚拟速度**.

14.5.8 托里克利 (1608–1647)

福音托里克利 (1608–1647)[18] 他是加利利奥的最后一位学生, 并在 1642 年 1 月加利里奥去世后, 他的继任者是佛罗伦萨大公费迪南多二世德米奇的数学家。1644 年, 他发表了他的 **歌剧地质学** (Torricelli, 1644) 这是他一生中唯一能出现的作品。第二部分, 这项处理。*De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum* 它包含一个原则的平衡 , 这将证明是关键的联系在亚历山大静态和虚功原则的伯诺利和拉格兰奇。

在简短的初步部分中, **预言**,Torricelli 表示他的基本轴, 图 14.15:

> **提前的。**
> 两个相互连接的重物不能自行运动，除非它们的共同重心下降。
>
> 以色列人, 以色彩为主; 以色情为主, 以利之所得, 以便在其中间, 以以利的, 以此, 以其中間, 以它, 以他, 以它的, 以他的, 以它们, 以他们的, 以他们, 以这些, 以这种, 以其他, 以某种, 以一种, 以那种, 在某种。 nisi center grauitatis ipsius descendat 以色列 当系统如此安排，使其共同重心绝不可能下降时，重物将完全静止在原位；否则它的运动将毫无意义，因为那只能是完全不向下的水平运动。
>
> ---
>
> 我们将通过示威来确认这一点; 现在我们立即继续提出, 这在加利利奥中是一个原则或一个立场。**我们预测这一点。**
> 兩個重體, 結合在一起, 無法自行移動, 除非他們的共同中心重力下降。
> 因为当两个重体以一种方式相互连接, 以便在一个的动作中, 另一个的运动也随之而来时, 这两重体将是由两个组成的一个重体一样　无论是平衡。或管道, 或任何其他机械安排。这种重量永远不会移动, 除非其自己的中心的重力下降。但是, 当它是如此安排, 以至于它的常见中心的重力不能以任何方式下跌, 重量将完全保持在其位置; 否则它会徒劳地移动, 即通过一个水平翻译, 这在任何情况下都不会倾向下降。
>
> Torricelli, 1644 Opera geometrica

反对剂为平衡的标准: **连接重体的系统在平衡中, 如果并且只有在每一次可能的运动时, 它们的共同中心的重力不能下降。**.

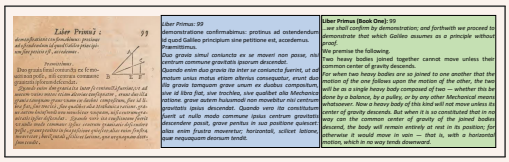


图 14.15: 托里克利的轴心

[18]托里克利因他的发明而得知。(1643) 而为 “托里克利的法则” 流体 efflux 从一个洞。但是, 他对机械学的贡献, 虽然不太受庆祝, 对于虚功历史至关重要。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

这种令人欺骗的简单声明代表了深刻的普遍化。古老的原理　即 **单身** 身體在平衡當支持在其中心的重力　是從阿基米德斯很清楚。托里克利所承认的是, 对于一个 **集成** 连接硬体, 整个系统的重力中心 (根據考古規則計算) 具有相同的物理意义。如果没有虚拟运动可以降低这个点, 系统在平衡。

與 虚功 的關係

尽管 Torricelli 的原则没有明确提到虚拟移动或虚功, 但它相当于虚功原理仅适用于重力系统。考虑一个系统 n 重体重的身体 W_i 在高度 z_i 超過某個日期。重力的中心高度是

$$\bar{z} = \frac{\sum_i W_i z_i}{\sum_i W_i}$$

对于任何虚拟 位移 $\delta \mathbf{r}_i$, 虚拟的重力中心高度的变化是

$$\delta \bar{z} = \frac{\sum_i W_i \, \delta z_i}{\sum_i W_i}$$

托里克利的条件是重力的中心不能下降 ($\delta \bar{z} \geq 0$ 适用于所有可接受的动作, 等于 平衡 的逆转移动) 相当于要求 虚功 的 重力 消失:

$$\delta W = -\sum_i W_i \, \delta z_i = 0 \tag{14.1}$$

适用于所有可接受的虚拟移动。因此, 重力的中心原则是虚功原理的特殊案例, 仅限于重力。

从 Torricelli 到 Bernoulli

托里克利使用他的原则, 在机械学中提供优雅的结果证据, 包括倾斜飞机的法则和不同倾斜的飞机上的系统平衡 - Galileo 用其他方法处理的结果。他的方法有明显的优点: 它不需要分裂力量, 没有考虑 “动作的倾向,” 没有动态思维的呼吁。重度标准为平衡提供了纯粹的地质和静态测试。

这个原则是由后来的机械学家, 特别是瓦利斯和胡格森, 并成为十七世纪平衡状态的几个竞争式之一。1715 年, 当约翰 • 伯诺利对虚拟速度的原则进行论文时, 他将托里克利的观点与古老的传统合成, 从假阿里斯托利亚人中得出的。**机械**: 伯努利原理 适用于 **任何** 力量, 不只是重力, 并表达了平衡状态在虚拟工作消失的意义上而不是重力中心的稳定性。

拉格兰奇在历史调查中开幕 **机械分析**, 给了 Torricelli 这个重要中间步骤的全部信用:

> 托里克利是第一个将虚拟速度原则降低到这种条件的, 重量中心不会下降。
>
> 托里克利是第一个将虚拟速度的原则降低到这种条件: 重量的重力中心不会下降。

在发展中, 从 **机械** 对于拉格兰奇, 托里克利的贡献占据了关键位置。他表明, 平衡可能被极端属性　在最低的位置的重力的中心　比以力量或时刻平衡而得多。这种变化的观点, 普遍化超越重力到自愿的力量系统, 将成为解析机械的标志。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

14.5.9 瓦利斯 (1616–1703)

V

约翰 • 瓦利斯在他的 **机械** (1670–1671) (Wallis, 1670), 延伸了虚功原则到任意的力量方向。他说, “发动力量的前向或后向运动, 无论如何, 都是由这些力量的产品所获得的, 它们的前向或背向运动在这些力量方向上进行估计。” 超越重力的这一普遍化, 是向伯诺利所要构成的一般原则迈出重要一步。

14.5.10 莱布尼兹 (1646–1716)

F

莱布尼兹为力量的概念和最终将描述它的数学仪器做出了贡献。

力量与君主主义

为 Leibniz, 图 14.6f, in **摩纳哥**能量可以被理解为本质的活动或欲望的表达。**蒙古**. 虽然传统的机械意义上的力量涉及对身体的外部行动, 但莱布尼兹认为力量是所有物质的内在原则。相互作用之間的 **蒙古** [19] 由他们的驱动 **倾向**结果是力量的表现, 如他们的观念或状态的变化。注意与由此推翻的理论相似之处 **印象**.

向情况计算的方向

到目前为止, 力量仍然基本上被视为规模: 一个跟踪大小, 而配置的地质提供了方向。

莱布尼兹对计算与数字之间的分裂感到不满。他成为一个象征性计算的概念先驱。“情况”, 一个笔记的意思是编码位置, 方向, 甚至动作, 直达大小。1679 年, 他写信给 Huygens。(Leibniz and Loemker, 1956):

> 我发现了一些与算法完全不同的一种新特征的单元, 它将有很大的优点在于代表心灵, 准确和以一种方式忠实于它的性质, 即使没有数字, 一切都取决于感知。阿尔格布拉仅是未定数或大小的特点, 但它不直接表达局势、角落和运动。因此, 经常很难通过计算来分析一个数字的特性, 而且更难找到非常方便的地质示范和结构, 即使算法计算完成。但是, 这个新的特征, 跟随视觉数字, 不能错过提供解决方案, 结构和地质表现所有同时, 在一个自然的方式和一个分析, 即通过确定的程序。
>
> Leibniz and Loemker, 1956 Philosophical Papers and Letters

关键点是他的坚持, 一个成功的机械师需要一种语言, 可以携带。“哪里” 和 “如何指向” 与此同时 “多少” 一个计划, 预测后来的系统处理指定的数量。

关于 VIS LIVE 的争论

从十七世纪末到十八世纪, 大陆机械学分为一个令人误导的简单问题: 什么量最好捕获了大陆。“真正的措施” 动机力量?(Descartes, 1644; Leibniz, 1686a) 卡特西亚人 (许多新东尼亚

[19] 在莱布尼兹的哲学体系中,A **月亮** 它是基本的形态概念, 代表一个不可分割、无物质和自我包含的物质。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

人, 在不同的语言) 强调了 “动作的数量,” 比例为 mv,(Descartes, 1644; Newton, 1687 PDF) 因为它跟踪在影响中交换的内容, 并且因为它自然地出现在平衡动作论点中。Leibniz, 反之亦然, 认为 “活力” **生存** *VIVA* 是相对的 mv^2,(Leibniz, 1686a PDF) 坚持这就是大自然在许多机械过程中保留的, 以及测量身体产生影响的能力。

争议是由冲突和冲突的实验加剧。“效应” 以移动重量, (Gravesande, 1722). 如果有人问一个移动的身体能做什么对重力, 相关比较是它能提高体重多少。在简单的情况下, 高度与 v^2 而不是与 v 这是利比尼西亚的优惠。在冲动的互动中 (冲突, 突然变化), 哪些平衡在各个身体上是动力类似的, 更接近 mv. 大部分争论持续了, 因为双方都试图将其偏好数量提升到独特的力量定义中, 而基本问题是不同的: 一个担心冲动和时间交换, 另一个担心工作和能力产生配置变化。(d’Alembert, 1743 PDF)

现代读者可以看到可能的解决方案: mv 和 mv^2 他们不是竞争对手, 而是分开的异常。(在不同的条件下) 与不同的原则相结合。Momentum 是冲动的自然货币和运动方程式。$\frac{1}{2}mv^2$ 它是劳动和能量的自然货币。

14.5.11 纽顿 (1642–1726)

F

此分類上一篇: Isaac Newton, 图 14.6g. 天才 (§6.6.7) 一位阿尔及利亚人 (6.6.7) 是同一个人写了一本最有影响力的书。**哲学自然主义原则数学** 曾经写过, 也曾在酒精 [20]. 虽然我们可以用某种调解来考虑这一点, 但重要的是要认识到这种追求并不不寻常。(雖然經常是秘密) 在他的时间期间。

到目前为止, 纽顿的起点是由加利利奥和凯普勒等先驱提出的。牛顿是第一个以前所未有的清晰度和准确性对力量的定义进行论文, 解决到那时为止一直存在的不确定性。例如, 毫无疑问, 纽顿是由凯普勒的法律影响的。**似乎是指** 太阳在行星上的力量随着距离而减少。

通过他的发现重力 (Newton, 1687 PDF) 牛顿统一了基普勒与加利利奥和德卡特的地球观察建立的天堂原则, 形成了一个全面的理论。这种团结在他意识到, 引发苹果落下的力量是对月球轨道负责的同样的力量。

牛顿在重量和质量之间做了一个明确的区别, 或者他称之为什么。“物质数量” , 一个概念已经由布里丹, 凯普勒, 和伽利略, 但以前 • 牛顿从未被意识和明确地认可为机械学的基本概念。术语 “力量” 首次出现在纽顿 **原则** 定义三:

> 是的 “**参观** *InSita*[a] 物质的内在力量, 就是抵抗力, 每一个身体, 如同它所存在的那样, 在它的现状中继续下去。它是休息, 或者在正确的线上均匀前进。
>
> Newton, 1687 PDF Mathematical principles of natural philosophy

[20] 对于牛顿来说, 阿尔希米不是只是试图创造神话。“哲学家的石头” 将基金属转化为黄金。它也是他获得关于物质世界的更深入的实验知识, 并获得超越自然的权力的一种方式。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[a]不要与莱布尼兹的混淆 **生存** *VIVA* ("活力") 相应于 mv^2 (后 动能 到一个恒定的因素). 纽顿的 **参观** *InSita* 它是内立的: 抵抗国家变化的本质力量。

在这里, 物质的内在性质被视为无活力的力量。根据牛顿的观点, 内尔蒂亚是

> 某种形式的力量, 是内在的。(**印第安**) 在物质和放松的, 只要没有其他力量影响身体, "努力改變其條件"... 它是抵抗, 只要身体, 为了保持其现状, 反对受影响的力量; 它是冲动, 直到身体, 不容易向另一个受影响力的力量走路, 努力改变状态。其它的。
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy

显然, 在这个定义中, 力量不是 (至今) 被认为是动作原因或加速度。后来在定义 4 他定义了 **印象的力量**

> 印象的力量是一种在身体上进行的行动, 以改变它的状态, 无论是休息还是平衡的运动。
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy

纽顿的过渡从冲动力量的行动到持续力量的作用发生在第一份提议中。**原则**. 虽然牛顿可能已经发现了重力, 但不知道它是如何工作的。他假设它即时行动。这是需要等待爱因斯坦, 他看到了空间和时间, 因为它们相互结合在一个曲折的织物中, 物质把这个空间推翻起来, 而这就是那个空间时间的旋转或旋转创造了我们所感受到的重力。这就是它的本质。**一般相对论** [21]

牛顿也用纯粹的动态考虑对待了力量平行图法。(Dugas, 1988):

> 通道 I (到第二法则)... 由两个力量组成的身体将描述平行图的直径, 同时将这些力量分开描述侧面。如
>
> 果一个身体在一定时间内, 由 M 的力量在位置上分开印象 A 必须以统一的动作进行 A 到 B 而且, 由力量 N 在同一地点被分开印象, 必须从 A 到 C 完成平行图 $ABCD$ 而且, 由兩個力量共同行動, 它將同時在 diagonal 中運行 A 到 D. 因为, 自从力量 N 行动在线的方向 AC 与此同时, BD 这个力量 (第二法则) 它不会改变由另一个力量产生的 速度。M 由此, 身体被引导到线路。BD. 因此, 身体将到达线。BD 同时, 如果力量 N 要么被印象, 要么不; 因此, 在那段时间结束时, 它将在某个线上找到。BD. 同样的论点, 在同一时间的结束时, 它将在 CD 线上找到某处。因此, 它将被发现在 D 在那里, 两条线相遇。但它将从正确的线路移动到 A 到 D 根据《法》一。
>
> Newton, 1687 Mathematical principles of natural philosophy, Book I, Cor. I to Law II

在这里, 牛顿明确地说出一个统一的运动是由某种力量产生的, 而它是运动的变化, 即加速时间的质量, 根据第二法则的运动与印象强度相对。這些兩個顯然相矛盾的想法在紐頓的頭腦中只能在一個條件下和解: 紐頓認為加速力量的行動是一系列連續的行為, 這對移動物體帶來了速度的連續增長。(Jammer, 1957).

[21]特殊的相对性, 是给予 $e = mc^2$ 接纳一个无效的框架参考 (没有 加速度).

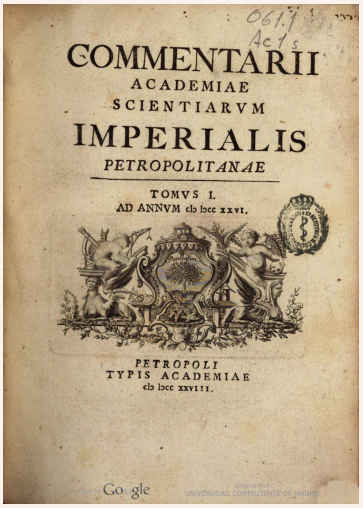
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

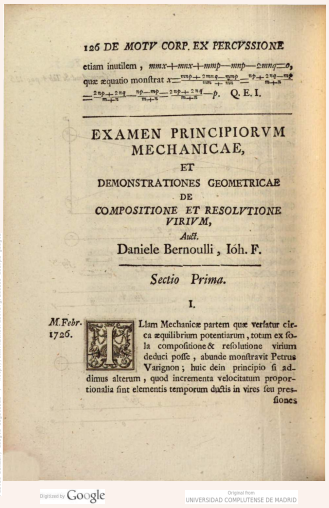
14.5.12 丹尼尔 , Daniel (1700-1782)

由他的其他作品封闭, 丹尼尔 • 伯诺利也研究了与力量的平行图有关的原则。

早期对静态解释的支持者经常说, 力量的平行图并不依赖于牛顿的第二法则。他们认为, 即使力量与动作之间的关系不同于牛顿的第二法则所描述的, 也仍然会以平行图模型结合起来。

在此背景下, Bernoulli, Daniel, 1726 做了一个先驱的尝试, 给出一个静态解释的力量的平行图。为了激励这一点, 他提出了一系列对牛顿第二法的替代方案可能存在, 但没有。其中, 这些 “反事实” 替代品是, 产生的力量与产生的加速度的平方根或其圆根或它的平方根均等。但是, 即使其中一个反事实的可能性是案例, 他坚持, 力量的平行图仍然会保持。


COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS I.
AD ANNVM cIↃ Iↄcc XXVI.
PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cIↃ Iↄcc XXVIII.


126 DE MOTV CORP. EX PERCVSSIONE
EXAMEN PRINCIPIORVM MECHANICAE,
ET
DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE
DE
COMPOSITIONE ET RESOLVTIONE VIRIVM,
Auct.
Daniele Bernoulli, Ioh. F.
Sectio Prima.
I.
M.Febr. 1726.
Liam Mechanicæ partem quæ verſatur circa æquilibrium potentiarum, totum ex ſola compoſitione & reſolutione virium deduci poſſe, abunde monſtravit Petrus Varignon; huic dein principio ſi adjungimus alterum, quod incrementa velocitatum proportionalia ſint elementis temporum ductis in vires ſeu preſſiones

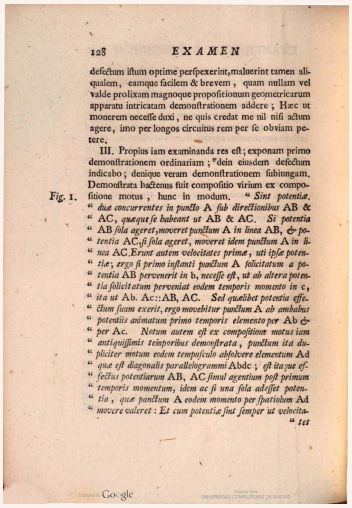

128 EXAMEN
defectum illum optime perſpexerint, maluerint tamen aliqualem, eamque facilem & brevem, quam nullam vel valde prolixum magnoque propoſitionum geometricarum apparatu intricatam demonſtrationem addere; Hæc ut monerem neceſſe duxi, ne quis credat me nil niſi actum agere, imo per longos circuitus rem per ſe obviam petere.
III. Propius iam examinanda res eſt; exponam primo demonſtrationem ordinariam; deinde eiusdem defectum indicabo; denique veram demonſtrationem ſubiungam.
Fig. 1. Demonſtrata hactenus fuit compoſitio virium ex compoſitione motus, hunc in modum. “ Sint potentiæ, “ duæ concurrentes in punctо A ſub directionibus AB & “ AC, quæque ſe habeant ut AB & AC. Si potentia “ AB ſola ageret, moveret punctum A in linea AB, & po- “ tentia AC, ſi ſola ageret, moveret idem punctum A in li- “ nea AC. Erunt autem velocitates primæ, uti ipſæ poten- “ tiæ; ergo ſi primo inſtanti punctum A feliciter a po- “ tentia AB perveniret in b, neceſſe eſt, ut ab altera po- “ tentia feliciter perveniat eodem temporis momento in c, “ ita ut Ab. Ac::AB, AC. Sed quælibet potentia effe- “ ctum ſuum exerit, ergo movebitur punctum A ab ambabus “ potentiis animatum primo temporis elemento per Ab & “ per Ac. Notum autem eſt ex compoſitione motus iam “ antiquiſſimis temporibus demonſtrata, punctum ita du- “ pliciter motum eodem temporiſculo abſolvere elementum Ad “ quæ eſt diagonalis parallelogrammi Abdc; eſt ita que ef- “ fectus potentiarum AB, AC, ſimul agentium poſt primum “ temporis momentum, idem ac ſi una ſola adeſſet poten- “ tia, quæ punctum A eodem momento per ſpatiolum Ad “ movere culeret: Et cum potentiæ ſint ſemper ut velocita- “ tes

图 14.16: 伯诺利在力量的平行图 (Bernoulli, Daniel, 1726)

设 A 点受到沿 AB 与 AC 方向的两个共点力，且两力分别与 AB、AC 成比例。若 AB 力单独作用，它将使 A 点沿 AB 线移动；若 AC 力单独作用，它将使同一点沿 AC 线移动。初速度与力本身成比例；因此，在第一瞬间，若 A 点受 AB 力推动到达 o，则受另一力推动时必在同一瞬间到达 c，从而有 Ab:Ac::AB:AC。每个力均产生自身作用，因此 A 点在两力共同作用下，于第一瞬间同时经历 Ab 与 Ac 两个位移。由自古已知的运动合成可知，该点在同一微小时刻完成平行四边形 Abdc 的对角线 Ad。因此，AB、AC 两力在第一瞬间共同作用的效果，等同于一个能在同一时刻使 A 点通过距离 Ad 的单一力；而且由于力始终与速度成比例……

> Bernoulli, Daniel, 1726 *“1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142”*

14.5.13 1715 年约翰 • 伯诺利的信

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

虚拟速度的原则, 在其现代解析形式, 首先出现在约翰·伯诺利的一封信 (1667–1748) 皮埃尔·瓦里宁 (1654–1722)1715 年 2 月 26 日。[22] 这封信, 保留在瓦里尼昂的后世 **新机械或国家** (Varignon, 1725) 它代表了机械史上一个沉水的时刻　第一個明確的一般說法, 將成為基础的解析静态。

瓦里尼昂介绍了伯诺利的贡献, 在体积第九部分开始时:

> 在巴勒斯坦 26 日的一封信。1717 年 1 月,M (珍) 伯努利在其中定义了他所谓的“……”之后，**能量**是的, 如下定义所示, 他告訴我, **在任何平衡的力量, 在某种方式它们适用于其他, 或中间或即时, 能量的总和将与能量的负数相同, 价格是可靠的。**
>
> 1717 年 1 月 26 日, 巴塞尔的一封信中, (珍) 伯诺利, 在定义他所指的是什么之后 **能量** 如下定义所示, 我被告知 **无论如何, 在各个力量的平衡中, 无论它们是以何种方式相互应用的, 无论是中间或即时, 积极能量的总额将相当于负能量的总结, 积极采取。**
>
> 瓦里尼奥在 Bernoulli, Johann, 1725 *“Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717”*

(请注意, 在 Varignon 的出版文本中提到的日期包含上述打印错误。)

Varignon 的 反力 揭示了他附加到这个原则的重要性:

> 这个建议, 我看起来很普遍。& 如美, 如我可以随心所欲地解除前一理论, 如他要求我同意的许可, 如同我能与前一理论相伴的示威。& 那不派我去。
>
> 这个提议看起来如此普遍和如此美丽, 以至于我可以轻易从前的理论中取出它, 我请求他的许可　他授予的　把它添加到这里, 表明这项理论为我提供了。他不派我去的。
>
> 瓦里尼奥在 Bernoulli, Johann, 1725 *“Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717”*

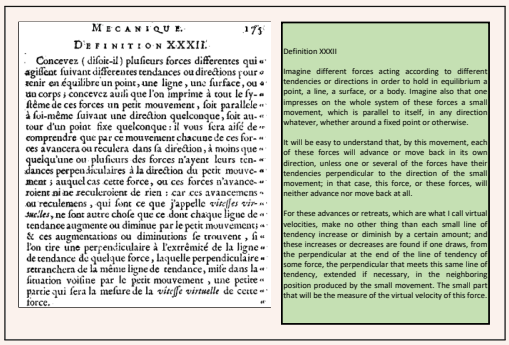
关键定义如下, 在伯诺利自己的词语中, 图 14.17:

> **定义 XXXII** 设想若干大小不同的力沿不同趋势或方向作用，以维持一个点、一条线、一个面或一个物体的平衡；再设想给整个力系一个微小运动，这个运动可以沿任意方向平行移动，也可以绕任意固定点转动。不难理解，在这一运动中，每个力都将沿自身方向前进或后退；若一个或若干力的作用方向与微小运动方向垂直，则这些力既不前进也不后退。这些前进或后退量就是我所说的虚速度，它们正是各作用线因微小运动而增加或减少的量；&若从某力作用线的端点作垂线，该垂线将在微小运动后相邻位置的作用线上截取一小段，此段即为该力虚速度的量度。
>
> **定义 XXXII** 想象 (他说) 以不同的趋势或方向行动的几种不同力量在平衡中保持一个点、线、表面或身体; 也想象, 其中一个将这些力量的整个系统传递给一个小动作。要么在某个方向上与自己平行的翻译, 要么是关于某个固定点的转角: 很容易理解, 通过这个动作, 这些力量中的每一个都将沿着自己的方向前进或退缩。除非其中一个或多个部队对小动的方向有偏向倾向, 否则这个部队或这些部队根本不会前进或退缩。对于这些进展或退缩, 我称之为虚拟速度, 什么都没有别的, 只有在小动作中每个趋势线增加或下降的数量; 这些增加或下降是通过在某种力量的趋势线结束时绘制一个偏向, 而这种偏向将从同一趋势线中切断, 由小动作在邻近位置上放置。一个小部分将是这个力量的虚拟速度的尺寸。

[22] 日期通常被称为 “1717 年 1 月 26 日” 在文学中, 在瓦里尼昂的后期文学中的打印错误之后 **新机械** (1725). 正确的日期, 如现代奖学金所确定的, 是 1715 年 2 月 26 日; 见 **科学生物学的完整词典**是的,v “伯诺利, 约翰。”

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

Bernoulli, Johann, 1725 “*Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717*”


MECANIQUE. 175
DEFINITION XXXII.
Concevez (disoit-il) plusieurs forces differentes qui s'agissent suivant differentes tendances ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une surface, ou un corps; concevez aussi que l'on imprime à tout le système de ces forces un petit mouvement, soit parallele à soi-même suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque: il vous sera aisé de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, à moins que quelqu'une ou plusieurs des forces n'ayent leurs tendances perpendiculaires à la direction du petit mouvement; auquel cas cette force, ou ces forces n'avanceroient ni ne reculeroient de rien: car ces avancemens ou reculemens, qui sont ce que j'appelle *vitesses virtuelles*, ne sont autre chose que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; & ces augmentations ou diminutions se trouvent, si l'on tire une perpendiculaire à l'extrémité de la ligne de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire retranchera de la même ligne de tendance, mise dans la situation voisine par le petit mouvement, une petite partie qui sera la mesure de la *vitesse virtuelle* de cette force.

Definition XXXII
Imagine different forces acting according to different tendencies or directions in order to hold in equilibrium a point, a line, a surface, or a body. Imagine also that one impresses on the whole system of these forces a small movement, which is parallel to itself, in any direction whatever, whether around a fixed point or otherwise.
It will be easy to understand that, by this movement, each of these forces will advance or move back in its own direction, unless one or several of the forces have their tendencies perpendicular to the direction of the small movement; in that case, this force, or these forces, will neither advance nor move back at all.
For these advances or retreats, which are what I call virtual velocities, make no other thing than each small line of tendency increase or diminish by a certain amount; and these increases or decreases are found if one draws, from the perpendicular at the end of the line of tendency of some force, the perpendicular that meets this same line of tendency, extended if necessary, in the neighboring position produced by the small movement. The small part that will be the measure of the virtual velocity of this force.

图 14.17: 约翰 • 伯诺利的地质速度 (Bernoulli, Johann, 1725)

伯诺利的表述的几个特点值得强调:

- 原则适用于 **任何** 系统　一个点、线、表面或身体　在 平衡 中保持 **任何** 力量的配置, 无论是直接或通过中间机制应用。
- 和 “小动作” 印象到系统是完全自愿的: 它可能是一个翻译在任何方向或一个转角关于任何固定点。这种意志性正是给原则的权力。
- 和 “虚拟速度” 它们是地质量　在相应力量的行动线上的小转移的预测　而不是实际的速度在电影意义上。

伯诺利的 “能量” 这是我们现在称之为 **虚功**: 力量的产物及其虚拟速度 (即, 虚拟 位移 的组件沿着力量的行动线). 理论本身 (西雅图 XL,P 176) 可以在现代评级中如下说明:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \text{(for equilibrium)}$$

这个表述代表了近两千年的发展峰值, 从假阿里斯托利亚人的直观洞察 **机械**通过约旦的 **重力**:*Gravitas Secundum* 史蒂芬的 **克劳特克朗**加利利奥的 “黄金规则,” 德卡特的保守原则, 到伯诺利的完全一般声明解析。原则将通过拉格兰奇的机械找到其最终位置。**机械分析** (1788), 在那里它作为基础为整个建筑的解析机械。

14.5.14 瓦里尼奥 (1654–1722)

1687 年, 出版之年 **原则**瓦里尼昂 发表 **新机械或国家** (Varignon, 1725) 在其中, 从一个相当亚里士多德的观点中得出的力量平行图的原则适用于解决一类问题, 纽顿没有触及。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> **第 3 章:** 如果无重点 *A* 按着平等, 同时兩個力量 [力量] *E* 和 *F* 沿着线路 *AC* 和 *AB* [在 图 221], 他们之间形成了某种角度 *CAB* 和力量的行动 *E* 是为了力量的行动 *F* 如 *AC* 是为了 *AB*, [然后] 这个点 *A* 跟随 diagonal *AD* 关于平行图 *BC* 由这两条线构成。
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII

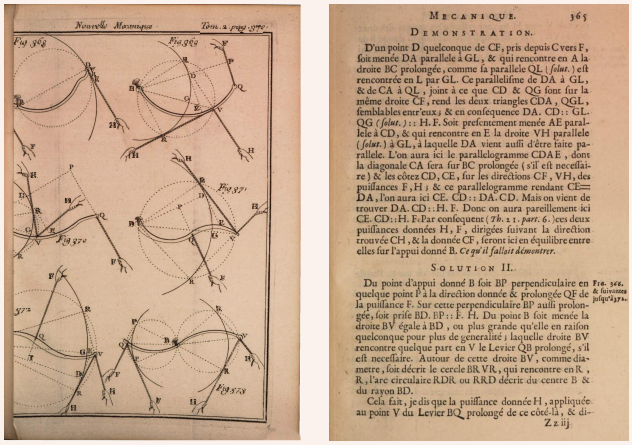


图 14.18: 平衡 的概念 Varignon, 1725

虽然我们在这里讨论了力量的平行图, 所以我们应该提到通过著名的瓦里尼昂理论。:

> 一点左右的几个相互力量的瞬间总数相当于这些力量所产生的瞬间, 或者换句话说, 一点左右的一势力的瞬间相当于其组成部分的瞬間总数。
>
> Varignon, 1725 Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII

14.5.15 阿伦伯特 (1717–1783)

Jean le Rond d'Alembert 的评论 **动态条约** (1743) (d'Alembert, 1743) 它将虚拟速度的原则从静态到动态, 并在这样做中统一了机械科学。 F/V

德 • 阿伦伯特的哲学立场是独特的。他试图清理黑暗概念的机械:

> 我有, 要这样说, 把眼睛转向引力原因。要只考虑他们所产生的运动; 我完全禁止了身体内在的力量, 黑暗的存在 & 神经学, 谁不能在一个科学上散布黑暗的能力。
>
> 所以, 要说的话, 我把眼睛从移动原因中转移出来, 只考虑到它们所产生的运动; 我完全禁止在动物体内 - 黑暗和形态的生物 - 只有能够将黑暗扔在科学本身上。
>
> d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

这把他放在中间。**生存** *VIVA* 争议从莱布尼兹以来分裂了大陆机械师。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这个问题..... 是` 此为主, 在运动中的身体的力量是相对的。以速度为产物, 以速度為产物。´ 速度为... 可怜 é les disputes que cette question a causínut 不用´ 美, 她不为 M´ 哈尼克,m'a engagé` 分類上一篇: 我今日所提供的作品

这个问题是, 身体的力量是否与质量倍速度相比例, 或者与质量倍的速度方程。尽管它引发了争议, 但它的机械的完全无用使我在我今天出版的作品中没有提到。

d'Alembert, 1743 Traite de dynamique

通过恢复动态作为平衡的问题, 德阿伦伯特的争议 "真正的措施" 以武力。

他的关键观点是令人误导的简单。纽顿的第二法则 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 可以重写为:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

这是平衡在应用力量之间的一种声明 $\mathbf{F}$ 阿伦伯特所称之为 "强度的内心," $-m\mathbf{a}$. 加速器体可以被处理, 如同它在静态平衡下与印象力量和内向力量的组合行动, 图 14.19.

C'eſt par cette raiſon que j'ai cru ne devoir point entrer dans l'examen de la fameuſe queſtion des *forces vives*. Cette queſtion qui depuis vingt ans partage les Geométres, conſiſte à ſavoir, ſi la force des Corps en Mouvement eſt proportionnelle au produit de la maſſe par la viteſſe, ou au produit de la maſſe par le quarré de la viteſſe : par exemple, ſi un Corps double d'un autre, & qui a trois fois autant de viteſſe, a dix-huit fois autant de force ou ſix fois autant ſeulement. Malgré les diſputes que cette queſtion a cauſées, l'inutilité parfaite dont elle eſt pour la Méchanique, m'a engagé à n'en faire aucune mention dans l'Ouvrage que je donne aujourd'hui : je ne crois pas néanmoins devoir paſſer entiérement ſous ſilence une opinion, dont *Leibnitz* a cru pouvoir ſe faire honneur comme une découverte ; que le grand *Bernoulli* a depuis ſi ſavamment & ſi heureuſement approfondie * ; que *Mac-Laurin* a fait tous ſes efforts pour renverſer ; & à laquelle enfin les écrits d'une Dame illuſtre par ſon eſprit & par ſon ſavoir ont contribué à intéreſſer le Public. Ainſi, ſans fatiguer le Lecteur par le détail de tout ce qui a été dit ſur cette queſtion, il ne ſera pas hors de propos d'expoſer ici très ſuccinctement les Principes qui peuvent ſervir à la réſoudre.

Quand on parle de la force des Corps en Mou-

It is for this reason that I did not at all wish to enter into the examination of the famous question of vis via (living forces). This question, which for twenty years has divided the Geometers, consists in determining whether the force of bodies in motion is proportional to the product of the mass and the velocity, or to the product of the mass and the square of the velocity: for example, whether a body double another, and having three times as much velocity, has eighteen times as much force, or only six times as much. Despite the disputes that this question has caused, the complete uselessness it has for Mechanics has led me to make no mention of it whatsoever in the Work I am presenting today. I do not believe, nevertheless, that I ought to pass over entirely in silence an opinion which Leibniz believed he could claim the honor of as a discovery; which the great Bernoulli has since so learnedly and so successfully investigated in depth; which Mac-Laurin made every effort to overturn; and to which, finally, the writings of an illustrious Lady, distinguished by her intellect and her learning, have not failed to draw the interest of the Public. Thus, without wearying the Reader with the detail of all that has been said on this question, it will not be out of place to set forth here very succinctly the Principles that may serve to resolve it.

图 14.19: 德 • 阿伦伯特关于 VIS VIVA 争论: 他认为无用的争论, 但简要讨论 (d'Alembert, 1743)

请注意, 在本文中,d'Alembert 提到 "由她的智力和学习区分的女士" 艾米莉 • 杜 • 切ˆ 作室 (1706–1749) 其著作 - 特别是她 **物理机构** (1740) 她在 VIS VIVA 辩论中发表的演讲 - 帮助将争议传递给更广泛的公众。

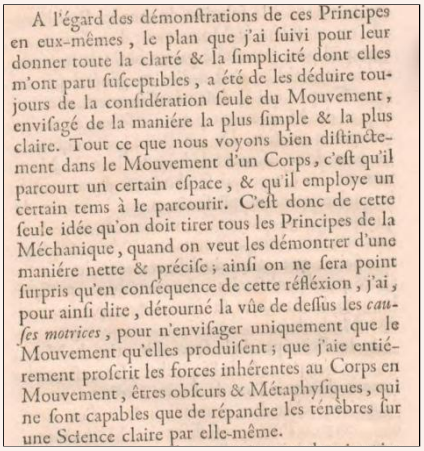
虚拟速度的原则直接适用。对于粒子系统, 阿伦伯特的原则 國家:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 $\delta \mathbf{r}_i$ 虚拟移动是与限制相容的。

这种动态减少到静态。通过将无情的术语视为力量, 德 • 阿伦伯特统一了机械学, 并证明了虚功的非凡普遍性。无论身体和限制系统有多复杂, 每一个动态问题都可以通过伯诺利为静态设立的相同变化的框架来解决。因此, 他给了所有严格衍生机械的原则一个突出作用, 图 14.20.



A l'égard des démonſtrations de ces Principes en eux-mêmes, le plan que j'ai ſuivi pour leur donner toute la clarté & la ſimplicité dont elles m'ont paru ſuſceptibles, a été de les déduire toujours de la conſidération ſeule du Mouvement, enviſagé de la maniére la plus ſimple & la plus claire. Tout ce que nous voyons bien diſtinctement dans le Mouvement d'un Corps, c'eſt qu'il parcourt un certain eſpace, & qu'il employe un certain tems à le parcourir. C'eſt donc de cette ſeule idée qu'on doit tirer tous les Principes de la Méchanique, quand on veut les démontrer d'une maniére nette & préciſe; ainſi on ne ſera point ſurpris qu'en conſequence de cette réfléxion, j'ai, pour ainſi dire, détourné la vûe de deſſus les *cauſes motrices*, pour n'enviſager uniquement que le Mouvement qu'elles produiſent; que j'aie entiérement proſcrit les forces inhérentes au Corps en Mouvement, êtres obſcurs & Métaphyſiques, qui ne ſont capables que de répandre les ténébres ſur une Science claire par elle-même.

As for the demonstrations of these Principles in themselves, the plan I followed, in order to give them all the clarity and simplicity of which they seemed to me capable, was always to derive them from the sole consideration of Motion, viewed in the simplest and clearest manner. All that we perceive distinctly in the motion of a body is that it traverses a certain space, and that it employs a certain time to traverse it. It is therefore from this single idea that one must draw all the principles of Mechanics, when one wishes to demonstrate them in a neat and precise manner; thus one will not be surprised that, as a consequence of this reflection, I have, so to speak, turned my gaze away from the moving causes, in order to consider only the Motion they produce; and that I have entirely proscribed the forces inherent in a moving body, obscure and metaphysical beings, which are capable only of spreading darkness over a science that is clear in itself.

图 14.20: 德 • 阿伦伯特作为机械的唯一基础 (d'Alembert, 1743 PDF)

最后, 德 • 阿伦伯特对 “力量” 作为一个隐藏的形象物理原因或仅仅是术语战场的讨论不太耐心。他明确地说, 他 “转身” 从移动原因只考虑他们产生的动作, 他放弃了 VIS VIVA 的争论, 主要是无用的机械 - 更喜欢明确的操作原则, 基于动作和计算, 图 14.20.

值得注意的是, 德 • 阿伦伯特本人并没有称之为此。“阿伦伯特的原则” 这个呼吁后来来了。在 **交易**他把它介绍为解决限制运动问题的一般方法, 而不是所谓的原则。洗礼是由后来的世代进行的, 他们认识到他的洞察的基本性质。

关于力量和平行图

在 **动态条约**阿伦伯特 (d'Alembert) 用地质方法解决了对一个身体的同时力量的结果。他探讨了两个力量同时在一个点上行动的场景, 每个方向点沿着两条路。AB 和 AC 相应地, 在同一时间内 框架. 创建一个平行图, 在那里 AB 和 AC 代表附近的侧面, diagonal 从 A 代表由两个力量的结合效应所产生的路径:

> 理论 2。如果两个自愿的权力同时在一个身体或点上行动 A 把它移动, 一个从 A 到 B 在某个时刻, 另一个 A 到 C 同時均匀, 並且如果一個建造平行圖 $ABCD$ 我说, 身体 A 将沿着 diagonal AD 同一时间, 它会平行。AB 或 AC.
>
> d'Alembert, 1743 PDF Traite de dynamique

在跟踪工作中,d'Alembert 写道:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

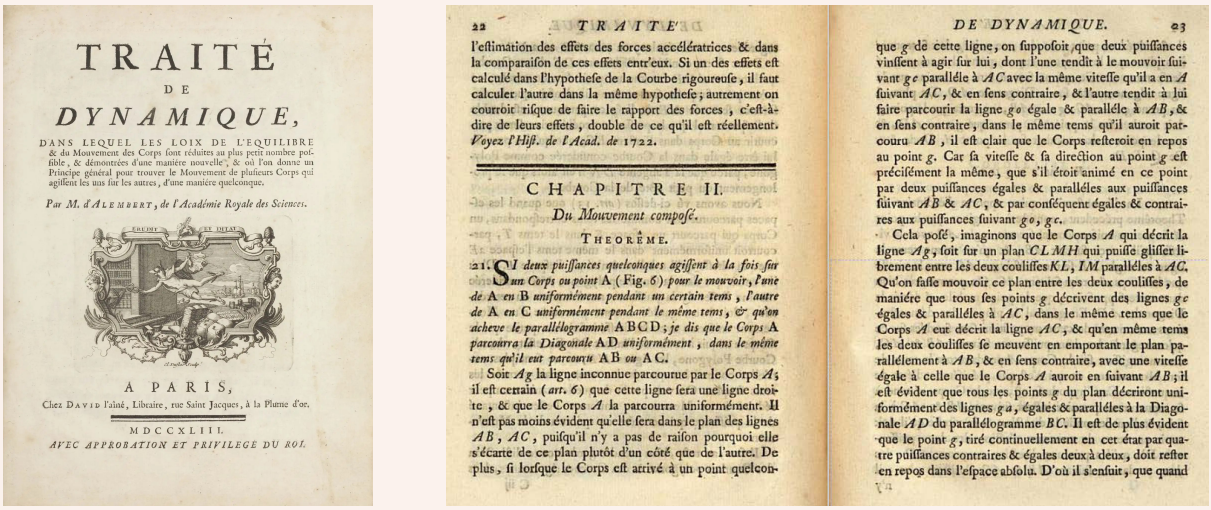

TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.
A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
M. DCC. XLIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.
22 TRAITÉ
l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothese de la Courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothese; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement. *Voyez l'Hist. de l'Acad. de 1722.*
CHAPITRE II.
Du Mouvement composé.
THEOREME.
21. *Si deux puissances quelconques agissent à la fois sur un Corps ou point A (Fig. 6) pour le mouvoir, l'une de A en B uniformément pendant un certain tems, l'autre de A en C uniformément pendant le même tems, & qu'on acheve le parallélogramme ABCD; je dis que le Corps A parcourra la Diagonale AD uniformément, dans le même tems qu'il eut parcouru AB ou AC.*
Soit *Ag* la ligne inconnue parcourue par le Corps *A*; il est certain (*art. 6*) que cette ligne sera une ligne droite, & que le Corps *A* la parcourra uniformément. Il n'est pas moins évident qu'elle sera dans le plan des lignes *AB*, *AC*, puisqu'il n'y a pas de raison pourquoi elle s'écarte de ce plan plutôt d'un côté que de l'autre. De plus, si lorsque le Corps est arrivé à un point quelcon-
DE DYNAMIQUE. 23
que *g* de cette ligne, on supposoit que deux puissances vinssent à agir sur lui, dont l'une tendit à le mouvoir suivant *ge* parallèle à *AC* avec la même vitesse qu'il a en *A* suivant *AC*, & en sens contraire, & l'autre tendit à lui faire parcourir la ligne *go* égale & parallèle à *AB*, & en sens contraire, dans le même tems qu'il auroit parcouru *AB*, il est clair que le Corps resteroit en repos au point *g*. Car sa vitesse & sa direction au point *g* est précisément la même, que s'il étoit animé en ce point par deux puissances égales & parallèles aux puissances suivant *AB* & *AC*, & par conséquent égales & contraires aux puissances suivant *go*, *gc*.
Cela posé, imaginons que le Corps *A* qui décrit la ligne *Ag*, soit sur un plan *CLMH* qui puisse glisser librement entre les deux coulisses *KL*, *IM* parallèles à *AC*. Qu'on fasse mouvoir ce plan entre les deux coulisses, de maniére que tous ses points *g* décrivent des lignes *ge* égales & parallèles à *AC*, dans le même tems que le Corps *A* est décrit la ligne *AC*, & qu'en même tems les deux coulisses se meuvent en emportant le plan parallélement à *AB*, & en sens contraire, avec une vitesse égale à celle que le Corps *A* auroit en suivant *AB*; il est évident que tous les points *g* du plan décriront uniformément des lignes *ga*, égales & parallèles à la Diagonale *AD* du parallélogramme *BC*. Il est de plus évident que le point *g*, tiré continuellement en cet état par quatre puissances contraires & égales deux à deux, doit rester en repos dans l'espace absolu. D'où il s'ensuit, que quand

图 14.21: 德 • 阿伦伯特在力量的平行图 (d'Alembert, 1743 PDF)

> **提议 1** 2 平等的权力 $\alpha\beta$ 和 $\alpha\xi$ 形成它们之间的任何角度, 将始终产生图形。$\alpha\delta$ 作为结果。
>
> d' Alembert, 1761 *"Démonstration du principe de la composition des forces"*, p. 177

值得注意的是,d'Alembert 使用这个词。"权力" 在提议的声明中, 以及记忆录的文本中, 尽管 "力量" 出现在标题中; 这表明他交换了两种术语的自由。

D'Alembert 再次回到这个主题。在标题下 **武力平行图的新示威**, 图 14.22 他写道:

> 在我提交的《机械原则》中, 我宣布了力量平行图的新证据。这就是我要在这里提供的证据。事实上, 它比引用的体积中可以阅读的证据更简单; 但是, 由于我使用某些功能可能有用来解决其他类似问题, 我相信, 如果我与他们分享的话, 地质学家们不会生气。
>
> d' Alembert, 1773 *"Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces"*

扩展到 Dynamics 和 虚功

德 • 阿伦伯特的动机部分是哲学的。他想消除 "力量" 作为一个代谢原因, 他认为的一个概念是模糊的, 并在纯粹地质和电影学的术语中重复机械:

> 以此为准, 以此为准; 以此不完全禁止, 以其在身体上的力量, 以它所能产生的动机, 以至于它们是模糊的。& 神经学, 谁不能在一个科学上散布黑暗的能力。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

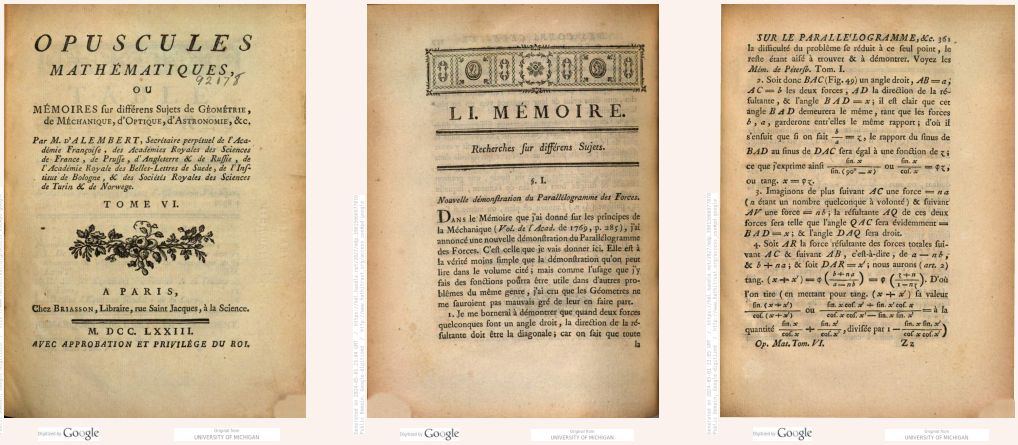


图 14.22: 德 • 阿伦伯特对力量的平行图的最后评论 (d’ Alembert, 1773)

> 所以, 要说的话, 我把眼睛从移动原因中转移出来, 只考虑到它们所产生的运动; 我完全禁止在动物体内 - 黑暗和形态的生物 - 只有能够将黑暗扔在科学本身上。
>
> d’Alembert, 1743 Traite de dynamique

这把他放在中间。**生存** *VIVA* [23] 争议, 从莱布尼兹以来分裂了大陆机械师:

> 这个问题..... 是由知道, 在运动中的身体的力量是比例性的生产大规模的速度, 或生产大小的速度的四分之一。雖然有爭議, 這一問題是一種原因, 不完美的無限性, 它為美術而存在, 我對今天的作品沒有任何提及。
>
> 这个问题是, 身体的力量是否与质量倍速度相比例, 或者与质量倍的速度方程。尽管它引发了争议, 但它的机械的完全无用使我在我今天出版的作品中没有提到。
>
> d’Alembert, 1743 Traite de dynamique

通过恢复动态作为平衡的问题, 德阿伦伯特的争议 “真正的措施” 以武力。

他的关键观点是令人误导的简单。纽顿的第二法则 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 可以重写为:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

这是平衡在应用力量之间的一种声明 $\mathbf{F}$ 阿伦伯特所称之为 “强度的内心,” $-m\mathbf{a}$. 加速器体可以被处理, 好像它在静态平衡中, 在印象的力量和内向力量的结合作用下。

虚拟速度的原则直接适用。对于粒子系统, 阿伦伯特的原则 國家:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

[23] 莱布尼兹 **生存** *VIVA* (“活力”) 相应于 mv^2 (后 动能 到一个恒定的因素) 不要与纽顿的混淆。**参观** *InSita* (“内在力量”) 是的。无情或抵抗国家变革。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 $\delta \mathbf{r}_i$ 虚拟移动是与限制相容的。

这种动态减少到静态。通过将无情的术语视为力量, 德 • 阿伦伯特统一了机械学, 并证明了虚功的非凡普遍性。无论身体和限制系统有多复杂, 每一个动态问题都可以通过伯诺利为静态设立的相同变化的框架来解决。

值得注意的是, 德 • 阿伦伯特本人并没有称之为此。“阿伦伯特的原则” 这个呼吁后来来了。在 **条约**他把它介绍为解决限制运动问题的一般方法, 而不是所谓的原则。洗礼是由后来的世代进行的, 他们认识到他的洞察的基本性质。

14.5.16 坎特 (1724 – 1804)

这个部分将以哲学的结局结束。

在他的 “自然科学的代谢基础”, Kant, 2023 讨论了动作的组成, 这与力量的平行图有关。

在福罗尼亚 (坎特提出的术语是指对身体运动的研究, 无论力量或身体本身的性质: 电影学。) 坎特探讨了结合单点的不同动作的想法, 以了解它们如何集成形成产生的动作。他的哲学方法旨在为这些概念提供一个形态基础, 以解释如何在一个点上不同动作可以被理解为统一的整体而不是仅仅是产生影响的原因。坎特本人没有制定任何具体的数学法则。

> **提议** 兩個同一點的動作組成, 只能被一个在绝对空间中呈现, 而不是其次, 相同的速度在相对空间的反向方向的动作 [被介绍] 与它相同。
>
> Kant, 2023 Metaphysical foundations of natural science

不知道这意味着什么。但后来又, 伊曼努埃尔 • 坎特是对物理学的伟大哲学家之一。

14.5.17 拉格兰 (1736–1813)

约瑟夫 • 路易斯 • 拉格兰奇 **机械分析**, 1788 年首次出版 (Lagrange, 1788), 代表虚功传统的峰值。在这场纪念品中, 拉格兰奇将虚拟速度的原则提升到基础。**所有** 机械　静态、动态、固体、液体　并将整个物体投入纯粹的解析形式。

拉格兰作为历史学家

拉格兰奇本人对他系统化的思想的历史发展非常清楚。和 **机械分析** 开启了一个广泛的历史调查, 跟踪机械从古代到自己的时代的发展。他讨论了亚基米德, 斯蒂文, 加利利奥, 托里克利, 德卡特, 瓦利斯, 胡格森, 伯诺利斯和阿伦伯特, 提供什么仍然是一个最好的历史记录的主题写的实践者。这个历史意识　在数学家中很少见到　使他的作品具有智力线性的感觉, 将读者连接到导致虚拟速度原则的长链发现。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

解析 项目

在前面, 拉格兰奇明确了他的革命意图:

> 在不寻找点的图像舞蹈。我所描述的方法不需要建造。无论是机械还是地质, 但是, 只有阿尔及利亚人, 要有正常、均匀的行走。
>
> ---
>
> 在这个工作中, 我们不会找到任何图表。我所提出的方法不需要结构, 也不需要地质或机械理性, 只需要算法操作, 以便按照正常和均匀的程序进行。
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique

这不只是骄傲。和 **机械分析** 它不包含一个单一的数字 在机械上进行处理的一个令人惊叹的成就, 以及拉格兰奇开发的解析方法的力量的一项遗嘱。

通用协调

拉格兰奇最有影响力的创新之一是引入 **通用协调**. 而不是描述一个机械系统在每个粒子的卡特西亚坐标的意义上 通常由于限制而不独立 Lagrange 通过最小组的独立变量来参数化系统。$q_1, q_2, \ldots, q_n$, 在哪里 n 是 自由度 的数字。

这种抽象是革命性的。一双旋转, 一轮滚动, 一个旋转顶部, 一个振动的线条 所有可以由相同的形式主义处理, 无论坐标的物理性质如何。和 q_j 可能代表角, 长度或任何其他适合问题的数量。虚拟速度的原则, 在这些通用坐标的意义上表达, 成为一个普遍的工具适用于自愿复杂的系统。

虚拟速度的原则

拉格兰奇对原则的普遍陈述如下:

> 如果一个系统有那么多身体或点, 你想要的, 每个人都被某种力量所吸引。是平衡的, & 以某种方式进行一个小动作, 在某种意义上, 每点都将一个无限的空间, 即表达其虚拟速度; 在力量的总和中, 每個地方, 在那裡它是應用的點上, 按同樣的力量方向進行多倍, 將永遠平等於零。
>
> ---
>
> 如果任何一个系统的任何数量的身体或点, 每一个由任何力量拖动, 是在平衡, 如果一个人给这个系统任何微小的运动, 通过它, 每个点穿过一个无限的小空间表达其虚拟的速度; 力量的总和, 每一个倍数的空间, 它的应用点穿越在同一力量的方向, 它将永远是零的。
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §1

然而, 在后期出版物中, 拉格兰奇表达了对原理作为自我显而易见的保留:

> 至于虚拟的原则的本性, 必须承认, 它不是足够显而易见的自己, 才能在原始原则上建立。
>
> ---
>
> 至于虚拟速度原则的性质, 必须承认, 它不够自我显而易见才能作为原始原则建立。
>
> Lagrange, 1788 Mécanique Analytique, Part I, Section I, §18

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

此段落, 在第二版中添加 (1811–1815) 拉格兰奇在他去世时正在审查的, 反映了他的成熟观点, 这样强大的原则需要从更简单的基础上进行示范。

拉格兰奇的证据通过普利区块

在一份发表在 **公立学校杂志** (Lagrange, 1798),Lagrange 提供基于 Pulley 区块的平衡原则的天才证据 (形象 14.23).

想法是想象, 系统上的所有力量都是由通过单一不可扩展的链条连接的管道系统行动的重量进行的。如果系统有身体在受力量的位置 P, Q, R, S, T 等, 这些力量是由管块产生的, 机械优势相当于 P, Q, R, S, T 相应地, 所有连接到一个重量的同一条线。

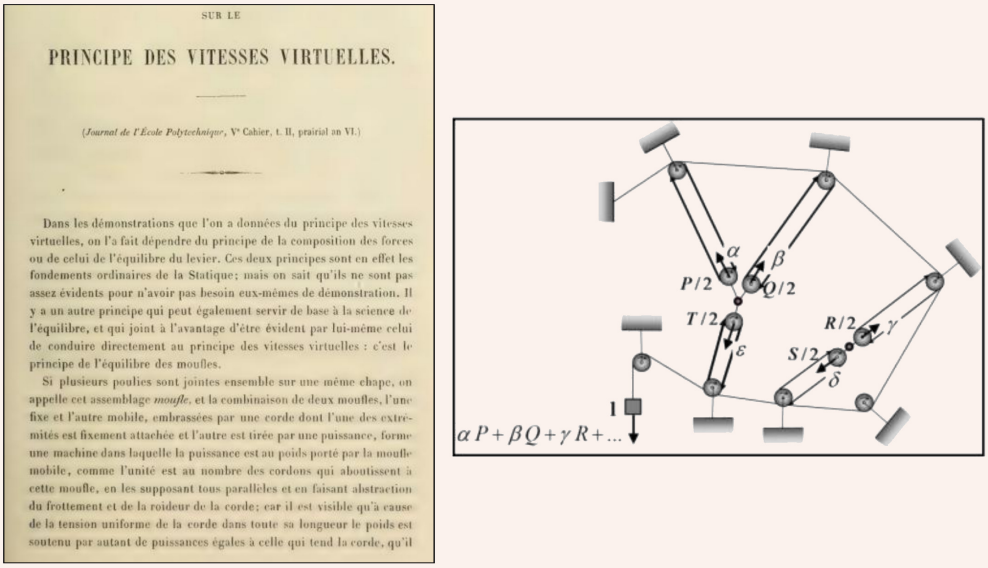
如果物体遭受无限的转移, 这些转移会因数量而改变波利系统中的距离。α, β, γ, δ, ε, ..., 然后, 线条的自由端移动通过:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + S\delta + T\varepsilon + \cdots$$

对于 平衡 , 这个 位移 必须消失 (否则, 重量会下降, 违反平衡). 因此:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \cdots = 0$$

“这正是虚拟速度的普遍原则的分析表达。”


SUR LE

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, Ve Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses virtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces ou de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les fondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas assez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il y a un autre principe qui peut également servir de base à la science de l'équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui de conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le principe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extrémités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

图 14.23: 拉格兰奇的虚拟速度原则的证据使用波利区块 (之后 (Salençon, 2018))

拉格兰多元化和限制力量

也许拉格兰奇对机械设备的最深刻贡献是他处理限制。如果系统受地质限制, 如下表达:

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \ldots$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

然后, 在这些限制下的虚功方程式相当于:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \cdots + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \cdots = 0$$

為 **任意** 变化, 在哪里 λ, μ, ν 无限的尺寸 - 有名的 **拉格兰多元化**.

拉格兰奇随后提出了关键观察, 即 $\lambda\,dL$, $\mu\,dM$, 等, 具有与强度术语相同的数学形式 $P\,dp$, $Q\,dq$ 等等。这引发了一个深刻的物理解释: 拉格兰奇多元化器 **是** 限制力量　反应。每个地质限制方程式均等于一个或多个在系统上运作的力量; 相反, 这些力量可以替代地质限度方程, 以便构成体被认为是完全自由的。多元化器正是代表身体因其连接而遇到的抵抗, 或者必须平等和反对身体所施加的压力。

这种观念　力量和限制是双重概念　位于现代结构力学的核心。

动作的拉格兰方程式

以色列的可怕成就 **机械分析** 它是任何机械系统的整体运动方程的衍生。结合阿伦伯特的原则与通用坐标的形式主义, 拉格兰奇表明, 一个系统的运动与 n 自由度 由 n 二级差异方程式:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.2}$$

哪里 T 是动能和 Q_j 他们是普遍的力量。

當能量從 势能 中產生時 $V(q_1, \ldots, q_n)$ 因此, 这 $Q_j = -\partial V/\partial q_j$, 方程式采取优雅的形式:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{14.3}$$

哪里 $L = T - V$ 是的, **拉格兰** 系统的。

这些是 *Euler - Lagrange* **方程式**, 解析机械的基本方程式。每一个动态问题 - 从行星的运动到弹性身体的振动 - 减少到写下拉格兰语并解决这些方程式。古典机械的整个建筑, 由加利利奥、牛顿、伯诺利斯、尤勒和德阿伦伯特在两世纪内建造了五角形, 在这里被缩小到一个单一的程序。

14.5.18　四人 (1768–1830)

四人 (Fourier, 1798) 拉格兰的框架扩展到 **不平等限制**观察到这一点 “如果你把抵抗视为力量… 身体可以被认为是自由的, 瞬间的总数为所有可能的转移都低。” 这种延伸可以使治疗 **单方面限制** 例如, 接触没有紧张　一个身体在表面上休息, 例如, 可以推但不能拖。虚功原则变成一个 **不平等**:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \le 0$$

适用于所有与限制兼容的虚拟移动。这个表述打开了现代变异不平等理论和接触问题的机械。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

14.5.19 拉萨 • 卡诺特 (1753–1823)

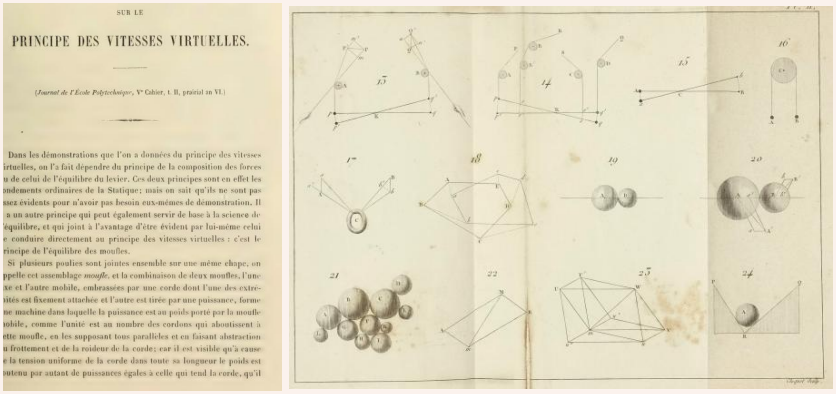
V

尼古拉斯 • 马格里特 • 卡诺特 (1753–1823) 首先要记住, 如 “胜利组织者” 是法国革命军队组织的军事工程师和州长。但在他的政治职业生涯消耗了他之前, 又是 1797 年从政权下跌后, 卡诺特对机械学做出了基本贡献, 这将拉格兰奇的分析论与实用机器科学之间的差距交叉。

卡诺的 **机器通论** 于 1783 年首次出版 (Carnot, 1783)；当时他只是皇家工兵团一名默默无闻的上尉，该书几乎未受关注。二十年后，在政治失势之后，卡诺以 **平衡与运动的基本原理** (Carnot, 1803) 为题出版了大幅修订版。这些著作构成了第一部真正从理论上论述一般机器科学的专著。

为了优秀的研究和卡诺特的英语翻译 **试验**看见 Pisano, Coopersmith, and Peake, 2021.

卡诺特的主要创新是概念 **地质运动** ● 地质动作, (Carnot, 1803). 他将这些定义为依赖于机械系统的地质, 而不是其动态的动作。“相反的动作总是可能的。” 在现代术语中, 地质动作是我们将称之为 **与限制相容的虚拟移动**其余的回归性要求 (图 14.24).


SUR LE
PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

(Journal de l'École Polytechnique, Ve Cahier, t. II, prairial an VI.)

Dans les démonstrations que l'on a données du principe des vitesses irtuelles, on l'a fait dépendre du principe de la composition des forces u de celui de l'équilibre du levier. Ces deux principes sont en effet les ondements ordinaires de la Statique; mais on sait qu'ils ne sont pas ssez évidents pour n'avoir pas besoin eux-mêmes de démonstration. Il a un autre principe qui peut également servir de base à la science de équilibre, et qui joint à l'avantage d'être évident par lui-même celui e conduire directement au principe des vitesses virtuelles : c'est le rincipe de l'équilibre des moufles.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on ppelle cet assemblage *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une xe et l'autre mobile, embrassées par une corde dont l'une des extré- ités est fixement attachée et l'autre est tirée par une puissance, forme ne machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle obile, comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à ette moufle, en les supposant tous parallèles et en faisant abstraction u frottement et de la roideur de la corde; car il est visible qu'à cause e la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur le poids est outenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde, qu'il

图 14.24: 卡诺特的描述系统, 地质动作和影响机械 (Carnot, 1803)

卡诺特介绍了这个术语 **活动时刻** 如今我们所称之为 **工作**, 力量的产品和位移在力量方向。使用地质动作和活动时刻, 卡诺特提出了一项普遍的原则: 在任何受限制的身体系统中, 地质运动正是那些对其整体活动时期的消失。这是一种虚功原理的形式, 用语言表达, 适合分析机制而不是拉格兰奇的抽象形式主义。

卡诺特的机械学的一个特点是他对 **身体硬**硬体在影响时或突然施加限制时遭受速度的即时变化。对于这些系统, 卡诺特引发了他的理论失去 **生存** *VIVA* 在无弹性碰撞中：**生存** *VIVA* 失去的同等 **生存** *VIVA* 这将是由 “失去速度”:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i U_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i|^2 \tag{14.4}$$

哪里 $\mathbf{U}_i$ 和 $\mathbf{V}_i$ 是影响前和后的速度。这个结果, 有时被称为卡诺特的理论。, 表明, 在所有与限制相容的动作中, 实际冲击后的动作减少了动能的损失。

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

为了逐步变化的力量, 卡诺特将他的分析扩展到连续性原则。机器在移动传输发生时以最大效率运行, 而没有速度的突然变化。这种洞察力对机器设计产生了即时的实用影响, 以及卡诺特的儿子萨迪后来利用的深刻理论影响: 一个可逆转的过程的概念。它是拉扎尔的地质运动的直接后裔。[24]

如果拉格兰奇将虚功转化为纯粹分析的分支, 卡诺特将其转化为工程工具。他的地质动作概念提供了虚拟位移的物理解释, 比拉格兰奇纯粹的解析定义更为混凝土 , 他的重点是作为机械分析中的基本量预测了以能量为基础的方法, 将占据十九世纪物理学的统治。

14.6 埃皮洛格

通过一个传记, 给我们的物理学同事一个小点, 并用他们的四种力量的定义结束这个章节。

重力 力量是两大群体之间的吸引力。它是对重力拖动负责的力量, 与质量的物体相互运行。根据牛顿的普遍重力法则, 两大体之间的重力强度是直接比例于它们的大体产物, 反之亦然比例于其中心之间的距离方。

电磁 力量是电充电粒子之间的作用。包括两种电力。(充电粒子之间的吸引或反射) 和磁力 (移动负担之间的相互作用). 这就是阻止一本书通过桌子掉下来的力量, 因为在原子层面上, 你的书和桌子都是由原子组成的。(含有原子和中子) 被电子包围。书中的电子和桌面上的电子因负载而互相反对。同样, 图书的原子中的电子和桌面表面的原子也互相逆转。负充电的电子之间的这种反动力是阻止你的手通过桌子。

弱核 强度负责某些类型的放射性分裂和相互作用涉及元素粒子。

强大的核 力量是将原子和中子在一个原子的核心中结合在一起的力量。它是四个基本力量中最强大, 但具有非常短的范围, 只在与原子核的大小相似的距离上行动。强大的核力量负责保持原子核相结合, 尽管在积极负载的原子之间发生了电静反应。

14.7 结论

反映我们对物理学和机械学的当前理解, 看到人类在理解力量概念方面取得了巨大的进步是令人兴奋的。最初与神圣的干预和抽象哲学相结合, 这些早期思想现在看起来远离我们的直接、实验性讨论。事实上, 从感知力量作为神意的表现到通过现代物理/机械学的清晰、准确镜头来理解它的旅程, 表明了显著的发展。

这种转变, 由 16 世纪末开始的科学革命催化, 强调了我们无休止的知识追求和从神秘解释到实验性的深度转变。("底上") 和理论 ("顶下") 科学。

因此, 我将适当地结束一个引用归功于量子机械和量子电极动力学的创始人之一保罗 • 迪拉克 (Paul Dirac)。[25]

[24] 萨迪 • 卡诺特 (1796–1832) 以热力学为基础, 他的 **关于火力发动机的评论** (1824). 他从父亲那里继承的概念装置, 尤其是回归过程的概念, 在这项工作中发挥了关键作用。

[25] https://freethoughtblogs.com/singham/2013/03/24/paul-dirac-on-religion/

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 显然, 恐龙的现状和人们在原始宗教中表现出历史上的兴趣源于同样的原因　一个渴望了解原始人如何面对世界。古老的宗教是试图通过个性化理解自然的力量。
>
> Dirac, 1963 *"The Evolution of the Physicist's Picture of Nature"*

时间总结

表 14.1: 时间力发展和虚拟原则。

年度	作者	参考	主要贡献
c. 450 BCE	英雄	n / a	"爱情" 和 "冲突" 反对动作的原因 (早期武力类似的原始人)
c. 350 BCE	柏拉图	Plato, 350 BC	自我动作作为主要原因; 在运动中的机构的早期转形框架
c. 350 BCE	亚里士多德	Aristotle, 2000	循环速度的解释; 概念 "权力"
c. 250 BCE	阿基米德	Archimedes, -250	严厉的证据 法律; 没有一般 变分原理
c. 100 BCE	波西多尼 / Stoics	n / a	强力作为活跃 "紧张"• 明确的推 / 冲突重点; 代理人 / 病人双重性
c. 530	菲律宾	Philoponus, 1993	亚里士多德的批评; 印象深刻的冲动在接触后持续 (原子动作)
c. 1020	阿维森纳	n / a	**梅尔** (倾向 / Impetus) 如印象的趋势; 动作持续不不断移动
c. 1120	巴格达	n / a	强迫改变动作 (加速与速度的区别; proto-$F \propto a$)
c. 1250	乔丹斯 • 德 • 内莫尔	Nemore, 1250	"位置 重力"• 虚拟移植在有限的系统中
c. 1340	饰 Jean Buridan	Buridan, 1991	精致的冲动理论; 类似于内立的陈述 (动作持久, 除非抵抗)
c. 1500	莱昂纳多 • 达芬奇	Vinci, 1881	简单机器的手稿; 比例规则; 实用合成
1586	西蒙 • 史蒂芬	Stevin, 1586	**克劳特克朗**永恒运动不可能; 力量的平行图
1594	加 利 利 奥 Galilei	Galilei, 1594	"获胜, 在速度中失败" (武力与动作之间的争议)
1615	所罗门因果	Caus, 1615	**动势力量的理由**引入的术语 "工作" (工作)
1637	雷恩 ´ 卡特	Descartes, 1898	无限的迁移; 坦根建筑; 空间 (没有时间/速度)
1644	福音托里克利	Torricelli, 1644	中央重力标准: 平衡 iff 常见的 C.G。不能下载
1670	约翰 • 瓦利斯	Wallis, 1670	超越特殊方向的普遍化组成; 更广泛的力量分解
1686	G. W. 莱布尼兹	Leibniz, 1686a	**生存** *VIVA* (mv^2) vs 动机 (mv): "力量" 与工作/能量相关
1687	伊莎克 • 纽顿	Newton, 1687	动作法则; 从动态中的力量的平行图
1717	约翰 • 伯诺利	Bernoulli, Johann, 1725	虚拟速度的第一条通用声明 (信给 Varignon)
1725	皮埃尔 • 瓦里尼昂	Varignon, 1725	瓦里尼昂的时刻理论; 传播/组织早期结果
1726	丹尼尔 • 伯诺利	Bernoulli, Daniel, 1726	力量的平行图的静态解释; 组成的巩固
1743	珍 • 德 • 阿伦伯特	d'Alembert, 1743	通过虚拟力量扩展到动态; 虚拟工作风格改革
1783	拉萨 • 卡诺特	Carnot, 1783	"地质动作"; **活动时刻** *é*• 机械理论
1786	伊曼努埃尔 • 坎特	Kant, 2023	动机组成的哲学处理 (绝对/相对空间)
1788	约瑟夫 • 拉格兰	Lagrange, 1788	系统化; 作为限制力量的多元化; 解析机械
1798	约瑟夫 • 福里	Fourier, 1798	不平等 (单方面) 限制; 反应被视为力量
1864	詹姆斯 • 马克思	Maxwell, 1864c	单位荷载方法; 相互理论
1868	奥托 • 莫赫	Mohr, 1868	系统单位 荷载 方法为框架

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



卡拉瓦乔《圣保罗的转变》*(1601)*

可见的力量从他的马上击中保罗 - 原因是看不见的, 效果是不可否认的。力量本身仍然是神秘的, 而其后果却显而易见。

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

Interlude III: 在哪里奖学金满足激情

接下来的两个章节从一个严格的历史或主题演示开始, 讨论了两个主题, 我有一个强烈的个人兴趣。最重要的是章节 15, 在那里, 结构与建筑之间的微妙交叉被研究。章节 16 然后探索一个不同的交叉点: 地震和神话之间的。

严格说, 没有一个主题完全属于本书的范围内; 但是, 它们反映了这些两个关闭章节自然分散的持久个人利益。

审阅稿

15 建筑 & 结构

摘要

这个章节探讨了建筑与结构工程之间的复杂和不断发展的关系　两种学科曾经在大师的形象中团结起来，但自十八世纪以来越来越不同。以维特鲁维乌斯在他的基本原则开始。建筑—坚定，用途，和 威尼斯（力量、用途和美丽）我们跟踪这些理想是如何通过阿尔伯蒂和帕拉迪奥的复兴条约传达的，由埃菲尔和梅拉特等工程师适应工业时代材料，最终在比利顿二十世纪的概念中重新定义。“结构艺术。”篇章 描述大人物 投影师设计师 - 构建者，他们实现了结构逻辑和美学表达的整合，代表我们职业的最高呼吁 - 同时面对关于结构工程实践当前状态的不舒服真相。在一个计算工具的时代，许多工程师已经减少了“技术人员和建筑理念的支持者，”我们要看什么区分了创造力。“5 百分比”谁继续推边界。而不是支持比林顿争议的术语“结构艺术，”我們為更準確的定義提出了“结构性建筑”并指出，前进的道路不是拒绝技术，而是重新发现了我们先驱取得成就的基本原则。

15.1 引入 429
15.1.1 第章 组织 430
15.2 维特鲁维亚传统 431
15.2.1 马库斯 • 维特鲁维乌斯 • 波利奥: 第一位建筑影响者 . . . 431
15.2.2 维特鲁维乌斯在复兴时期重新发现 437
15.2.3 人类学与规模问题 443
15.3 Interlude: 建筑师和工程师 - 艺术与科学? 453
15.4 先驱们 455
15.4.1 飞翔的蝴蝶: 结构逻辑可见 . 456
15.4.2 古斯塔夫 • 艾菲尔 (1832–1923) 459
15.4.3 路易 • 亨利 • 苏利文 (1856-1924) 461
15.4.4 罗伯特 • 梅拉特 (1872–1940) 462
15.4.5 奥古斯特 • 佩雷特 (1874–1954) 463
15.4.6 爱德华 • 托罗贾 • 米雷特 (1899–1961) 464
15.4.7 路易吉神经 (1891–1979) . . . 467
15.4.8 里卡多 • 莫兰迪 (1902–1989) 472
15.4.9 基督徒人 (1927–2018) 473
15.4.10 拉哈曼 • 汗 (1929–1982) . . . 474
15.4.11 The Progettisti 比较: 设计师 - 建筑师及其材料 478
15.5 结构性形状: 关键人物 479
15.5.1 凯特纳 479
15.5.2 壳和膜 482
15.5.3 相互结构 484
15.5.4 数学优化:Maxwell、Michell、Baker 和 Behini 487
15.5.5 科达: 当建筑师和工程师碰撞时 492
15.6 计算机一代 494
15.6.1 和“例外”建筑师 494
15.6.2 结构工程师: 五个百分点 . . . 497
15.7 Vitruvius 修订 504
15.7.1 解体结构艺术 505
15.7.2 什么是艺术? 505
15.7.3 结构建筑:Llunji 的宣言 . . . 507
15.8 结论 508

15.1 引入

建筑与工程之间的关系就像建造自己一样古老。[1]. 在十八世纪这些学科的专业化之前，一个单一的人物　大师建造者　想象、设计和构建了古代和中世纪伟大的结构。哥特式大教堂、

[1]这个章节从与建筑师帕特里西亚 • 加尔迪耶里 (Patrizia Galdieri) 的许多对话中成长，他的好奇心建筑与结构工程之间的界限帮助我自己的觉醒。

审阅稿

拜占庭教堂的城堡和罗马道路的桥梁, 不是从专家的合作中出现的, 而是从拥有实用的建筑知识和美学敏感性的人身上出来。

这个团体开始与理性机械的出现和专门教育机构的成立相结合: ´堂, **桥梁和街道**´面 (1747)，该´**合物学科** (1794) 以及他们在整个欧洲的对手。和 **英格兰**´**雄**在数学和机械学中训练, 从 **建筑师**, 在组成、绘画和历史上训练。曾经是单一的召唤, 变成了两个职业, 每个具有自己的价值观, 方法和机构结构。

与本书的其他章节不同, 这些章节跟随着一个主要的时间结构, 这个章节采用了一个主题方法。一个纯粹的时间治疗不仅会证明无聊, 而且会不够地捕捉各种形状和思想之间的复杂相互作用, 形成了建筑结构关系。结果的内容可能看起来异常 - 反映, 可以承认, 作者自己的特殊利益和热情 - 但这个精致的组织更好地服务我们的目的, 了解技术创新, 美学愿景, 理论反思在几个世纪和大陆中互相影响。其实, 这个章节与这章节 9[2] 他们是我最喜欢的写作, 因为他们提供了表达个人兴趣和偏见的机会, 否则可能仍然隐藏在技术曝光下, 这支作品的剩余。

这些学科之间的紧张局势　以及它们的分离是否代表进展或损失　动画了这章。一方面, 结构工程作为科学学科的出现使其取得了前所未有的成就: 桥梁延伸距离似乎是不可能的中世纪建筑师, 塔楼升高到高度破坏维特鲁维亚比例规则, 它们是如此薄, 以至于它们接近物质行为的理论界限。另一方面, 这种专业化创造了一个劳动的分裂, 经常将结构工程师转移到技术顾问的角色, 解决其他人定义的问题而不是从他们的创建开始塑造建筑的概念。

在本章中审查的数字　从维特鲁维亚到文艺复兴大师到十九世纪和二十世纪伟大的工程师建筑师　代表了对这种根本紧张的不同反应。有些人, 如 Nervi 和 Torroja, 取得了技术主导性和美学视觉的合成, 与任何纯粹的竞争对手。“艺术家” 成就。其他人, 如 Gehry 和 Calatrava, 挑战了结构工程师分析形状的地质复杂性, 新的计算工具必须开发来实现它们。其他人, 如比林顿, 一直在寻求一个理论框架, 将结构工程作为一个自主的创意学科, 而不是对建筑的指导。

这个章节不提供这些紧张局势的轻松解决方案。相反, 它提供了思想结构工程师导航所需的历史和概念背景。维特鲁维亚三角形　力量、用途和美丽　仍然像两千年前那样重要, 即使实现这些目标的手段已经超越了认可。理解这个传统, 以及那些体现了它的伟大实践者, 对于任何渴望练习结构工程的人来说都是必不可少的, 不仅仅是作为技术专业, 而且是值得称之为创造性的学科。

15.1.1 第章 组织

该章节分为七个主要部分, 每一个讨论了建筑结构关系的不同方面:

§15.2 维特鲁维亚传统 我们从西方建筑理论的基本文本开始, 通过三个分支: §15.2.1 马库斯 • 维特鲁维乌斯 • 波利奥 (Marcus Vitruvius Pollio) 和他的全面治疗 **建筑**建立著名的三位一体 **坚定**, **用途**, 和 **威尼斯** (§3.2.4.1) 跟踪维特鲁维亚原则通过阿尔伯蒂和帕拉迪奥的复兴条约传达; §15.2.3 探索从维特鲁维亚到莱昂纳多的天文传统 **模块**.

§15.3: Interlude - 建筑师和工程师 对建筑师和工程师的角色在十八世纪如何分开, 创造

[2] 大挑战: 催眠, 弹性和解析机械的诞生。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

了今天持续的专业紧张局势, 与 Ada Louise Huxtable、Eduardo Torroja 和 Le Corbusier 关于这些学科之间的正确关系的展望。

§15.4 **原名:The Pioneers** 章节的心脏描述了伟大的 **投影师**工程师通过技术掌握和美学视觉的整合实现了结构艺术。从哥特式飞翔的胡萝卜到埃菲尔的铁建筑, 梅拉特的混凝土架, 托罗贾的相关术语子, 内尔维的火山, 莫兰迪的压缩混凝土地, 门的桥梁和汗的管道滑雪。

§15.5 **结构性 Morphogenesis** 形成的传统, 结构形状从荷载材料和建筑而不是自愿的美学偏好要求中产生的 从基层研究到膜实验到数学优化方法。

§15.5.519 **世纪建筑师与工程师之间的竞争** 工业时代建筑师和工程师之间的专业竞争的历史性审查, 包括艾菲尔塔竞赛案例研究、克里斯特宫和布鲁克林桥。

§15.6 **标签: 计算机一代** 面对通过计算工具的结构工程实践转型, 对象创造性的“五分之五”超越纯技术计算 从罗伯特森世界贸易中心到贝克的托波学优化滑板到 Virlogeux 的精致桥梁设计, 同时, 研究了像 Candela、Gehry 和 Calatrava 这样的“特殊建筑师”的工作。

§15.7 **维特鲁维亚修订** 比林顿对“结构艺术”的概念进行批判性审查, 并支持更准确的术语“结构建筑”, 认为维特鲁维亚三位一体仍然是评估计算时代结构成就最适当的框架。

15.2 维特鲁维亚传统

15.2.1 马库斯 • 维特鲁维乌斯 • 波利奥: 第一位建筑影响者

没有建筑 **理论家** 具有如此重要的, 长期的影响力, 如 Marcus Vitruvius Pollio。(A.K.A。维特鲁维亚) 更具体地说, 他的书。**建筑师**, **书籍** *10* 如今被称为 **关于建筑的** *10* **本书** (Vitruvius and Morgan, 1914). 有趣的是, 在本书的背景下, 他经常被标记为罗马建筑师。**和** 军事工程师。写在奥古斯特统治期间, 并致力于皇帝, **建筑** 其中包括 10 本书, 涵盖建筑师的教育、建筑材料、寺庙建设、公共和私人建筑、楼层和地板、水供应、天文学和时间维护以及民用和军事机器。它可能是第一项全面的研究, 包括不仅建筑建设, 而且机械工程的许多方面, 包括建筑管理、民用工程、材料工程、军事工程和城市规划。

15.2.1.1 Vitruvius 关于教育

正如许多毕业生承认他们的论文委员会一样, 维特鲁维乌斯向父母表示感谢, 并声称不被财务考虑驱动。[3]

> 因此, 我非常有义务和无限的感谢我的父母, 他们批准了这个雅典法律, 并为我应该被教导一个艺术。它是不能在没有学习和自由教育的情况下实现完美的一种。因此, 感谢父母的注意力和教师给予的教

[3]在现代演讲中, 他寻求权威超越名人。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 导, 我获得了广泛的知识, 并通过我在文学和艺术主题上所享受的乐趣, 以及在写条约时, 我已经获得了知识产权, 其主要成果是这些思想: 过剩是无用的, 而不感受到任何东西的欲望是真正的财富。然而, 有些人可能认为这一切没有任何后果, 并认为智者是那些有足够的钱的人。因此, 在追求这个目的时, 许多人承担着无情的保证, 同时获得了名声和财富。但是, 在我身上, 凯撒, 我从来没有渴望金钱是我的艺术, 但已经走在原理上, 这善良的财富和财富是最有价值的。反对。
>
> Vitruvius, 1960

维特鲁维乌斯提出了建筑师应该有广泛的教育, 而不是在一个早期阶段专门学习 一种感觉, 与现代关于过度紧密的技术培训的担忧相响:

> 1. 建筑师必须具备许多人的知识。学习的分支和不同类型的学习, 因为它是由他的判断其他艺术所做的所有工作都被测试。这个知识是实践和理论的孩子。... 4. ... 建筑师应该是一个受过教育的人, 以便在他的条约中留下更持久的记忆。其次, 他必须有绘画的知识, 以便他可以轻松地制作绘图, 展示他提出的工作的外观。地质学在建筑方面也非常有帮助, 特别是它教导我们使用规则和合并, 这使我们特别准备好在基础上建造建筑的计划, 正确地应用广场、层面和板块。5. 历史的广泛知识是必需的..... 6. 至于哲学, 它使建筑师高思熟而不是自我承认, 而是让他善良、公平和诚实, 没有偏见。8. 音乐, 建筑师也应该理解, 以便他可以了解数学理论和数学论。9. 在剧院里, 也有铜船。10. 建筑师也应该有关于研究的知识以气候问题为基础。我认为, 人类没有权利急于向建筑师教授自己, 从小就没有爬上这些研究的步骤, 因此, 在许多艺术和科学的知识中受护理, 已经到达了圣地的高度。
>
> Vitruvius, 1960

正如我们许多科学家一样, 维特鲁维乌斯也对他的写作技能感到担忧, 要求凯撒的宽恕。“如果任何事情都被定义, 对语法规则太少考虑。”

15.2.1.2 Vitruvius 工程师

作为军事工程师,Vitruvius 为结构设计制定了简单的规则。他的 **建筑** (Vitruvius, 1960) 事实上, 它是第一组记录的编码规则结构, 由论文组成, 关于建筑、工程、卫生、实用水力学、音响气体等各种主题。大部分材料似乎是由希腊建筑师提取的早期废弃交易。著作自复兴以来一直被研究为古典罗马建筑艺术的论文, 图 15.1b. 对于所有实用目的, 它可以作为建筑项目的指南。

实用内容的 **建筑** 是广泛的: Vitruvius 讨论建筑材料的特性 (石头、沙子、木材), 基础设计, 墙壁建设, 以及适合不同建筑类型的比例。描述经典命令 (多里克, 伊昂尼克, 科林蒂亚) 它们的适当应用, 与人体的建筑比例有关 著名的维特鲁维亚人, 莱昂纳多后来会描述, 我们进一步研究。§15.2.3—并提供建筑机械的详细报告, 包括火柴、盖子和水升装设备。

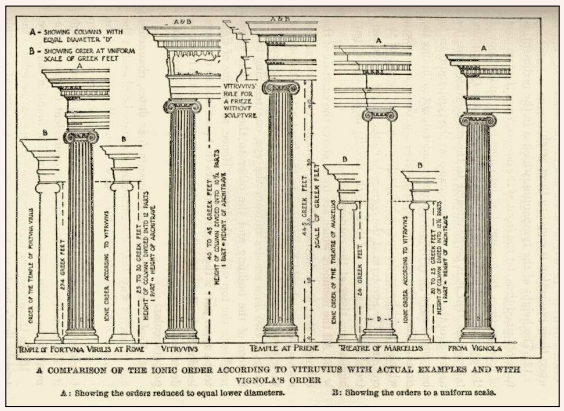
在这本书中最突出的是比例性规则。其中一个读到:

> 如果宽度超过四十英尺, 让列放在内面和对面的列之间。他們應該像前面的柱子一樣高, 但他們的厚度應該是相對的減少: 因此, 如果前面的列在厚度一八分之一, 這些要是一十分之一。如果前者是第九或十一, 则应以相同的比例减少。因為他們的減少將不可分辨, 因為空氣沒有自由玩在他們身上。然而, 如果它们看起来太薄, 当外层有二十四个流浪时, 这些可能有二十八或三十二个。因此, 额外的相关术语子数量将相当于头骨体内的损失, 阻止它被看到, 从而以不同的方式, 列将变得看起来平等厚。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) Vitruvius 介绍 **建筑** 天皇奥古斯图



(b) 维特鲁威比例法则，(Vitruvius, 1960)

图 15.1: 维特鲁维亚

> Vitruvius, 1960, p. 4.4.2

这些规则是适用的, 因为这样设计的柱已经被经验发现是满意的　它可能是一个没有屈曲或崩溃的建筑的一部分。此外, 经验已经表明, 柱可以建造到任何规模, 与 “现代” 直觉 (Heyman, 2003). 这些规则工作了几个世纪, 因为用于古老建筑的材料　石头和某种程度的木材　在完成的结构中非常轻微地强调。非常大宽的石桥可以建造, 教堂建造到令人震惊的高度; 所有需要的是, 形状 (一个拱戒指, 一个飞翔的泡沫) 它应该是正确的, 这是一个地质要求, 必须通过遵守比例规则来满足。当然, 没有人知道结构是多么安全, 因此过程必须是试验和错误之一。(失败).

维特鲁维亚的态度　比例法则　这仍然是多世纪以来主导设计方法, 因为 **形式** 这是最重要的目标。力量不重要 (石头很强), 硬度可能从未发生在建筑师作为一个问题, 稳定性被处理地质上 (例如, 如何塑造一个拱以避免导致裂缝的紧张压力, 这反过来会导致失败。).

相对性限制: 桥梁设计 对于建筑物, 比例规则仍然足够, 但桥梁设计早些时候揭示了其限制, 而不是加利利奥的理论挑战。如 Huerta, 2018 已被证明, 弓桥设计的问题本质上是不比例的: 对于某种交通负载, 较小的桥梁 “弱点”　更敏感于过渡负载的作用　越大。然而, 直到十八世纪, 已知的规则是比例的。阿尔伯蒂的 **重建建筑** (Alberti, 1485) 命令, 皮宽应该是三分之一的范围和拱厚度一十五条规则从罗马前例产生的, 并引用在整个建筑协议为三个世纪。

法国工程师 Hubert Gautier (1660–1737) 在他的 **桥梁条约** (1716) (Gautier, 1765) 第一個完全致力於橋樑的教導, 承認對小弓的比例規則失敗。他注意到, 一... **双子座** (六脚) 拱 由 Alberti 的规则设计的 span/15 将具有厚度不到 6 英寸, 显然不够与所需的 1.5 英尺相比。Gautier 解释了差异:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 有一座大桥携带一辆大车, 比一座携带我自己的汽车更负担得多。
>
> 大型携带重货物的桥梁比同一行货物的小桥更少负载。
>
> Gautier, 1765 Traité des ponts

Gautier 的说法需要澄清: 他意味着 **比例** 交通 荷载 到桥本身的重量比大桥小得多。一个大桥, 重量较高, 由其自我重量占主导地位; 通行运输代表了整体荷载的不可忽视部分。一个小桥, 更轻, 经历相同的运输, 相对较大的干扰。因此, 比例规则 (t/s = const.) 缺少小间隔: 活载的绝对大小与结构不规模, 即使恒载也这样做。这是第一个明确的认可, 拱桥设计是 **不比例**.

最终解决方案来自 Jean Rodolphe Perronet (1708–1794), 他是法国国立桥路学校的创始人和首任校长，留下了若干已发表和未发表的论著。最突出的是他未出版的 **纪念碑上, 你必须在钥匙上的衣服, 在各式各样的門口** (记忆在开斯顿的胡子厚度, 桥梁的不同谷).[4]. 在 1748 年未出版的记忆中,Perronet 从 200 多个现有桥梁中收集了数据, 并产生了一个不比例的规则: 对于半圆架, 键盘厚度 t (脚下) 应该是 $t = s/24 + 1 - s/144$, 在哪里 s 是 span。这个规则几乎减少了 Alberti-Gautier 为大桥所规定的厚度的一半, 同时为小桥提供足够的厚度。佩罗内特对他的态度进行了实验性辩证:

> 在建筑方面, 只有投机不能超越经验。
>
> , 引用在 Huerta, 2018 *"Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet"*

他的规则一直在使用超过一个世纪, 实验方法　比较提议的设计与成功前例数据库　预测现代基于性能的工程。

有关分析细节，请参见 §63.3.2.3

形象 15.2 描述了从古代到十九世纪的拱桥梁设计的实验规则的进化, 并将拱厚度比例定义为 t 到 Span s 作为 spane 的功能。顶部的水平带代表典型的罗马桥比例 ($t/s \approx 1/10$ 到 $1/12$) 阿尔伯蒂 - 加泰罗尼亚统治 $t/s = 1/15$ 由古典来源继承, 并在复兴时期的条约中编码 - 三世纪以来恢复了标准比例规则。1717 年,Gautier 的贡献是承认这个比例规则失败了小型通道, 交通负载变得相对较大; 他的紧缩曲线为小型的通道。($s < 40$ 脚) 这是第一个不相对的方法。佩罗内特的 1748 条规则 $t = 0.325 + 0.035s$ (在米), 代表着一个决定性的进步: 通过研究超过 200 个现有桥梁, 他证明大架可以建造比阿尔伯蒂规定的更轻的 - 几乎将需要的厚度为 30 米以上的宽度的一半。1850 年之后, 工程师认识到包含平面根的规则更好地捕捉了尺寸和所需厚度之间的非线性关系, 导致 Dupuit 的公式。$t = 0.2\sqrt{s}$ 特拉图文的 $t = 0.14\sqrt{s}$. dash 的线路在 $t/s \approx 1/56$ 表明所指定的实际低限度 Heyman, 1982 从他的分析中世纪的特斯顿桥 - 一个令人惊叹的展示, 在现代分析的到来之前, 实验设计可以推动结构性滑动。这

[4]我无法找到这份文件的 PDF 版本, 原创手稿。(Ms. 2202) 被拘留在 **图书馆 桥梁与街道** 在巴黎。对 Perronet 的桥梁工程感兴趣的读者可以咨询他的后期出版作品 (Perronet, 1782–1788) 或 (Perronet, 1782).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

些曲线的逐步下降反映了工程师对通过积累经验减少材料的越来越大的信心, 预测从地质规则的转变到基于机械的分析, 最终会取代它们。

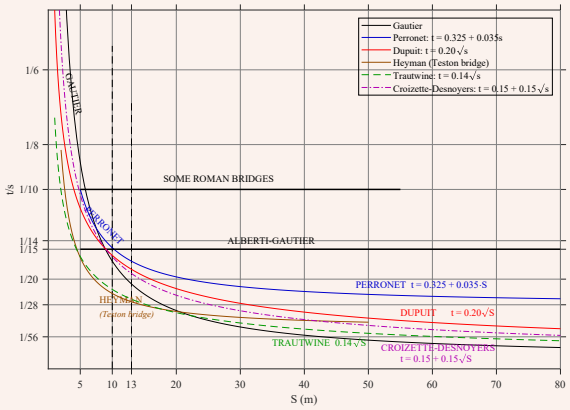


图 15.2: 拱桥梁设计的实验规则的进化 (之后 (Huerta, 2018 PDF)).

因此, 桥梁设计规则的进化预测了从地质到机械思维的更广泛的过渡。在维特鲁维亚的比例性足以使建筑物的稳定仅依赖于地质学, 桥梁需要注意力量的绝对大小 - 一个概念转变, 加利利奥将理论上编写, 最终会改变所有的结构工程.

加利利奥的挑战 这种舒适的比例性制度持续了近两千年, 直到新材料和新的野心需要不同的方法。它是 Galilei, 1632 PDF 谁挑战了这两个基本概念: 首先, 他介绍了应力的概念。§7.2.2 (在一个梁, 图 15.3a) 作为一个独立于地质学的设计观点; 第二, 他声称有可扩展性的限制结构不能在保持其比例时无限地扩大。[5], 图 15.3b. 与加利利奥一起, 纯粹地质设计的时代开始归功于机械学的时代。然而, 这一转变的全部后果将需要几个世纪的时间来发展, 对于传统材料的建筑物来说, 维特鲁维亚比例性仍然是现代时代的可用指南。

> 我曾经拿起骨头的形状, 延长了三次, 然后厚化了它在大动物中可以与较小的动物相似地运作。骨头服务于较小的动物: 这里是图片; 你看到如何不比例形状在大骨中变成。因此, 显然, 如果一个人愿意要在一个巨人中保持那些普通人的成员比例, 就需要找到更硬、更耐用的材料来形成他的骨头, 或者让他的强度相对较弱。如同在中等人身上; 否则, 成长到不合理的高度, 他会被自己的重量打破, 并跌倒。
>
> Galilei, 1632 PDF "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican"

15.2.1.3 建筑师维特鲁威: 历久弥新的三原则

雖然 **建筑** 包含了关于古代材料和技术的许多有用的信息, 这些实用规则已被机械和现代结构分析的出现长期超越。维特鲁维乌斯的生存遗产是他对建筑的更抽象分析, 在那里他定义了三个不可分割的品质 他的著名建筑完美。**维特鲁维亚三位一体**:

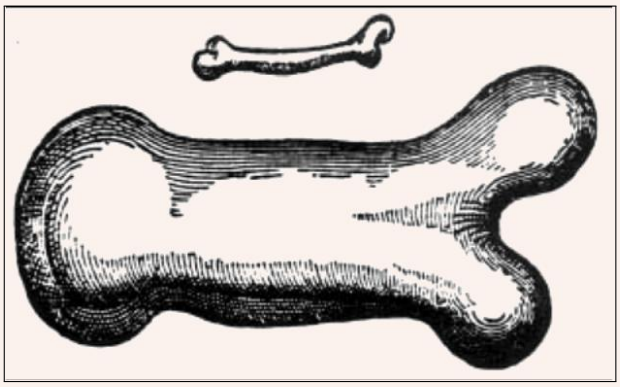
Vitruvius 介绍了建筑的持久三行: **坚定** (结构性声音), **用途** (功能性适当性), 和 **威尼斯** (美学吸引力) 一个预期现代对结构完整性、可用性和建筑表达性的讨论的框架。Vitruvius 强

[5]作者提出了这个问题。(Saouma and Fava, 2006 PDF).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 压力很重要



(b) 规模限制

图 15.3: 加利利奥挑战 Vitruvius (Galilei, 1632)

调, 声音建设必须是可持续的、功能性的、美丽的; 这些品质不是独立的, 而是相互加强的。他的研究表明了结构性理智、美学和建筑方法的整体统一, 这使得罗马工程在其最佳方面具有特点。(Vitruvius, 1960, Book III, Chap III).

公司 强度[6] (书二、三)

用途 用途[7] (书籍 IV 和 V).

金星 美丽 (书籍 VI - IX) 它本身分为六个基本概念, 与社会口味有关。(Vitruvius, 1960, Book I Chap. II):

比例 原则: 命令 (**命令**), 安排 (**安排**), 经济 (**分布**)

美学 标签: Eurythmy (**欧米特**) 同义 (**同情**), 财产 (**装饰**)

从这些定义中, 维特鲁维乌斯得出决定的规则, 统治规划和完美。

有趣的是, 这些三条规则, 把它们聚集在一起, 占据不到十条线。**建筑** 在《古兰经》中, 没有任何引用 - 几乎是后思:

> 所有这些都必须以适当的参考为 **可持续性、舒适性和美丽**. 可持续性将确保, 当基础被带到坚固的地面和材料明智自由选择; 方便, 当安排公寓是无错误的, 没有任何障碍使用。每個建築物的階級都被分配給其合適和適當的曝光, 以及美麗, 當作品的外觀是愉快的, 有好味道, 並且當它的成員按正確的同義原則在適當比例。
>
> (Vitruvius, 1960) 书 I 第 3 章

三个术语只会再次出现.....“现在必须对最受批准的阶级, 以舒适、美丽和强度为目的开发的原则进行审查。” 在第三章三书中, 关于跨殖民和列的比例。

这些规则对维特鲁维乌斯自己的日子的建筑产生了很少的影响, 但在复兴时期作为真正

[6] 在现代语言中: 满足强度、坚定性和稳定性要求。
[7] 它并没有阻止尼罗以后建造无实用的异端建筑。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的教义被采用。维特鲁维亚三位一体仍然是建筑和工程教育的触摸石，提醒实践者结构必须同时满足多个标准。这个三角形 强度、用途、美丽 将通过所有随后的建筑理论，从阿尔伯蒂到帕拉迪奥，以色列的形象。正如我们所看到的 §15.7.1 比利根的二十世纪概念 “结构艺术，” 其三个效率、经济和优雅的柱子，基本上是维特鲁维亚两千年前所写的一切改革。

15.2.1.4 维特鲁威论运动员与学者

比特鲁维亚的写作更不熟悉但令人愉快的一面，是对奥林匹克运动员为他们的报酬的不公正而提出的。**身体 框架 通过训练增强** 忽略学者为 **他们在书中所写的教义**. 这种抱怨肯定会在我们现代社会中响起，体育教练的薪水与纯粹致命学者的薪水不比例:

> 希腊人的祖先为那些在奥林匹克、皮提亚、伊斯特米亚和内门比赛中获胜的著名运动员提供了如此伟大的荣誉，以至于他们不只是在会议上用棕相关术语和冠冕站立时被欢迎。但即使在胜利的胜利中回到各个国家，他们也乘坐四匹马车前往自己的城市和祖先的家园，享有公费的生活固定收入。当我想到这一点时，我感到惊讶的是，同样的荣誉和更大的荣誉不属于那些无限服务的作家，他们为所有时代和各国提供服务。这将是一个更加值得设立的实践，因为在运动员的情况下，它只是他们的身体框架是通过他们的训练得到加强，而在作者的情况下，这是思想。不仅是自己的，而且是人类的一般的，因为他们在书中所写的教义，以获得知识和智力强化。
>
> (Vitruvius, 1960)

15.2.2 维特鲁维乌斯在复兴时期重新发现

重新发现圣修道院 1414 年，加勒比 **建筑** 成为文艺复兴建筑的理论基础。人们普遍认为，**建筑** 是 “重新发现” 由 Poggio Bracciolini，谁发现它在圣加尔的阿比图书馆，瑞士 [8] 但是，无论发现到底是多么新鲜，它作为维特鲁维乌斯的重新兴趣的催化剂。时间是粗糙的，因为它相当于早期的复兴时期。

在文艺复兴期间，维特鲁维乌斯对几个建筑师产生了巨大的影响力，主要是阿尔伯蒂和帕拉迪奥，但也塞里奥和维格诺拉，所有这些人都在维特罗维乌的态度，同时将他的原则适应当代实践。桌子 15.1 总结了三个最具标志性的建筑条约的内容 维特鲁维亚、阿尔伯蒂和帕拉迪奥的条约 以及其各作家所倡导的建筑美德。这些作品仍然像今天写的那样重要，半千年或两千年前。

15.2.2.1 莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂 (1404–1472)

莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂 [9] (1404–1472) (Alberti, 1485) 创作了第一次全面的文艺复兴时期的建筑处理，从中世纪工艺转化为人文主义的知识学。他的 **重建建筑** (关于建筑的艺术) (Alberti, 1988)1452 年完成，并于 1485 年后出版，是维特鲁维乌斯在范围和野心上对手的第一个作品。写在拉丁文和模型在维特鲁维斯 - 也许更有系统和原创 - 它包含十本书，涵盖地点选择，建筑材料，建设方法，神圣和世俗的建筑，装饰和修复。阿尔伯蒂向教皇尼古拉五世

[8] 被挑战的一种说法 Krinsky, 1967, 他们表明当时在欧洲各个图书馆至少有七十八份副本。
[9] 关于阿尔伯蒂早期生活的更多细节可以在 §6.4.1.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

表 15.1: 维特鲁维亚、阿尔伯蒂和帕拉迪奥的条约内容

书籍	维特鲁维亚	阿尔伯蒂	广播
一个	城市规划、建筑或民用工程一般	线性	建筑材料与技术
二人	建筑材料	材料	设计私人城市和乡村别墅
三	寺庙和建筑的命令	建设	城市规划
四	继续书 3	公共工作	特定的罗马寺庙的设计从古代和只有一个当代教堂设计
[2pt] **五**	民用建筑	个人作品	
六	国内建筑	装饰	
七个	板块和装饰塑料工作	神圣建筑的装饰	
八	供水和水素	公共世俗建筑的装饰	
九	影响建筑的科学: 地质, 测量, 天文学, 太阳	装饰私人建筑	
十	使用和建造机器 - 罗马的封锁发动机, 水磨机, 排水机, 焊接机, 喷气机	重建建筑物	

介绍了手稿;[10] 它在 1485 年首次印刷之前在手稿中流传。有趣的是, 维特鲁维乌斯的第一张印刷版在 1486 年随后, 这两部作品对复兴时期的读者产生了相互影响。

理论 基础 和 共识 与维特鲁维斯 (Vitruvius) 不同, 他作为一个实习建筑师写作, 阿尔伯蒂以理论家和知识分子来接近建筑, 他直接研究了古典建筑物, 并将批判性判断带到古老的权威。他提出了一项基于美丽的理论。**孔子**部分与整体的和谐相匹配, 基于数学比例和普遍比例原则。[11] 和谐. 这种和谐的整合原则确保没有什么可以添加、移除或改变, 而不减少整体, 同样适用于美学组成和结构一致性: 一个精心设计的建筑必须是美丽的、功能的、声音的。这些属性源于相同的基础地质关系。

阿尔伯蒂强调, 建筑师的正确角色是通过绘画和模型设计, 让执行给建筑师 - 一个区别, 将建筑实践提升到自由艺术。他的重点是原始性。**线性** (一个设计的抽象地质框架) 在材料建设中, 建立了设计与建筑之间的概念分离, 这具有现代专业实践的特点。该处理建立了建筑作为一个值得学术关注的自由艺术, 从手工设计中分离知识设计, 并将建筑师从工匠提升到学习专业。

结构理解与物质属性 重建建筑 通过精致的理解, 建筑物如何抵抗负担以及为什么某些形状比其他形状更稳定。阿尔伯蒂讨论了建筑材料的特性　石头、木材和泥土　以及它们适当的用途。他分析了墙壁建设、基础设计和弓箭的行为, 绘制了古代来源以及他自己的罗马废墟观察。他的治疗瓦尔丁区分了不同的结构类型和它们的适当应用。整个时代, 阿尔伯蒂强调, 结构性适度和美学品质是不可分割的: 一个结构上失败的建筑不能美丽, 而违反比例和谐的人也不能真正健康。

[10]维特鲁维亚将十本书献给皇帝凯撒 • 奥古斯图, 而阿尔伯蒂则将其献给教皇尼古拉五世。

[11]在日本美学中, 有一个平行概念: **西伯利亚**是假设优雅的品质, 在那里没有什么过剩。这个原则　在没有什么可以被删除的时候实现完美　同样适用于结构工程师的效率追求和建筑师的美丽追求。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

装饰与需要 阿尔伯蒂可能曾是苏利文的先驱, 他提出了一种最小主义的方法 - 这个想法认为装饰应该源于需要而不是自愿应用:

> 任何事物的首要和第一种装饰是免于一切不适。因此, 它将是公平和合适的分配, 如果它不被混淆或中断, 也不过于混乱, 也不由不合适部分组成, 如果会员不多, 也不少, 也不小, 也不大, 不相同, 也不不明白。既然它们是分开的, 又是与身体的其他部分分裂的; 但是每件事物都按照自然和舒适性, 以及结构为其所用途, 以此类顺序、数量大小、形状和形式, 我們可以滿足, 沒有什麼在整個布工, 但為某種用途或舒適性, 以及所有部件的最有用的微妙。因此, 全体成员的组成似乎是由需要和方便所制成的, 并且完全指导的; 这样你就不能那么高兴, 因为建筑物里有这些或这些部分。因为它们被排除和放置在这种情况下, 秩序和联系。
>
> Alberti, 1485

持久影响力 影响的 **重建建筑** 深而持久。它建立了理性基础的文艺复兴建筑, 影响布拉曼特, 拉斐尔和米歇尔安吉洛。1550 年翻译成意大利语, 它形成了建筑教育的几个世纪。阿尔伯蒂的坚持, 建筑必须基于理性原则　数学、美学和结构　提供了古典古代与现代工程科学的出现之间的关键桥梁。在这个意义上, **重建建筑** 是第一个 “现代” 它是对建筑的处理, 并被认为是罗马和文艺复兴建筑之间的桥梁。

15.2.2.2　安德烈 • 帕拉迪奥 (1508–1580)

关于他的早期生活的细节可以找到在 §6.4.3.

四大建筑图书馆 四本书, 分别: 基本原则、材料和技术 (书 I) 国内建筑, 包括帕拉迪奥自己的别墅和宫殿 (书二) 公共建筑、街道和城市设计 (书 III) 和古罗马寺庙 (书 4). 这个组织从原则转向实践到前例, 提供理论基础和实用模型。与以前的建筑条约不同,Palladio 将理论原则与精确的建筑细节和测量的绘图　计划、高度和尺寸的部分　结合起来, 为建筑文档设立了一个仍然对专业实践至关重要的标准。在这样做中, 帕拉迪奥建立了建筑作为一个由比例、地质和建设逻辑统治的理性学科。

相对系统和结构清晰度 帕拉迪奥的比例系统 它是他的方法的核心。他从和谐的比例与音乐一致相似, 创造了空间序列, 通过相关比例进展。一间别墅的房间可以遵循 1:1 的比例:$\sqrt{2}$ 二、三、四、建立数学关系, 可视为美学和谐。这些比例不仅统治了规划尺寸, 而且还设定了天花板高度、窗户大小和面板组成, 创造了各个规模的地质关系统一的建筑。

超越美学,Palladio 讨论了结构清晰度 有系统的注意力。他的别墅使用清晰的结构层: 荷载带墙定义主要空间, 列和插图关节循环, 天花板结构在支持者之间的范围在合理, 可读的模式。他的桥梁设计 - 包括里亚尔托的著名未建项目 - 展示了如何通过木材和石结构流动力量的复杂理解。本书一中的详细建筑规格讨论了基础、墙壁建设以及具有实用的专业知识的建筑材料特性。

维特鲁维亚原则与建筑理论 帕拉迪奥强调, 在编写他的书时, 他研究了关于建筑的先驱作品, 并在一个以上的情况下强调了阿尔伯蒂的重要性。但是, 在所有现代书籍中, 他把维特鲁维乌斯放在首位, 他选择了 **主持人**, **指南** (作为主人和指南). 他可能比任何其他当代建筑师都更熟悉维特鲁维亚。(Wittkower, 1944). 在他的 **四本书**帕拉迪奥承认复兴的债务给维特鲁维乌斯, 并提出自己的三角形变异: 有用性、舒适性、长度和美丽。(Palladio, 1570). 关于这些品质的关系,Palladio 写道:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 美丽将源于恩典的形状和整体与部分的关系, 以及各自之间的部分和整个, 因为建筑物必须看起来像完整和精确的身体。其中一个会员与另一个相匹配, 所有会员都是必要的所需。
>
> Palladio, 1570 I quattro libri dell'architettura, pp. I, I, 7

全球影响与建筑遗产 帕拉迪奥的影响力远远超越意大利。Inigo Jones 在十七世纪初引进英格兰的帕拉迪亚主义; 伯林顿爵士在十八年代复活了它; 它跨越大西洋, 形成美国建筑从杰弗森的弗吉尼亚州到南方前台。他的宫殿和别墅被模仿了四百年; 他是第一个建筑师系统化房子的计划, 并连续使用古希腊罗马寺庙前线作为一片门。他的别墅设计 - 与他们的寺庙前的色彩, 交响式的计划和和谐的比例 - 定义了一个词汇, 传播远远超越意大利。其使用模块比例系统允许建筑形状、结构布局和空间组织一致处理。在十八世纪, 它占据了英格兰建筑的统治地位, 后来深深地影响了美国民间和国内建筑, 从托马斯 • 杰弗森的蒙蒂克洛到无数的法院、植物和机构建筑。在这些背景下, 帕拉迪亚建筑与理性、稳定和民间秩序有关。

结构思维的历史中的立场 帕拉迪奥在结构性理智史上占据了独特的地位。虽然他没有制定机械理论或分析力量, 并明确强调, 他的作品表明如何建筑形状可以体现与结构逻辑相匹配的理性原则。他的建筑物揭示了一个直观的理解荷载路径, 同步和建设清晰度 - 品质后来结构分析将数学形式化。他的坚持比例、平衡和规律, 对建筑物施加了暗示的结构秩序, 与建筑形状与建设性可行性相匹配。

帕拉迪亚设计的清晰度、合理性和系统化, 为古典建筑与现代结构思维提供了关键桥梁。在这个意义上,Palladio 代表了一个与早期机械的平行流: 一个传统在地质、比例和建筑实践预测后来的解析结构处理。其对建筑形状的影响提供了稳定的框架, 其中结构力学的新兴科学后来可以运作。

15.2.2.3 三位一体的重新排序

维特鲁维乌斯以拉丁序列为代价 **坚固**、**实用**、**美观**, 阿尔伯蒂和帕拉迪奥都将条款转换为意大利语 **舒适** (用途), **永久性** (长度), **美丽** (美丽). 这 **威尼斯** (或 **美丽**) 两种形式的最后来临意味着, 美丽只能通过满足前两个要求实现　美学品质源于而不是被强加到功能和结构适当性。这是一个关键点, 我们将回到考虑比林顿二十世纪改革这些原则时。§15.7.1.

如 Wittkower, 1944 阿尔伯蒂的治疗:

> 阿尔伯蒂的前面主要主题之一是为人类服务建筑艺术。上一篇: 建筑应该是 "以人類在所有方面最快樂的。" 除了这个公共和私人用品之外, 没有别的质量的建筑将是值得一看的乐趣。不同类型的美丽适合每个建筑物, 根据目的的差异; 因此, 阿尔伯蒂遵守了亚里士多德相对美丽的原则, 后来在十八世纪的建筑评论家中受欢迎。阿尔伯蒂多次强调, 建筑主要是需要和舒适的成长; 它仅限于终结, 并在中等程度上, 为乐趣和休闲服务。学习建筑的正确方式是从建筑的常见感觉开始。这就是他对待的主要声音。
>
> Wittkower, 1944 *"Principles of Palladio's Architecture"*

换句话说, 有许多维特鲁维亚美德的审查。(或三位一体) 经过几个世纪, 最突出的文艺复兴建筑师让我们忽略他们, 以任何假设新定义的支持。从阿尔伯蒂的日子到现在, 建筑在应

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

用数学方面被想象, 因为直到那时, 它几乎没有通过逻辑分析进行审查。(Wittkower, 1944).

15.2.2.4 阿尔伯蒂和帕拉迪奥作为工程师

结构工程师可能对阿尔伯蒂的指导方针和随后的混合物的生产有哪些重要意义? **混凝土**:

> 凡是新鮮的, 都比长久保存的更好; 凡曾经用相关术语子种植过的东西, 再也不会第二次好种。那么多可能就足以石头。至于泥, 他们谴责它从泥中出来的时候, 它不是在整个相关术语子里, 而是在碎片里, 而且在粉末里, 他们说它永远不会被证明是可用的。他们在火中清洁和生长白色, 在光明和声音的, 当你水时, 它会爆炸, 并将强厚的烟雾高地扔进空气里。第一個是弱的, 當然必須需要更少的沙子; 但後一個是強的, 需要更多。卡托指示, 每两条工作脚, 我们应该允许一块泥土和两块沙子: 其他人规定不同的比例。Vitruvius 和 Pliny 是為了這樣混合沙子, 即為每個相关术语石的泡沫提供三塊小砂, 或兩塊河或海砂。最后, 当你的石头的质量和性质要求你的相关术语子更液体或可拖动 (我们将更清楚地说下面的) 你的沙子必须通过一根相关术语, 但当它变得更坚硬的时候, 将其与半墓和碎石碎片混合。大家都同意, 如果你把它与一三分之一的破碎的叶子或布里克点混合, 它会更紧张。但是, 你要随心所欲地混合它, 你必须经常擦去它, 直到最小的碎片被包装; 有些人, 为了这个目的, 并且可以很好地混在一起, 擦去并在摩特里打一大时刻。但是, 我們將不再說在這裡的相关术语子, 只有如此之多, 那塊泥比一個陌生人更好地擁有自己的石頭, 特別是從同樣的混亂中。
>
> (Alberti, 1485)

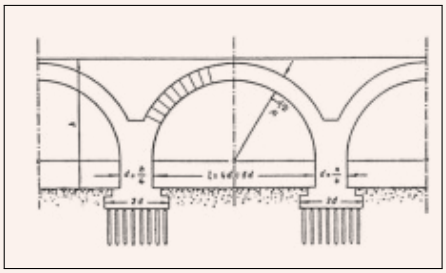
除了材料之外, 阿尔伯蒂还提供了在复兴时期的桥梁设计的第一个系统处理。他的 **重建** *AEDIFICATORIA* (Alberti, 1485) 在《四和八书》中注重桥梁, 给予了准确的地质规则, 这将影响三世纪的桥梁建设者。(Huerta, 2018). 对于脚步, 阿尔伯蒂规定的宽度相当于范围的三分之一 - 一个可以追踪到中世纪实践的规则, 出现在 1401 手稿关于萨拉戈扎的石桥 (Huerta, 2004). 对于王冠的 拱 厚度, 他没有指定超过十五分之一的范围: “在大桥上, 他们不应占总开幕式的十五分之一。” 他还给了对面的十一分之一的架子一个替代规则。这些规则是足够准确的, 以便完全的桥梁地质可以从它们本身重建。(图 15.4a).

這些規則可能看起來是粗糙的, 相比實際的橋梁設計和建設的複雜性, 但它們作為指向主建築師誰擁有判決應用 - 並在必要時偏離 - 他們。如 Huerta, 2018 观察到, 阿尔伯蒂的桥梁部分占据了他《公共作品六书》的一半, 从现场选择到基础建筑到材料的各个方面, 所有这些都与历史例子相结合, 如朱利叶 • 凯撒桥在大道上和孟菲斯国王梅内斯桥。规则是保守的: 罗马大桥通常显示厚度与宽度比例在 1/10 和 1/12 之间, 尽管特殊结构获得了更大的粘度。纳尼罗马桥的主要拱 (21 m) 达成 1/17; 罗马阿尔坎塔拉桥在托莱多 (28.8 m) 到达 1/16 (Fernández Casado, 1980).

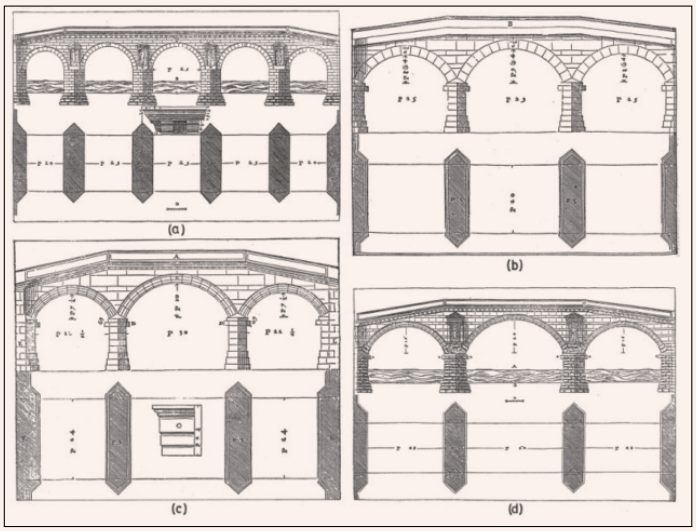
帕拉迪奥的特点是, 教导不是通过明确规则, 而是通过测量的例子　一个教育方法, 将安全比例纳入文档先例。他的第三本书 (Palladio, 1570) 四座桥梁与其尺寸 (桌子 15.2) 罗马桥在里米尼, 中世纪的雷隆桥, 维森萨的自己的桥梁, 以及一个未实现的设计。进展是指导性的: 在罗马和中世纪的实践保持到 1/10 至 1/12 的比例, 帕拉迪奥自己的作品与中世纪前例相匹配在 1/12 。而他的猜测设计推向 1 / 17 - 接近最勇敢的罗马结构的滑动性, 并预料到进步的缩小将特征十八世纪法国桥梁工程。

相对规则的阿尔伯蒂 - 帕拉迪奥传统依赖于一个基本的洞察力: 对于马索尼亚结构, 稳定

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) Alberti 的拱桥设计法则，据 Straub, 1952



(b) 由 Palladio 描述的桥梁 (1570): (a) 里米尼的罗马桥 (b) 中世纪桥梁在雷隆上; (c) 维森萨的帕拉迪奥桥 (d) 新桥的设计 (Palladio, 1570)

图 15.4: 文艺复兴桥梁设计: 阿尔伯蒂的地质规则和帕拉迪奥的记录例子 (Huerta, 2018)

表 15.2: 桥梁比例在 Palladio (1570) 之后, Huerta, 2018

桥梁	拱 厚度/span
(a) 罗马桥 (里米尼)	1/10
(b) 中世纪桥梁 (雷诺)	1/12
(c) 帕拉迪奥的桥梁 (威士忌)	1/12
(d) Palladio 的设计	1/17

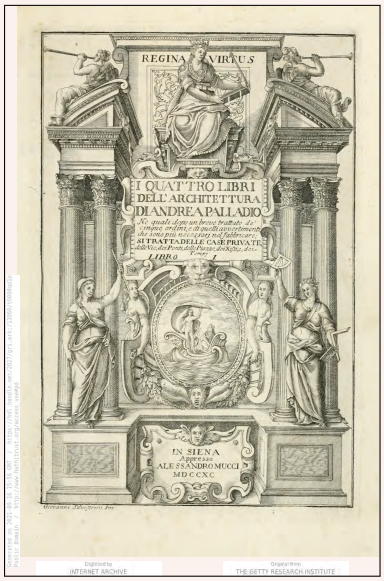
取决于地质而不是绝对尺寸。站在一个尺寸的拱将站在任何尺寸, 只要它的比例保持。这个原则, 基本上适用于建筑物, 会证明不适用于桥梁。正如哈伯特 • 加泰尔 (Hubert Gautier) 在 1716 年首次认可的那样, 桥梁必须支持重型交通负载的过渡, 而这个问题本质上是不比例的: 对于某种负载, 较小的桥梁 “弱点”● 对通行车辆的作用更敏感。一个不太影响一个伟大的桥梁的车辆可能会严重地对应力一个小。这一认可最终会导致 Jean-Rodolphe Perronet 在 1748 年未出版的记忆中提出几乎半分为 Alberti-Gautier 规定的厚度, 而不是从理论机械学中产生的规则。(佩罗内特认为不适合问题的复杂性。) 但从系统的研究超过 200 个现有桥梁。“在建设方面,” Perronet 写道, “只有投机才能超越经验。” (Huerta, 2018).

但帕拉迪奥的兴趣延伸到马索尼亚架子之外。第 8 章 第三本书的标题 **他说, 还有三种发明可以用木材桥梁来建造, 而不会在河里放脚。**关于其他发明, 使我们能够建造木制桥梁, 而不会在河里放脚。如在 图 中所示 15.5b, 这是第一张记录的桁架所知的一些图像之一。事实上, 一个桁架是一个更复杂的结构形状, 而不是一个拱桥: 它不需要重石头, 而是仅仅是木材

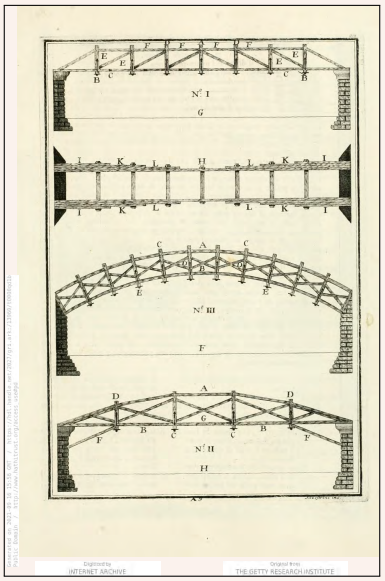
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

组件, 虽然一些显示的形状是不常见的现代结构理解。(图 原始 板), 其他人是完美适合的设计, 预测后续发展。

名人 **学院的桥梁** 在威尼斯, 与 Palladio 的拱桥梁设计非常相似。(图 第三在板中) 雖然它建於 1854 年, 原來是由鐵製成的; 然後在 1933 年被拆除和重建。也许只是偶然..... 或许是对帕拉迪奥的结构想象力的持久影响的遗嘱。



(a) 覆盖页面



(b) 威胁



(c) **学院的桥梁** 在威尼斯

图 15.5: 帕拉迪奥 **四本建筑书籍** (Palladio, 1570)

在这里, 我们看到一个例子, 建筑师是结构形状的创新者。[12] 后来, 在意大利, 他们将是结构工程师, 其设计是建筑大师 - 如 Pier Luigi Nervi 的 **马拉松体育**我們要考慮的 §19.2.12.

15.2.3 人类学与规模问题

身体与建筑的联系和复杂的体形现象在建筑文化中一直存在。从古代到二十世纪, 建筑师和理论家一直在寻找人类形状的测量和比率中的建筑比例。**天文学**. 基本假设是, 从人体中产生的比例具有内在的和谐, 当应用于建筑物时, 会产生相似的和諧结果　这些比例可以在任何规模上应用。

15.2.3.1 Vitruvius: 基本文本

维特鲁维亚 做了一个基本观察, 将人类比例与建筑联系起来:

[12] 事实上, 到目前为止, 建筑学生在意大利大学采取大量的结构分析课程, 而不仅仅是一个 “介绍者” 就像在大多数国家一样。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 因为人体是由自然设计的, 面部, 从头顶到头顶和头发最低的根, 是整个高度的第十部分。从手指到中指顶的开手是相同的, 从头到冠冕的头是第八个。從乳房的頂部到頭髮最低根的脖子和肩膀, 是第六個; 從胸部中間到冠冕的頂端, 是第四個。如果我们采取面部本身的高度, 从尾巴底部到鼻子底侧的距离是三分之一; 鼻子从鼻子的底部到眼镜之间的线条是相同的; 从那时起, 头发的最低根也是第三个, 包括前头。脚的长度是身体高度的一六分之一, 前臂一四分之一; 胸部宽度也是第四分之一。其它成员也有自己的交互性比例, 并且通过雇用它们, 古代著名画家和雕塑家获得了伟大而无限的知名度。
>
> 同样, 在寺庙的成员中, 应该是不同部分对整体大小的交互关系中最大的和谐。
>
> Vitruvius, 1960 The Ten Books on Architecture, Book III, Chapter I

对于维特鲁维乌斯来说, 人体形成的良好表现 **同情** 一部分对整體的共度性 這建築應該模擬。他指出, 船只标志着一个圆圈的中心, 围绕着延伸的边缘, 而一个广场则包含了手臂垂直扩展的图像: 观察将吸引文艺复兴艺术家和建筑师。

15.2.3.2 中世纪传输

最早的中世纪试图编码这种比例之一是 Villard de Honnecourt。(fl. c. 1225–1250), 其投资组合包含对人类和动物形状的地质数字过分的序列图, 图 15.7a (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858). 这些绘画, 虽然原料的后期标准, 代表一个努力减少有机形状到可构建的地质 - 一个实用的担忧一个大马逊工作在一个时代, 当设计知识通过绘图和研讨会实践传达而不是印刷交易。

15.2.3.3 复兴的回归

维特鲁维亚理想的复兴引发了更严格的调查。莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂 (1404–1472) 在他的短暂的讲话中 **立法** [13] (Alberti and Tiraboschi, 1804) 超越比例的比例, 开发精确测量和转移身体尺寸的工具。他的 **例外** 建立一个测量系统, 将人类高度分为六英尺。(**佩德**) 每条腿 10 英寸 (**乌克兰**), 每英寸在十个最小 (**分钟**) 一个预测后来的地铁改革的十级分区。更有智慧, 他的 **定义者** 或 **终点**, 图 15.7b, 由一个圆形的结尾磁盘组成, 有一个旋转手臂, 从那里降落了一条铅线。通过它, 模型上的任何点都可以通过极角和垂直坐标的组合记录, 从而能够以前所未有的准确性从粘贴模型转移到大理石块。

弗朗西斯科 • 迪 • 乔治奥 • 马蒂尼 (1439–1501), 建筑师和工程师到乌尔比诺公爵, 扩展人类学思维更直接到建筑。在他的 *Trattati di architettura*, **工程和军事艺术** (Giorgio Martini, ca. 1480) 他制作了令人惊叹的绘画, 超越人体在教堂计划、堡垒布局和柱个人资料。对于弗朗西斯科来说, 这封信不仅仅是形态的: 船变成了相关术语子, 手臂转动, 头部转动。这个身体地图显示了他对空间的比例, 以及他对堡垒设计的方法。

莱昂纳多 • 达芬奇 庆祝 **维特鲁维亚人** (c. 1490), 图 15.7c, 代表维特鲁维亚文本最精致的复兴合成。[14] 莱昂纳多的创新在他的解决一个地质拼图的维特鲁维乌斯: 如何可以在圆圈和方形中记录相同的数字? 通过轻微调整肢体的位置, 并将圆圈的中心转移到地板上, 而平

[13] 其它著名的贡献包括 **画画** (发表与 **立法**) 第 1435 章 和 **重建建筑** 1452 年 - 第一次文艺复兴的建筑处理。
[14] 与人们的信念相反, 这幅画与黄金比例无关; 莱昂纳多描绘了维特鲁维乌斯的具体相对要求。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

面是基于脚的, 莱昂纳多证明两种结构可以共同存在　这个圆形代表宇宙或神圣的地质, 这个平面地球和可构建。

这些复兴研究不仅仅是艺术练习。相信人类比例反映了一个神圣或自然秩序, 为建筑规则提供了理论理由。阿尔伯蒂或帕拉迪奥 对于房间尺寸或柱空间的具体比例, 他们暗示地引用了这个人类学的基础: 像人体一样比例的建筑物将拥有相同的本质和谐。

15.2.3.4 二十世纪: 模块化 & 查尔斯 • 埃迪奥德 • 杰纳雷特 Le Corbusier (1887–1965)

Charles-Édouard Jeanneret 出生于 1887 年, 在瑞士的 La Chaux-de-Fonds , 一个由手表制造业和其精确工艺文化形成的城市。他最初在当地艺术学院作为一个吸引人和装饰艺术家训练, 在那里他受到查尔斯 • L • 埃普拉特尼亚的影响, 他转向建筑, 并鼓励系统观察结构和形状。在意大利、德国和巴尔干地区的早期旅行中, 杰纳雷特对古典建筑、风格建设和新兴工业方法展出曝光, 形成了结合历史意识与现代技术的迷恋的世界观。[15] 1917 年, 他永久定居在巴黎, 并采用了名称 Le Corbusier, 标志着与学术传统的决定性中断。

他是 20 世纪最有影响力的建筑师, 也是一个争议主义者, 他的著作形成了建筑辩论的深度, 因为他的建筑塑造了城市。[16] 他的宣言 走向新建筑 (Le Corbusier, 1931) 1923 年出版, 引入了挑衅概念。[17] 建筑作为一个 “机器生活” 一个 表述 将函数化为 现代运动的议程, 要求建筑包容工程的合理清晰度。

这本书是论文、照片和争议的集合, 与波特伦和罗马建筑相结合的谷物丝绸、汽车和海洋滑板的图像。Le Corbusier 认为工程师从计算和经济工作, 已经实现了一个和谐和美丽的当代建筑师, 在学术历史主义, 不能匹配。“工程师的美学与建筑,” 他说, “兩個事物相結合, 互相追隨。” 这个工程逻辑的庆祝 - 结构是诚实表达的, 形状是按照功能的, 装饰被切断了 - 成为现代主义的信念。

Le Corbusier 的故事 “新建筑的五个点” (五点新建筑) (Corbusier and Jeanneret, 1929)1927 年提出, 制定了现代主义设计的基本原则:

1) **飞行员** ● 增强的混凝土柱, 取代负载墙壁并从地面上举起建筑物, 释放地面水平循环, 创造基于结构清晰度的新美学;
2) **自由计划** 结构与墙壁的分离允许灵活的内部安排, 空间由移动屏幕而不是固定分区分开;
3) **自由面孔** 通过在支持柱子之外建造楼层, 如阳台, 面板失去了其结构功能, 窗户可以延伸到任何长度, 没有与内部分裂的关系;

[15]在采用名为 Le Corbusier 之前, 年轻人 Jeanneret 在 Auguste Perret 的巴黎工作室工作 (1908–1910), 从他吸收 - 后来反对 - 结构诚实的教义在强化混凝土。看见 §15.4.5.

[16]1927 年, 他和他的侄子皮埃尔 • 珍内雷特在日内瓦举行的联合国宫殿比赛中提出了一个突破性的设计。他们的项目因技术性而被排斥, 因为绘画是按竞赛规则要求的印刷机而不是手绘印度墨水。这项决定被保守陪审团成员广泛视为一个借口, 以排除与传统概念相矛盾的根本现代设计。“宫殿” 争议激发了国际现代运动, 直接引发了现代建筑国际大会的成立。（CIAM）于 1928 年.

[17]Le Corbusier 的政治协会受到学者广泛讨论。他寻求权威领导人包括穆索里尼的委员会, 并与维希法国合作。(1940-41) 大多数历史学家都得出结论, 他是一个机会主义技术克拉特而不是一个意识形态的法西斯。他的主要承诺是通过任何可用的政治体系实现他的建筑愿景。看见 Fishman, 1982 二十世纪的城市乌托邦 (1977).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

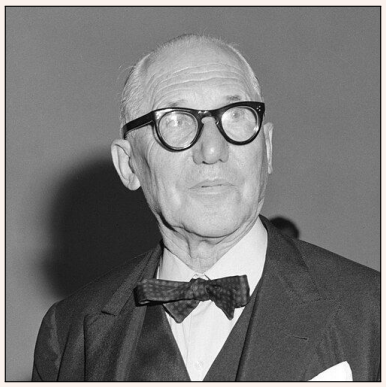
4) **垂直窗口** 窗户提供比相同的垂直开关强 8 倍的照明, 同时创造全景视野并强调建筑物的线性地质;

5) **屋顶花园** 平板屋顶转化为植入的露台, 恢复失去建筑绿色空间, 同时提供隔离和户外居住区。这些原则, 在 Villa Savoye 的例子 (1929–1931) 创造了 Le Corbusier 所称之为“机器生活在”包围工业逻辑和现代材料的建筑, 基本上重建空间设计。

他的建造作品 - 包括住宅单位 [18] (Cité de l'architecture & du patrimoine, 2015) (图 15.6a), 在 Ronchamp 的教堂 (图 15.6c), 和陈迪加赫的建筑物展示了他的思维从纯粹理性主义到雕塑表达主义的进化, 但每个人都有对结构清晰度和材料的诚实表达的承诺。Le Corbusier 的结构效益和建筑美学的整合, 他的坚持, 美丽从理性设计而不是应用装饰中产生的, 以及他对新材料和建设方法的拥抱建立了继续塑造建筑教育和实践的范式。



(a) 家居单位



(b) 1964 年 查尔斯 • 埃杜亚德



(c) 教堂 Notre-Dame-du-Haut

图 15.6: 查尔斯 • 埃迪奥德 • 杰纳雷特 Le Corbusier

模块化系统 建筑比例的传统在转型中继续到二十世纪, 与 Le Corbusier **模块** (1948 年, 修订于 1955 年), 图 15.7d (Corbusier, 1954; Corbusier, 1955). 第二次世界大战期间开发并在随后的几年中精化, 这个比例体系是创造一个普遍的规模, 将人类生理学与建筑和结构层面联系起来。基于人体的尺寸、黄金比例和菲博纳奇序列, 模块被认为是人类学之间的桥梁。, 数学和建筑, 提供一致的数字框架, 以测量结构元素, 空间模块和建筑组件。虽然经常被批评为其规范假设和有限的适应性, 模块代表了一个严重的尝试, 以可测量, 几乎工程原则而不是历史先例或自愿的美学规则的基础建筑比例。反映了 Le Corbusier 的持久野心, 将人类规模与工业合理性和解。

Le Corbusier 将其定义为:

[18] 马赛居住单位 (1947–1952) 也被称为 Cité Radieuse, 是 Le Corbusier 的首个和最著名的实现其垂直居住社区概念。337 号公寓建造在飞行员上, 其内部购物街、屋顶设施和模块比例系统的应用, 成为四个额外的住宅单位建于 Nantes-Rezé、柏林、Briey-en-Forêt 和 Firminy 的原型。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> “模块”是基于数学和人类规模的测量: 它由一个双重数字系列, 红色系列和蓝色组成。
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 60

Le Corbusier 的系统以标准人类高度为 1.83 开始。m (六脚) 被部分选择和解测量和帝国测量　他追求的雄心勃勃。从这个高度, 关键点被确定: 太阳脉在 1.13。m, 上手的顶部在 2.26 m (太阳能五角高度翻倍). 正如他所写的那样, 所有措施 “源于一个单一的来源, 尺寸 113, 一个人的太阳脉高六英尺。” (Corbusier, 1954). 这些尺寸随后通过两个交叉的基于菲博纳奇的系列进行编制..... “红色系列” 和 “蓝色系列” 每個季節大約與鄰居相比的黃金比例。

红色系列, 基于太阳脉的高度 (1.13 m) 生成:

$$\ldots, 27, 43, 70, 113, 183, 296, \ldots \text{ cm}$$

蓝色系列, 基于太阳脉的两倍高度 (2.26 m), 生产:

$$\ldots, 33, 53, 86, 140, 226, 366, \ldots \text{ cm}$$

这些系列共同提供了 Le Corbusier 在战后建筑中使用的一系列尺寸, 主要是单位。é 住在马赛 (1947–1952), 在那里几乎每个尺寸　公寓宽、天花板高度、太阳光空间　从模块值中产生的。

Le Corbusier 明确地将他的作品定位为从静态维特鲁维亚传统的出发:

> 莱昂纳多和他的当代人 - 思考维特鲁维乌斯 - 通过把他的身体, 手臂开放, 在一个圈子里展示了人的比例。这是一个静态的人, 与静态建筑相匹配..... [科尔布西亚] 他的系统是由一个用武装改造的人模拟的。这是一个动态的人, 与动态建筑相匹配。
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 75

在维特鲁维奥和莱昂纳多描绘了安静的人, 手臂在被动的平衡中伸展,Le Corbusier 的形象向上 - 一个活跃的行为, 确定居住空间的垂直尺寸。

模块吸引了欣赏和批评。阿尔伯特 • 爱因斯坦, 1946 年在普林斯顿展示了该系统, 提供了一项评估,Le Corbusier 将引用他一生:

> 在那天晚上给我写的一封信中, 爱因斯坦有善意说《模块》的这句话: **它是比例的范围, 使坏人困难和好人容易。**
>
> Corbusier, 1954 The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics, p. 58

Le Corbusier 认为这是一个科学的验证, 尽管评论家指出, 该系统被定义为理想化男性身体, 并产生了可能对更高的个人感到崩溃的空间。更基本地说, 模块的对数学普遍性的主张取决于美学偏好而不是结构或功能需要。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15.2.3.5 从比例到 ergonomics

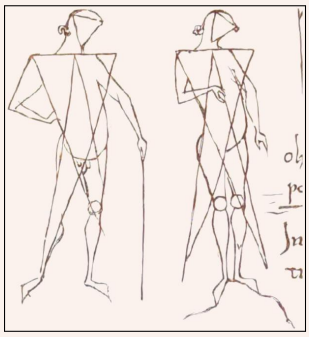
该模块代表了在人类学原则中实现地面建筑比例的最后一个重大尝试。二十世纪后期发展 特别是 Ernst Neufert 的 **布朗特文** (建筑师的数据,1936 年) (Neufert, 1970) 亨利 • 德里福斯的故事 **人类的测量** (1960) (Dreyfuss, 1960) 从比例和谐转变为工艺功能: 焦虑成为不是宇宙秩序, 而是实用的匹配, 适合人体尺寸的范围在家具设计, 设备和空间清洁器。

15.2.3.6 隐藏的假设: 规模独立

在这两千年的传统中, 从维特鲁维亚到科尔布西亚的百分比比例具有一个随机的假设: 从人体中产生的比例可以在任何规模上应用。一个寺庙可以用同样的比例作为一个小神殿; 一座大教堂可以简单地是一个大写的教堂。对于马索尼亚结构, 这种假设在很大程度上证明是有效的 如上所述。§15.2.1, 石头如此轻微地强调, 以至于地质, 而不是强度, 统治设计。

但这种假设有限制。加利利奥在他的 **演讲** (讨论在 §15.2.1) 一个结构不能在保持其比例时无限地扩展。跨部分区域与容量的比例因规模而变化: 线性尺寸增加两倍, 面积增加四倍。(因此, 重量) 增加八倍。压力增加, 最终物质失败。这就是为什么大象的腿比老鼠相当厚, 而哥特式大教堂尽管有雄心勃勃的野心, 却达到实际的限制, 没有数量的地质改进可以超越。

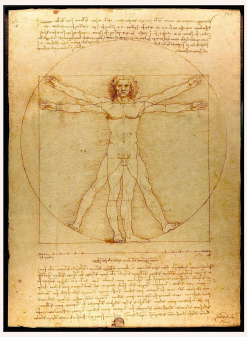
因此, 人类学的传统代表着一个令人惊叹的智力成就 但它是由加利利奥首先提到的物理现实和现代结构分析所确定的。只有比例不能替换机械。



(a) Villard de Honnecourt, ca. 1240 (De Honnecourt, 1858)



(b) 阿尔伯蒂的 **定义者** (Alberti and Tiraboschi, 1804)



(c) Leonardo's *Vitruvian Man*, c. 1490



(d) Le Corbusier 的故事 **模块** (Corbusier, 1954)

图 15.7: 比例的人类系统: 从中世纪地质学到复兴人文主义到二十世纪现代主义

15.2.3.7 运营地质: 大师建筑师实际上如何追踪他们的建筑

上面审查的天文学传统描述了建筑师如何 **思考** 关于比例。一个补充问题 如何大师建筑师 **應用** 这些原则在建筑场所 - 揭示一个平等丰富和令人惊讶的系统实践。最近的奖学金 (Oikonomou, 2022) 它重建了从古埃及到十八世纪使用的运营地质学, 证明两种不同的建筑方法在各个文化和千年中不断使用。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

第一种方法, **四角形**基于一个圆圈内列出的方位的转角。一个圆圈中写的平方, 然后旋转 45°, 产生第二个平方, 其侧面具有比例。1 : $\sqrt{2}$ 到第一 - 一个不合理的关系, 但自然而然地从纯粹实用的地质操作中产生的。第二种方法, **三角形** *Ad Triangulum* 将平面三角形列入一个统治循环中, 产生由 $\sqrt{3}$. 这两项行动, 在任何规模上轻松地进行的交换和抢劫, 产生了从埃及金字塔到哥特式大教堂的历史结构中发现的主要比例关系。形象 15.8 描述了两种方法, 如在拜占庭三角教会的计划所应用; 基本圈的直径是 20 英尺。[19] 所有结构性单元都源于内置的两个旋转方块的交叉。

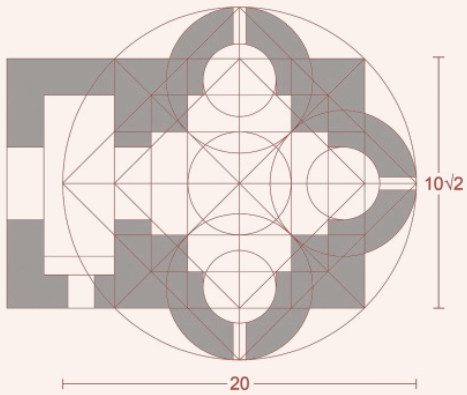


图 15.8: 帕纳吉亚库姆贝利迪基 (Panagia Koumbelidiki) (卡斯托里亚, 第 10C。) 与 **四角形** 追踪 (Oikonomou, 2022)

皮塔哥里三角形的角色 除了这些基于圆形的方法之外, 大师建筑师还依靠第二个工具系列: 形成 Pythagorean 右三角形的粘膜。3、4、5 三角形, 其右角不需要其他工具, 除了三条绳子的长度, 在古代和中世纪一直被用来确定偏差性, 并控制建筑周围的直角跟踪。但是,3、4、5 不是唯一的工具: 三角形 5、12、13、8、15、17 和 12、35、37 是相同的, 每一个提供不同的方面比例都适合特定建筑类型。斯通马森的吉尔德通过实践而不是文本传达了这一知识, 这部分解释了这些建筑方法为何对建筑处理传统大多是不可见的　维特鲁维乌斯、阿尔伯蒂和帕拉迪奥写了关于比例的文章。如何在地面上实现它的操作知识由建造者保持。

从圆圈到大教堂 兩個系統　**四角形** 和 **三角形** *Ad Triangulum* 不是竞争对手, 而是补充。哥特式大师建造者使用了两种理性序列 (例如 1:2:4:2:1 为海湾宽) 和不合理的比例 ($\sqrt{2}$ 从广场的直径, $\sqrt{3}$ 从平面三角形) 同时, 承认模块和地质数字不能完全平衡。约翰 • 詹姆斯 (John James) 对查特斯的马逊人所观察的那样, 他们 “故意选择使用两者, 然后接受了需要将他们聚集在一起的斗争。” (James, 1982, p. 98). 巴黎圣母 (Notre-Dame) (创立 1163) 描述了 **三角形** *Ad Triangulum* 方法清晰: 一个单一平面三角形, 从船舶和岛屿的总宽度出发, 定义了整体内部高度, 当分为三个时, 位置是三角质的基础, 如图所示。15.9 在那里, 一个单一的平面三角形, 从整个内部宽度出发, 定义了总高度; 分为三个位置的三角基。

模块化系统和测量标准 几何方法与计量标准协同发挥作用。古希腊神庙采用以阿提卡尺（30.85 cm）表示的模数网格；拜占庭教堂使用拜占庭尺（31.2 cm）或 spithami（23.4 cm）；哥特

[19]拜占庭脚是长度单位, 在整个拜占领帝国使用的, 从罗马 **狗**. 它的价值一般被认为是 0.312 m (31.2 cm). 在建筑分析中, 它经常被视为基于地质结构的基础模块。(广场、三角形、圆圈) 它们被生成, 描述了一个理性测量单位与地质比例的历史共存, 如: $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

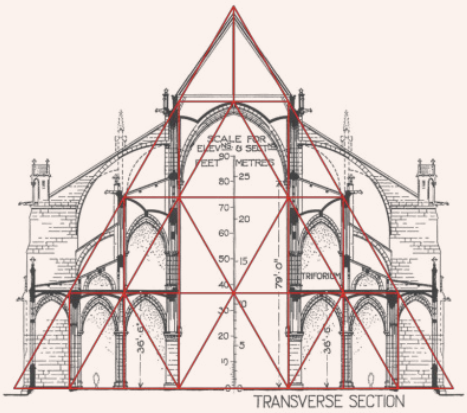


图 15.9: Notre-Dame de Paris 与 三角形 *Ad Triangulum* 追踪 (Oikonomou, 2022)

式大教堂则采用 *pied de roi*[20] 或地方布拉西奥。帕特农神庙的台基 放松在一个网上的 25×25 阿提卡尺, 而船 (性别) 顯示一個 5:12 比例直接相符的 5–12-13 皮塔哥倫三角形 (Oikonomou, 2022). 在完成的建筑中看起来是纯粹的地质和谐, 因此由一个地方测量单位、一匹皮塔哥里三角形和一个模块网的相互作用产生　像优雅一样实用的系统, 如图所示。15.10 在 5:12 的比例和其与五至十二至十三匹亚三角相匹配时, 超越一个 25 × 25 阿提卡尺 模块化网

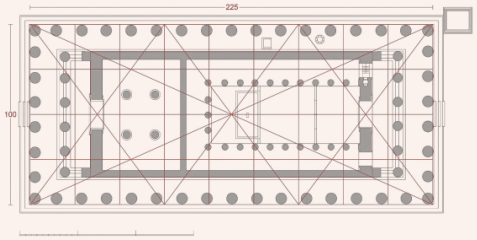


图 15.10: 帕特伦计划分析 (Oikonomou, 2022)

参考, 桌面 15.3 收集长度的主要单位使用在各个文化和时期, 表达在比较的尺寸的意义上。

表 15.3: 历史单位长度和宽度测量用于建筑和建设

单位	文明 / 时期	使用背景	尺寸等级
		埃及人	

继续在下一页

[20] *pied de roi*（“国王尺”）是法国在采用公制之前的标准在采用测量系统之前的长度单位。它的价值是大约 0.32484 m 和它被分为 12 子 (英寸) 每个人都分为 12 线路. 许多法国建筑工程工作是通过这个模块进行大小化。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 15.3 — 从前一页继续

单位	文明 / 时期	使用背景	尺寸等级
数字 (*db*)	古埃及	最低标准分区	18.75 mm
帕尔姆 (*šsp*)	古埃及	四个数字; 基本比例模块	75 mm
常规库布 (*mh*)	古埃及	6 棕相关术语; 日常建设	450 mm
皇家库布 (马克思 *NW*)	古埃及	7 棕相关术语; 纪念碑建筑	525 mm
罗德 (*H3YT*)	古埃及	10 皇家库布; 土地探测	5.25 m
塞克 †	古埃及	金字塔: 王室圆形上升的棕相关术语	无尺寸
		墨西哥	
库比特 (包)	巴比伦 / 苏美	标准长度模块	500 mm
		美洲人	
特拉克西特	阿塞拜疆	船到地; 基于身体的模块	≈ 1.00 m
特拉尔库哈希特	阿塞拜疆	地板; 标准监测单位	≈ 2.50 m
		希腊	
阿特克足	古希腊	寺庙规划网	308.5 mm
		拜占庭	
拜占庭脚	拜占庭帝国	教會與民間建築	312 mm
斯皮塔米	拜占庭帝国	西班牙 (小手指的 th 子)	234 mm
		意大利 - 布拉西奥 按城市 *(统一前,1861 年)*	
布拉西奥 (佛罗伦萨)	托斯卡尼亚,13 - 18C。	建筑和服装测量; 2 帕尔米	583 mm
布拉西奥 (威尼斯, 达塞塔)	委内瑞拉共和国	丝绸和海上贸易	639 mm
布拉西奥 (威尼斯, 达帕诺)	委内瑞拉共和国	服装测量	595 mm
布拉西奥 (米兰)	王国 / 伦巴迪王国	一般建筑和服装	595 mm
布拉西奥 (罗马)	教宗国家	建筑测量 (工厂)	634 mm
布拉西奥 (尼泊尔)	二西里王国	服装测量; ≈2.67 帕尔米	700 mm
布拉西奥 (博洛尼亚)	教宗国家 / Emilia	一般措施	640 mm
布拉西奥 (多伦多 / Piedmont)	萨尔代尼亚王国	一般建筑; 2 皮蒂 · 利普兰迪	683 mm

继续在下一页

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

表 15.3 — 从前一页继续

单位	文明 / 时期	使用背景	尺寸等级
布拉西奥 (吉诺亚)	吉诺亚共和国	商业和建设措施	595 mm
布拉西奥 (维罗纳)	伦巴迪亚 - 威尼斯	建筑与服装	642 mm
布拉西奥 (曼谷)	伦巴迪亚 - 威尼斯	地方建筑标准	467 mm
布拉西奥 (克里莫纳, 达工厂)	彩虹	生产与建设	483 mm
		中世纪与复兴 (其他)	
王之脚	法国, 预测	标准法国脚; 建筑和工程工作	324.84 mm
		奥斯曼人	
Arş 在	奥斯曼帝国	建筑模块; 浴室跟踪	757.7 mm

† 和 **塞克** 它不是长度, 而是一条路径的尺寸: 垂直上升的每王室圆形水平数, 相当于现代面部角度的角落。吉萨大金字塔有一个 $5\frac{1}{2}$ (伊。5 和 2 数字) 相应于一个面孔的角度 51.84°.

注意: 布拉西奥值是 1861 年以前的传统标准。佛罗伦萨布拉西奥被加大 $\frac{17}{16}$ (6.25%) 根据《二法》1782 年 7 月; 以前的 (历史性) 第 583 章 值 mm 被引用到这里。尼泊尔的价值观相似。重新修订的 ≈ 0.33% 1840 年以后。

可见的变化在 **布拉西奥**桌子 15.4 以色列 - 从意大利 467 曼图亚 700 mm 那不勒斯, 比率近 3:2 - 没有意外不准确性, 但是主权的故意表达。意大利各国嫉妒保持自己的重量和测量标准, 因为控制测量它是不可分割的控制贸易, 税收和建筑合同。標準化 **布拉西奥** 因此, 这是一个明确的政治行为。原名:《28 号法》1861 年 7 月, 全方位的测量系统新统一的意大利王国, 也是国家主权宣言。作为一个实用的改革。威尼斯的两条手臂..... **饰** *Seta* (639 mm) 对于丝绸贸易和 **帕诺** (595 mm) 服装 - 描绘另一个层复杂性: 即使在一个城市州内, 竞争对手吉尔德公司保持不同商品的不同标准。

从古代到奥斯曼时期的持续性 这种运营传统表现出显著的连续性。相同的基本工具　相关术语石, 铅泡, 旋转广场和印记三角形　在埃及建筑中出现。2500 公元前, 十世纪的拜占庭教堂规划和十八世纪的奥斯曼家庭建筑 (Oikonomou, 2022). 奥斯曼建筑师为一 **阿尔辛** 网格 (75.77 cm), 跟踪浴室周围, 有 3 至 4 至 5 个三角形, 并通过 **四角形** 操作　同样的地质逻辑, 在千年前组织了拜占庭三角教会。当阿尔巴尼亚的木匠报告到屋顶高度是由 “一个简单的绳子, 高达房子的宽度四分之一,” 他正在描述一个习俗, 其祖先延伸到尼罗河谷的军人。形象 15.11 它展示了这个地质工具集如何应用于希腊北部的奥斯曼浴室。和 **阿尔辛** 网和 3-4-5 皮塔哥里三角跟踪。周边界设置为 A 4×3 **阿尔辛** 网; 八角内部源于一个 **四角形** 操作。

这种操作地质是维特鲁维亚、阿尔伯蒂和帕拉迪奥理论建筑下的实用基础。编码的作家 **什么** 与成就相比例; 大师建造者知道 **如何** 通过一套地质操作的工具, 没有留下任何书面记录, 但塑造了西方世界的每一个主要结构。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 15.4: 和 **布拉西奥** 意大利联盟前各国

城市	政治实体	Ruling House / 管辖权	價值
佛罗伦萨	托斯卡尼亚大公爵	1737 年: 哈布斯堡 - 洛雷因	583 mm
威尼斯	委内瑞拉共和国	可爱的 (1797 年独立)	595–639 mm
米兰	王国 / 伦巴迪王国	西班牙, 然后奥地利哈布斯堡	595 mm
罗马	教宗国家	神圣见	634 mm
尼泊尔	二西里王国	波尔本君主制	700 mm
博洛尼亚	教宗国家 (博洛尼亚传教)	神圣见 (半自主)	640 mm
土耳其	萨尔代尼亚王国	萨维亚之家	683 mm
吉诺亚	吉诺亚共和国	可爱的 (1797 年独立)	595 mm
维罗纳	委内瑞拉共和国 → 伦巴迪亚 - 威尼斯	1797 年以后的奥地利人	642 mm
曼谷	曼图亚公爵 → 伦巴迪亚 - 威尼斯	奥地利哈布斯堡 (Habsburg)	467 mm
克里莫纳	米兰公爵 → 伦巴迪亚 - 威尼斯	西班牙, 然后奥地利哈布斯堡	483 mm

注: 威尼斯同时保持了两条分开的手臂..... **布拉西奥 · 达 · 塞塔** (639 mm) 对于丝绸贸易和 **布拉西奥 · 达 · 潘诺** (595 mm) 一般服装 - 反映吉尔德级别而不是仅仅是国家级别控制测量标准。所有值都是 1861 年以前的传统标准; 以色列统一国家的标准制度, 由 28 号法规定。1861 年 7 月。

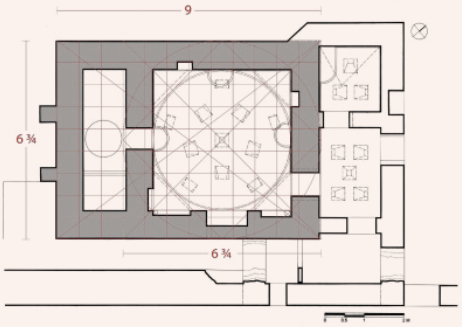


图 15.11: 奥斯曼游泳在佛罗里纳 (第 18 集 C) 重复后 Oikonomou, 2022

15.3 Interlude: 建筑师和工程师 - 艺术与科学?

它从前的部分传出, 建筑师、建筑师和工程师的角色并不总是不同的。直到十八世纪中叶, 这些职能只存在于一个数字: 大师建筑师。建造者首先依赖于审判和错误　也就是说, 失败然后依赖着几代人所产生的模糊规则和比例规则。[21]

这个历史团体是由建筑评论家 Ada Louise Huxtable 所得的:

[21]我们今天可以欣赏旧的生存结构, 但我们永远不应该忘记它们构成无限的部分建造, 几乎所有这些都被现代标准过度设计。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 建筑的性质已经被讨论了几个世纪。无论是艺术还是结构，美学还是工程　或者，如果两者相结合，在什么程度上　是一个不断的挑战和持续的讨论主题。
>
> 这并不总是如此。雖然問題本身是無時的，但關於它們的混亂實際上來自相對近期。在罗马，建筑师的角色毫无妥协地涵盖了工程师的所有活动。维特鲁维亚在他的作品中 **关于建筑**写在 25 至 23 之间 B.C.，指出，建筑师的责任包括建造、机械和 - 不是他时代最小的机械艺术 - 时钟制作，特别注意到，建筑必须平等考虑力量。(结构)，用途 (功能) 和恩典 (艺术)。
>
> 1235 年，Villard de Honnecourt 的办公室记录表明，“建筑师大师” 中世纪时期仍然是建筑师和工程师，从莱昂 • 巴蒂斯塔 • 阿尔伯蒂的 1451 年至 52 年的最终建筑处理中，我们得知，复兴没有带来劳动分裂。多方面的文艺人，事实上，认为所有的艺术是他的省份，所有的工程都是艺术的一部分。
>
> (Huxtable, 2017, p. 11)

分离发生在十八世纪，由理性机械的出现和技术教育的制度化引发。在法国，成立的 **公路和街道学校** (1747) 后来，该 **政治学科** (1794) 创建一个新的数字：**工程师**，在数学和机械学，不同于 **建筑师** 被训练在 **美术学院** 在作曲、绘画和历史上。在英国，约翰 • 斯梅顿的自我设计作为一个 “民用工程师” (1768) 建立民事工程师机构 (1818) 正式分裂。十九世纪的德国大学体系，强调纯粹的研究与教学一起，进一步专业化了两门学科。(Graham and Diamond, 2004).

从那时起，建筑与工程之间的冲突潜力已经成为现实。皮尔 • 路易吉 • 内尔维 (Pier Luigi Nervi) 在自己的训练中，用特征性的直观描述了分裂：

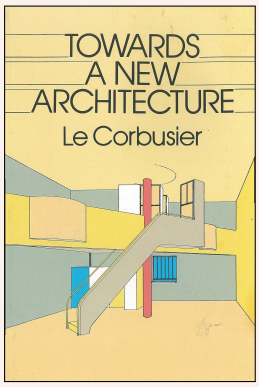
> 当我在博洛尼亚优秀的民用工程学院学习时，词架构仅指的是面孔和细节的研究。從來沒有發生過我們的教授，甚至我們，一個橋樑，一個運輸結構，一個城市計劃，也可以是建築作品。钢筋混凝土或铁的结构，尽管已经存在的大桥的例子，埃菲尔塔被认为是技术成果开发在与建筑无关的领域。这些设计对建筑物的外观更关心，而不是它是如何组成的，这是一个基于虚假形式主义的方法。“物质与外观之间的分裂..... 装饰师的思维，在塑料和画品装饰领域一切都是可能的..... 建筑物的物理实体的无知，它像一个活着的生物一样，不能把美丽与身体的生理健康分开。”
>
> (Huxtable, 2017, p. 21)

讽刺的是，这是一个伟大的建筑师，他给了很多信念工程师的创造性角色。Le Corbusier，在 **走向一个建筑** (1923)，写，图 15.12a:

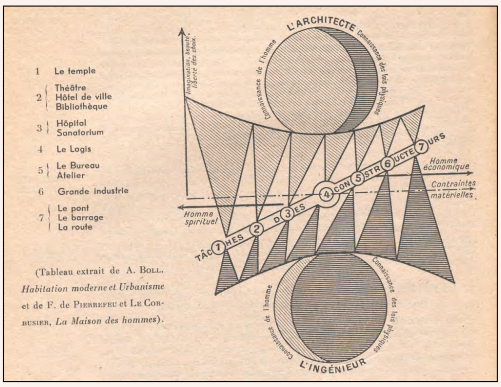
> 工程师的美学和建筑是两件事，走在一起，跟随对方：一个现在处于全身高度，另一个处于不幸的逆转状态。
>
> 工程师，由经济学法灵感，由数学计算统治，使我们符合普遍法律。他们得到了和谐。
>
> 建筑师通过他的形状安排，意识到一个秩序，这是他灵魂的纯粹创造；通过形状和形状，他影响我们的感官到急程度，并引发塑料情绪。
>
> (Le Corbusier, 1931)

Le Corbusier 的观点 **工程师建筑师** ● 被捕在著名的图像中 (图 15.12b) 不是工程师要成为建筑师或相反的呼吁，而是要两者都认识到伟大的建筑需要结构逻辑和空间艺术的合成。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) Le Corbusier, 1931



(b) Le Corbusier's *ingénieur-architecte* pictogram (Pierrefeu and Corbusier, 1942)

图 15.12: Le Corbusier 的故事 **工程师建筑师** 图标 (Pierrefeu and Corbusier, 1942).

这个愿景在西班牙工程师 Eduardo Torroja 中发现了一种对象:

> 结构设计与科学和技术有关得多: 它也非常关心艺术、共识、情感、能力以及创建适当的出线的任务, 科学计算将添加完成触摸。表明, 结构符合要求的稳定和强大。
>
> 数学只是一个方便的工具, 设计师确定计划结构的物理比例和细节, 以便将他的想法从图表的线条转化为完成结构的现实。
>
> (Torroja, Polivka, and Polivka, 1958)

但是, 专业分裂仍然存在。正如亨利 • 佩特罗斯基所观察的那样, 工程师欺骗那些需要重型混凝土和钢材的非凡调节而建造的建筑物的建筑师; 建筑师看向工程师, 他们指责缺乏结构创造力或愿意让他们的想象力响起。(Petroski, 1997).

意大利人对那些超越这个分裂的人有一个词: **計劃者**想象和实现一个项目整体的人, 结合设计和执行、形状和结构。在下列部分 - 从哥特式大教堂的匿名主人到 Maillart,Nervi,Candela 和 Khan - 审查的数字 - 都是, 以不同的方式, **投影师**. 他们表明, 维特鲁维亚三位一体从来不是一个选择的菜单, 而是实现的统一。

15.4 先驱们

既然建筑与工程之间存在历史的交往, 自然问题就出现了: 在结构工程作为科学学科的出现之后, 这种情况是否继续下去? 兩個問題 框架 這項調查:

1. 我们有现代工程师, 其设计导致美丽的结构 **為** S 能触及建筑师的敏感性的工作?

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

2. 我们有现代建筑师, 其勇敢或创新设计挑战结构工程师超越自己吗?[22]

此部分讨论了第一个问题, 重点是 “真正的工程师” 在计算机出现之前, 设计的先驱。

当结构变成艺术时: 需要的美学

虽然建筑经常为其视觉表达而庆祝, 但它是使这种表达可能的基础结构。在某些特殊作品中, 结构性需要本身成为视觉力量的主要来源。这些不是在形状被描绘的建筑物, 而是在形状 **是** 函数　揭示, 而不是隐藏, 力量如何通过空间流动。这些结构的优雅不在于装饰, 而是它们形状的清晰度和不可避免性。当工程挑战与精度和想象力相遇时, 结果可以深美: 一个同时合理和表达性的结构。

该部分致力于由结构工程师设计的标志性结构 - 不仅解决需要的技术挑战, 而且吸引了眼睛和想象力。在几乎每个情况下, 这些设计的地质、比例和节奏直接源于他们必须抵抗的力量和负担。然而, 在履行其结构性角色时, 他们实现了一种艺术..... 通过弓箭、相关术语子、电缆和盾牌在一个需要的语言中说话, 成为空间中的诗歌。(Pedreschi, 2008 PDF).

此前,Le Corbusier 提出了这个部分的核心问题:

> 我们的工程师制作建筑, 因为他们使用来自自然法的数学计算, 他们的作品给了我们和谐的感觉。因此, 工程师有自己的美学, 因为在做计算时, 他必须定义他的方程式的一些术语; 而这里就是味道干预。现在, 在处理一个数学问题时, 一个人从纯粹的抽象的观点来看待它, 在这种状态下, 他的口味必须遵循一个确定的道路。
>
> (Le Corbusier, 1931 PDF)

意大利人最好抓住工程师建筑师的角色 **計劃者**一个通过设计过程创建建筑或技术性质的项目的人: 一个专业人物, 具有文化背景和适当的技术经验, 首先想象什么将建造。下面的部分简要地突出了由 **投影师**.

15.4.1 飞翔的蝴蝶: 结构逻辑可见

飞翔的泡沫是最早和最具标志性的形状示例之一, 其功能与令人兴奋的结果。在哥特式时期, 它出生于需要, 解决了一个基本的结构性挑战: 由围墙和重石屋顶在广阔的教堂产生的侧面冲动。而不是仅依靠巨大的墙壁来对抗这些力量, 建筑师们想象了一种勇敢的外部解决方案　Arched 支持运河水平负载向外和向下到遥远的脚步。

作为对工程限制的实用反应开始, 很快就变成了一个定义建筑特征。飞翔的胡萝卜的流浪, 不只是为玻璃窗和垂直表达而释放了室内空间; 它们在自己的右边变成了美学动作。在他们中, 结构清晰度遇到了雕塑的恩典, 开启了一个漫长的传统, 在那里结构工程师的工作也可能是艺术作品。

[22] 直到 Zaha Hadid (1950–2016) 谁在美国贝鲁特大学学习数学, 并可能因此感到舒适的设计曲线结构, 被评为建筑师都是男人。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

事实上, 没有提到哥特式大教堂的结构分析理论的概述是不可能的。这些是勇敢的结构实验的结果, 直到 19 世纪下半叶建造长宽桥和金属框架建筑。(Mark, 1978 PDF).

尽管这些结构的伟大, 以最大光明向上帝的荣耀升高。(相反于以前的罗马教会。), 哥特式大教堂提供的技术挑战比一个可能预期的少。它们仍然是由几代人过度精致的橡胶规则设计的　也就是说, 路上一定有多次致命事故。

许多对结构工程师感兴趣的主题都与哥特式建筑有关: 多姆, 绳子瓦尔特, 架子等。然而, 本节仅限于飞行泡沫的结构相关性。

看着一个哥特式大教堂, 飞翔的胡萝卜立刻出现。它们首次被用来为巴黎圣母的船营提供稳定。(Murray, 1998) 1180 年之前。然而, 从这个时期生存的记录几乎没有说明设计技术用于这样标志着一个技术成就。因此, 禁止使用任何科学方法是公平的。缺乏结构理论也消除了小规模的定量建模的可能性; 建筑师不能肯定地预测是否在较小的建筑中有效的结构单元将在新建筑的大规模上可靠地进行。

然而, 一个重要的例外是对死体负载的过度转折的粗稳定性, 这并不依赖于规模。一个顶级模型可以用来表明全层建筑的总稳定性。这种结构性行为的事实有助于弥补一些新大规模设计问题 - 尽管它可能不是中世纪建筑师所吸引的。(Mark, 1978 PDF).

关于建筑的关键论文于 1568 年在巴黎出版, 由 Philibert de l'Orme (De l'Orme, 1561 PDF). 这是第一次引入马逊投影的艺术作品, 其中包含一个非常完整的论文描述 **地质指标显示如** *[nt] il fault tailler et coupper les pierres* 石头切割和塑造的地质方法, 或者更为普罗萨式: 从计划中获取的艺术, 并设计了各个石头的形状, 以便马松建造一个建议的建筑。

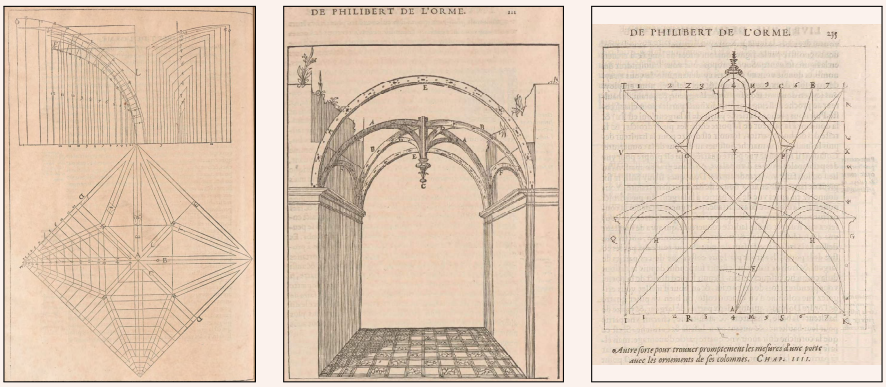


图 15.13: 图片来源:de l'Orme (De l'Orme, 1561 PDF)

后来, 在十九世纪, 尤金 • 维奥莱 • 杜克 写著著名的 **理性词典** (Viollet-le-Duc, 1854 PDF).[23] 然而, 他最重要的理论贡献是通过他的 **关于建筑的演讲** (Viollet-le-Duc, 1875 PDF) 在其中, 他提出了一个全面的结构清晰度哲学和基于哥特式设计的原则　桥梁中世纪实验传统和现代结构理论的工作。(对于其在理解哥特式结构原则的基本作用, 请参见 §4.3.) 又重建了..... 或"被屠杀," 根据一些现代历史学家 - 在法国革命期间损坏了许多中世纪建筑物。[24]

[23]這是一個令人難以置信的九-体积 全面的字母字典所有建築用語, 數百個非常精確和美麗的描述。

[24]例如, 他自由地添加了一条窗帘到巴黎圣母的中央船上。(最近燃烧的) 虽然在他的干预之前, 它从未存在过。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

另一个纪念品是由 Willis, 1910, 谁开始说:

> 中世纪的草原 ...它与罗马人的风格完全不同。它由 ...一个框架的绳子, 或石头弓, 在那里真正的瓦尔特或实际覆盖的公寓休息。这些瓦尔特通常是由更轻的材料制成的, 并且具有比它们躺在边缘的绳子更粗糙的工作性, 而且它们之间实际上形成了一种薄板。这些绳子的建造不提供石头切割的困难, 每一个实体, 分别考虑, 一个简单的拱; 然而, 它的毛巾的形状很少可以获得, 没有在地面上追踪这个拱, 全尺寸的数字。從那裡獲得面部的毛髮。
>
> Willis, 1910 On the construction of the vaults of the Middle Ages

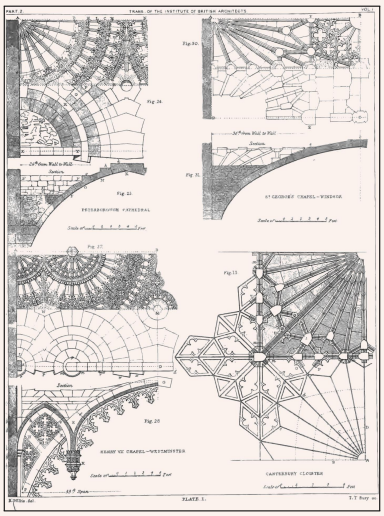


图 15.14: 图片从 Willis, 1910

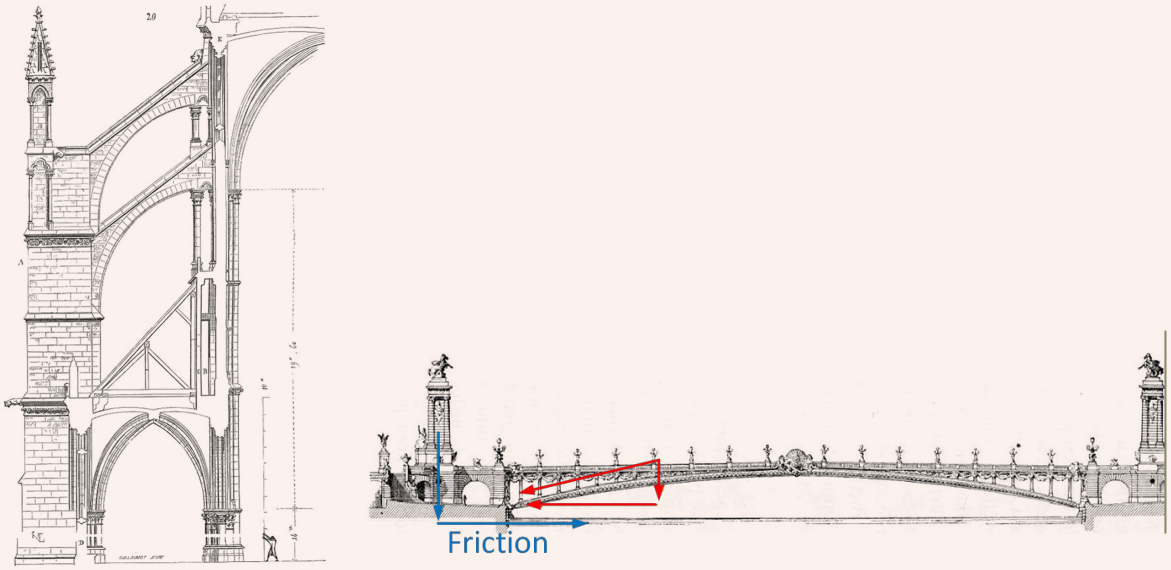
最后, Mark and Prentke, 1968, 在一个标志性论文中, 通过详细的分析寻求进一步的洞察力 (使用光弹性技术) 几个主要的哥特式教堂。他的分析表明, 石油泡沫的顶部 - 像塔一样的结构沿着一个教堂的周围抵抗飞翔石油的外部冲动 - 帮助通过克服由结合引起的地方紧张局势来维持石油瓶的完整性。死体重和风负载: 皮革的重量产生压缩在皮革泡沫中, 消除压力。旋转器作为一个压缩单元的作用。

这一发现令人惊讶的是, 因为皮板的技术功能被其过度装饰作用所掩盖, 而且由于粗糙的稳定性考虑将把皮板放在内部而不是皮板面外边。

基板的结构作用并没有被设计非常薄的亚历山大桥的工程师所失去。3、巴黎 (图 15.15b) 以 1892 年法国 - 俄罗斯联盟为荣。

为了更深入了解哥特式大教堂背后的科学, 读者应该咨询 Heyman et al., 1992 和 Heyman, 1998b.

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 飞翔的泡沫 (Viollet-le-Duc, 1854)

(b) Alexandre III bridge, Paris

图 15.15: Thrust 荷载 转换

15.4.2 古斯塔夫 • 艾菲尔 (1832–1923)

古斯塔夫 • 艾菲尔是法国工程师, 他们精英主义者的纯粹产品。**大学校**.[25] 他可能是设计一个工程师最明显的例子。“结构” 完全无目的服务 [26] 除了成为法国人的艺术遗嘱 **熟练** 在 1889 年世界博览会的粉碎铁结构中, 一项埃菲尔项目记录了自己在下一个十年发表的两张体积单图中。(Lemoine, 2002).[27]

尽管艾菲尔负责最终设计, 但原始概念设计由其公司的两位工程师: 莫里斯 • 科切林和埃米尔 • 努吉耶 (Emile Nouguier) 创作。小点的认可已被授予科赫林, 他在其他结构中非常参与了埃菲尔塔和加拉比特维亚图的设计。

此前, 艾菲尔为雕塑家奥古斯特 • 巴托尔迪设计了自由雕像的内部铁相关术语。后来, 他设计了多个国家的多台维亚杜克和铁路站。形象 15.16b 展示其著名的双环拱桥,Ponte Maria Pia。

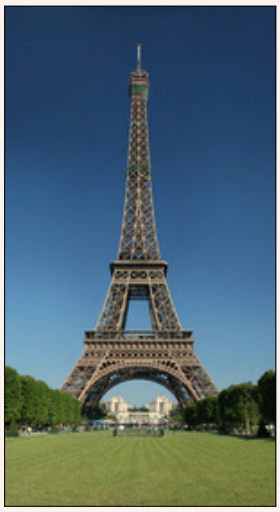
塔的封面形状经常被称为纯粹的美学选择, 但其个人资料实际上源于工程需要: 艾菲尔塑造了每个部分, 以便在任何水平切割以上的结构上的风 压力 的结果将保持到塔边缘, 从而尽量减少从风负载引起的旋转压力。塔曲线背后的这种风驱动逻辑从那时起就被分析对现

[25] 尽管他惊讶地选择了 **艺术与制造业中心学院** 超越更有名的 **政治学科**.

[26] 除了第三层的餐厅之外。

[27] 艾菲尔超越了由朱利 • 博尔达斯 (Jules Bourdais) 的竞争设计, 他提出了一条大理石板。“太阳塔” 电灯 - 一个美学上和结构上较低的概念, 这将是更昂贵、更少创新。(Bourdais, 1881). 看见 §15.5.5 对这项竞赛的详细报告。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 艺术: 塔



(b) 工程: 桥梁

图 15.16: 古斯塔夫 • 艾菲尔: 塔与桥梁

代大气层边界层风档模型进行审查, 确认艾菲尔的实验性衍生形状是多么密切地预测了后来的空气动力理论。(Weidman, 2009).

正如神经后来会参与 **铁路** 对于他的盾牌, 艾菲尔自己参与了制造。**埃菲尔金属建筑**. 正如莫兰迪后来会有他的 “签名” 桥型, 艾菲尔有他的 “签名” 二角 拱 桥梁:[28] 玛丽亚皮亚桥 (Thrall, Billington, and Bréa, 2012), 加拉比特维亚杜克, 路易斯大桥, 维亚纳多城堡的罗多 - 费罗维亚里亚大桥等。

艾菲尔公司, **艾菲尔设施公司**, 是预制铁框架的前沿 (Établissements Eiffel, 19th Century). 这种工业化方法使桥梁、塔楼和其他结构能够快速成本效益建设。他强调了多种关键方式的模块化, 这是一个方法, 其基础结构优化原则从那时起就被详细分析。(Sundaram and Ananthasuresh, 2009):

预制: 组件在高精度的研讨会中生产, 然后运送到现场进行集装, 减少现场建设时间并确保质量控制。

标准化组件: 艾菲尔使用了标准化铁和钢组件, 可以大规模生产并在多个项目中重新使用 成本效益和可扩展。

和 riv 的: 他优先于传统的焊接或焊接技术, 更容易收集和分解。

轻量级但强大的结构: 他采用了轻型和桁架设计, 以优化材料使用, 使结构更轻, 同时保持强度。

适应性: 模块化方法使他的设计能够适应复杂的地板, 如岩石山脉和河流, 如 Garabit Viaduct 和其他铁路桥梁所见。

这些模块化原则革命了大规模建设, 并在建筑和工程中启发了现代预制和模块设计技术。

[28] 正如章节中所示 32 二角弓的分析比三角弓更复杂。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

艾菲尔参与巴拿马运河丑闻暂时破坏了他的声誉, 尽管他后来被释放。(Charle, 2004). 他的金属建筑遗产仍然不一致, 为现代滑雪板和长距离桥梁奠定了基础。

15.4.3 路易 • 亨利 • 苏利文 (1856-1924)

1856 年出生, 苏利文在 16 岁时加入 MIT。简短在芝加哥工作, 他随后登记了 *È* **美术之旅** 在巴黎, 然后花了一段时间旅行到罗马和佛罗伦萨。

Sullivan 的建筑风格涉及大量的卷, 与迷人的装饰相矛盾。对于 Sullivan 来说, 装饰是另一方面直前钢框建筑的增强部分。

如 (其中一个很少的) 在工程和建筑方面训练, 并不奇怪的是, 他是这个著名的阿波里主义的创始人。(Sullivan, 1896) 对于结构 (与建筑相反) 下面说:

> 然而, 站在事物岸边的人的坚定眼光, 主要和最热情地看着太阳闪烁的那个侧面, 我们感到快乐成为生命, 心灵总是被美丽、精美的自发性所喜悦。生活在寻求和采取其形状的协议, 完全响应其需要。它总是看起来, 生命和形状是绝对一个和不可分割的, 所以满足的感觉就足够了。无论是飞行中的相关术语鹰, 还是开放的苹果花朵, 流动的劳动马匹, 闪发光的狮子, 分裂的尾巴, 它的基地上的风流, 浮动的云彩, 在所有流动的小鸟上, 形状总是遵循功能。这就是法律。它是所有有机和无机事物, 所有物理和形态事物、所有人类事物和超人事物的破坏性法则, 所有真正的头脑、心灵、灵魂的表现。生命在其表达中是可见的, **形式总是遵循功能**. 这就是法律。在功能不变的地方, 形状不变。格林岩, 不断浮动的山丘, 永恒; 闪光活着, 形成了形状, 死去, 在双重。... 因此,
>
> - 当本地的本能和敏感性将统治我们所爱的艺术的实践;
> - 当已知的法律、所遵守的法律, 是这样的一种形式;
> - 当我们的建筑师停止在外国学校的避难所里, 用手打和争吵时;
> - 當真正感受到, 喜樂地接受, 這一法則開啟了綠田的陽光, 並給我們自由, 在自然界所表達的法律本身的超越的美麗和精彩, 將阻止任何健康。任何敏感的人从转换到许可证;
> - 当显而易见的时候, 我们只用一个明显的美国焦点说外语, 而这个土地上的每一位建筑师, 在这项法律的善良影响下, 都能以最简单、最谦虚的方式表达。最自然的方式, 他所能说: 他可以和肯定会发展自己的特征性个性, 建筑艺术与他一定会成为一个活着的言论形式, 一个自然的表达形式。使他得益处, 并将小和大宝藏添加到他的土地的成长艺术;
> - 當我們知道和感覺到自然是我們的朋友, 而不是我們的無情敵人, 那是一個下午在國內, 一小時在海邊, 一個整天開放的景色, 通過黎明, 高中午夜和二夜, 它会向我们提出如此多的节奏, 深度和永恒在大规模的建筑艺术, 如此深刻, 如此真实的东西, 以至于所有狭窄的形式性、艰苦而快速的规则和紧张的联系学校不能把它放在我们里面。
>
> 然后可以宣布, 我们正走向自然和令人满意的艺术, 即将成为真正、最好的意义上的美术的建筑。這是一個藝術, 將活下去, 因為它將是人民的, 為人民和由人民。
>
> (Sullivan, 1896)

注: Sullivan 的线性 表述 可能过于简化空间与形状之间的关系。俄罗斯哲学家帕维尔 • 弗洛伦斯基 (Pavel Florensky) 指出:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 因此, 如果我们试图确定什么是先来的: 空间性或事物性。
>
> Florensky, 1996 Beyond Vision: Essays on the Perception of Art

这表明, 建筑空间可以影响结构形状的程度和功能要求塑造空间体验 - 一个相互关系, 从 Nervi 到 Torroja 的主要结构工程师在工作中直观地理解。

第二部分是非常鲜花的 Kiplingesque。显然, 他的写作技能与他支持结构的简单性不一致。尽管苏利文认为建筑物需要表达其功能, 但他的结构是巨大的。[29]. 虽然被认为是创新建造高楼的设计, 他不能放弃装饰在那时美国最大的贡献到现代建筑的启动: 钢材结构系统。

Sullivan 是年轻的 Frank Lloyd Wright 的导师。不幸的是, 他过去的二十年因急剧下降、佣金短缺、财务困难和酒精主义而特征。

15.4.4 罗伯特 • 梅拉特 (1872–1940)

感谢比利顿的作品 (Billington, Mark, and Abel, 1972; Billington, 1979) 梅拉特已经 “狮子” 如同 Quintessential “结构艺术家。”

罗伯特 • 梅拉特 (图 15.17a) 是瑞士技术学院在苏黎世的瑞士联邦技术研究所先驱训练的工程师。(ETH) 在威尔赫姆 • 里特 (Wilhelm Ritter) 学习的 (自己是 Culmann 的学生) 并成为图形静态的坚实追随者。

梅拉特不喜欢过度理论, 并理解提出假设和视觉结构行为的必要性。[30] 有趣的是, 类似的方法后来被其他两位著名的瑞士工程师采取了很长时间: 乔瓦尼 • 洛姆巴迪 (Jovanni Lombardi) 在他设计的女士和克里斯蒂安 • 梅恩 (Christian Menn), 谁依靠计算。之后 完成初步设计, 以便完善它们。

迈拉特, 谁先驱使用钢筋混凝土, 设计了一系列三角架 (如示在 §32.1.1.2.3 他们的分析非常简单。) 由一种美学感引导。

瑞士有 - 而且仍然有一个 - 传统的开幕式竞赛选择民用项目, 根据多种标准选择, 而不仅仅是成本。由于国家的传统依靠简单计算与良好的理解相结合 (“感受”) 对于结构性反应, 原始设计可以蓬勃发展。这与过度依赖于数学增强的以前设计灵感的文化相矛盾, 如当时的德语或法语 - 倾向于破坏创造力的方法。

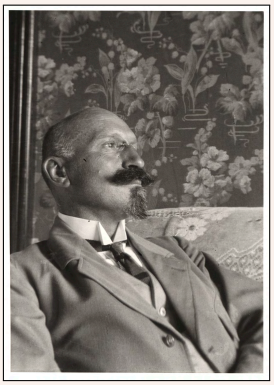
作为一个侧面注意事项, 所谓的开放竞赛并不总是像瑞士所期望的那样透明和公平。著名的是, 国家联盟的竞赛 总部被打破, 导致一名年轻的瑞士建筑师 Le Corbusier 在委员会通过后包装并离开法国。“由委员会设计” (主要是基于自己的概念。) 他的作品未被认可　部分是由年轻的建筑师不愿意在印第安印刷中提交他的绘画的事实证明。瑞士对法国失去了令人震惊的数字, 尽管他的脸现在装饰了 10 CHF 法案

因此, 当时间建造一个桥梁在瑞士的遥远部分与交通较少时,Maillart 建造了其最标志性

[29] 解释我发现没有必要包含任何他的结构的图像。
[30] 如今, 很少有工程师对结构性行为的深度理解, 导致对计算机模型的过度信任产生美丽。(并说服) 图形图像。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的结构: 萨尔吉纳托贝尔桥世界各地庆祝 (图 15.17b). 另一个 Maillart 的设计, Magazzini Generali 仓库, 在章节中讨论 39.3 (基于 Billington 的笔记).



(a) 马尔特先生



(b) 萨尔吉纳托贝尔桥

图 15.17: 罗伯特 • 梅拉特

虽然艾菲尔喜欢两根火柴, 但梅拉特在三根混凝土中发现了美丽。

15.4.5 奥古斯特 • 佩雷特 (1874–1954)

奥古斯特 • 佩雷特 (布鲁塞尔,1874 - 巴黎,1954) 他是一位法国建筑师和建造者谁为钢筋混凝土做了什么 Maillart 为桥: 他证明材料不需要隐藏在石头后面粘着或装饰的塑料, 但可以被曝光为诚实的表达一个建筑的结构。他的当代人所处理的混凝土 作为服装的用途骨骼,Perret 将其视为建筑本身 形状、比例和细节相同的照顾一个经典的马松会在切石上滑动 [31].

波里特在训练中 **美术学院** 在巴黎, 但从未接受他的文凭, 更喜欢他父亲的实践世界。建筑公司,Perret Frères, 他最终领导。这个双重身份 在经典组成中学习, 在建筑中建立现实 - 塑造了他所构建的一切。他的景点公寓建筑在 25 巴黎公路, 法兰克林 (1903) 它是第一个结构之一。在一个面孔上展示一个增强的混凝土框架, 用陶瓷板粘贴面板阅读诚实而非结构性。他的 **诺特 · 达姆雨** (1923) 仍然是他的主作品: 一个教堂, 在那里滑板混凝土 列 支座 一薄的壳 卷, 墙壁完全溶解在一个轻微的预先 混凝土 跟踪, 填满了粘玻璃莫里斯 • 丹尼斯 - 哥特式逻辑在工业材料中重生, 图 15.18. 他的最大委会, 在战时后重建 Le Havre 破坏 (1945–1954), 在城市范围内应用这些原则:A 统一的城市中心 混凝土, 经典的比例, 但不可误解现代, 如今被联合国教科文组织世界遗产认可。

设计哲学 佩雷特的引导信念是, 结构和建筑是不可分割。

[31] 在背景下, 佩雷特可能被视为史密森和雷纳所做的一切无意的先驱。Banham 會後期 **暴力主义** 故意暴露原料 混凝土 (**混凝土粗**) 如 A 完成表面。讽刺的是显著: 佩雷特的曝光混凝土 一直是精致的, 经典比例, 精心细致, 而它所帮助的残酷主义却激发了经常以美学为本而庆祝。Le Corbusier 的故事**家居单位** (1952)—哪个板标记 混凝土表面给了布鲁特主义自己的名字 由一个男人设计。经过两年在佩雷特的研讨会上, 吸收了正确的相反的教训: 被曝光的混凝土要求, 不道歉, 最高的船

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



图 15.18: 佩雷特的 Notre Dame 雨 (1923)

> 任何掩盖木构架任一部分的人，都会放弃建筑唯一正当且最美的装饰。隐藏一块石头的人, 就犯了一个错误。凡做虚假的罪犯, 都是犯罪。
>
> ---
>
> 隐藏建筑的任何部分的人, 只剥夺了建筑的唯一合法和最美丽的装饰。隐藏一个柱的人犯了一个错误。谁创造一个虚假的柱犯了一个罪行。
>
> Perret, 1952 Contribution à une théorie de l'architecture

他写了一篇 - 一个声明也可能是由 Nervi 或 Torroja 签署的。他拒绝了**艺术新** 倾向于将结构分解到装饰中, 以及同样拒绝了新兴的现代主义, 这使建筑物减少到抽象。与材料和工艺无关。对于 Perret, 柱, 泡沫, 框架不是对美丽的障碍, 而是它的源头。只要它们是严格的比例和精确执行。这把他放在一个从维特鲁维乌斯走过 Viollet-le-Duc 的线路上。二十世纪的结构艺术家 - 一位建筑理论家谁知道三位一体的 **坚固、实用、美观**这不是一个层次, 而是团结。

他对下一代的影响是直接和个人。其中, 经过他的巴黎工作室的年轻建筑师是查尔斯 -É 杜拉德 • 吉安雷特 (后来是 Le Corbusier) 在那里工作。从 1908 年到 1910 年, 并被吸收, 即使他后来反对, 佩雷特坚持结构性诚实。[32] 哪里是 Perret 保持忠于柱和右角, 他的学生会完全解散墙壁, 但双方都同意, 结构不应该撒谎。

15.4.6 爱德华 • 托罗贾 • 米雷特 (1899–1961)

爱德华 • 托罗贾和米雷特 (马德里,1899 年至 1961 年) 他是一位西班牙结构工程师, 在 20 世纪上半叶的钢筋混凝土技术和美学发展中被广泛认为是四个最有影响力的人物之一, 与罗伯特 • 梅拉特、尤金 • 弗里西内特和皮尔 • 路易吉 • 内尔维一起。他是二十世纪最伟大的结构工程师之一, 是壳结构的主人。和薄 混凝土 形式 其作品实现了结构逻辑和建筑美丽的整合, 在之前或之后很少平等。

[32] 关系是终身, 有时是可爱的: 革命家 Le Corbusier 但是, 古典主义者对几乎所有事物都公开不同意。佩雷特的指纹　飞行员, 自由面孔, 暴露框架 - 在 Le Corbusier 的早期工作中可见。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

托罗雅在 **道路工程师校** [33] 在马德里, 在那里他学习 Juan Manuel de Zafra y Esteban, 一个著名的研究人员在新兴领域的强化混凝土, 和约瑟 • 里贝拉, 谁领导 Hennebique 的公司在西班牙。这两名男子的护理在托罗贾的后续发展中发挥了重要作用。毕业于 1923 年, 他建立了自己的技术办公室。(**首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學**) 于 1927 年 (Winchurch, 2007 PDF).

首先他专注于设计和分析建筑物, 然后在 1933 年左右他完成了几项项目, 包括薄壳和圆形瓦尔特。(Winchurch, 2007 PDF). 他的早期工作, 并继续设计标志性的薄壳混凝土结构, 包括 Algeciras 市场厅。(1933) 马德里的 Zarzuela Hippodrome 天花板 (1935), 和 Frontón Recoletos 体育厅 (1935)● 顯示的特别命令 钢筋混凝土 壳 建設。在西班牙内战中被摧毁的 Frontón Recoletos 配备了交叉式圆形盾牌, 带有冰淇淋眼镜, 以光线洪水 - 结构、空间和照明的合成。

Torroja 在马德里竞赛设计新 Zarzuela Hippodrome; 其设计 (#3) 被选中 9 名决赛者 (图 15.19a). 这个 **马格努姆 · 奥普斯** 这是最结构性和美学上完成的提交, 由所谓的 **马德里理性主义**.[34] 他几乎 36 岁。

> 第一個獎項是由建築師 C 計劃的解決方案。阿里奇和 M。多米因和工程师 E。Torroja, 其中壳的原创性覆盖了这一时期的一个全新的结构, 即使在二十七岁时, 它也表明了 Torroja 天才的原始性, 他通过这项工作在比赛中取得了第一场胜利。
>
> Torroja, 1962a PDF

扎尔苏拉屋顶 混合物 壳 12.8 米, 边缘厚度仅为 5 厘米, 仍然是结构性优雅的标志。事实上, 五十年后, 扎尔苏拉希波德罗姆变成了一个 “历史艺术” 西班牙纪念碑 对 Torroja 的建筑有着很好的分析。Antuña Bernardo, 2003 PDF.

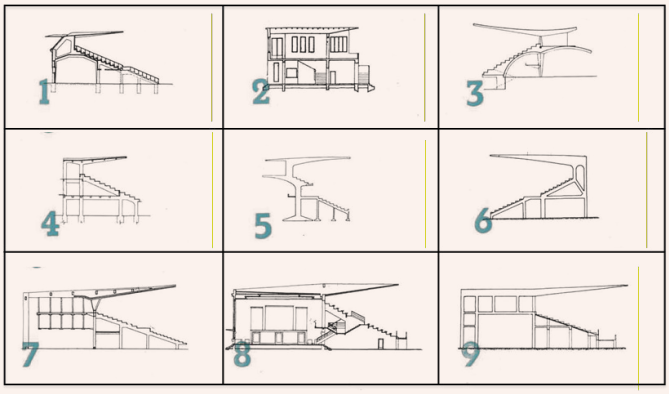
到 1936 年, 托罗贾承认要走得更远, 需要获得更多的知识。1940 年, 他被任命为首席执行官。**中央材料实验室** *Ensayos de Materiales* 他强调了模型和材料测试。后来他创立了建筑与水泥技术研究所。(此分類上一篇: Instituto Eduardo Torroja) 在马德里, 成为具体技术和结构工程研究的领先中心。他也共同创立了 **欧洲混凝土委员会** (CEB) 曾担任总统的 **国际反对派联合会** (FIP). 他在马德里民用工程学院担任教授, 并在普林斯顿、哈佛和 MIT 担任访问教授。

设计哲学与结构直觉 托罗贾的设计哲学拒绝了形式的自愿征收和计算的机械应用。“结构设计师,” 他写的, “必须有创造性的直觉和能力在部分之前看到整体。” 他支持自然而然地从力量的流动中产生的形式。通过形状 - 通过膜行动携带荷载的阴道, 在冲动线下追随弓箭, 接管电缆具有 fun 形状。这个方法, 他称之为 “结构性直觉,” 需要深入了解材料如何行事以及力量如何通过结构找到自己的道路。他先驱使用全规模测试, 在完成设计之前验证复杂壳结构的行为, 并将直觉与实验验证相结合, 当分析时间方法证明不够时。

[33] 就好像这对该机构来说不是一个不寻常的名字, 后来它变成了 (著名) **高级工程师, 通道和港口** (马德里政治大学). 没有关于民事或结构工程的标题。

[34] 马德里理性主义是由其形状和单元以及使用的材料都突出的建筑特征: 钢筋混凝土, 曝光的布, 大水平窗户, 无装饰的柔软面板。它部分被材料不足所驱动, 在西班牙震惊的残酷内战之后仍然是一个贫穷的国家。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 提交 (Torroja, 1962a)



(b) 托罗雅的设计

图 15.19: 西雅图,Zarzuela Hippodrome

就像 Hardy Cross 一样,Torroja 认为详细的分析只有在初步设计后才会到来。他看到了计算几乎是后思, 需要评估已经通过直觉想象的设计的可行性。[35]

> 由于在整体设计完成后, 结构或个体结构成员的压力计算是一个更技术和专业的工作, 它是本书范围之外的一个主题, 只有一般评论将进行。压力计算只能用来检查和纠正结构成员的尺寸, 如设计师的直觉所想象和建议。工作本身从计算中永远不会出生。计算是指设计如想定和采用: 通常它是在整体设计后进行的, 以确保结构的稳定性和强度。如果计算不证明结构所需的安全性, 设计师必须修改他的工作并重复计算最终批准。计算必须检查不仅强度, 而且建造的弹性和静态稳定性。结构的强度往往是显而易见的, 不需要计算。然而, 这并不意味着在其他情况下, 没有适当的理由, 可以忽略准确的检查。
>
> (Torroja, Polivka, and Polivka, 1958)

Razón y Ser de los Tipos 建筑物 在他后来的几年里,Torroja 专注于出版物。他的书 *Razón y Ser de los Tipos* **建筑物** (《结构哲学》出版于 1958 年。) (Torroja, 2008; Torroja, 1962b; Torroja and Miret, 1958) 它已成为世界各地结构设计最有影响力的文本之一, 并构成了一种设计哲学, 专注于力量通过形状的自然表达。托罗贾写了这本书作为对那些试图将结构减少到一个简单的计算问题的人的论点; 对于他来说, 抵抗是必不可少的, 但从来不是建筑的唯一或主要理由。这本书介绍了他对一个结构设计师在面对新项目时所使用的精神过程的思考 - 无论是理性和情感性 -。关于概念设计对计算的优先事项, 托罗贾在预言中明确写道: **在计算之前, 首先是要把材料变成一种抵抗性的形状, 以实现其使命。** 这份声明证实, 托罗贾确实认为结构分析应该遵循 - 没有前提 - 结构的初步概念设计。

他的 **结构哲学** 它既是一种技术治疗, 也是关于结构设计艺术的冥想。哪里 (Torroja and Miret, 1958) 他对他的许多个人成就的看法, (Torroja, Polivka, and Polivka, 1958) 更有趣: 在其中他反映了结构工程的职业, 然后用简单的术语描述 (不是一个平衡) 各式各样的结构的结构性行为, 如弓箭、相关术语子、sh 子等。托罗贾分析结构类型　相关术语子、弓箭、子、框架、盾牌　不仅仅是数学抽象, 而且作为对物理和空间需求的回应。他强调, 结构优化 建

[35] 同样, 我总是告诉学生应该有一个 “感受” 或在分析之前对一个问题进行大约的答案, 以完成 单元 代码。结构分析 应该被视为 **费尔米问题**.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

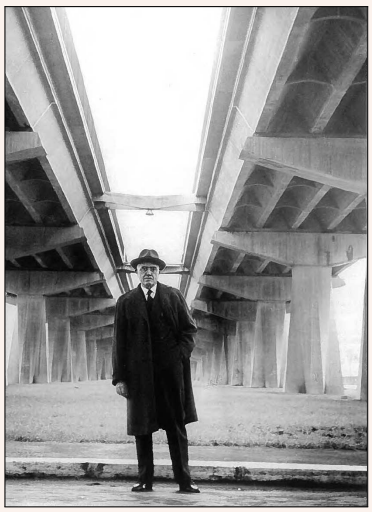
筑美不是竞争目标, 而是良好的设计的补充方面: 能有效抵抗负载的结构也倾向于优雅, 因为效率和美丽都源于结构性行动的清晰表达。

托罗贾的影响力遍布西班牙语世界, 并在其之外激发了工程师的灵感, 他们寻求将技术虚拟与正式美丽相结合。他的射击, 尽管在执行中要求, 证明钢筋混凝土可以实现轻度和恩典对抗最美好的哥特式滑板。

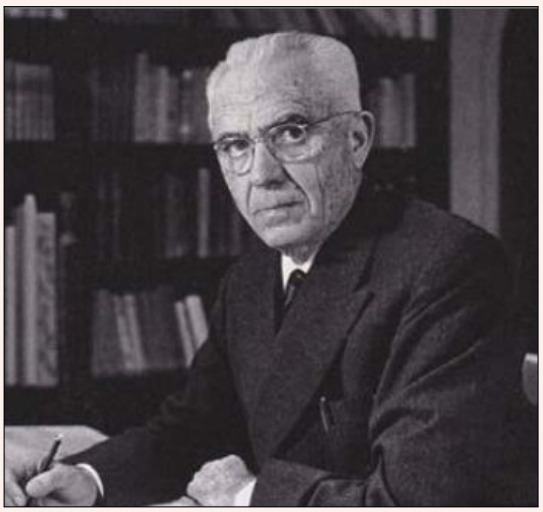
15.4.7 路易吉神经 (1891–1979)

路易吉神经 (索德里奥,1891 - 罗马,1979), 显示在 图 15.20 他是一位意大利建筑工程师和建筑师, 与罗伯特 • 马尔特、尤金 • 弗里西内特和埃德鲁多 • 托罗贾一起被广泛认为是 20 世纪钢筋混凝土建设发展中最有影响力的人物之一。建筑史学家尼古拉斯 • 佩夫斯纳 (Nikolaus Pevsner) 称他是 “是我们时代钢筋混凝土中最辉煌的艺术家。” 他是二十世纪最有创造力和影响力的工程师之一。(Nervi, 1956a) 被教育和实践为一个 **工程师 精品** (“建筑工程师”) 博洛尼亚大学。1913 年从博洛尼亚大学毕业后,Nervi 为 **首頁 〉外文書 〉人文 〉** *Società Anonima per Costruzioni Cementizie* 在 1920 年成立合同公司之前, 在 1923 年建立自己的公司后 **公司英格。神经 & 巴托利** (1932) 通过它, 他作为设计师和建筑师服务 - 一个不寻常的组合, 让他直接在现场测试和完善他的创新想法, 并给了他直觉和乐趣实现经济创新的设计。他确实是 A **卓越的设计师**. 这种设计与建设的整合是他的哲学的核心: 他坚持的结构形状必须从材料和制造的现实中产生, 而不是从无可构建的抽象地质上施加。

在意大利文化中, 人们常常用一个人的名字以他的标题先行。(**主持人**, **律师**, **理工**, **建筑师**, **工程师**等等。). 当人们提到神经时, **神经建筑师**他总是会纠正它们: “**神经工程师**” (Maier, 2007).



(a) (Lori, 2009)



(b) (Nervi, Neri, et al., 2014)

图 15.20: **工程师** 路易吉神经

他的主要作品包括伯塔体育场 (阿尔特米奥 • 弗兰奇) 在佛罗伦萨 (1930–32), 飞机在

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Orvieto 和 Orbetello 上挂着 (1935–42) 图林展厅 (1947–50) 联合国教科文组织总部在巴黎 (与布鲁尔和泽尔福斯,1950 年) 米兰的 Pirelli 塔 (与 Gio Ponti, 1955 - 59), 以及 1960 年罗马奥运会的体育宫殿, 包括 **马拉松体育** 和 (不要被混淆) **体育宫**. 他从 1946 年到 1961 年在罗马建筑学院教授, 并于 1961-62 年在哈佛举办了查尔斯 • 埃利奥特 • 诺顿讲座。

他的商标是曲折的形状和发动的架子。但他的建筑基本上是合理的, 具有限制感。他没有批准过于复杂的建筑, 其结构太复杂了工作; 他试图创造合理而简单的建筑物, 具有轻松和经济的气氛。“美丽不是从装饰而来自, 而是结构一致。” 他说 (The Baltimore Sun, 1979).

技术创新与专业融入 神经熟练结合了职业的三个方面: 结构性理解一个结构中的力量流动, 具体确定 **以色列** 线路 [36] 即使是复杂的结构; 创新材料开发 **铁路**它在建造其盾牌中发挥了重要作用; 以及建筑技术, 以降低成本而不损害美学或安全。

Nervi 的贡献超越了设计, 包括建筑技术的基本创新。开发和专利 **铁路** (铁路) 一个薄的水泥化合物, 使用多层精细钢板喷用水泥相关术语 - 这使得最小厚度的元素与显著的强度和塑料性形成。这种技术, 首先用于仓库墙壁、船洞和后来大规模建筑单元, 成为他的战后作品的标志, 使复杂曲形形式能够在现场进行预制。他还先驱了精致的结构单元和移动形状系统的使用, 大大减少建设时间和成本, 同时保持最高标准的结构优雅。

工程师: 隔离线和结构理解 在 Nervi 时代, 工程师依靠坚实的机械理解, 并通过测试补充。目前还没有计算机, 并且计算 (根据现代标准) 相对基本。

他的系统 **隔离式 雷布**, 专利于 1949 年, 沿着主要旋转时刻的线条调整了混凝土绳子, 优化材料使用, 同时生产出像 Gatti Wool 工厂和 Palazzetto dello Sport 这样的作品中可见的独特的包装模式。神经学家阿尔多 • 阿根吉利 (Aldo Arcangeli) 是他的设计办公室的工程师之一, 他建议一块绳子的边缘应该跟随其主要旋转时刻的隔离线。这些线路完全取决于结构的负载条件, 而 Nervi 惊讶地发现, 通过限制他的任务来解释一个纯粹物理现象, 他可以发现意想不到和表达性的新形式。沿着瞬间的隔离线路设立的丝带在计划中美丽曲折。(Nervi, 1956b).

以色列线 (不要与边缘线混淆) 可以通过以下算法轻松地构建:

```
procedure 隔离性                                          ▷ 密集的隔离线
    初步化 Γ, h, L, nLines, frac, vect, i                 ▷ 初步的常态
    for Line ← 0 to nLines do                             ▷ 走在线路的数量上
        x_0 = −L/2 + Line × L/frac;  y_0 = 0.99 × h/2      ▷ 第一点启动
        x(1) = x_0; y(1) = y_0                            ▷ 首页 > Array
        Inside ← true
        k = 1                                             ▷ 启动对称为线
        while Inside = True do
            Compute σ_xx;  σ_yy;  τ_xy                    ▷ 共用 张量 组件
            T = Tensor(σ_xx τ_xy)                         ▷ 设置 应力/时刻 张量
            [Vect, D] = eig(Tensor)                       ▷ 计算机正常化/分类自己的 vectors
            V(:) = Vect(:, i)                             ▷ 提取 向量 (第一或第二 特征向量 (C 或 T)
            k = k + 1                                     ▷ 增加对线
```

[36] 隔离线 定义一个主要值的方向, 为顺序 2 的张量 (如如 σ_{ij} 或 M_{ij}) 可视化其轨道, 以射线、板块或其他单元。

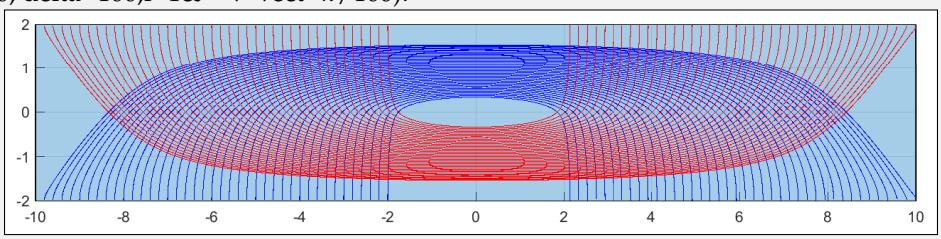
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$x(k) = x(k-1) + vect \times V(1)$ ▷ 确定下一个点
$y(k) = y(k-1) + vect \times V(2)$ ▷ 以一个 arc 长度 = vect
if x, y, outside Γ **then** ▷ 确保我们在表面内
$Inside \leftarrow$ `false`
end if
end while
Plot(x,y) ▷ 把这条线
end for
end procedure

哪里

Γ	体积的身体 ($h \times L$)
h	高度
L	长度
线路	隔离线的数量
弗拉克	大量, 以避免开始 $x = \pm L/2$
维克特	以色列线的增加弓长度
i	压缩 ($i = 1$) 或紧张 ($i = 2$)

使用这个算法 (马特拉布 列入的代码 §I.2.10) 可以轻松地在 荷载 单一的 梁 的隔离线上进行配置。(nlines=40, delta=100,i=1&二、Vect=$h/100$).



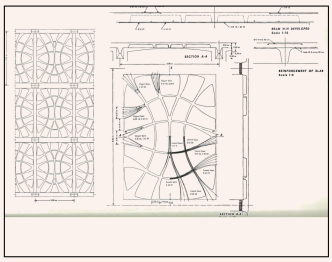
在 图 15.21b 红线代表最高主要旋转时刻的隔离性, 蓝线代表最小主要旋旋转時刻的次要。(Halpern, Billington, and Adriaenssens, 2013 PDF). 在这种情况下, 两对线都是从四个边界沿着的开端节点产生的。线的浓度表明主要弯矩方向的相匹配。灰色和白色的图表显示了 Gatti Wool 工厂地板的约定计划, 以描述理论隔离学与建造的绳子模式之间的相互关系。周围的柱 支座在四角膜左下方产生的集中二次隔离物, 反映了将集中强化曲线放在柱-头周围, 并确认 Nervi 的位置是围绕柱. 从中央柱发出的绳子也与产生的初始隔离物密切相关。多种例子的神经灵感天花板设计可以找到在 (Vitalis, 2021 PDF).

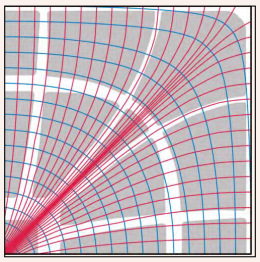
正如他一代的大多数意大利人一样, 在没有尚未开发的终端元素方法的情况下,Nervi 总是认为实验是应用或测试理论界限的最佳方法, 当理论证明不够支持他的创新设计时。[37] 与小规模测试模型工作在他的设计工作中是连续的; 他使用它们 “测试” 和 “双子座” 他的未经证明的假设。形象 15.23a 展示了 Orvieto Hangar 的模型测试 (图 15.24b). 神经不断使用小规模模型, 在实验室条件下进行测试, 以验证结构性行为之前的建设 - 一个实践补充了他的理论分析与实验验证。神经不仅依赖于应变图标的模型测试, 而且还依靠光弹性。还有数学理论。

值得一提的是, 有些人在 Nervi 的作品中看到了科学的繁荣。**生物学建筑**, 注意到隔离线

[37] 许多 Nervi 的测试是在 (现在的死者) 伊斯梅 (*Istituto Sperimentale Modelli e Strutture* **实验室**), 谁先驱测试为女士 (大多数) 创新结构。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

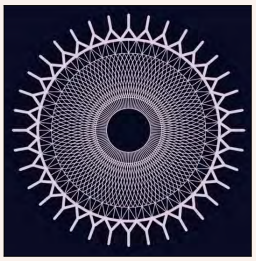

(a) 使用以色列线的地板 (Nervi, 1956b)



(b) Gatti Wool 工厂的隔离线 (Halpern, Billington, and Adriaenssens, 2013)

图 15.21: 以色列线的例子

与叶子的自然流动或树木的分裂之间的强烈相似之处 **维多利亚亚亚马逊** (Vitalis, 2021) (图 15.22).


(a) **马拉松体育** 杜布

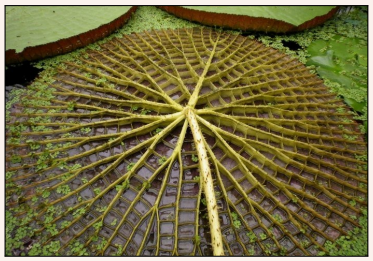

(b) **维多利亚亚亚马逊**

图 15.22: 神经与生物测量结构

材料科学家: 铁路创新 神经的名字与 **铁路**他先驱的 [38] 作为壳建筑形材的可行材料。它不仅仅是波特兰水泥相关术语, 由连续纤维网络或网膜的密切空间层加强。(如如 “鸡尾酒”), 如在 图 中显示 15.23b.

而不是形作, 混凝土用毛巾应用到任何形状的绳子板上, 固定在支持条上。因此, 钢筋混凝土不只是从线性骨骼形状中脱颖而出, 而且也从其形状的硬地质中脱离。粉碎的混凝土是无缝的, 它的形状完全独立。神经使用了这些非常薄, 特别形状的单元非常成本效益, 如完成的单元, 作为形式工作或失去的形式工作。铁路特别适合建造相对薄、硬、坚固的表面和结构。(船洞, 壳天花板, 水库). 纳尔维也被称为使用铁路用于建造船只, 尽管在 19 世纪由拉博特在法国和霍利斯特在美国先行。

因此, 我们看到 Nervi 的天才如何经济地结合物质、形状、建筑和建筑表达。其有效的结构形状如下主应力的线条, 由膜动作形成的裂缝, 时刻下降时刻的阴道曲线 - 展示了技术创新如何引发建筑表达。

[38] 事实上, 火柴是由两名法国人发明的:Joseph Monier 和 Josph-Louis Lambot。(谁建造了一艘船与系统在 1848 年). 此前是钢筋混凝土的先驱 “发明” 由 François Hennebique。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

建筑师: 主要工作和建设创新 第二次世界大战后, 意大利进行了广泛的重建。混凝土 是廉价的, 钢材 缺乏, 劳动丰富和历史上熟练。这种结合, 以及几个主要人物的创造力和天才性, 导致了二十世纪最具标志性的结构。这个时代被抓住了。(Desideri et al., 2013 PDF).

佛罗伦萨的早期市政场 (1930–1932) 在 Figs 中展示。15.24c 和 15.24d, 展示了钢筋混凝土的潜力 对于戏剧性 cantilevers 和表达式形式。但是,Nervi 的成熟工作通过他的铁工和预制品的发展实现了其独特性。单元 可以是 质量 生产和集合在网站上。这些技术允许建造复杂的曲线表面, 具有显著经济。

展厅在图林 (1948–1950) 联合国教科文组织总部在巴黎 (1953 年至 1958 年, 与布莱尔和泽尔福斯) 米兰的 Pirelli 塔 (1956 年至 1958 年, 与 Ponti),1960 年罗马奥运会的 Palazzetto dello Sport 和 Palazzo dello Sport, 以及梵蒂冈观众厅 (1971) 展示 Nervi 的范围和虚拟性。图林大厅设有戏剧性混合的瓦尔特表面, 由预制单位组成;Palazzetto dello Sport 通过一根精密元素的绳子, 实现了 60 米长的圆圈, 其内部是结构表达的强度巡回演出。[39]

神经赢得了模块结构的协同作用, 钢筋混凝土, 和结构性优雅. 他认为工程师, 免于风格主义的偏见, 可以实现 “结构性真相” 它本质上是美丽的, 不是通过应用的装饰, 而是通过力量如何通过材料流动的清晰表达。Nervi 的工作证明, 经济、结构效率和美丽不是竞争目标, 而是自然盟友, 当设计源于与材料和力量的诚实参与。

设计哲学与理论写作 神经的理论写作与他建造的作品一样重要。他最著名的书, **科学还是建造的艺术? 特征和可能的水泥武器** (1945) (Nervi, Neri, et al., 2014 PDF) 提出了关于结构设计的本质基本问题, 寻求将技术科学和直观艺术方法之间的历史分裂和解。1997 年由建筑师阿尔多 • 罗西 (Aldo Rossi) 创立。“我一直向学生推荐的一本书,” 论文提出了一个合理但敏感的平衡在比例, 计算, 实验观察和美学敏感性之间。

他的 1961 年诺顿在哈佛的讲座, 后来发表为 **建筑中的美学与技术** (Nervi, 2018 PDF), 扩大了这些想法, 通过自己的项目展示了混凝土的准确和投入可能满足其经济、技术准确性和美学满意度的三倍需求。关于直觉与计算在结构概念中的作用,Nervi 于 1931 年写道, 数值结果通过公式获得。“只能被视为指导参数, 可以由情感和直觉解释和评估, 唯一能够评估不能通过一个统治者和规模来评估的能力。” (Nervi, 2018 PDF, p. 16). 他补充说, 建筑设计师的任务是 “发明” 结构首先 把它定为空间的形状 然后才要计算。这种信念, 直观的概念必须先于数学验证, 在工程师艺术家的传统中,Nervi 与 Torroja 平面地站着, 他们将分析视为改进工具而不是结构形状的产生。

> …我想向建筑师、工程师、批评家和所有美妙的建筑领域的追随者致以关注, 这是一个客观现实, 经常被忽视, 更常被遗弃, 通过虚假的形式和文化理想化建筑事实: 材料、静态。建筑技术、经济效率和功能需求, 是建筑语言的词汇。
>
> 不能把这样的言论提升到诗歌的水平。(建筑) 甚至是修正预言。(良好的建设) 没有完美的理解这个词汇, 以及语法和合成规则 (技术) 它們必須由什麼組成。

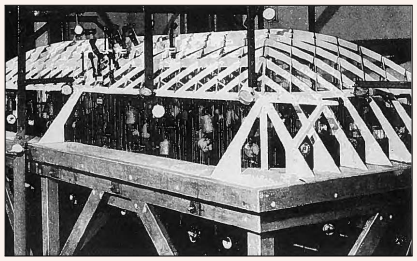
[39] 作者在罗马高中时, 幸运地参加了巴拉兹特托斯洛体育赛的手球比赛。站在那庭上, 在 Nervi 的沉重的绳子底下, 没有人能帮助, 但感觉到结构是活着的存在 绳子像某个未来主义大教堂的旋转一样向前闪发光, 光线通过冰冷的周围过滤。整个空间, 在某种程度上是纪念和亲密的。这个青春的经历留下了一个不可分割的印象: 这里是工程可以追求艺术的证据, 结构可以像任何雕塑或交响曲一样安全地移动精神。对于作者来说, 宫殿仍然是所有其他人被测量的建筑。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(Nervi, 1963)

在计算方面, 不幸的是, 没有太多生存; 然而, 他的作品被许多作家广泛描述。(Nervi, 1956b; Greco, 2008; Nervi, 2018; Lori, 2009; Nervi, 1963; Chiorino and Olmo, 2010), 他的档案分为罗马 MAXXI 博物馆和帕尔马大学之间。(CSAC , 研究中心和通讯档案馆).

一些神经最具标志性的结构在图中显示 15.24. 他的书 **结构** (1956) 和 **建筑中的美学与技术** (1965) 构成一个哲学, 在那里美自然从结构逻辑和建设过程的诚实表达中产生的。



(a) 模型测试 Orvieto Hangar (Lori, 2009)



(b) 铁路

图 15.23: 神经: 结构和材料工程师

15.4.8 里卡多 • 莫兰迪 (1902–1989)

第二次世界大战后, 意大利陷入了重建的困境。与意大利人的历史创造力和美学感相结合, 这项努力产生了一些标志性的结构　大多数情况下, 如果不只是, 在混凝土, 因为它比钢材便宜得多, 相对廉价的劳动是丰富的。

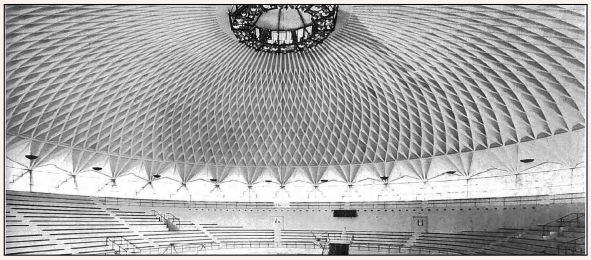
里卡多 • 莫兰迪 (Riccardo Morandi) 以其强化和压缩混凝土的创新使用而闻名。

可能由 Bixby Creek Bridge 启发 (图 15.25a) 莫兰迪设计了南非的 Paul Sauer 桥 (图 15.25b). 两者都被认为是各自国家的标志性结构。

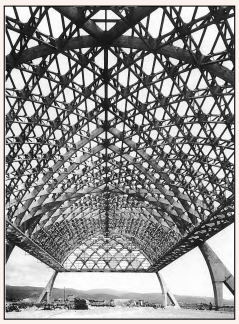
后来, 莫兰迪采用了支持索的结构设计, 他的名字与三座几乎相同的设计桥梁密切相关: 委内瑞拉总理拉斐尔乌尔达内塔大桥、吉诺亚市穿越 Viadotto Polcevera 大桥以及利比亚瓦迪 • 库夫大桥。这些桥梁可能是 “美学” 享受 (不是每个人都同意) 但他们缺乏救援, 并要求严格的维护, 以防止电缆腐蚀。吉诺亚大桥 (事实上, 一个维多利亚) 2018 年 8 月崩溃, 造成 43 人死亡。讽刺的是, 替代维亚杜克是由著名的日内瓦建筑师 Renzo Piano 设计的, 他共同设计了 Pompidou 中心。

另一个熟悉的 (虽然肯定不是 “偶像”) 摩兰迪的结构是罗马菲奥米奇诺机场的阿里塔利亚山脉, 可见于所有乘客。每個吊板由 19 個預設的天花板電缆組成, 支援屋頂。在每个端口, 一个压缩的混凝土喷雾支持这些电缆。最后, 这些成员被两系列压缩的混凝土相关术语子连接到墙壁。(Morandi and Piccarreta, 1972). 这种天花板非常相似于由 Eero Saarinen 设计的 Dulles 机场的天花屋顶。(看章节 39.1). 偶然, 莫兰迪是一位工程师, 萨里因则是一位建筑师。

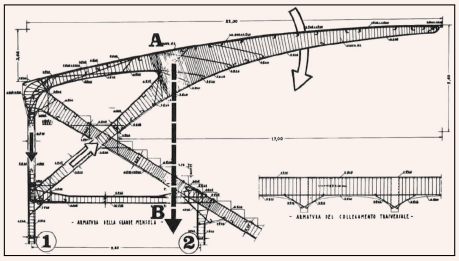
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 内在的 马拉松体育 (Nervi, 1963)



(b) 奥尔维托 • 汉加 (Lori, 2009)



(c) 佛罗伦萨体育场 (Nervi, 2018)



(d) 佛罗伦萨体育场 (Nervi, 2018)

图 15.24: 神经的标志性结构

15.4.9 基督徒人 (1927–2018)

通过 Maillart, 我们已经看到一位瑞士工程师能够强烈地将结构效率与美学结合起来。他被两个著名的同胞追随: 克里斯蒂安 • 门恩和奥斯马尔 • 阿曼。[40]

Menn 毫无疑问是 20 世纪中叶最突出的桥梁工程师。五十年之久, 他推出了创新、想象力、音效结构工程。“善良的感觉,” 最重要的是, 具有美学敏感性。他在 ETH 教授时也练习 (此前由 Maillart 出席). 他的作品的一部分总结在 (Brühwiler, 2010).

男人的结构主导 (预应力混凝土 桥梁) 分析在他的书中展示 (Menn, 1990). 在其中,Menn 意味着一个适当设计的桥梁将负责经济、生命周期成本和建设成本。事实上 美学。[41] 有趣的研究他的著名的 Suniberg 桥 (图 15.26) 被授予 Honigmann and Billington, 2003.

Menn 讨论了美学在 (Menn, 1996):

> 桥梁必须满足具体的功能要求和限制, 如清算和建设时间表。除了这些要求之外, 最重要的设计目标是: 结构安全、可用性、经济和优雅。
>
> 结构安全和可用性定义的标准在设计标准中确定, 这反映了桥梁设计技术方面的艺术现状。结构性安

[40] 奥斯马尔 • 阿曼设计乔治华盛顿桥 (§39.4), Verrazano-Narrows 桥, 以及 Bayonne 桥。
[41] 至于 Vitruvius, 如果 坚定 和 用途 需要满足, 然后 威尼斯 会跟随。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) Bixby Creek Bridge (Panhorst, 1932)



(b) Paul Sauer Bridge (Morandi, 1953)

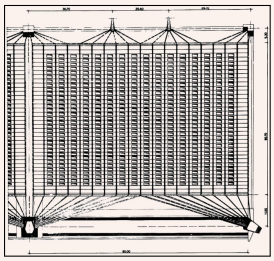


(c) 拉斐尔 • 乌尔达内塔大桥 (1958)



(d) Viadotto Polcevera, Genoa (Morandi, 1963)





(e) Alitalia hangar, Fiumicino (Morandi, 1962)

图 15.25: 里卡多 • 莫兰迪

> 全和可用性是由工程师主要作为工匠, 即通过逻辑应用已建立的原则实现的。一个桥的成本可以根据经验和替代概念的研究来估计。经济主要依赖于设计概念。优雅主要涉及影响环境和结构本身的美丽。虽然无法合理地定量优雅, 但桥梁设计的技术和视觉方面之间的相互作用意味着优雅也由某些标准统治。特别是, 优雅可以用训练良好的视觉形状敏感性来客观地判断。
>
> …
>
> 桥梁设计的美学方面比常见更重要。工程结构通常对自然和人类环境产生重大影响。桥梁的使用者也产生新的, 通常不愉快的环境影响, 如噪音和排气。由于这些原因, 桥梁在社会中经常被视为负面。
>
> (Menn, 1996)

15.4.10 拉哈曼 • 汗 (1929–1982)

拉哈曼 • 汗 (1929–1982) 出生在达卡 (英国印度, 现在是孟加拉国) 他是一位孟加拉美洲的结构工程师和建筑师, 他可能是 20 世纪下半叶最伟大的结构工程師。被广泛称为 “管道设计的父亲” 和 The “爱因斯坦的结构工程,” 哈恩革命了天花板和高楼设计的设计和建设 在二十世纪下半叶。他开发了创新的结构系统　包括框管、tr 管和包管管　使建筑高度具有较高的材料效率和建筑灵活性, 使超级建筑经济可行, 如今仍然是高楼建设的基本基础。改造了天花板的结构逻辑, 并使定义当代城市滑板的超级建筑成为可能。(图 15.27).

在从 Ahsanullah 工程学院获得他的民用工程学士学位后 (现在孟加拉工程与技术大学) 1952 年, 他在达卡的福布里特奖学金上前往美国。在伊利诺伊大学在乌尔巴纳 - 坎帕因, 他

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=85195985

图 15.26: 男士的 Sunniberg 桥

获得了两个硕士学位 (结构工程和理论和应用机械) 还有一个博士。只在三年之内, 结构工程。在卡拉奇发展局的执行工程师身份短暂返回巴基斯坦后, 哈恩加入了芝加哥斯基德莫尔办公室, 奥温格斯。& 梅里尔 (我是) 在 1955 年, 他将花费他的整个职业生涯, 成为合作伙伴在 1966 年和一个自然化美国。1967 年公民。芝加哥, 滑雪机的出生地, 传统上为建造高楼而竞争纽约, 并为汗的创新提供了理想环境。与此前讨论的大多数工程师不同。(除非艾菲尔), Khan 主要设计为 钢材.

他的主要作品包括 100 大约翰汉科克中心。(1969) 首页 > 110 位 Sears Tower (威利斯塔,1973 年) 最后一座拥有世界最高建筑的称号, 超过二十年。哈恩于 1973 年被选为国家工程学院, 并获得了来自西北大学、莱希大学和苏黎世 ETH 的荣誉博士学位。**工程新闻记录** 1972 年《年度男子》

高度和管道创新奖 当哈恩在 1950 年代末开始在 SOM 工作时, 高楼设计师的选项令人惊讶的是有限。高楼的根本挑战是侧 荷载 抵抗 抵抗风和地震引发的旋转时刻和故事传奇。传统的硬 钢材 框架 - 在那里的柱子在整个地板上携带了重力和侧重负载 - 自十九世纪末以来一直占主导地位。传统的固体框架建筑, 与柱子和轴承之间的时刻抵抗性连接, 随着建筑物增长更高, 变得越来越不有效: 成员尺寸迅速升级, 内部柱子繁殖。然而, 随着建筑物的增长更高, 需要抵抗风力所需的钢材数量增加不比例, 创造了汗所谓的风力。“奖金为高度。” 他的著名的 1969 图表描述了钢材风格的要求在传统框架下的建筑高度显著上升, 使超级大楼不可避免地昂贵。

哈恩的革命洞察力是承认硬 框架 不是唯一适合高楼的结构系统, 并将整个建筑周围作为一个结构管 - 从地面上升起的云端。与密切空间的外部列连接深螺旋线形成一个固体管, 通过 cantilever 和 框架 行动抵抗侧负载。通过将主侧荷载抵抗的单元移动到建筑物的周围, 他想象结构作为一个三维裸管从基础 - 类似于, 如他后来指出的那样, 在本地孟加拉国生长的竹子。此管道概念, 首次在芝加哥的 43 楼 DeWitt-Chestnut 公寓实施 (1963–66) 此分類上一篇: DeWitt-Chestnut Apartment Building (1963) 布朗斯威克 43 楼 (1965), 使用密切宽的周边列连接深螺旋线, 创造一个固定的外观 “皮肤” 同时作为结构、风带和建筑表达, 同时释

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

放室内灵活的地板设计以及显著提高结构效率。通过在周围集中侧面抵抗, 管道从森林的柱子中释放了传统框架所需的室内空间。

结构系统和主要工作 汗开发了管道概念的几种变量, 以解决不同高度范围和功能要求以及建筑高度与最佳结构系统之间的系统关系 从固体框架到低楼层建筑, 通过板墙、布局框架, 各式各样的管配置, 以提高高度。这个 “优惠高” 该概念为设计师提供了合理的指导, 以选择基于效率而不是先例的结构系统。和 **包装管**由 DeWitt-Chestnut 大楼和随后纽约世界贸易中心塔模范。(由 Leslie Robertson 使用 Khan 的原则设计), 证明对大约 60 个故事的建筑物有效。

约翰汉科克中心 100 大故事 (1965–69) 哈恩介绍了 **威胁管道** (或管道), 在其中, 直径包装成员 - 建筑物的标志性外部 X 包装器 - 对管道的粘贴, 并显著减少钢材要求。汉科克中心只使用了 145 个 每平方米的钢材 kg, 相比 206 公斤/米 ^{2} 帝国国家大楼和 275 公斤/米 ^{2} 曼哈顿广场 (One Chase Manhattan Plaza) 对于 Sears Tower,Khan 发明了 **混合管**, 由九个平方管的不同高度集合在一起, 提供特殊的硬度, 同时允许建筑物的个人资料在它升起时退回 - 证明 “有效的塔不再需要像盒子一样; 管单位可以采取不同的形状, 并可以在不同类型的组合中结合起来。” 首頁 〉 外文書 110th Sears Tower (1973 年, 威利斯塔) 使用 9 个不同高度的混合管, 证明了系统对超级建筑的潜力。

哈恩还先驱化合金钢结构系统和轻型混凝土在高高度建设中的使用, 他是第一个用于结构分析和设计验证的计算机之一。然而, 他可能是最后一个伟大的滑板设计师, 他们没有依靠计算机的使用; 事情即将发生变化。

下面的引用捕捉了他的系统性方法:

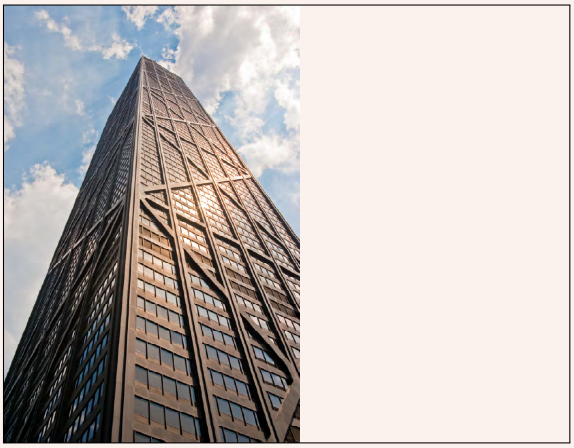
> 但是, 高楼建筑的建设只能经济上有吸引力, 如果结构工程师能够全面了解不同系统的结构行为, 一方面是建筑问题的实际感。
>
> …
>
> 使用最少的 钢材 的结构可能导致非常昂贵的完成建筑, 因为没有考虑到影响完成建筑的任何非结构因素。另一方面, 一个仅适合建筑师的美学 “愿景” 和所有其他交易的需求而设计的结构必须为完成建筑物的低效和过度成本做出贡献。在这两个极端之间, 任何项目的最佳结构系统都存在, 并留给工程师对开发最佳系统的警惕和积极参与。经验表明, 大多数建筑结构可以分为六个广泛的类别:
>
> a 简单连接的结构
> b 半固体结构
> c Rigid-框架 结构
> d 与 Shear-Trusses 的结构
> e 与 框架 和 Shear-Trusses 互动的结构
> f Rigid-box 类型结构
>
> i 密集的外部列
> ii 紧张的直径作为外墙
> iii 最佳柱 - 外墙交换器
>
> (Khan, 1965)

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

设计哲学与合作 除了他的技术创新之外, 哈恩也因他对工程与建筑之间的关系的态度而闻名。他的著名合作与建筑师布鲁斯 • 格雷厄姆在 SOM 模拟了他的信念, 结构应该是组织原则的建筑设计, 而不仅仅是一个隐藏的框架。哈恩拥有格雷厄姆所描述的 “对结构性行为的直观理解” 他曾经说过, “当我思考设计时, 我把自己放在整个建筑物的位置上, 感觉到每一个部分。在我的脑海中, 我视觉化了压力和旋转一个建筑正在经历。” 然而, 他坚持说, 技术虚拟性必须为更广泛的人类目的服务: “技术人不必在自己的技术中失去; 他必须能够欣赏生命, 而生活就是艺术、戏剧、音乐和最重要的是, 人类。”

其结构逻辑与建筑规划的整合　管道允许柱免费室内和灵活地板　例外工程师与建筑师之间的合作, 生产最高高的建筑。哈恩也是计算机辅助结构分析的先驱, 早期认识到数字计算对高楼复杂、高度不确定系统的潜力。这种人文主义的愿景延伸到他在伊利诺伊技术研究所的教学活动, 在那里他与学生合作开发概念　如混凝土托斯管　这只有多年后才会实现。

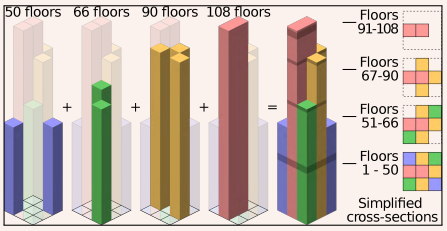
哈恩在沙特阿拉伯的海奇终端项目工作时, 在 1982 年突然去世, 享年 52 岁, 这缩短了一个非常创造性的职业生涯, 但他的结构系统仍在世界各地形成幻灯片。从 Kuala Lumpur 的 Petronas 塔到迪拜的 Burj Khalifa - 这位代表, 正如一个评论家所注意到的那样, “他的勇敢、轻重设计哲学的最终表达。” 高楼和城市栖息地理事会介绍了 Fazlur R。哈恩终身成就勋章在他的荣誉。花了近五十年, 他对高楼建筑的标志性论文被更新。Baker, Skidmore, et al., 2013 二十一世纪的超级塔。



(a) 约翰汉科克大楼的外部 X 分布



(b) 威利斯塔



(c) 威利斯塔模块

图 15.27: 哈恩的标志性建筑

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

15.4.11 The Progettisti 比较: 设计师 - 建筑师及其材料

这个章节所列的工程师分享了一个区别性: 他们不仅是设计师, 而且 **建筑师**拥有或控制建筑公司的企业家, 使他们能够以咨询工程师很少能尝试的新技术和材料的方式进行实验。设计与建筑的这种整合, 体现在意大利术语中 **計劃者**他们是他们的成就的核心。

15.4.11.1 艾菲尔和金属

古斯塔夫 • 艾菲尔的公司 **艾菲尔设施公司**, 专门从事预制铁和钢材框架。该公司在高精度的研讨会上制造了组件, 然后将其运送到现场 - 一个工业化的方法, 使桥梁、塔楼和建筑物能够快速成本效益建设。艾菲尔塔本身是预制的外部, 并以令人惊叹的速度收集。艾菲尔的使用标准化, 泡沫组件和他强调模块性为现代钢材建设奠定了基础。

15.4.11.2 神经与铁路

Pier Luigi Nervi 创立 **神经 & 巴托利** 1932 年, 他开发和应用铁路作为实用建筑材料。他的设计和执行控制使他能够在不依靠外部承包商的情况下创新, 确保他对薄壳和带结构的想法可以完全实现。图林展厅和 Palazzetto dello Sport 使用的预制铁路单元由其公司制造, 展示了材料创新、结构设计和建筑经济的整合。

15.4.11.3 Roebling 和 电缆

约翰 • 罗布林 (1806–1869) 虽然在本章中没有讨论过很长时间, 但值得提到是电缆悬挂桥的先驱。他的公司, **约翰 · *A* 罗布林的儿子公司**两座桥梁都设计, 并制造了使用的电缆 - 一个垂直集成, 使 Roebling 能够保持对材料质量的严格控制。布鲁克林桥 (1883) 由他的儿子华盛顿在罗布林去世后完成, 展示了长期悬挂结构的电缆潜力, 并建立了现代悬挂桥设计的范式。

15.4.11.4 常见威胁

从这些比较中出现了几个模式:

公司作为实验室。 每位工程师都用自己的公司作为一个平台来实验并推着他所选择的材料能实现的边界　铁的 Eiffel 和钢材, 铁的 Nervi, 绳子的 Roebling。

直接参与建设。 他们三人都深深地参与了实际的建设过程, 这给了他们对他们的设计如何构建的亲密知识, 并允许他们保持质量控制。

设计与工程的整合。 在同一公司设计和建设的能力使这些工程师能够无缝地结合美学和功能方面, 导致结构既视觉上令人震惊又结构上响起。

材料主宰。 每个人都成为他所选择的结构材料的主要实践者, 开发其他人后来采用和改进的技术和应用。

这个设计师建筑商的模式, 虽然在现代实践中由于设计与建设的分离而不常见, 但仍然是实现结构工程最伟大的作品特征结构和架构的模型。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

15.5 结构性形状: 关键人物

在接下来的页面上, 你会遇到那些帮助建立所谓的关键数字。**结构性** *morphogenesis* 概念: 结构形状可以由限制而不是单独选择的味道产生。此分類上一篇: Morphogenesis (字面上, "形成形状的") 意思是地质学从荷载、支座条件、物质限制、稳定性和建设性要求中产生的过程。这些工程师和建筑师学会了 "让结构说话," 无论是通过挂链和阴道模型, 膜和壳实验, 紧张网研究, 或后来计算形状发现。你会看到的是, 许多庆祝的形式不只是发明; 它们是 **发现** 作为平衡的配置, 在其中力量、材料和地质定义为一致　而且往往是优雅　整体。

工程师和建筑师最舒适的结构可以数学地描述: 一个直 梁, 一个弓 (圆形、模拟或催眠), 或由四角表面定义的壳。[42] 不仅仅是这些形状 "享受的," 但他们也使追求数学解决方案可追踪。

但我们可以寻找一个平等愉快的表面, 满足两个标准: (a) 美学的吸引力, 以及 (b) 结构性健康?

此部分讨论了著名工程师对这种形状寻找形式的搜索。研究由 Boller and D'Acunto, 2021; Boller and Schwartz, 2020 最近, 他们通过审查 Frei Otto、Isler 和 Musmeci 的工作来解决这个问题。(桌子 15.5).

表 15.5: 形式探测器

凯特纳		
胡格斯	紧张	挂绳
波兰	压缩	St. 彼得之家
加迪	压缩	圣家家族
萨尔文	压缩	St. 路易斯 拱
膜		
岛	压缩	壳 天花板
穆斯林	压缩	巴塞托桥
自由奥托	紧张	慕尼黑体育场

15.5.1 凯特纳

历史上, 第一 "寻找形式" 问题是寻找形状　描述数学方程式　两个点之间挂着索。尽管最终发现了一种数学方程式, 但 17 世纪末的凯特纳研究史对现代读者来说是一个令人兴奋的故事。它是由莱布尼兹和伯诺利斯开发的计算机的一种冲动。

这是关于竞争力的故事。(三位高潮的数字) 艾戈 (莱布尼兹希望证明其优越性 "他的" 计

[42] 如相关术语、硅、精液、精子、精子的, 精子的 hyperboloid、精的 paraboloid、Hyperbolic cylinder、hyperbolic parabolid、paraboloid, sphere 和 spheroid。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

算) 秘密通信 (广泛使用 Cyphers), 私人邮件 (Leibniz 和 Huygens) 嫉妒 (兄弟雅各布和约翰 • 伯诺利), 出版 压力 (由编辑的 *Acta Eruditorum* 编辑[43]), 而且更多。

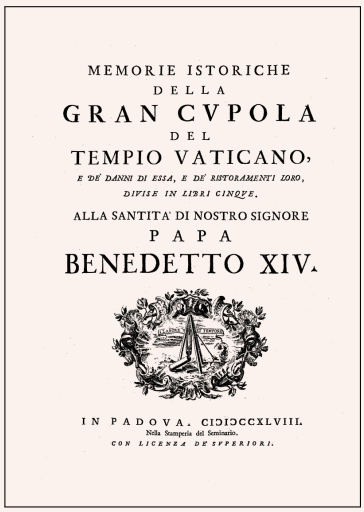
除此之外, 它也是一个 "家庭事务," 因为所有主角都有一种联系:Huygens 是 Leibniz 的导师, 他是雅各布 • 伯诺利的顾问, 他就是约翰 • 伯努利的兄弟, 他也是丹尼尔 • 伯諾利的父亲和尤勒的顾問。

有关分析细节，请参见 §30.3.3

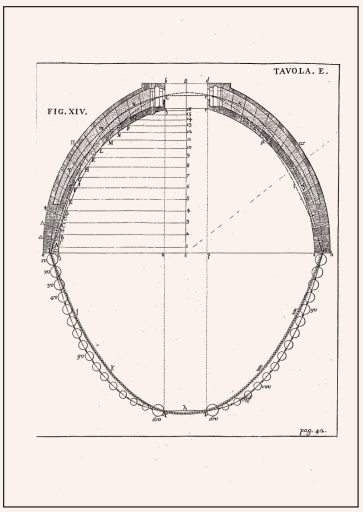
15.5.1.1 波兰 (1683–1761)

第一個已知的形式尋找例子 应用 由乔瓦尼 • 波利尼 (Jovanni Poleni) 提出, 他被要求在圣地调查。彼得的坟墓在罗马 (§4.4.3) (图 15.28a).

经过所谓的初步调查, "三位数学家," 波利尼被委托提交报告。在它中, 他评估了泡沫的稳定性, 将其切成五十个切割, 并将每个粘贴的形状与一个逆转的相关术语子相比较 据了解, 挂电缆携带纯压。(Poleni, 1748) (图 15.28b).



(a) 波兰的报告



(b) 波利尼的对比, 一个相关术语子滑板与一个催眠室

图 15.28: 波利尼对圣地的调查 彼得的相关术语子打破 (Poleni, 1748)

15.5.1.2 安东尼 • 加迪 (1852–1926)

基于扩展型号的结构设计最突出的例子, 需要等待几个世纪, 直到加迪的设计 圣家家族 巴塞罗那 1900 年代初。正如我们所知道的那样, 转换一座天花板。(由灵活的索在自己的重量下采取的形状) 收获 A 完美 拱 在纯压缩下 (Huerta, 2006).

[43] 当时是欧洲领先的科学杂志。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 直线属于人, 曲线属于上帝。
>
> 由安东尼 • 加德 (Antoni Gaud) 引用 í (广泛引用, 没有确认的主要来源)

加迪开始为大教堂寻找形状的形式, 通过建造一个规模模型 **卡特诺伊德** (通过旋转一个轴周围的催眠曲线获得的裂缝), 如在 图 中显示 15.29a. 事实上, 这是一个非常聪明的替代另一个复杂的问题。我们注意到, 虽然许多人已经探索了一座单一的帐篷的形状, 但加迪可能是第一个探索一组帐篷, 其中一些被绑在其他人身上。形象 15.29b 展示了大教堂的塑料模型, 在那里高度指定的船只是特征着一座大教馆。



(a) 加迪《圣家家族》的卡特诺伊德模型 (Dragicevic and Jansen, 2012)



(b) 塑料模型

图 15.29: 加迪的圣家

15.5.1.3 萨尔文 (1910–1961)

埃罗 • 沙里宁是一位善于借助结构工程师设计地标性建筑的建筑师。他把建筑形式感与实现创新原创作品所需的科学技术要求结合起来 (Rega, 2013)。他在美国设计了两座受悬链线启发的地标建筑：（a）杜勒斯机场（见第 39.1 章的分析）；（b）圣路易斯门户拱门。

建筑师的正式愿景是由数学和机械学的严格规则实现的。根据它的最佳形状的拱旨在将自己的重量转移到地面, 没有紧张压力是由逆转的平衡催化剂代表。

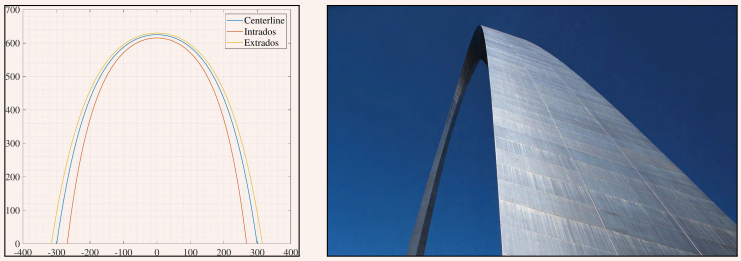
意识到他在结构分析的限制, 萨林因寻求汉斯卡尔 • 班德尔的帮助, 以获得拱的最终形状。当萨林因试图用一根锁在他的手中展示他想要的形状时, 他无法达到轻微延长的。“索里”他想要的效果。班德尔要求链条, 几天后回来, 并通过用变量链接取代一些恒定的连接来制作萨林纳的曲线。[44] 因此, 改變重量、分配重量和形状。在评估 630 英尺的弓对风的抵抗时, 班德尔确定他不得不增加重量到第一 300 英尺, 以降低重力中心。这需要 25980 吨的混凝土.

拱 高度为 625 英尺, 基于其基础的宽度为 600 英寸。交叉部分是一个平面三角形, 横截面积与高度线性下降。相应的侧面从基地 54 英尺下降到顶部 17 英尺 (图 15.30a). 拱尺寸的计

[44] 图的密切检查 15.28b 似乎在波利尼为圣的作品中展示了变量大小的相关术语子。彼得之王。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

算远不简单。[45] (马特拉布 编码在附件中列出 I.1.2) 事实上, 建筑师与结构工程师之间的这种令人惊叹的相互作用使这一点成为可能。



(a) 尺寸　　(b) 拱的评论

图 15.30: 萨林纳之门 拱

15.5.2 壳和膜

加迪和萨林因试验了天花板曲线, 以确定屋顶或弓的完美形状, 而弗里奥托、伊斯勒和穆斯梅奇则试验表面　第一在紧张中, 第二在压缩中。

15.5.2.1 保罗 • 奥托 (1925–2015)

弗里 • 保罗 • 奥托是一位多元化的德国建筑师。和 结构工程师。他在形状寻找表面上工作 (Rasch and Otto, 1996), 分支建设 (主要是压缩) (Ap and Faia, 2018) (图 15.31a), 以及挂膜的分析 (紧张) (Otto, Trostel, and Schleyer, 1973) (图 15.31b).

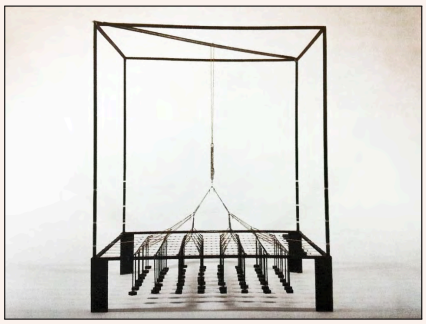
奥托不仅是一位熟练的实验家和建筑师, 而且与解析分析的复杂机械和数学相同方便。(图 15.31c).

15.5.2.2 海因斯岛 (1926–2009)

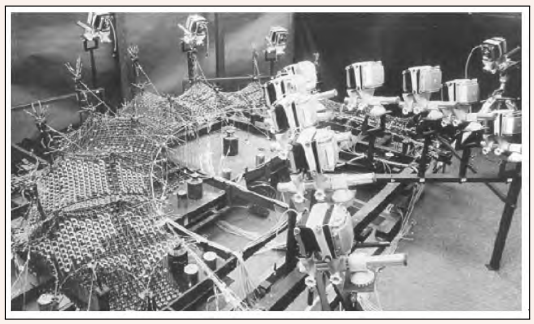
这个方法是由瑞士工程师 Heinz Isler 追随的。(Chilton and Isler, 2000) 谁设计 自然 (即不分析定义) 沙尔。在他的 “自由吊膜” 以方法, 伊斯勒通过自由挂着 so 的织物创造了形状; 然后, 为了增加壳的硬度, 他根据自己的经验填补了它的边缘。他通过在寒冷的天气下在外面冻结或添加一个水泥混合物来硬化模型。最后, 他把它们扩展到上面, 并重复了它们的阴道地质。(Brew, 2007). 伊斯勒还使用简单的计算, 基于假设没有弯矩, 以估计力量的大小 - 也许在支持者附近存在一个可忽视的灵活行动。

[45] 计算, 涉及超波功能, 已被带到第六十位, 没有现代计算机和计算机的好处。

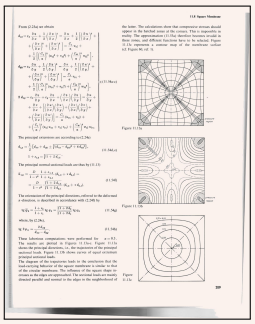
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 分支结构研究



(b) 慕尼黑体育场模型测试



(c) 密封膜的分析 (Otto, Trostel, and Schleyer, 1973)

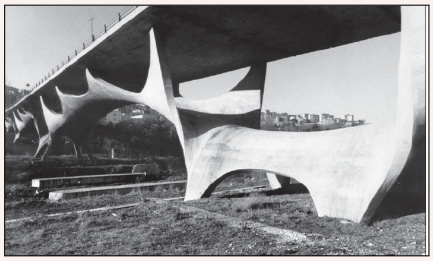
图 15.31: 自由奥托



(a) 加迪的模型 (source)



(b) 自然岛 壳



(c) 穆斯林桥 (source)

图 15.32: 现代形状通过物理模型的发现例子

15.5.2.3 塞尔吉奥 • 穆斯梅西 (1926–1981)

塞尔吉奥 • 穆斯梅西是一位多层工程师, 他以独特的方式探索了结构与建筑形状之间的相互依赖。他是一位成功的实验者, 他理解了力量流动。[46] 因此, 由此产生的形式。他认为这种形式 (不要紧张) 首先是未知的。

与塞尔吉奥 • 穆斯梅西最相关的结构是巴森托河上流着著名的桥梁。(图 15.33a–15.33b). 它是由一个单一的连续旋转表面支持, 其伸伸手指替代地向上或向地倾斜, 产生四个大约七十米的螺旋。桥梁大约 300 m 长, 由一个增强的混凝土盒子盖组成, 由同一材料的连续双圆壳支持。壳, 形成 4 个平等的 69.2 分。m 每個, 有 0.30 的厚度 m 是由两侧边界的更深的边缘特征。它通过 16 对支持, 在 17 点 30 分的平等间隔放置桥梁覆盖。m 沿着长轴和 12 点 m 跨越。RC 壳 由两条线路增强 ϕ16 毫米 钢材 条, 具有 0.2 的统一范围 m, 位於同等 混凝土 覆蓋的 intrados 和 extrados。壳的两侧深度线都配备了额外的强化。(Marmo et al., 2019).

穆斯梅奇接受了广泛的实验测试 (图 15.33c) 二是寻找形式 和 应力分析。[47] 这是为了复杂

[46] 对于结构比神经的结构更复杂。
[47] 微型混凝土模型在伯加莫的 ISMES 进行了测试。

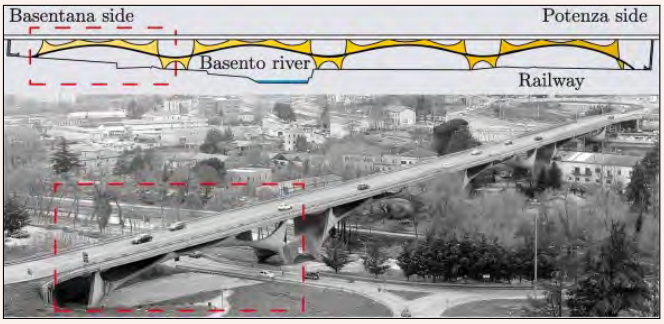
第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的后续强化所必需的。(图 15.33d). 值得一提的是, 他通过执行拉普莱斯方程式和最终差异方法来补充他的规模模型。

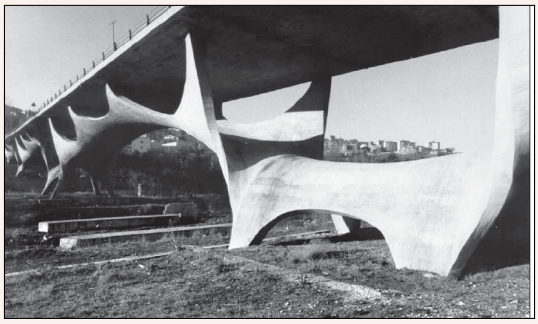
正如马德里的 Zarzuela Hippodrome 一样, 桥梁已被宣布为 “文化利益纪念碑” 意大利遗产与文化部。

> 根据穆斯梅奇的说法, 结构的形状不仅仅是计算的结果; 它也是传达在表达式层面的一种工具, 即所有对结构行为至关重要的东西都是基本的。[...] 它也应该是可见的形状的一部分。这是这个信息的一部分。
>
> (Brodini, 2013)

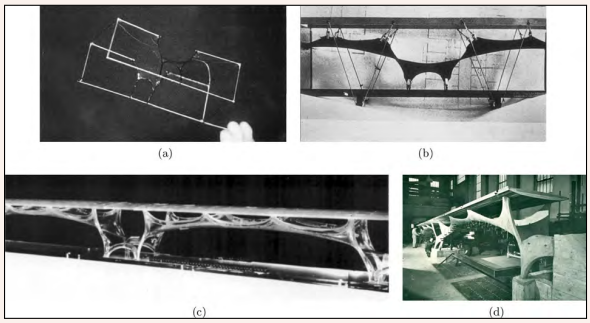
桥梁, 比许多其他结构更有形状和功能性相一致, 但其建筑/美学价值可争议。然而, 这是一个值得研究的独特组合。



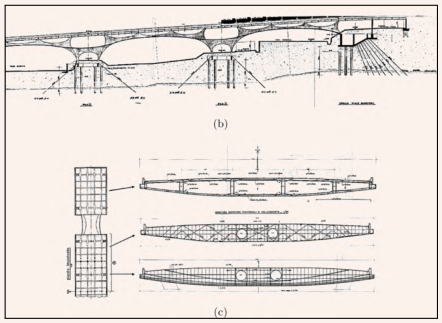
(a) 完成的桥梁 (Marmo et al., 2019)



(b) 桥梁细节 (Desideri et al., 2013)



(c) Model tests: (a) soap, (b) neoprene, (c) plexiglass, (d) micro-concrete (Marmo et al., 2019)



(d) 强化 (Marmo et al., 2019)

图 15.33: 穆斯梅西桥在巴森托河上

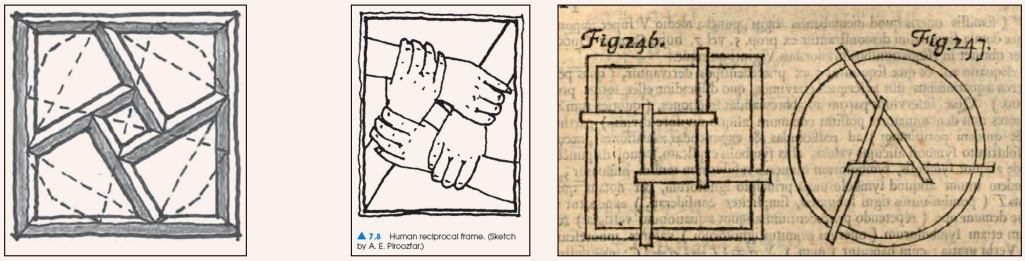
15.5.3 相互结构

相互性原则是基于使用荷载携带的单元 , 它, 互相支持沿着它们的边缘和永远不会在极端组成一个空间配置没有明确的结构层。(Pugnale and Sassone, 2014). 换句话说, 结构中的所

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

有成员都相互依赖于支座, 并且没有任何子结构稳定, 直到整个结构完成。最后, 单一结构单元的移除使结构的每一个部分与其他各个部分相比移动。

相互结构的标志性布局在图中显示 15.34.



(a) (Larsen, 2007) (b) Wallis, 1695

图 15.34: 相互结构: 描述概念

15.5.3.1 历史发展

最古老的已知例子是由 Villard de Honnecourt 提供 (De Honnecourt, 2006) (De Honnecourt, 1858) 1240 左右。形象 15.35a 展示了他对相互结构的绘图, 伴随问题描述的文本: *Ensi poe's ovrer a one tor u a one maison de bas, si sunt trop cor* 翻譯為: "如何在塔或房子上工作, 如果闪电太短。"

这个计划后来由莱昂纳多·达文奇在他的两个编码中考虑。[48] 在马德里的代码 I (Da Vinci, 1490) 我们找到了类似的图案。(图 15.35b). 在《大西洋条例》中 (Da Vinci, 1505) 我们在这个主题上看到一个更复杂的变化。(图 15.35c).

当然, 无论是 Honnecourt 还是 Leonardo 都没有给出解析解对相互结构的复杂问题。这就必须等待 Wallis, 1695, 其对相互结构中的力量的数学分析可能是非三重结构的全面结构分析的第一例记录。[49]

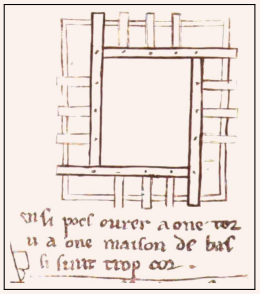
因此, 瓦利斯提出了第一个结构计算, 其中所有这些单元都结合在一起。(Houlsby, 2014):

- 表明结构的清晰绘图, 其中关节被标记;
- 利用四倍的同义词来简化后续分析;
- 基于一个简单原则的系统应用的分析 (每一刻的平衡) 结构中的所有成员, 结果是 25 个同时线性方程式;
- 对 25 个变量进行系统的排除, 以解决方程式之间的排除;
- 从得出的结果中, 提取有关结构中的突出成员负担的重要结构结论。

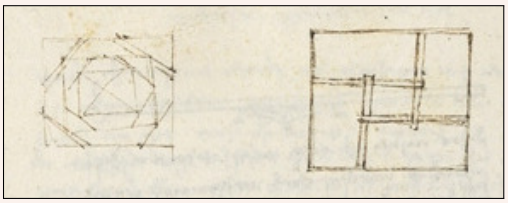
[48] 编码是现代书的历史先祖, 手写内容。一个代码, 就像现代书一样, 是由粘贴页面和保证一组边缘 - 类似于现代书籍的形式。该代码替换了以前的纸质和 wax 平板电脑, 提供了几个好处: 它可以随时打开到文本中的任何点, 允许写在叶子的两侧, 并可能包含长文字。我们不是指一个代码中的页数, 而是指一个 **福利**.

[49] 正如前面提到的那样, 约翰·瓦利斯是引入无限象征的人。于 1655 年引入符号 ∞.

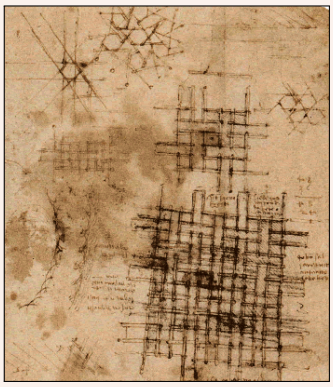
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



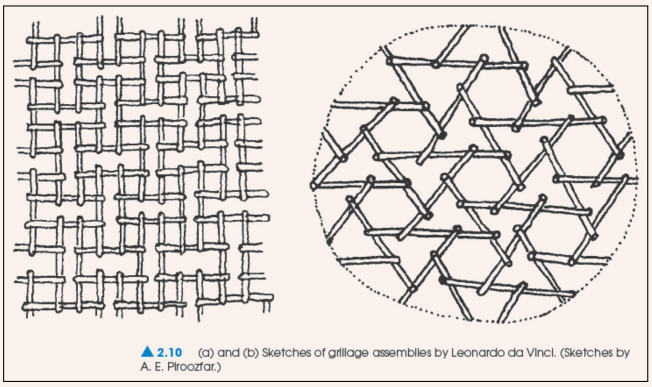
(a) De Honnecourt, 2006 笔记本 FOL。二、三



(b) Da Vinci, 1490 Madrid Codex, Folio 49

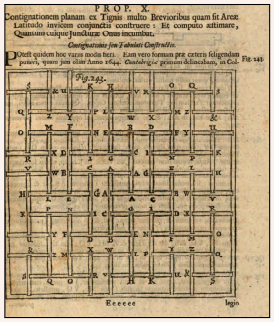


(c) Da Vinci, 1505, Codex Atlanticus, Folio 899v

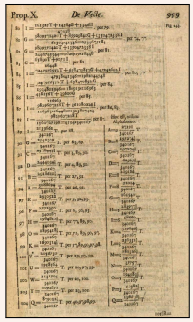


(d) 莱昂纳多的绘画解释 (Larsen, 2007)

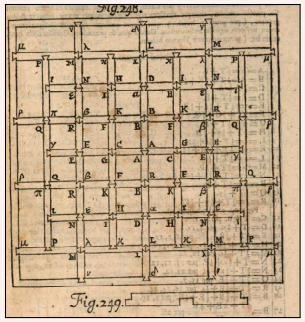
图 15.35: 相互结构的早期例子



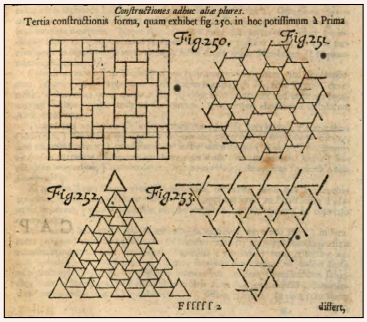
(a) 问题 表述



(b) 25 个方程式与 25 个未知方程



(c) 荷载 路径



(d) 关于一个主题的变化

图 15.36: 对相互结构的分析 Wallis, 1695

關於 John Wallis 的文章 (1616–1703) 他是一位英格兰牧师和数学家, 为无限计算的开发提

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

供了部分信用。他被认可, 通过引入符号 ∞ 代表无限的概念。同樣使用 $1/\infty$ 对于一个无限的。他是纽顿的当代人, 也是数学早期复兴时期最伟大的知识分子之一。

15.5.3.2 现代复兴

到目前为止, 该期限 “相互框架” 似乎已经取代了 “相互结构,” 他们的研究似乎是由奥尔加 • 波波维奇通过她的论文恢复的。(Popovic, 1996), 本书 (Larsen, 2007) 还有许多其他出版物 (Popovic Larsen, 2014).

形象 15.37 重点是什么可能是日本最知名的相互框架, **西雅图展厅** 由 Kazuhiro Ishii 设计。很难相信有详细的结构分析进行; 更重要的是, “工程判断” 建筑师和优秀的工艺似乎已经占据了主导地位。

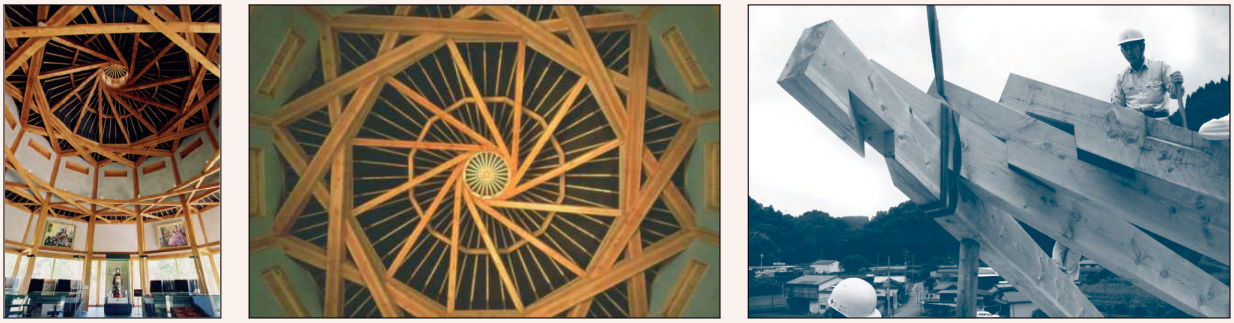


图 15.37: 西雅图展厅 (日本) (Popovic, 1996)

作为建筑师, 波波维奇不依靠计算, 事实上似乎有很少这样的例子。(Schrama, 2021). 她唯一的机械学分配是相互框架模块的参数定义。(图 15.38):

- 比亚的数量 (n)
- 放射通过外部支持 (r_o)
- 通过梁交叉点的射线 (r_i)
- 垂直上涨从外部支持到梁交叉点 (H)
- 垂直的交叉线在其交叉点的中间线 (h_2)
- 长度的线条在尾巴上 (L)

15.5.4 数学优化:Maxwell、Michell、Baker 和 Behini

本节追溯若干关键设计准则从奠基原理到现代应用的演变。首先讨论 Maxwell, 1864c 的开创性论文，该文并未直接涉及设计问题；随后介绍 Michell, 1904 的里程碑论文（通常被视为第一篇讨论结构优化的论文）；最后讨论 Baker 和 Beghini 对这些原理的现代应用。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

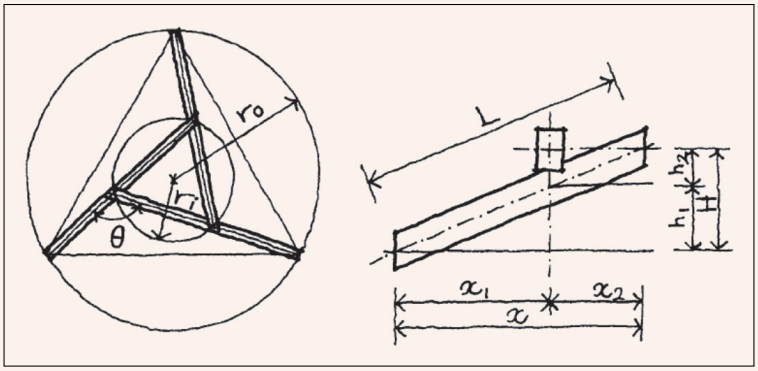


图 15.38: 相互 框架 模块的参数化 (Popovic, 1996)

15.5.4.1 马克思 (1831 – 1879)

麦克斯威尔的本质论文 (Maxwell, 1864c) 他为虚功方法奠定了基础, 这是他的后续论文。(Maxwell, 1864b) 这对职业更有影响力。(看见 §15.5.4.2).

总结他写的内容:

1. 在任何系统的点在平衡在飞机下, 以反动和吸引力行动, 每种吸引力的产物的总额, 按它所行动点之间的距离加倍, 相当于它所运作点之间的差距加倍的回报品的总值。
2. 按其作用点的高度加倍每个 荷载 , 并按其所作用的片段的长度加重每一个紧张, 并将所有这些产品添加在一起。
3. 然后, 按 框架 的支撑上加倍垂直压力, 每个按其作用的高度, 每个 压力 按它作用的片段的长度, 并将产品添加在一起。这个金额将相当于前一笔。

简单地写下: **结构的紧张路径 荷载 的总和, 低于压缩路径的总值相当于与应用的外部力量相关的价值。**:

$$\sum F_T L_T - \sum F_C L_C = \sum \vec{P}_i \cdot \vec{\Delta}_i \tag{15.1}$$

麦克斯威尔继续说:

> 对于工程师来说, 这个理论的重要性源于一个零件的强度一般是与其部分相对的, 所以如果每个零件强度是与它必须携带的应力相比例的, 其重量将是相当于应力的产品, 倍数为零件长度。因此, 这些产品数量提供了对应压力和 压力 的材料总量的估计。
>
> (Maxwell, 1864c)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15.5.4.2 米歇尔 (1870 – 1959)

尽管麦克斯韦实际上间接推导出了虚功原理，但他并未设想把这一推导用于结构优化设计。[50]

这是由 Michell, 1904 谁跟随了麦克斯威尔的工作 (Eq. 15.1). 他确定了一个单一负载案例的特鲁斯的最佳布局, 当任何条中的轴压力绝对值不超过一定限制时。它的解决方案和设计条件在 20 世纪获得了大量的关注。[51]

> 因此, 框架在同一应用力量下达到任何框架结构可能的物质经济限度, 如果它所占据的空间可能受到微小的歪曲; 因此, 在框架的所有条线上的线条以其长度的平等分裂增加, 不低于空间中的任何单元的分裂变化。如果被歪曲的空间在各个方向上延伸到无限, 则框架的容量与其他所有相似的最小; 否则它已被证明是相似于同一个分配边界内的最小。
>
> 条件 $e = \varepsilon$ 可以显然满足, 当一个框架的所有行都具有相同信号的压力时。测试变形应应用, 则是一种均匀的延伸或缩小。(根据 框架 处于紧张或压缩状态) 框架 覆盖和延伸到任何终极边界或无限的乐趣。
>
> 最简单的最低框架 [特斯拉] 这个特殊的班级是:
>
> I 连接和线条受平等和相反的力量单一对象。
> II 三角形和 tetrahedral 框架在图像的角度应用的力量下, 并沿着图像内部交叉的线路行动。
> 第三 一般来说, 加泰罗尼亚人, 应用部队的应用点, 以及各自的部队, 被给予。
>
> 在所有这些情况下, 框架的最低容量是
>
> $$V_m = \frac{\sum l[f]}{P} = \frac{\partial W}{\varepsilon P} = \frac{\sum \varepsilon F r \cos\theta}{\varepsilon P} = \frac{\sum F r \cos\theta}{P}$$
>
> 哪里 F 它是应用的力量之一。r 其应用点的距离 R 从一个自愿的角度 O, θ 角度之间的 RO 和方向的 F, 和 P 是材料中的允许的 应力。
>
> ...
>
> 框架 (最好是, 如果) 达到任何框架结构在同一应用力量下可能的物质经济限度, 如果它所占据的空间可能遭受适当的小变形; 以便在框架的所有条线上的线条增加其长度的平等分裂, 不低于任何空间元素的部分长度变化。
>
> (Michell, 1904)

米歇尔继续说, 更普遍的框架类满足条件 $e = \varepsilon$ 由那些在变形前和变形后, 形成曲线的条纹组成。**正统系统**. 这正是米歇尔与第二篇论文的联系。Maxwell, 1864b.

米歇尔提供了几个结构的最佳设计 (特斯拉), 显示在 图 15.39.

可以合理地说, 通过他的论文, 米歇尔是 “父亲” 由 **结构优化**.

这引发了所谓的 **米歇尔结构** ● 根据这些原则最适合设计的品种 (如 桁架 在 图 15.40).

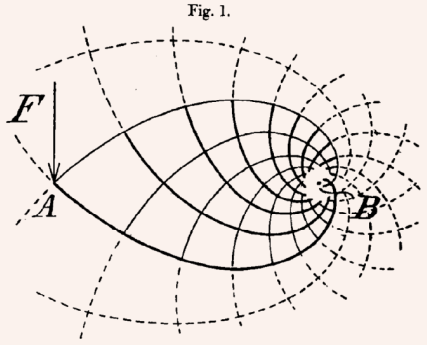
[50] 类似地，Eshelby, 1970 依据能量守恒定理定义了若干与路径无关的围道积分，却没有赋予它们物理解释（可以说只是 “为了数学与力学之美”）。他从未尝试为这些方程赋予物理意义，其中一个积分后来引起 Rice, 1968 的注意；Rice 发现它对应于裂纹的能量释放率，并由此定义了后来以其名字命名的围道积分。

[51] 对于替代负载的 桁架 的最佳配置更复杂的问题似乎会得到较少的关注。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

1. (Fig. I.) A single force F applied at A, and acting at right angles to the line AB, is balanced by an equal and opposite force and a couple, of moment F × AB, applied at B.

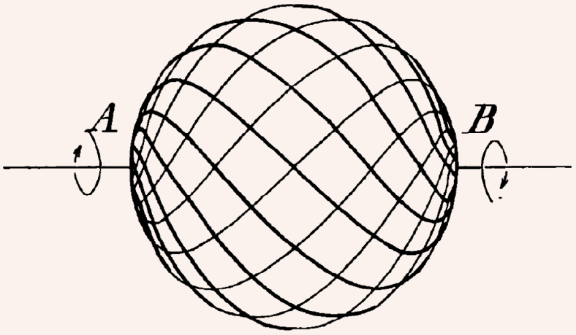
Fig. 1.



The minimum frame is formed of two similar equiangular spirals having their origin at B and intersecting orthogonally at A, together with all the other spirals orthogonal to these and enclosed between them.

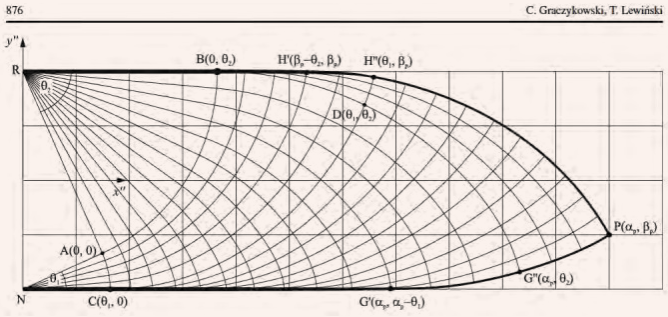
4. (Fig. 5.) Equal and opposite couples applied at points A, B on the straight line AB.

Fig. 5.



The minimum frame consists of the series of rhumb-lines inclined at 45° to the meridians of the sphere having its poles at A and B.

图 15.39: 最佳设计 (Michell, 1904)



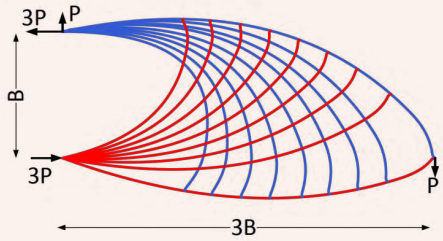


图 15.40: 米歇尔 桁架

15.5.4.3 贝克和开始

米歇尔的作品似乎被利用了 Baker, 1992 以能源为基础的侧面系统设计。这一点进一步扩展 Beghini et al., 2014, 谁连接建筑和工程通过结构托波学优化 (图 15.41).

例子: 桁架设计

> 适应从 “Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies” 由 Baker et al., 2015.

我们试图设计一个桁架支持两个节点, 并携带一个垂直的荷载在另一个, 忽略自我重量。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

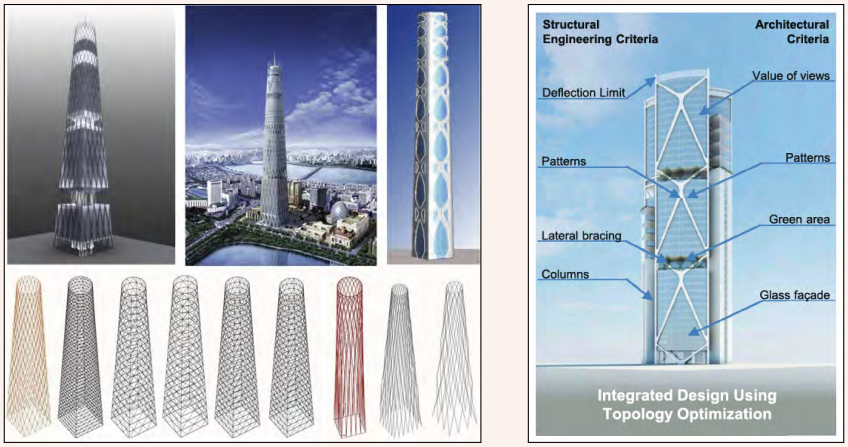
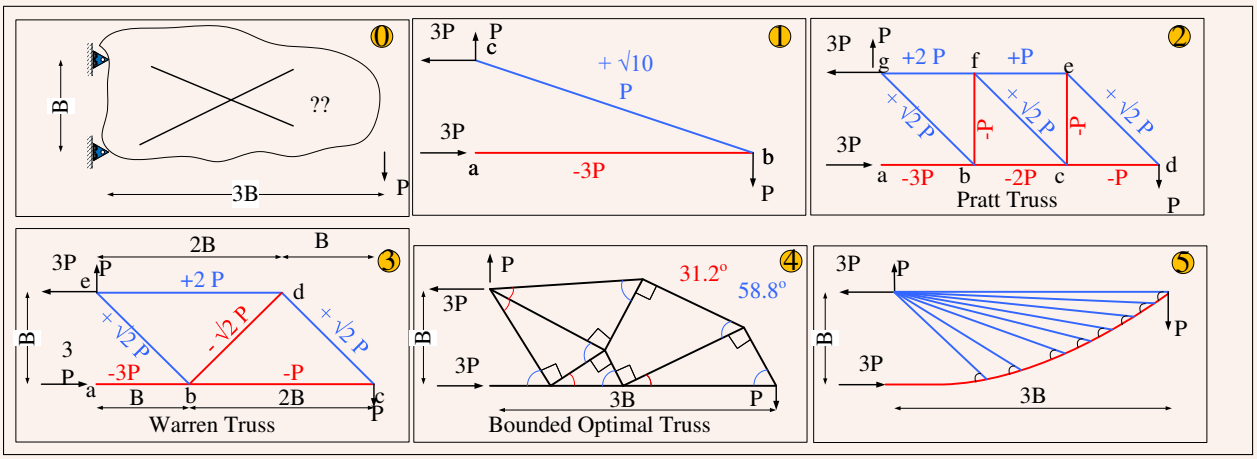


图 15.41: 结构性托波利亚优化 (Beghini et al., 2014)



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Two bar Truss									
1	a-b	3.000		3.000		9.0	-9.0	9.0	
2	b-c	3.162	3.162		10.0		10.0	10.0	
Sum		**6.162**			**10.0**	**9.0**	**1.0**	**19.0**	**19.0**
Warren Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	2.000		1.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
4	d-e	2.000	2.000		4.0	0.0	4.0	4.0	
5	b-e	1.414	1.414		2.0	0.0	2.0	2.0	
6	b-d	1.414		1.414		2.0	-2.0	2.0	
Sum		**9.243**			**8.0**	**7.0**	**1.0**	**15.0**	**15.0**

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
		Length L/B	Force F/P		FL/BP		A-B	A+B	Deflection
			+ve	-ve	A +ve	B -ve			Δ/(σB/E)
Pratt Truss									
1	a-b	1.000		3.000		3.0	-3.0	3.0	
2	b-c	1.000		2.000		2.0	-2.0	2.0	
3	c-d	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
4	d-e	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
5	e-f	1.000	1.000		1.0		1.0	1.0	
6	f-g	1.000	2.000		2.0		2.0	2.0	
7	b-g	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
8	c-f	1.414	1.414		2.0		2.0	2.0	
9	b-f	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
10	c-e	1.000		1.000		1.0	-1.0	1.0	
Sum		**11.243**			**9.0**	**8.0**	**1.0**	**17.0**	**17.0**

分析的细节 (简单但长) 在这里不显示; 但是, 结果在以下总结为不同 桁架 配置。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

柱 我是比例的总 体积 材料 (假设在紧张和压缩中相同允许的 应力). 挠度 (J) 相当于材料的 体积 (I).

	荷载 路径				挠度
	電池 荷载 $A = \frac{\sum F_T L_T}{PB}$	压缩 荷载 $B = \frac{\sum F_C L_C}{PB}$	$A - B$	$A + B$	$\frac{\Delta}{\frac{\sigma B}{E}}$
①	10	9	1.	19	19
②	9↘	8↘	1. →	17↘	17↘
③	8↘	7↘	1. →	15↘	15↘
④	7.7↘	6.7↘	1. →	14.47↘	14.47↘
⑤	8.52	7.52	1.	16.04	16.04

Graczykowski and Lewiński, 2010 分析了这个 桁架 并获得了显示在 ⑤.

15.5.5 科达: 当建筑师和工程师碰撞时

19 世纪是快速工业化和技术进步的时期, 这一时期看到了显著的紧张局势、竞争甚至动态。**建筑师** 和 **工程师**. 这两个专业团体经常发现自己对角色有好处。**美学** 相反 **功能性**，该 **艺术遗产** 与古典建筑相比 **创新潜力** 现代工程材料如铁和钢材. 这一紧张局势在整个世纪都采取了不同的形状: 有时是两个名为竞争对手之间的头向头竞赛, 有时是一位工程师已经实现的解决方案, 面对建筑设施后的抵抗。三个节目展示了这场冲突的范围 埃菲尔和布尔达斯塔在巴黎竞赛, 帕克顿的晶体宫在伦敦的接待会以及罗伯林在纽约的布鲁克林桥面临的批评 它们一起反映了社会更大的转变。**浪漫主义** 和 **历史主义** 从 19 世纪初到 **工业现代化** 这就是最后一半的定义。

15.5.5.1 案例一:Bourdais vs. Eiffel (巴黎 1889)

朱尔 • 博尔达斯的竞争 (1835–1915), 经典训练的建筑师, 和古斯塔夫艾菲尔 (1832–1923) 创新工程师 (看见 §15.4.2 为了对他的职业生涯进行更全面的报告), 为 1889 年巴黎世界博览会的纪念塔设计, 包容了本章的主题。这是传统与现代之间的竞争, 古典理想之间。**美术学院** 和理性工程的原则 **中央学校**.

二校中学毕业生 兩個男人分享一個共同的教育 基础 在 **艺术与制造业中心学院**. 成立于 1829 年, 该学校旨在为快速工业化法国经济生产工程师, 专注于实用工程和工业应用而不是古典建筑研究。其课程强调数学, 机械, 物理和化学 - 培训学生解决复杂的现实世界问题使用科学原则。

毕业后, 他们的路径分开。布尔达伊斯继续在 **美术学院**它是法国古典建筑的中心, 强调了对古希腊和罗马的交互、比例和历史参考。他成为古典建筑的冠军, 设计了类似于 **特洛卡德罗宫**它体现了美术的纪念品和精致装饰的理想。

艾菲尔, 相反, 追求工程的职业生涯, 开发了钢铁和预制建筑技术的专业知识。他的桥梁和维亚杜克 (如加拉比特维亚图) 的工作表明了他对结构动力学和风抵抗的掌握。与布尔达斯

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

不同, 艾菲尔相信材料的诚实和结构的美丽应该从其功能性和工程准确性中产生的想法, 而不是应用的装饰。

竞争的建议 对于 1889 年展览, 布尔达斯提出了一个纪念碑的石结构, 以巨大的柱的形式。"太阳塔" (**太阳之旅**)● 纪念罗马胜利纪念碑 (Bourdais, 1881). 设计是伟大的, 重的, 装饰, 坚持经典美学理想的同义和永久性。它必须在大理石和冠冕的电灯, 将照亮整个巴黎。

艾菲尔的设计与工程师莫里斯 • 科切林和埃米尔 • 努吉耶和建筑师史蒂芬 • 索维斯特 (Stephen Sauvestre) 共同开发, 是根本不同的: 一座 300 米铁滑塔由预制钢材组成。(Lemoine, 2002). 它是现代的, 温柔的, 也是工业技术的庆祝活动。曝光的铁框象征了现代工程的合理性和诚实。

结果 法国政府最终选择了艾菲尔的设计, 承认现代工程对一个国家寻求展示其工业能力的重要性。这个决定不是毫无争议的: 许多批评者, 尤其是艺术家和知识分子, 最初反对艾菲尔的设计。一群著名的巴黎人, 包括作家 Guy de Maupassant 在内, 签署了一项请愿书, 呼吁提出的铁结构 "怪物" 和 A "对巴黎的侮辱。"

布尔达伊斯的提议从法国建筑社区的传统主义者那里获得了支座, 但他的马索尼塔将更昂贵、更慢的建造和不那么结构性创新。埃菲尔塔, 按时完成和预算完成, 成为展览的象征最终是巴黎本身。

15.5.5.2 案例二: 帕克斯顿和水晶宫 (伦敦,1851 年)

与布尔达 - 埃菲尔比赛不同, 约瑟夫 • 帕克斯顿的冲突不是针对一个单一的名义竞争对手, 而是针对更广泛的建筑设施。Paxton, 一个花园师和温室设计师通过培训而不是学术训练的建筑师, 提出了一个巨大的预制结构铁和玻璃为 1851 年大展 - 一个建筑类型直接从他的经验设计大型保守馆, 与建筑专业所产生的任何东西都非常不同。关于建筑设计和建设的详细当代报告于同年公布 (Berlyn and Fowler, 1851 PDF).

他的设计面临抵抗 **英国皇家建筑师研究所** (**里巴**) 今天的著名建筑师。**伯特 · 德基莫斯**, 谁最初支持帕克斯顿, 但来自一个经典的训练, 和 *A.W.N.* **普京**, 哥特复兴的领先冠军, 两者都代表了传统建筑价值观与帕克顿的激进使用工业材料。批评不太集中在任何竞争的替代设计上, 更集中在一个更广泛的不舒服: 从质量生产的铁和玻璃组件组成的建筑物, 而不是根据历史史先例制作的木材, 根本不能正确地称之为建筑。

尽管这种抵抗, 克里斯塔宫在不到六个月内建造 - 这是一个前所未有的预制建筑 - 并成为埃菲尔铁塔几十年后的永久性象征展览, 它被建造为家。

15.5.5.3 案例三: 罗布林和布鲁克林桥 (纽约,1869 年至 1883 年)

约翰 • 罗布林的布鲁克林桥面临着类似的制度模式, 而不是头向头反对。罗布林的设计 一座前所未有的间隔的悬挂桥, 使用他自己的发明钢电缆 从数字中引起了批评。**理查德 · 阿普乔恩**, 著名的哥特式复兴建筑师, 以及 **弗雷德里克 · 劳尔 · 奥尔姆斯特**, 景观建筑师和城市规划师在中央公园背后, 两人都反对展出索的工业美学和钢材干扰了城市的视觉性质 (McCullough, 1972). Roebling 在年度报告中向桥梁公司的董事们记录了项目的进展。(Roebling, 1877 PDF).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

与帕克斯顿一样, 反对是更少的竞争性设计, 而不是更广泛的机构不舒服, 工程美学将建筑物转移到突出的民间结构。罗布林没有活着看到桥梁完成..... 他死于在建筑开始前发生调查事故后的并发症, 他的儿子华盛顿 • 罗布琳 (Washington Roebling) 在该项目期间因抑郁病而无能为力, 主要通过妻子艾米莉 • 沃伦 • 罗伯林 (Emily Warren Roeblin) 的工作监督了完成。完成的桥梁, 如帕克斯顿的水晶宫和艾菲尔塔, 成为其城市的一个定义景点。

15.5.5.4 遗产

在所有三集中, 模式是相同的: 工程师的解决方案, 预制、工业和结构上有勇气, 面临建筑设施的抵抗, 捍卫遗传的美学和物质传统　在每个案例中, 工程师的结构最终成为其城市和年龄的持久象征。布尔达斯 - 埃菲尔竞赛是其中最直接的, 一个正式的头向头竞赛与宣布胜利者; 帕克顿和罗布林相反面对机构和批评家对工作已经进行的分散反对。然而, 这三个人都表明工程可以是艺术　结构本身, 诚实地表达出来, 能够实现工程的成就。**威尼斯** 维特鲁维亚所要求的 **坚定** 和 **用途**.

布尔达伊斯的经典遗产在法国继续, 他的方法发现了城市美丽运动和美术古典主义的偶像, 这支美国文明建筑在 1930 年代占据主导地位。但是, 塔、宫殿和桥在各自的城镇和十年中都宣布了新时代的到来: 一个是新时代。**計劃者**设计和建造的工程师, 让结构说话的人, 将越来越多地塑造建筑环境。

因此, 这场竞赛让我们回到本章的核心主题: 形式是否应该遵循功能的问题, 美丽是否可以从结构性需要中产生的。工程师能否实现曾经认为的建筑师独家省份。答案, 写在铁上对三个字符串, 是的。

15.6 计算机一代

最终元素方法的出现使建筑师和有时工程师能够探索越来越具挑战性的形式, 并将包装推到没有计算支持的情况下所能做的事情的界限。建筑师开始探索没有计算机分析无法想象的结构形状, 而工程师设计了非常高的建筑物能够抵抗极端风负载。(布尔吉 • 哈利法) 长距离的桥梁, 考虑到如振动等副作用 (千年桥), 和复杂的混凝土结构包含长期效果, 如切割和缩小 (米拉乌 • 维亚杜克特). 我只会把自己限制在三位这样的实践者身上, 其中两人相当有争议。

15.6.1 和 “例外” 建筑师

虽然不够 **投影师** 在传统的意义上, 一些建筑师挑战结构工程师正确分析和设计他们的复杂地质。以下是创意建筑师的思想中产生的突破性结构, 通过在计算机可能性边界工作的结构工程师的专业知识转化为现实。

我只会专注于两个显著的例子, 而第三方的工作 (萨尔文) 此前已被讨论。

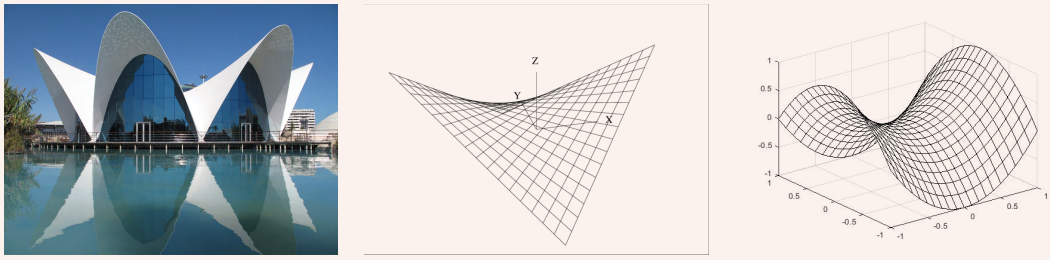
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15.6.1.1 菲利克 • 坎德拉 (1910–1997)

福利克 • 坎德拉 (Felix Candela) (马德里,1910 年 - 拉利, 北卡罗来纳州,1997 年) 他出生于西班牙, 并在马德里高等建筑学院学习建筑,1935 年毕业。然而, 在他参加西班牙内战后作为共和党工程师和法国集中营的短暂干预后, 他在 1939 年移民到墨西哥, 在那里他将大部分职业生涯和国际认可。

像 Nervi 一样,Candela 整体地设计了建筑物, 同时作为建筑师、工程师和承包商。他先驱了使用 hyperbolic-paraboloid (HP) shells, 由于其双重曲率的结构形状特别高效, 使负载主要通过膜作用而不是弯曲。然而, 他并不是第一个研究或构建这样的形式的人。(Espion, 2016) 由 Fernand Aimond 先行。(Aimond, 1936) 法国和乔治 • 巴罗尼 (Currà and Russo, 2018) 在意大利。然而,HP 的形状在建筑实践中仍然相对不明, 直到 1950 年代 Candela 创新的作品引入国际关注。

最具标志性的例子是 Candela 的 HP 盾牌, 毫无疑问是 1957 年完成的墨西哥 Xochimilco 的 Restaurante Los Manantiales。设计是如此的成功, 它启发了世界各地的许多类似结构。有效的结构系统, 其特征向上曲线边缘, 产生一个令人惊叹的滑动壳结构, 厚度仅为 40。mm 延伸 30 m 内部。在其中心, 壳达到 5.8 的高度。m, 而边缘上升到 9.9 m。支持器由地板底部的紧张线连接, 旨在抵抗壳的基础上产生的水平冲动。Candela 本人认为这个光明, 优雅的结构是他最重要的作品 - 结婚结构效益和建筑诗歌的遗嘱, 其对壳设计的态度。



(a) 餐廳 Los Manantiales 在 Xochimilco

(b) 由直线限制

(c) 由 Parabolas 限制

图 15.42: 福利克 • 坎德拉的超波利 - 帕拉博洛伊德相关术语

15.6.1.2 弗兰克 • 盖里 (1929–2025)

弗兰克 • 奥文 • 盖里 (多伦多,1929 - 2025) 他不是工程师, 而是一位建筑师, 作为这样他不适当属于这个伟大的工程师的阴影。然而, 他的作品对结构工程的职业提出了如此深刻的挑战 - 打破计算和建设上可能的一切界限 - 必须做出一个例外。

格里可以被视为两位建筑师 和 雕塑家 虽然卡拉特拉瓦的建筑外观通常由直线和简单曲线组成, 但盖里被复杂曲线表面所困扰, 具有如此精致的地质化, 即使他们的数字表面表现也成为博士论文的主题。(Shelden, 2002 PDF). 它的建筑分为传统结构类别, 需要对分析、制造和建设的全新的方法。

如今, 大多数建筑师常常依赖现有软件。(例如,SAP2000、RISA 或类似的程序) 结构工程师

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

可以用来分析和设计他们的建筑物, 盖里的工作证明是如此地质复杂, 传统的结构软件是不够的。因此, 他在他的实践中建立了一个独立的技术组, 以适应和修改 CATIA - 航空空间软件。Dassault Systèmes 最初开发, 用于分析飞机曲线表面。(Gehry, Lloyd, and Shelden, 2020). 这种空中计算工具适应建筑设计, 使 Gehry 的实践与先进的计算技术和 CAD/CAM 制造过程相同, 根本改变了复杂的建筑地质可以实现的方式。

格里最著名的建筑是比尔巴奥的古根海姆博物馆。1997 年完成。[52] 它的令人震惊的相关术语板曲线, 显示在 Fig。15.43a, 示例使用专门的计算工具, 无论是设计和结构分析. 建筑物的巨大内置空间 - 仅通过精致的计算机模型实现了可能 - 为同等曲线的当代艺术作品提供适当的环境, 如理查德 • 塞拉的 (我最喜欢的小画家之一) 巨大的钢材雕像 (图 15.43b).



(a) 比尔巴奥的 Guggenheim 博物馆　　(b) 理查德 • 塞拉 “乐队”

图 15.43: 弗兰克 • 盖里的比尔巴戈格内海姆和理查德 • 塞拉的雕像

15.6.1.3 圣地亚哥卡拉特拉瓦 (1951–)

圣地亚哥卡拉特拉瓦瓦尔斯 (巴尼马特, 瓦伦西亚,1951 年 -) 他首先在瓦伦西亚多技术大学学习建筑, 毕业于 1974 年, 随后在 ETH 苏黎世进行民用工程, 在那里他完成了博士学位,1981 年。尽管在 Christian Menn 的 ETH 学习 但是, 他们之间没有密切的合作。卡拉特拉瓦的建筑风格是独一无二的, 精致的, 充满活力和即时可识别的 - 结构工程逻辑与雕塑野心的融合。对他的早期工作进行批判性评估 (McQuaid, 1993).

虽然卡拉特拉瓦是建筑师和结构工程师, 但我把他放在这个建筑部分, 因为他的最大影响是视觉和形式而不是通过对结构工程科学的基本贡献。(像 Fazlur Khan 这样的人物。). 他的方法优先于建筑表达, 而不是结构优化, 将每个项目视为同时建造和雕塑。

它的结构从相对简单和更昂贵的 - 如阿拉米洛桥 塞维利亚 [53] 或在苏黎世的 Stadelhofen 火车站 - 到闪光和雕塑, 如达拉斯的 Margaret Hunt Hill Bridge 或里昂的 Saint-Exupéry 机场 TGV 站。虽然更简单的工作, 但苏利文的原则是, 形状遵循功能。卡拉特拉瓦没有努力

[52] 比尔巴奥是西班牙北部的巴斯克地区的一个经济衰退的工业城市, 古根海姆博物馆代表了一个勇敢的城市。(最终成功) 试图通过建筑旅游来经济和文化地恢复城市 - 现在被称为“建筑旅游”的战略 “比尔巴奥效应”

[53] 对于结构工程学生特别感兴趣的是本书由 Pollalis, 1999, 描述了阿拉米洛桥的设计和建设的每个步骤, 解释卡拉特拉瓦的建筑意图。这包括相关的工程计算和技术细节。该书还包含地质数据, 使工程师能够模型结构, 如讨论在 §G.

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

成为最小主义者, 并没有寻求像 Maillart 或 Nervi 这样的工程师追求的最佳结构形式。对于他来说, 结构作为工程解决方案和艺术表达的双重角色, 往往优先于视觉戏剧而不是结构效率。

这种方法产生了赞扬和批评。卡拉特拉瓦的工作经常受到延迟、成本上涨和争议的伤害。(Daley, 2013). 最著名的例子是他故乡瓦伦西亚的艺术与科学之城 - 他的作品的世界上最大的收藏, 包括表演厅、桥梁、行星馆、歌剧院、科学博物馆、覆盖的步行道和反映游泳池的公顷。原来预算大约 $405 百万, 这个复杂的最终成本几乎是三倍, 结果是多项诉讼, 描绘了建筑野心和工程实用主义之间的紧张局势, 这表明了他大部分工作。



(a) Alamillo Bridge, Seville

(b) 里昂圣埃克苏佩里机场 TGV 站

图 15.44: 卡拉特拉瓦: 在阿拉米洛桥的结构性优雅, 与视觉上可爱的里昂圣埃克苏佩里 TGV 站相比。

15.6.2 结构工程师: 五个百分点

首先, 我要引用一个挑衅性的介绍一个优秀的书。(Llunji, 2022), 提供对 结构工程 的当前状态的精致评估:

> 世界上有更多的工程师比建筑师。超过五百万。然而, 今天在结构工程中, 世界上几乎只有 10 位真正的设计师 - 不超过这一点。其他人都是技术人员和建筑思想的支持者; 建筑师的愿望的满足者, 通常是服务员, 非常罕见的合作伙伴, 从来没有领导者。听起来很硬, 但这是真的。在我们现在的后工业数字世界中, 民用工程已经不再处于社会发展前沿。工程师们, 在寻找“自动化”结构分析和设计, 正在变得模糊, 失去他们的“复杂化”和一些创造力, 并转变为纯粹的技术支持建筑师, 在最终设计中少创意投入。在某个地方, 沿着结构工程师成为“主体”技术, 而不是在技术创新的前沿。根据最近的报道, 有一个共识“自动化正在削弱工程社区的声誉和权威, 数字协调正在改变行业运作方式。”. 我们在结构工程行业工作的大多数人都意识到, 我们的分支部门遭受了重大变革地震, 这可能会使工程师的角色无关紧要, 这是世界各地实习结构工程师的重要担忧。... 在建筑行业里, 有很多声音会减少工程师的角色。现在, 几乎每个结构设计阶段都是自动化的, 有些人认为结构设计可能甚至不需要由结构工程师完成。如果一台计算机 (计划) 可以做到这一点, 运营商可能是一个具有结构基本知识的技术人员。但是, 这种数字工程的扩张可能是“双重刀剑”因为不熟练使用计算机工具可能会导致建筑故障, 工程师将被指责。重要的是要强调软件本身不是错误的观念; 相反, 主要问题是如何和谁使用这些工具。新的工具需要新的工作方式, 这需要新的质量保证方法。... 可能 95% 到目前为止我们所完成的项目中, 将是技术人员

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> 或自动化工作。真正不寻常的 结构工程 任务, 剩下的 5%, 作为结构工程其他的定义, 该作者属于, 请参见未来通过镜头 “结构建筑师” 未来结构工程师将更加建筑装备, 未来的建筑师将更有结构性。倾斜。
>
> (Llunji, 2022)

这种强烈的评估与当代实践的现实深相匹配。结构工程从创意学科转变, 由像 Nervi、Torroja 和 Khan 这样的人物所例外, 在大多数情况下是日常计算工作中, 代表了职业身份的根本变化。和 “5 百分比” 这个概念抓住了一个不舒服的真相: 这种真正的结构创造力, 推动边界并创造新的范式, 在一个由标准化软件和风险反对实践所占主导地位的世界中越来越少。

我不能再同意 Lunji 的声明, 因为它确定了建筑设计过程中的结构工程师的边缘化, 他们实际上已经成为合作伙伴或更频繁地提供技术顾问而不是共同创意合作伙伴。过去的伟大工程师 - 从埃菲尔到卡拉特拉瓦 - 会被遗憾地看到他们的职业减少到编码检查和荷载路线验证。

然而, 结构工程师并不局限于建筑和桥梁, 职业的救赎可能正是从建筑中完全分开的领域。工程师仍然非常需要进行精致的结构分析, 建筑师从未触摸过: 岩石、海上平台、核容器、航空空间结构、生物医学设备以及无数的工业应用。这些学科需要结构工程的知识远超出了传统建筑实践所要求的水平 - 包括非线性行为, 动态反应, 概率分析和失败机制, 推动计算能力和工程直觉的界限。

这些领域需要工程师, 他们仍然是真正的设计师, 面对前所未有的挑战, 这需要计算精化和工程判断远远超越日常建筑分析。无论是分析一个具体的火柴板的地震反应, 在波载下海上平台的疲劳行为, 还是核反应堆船的容器完整性, 这些工程师在标准化软件解决方案不足的结构知识界限上工作, 创造性问题解决变得至关重要。在这些专门领域, 职业在其最基本的形式中生存和繁荣, 超越建筑或结构实践的阴影。[54].

Llunji, 2022 然而, 他的白色评估仍然为这宝贵的 5 提供希望。% 结构工程师继续推动边界, 并定义纪律的未来。尽管世界各地的许多工程师可以参加这个精英类别, 但我将仅限于研究两个最突出的当代人物: 一个桥梁设计师和一个滑雪工程师, 其工作模拟了我们计算时代结构创造力持续的重要性。

有趣的是, 在两种情况下, 寻找 “理想” 形状仍然是至关重要的, 这是一个追求, 在深度的意义上, 带我们回到加利利前时代, 当地质形式是结构设计最具挑战性的方面。在马赛建筑中, 力量很少是统治的担忧; 艺术通过纯粹地质来实现稳定和美丽。只有当加利利奥开始分析尺寸、重量和物质力量之间的关系时, 形状和力量就变得不可分割地联系在一起。今天的最有创意的结构工程师已经进入了整个循环, 使用计算力不仅检查适当性, 而是发现新的形式表达力量的流动与前所未有的优雅和效率。

[54]作者已向公民团体提供技术专业知识 (C-10) 挑战新汉普什尔西布鲁克核电站的安全, 老化混凝土容器结构面临前所未有的工程挑战。(NRC-ML19312B609, 2019). 此案例示了 “5 百分比” 需要创意的结构分析工作: 没有现有设计代码适当解决涉及的复杂衰退机制, 标准软件无法模型结合热机械化学过程, 分析需要在混凝土可持续性中进行几十年的研究合成。断裂力学和概率评估。这些问题 - 在公共安全处于平衡状态和传统工程方法表现不够的情况下 - 代表了结构工程的基本核心, 没有任何自动化可以取代。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15.6.2.1 高级建筑

在二十一世纪的转折点上, 世界各大城市对最高建筑进行了重新竞争, 芝加哥和纽约领导了这项负担, 而迪拜等新的竞争对手出现。这场高度竞赛推动了结构工程师进入这个宝贵的“5 百分比” 领土, 在那里传统的设计方法证明不适当, 创造性问题解决变得至关重要。

下一篇 通道 (Seabrook, 2001) 提供了一个简短的历史概述, 结构系统在纽约城的滑雪者在过去的一个世纪使用。从一个与实践结构工程师密切相关的科学记者的观点写下来, 它跟踪了从负载机械和钢铁建造到早期钢框滑板的进化, 到具有现代高高度设计的管道和核心系统。超越其描述价值, 文本记录了结构思维的转变: 从保守的, 质量强大的建设到更精致的荷载高效系统, 通过改进的解析工具, 材料和制造方法。

> 在过去一百二十年里, 在纽约市的高楼中使用了三种主要类型的结构。第一种是用在八十年代和九十年代的钢铁建筑中, 其中 “重力 荷载” 建筑物的重量主要由外墙携带。这种结构创造工厂和仓库空间 (如今, 居住地板) 它们是相对免费的内部支持列 - 更易于使用的房地产租户 - 但, 当与木板板和更轻松的建筑代码相结合时, 它也使建筑物容易崩溃。在火焰中, 地板倾向于崩溃, 铁 框架 失去了力量和冲动。第二代高楼, 其中包括大都会生活建筑 (1909) 威尔沃斯大楼 (1913) 帝国国家大楼 (1931), 是框架结构, 其中一支合金或旋转的钢材列和线条的骨骼, 经常在混凝土中嵌入, 通过整个建筑。这种类型的建造使得一个非常强大的结构, 但不是那么有吸引力的地板空间。室内充满了沉重的, 荷载带来的列和墙壁, 当你向这些建筑物的中心移动时, 它们感觉越加密。由 Thornton-Tomasetti 工程师在曼哈顿设立的结构工程公司 Charlie Thornton, 现代高层结构的领先设计师, 最近告诉我: “像帝国国家大楼这样的建筑是过度设计和重建的。建筑不需要所有这些支座. 这些工程师不明白我们如何理解它们的负担 - 他们使用滑板规则来工作它们, 而我们有计算机 - 所以他们错误地注意。自十九世纪六十年代以来, 大多數高層建造的建築物使用第三種結構 - 前兩種結構的最佳方面的合成。这些建筑的周边结构类似于管道。内部, 由 钢材 和/或 混凝土 制成的巨大的空洞核心包含许多服务: 电梯、楼梯和浴室。由于核心和周边列携带了大量的荷载, 设计师可以消除室内列, 结果是租户更开放地板空间。而且, 由于框架结构需要铁工人将粘贴或转向支持列的线条, 这既昂贵又危险, 减少框架的范围意味着更多的结构可以从现场制造。使建筑更安全, 更成本效益的建造。最后, 金属工程的改进增加了这些建筑中的结构性钢材的强度, 使工程师能够减少或消除在支持结构时使用混凝土。钢筋混凝土, 虽然它比钢材更耐火, 但在曼哈顿工作时非常麻烦和昂贵, 因为现场的交通和空间限制使其难以在日常舰队中携带大量工作所需的水泥混合器。自六十年代以来建造的大多数高楼的楼层比旧建筑的楼梯重得多。在一个典型的高层办公地板上, 三个或四英寸的混凝土覆盖着一块折叠钢板, 其重量由 I-beams 或在双胞胎塔的情况下支持。“特斯拉” 钢材的轻重线条, 由平方或圆形线条的交叉网膜包装, 在每个楼层表面下创造一个空洞空间。这个空间允许建筑师在楼层内安装加热和冷却管道, 而不是在楼下的天花板上 - 这是一个创新, 这意味着开发人员可以在整个建筑物中增加楼层数量。
>
> (Seabrook, 2001)

15.6.2.1.1 莱斯利•罗伯特森 (1928–2021)

莱斯利•埃尔尔•罗伯特森 (Leslie Earl Robertson), 双胞胎塔的结构记录工程师 (世界贸易中心), 以不常见的路径为主, 这往往是 “五分之一。” 他的不寻常的背景　在十六岁时离开高中, 担任海军电子工程师, 然后在 UC 伯克利获得科学学位之前从电气转移到结构工程　证明了创造性工程天赋来自意想不到的四分之一。

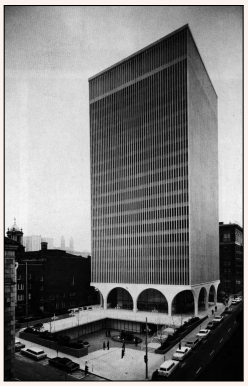
當 Robertson 在 1958 年逃出西雅圖的錢, 並在结构工程公司工作時被稱為 Worthington-Skilling, 他開始了一個傳奇的自我教育過程。工作夜晚和周末, 他教自己基本的概念, 如滑板挠度和硬十字路口方法, 开发了没有计算机程序可以提供的深层结构直觉。[55]

[55] 事实上, 当这种手工计算为日益复杂的结构进行时, 人们会发展一种无法通过重复计算机模拟实现的结构

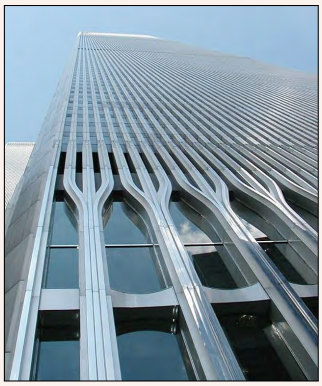
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

五年后, 该公司参加了一场竞赛, 建造了迄今为止最高的建筑物: 世界贸易中心的两座塔。尽管该公司没有设计比西雅图的二十大 IBM 建筑更高, 但这家公司有一个关键优势: 建筑师 Minoru Yamasaki, 谁选择了他们为这个项目, 也是世界贸易中心的建筑师。

在关键的演示会议上,John Skilling 用一个绘画板、滑板和标记器完成了他的舞台 - 没有 PowerPoint 演示或编写计算机动画。[56] 简单度是深刻的:Yamasaki, 患有 Acrophobia, 想要围绕建筑物周围的结构元素, 以帮助居民在大高度感到安全。Skilling 的解决方案是一个纯粹的管结构, 将 Khan 的管概念比以往任何时候都更远。



(a) IBM 在西雅图建造



(b) 世界贸易中心 “三位一体”



(c) 上海世界金融中心

图 15.45: Yamasaki 和 Robertson: 从西雅图的原型到全球影响力

三十五岁时, 罗伯特森搬到纽约监督建造将成为世界上最高的建筑物。工程挑战推动了他进入未经描述的领土: 确定人体感知对水平运动的边界 (Chen and Robertson, 1972), 开发粘膜蒸发器来控制风引导的振动 (Mahmoodi et al., 1987), 并创造了从未在这样的规模测试过的结构系统。

2001 年 9 月 11 日的悲剧事件使罗伯特森的设计受到了最终无意的测试。塔的崩溃的结构分析 - 在种子文件中详细描述 Eagar and Musso, 2001 和 Bažant and Zhou, 2002 重新发现, 虽然建筑物最初幸存着飞机的冲击, 但从结果的火灾中保持超过 800°C 的温度最终损害了钢材的屈服强度, 导致逐步崩溃。这项法律分析本身代表了 “5 百分比” 工程: 了解没有代码预测的失败机制, 也没有标准分析可以预测。

罗伯特森的随后的职业生涯包括上海世界金融中心和香港中国银行塔等其他标志性的超级建筑, 每个都提出了独特的挑战, 需要创造性解决方案, 而不是传统实践。他的记忆 (Robertson, 2017) 一个职业生涯的历史, 解决以前从未解决过的问题。

结构揭示: 流行行走之旅 COVID-19 流行病, 在 2020 年震撼了世界各大城市的街道, 意外地以新的方式启发了建筑与工程之间的关系。迈克尔 • 金梅曼, 建筑评论家《**纽约时报**》在锁定期间, 他启动了一系列虚拟散步之旅, 由建筑师、历史学家和 - 对于这个章节来说至关重

性行为理解。这与拱 dam 设计师相似, 他们使用了 **测试 荷载 方法** 与那些依赖于计算机模型的人相比。作者支持在核安全评估中恢复这种基本理解, 计算模型必须通过第一原则分析开发的工程判断进行验证。

[56] 与当今技术依赖的演示相反!

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

要 - 结构工程师陪同。正如 Kimmelman 所指出的那样, “多年來, 建築師並不是唯一記錄了紐約的滑板　上個美國世紀的簽名圖像　在城市以太之間。其他人中, 结构工程师、常见的想象力和进口的实用诗人, 也发现了如何扩展这些高度。” 这个句子 “实用诗人” 捕捉正確的 Vitruvian 理想: 工程師 **威尼斯** 不是通过应用的装饰, 而是通过无情的表达 **坚定**.

在曼哈顿市中心的滑雪巡回演出中, 金梅尔曼两次走同一条路线: 首先与建筑师安娜贝尔 • 塞尔多夫一起, 然后与普林斯顿大学结构工程师盖伊 • 诺登森一起。两位专业人士, 观看相同的建筑物　西格拉姆大楼、黑岩 (CBS 建筑) 但是, AT&T 建筑和 公园大道 432 号 - 提供了这些景点的补充但独特的解释。在塞尔多夫强调了空间体验和建筑意图, 诺登森揭示了内在的结构性天才: 在西格拉姆建筑中创新的包装框架和时刻框架组合。巨大的通道蒸发在平板薄 432 公园大道内, 温和风引发的波动, 以及 “關於 结构工程” 这使得当代超级模型成为可能。关于 西格拉姆 建筑, 诺登森 指出: “对于我来说, 西格拉姆是纽约最令人印象深刻的高峰。它描述了创意天赋之间的关系, 需要聚集在一起, 以便发生一些建筑上令人惊叹的事情。” 这个合作精神　建筑师、工程师和在音乐会上工作的守护者　代表了复兴时期统一的实践。**投影师** 维特鲁维亚的坚持, 建筑师 (在他的日子里, 与建筑师和工程师同义词) 必须掌握多学科, 才能达到卓越。

这些平行之旅在微宇宙中展示了建筑师和工程师所感知的补充但独特的方式　以及当两个视野都缺席时产生的污染。结构工程师看到了维特鲁维乌斯所称之为 **坚定**: 通过列和核心的力量流动, 紧张和压缩的舞蹈, 保持一座塔站在风和重力对抗。建筑师会见到 **用途** 和 **威尼斯**空间如何为人类服务, 形式如何让眼睛满意。當這些觀點相結合時 - 正如他們在 Nervi、Torroja 和 Khan 的偉大作品中所做的那樣 - 結果是整個維特魯維亞三角形滿足的結構建築。金梅尔曼后来收集了这些步行 **亲密城市**: **散步纽约** (2022) 一本未包装的书 “结构工程的历史、计划、法律、成就、建筑突出点和日常现实” 构成城市生活 (Kimmelman, 2020 PDF). 对于结构工程师来说, 这些游览提供了一个公共参与的模型, 它揭示了而不是隐藏了纪律对建筑环境的重要贡献　证明 **坚定**正确的表达, 可以成为一个源头。**威尼斯**.

现代工程师中,Nordenson 在他的巡回演出中突出作品是 William Baker 的 Skidmore,Owing。& 梅里尔 - 他们经过的几个中城景点设计的公司。贝克的成就几乎是最清晰的例子。“5 百分比” 可以实现, 当计算复杂化与深层结构直觉结婚时。

15.6.2.1.2　威廉 • 贝克 (1953–) 如果有人想识别最突出和创造性的当代结构工程师 - 谁掌握了现代计算工具, 同时在 Fazlur Khan 的突破性原则之外前进的人 - 这将是 William Frazier Baker, 一个合作伙伴在传奇的 Skidmore, Owings。& 梅里尔 在芝加哥。贝克代表了进化 “五分之一: 一个使用计算力的人, 不是作为创造力的替代品, 而是作为实现以前不可能的结构表达的工具。

迪拜的超级滑雪板设计, 如贝克的 828 米布尔吉 • 哈利法, 模拟了这个新的范式。虽然垂直负载可以通过超高强度混凝土进行管理, 但统治的挑战在于侧面力量 - 风和地震效应, 创造复杂的三维动态行为, 需要精致分析远远超过标准实践。

Burj Khalifa 项目由建筑师 Adrian Smith 设计, 由 Baker 工程 (两者都是我) 它描述了建筑视觉与工程现实之间的持续紧张局势。虽然建筑师可以采取公众的光线, 但结构概念 - 模糊的核心系统, 风响应的地质学, 复杂的内部骨骼 - 是纯粹的。“5 百分比” 工程创造力。

贝克的理论贡献, 记录在 (Baker, Skidmore, et al., 2013 PDF) 将哈恩的遗产扩展到计算时代:

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

> 也许一个高楼的最重要的结构参数是建筑物的建筑按摩, 或形状。它不仅定义了塔的复杂性, 而且通常对建筑物的风力产生重大影响。风是高楼设计的主要结构考虑。大楼周围的风流往往不稳定。随着风的通道, 流量从塔侧分开, 形成一系列涡旋导致压力差异在整个建筑物。虽然风在塔上的阻力效应很重要, 但这些力量通常不是控制的担忧。它是由瓦尔特克喷发引起的十字风力, 与塔的自然和谐相结合, 这可以导致非常大的力量, 对风方向有偏见。由于常见的风事件的速度和建筑宽度的正常范围, 将会有某些风事件, 在那里相关术语喷与塔的自然和谐相匹配。
>
> (Baker, Skidmore, et al., 2013)

贝克的遗产不仅在他设计的建筑物中, 而且在证明, 即使在我们自动化时代, 工程洞察和创造性视觉的结婚仍然是不可替代的。他的最新书 (Baker and McRobie, 2025) **地质和平衡**:*21* **世纪结构力学** 编码这个哲学, 展示了地质学和平衡的基本原则如何引导工程师走向创新解决方案, 只有计算分析无法发现。

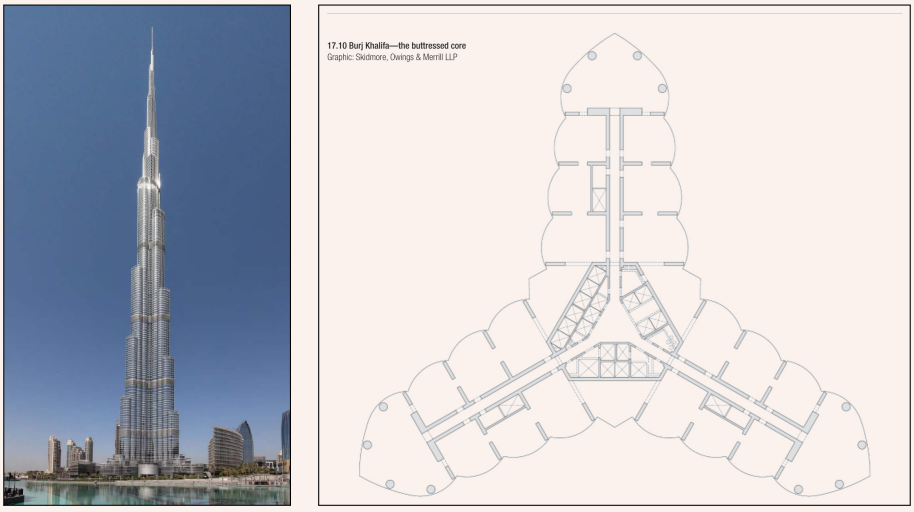


图 15.46: 贝克和伯吉 • 哈利法: 计算机复杂化为建筑雄心勃勃服务 (Baker, Skidmore, et al., 2013)

除了个人项目之外,SOM 的 Baker 团队已经为设计工具创建了结构地质优化先事项, 并将工程效率与建筑表达之间的差距结合起来。其方法, 详细介绍 (Beghini et al., 2014) 这是一个新的范式:

> 建筑业在当今世界面临的常见问题之一是工程与建筑之间的平衡: 传统上, 建筑师的目标更专注于美学。“形式” 一个结构, 而工程师的目标是专注于稳定性和效率, 或者其 “功能”. 在这项工作中, 我们讨论了这些学科之间的密切合作的重要性, 并提供一种替代方法来通过一个定制的结构托波利亚优化框架创造新的综合设计想法。这可能对建筑和结构工程社区都有好处。
>
> (Beghini et al., 2014)

这项工作, 背景化和描述在 §15.5.4.3 它展示了如何 “5 百分比” 使用计算工具, 而不是替代创造力, 而是发现新的形式以前所未有的清晰度和优雅表达结构逻辑。贝克的遗产不仅在他

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

设计的建筑物中, 而且在证明, 即使在我们自动化时代, 工程洞察和创造性视觉的结婚仍然是不可替代的。

15.6.2.2 桥梁:Michel Virlogeux (1946–)

米歇尔·维洛热体现了法国卓越工程传统的典范。他接受了法国精英教育体系的培养，毕业于巴黎综合理工学院和法国国立桥路学校，并取得结构工程博士学位。在 SETRA 建立他的声誉后 (负责道路和高速公路技术研究的政府机构) 他转向独立的咨询, 在那里他的创造性愿景可以在没有官僚限制的情况下蓬勃发展。

Virlogeux 展示了 “5 百分比” 通过其设计超过 100 座桥梁, 主要是诺曼底桥和米拉乌维亚图 (图 15.47). 他的索站立的桥梁 est 美学卓越不是通过应用的装饰, 而是通过将设计减少到它的结构本质 - 一个哲学, 模仿过去伟大的工程师艺术家。然而, 这些结构的显而易见简单性掩盖了极大的解析复杂性: 由大型索变形引起的地质非线性, 动态风互动以及需要精致计算分析远超出了标准实践的荷载复发机制。

索多端站桥的设计复杂性是由 Virlogeux 自己的技术评估所描述的:

> 最好的解决方案, 最优雅的是在不同结构成员之间分配硬度。(天花板、皮尔和皮隆) 为了平衡由无形的活负载产生的旋转效果, 并限制脱落。从一个极端到另一个, 可以比较几个解决方案:
>
> - 具有足够高的硬度, 可以抵抗由现场负载引发的旋转时刻。此解决方案只適用於 索 固定橋的小型和中型區域。
> - 高弯曲硬度的柱子, 例如具有逆转 V 长角形状的形状, 在底部的脚下转移弯曲力量以限制旋转到地板水平。在這些條件下, 可以擁有一個非常緩慢和柔軟的地毯。
> - 将硬度分布在所有结构成员、地板和塔之间。
>
> 如上所述, 结构设计必须允许在地板内产生的长度变异, 通过安装连续性前压的相关术语子在关闭后, 混凝土切割和缩小形成后关闭地板, 温度变化。因此, 所有实用的解决方案将同时进行一次分析。
>
> (Virlogeux, 2001)

2004 年完成的 Millau Viaduct 是迄今为止最优雅的索站桥: 具有 6342 米宽和 240 米长的两端宽, 在塔尔谷上方 245 米。该项目需要计算模型、建筑方法学和材料科学的创新, 这推动了被认为可行的边界。详细的技术描述可在 (Virlogeux et al., 2005) 當時 (Bergsjö and Pettersson, 2016) 为学生提供索站桥分析的基本阅读, 并补充 Virlogeux 更可用的治疗。(Virlogeux, 2001).

Virlogeux 的设计方法揭示了精致的判断, 区分 “5 百分比” 习惯练习者。非常意识到结构效能与美学卓越之间的微妙平衡 - 跟着维特鲁维乌斯的紧张局势 - 他在米拉乌项目中直接面对了这个 dilemma。形象 15.48 展示了四个结构上适当的解决方案, 以建立多层索站式桥梁, 每一个提供物质经济和建筑复杂性之间的不同交易。然而,Virlogeux 拒绝了所有四种替代品作为美学上不可接受的, 而不是选择在完成视频中可见的更优雅的解决方案。这一决定需要额外的覆盖密度和更精致的分析, 证明有时效率和经济必须尽可能短暂地归功于结构美丽的追求。

这种选择美丽的愿望, 超越纯粹的优化, 区分了 Virlogeux 与 95% 谁可以自动选择最经济

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

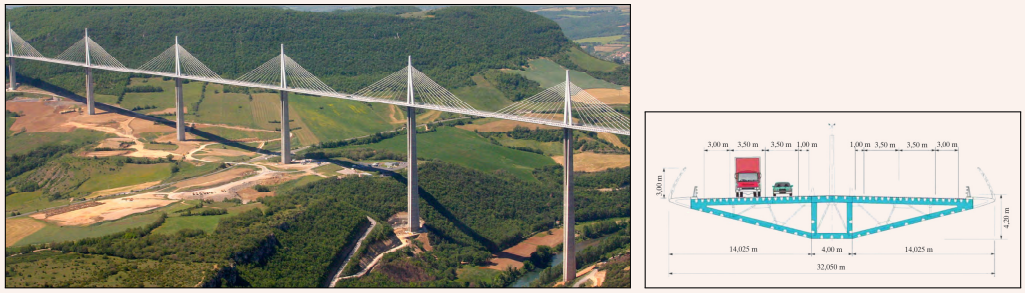


图 15.47: 维洛热与米约高架桥：史无前例尺度上的结构诗篇 (Virlogeux et al., 2005)

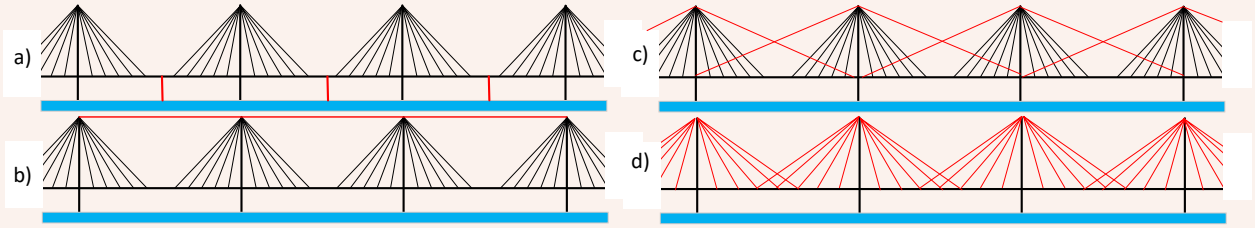


图 15.48: 替代的结构系统为多层索站桥, 所有都被 Virlogeux 因美学原因拒绝 (Virlogeux et al., 2005)

的解决方案。与 Maillart 不同, 其天才在实现结构、经济和美丽的同时优化方面,Virlogeux 承认, 在某些背景下 - 特别是在主要基础设施标志的范围内 - 追求美学卓越的追求正当化了额外的结构复杂性。他的桥梁作为纪念碑, 不仅仅是工程能力, 而且在一个越来越自动化的职业中对美学判断的持续相关性。他们证明, 即使在我们的计算时代, “5 百分比” 将技术主导与艺术视觉相结合的人, 仍然是建立提升景观和人类精神的基础设施所必不可少的。

15.7 Vitruvius 修订

维特鲁维亚的治疗 (第一世紀 ECB) 它在文艺复兴时期重新发现, 其结构要求的原则被后代建筑工程师确认和精化。这些基本的论点没有被特别挑战, 直到 Billington, 1983b 提到术语 **结构艺术** 它以令人惊叹的方式定义了他的幻想先驱: 维特鲁维, 阿尔伯蒂和帕拉迪奥。

这个部分将挑战结构艺术的概念本身, 并试图拆除它 - 不减少伟大的工程师建设者的成就, 而是澄清我们理解他们的作品的概念框架。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15.7.1 解体结构艺术

经过我认为最好的关于壳结构的文本书的发布,**薄壳混凝土结构**,[57] Billington, 1965 他们对结构性美学产生了深刻的兴趣。这种兴趣通过普林斯顿的许多内部报告发展 (Billington and Mark, 1970; Billington, Mark, and Abel, 1972; Billington, 1984a; Billington, 1979; Billington, 1983a; Billington, 1984b) 在他的标志性工作中完成 (Billington, 1983b).

在本书中, **塔和桥梁**, 比林顿在现代结构工程中发现了一种美学传统, 他认为它是独立于建筑的。**结构艺术**. 作品捕捉了他对结构工程, 建筑和艺术的交叉点的想法, 提出一个结构设计实现了 **结构艺术** 当它在三个领域取得卓越时: **效率、经济和优雅**. 本书评论由托马斯特尔福德、约翰·罗布林、古斯塔夫·艾菲尔、本杰明·贝克选择的主要结构 (19 世纪末黄金时代的铁结构), 和马亚尔、内尔维, 以及 20 世纪初的混凝土时代的其他人。

比林顿对结构艺术的要求本质上是第一世纪公元前一世纪所提出的原则的改革。(桌子 15.6) 有一个关键的区别。他的先知认为这些美德是必不可少的。**所有** 值得的结构, 而 Billington 则保留了结构艺术的资格, 只有那些符合其具体标准的结构。

表 15.6: 从维特鲁维乌斯到比林顿的建筑美德

维特鲁维亚	**阿尔伯蒂**	**广播** [58]	**比利时**
~ 20 公元前	1452	1570	1983
	所有结构		结构艺术
强度 (**公司**)	用途 (**舒适**)	用途	效率
用途 (**用途**)	长度 (**永恒**)	舒适	经济
美丽 (**金星**)	美丽 (**美丽**)	长度 & 美丽	优雅

这项有影响力的工作催化了许多随后的论文和学生分析的论文。“结构艺术家” 使用已建立的模板: 描述结构, 将其置于历史背景下, 评估其美丽和优雅, 并进行计算以确认设计假设。

无数的出版物自此批准了该期限, 但很少有人对这一期限提出质疑。毕竟, 比林顿是一个令人震惊的人物, 把建筑与结构之间的差距打破了。它显然更容易拥抱他的魅力观, 而不是研究它的哲学基础。

15.7.2 什么是艺术?

那么, 什么是艺术呢? 我想说, 艺术的独特目的就是在人类中沉浸。**传染性情绪的传播**一个深深的个人, 不自私的内在情感表现。七种传统艺术形式: 绘画、雕塑、建筑、音乐和舞蹈、

[57] 从对所有学生熟悉的基本关系开始, 并以优秀的图像支持,Billington 将第八个命令偏微分方程统治壳行为。然后他简化了它, 以解决各种壳类型, 并 - 在严格的分析文本中非常罕见的是 - 将理论调整到实际的钢筋混凝土设计实践。

[58] 帕拉迪奥自己的表述实际上包含四个术语 有用性、舒适性、长度和美丽 比维特鲁维乌斯、阿尔伯蒂和比林顿使用的三方分区更相同; 最后两者在这里结合起来, 以保持桌面上的顺序调整。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

文学、剧院和电影。根据定义,没有一个服务于实用目的。建筑只出现在这个列表上,因为美丽的建筑产生的美学乐趣。例如,Palladio 的 Villa Rotonda (图 15.49a) 马拉帕特之家 [59] 在卡普里 (图 15.49b) (Iacovou, 2024) 它们是作为纯粹艺术表达的建筑主作品。然而,他们的结构性概念对他们的艺术价值很少影响。



(a) 别墅罗顿达 (广播)



(b) Casa Malaparte, Capri

图 15.49: 建筑作为纯粹的艺术: 从结构表达中解放的形式

艺术总是 **表达** 它不能作为适用于功能对象的添加剂。(虽然 "艺术家" 可能适当). 我们不能谈论 "金正恩" 只是因为蒙特格拉帕喷泉铅笔是美丽的 (图 15.50a) 或引起情感。尽管它的美丽和手工艺,它仍然基本上是一个功能工具 - 一个漂亮的铅笔,也许,但不是艺术。

同样,有一个桥梁可以将我们从 A 点到 B 点。它可能是一座美丽的建筑,但我们不应该称之为艺术。當 Maillart 設計他的 Salginatobel 橋時,他的目標不是創造結構藝術,而是建造一個功能性的橋樑,也會美麗和優雅地與周圍的環境整合。(图 15.50b).



(a) 由 Montegrappa 的源笔



(b) 萨尔吉纳托贝尔桥 Maillart

图 15.50: 功能和美丽: 铅笔和桥梁

提出挑战,将 "结构艺术" 对于许多由比林顿标记的结构,问题仍然是: 有没有像结构艺术这样的东西实际上存在? 答案是,但例子非常罕见。要合格,结构的最终目的必须是视觉美丽和情感沟通,同时需要结构工程师的技能来实现。此分類上一篇: Eiffel Tower (作为 1889

[59] 由 Adalberto Libera 设计,具有重大重新设计和 Curzio Malaparte 的直接作者。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

年世界博览会的中心作品, 以庆祝法国伟大,Fig。15.51a), 门口 拱 在 圣. 路易斯 (图 15.51b), 或 2002 年瑞士博览会的科学与创新世界 (图 15.51c).



(a) 艾 菲 尔 塔 (b) Gateway Arch, St. Louis (c) 2002 年瑞士展览会

图 15.51: 真正的结构艺术: 结构作为纯粹的表达

它强调, 当 Maillart 或 Nervi 设计了他们的桥梁和阶段时, 艺术肯定不是他们的主要目标。他们的目标是通过结构简单和优雅来实现美丽的功能基础设施。[60] 这种美丽代表着巨大的附加价值, 但它源于结构逻辑的追求, 而不是艺术表达。

这提出了一个基本问题: 为什么硬币是一个新的术语, 当 Vitruvius 在 2000 年前对基本原则进行论文时? 他的 *Firmitas*, *Utilitas*, **金星** 建立了所有值得的结构必须满足三个条件: 强度, 有用性和美丽。这经常被解释为假设, 如果前两项要求得到满足, 第三项要求会自动进行。比林顿的三个柱子 - 效率, 经济和优雅 - 代表了维特鲁维亚原则的更新术语 (桌子 15.6). 对于维特鲁维乌斯来说, 这些条件定义了自己值得的结构; 对比林顿来说, 他们的满足创造了“结构艺术。”

这就是为什么我拒绝这个术语。**结构艺术** 为了支持 **结构性建筑**更谦虚、更准确的定义。

15.7.3 结构建筑:Llunji 的宣言

當比利頓的 **塔和桥梁** 实现了广泛的影响力, 最近由蒙特利尔结构工程师米洛什 • 隆吉发表的一份不太知名的宣言值得平等、如果不是更大的关注。(Llunji, 2022 PDF).

这个基本文本系统地破坏了结构艺术的概念, 突出它的限制, 批评那些盲目拥抱它的人, 并争议恢复这个术语。**结构性建筑**原创由 NERVI 编辑 (Nervi, 1963 PDF). 我不能更坚定地同意 Lunji 的分析。

我已经了解了 Llunji 对结构工程职业的精致评估 §15.6.2. 他的建议为这个有争议的部分提供了合适的结论:

[60] 我从中学最深的记忆之一是数学教授, 当我们争取猜测玫瑰曲线的方程时, 他告诉我们: “曲线是简单而美丽的, 应该有一个平等简单而漂亮的方程式。” ($r = a\cos(n\theta)$).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 如果我们承认我们的职业处于危机状态，如果我们想让它再次有吸引力，我们应该引入工程学生的教育，这现在留下了很多需要。年轻一代更愿意选择建筑而不是工程，因为他们不再认识到民用工程实践与创造力和创新。我们必须强调和促进我们的职业的创造性方面，从而重新发明一个可识别的形象，并打开工程主角的封闭门。
>
> (Llunji, 2022)

无论我们谈论结构艺术还是结构建筑，我们都可能讨论同样的情感和美学领土，但我认为这个术语更准确、智力上更诚实。最后，我们将最适合我们的目的的含义归功于词语，而莎士比亚的朱丽叶提醒我们：

> 什么是名字？我们所称之为玫瑰
> 换句话说，它会闻到甜味。
>
> 罗密欧和朱丽叶《行动 2》

梅拉特、内尔维、托罗贾和他们的当代人的伟大，不是在于他们创造了“艺术，”但是，通过证明，具有材料和力量的深入理解而设计的功能结构可以实现任何艺术创作竞争的美丽。他们提醒我们，结构工程的最高呼吁不是模仿艺术，而是发现本质诗歌在建筑逻辑本身。

15.8 结论

通过工程与建筑的交叉之旅，从古罗马到数字时代，重新揭示了一个转型职业。我们跟踪了从维特鲁维乌斯的基本原则到工业时代的伟大工程师建设者的进化，到今天的计算实践者，见证了极大的成就和令人困惑的趋势。

在本章中提到的工程师和建筑师代表了 Lunji 所称之为“5 百分比”那些超越日常计算的稀有实践者，以实现真正的结构创造力。从艾菲尔的理性优雅到 Nervi 的结构诗歌，从汗的管道创新到贝克的计算精致化，这些数字表明伟大的结构设计不是从软件算法中产生的，而是从技术掌握与创造性的愿景的结婚。

然而，正如我们所看到的那样，职业面临着存在性的挑战。计算工具的民主化，悖论地减少了结构工程师的作用，许多人“技术人员和建筑理念的支持者”而不是设计过程中创意合作伙伴。这个挑战现在是由人工智能的出现组成的，承诺更大的自动化日常工程任务。虽然人工智能可以作为创意工程师的强大工具 - 加速计算，探索设计替代品和处理重复分析 - 这也威胁要进一步破坏区分真正的工程与纯粹的计算的智力参与。

危险不在于 AI 本身，而在于过度信任它。正如终端单元软件的可用性产生了能够在不了解基础物理学的情况下进行复杂分析的工程师，而人工智能冒着创造实习生，能够在没有破坏结构行为的基本原则的情况下创建设计。智慧工程师将使用人工智能，因为 Nervi 使用了他的测试设备或 Baker 使用 Topology 优化：作为验证和完善通过理解想象的工具，从来没有作为工程判断的替代品。

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

前进的道路不是拒绝技术, 而是重新发现基本原则　地质学、平衡、物质行为。[61] 能够提供真正的创新解决方案。工程师谁明白为什么一个催眠拱工作, 谁能够通过一个梁的应力流动视觉化, 谁抓住形状与力量之间的关系, 将永远拥有不可替代的东西: 能力区分可靠和最佳, 计算和洞察之间。**信任但验证** 它必须成为人工智能时代的观察词, 同时保持智力独立性来质疑其产量。

对于有兴趣的结构工程师或建筑师寻求加入这个宝贵的五分之一, 以下文本提供必需的基础:

1. *The Ten Books on Architecture*, Vitruvius, 1960 二千年后仍然有效的基本原则
2. *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*, Alberti, 1485 古典理论和实践应用的复兴合成
3. *I quattro libri dell'architettura*, Palladio, 1570 相对系统和结构架构
4. "The tall office building artistically considered", Sullivan, 1896 现代结构表达的哲学基础
5. *Philosophy of structures*, Torroja, Polivka, and Polivka, 1958 结构直觉与机械计算
6. *Structures*, Nervi, 1956b 工程与艺术视觉的整合
7. "Design of high-rise buildings", Khan, 1965 对高级结构系统的系统性方法
8. *Towards a new architecture*, Le Corbusier, 1931 现代主义原则及其结构性影响
9. *The Tower and the Bridge*, Billington, 1983b — 结构美学的经典声明
10. *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*, Llunji, 2022 需要批评, 走向重建的道路

以下图表记录了讨论的主要数字, 揭示了从实验直觉到数学严格的进化到计算精密:

智力之旅从比林顿到卢恩奇 (形象 15.52) 它反映了我们不断发展的理解, 实践结构工程作为一个创造性的学科意味着什么。虽然 Billington 庆祝了伟大的工程师的美学成就, 但 Llunji 挑战我们是否在追求计算效率超越创造性卓越方面失去了道路。

前进的道路不需要放弃技术, 也不需要退缩到怀念之中, 而是要培养贝克所称之为"地质学和平衡"的东西 - 这些基本知识使工程师能够使用计算工具作为发现的工具而不是思考的替代品。只有通过理解引导 Maillart 的桥梁和 Nervi 的盾牌的原则, 今天的工程师才会希望创造值得加入这个独特的线路的结构。

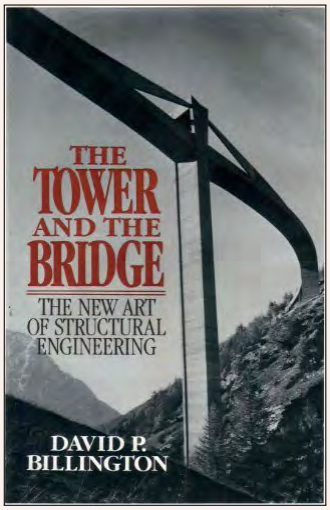
结构工程师每一代面临的选择, 仍然是埃菲尔和托罗贾面临的选项: 你会很高兴能作为一个新一代建筑工程师。"工程师和建筑理念的支持者," 或者你会渴望加入使用结构逻辑创造新的美丽形式的五分之一吗? 答案不是你的软件的复杂化, 而是你对材料和力量如何阴谋创造结构的理解深处 - 通过结构, 意义。

[61] 或如下三本书中多次重复: 平衡、变形协调、可持续模型。

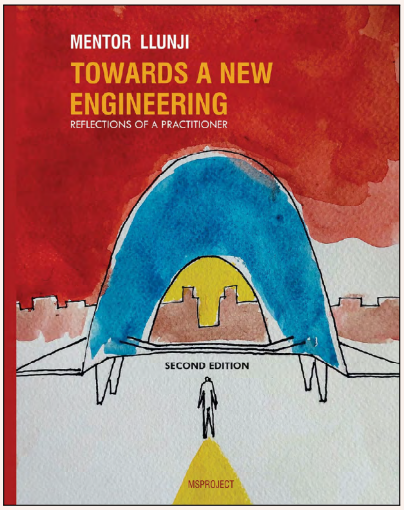
第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 15.7: 结构设计方法的进化

名称	岁月	國家 (实践)	建筑师或 工程师	初级 创新
		帝国方法 & 结构性直觉		
艾菲尔	1832–1923	法国	工程师	理性铁建设
加迪	1852–1926	西班牙	建筑师	加泰罗尼亚地质
梅尔特	1872–1940	瑞士	工程师	三角形混凝土架
佩雷特	1874–1954	法国	建筑师	展出 混凝土 框架 建筑
神经	1891–1979	意大利	工程师	铁路沙尔
莫兰迪	1902–1989	意大利	工程师	预应力混凝土
萨尔文	1910–1961	US	建筑师	混凝土 表格
蜡烛	1910–1997	墨西哥	建筑师	Hyperbolic Paraboloid 甲状腺
		物理形状的发现		
奥特	1925–2015	德国	建筑师	紧张结构
岛	1926–2009	瑞士	工程师	粘膜方法
穆斯林	1926–1981	意大利	工程师	实验性混凝土桥梁
哈恩	1929–1982	US	工程师	管道建筑系统
男人	1927–2018	瑞士	工程师	预应力混凝土 桥梁
		计算设计		
罗伯特森	1928–2021	US	工程师	超级建筑系统
希里	1929–2025	US	建筑师	数字制造
卡拉特拉瓦	1951–	西班牙	拱 / 英格	雕塑工程
弗洛伊德	1946–	法国	工程师	综合 索 站立的桥梁
贝克	1953–	US	工程师	Topology 优化



(a) 塔和桥梁 (Billington, 1983b)



(b) 走向新工程 (Llunji, 2022)

图 15.52: 从庆祝到批评: 发展结构创造性的前景

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



卡拉瓦乔、马塔和玛丽 · 马格达伦 *(1598)*

活跃而有观察的生活在对话中: 结构服务于建筑, 玛丽服务于玛丽 - 不同的呼唤, 相互依赖, 每一个都至关重要。

审阅稿

16 Terrae Motus: 地震的神话、信仰和代表

摘要

本章审查了地震作为人类想象的持久催化剂在各个文化和历史时期。从最早的神话开始框架 在其中地震事件被归因于地下动物, 宇宙不平衡, 或者被监禁的巨人的斗争 它跟踪了进展。地震的解释通过宗教的正式结构, 哲学的理性研究, 以及文学的表达资源, 建筑、艺术、音乐和电影。常见的模式出现: 在任何地方地震发生在足够的频率进入文化记忆, 它们产生指定机构的解释框架, 包括事件在道德或宇宙范围内命令, 要求社区回应。该章节指出, 这项解释反射 坚持地球的震动 意思 某种东西..... 没有转移, 但逐步通过自然知识的进步而转变: 从亚里士多德的光学理论到里斯本启蒙危机二十世纪文学与艺术的世俗联盟。地震 , 此第四章 建议, 是所有自然现象中最生产性的之一研究人类社会如何面对秩序、稳定和理解。

16.1 引入 513
16.2 神话 513
16.2.1 日本 514
16.2.2 太平洋西北 516
16.2.3 美国 517
16.2.4 其他傳統 518
16.2.5 上一篇: 神话作为地震记忆 . 518
16.3 宗教 519
16.3.1 圣经 519
16.3.2 希腊 522
16.3.3 印度 527
16.3.4 伊斯兰教 529
16.3.5 美洲 531
16.3.6 Shinto 532
16.3.7 概述: 宗教与地震灾难的意义 534
16.4 哲学 538
16.4.1 亚里士多德 538
16.4.2 埃拉托斯特 538
16.4.3 卢塞蒂乌斯和普利尼 538
16.4.4 里斯本 地震作为哲学活动 . . 539
16.4.5 重建 540
16.5 文学 541
16.5.1 文学中的地震 541
16.5.2 1755 年里斯本地震和启蒙辩论 542
16.5.3 梅西娜 地震 1908 年 543
16.5.4 摘要: 文学与地震文化记忆 . 544
16.6 建筑 545
16.6.1 皮罗 • 利戈里奥 545
16.6.2 吉布里娜 545
16.7 艺术 548
16.7.1 摇滚艺术与错误的痕迹 . . . 548
16.7.2 绘画 549
16.7.3 科扎克收藏 550
16.7.4 阿米利亚收藏 551
16.8 音乐 552
16.9 电影化 552
16.10 结论 553
16.11 标签: 从纳马佐到罗斯威尔 554

审阅稿

16.1 引入

像其他几个章节一样 [1] 本书中, 本章讲述了另一个主题, 涉及到一个主要的压力。[2] 结构: 地震, 更具体地说, 它们与人类潜意识的关系。换句话说, 它研究了地震如何塑造我们的集体想象力, 并影响了神话、宗教、哲学和艺术。

在开始之前, 有用地澄清三个密切相关但分开的领域, 通过这些领域, 人类试图解释自然现象: 神话、宗教和哲学。這些領域並不嚴格分開; 正如明顯的那樣, 他們之間的邊界往往是色情的, 地震對人類思想的影响很少緊密地落入一個單一的類別。

神话 它指的是传统的叙事, 通过涉及超自然生物或宇宙力量的象征性故事来解释自然现象。在地震的背景下, 神话经常归因地球震动到动物、神学或地下力量的行为。神话首先在本章中被讨论, 因为它代表了人类解释的最早和最普遍层。

宗教 它提供了一个更有结构的信念和实践框架, 在那里地震可以被解释为神意、惩罚、警告或道德考验的表现, 在一个更广泛的神学秩序内。至关重要的是, 宗教传统经常根植或吸收过早的神话故事　两者之间的边界历史上是流体而不是固定。一个神话, 将地震归因于一个无休止的地下神可能会随着时间的推移, 成为一个正式的宗教体系与自己的仪式, 教会和经典文本。因此, 在本章中讨论的一些地震传统反对严格的分类为纯神话或纯粹宗教, 读者应该记住这一点。

哲学相反, 寻求合理的解释, 以理性和观察为基础。从古代开始, 哲学家们一直试图理解地震作为由基本原则统治的自然过程, 从而将解释从神话故事转向系统调查　最终导致现代地震学的轨道。

鉴于本章主题的异常宽度　扩展域它远远超出了结构工程文本的典型范围　Fig。16.1 提供一个主题地图, 以便在详细的覆盖开始之前引导读者。

16.2 神话

保罗 • 迪拉克 著名写作

> 很容易理解为什么原始人, 那些比我们现在更暴露于大自然的超级力量的人, 应该以恐惧和震动来定义这些力量。但如今, 当我们了解这么多自然过程时, 我们不需要这样的解决方案。
>
> Dirac, 1963 *"The Evolution of the Physicist's Picture of Nature"*

在有组织的宗教或哲学解释出现之前很久, 人类社会试图 **通过神话了解地震**. 這些神話並不包含在正式的神學系統, 而是屬於口頭傳統, 通過象徵性的故事解釋自然現象。在此类计

[1] 我对这个兴趣的遗传出现了, 当我参观吉贝琳娜被地震破坏的城市时。(§16.6.2) 但是, 他认为社会是如何从字面上 "覆盖了它。"

[2] 在结构分析的背景下,A **压力** 指示任何引发结构内的压力或变形的行为或影响。包含外部负载 (如重力、风、地震、热效应或被迫迁移) 环境或时间依赖的影响 (例如, 温度格拉迪安, 缩小或切割). 简而言之, 压力是任何物理原因能够在结构系统内产生内部力量、压力或紧张。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

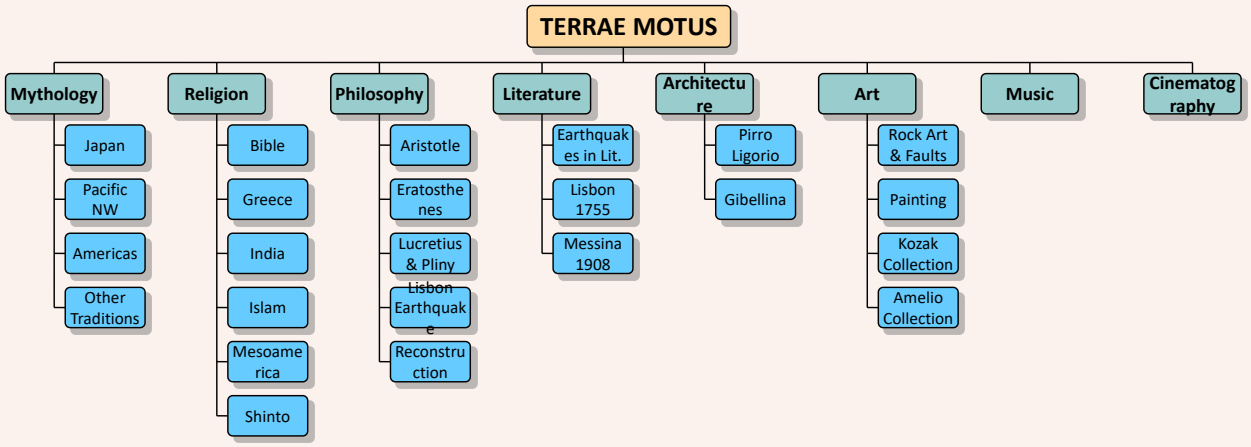


图 16.1: 章节主题结构

算中, 地震经常归因于动物或超自然生物的运动, 认为支座或居住在地球。这些解释反映了早期试图对突然, 暴力和不可理解的事件施加意义和因果性。

神话中的地震讲故事在广泛分离的文化中本身是显著的。从日本和中亚到北美和梅索美洲的太平洋西北部, 没有彼此接触的社会达到了结构上相似的解释框架: 一个巨大的生物在地球下浮动; 一个超自然的守护者在警惕中沉没。反对的宇宙力量暂时失去平衡。这种故事应该在世界各地独立出现, 就意味着人类共享的认知冲动　需要将地震灾难的可怕自愿性融入一个给机构、原因和最终意义的故事中。

16.2.1　日本

纳马佐的传统

在日本, 地震的普遍 - 也许不是唯一的 - 民俗解释是集中在一个巨大的地下捕鱼的存在。(**纳马斯**). 信念在几个世纪后逐渐从原住民的日本民族传统中发展出来, 部分受到中国宇宙学思想的影响。根据这一观点, 巨人纳马佐生活在海底水域下的哈西马神庙在希塔奇省 (伊巴拉基省). 一个被称为大 **哈萨克斯坦** (“基础 石头” 或 “Pivot 石头”) 被认为是把生物推下来, 阻止它移动。(图 16.2c).

然而, 这块石头本身却被认为不足以阻止纳马苏。制度依赖于卡什马神。(**阿克米卡苏奇 - 没有基米**), 一个与相关术语和战斗力量相关的上帝, 按下石头保持捕鱼不动 (图 16.2c). 每年在第十個月的期間 - 所謂的 **卡纳扎基**, or “没有上帝的月亮” 卡西马被认为要离开他的职位, 前往伊塞参加日本大神殿的主要神教的年度聚会。在他的缺席期间, 当地的神性 艾比斯 (或伊比佐) 被任命保持压力在石头上。如果卡西马忽略了他的义务, 或者如果埃比苏在上帝的缺席期间无法阻止生物, 那将是纳马佐在地下战斗, 造成地震。(图 16.2b). 被认为冲击的严重性直接符合捕鱼运动的大小。

纳马苏传统的文化和社会层面在伟大 Ansei Edo 地震 1855 年, 产生了著名的木块印刷体。**纳马斯** (“捕鱼图片,” 鱼。16.2a–16.2e), (Smits, 2006). 这些印刷品描绘了各种讲故事和撒蒂

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

里角色: 在城市中漫步, 而卡什马神是缺席的。(图 16.2b) 被上帝背叛或惩罚, 当他回来时。(图 16.2c) 在一个更双重的记录中, 主持经济再分配的场景, 在那里共同体从富裕商人的破坏中获益。(鱼。16.2a 和 16.2d) (Smits, 2006). 最后一个主题　纳马佐作为代理人 **孟加拉** ("世界修正") 它反映了一个流行的低潮, 在那里地震, 因为它的所有恐怖, 也被视为一个平衡力量, 破坏了压倒的社会层次。(图 16.2e).



(a) 埃多人民攻击纳马佐, 因为造成 1855 年地震



(b) 纳马佐在城市燃烧时震动



(c) Kashima 神性推翻地震 引起捕鱼



(d) 捕捉作为一个受欢迎的神性, 带来有利社会变革



(e) Kashima 或 Ebisu 與 基础 石頭

图 16.2: 例子 **纳马斯** 印刷描述地震负责的巨型鱼类 (Miyata and Takada, 1995)

纳马佐与地震之间的联系的确切起源仍然不确定。可能, 支持地球的巨型鱼的更广泛的想法是通过佛教传统从中国传递出来的。一些中国寺庙描绘了 Bodhisattva Guanyin 站在一条像日本纳马佐的大鱼顶上。虽然中国思想几乎影响了日本宇宙学, 但巨型捕鱼与地震之间的具体和持久的联系似乎在日本独特发展。(Ludwin and Smits, 2007). 捕鱼的选择本身是可想象的: 这个生物在底部旋转, 大多是看不见的, 并且能够突然发动强大的运动　对地下世界的隐藏力量的合适符号。

有趣的是, 有一些种族地震学证据表明, 捕鱼和其他底营养的鱼在地震前几个小时或几天表现出异常行为, 可能是对地下水化学、电磁场或微地震先驱的变化作出回应。日本观察者是否真正注意到这种行为异常, 并将其纳入神话中, 或者猫鱼是否纯粹作为象征性形象, 仍

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

然是一个开放的问题　但是, 纳马佐传统在其神话框架中保持实验观察的核心的可能性值得考虑。(Ludwin and Smits, 2007).

化学解释:Yin、Yang 和竞争框架

除了纳马佐传统之外, 日本流动的地震更有哲学的解释, 根源于中国自然哲学。和 **安西 · 肯蒙罗克** (《在安塞时代看到和听到的事物》1854) 通过宇宙学理论来解释地震 杨 (在) 和杨 (*yō*): 水 (纯粹的 Yin) 通常占主导地位地下帝国, 抑制火灾。(纯粹的杨) 但地震发生时, 这种平衡被打破, 地下火灾暂时超过水。对火山和地热现象的类似性令人震惊, 可能反映了一个直觉 - 无论是科学前 - 温度涉及地球冲击。

显而易见的是, 在 1855 年安塞地震后印刷的一些板块同时使用了这两个框架, 同时明确地描述了捕鱼的解释。"无形理论。" 这种民间神话和哲学宇宙学作为平行　有时是竞争的　解释框架的共同存在, 表明前科学文化不均匀可信: 它们争论、排序、有时明确排除自然原因的竞争账户。

纳马苏印刷与世界修正

1855 年的安塞 - 埃多 地震 , 估计在 7.0 - 7.1 大小, 击中埃多 (现代东京) 安塞第十個月的第二天 2、造成破坏性火灾,4000 至 10,000 人死亡 (Miyata and Takada, 1995; Smits, 2006; Abe, 2000). 在两天之内, 印刷机开始制作 **纳马斯** 布局, 构成其中一个最令人印象深刻的受欢迎灾难图像在前现代历史。

损害的地理分布给了事件特别的政治响应: 破坏对撒玛利亚居民和托库加瓦支持者不比例下降 **巴基斯坦**其权威已经被强制开放日本对外贸易的削弱, 在 1853 年至 1854 年的科莫多 • 佩里访问后, 一些更常见的地区逃脱了相对无情。Smits, 2006. 艺术家利用这个模糊的概念 **孟加拉** ("世界修正") 纳马佐不仅出现在破坏者身上, 而且是平衡代理人身上, 主持了从精英中将财富重新分配给那些从重建中获益的工匠和商人。由于东古瓦政府的直接批评受到严厉的惩罚, 这种政治评论被包围在象征主义、视觉算法和词语中。**纳马斯** 不仅仅是地震事件的描述, 而且丰富的文化文件反映了埃多末期的社会和政治紧张局势。(Wakamizu, 2003) (查看 图 16.2).

16.2.2　太平洋西北

在卡斯加迪亚海岸, 地震和津巴布韦被解释为神话讲述涉及强大的超自然生物, 他们的运动被认为会震动地球并发送巨大的波浪到海岸。在一个座位上方的地区 卡斯卡迪亚降落区 - 世界上最地震和海啸危险的特克顿定位之一 - 这些故事可以编码真正灾难性的地质事件的文化记忆, 包括 1700 年 1 月的伟大地震和津波以及荷洛森记录中的早期事件。

山羊和鲸鱼

该地区最著名的地震主题涉及一个战斗的相关术语鸟, 一个强大的天空精神与风暴和风暴相关联, 和鲸鱼, 海洋深处的生物。根據許多傳統, 他們的暴力相遇導致地面震動和海洋升起 - 這是一對正確相匹配的同地震津波簽名一個主要的卡斯加迪亞降落區崩潰。在华盛顿海岸

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的基莱乌特人中, 口头传统描述了一个伟大的战斗, 在那里地球震动和海岸洪水是不可分割的联系。类似的图像出现在加利福尼亚北部的尤鲁克人中, 表明动机扩展到更广泛的地区, 图 16.3b. 这些故事的持久性和地理范围, 以及它们与海岸基础的连续连接, 导致一些研究人员认为,Thunderbird-Whale 周期保留了历史前大地震的真实记忆。(Ludwin and Smits, 2007).

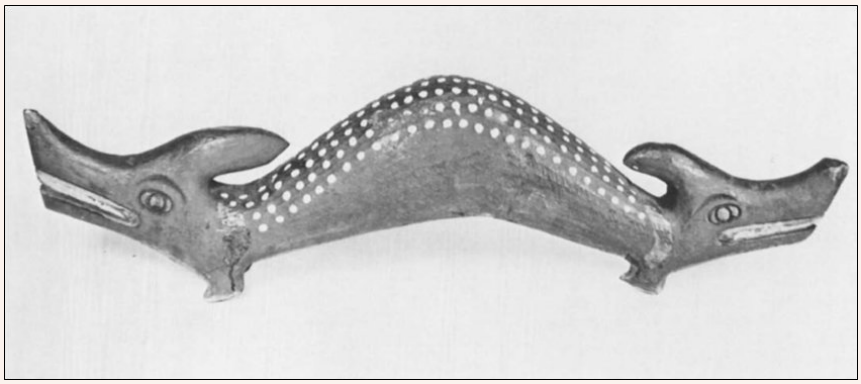
景观精神与地质记忆

普吉特声音地区的其他传统与地震和突然的景观转变有关, 并与超自然的蛇生物居住在某些地理特点。一个显著的例子是 “灵魂布尔德” 在西雅图的 Fauntleroy 附近, 传统上由当地原住民与一个超自然实体联系在一起。**雅各斯**描述在与大地震或大地震的物理影响密切相匹配的术语: 突然暴力冲击, 熟悉土地的转变和破坏性力量从地球内部释放。与地球故障相关的双头蛇在太平洋西北文化中普遍存在, 并在许多仪式背景下出现。*SXWAYXWEY* 海岸萨利什人民的面具。这个数字可以被理解为一个象征性的编码的德克顿双重性: 一个力量同时地下和表面, 连接隐藏的地球内部与上面的可见景观, 图 16.3a.

太平洋西北传统对现代地震学家特别感兴趣, 因为该地区的地质记录不寻常受到限制。1700 Cascadia 地震在地质战略文档 - 幽灵森林, 海啸沙层, 补贴沿海游行 - 以及日本历史记录的孤儿海啸。这个地质、历史和原住民的口头证据对一个灾难性的事件的相匹配已经恢复了信誉, 假设这些讲话保留了 1700 年事件的真实记忆, 以及以前的卡斯卡迪亚破裂的报道。(Ludwin and Smits, 2007) 提出关于口头传统能够在几个世纪的时间范围内作为地质信息的存储库的能力的深刻疑问。千年。



(a) 来自大陆英国哥伦比亚的 Sxwayxwey 面具。



(b) 吉尔吉斯特的仪式表演。

图 16.3: 太平洋西北海岸的仪式物品代表地震灵魂

16.2.3 美国

跨越梅索美洲和太平洋海岸 - 强烈地震和火山的地区太平洋火环东边的活动　地震神话与地质危险相密切的地理匹配。那些居住这些景点的人。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

梅索美洲与代码

在墨西哥中部和北部, 图像手稿被称为编码描绘地震, 在某些情况下记录事件的数量和日期, 暗示地震事件被整合到历史, 日历和神话系统。在阿塞拜疆的传统中, 日记 **奥林** ("运动" 或 "地震") 在 260 天仪式日历中占据了突出地位。**托纳波瓦利**现在的宇宙时代　第五个太阳被命名为 **奥林匹克** ("4 运动"), 预言到一个灾难性的地震结束。阿兹特克太阳石 (**太阳之城**) 这是哥伦比亚前文明最具标志性的物体之一, 它 **奥林** 它的组成中心 - 地震的宇宙中心性的视觉声明, 远远超越简单的人民解释, 相反代表一个复杂的哲学参与地震事件的重复和不可预测性。

16.2.4 其他傳統

虽然上一篇部分专注于已经文的区域传统, 但地震神话是一个真正全球性的现象, 而且一些额外的传统值得简要考虑。

在斯堪的纳维亚, 正如上面提到的那样, 挪威神话将地震归因于洛基 (Loki) 的冲击, 他被判处在地下挂着一只蛇在他的脸上喷出毒素。他的痛苦, 当他的妻子西金抓住了毒素在瓶子里时暂时放松, 当她转过身来空白时特别暴力地恢复, 导致上面的地板震动。神话因其道德框架而显著: 地震是上帝惩罚的后果, 侵犯和痛苦的外部化。

在印度, 它 **布拉哈纳** *Shatapatha Brahmana* 其他早期文本描述了地球, 如同在一个伟大的草坪背上休息。(**瓦拉哈**), 一个维斯努的阿瓦特, 而在各个地区的人民传统将地震归因于大象或世界相关术语的运动, 其背后地球平衡。因此, 南亚和东南亚的传统参与了广泛传播的 "土地支持动物" 上面讨论的动机。在印度哲学宇宙学中, 地震也通过镜头来解释。**卡尔玛** 宇宙时间: 某些地震事件与宇宙时代之间的过渡有关 (**尤格斯**) 借给他们类似于阿兹特克的以撒学意义 **奥林匹克**.

在中东, 古代梅索波塔米亚文本从苏美尔和巴比伦记录了地震事件, 并将其归因于特定的上帝的愤怒, 特别是风暴神。一些科学家认为, 沿着死海变革的旧城镇的破坏 - 一个流动地活跃的结构在莱文特 - 在圣经记录上反映了神性命令的毁灭, 包括耶利哥的倒塌和索多姆和戈莫拉的毁灭。虽然具体文本和特定地质事件之间的因果联系仍在争论中, 该地区的地震活动的更广泛模式以及其对宗教和神话传统的潜在影响仍然是持续的跨学科研究的主题。

16.2.5 上一篇: 神话作为地震记忆

在本章中调查的传统揭示了一个一致的全球模式: 人类文化位于地震活跃地区开发神话框架, 编码, 解释, 并给地震体验道德和社会意义。这些框架在其具体形象上有所不同　动物守护者、塞尔宾丁力量、宇宙不平衡、神圣的惩罚　但它们共享了共同的结构逻辑。他们将机构分配给地震 (它是由一个存在) 他们将该机构纳入监督或监护的讲话中。(通常被控制, 但有时逃避或罢工。) 他们经常将地震与更广泛的社会或宇宙更新过程联系起来。

這些傳統中有幾個似乎在其象徵性的框架旁邊帶著真正的實驗內容。太平洋西北的故事将地震与沿海基础相关联, 准确地匹配了卡斯卡迪亚大震事件的同地震津巴布韦签名。地震相关岩石艺术的地理分类在加利福尼亚和南加利文尼亚州的活跃缺陷上表明, 神话图像的位置在某些情况下是由观察到的地震现象决定。日本异常捕鱼行为的传统可能保留观察

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

动物先驱到地震事件的一个核心。这一点中，没有一个要求我们在现代意义上对这些传统进行科学理解；但它表明，对神话和口头传统的谨慎关注，在某些情况下，可以提供真正地质相关性的信息。

因此，地震神话的研究不仅仅是文化历史中的练习。它揭示了深深的人类需要感受到灾难，同时也表明神话讲故事和实验观察之间的界限往往比可能更可透明。

16.3 宗教

地震的宗教解释不同于神话的一个程度是制度的，而不是在形式上。神话在哪里提供讲故事根源于口头传统和象征性形象的解释，宗教包含这些在教义、文学和圣经的正式结构中进行的解释　提供地震在一个更大的神学顺序中设定固定位置，并产生规定的对地震灾难的反应。如《引入本章》观察到，两个域之间的边界历史上是流体而不是固定：神话传说经常被吸收为宗教系统，转化为这个过程，但从来没有完全被删除。在本节中研究的传统以特殊的清晰度描述这种动态。

经过以下研究的传统　犹太人　基督教、希腊、印度教、佛教、伊斯兰教、梅索美洲和日本 - 一种一致的模式出现。地震永远不会只是地质事件；它们总是是通信，无论是神圣的存在，神圣的愤怒，宇宙的不平衡，或埃斯卡托学的即将到来。具体的神学这种沟通的内容从传统到传统，但解释反射本身　坚持地球的震动意味着某件事，它是向人道的，需要一个答案..... 显然是普遍的。正是这反映了哲学传统，在 §16.4 将接受其第一次持续的批判性审查。

16.3.1 圣经

在犹太 - 基督教传统中，上帝经常通过自然表现自己。现象 因此，地震、风暴、火灾和洪水不只是被解释为：地质或气象现象，但作为神圣存在的可见表达，权力和意志。这个解释框架是连续的，但不同于上面调查的神话传统：在哪里神话将地震机构分配给地下生物或宇宙力量，圣经宗教将地震纳入一个神学約，審判和贖罪的故事 - 一個在那裡地球震動它与人类的道德状况不可分割。聖經的地震服務，根据背景，作为神学，作为奇迹介入的工具，或者作为暗号化记忆的真实地质灾难吸收到神圣的故事。

神学与神圣的存在

一个令人震惊的例子 地震 作为神学 [3] 发生在期间的在西奈山的启示：

[3] 从希腊人**神学** ($\theta\varepsilon o\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha$)，由由 **泰奥斯** ($\theta\varepsilon o\varsigma$)，“神，” 和**香奈儿** ($\varphi\alpha\iota\nu\varepsilon\iota\nu$)，“出现在” 或 “到做示范。” 这个术语称为直接、可感知的上帝内心的表现。创建的秩序 - 分离 **埃菲安** (**埃皮帕尼亚**, $\varepsilon\pi\iota\varphi\alpha\nu\varepsilon\iota\alpha$) 而更广泛的指定的神的出现或到来，并从 **启示** (**阿波克 ý 狗**, $\alpha\pi o\kappa\alpha\lambda\upsilon\psi\iota\varsigma$)，是指揭示或揭示隐藏的知识。在希伯来传统中，西奈神学属于一个精确的文学品种，其中火山、地震、天气现象集体地标志着对 *YHWH* (其它 Tetragrammaton，翻译 **约德** · *Hē-wāW - Hē*) 以色列的神。古典学术治疗仍然存在 Jeremias, 1965.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

> 西奈全山都被烟雾覆盖了, 因为耶和华在那里降下。火的形状。烟雾如同从炉子里抽出来的烟雾, 整个山脉都震惊了。(出生 19:18)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments



图 16.4: **以色列在西奈山** (1703) 由 Jan Luyken。伊斯兰教的描述地震神学, 作为一个整体的环境复兴, 在那里被追逐的, 不稳定的以高峰为主, 表明 “暴力冲击” 地球的回应神圣的存在。

这里的地震并不单独, 而是形成一个更大的火山综合体的一部分。和大气现象 火、烟、黑暗 通过这些神圣的存在做示范 (形象 16.4). 相似的地震和天气的迹象在 **法官的书**:

> 地震动, 天降落, 云也降水。山上, 从前的 主人.[a]
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments
>
> [a]法官 5:4。法国人翻译, 同样有趣的, 阅读: “**天空之地, 天空山上, 水上, 天下, 水下, 山上。主人**” (路易二世,1910 年). 希伯来语文献 “混合” (**天下之**) 带有流动或溶解的感觉, 建议神圣的景观的流动性或不稳定性在上帝面前方法 - 潜在的地震学兴趣的细节。

在两段中, 地球的震动作为上帝的宇宙认可。到来 - 景观本身回应上帝的存在。

地震 作为奇迹介入

新遗嘱 它包含了几次地震的事件伴随着决定性的宗教意义的时刻。在基督的时刻死亡, 马蒂奥记录了 “地球震动, 岩石分裂, 坟墓被打开” (马太福音 27:51-53) 一条路径, 从另一条路

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

线显著缺席。福音,其中地震事件作为宇宙批准的十字架。同样,复活的记录在马太福音 28:2 记录了“在那里那是大地震,耶和华的天使从天上降下来。”

一个更亲密的奇迹性地震干预事件发生在行动 16:19-40,當保羅 和西拉斯 被关押在菲律宾 继续祈祷和唱歌,尽管他们的链条 (图 16.5). 他们的忍耐是显著的奖励:

> 突然出现了一个伟大的地震,所以监狱的基础他们被打破了;然后,所有的门都打开了,每个人都有链条。未定。(行动 16:26)
>
> 1611 The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments



图 16.5: 使徒菲利普在希拉波利斯,弗里吉亚 (1685 年,Luyken).

在这里,地震 既不是作为神学或判断,而是作为解放　与受迫害的忠实者同上帝团结的种族主义表达。和模型符合更广泛的圣经神学,在自然灾害中,而不是自愿,它总是有目的:它服务、惩罚、交付或揭示。

圣经故事中的地质事件

一些圣经讲述似乎符合可识别的地质事件,关于古代宗教记忆能保留真正的地震的痕迹的问题灾难。约旦河的过渡 其次的破坏耶利哥的墙壁 其中最常见的讨论的例子。两起事件发生在大罢工 - 滑雪约旦谷错了,其中一个是地震上最活跃的结构。升起。强大的地震可能导致企业崩溃河流的垂直阿卢维亚山脉 - 由软马尔和阿鲁维亚滑板组成可能遭受地震衰退 - 暂时阻止流量 upstream 并允许河流下流足以过渡。什么借这个假设不寻常的重量是圣经计算的地理准确性约书亚 3:16 具体命名了这座城市。**亚当** (与现代相识达米亚) 如同水域的位置“pil 上”● 正確的網站由 地震 引发的银行崩溃已历史记录在多个包括 1267 年、1546 年、1906 年和最最近的 1927 年,当时大小为 6.2。地震阻止了河流超过二十一小时。重复的这个现象在同一地理位置给了一个显著的可行性关于 Joshua 的故事。此后,地震损害可能

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

有助于耶利哥的墙壁崩溃 (图 16.6). 耶利哥的毁灭它已经被列为十五世纪地震年纪录中的地震事件, 并且考古挖掘在 Tell es-Sultan 已揭示破坏层与 地震 损害一致 (Nur and Burgess, 2008).



图 16.6: 耶利哥之战 (c. 1560) 由 Virgil Solis (Kozac 收藏).

索多姆的毁灭 和 Gomorrah 相似之处已连接到一个大 地震 沿着相同的错误系统, 可能伴随着爆炸性天然气和比特币的释放 - 两者都经过丰富的记录《死海转型》和火山一样该地区的活动。此事已在前一章中提到中东神话传统 (§16.2.4).

更有猜测, 但广泛讨论的假设连接出境讲故事 与灾难性的爆发圣托里尼 (特拉) 最强烈的火山事件之一古代的世界, 大约是十七世纪或十六世纪 BCE. 假设, 由科学家在各种形式开发的包括 Nur and Burgess, 2008 提议与此相关的强烈地震和火山活动可能引发了东地中海地区环境障碍的灾难类似于圣经的痛苦　包括与此相关的延长黑暗。火山灰云 - 而地震干扰可能有助于临时水位的变化, 如《出口交叉》中所描述。在一个更受欢迎的相同假设的处理, Jacobovici and Cameron, 2006 点数以色列伊斯玛利亚博物馆的地理记录 并声称其它“红海” 聖經的帳號可以提到一個薄淡水池, 湖巴拉, 在苏伊士建造后干燥的频道 十九世纪, 水的水平可能可能迅速发生地震引发的变化。

无论这些地质解释是最终正确的还是不正确的, 它们都表明了更广泛和稳定现象: 地震活跃的社区景观编码他们的经历灾难性事件在讲故事中同时是历史、神学和神话。这些人之间的边界类别, 如引入本章所指出的, 很少固定。在这个意义上,The 聖經參與了同一基本動力, 在神話中被識別。上面调查的传统　人类的冲动, 使可怕的不可预测性地球在一个更大的讲故事框架内有意义。

16.3.2 希腊

在古希腊人中, 地震的解释占据了一个立场, 同时神话, 宗教, 和 - 如下部分将展览 - 初始哲学。这些领域之间的界限在希腊世界, 尤其是流体: 在崇拜背景下, 同样的神性可以被召唤。在神话中, 在一代人中受理性批评。思想家们 因此, 无法处理希腊对地震的宗教反应。在完全孤立的神话传统已经被调查; 而不是两者必须被理解为不断的解释传统的连续层。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Poseidon Enosichthon: 地球冲击者

地震归功于波西登 不是只是一个神话的方便, 但是活跃的宗教崇拜。波西多 • 博尔, 在他的多篇文章, 标题 **安东尼** ($\varepsilon\nu o\sigma\iota\chi\theta\omega\nu$)—"地球 Shaker" 和**安纳西加** ($\varepsilon\nu\nu o\sigma\iota\gamma\alpha\iota o\varsigma$), "谁打击了地面。" 这些流行病已经在霍默出现了 和哈西德, 证明了该协会的古代。在**伊利亚德**波西登在整个景观的运动被描述为不要留下关于他的地震性质的双重性质:

> 他沿着, 高森林和山脉在树底下震动。波西登的不朽脚在他移动时。(**伊利亚德**十三、18)
>
> Homer, 1924 The Iliad

雖然波西登在後期奧林匹克秩序主要被記得為神的神。海洋, 古老的传统层表明一个更古老和更广泛的角色。在他的前身份成为主要的海洋, 他似乎与地球有关。自己, 在十字架下的矿物世界, 和隐藏的力量能够暴力干扰。在这个旧的观念中, 地震和风暴等这是他的愤怒的表现。其域的逐步缩短到海洋, 而地震保留了他的名字, 反映了希腊宗教的分裂性质傳統: 新神學結構被放置在舊的上, 完全沒有把它们移开。

因此, 在希腊的地震不仅仅是指波西登而被解释。通过宗教实践来回应。受害者 被提供在大地震事件之后, 神的定位, 他的圣殿经常在沿海和地质活跃区域。地震之间的联系因此, 不稳定和神圣的存在在崇拜中被制度化, 而不仅仅是讲述。在神话中。

恩塞拉多斯和巨型大理石

波西登的传统, 其中一个神的活跃运动导致地球在希腊的宗教思想中, 与结构上不同的思维相结合。根源于巨星神话的故事　奥林匹克神与地球生长的巨人之间的伟大战争。在这个传统, 地震不是由一个神的过渡而引起的, 而是由被囚禁的战斗一个失败的宇宙敌人。

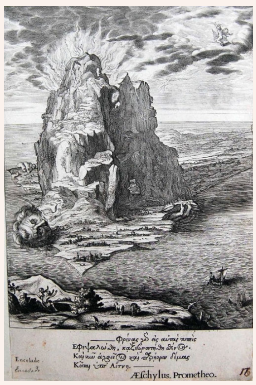
恩塞拉德 ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\alpha\delta o\varsigma$) 巨人中最强大的人和雅典的传统对手 在巨型大屋里, 被女神的相关术语子击落并埋在下面。西西里岛, 或者在维吉尔和斯塔蒂乌斯的更准确的传统中, 山底下 Etna 自己。埃特纳火山的火灾是被认为是恩塞拉多斯的呼吸; 它的震惊, 他的转变的结果。受伤在山底下。维吉尔给了神话最受欢迎的拉丁语表达:

> Fama est Enceladum semustum fulmine corpus
> 阿特纳姆 (Aetnam) - Insentimque Insuper
> fl fl 的 fl , fl 的 。
> 以色列人, 不如是相同的。
> 西雅图和西雅圖的火焰。
>
> 故事讲述的是, 恩塞拉多斯, 他的身体闪发光,
> 被拘留在这一切的质量, 并在他
> 巨大的埃特娜从她的火炉中呼吸火焰;
> 當他轉身時,
> 西西里的所有都震动和月亮, 天空被烟雾淹没。
>
> Vergilius Maro, 2008 The Aeneid

恩塞拉多斯传统的神学逻辑在一个关键尊重方面有所不同。由波西多的。波西登是主权的神, 其愤怒或运动产生地震效应作为其力量的副产物, 恩塞拉多斯一名囚犯 - 主要地球力量的代表 (出生于盖亚乌兰的血) 奥林匹克秩序被打败和压迫。他的永久存在在地下, 不是神的力量的迹象。神圣胜利的象征：地震是失败者最后的震荡预宇宙秩序, 证明奥林匹克人已经屈服但不完全消灭了地球本身内在的暴力。这篇关于地震 作为压抑的原始力量在一个

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

强制的宇宙秩序在波西登传统中没有平行，而且以神话形式预测蛇失败的结构逻辑探讨的故事 §16.3.2.



(a) 被埋于海中的恩克拉多斯，腹上承托西西里岛和埃特纳火山



(b) 凡尔赛宫 Gaspar Mercy 创作的鎏金青铜恩克拉多斯

图 16.7: 恩塞拉多斯的神话

安塞拉多斯的文化持久性在地震中没有平行在本章中查询的数字。他的名字不只是在学到的中生存。提及或诗歌形象: 它进入希腊语作为常见的语言一般的 noun 为 地震—**以色列** ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\alpha\delta o\varsigma$) 而且它仍然到目前为止, 在现代希腊 [4] 这不是一个生存方式的地方。名称或恒星: 它是神话成为语言。每個希腊语讲者报告一个地震的呼吁, 无论是有意识还是没有, 被征服的宇宙敌人在西西里监狱下 - 地震解释深深地融入文化, 它超越了神学、崇拜、帝国, 以及它产生的文明, 坚持活着。用语言说话超过两千年半。观察该语句归因于狄拉克，见以下题词：§16.2• 现代自然过程的理解使神话的解释过时 - 遇到其最突出反例不是在任何神学论点, 而是在词典中: 现代希腊词为地震是一个神话。

这个数字仍然在其他记录中超越古代世界的强大。路易斯, 华沙 第十四章 奥林匹克神的系统性部署皇家主权的象征包括一个纪念碑的源泉安德烈 - The **波斯基特 · 德尔 · 恩克 ´ 拉德**设计的 C。第 1675 章 和由康布雷的加斯帕尔 • 梅西以鎏金青铜制作 (图 16.7b). 源头描绘了巨人半埋在西西里的岩石下, 水从他的嘴里喷出来。火山火焰的地点 维吉利亚图像的视觉转移正式花园的水力词典。選擇並不是偶然的: 安塞拉多斯在太阳国王的镜子前, 在巴洛克记录, 同样的宇宙逻辑埋在埃特纳之下。

神圣地理与地震景观

希腊宗教实践的一个重复的特点是故意坐着圣殿。在地球表现出不寻常或不可思议的行为的地方: 热流, 气体排放、土壤裂缝和持久地震活动的区域。这样的地点不只是被视为地质上有趣的, 但**激情** 地方, 在那裡上帝不尋常接近世界的表面。

[4] 以色列文学将这个名字与字符 **天使** $\hat{o}$ ($E\gamma\kappa\varepsilon\lambda\varepsilon\dot{\upsilon}\omega$), “要强迫” 或 “听取负担” 一個保留的倫理學巨人的战斗性格, 即使名字从神话中传来通用演讲。

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

最受欢迎的例子是阿波罗圣殿。在德尔菲, 图 16.8. 现在, 我们已经确定了德尔菲克奥拉克尔正处于一个活跃的地震错误之上, 而先知灵感来自 **皮蒂亚** 可以是由物质支持的。水碳蒸汽的吸入　主要是乙烯　通过裂缝在底部 Limestone (Broad, 2006; De Boer and Sanders, 2005). 神圣的网站因此, 其宗教权威的一部分归功于地质条件的希腊人它被视为神圣的近距离。阿波罗应该选择了这个破碎的, 蒸汽发出地, 因为他的预言座位在希腊的宗教想象中, 完全一致: 上帝通过地球本身的不稳定性说话。它是值得注意的是, 这篇关于德尔菲的权威的地质阅读　自然化希腊人所经历的神性　预测哲学项目自然与超自然因果的分离, 在 §16.4.

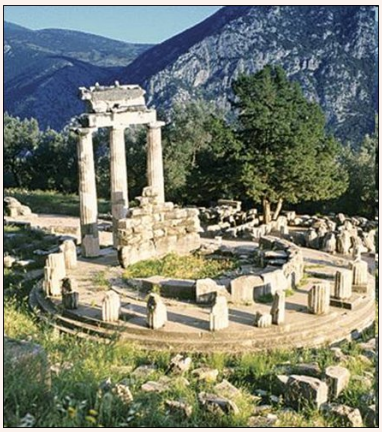


图 16.8: 德尔菲的托洛斯, 在公元前 380 年至 360 年间建造的圆形寺庙。雅典娜普罗纳亚圣殿在德尔菲, 希腊。

这个地形的神圣地点位于地震结构上方扩展到德尔菲之外它已被发现在埃及亚纳多利亚和其他几个主要圣殿中。希腊世界 (Piccardi, 2007). 宗教意义的相似之处和这些地点的地质活动几乎不是偶然: 社区在某个特定地点经历过重复的地震障碍, 自然会把这种干扰解释为神圣存在的证据, 并将及时正式化。这是通过建造圣殿的解释。神圣的地理在这个意义上, 希腊世界是由地球本身部分写的。

地震的 AD 第 60 章 神圣的转变讲话

地震的 AD 60 提供其中一个最指示一个真正的地质事件如何被吸收到, 以及随后改造的, 宗教讲话。此时此刻的地震危机西安纳托利亚的广阔弓, 其效应在两方面都可追踪。物理记录和两个主要场所的宗教传统: 希拉波利 和科洛斯。在两种情况下, 什么是地质记录表明, 一场灾难性的土地崩溃随后被描述作为神奇的干预 (Piccardi, 2007). 兩個網站都顯示了相同的基本动态: 地质事件被吸收为宗教记忆, 转化为没有消除。

在 **希拉波利**, 有强大的考古和地质证明了主要神圣预约的故意定位, 直接在一个活跃的错误痕迹, 似乎从阿波罗寺院延伸 到大热春。在希腊定居者到达之前, 该地点被视为与地下世界的沟通之地多大可能因其本地化气体排放和水热活动相关与错误区。這些地下勢力, 在希臘宗教中解釋的想象力如天神的呼吸, 延迟网站其神圣的性格很久以前, 它获得了它的希腊主义和后来基督教。协会。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使徒菲利普 有人说, 他们到达了希拉波利斯。周围 AD 70–80. 他的到来在传统中被两个非凡的现象: 龙的出现 伴随一个强烈的地震和光明, 以及在城市中间突然开启一个巨大的荒野, 七千人和蛇女埃希德娜一起吞下。现在有强迫性的证据表明, 这个讲话保留了记忆的 AD 60 地震, 看起来已经打开了一个长的表面裂缝。主要道路的路径, 正是城市的 “阿比斯” 传统的。这里的蛇形象参与了下面讨论的更广泛的象征性语法。(§16.3.2).

在 **科洛斯**, 宗教编码的平行过程是可分辨。傳統記錄, 異教徒試圖摧毀當地基督徒神圣的, 用一个水道去淹没它。由牧师邀请档案, 天使迈克尔 出现在那里, 与他的员工一起打石头, 在地上开了一块碎片。水道从圣殿中流出, 图 16.9. 新安排那個在這片碎片周圍生長的, 就取了它的名字 Chonae。($\chi\omega\nu\alpha\iota$, “喷泉”) 直接从地质特征。证据强烈表明, 这个奇迹般的破裂实际上是一种与 AD 60 地震, 以及传统中描述的排水重组反映真正的地震引发的景观变化 (Piccardi, 2007). 神学然而, 转变是完整的: 什么地质产生的, 宗教讲话因天使的干预而被归功。



图 16.9: 18 世纪的俄罗斯图标描绘了在 Chonae 的迈克尔大天使奇迹。

蛇、龙和地震力量的象征性语言

蛇和龙在希拉波利和科洛萨的传统中的出现不是偶然的。正如我们讨论的 §16.2.4 和 §16.2.3, 蛇的形象是最普遍和持久的象征性之一。各文化的地震和切托尼力量的车辆。在希腊宗教传统上, 这个协会特别丰富发展。Python 的 阿波罗在德尔菲, 埃希德纳被杀 希拉波利和龙由哥洛萨亚的天使迈克尔破碎, 所有人都参加了共同象征性的活动。语法: 一个强大的地下塞尔宾丁力量, 与地质不稳定有关古老的宗教命令, 被新神圣或使徒权威克服。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这个模式　神或圣人击败的蛇, 超越一个地震活跃的人。网站 - 提出, 安大略的基督教化不只是取代了老年人希腊的宗教解释地震, 但吸收和翻译它。和海拉波利斯的龙和德尔菲的皮顿属于同一个象征性家庭; 差异在于, 这是阿波罗还是使徒菲利普谁站在胜利超越阿比斯。在两种情况下, 宗教讲话编码一个社区的会面。以不稳定的、危险的土地, 并通过声明来解决这个相遇。神的力量超越克托尼的力量。相同的象征性语法将再次出现在印度教人物 Shesha (§16.3.3) 佛教的龙莫卡林达 (§16.3.3), 确认蛇的跨文化接口作为一个地震形态。

16.3.3　印度

印度地下大陆, 位于印度和欧亚特克托尼克的接近平板, 是世界上最地震活跃的地区之一。因此, 它令人惊讶的是, 两大宗教传统的起源　印度教佛教 - 开发精致的神学框架, 以解释地球的震动, 与圣经和希臘傳統被調查, 同時在其自己的根源宇宙学家。

印度教

印度宇宙传统提供了最精心开发的计算之一。地震现象与神圣秩序之间的关系。如前所述, 关于神话的部分 (§16.2.4) 地面被定义为多种如同在大象上休息, 自己站立在世界一流中, 其动作造成地震。和 **布拉哈纳** *Shatapatha Brahmana* 提供更神学的以地为主, 以地定义为主。**瓦拉哈**, 其它维斯努的阿瓦塔尔 谁拯救了它从原始水域宇宙时代的开始。在这个框架下, 地震不稳定不仅仅是物理现象, 但神学现象: 它反映了上帝的不断努力。权力保持秩序, 反对宇宙分裂的不断存在的威胁。

这种以撒学的尺寸在教义中最完全构成。**尤格斯**, 四个连续的宇宙时代描述在**清洁** 和 The **马哈巴拉塔**. 每一个年龄因道德和物理秩序的逐步恶化而特征。年龄之间的过渡是由灾难性的自然事件标志着　雨水、火灾和他们中间发生地震。如今的时代, **加利尤加**, 是被理解为最大障碍的时期, 其中地震障碍在宇宙解体的近期迹象 (**布拉格**). 和与阿兹特克的结构平行 **奥林匹克** 其它预言的终端地震, 注意到在 §16.2.3 进一步发展在 §16.3.5 这是令人震惊的: 在广泛分离的传统中, 地震 是以色列结论的工具。

印度西斯主义宇宙学的蛇形象是 **谢沙** (也被称为 **安娜**, 无限的) 宇宙大龙在其火箭 Vishnu 在世界周期之间的间隔中分裂。谢沙被理解要支持大地本身, 而且它是它的震动　它的叶子, 在某些地方算 - 这会导致地面震动。因此, 图像在一个单一中编码神话的形象, 以及在整个章节中相遇的塞尔宾丁形状跨文化地震形态 (看见 §16.3.2) 关于宇宙逻辑永久停止的土地, 超越分裂。图 16.10a 维斯努在宇宙蛇谢沙上跳舞。达沙瓦塔拉寺庙, 德奥加尔, 马迪亚普拉德斯, 印度,c. 500 CE (吉普赛期限). 地下雪沙的岩石被理解是导致地震时蛇吹起。石头救援 **在现场**.

在这个框架内, 个人地震事件可以通过镜头来解释。由 **卡尔玛**道德法因和效应, 如其后果。集体人性侵犯。这个解释反射, 古老的起源, 持久以现代时代的活力为主。当一个灾难性的地震撞击时比哈尔 印度东北地区 1 月 15 日 1934 年: 大约 2 万人死亡 甘地马哈特玛 公开被告知是神的刑罚, 因为无触的罪。　系统地排除低层社区完全社会和宗教參與。声明引发了即时和庆祝的拒绝拉比德拉纳特 • 塔戈尔 [5] 有人说, 自然灾害是由一个社会罪是道德上不负

[5]拉比德拉纳特 • 塔戈尔 (1861–1941), 孟加拉诗人、哲学家和作曲家,1913 年获得诺贝尔文学奖第一位非欧洲作家接收它 - 以及国家幽灵的作者印度和孟加拉国。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

责任的, 智力上退缩的, 不值得领导。甘地的雕像 (Paranjape, 2011). 交换历史上很重要超越其即时背景: 它在现代印度记录中重复了相同的内容。地震灾难的神学和理性解释之间的对抗它在近两世纪之前, 在欧洲思想的后果里斯本 地震 of 1755 (§16.5.2).[6]

交换是指向加入迪拉克表达的信任辞职。页面 513 在《Epigraph to §16.2,[7] 谁认为现代自然过程的理解使神学解释自然灾难已过时。1934 年 Bihar 地震提出了另一种建议。

佛教

佛教傳統 提供一个单独但补充的报告地震, 其中一个根在宇宙学的埃斯卡托利比在生物学的佛陀 自己。和 **卡通**, 其它佛教圣经中最早的生存体, 记录地震伴随了每一个佛陀地球存在的八大时刻: 他的概念、他的出生。他的世俗生活的放弃, 在 Bodhi 下获得启示。树, 他在萨尔纳特的第一次讲道, 他的公告他的沉默死亡, 他进入终点 **帕里尼尔瓦纳**, 和他的遗传的分布。在这个框架中, 地震不是一个工具神圣的惩罚, 但宇宙的批准　地球本身作证至高精神意义的事件, 就像地球在十字架上震惊一样。在马太福音中复活。(§16.3.1).

这个地震神学中最视觉地捕捉的体现之一是由 **莫卡林达**, 龙之王从地下升起为了拯救冥想的佛陀, 从暴风雨中脱离他的散布。图像集中在一个单一的组成中, 章节的主要动机: 蛇地下力量, 地球作为转型力量的座位, 以及关系那种力量和最高的精神成就之间。图 16.10b 展示佛陀被龙王穆卡林达 (Mucalinda), 安哥尔地区, 柬埔寨 12 世紀 CE (哈姆雷特, 迟到巴雅恩风格). 蛇从地下升起保护冥想佛陀, 体现佛教对地下权力的观念既是危险的, 而且在正确理解的情况下也是保护性的。



(a) **安东尼亚 · 维什努**维斯努 (Vishnu) 在宇宙蛇谢沙 (Shesha) 上跳舞。



(b) 佛陀是由龙王穆卡林达 (Mucalinda) 的避难所。

图 16.10: 宇宙蛇作为印度教和佛教的稳定和保护力量伊康格拉底

[6]里斯本 地震 1755 (§16.5.2) 引发在欧洲结构上相同的辩论照明, 与伏尔泰 罗塞奥 占据与塔戈尔和甘地相似的角色, 并与莱布尼兹 教義的 **乐观主义**　这就是 “其它所有可能的世界中最好的”　作为攻击下的神学地位。平行兩個事件之間, 分為兩個世紀和兩個大陸仍然相同在其基本逻辑中, 进一步讨论 §16.5.2.

[7]“如今, 当我们理解这么多自然过程时, 我们不需要这样的解决方案。” (Dirac, 1963). 比哈尔 地震 1934 年提出, 自然灾害在神学意义上的解释的冲动是比迪拉克的评论更持久。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

和 **尼加利亚尼加里亚** 列出其原因地震在一个显著系统的方式, 区分地震事件造成的由风和水在地上施行, 由大人的精神力量造成的。阿斯塞特人, 以及伴随佛陀的生命事件的人。这三党分类有很大的兴趣: 它代表了早期试图区分自然、人性和超越性地震现象的原因之间, 预测到其结构　如果不是在其内容中　后来的哲学努力, 以便自然分开。超自然因果, 被研究在 §16.4.

佛教从印度地下大陆传播到中亚、中国、西藏和日本, 其地震神学被吸收到, 并由宇宙学改造。接收文化的框架。在日本, 如上所述 §16.2.1, 佛教对支持地球的大鱼的想法似乎有助于發展的 The **纳马斯** 傳統, 顯示透明度的宗教界限, 当传统在地理和文化上相互相遇时边界。在西藏, 地震被纳入**瓦格里亚纳** 探险宇宙学的框架, 在那里他们可以标志着强大的地下精神的活动 (**纳加斯**) 需要仪式礼服。和 **龙**　一種連結的 Serpentine 與水、地下世界和地震混乱　这就是蛇的长目录。整個章節中所遇到的數字, 是隱藏部隊的象徵性車輛。從地球上 (看也 §16.3.2).

16.3.4　伊斯兰教

在伊斯兰传统中, 地震占据了重大地位神学重量, 在《古兰经》中出现 兩者都是神的力量的跡象。如今的世界, 以及作为埃斯卡托利亚冲击的继承人将开启最后一天。此双字符—地震 如现代神圣的标志, 作为宇宙终结　给了伊斯兰神学的地震事件的范围和强度, 邀请与圣经和印度教的比较上一篇: 研究的传统 (§16.3.1, §16.3.3) 虽然留下根在自己的独特的神学场所。

第 99 章: 阿尔扎拉

《古兰经》中最集中和神学上最明确的地震处理是 Surah99。权利 **阿尔扎拉** ("地震的").[8] 它是最短的《古兰经》中有八个经文, 其中最常见的经文是《圣经》。以色列人被指控。章节开启了一个宇宙地震冲击的愿景:

> **比斯米** *L¯* **里** *R-raḥm¯ R-Rḥīm*
> 以真主的名义, 至仁至慈。
>
> 1. **伊德 ¯里 · 阿里** *ḍ* **吉尔吉斯** *¯ā*
> 當地球與其最終 地震 衝擊時,
> 2. **阿尔及利亚人** *ḍ* **阿特克** *¯ā*
> 地上必定有它的重量。
> 3. **可**-*q¯* **拉** · *L-IN¯* **娜** *MĀ* **是** *ā*
> 男人说: "到底发生了什么事?"
> 4. *Yawma'idhin* **您** *ḥ* **阿迪特 · 阿赫布 ¯向** *ā*
> 那日, 他將報導他的消息。
> 5. **安娜拉巴卡** *AwḥĀ* **是** *ā*

[8] 阿拉伯语标题 **阿尔扎拉** 源于 The 四角形根 **饰** *Z-L*, 携带暴力, 重复的震撼 - 一 onomatopoeic 形成, 其非常声音激发它所描述的现象。相同的根源是字母 **萨尔扎拉** 和新娘 **吉尔**两者都用在《古兰经》称为地震或埃斯卡托学性发作。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



图 16.11: 苏拉 99:1 - 8 的加利格拉菲式播放 (阿尔扎拉)

因为你的主启发了它。

6. *Yawma'idhin* 是的 *ṣN-N¯* 斯特 ¯丹 · 利 · 尤拉夫 *Am¯* 拉哈姆
那日, 人們將分散的群體行走, 以便他們的行為被顯示。
7. 法人是 ` 尔 · 米特克 ¯拉 · 达拉丁 · 哈伊兰 · 贾拉
因此, 谁使一个原子的重量是好的, 他会看到它。
8. 华人是 ` 尔 · 米特克 ¯拉 · 达拉丁 *(Ala Dharratin) Sharran Yarah*
谁能使一个原子的重量恶, 就看见了。

Abdel Haleem, 2004 The Qur'an: A New Translation
口号 (99:1–8) 阿尔 • 扎尔萨拉 (地震的)

这里的地震不仅仅是一个物理事件, 而且是宇宙的工具。揭露: 地球本身, 被召唤到其基础上, 释放了它所拥有的秘密。所有人事都是在神的判断之光下显而易见的。和与印度教的结构相匹配 布拉格 和 The 阿塞拜疆的预言 奥林匹克 在这个方面是令人震惊的: 在太空和时间上广泛分离的传统中, 地震数字如埃斯卡托学结论和道德计算的机制 (看见 §16.3.7).

地震作为神圣的迹象

除了它们的象征性功能之外, 地震在《古兰经》和《圣经》中出现。哈迪斯 文学 - 收集的言语和行为报告從先知 [9]—as 阿提 ("标志"[10]) 神的力量和在行动中的存在创建命令。在这种能力中, 它们与神学地震相似。关于圣经传统 (§16.3.1) 它们不是自愿的自然事件。但有目的

[9]和 哈迪斯 ("报告" 或 "讲故事") 构成, 与《古兰经》一起, 是伊斯兰法和神学的主要规范来源。和大多数权威集合是 萨哈伊恩 ("兩個聲音集合") 阿尔 • 布哈里 穆斯林伊本阿尔哈贾。

[10]阿拉伯语 *āyāt* 多元的 *āya* 二、称之为《古兰经》和《神的启示》在创造者中显而易见。命令。这个词与希伯来语相匹配。*ot*, "标志," 反映了常见的种子根 *ʾ-w-t*.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的通信从上帝到人类。使者穆罕默德 已在多个 **哈迪斯** 要有地震被解释为神圣的告白, 伊斯兰法则扩展了这一点。原则系统: 地震是上帝引导的手段之一。人類對其道德狀態的關注。

这篇阅读产生了一个具体的 liturgical 回应。跟随一个大 地震, 它在许多穆斯林社区中, 人们常见的**沙拉 · 阿尔 · 库苏夫**,[11] 特别的祈祷和刑罚　在其逻辑上类似于对地震事件的牺牲性反应古希腊宗教实践 (§16.3.2) 关于投票报价日本发生大地震后 (§16.2.1).

16.3.5 美洲

梅索美洲地震的宗教解释 不同上面被调查的人们在一个基本的尊重下: 古代世界其他任何地方都没有地震灾难如此全面和系统地融入正式的宗教思想的结构。在阿塞拜疆 传统上, 地震是不只是神的失望的迹象或神权力的神学表现; 它是世界本身的宇宙命运, 内在于世界的中心。仪式日历和编码在文明最神圣的物品。

第五个太阳和纳希 • 奥林

阿塞拜疆宇宙学 假设现在的世界是第五个宇宙时代的继承, 每一个由不同的太阳主持, 每个终止另一个灾难: 洪水、风、火雨和黑暗摧毁了四个之前的世界。现在的时代, 第五个太阳, 被命名**奥林匹克** ("4 运动" 或 "四 地震") 和被预言要结束, 不是洪水或火灾, 而是灾难。地震.[12] 这个预言不是阿兹特克宗教思想的周边单元但它的宇宙中心: 当前的世界生活在一个永久性地震定义下, 仪式的功能 - 包括人类牺牲　是部分的通过营养太阳和维持宇宙秩序来阻止终端通风。

和 **奥林** 格里夫 它被置于中心的**太阳之城** (所谓的 "阿兹特克太阳石"), 一个哥伦比亚前文明最具标志性的物品, 现在在国立博物馆人类学 在墨西哥城。其中心位置是地震的宇宙原始性视觉声明: 所有时间, 所有仪式, 整个历史都从世界的地震命运中向外发光。

> 纳希 • 奥林 (Nahui Ollin), 四-地震, 将是现在存在的这个太阳的名字。[…] 将有地震, 将有饥饿, 然后我们的结局。会来。(**阿纳尔斯 · 德 · 库瓦希特兰**)
>
> León-Portilla, 1963 Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind

仪式回应和灾难的消失

地震预言的集成在阿兹特克宗教实践有深度仪式的后果 如果地震终端可以通过维持宇宙命令, 然后仪式失败　无情、忽视牺牲、道德违规　可以加速它。因此, 每個實際的 地震 都可能是一個先例。最后的冲击, 是当今世界时代和需要仪式维护。地震事件在阿兹特克引发紧急情况宗教想象力超越了圣经或伊斯兰教中的任何东西。傳統: 一個地震不僅是一種神聖的警告, 而且是一個潛在的回報。世界的终结。

[11] 阿拉伯语 *ṣ* **阿尔 · 库苏夫**字面上 "祈祷的阴影," 通过法律类似的扩展 (**基亚斯**) 覆盖地震和其他非凡的自然事件。祈祷是由两个单位组成的。(**拉克**) 经过漫长的讲话, 在教會中進行, 並以宣告的傳道結束。(**胡特巴**).

[12] 纳哈特尔 期限 **奥林** 指示运动, 以延伸的地震; 它是二十天中十七个迹象, **托纳波瓦利**, 第 260 天仪式日历预定的数字 **纳吉** ("四") 确定具体的日历位置那日, 今世的時代是創造的, 並將其定為結束。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

日信号 **奥林** 在仪式日历中 是相应处理与特殊 重力. 出生在一个 **奥林** 日是它被认为是由与地震力量的特殊关系标记, 以及**奥林** 那一天本身被认为是对某些仪式有益的, 也是不可思议的。对于其他人。因此, 日历和地质不只是相似的关系。但结构性融合: 时间本身是围绕地震的节奏组织的灾难。

与神话传统的连续性

如上所述在 §16.2.3，该 **奥林** 格里夫和概念**奥林匹克** 它不仅在阿塞拜疆的宗教背景中出现, 而且在多种梅索美洲文化, 表明地震现象的整合宇宙和日历思维是区域传统的显著古代而不是具体的阿兹特克创新。阿塞拜疆宗教制度代表最全面的表达, 更广泛的梅索美洲对地震的参与从日历录制到神话讲故事的形式神学教义和仪式实践。

在此方面, 梅索美洲案例站在一个流行的频谱的极端结局。通过本章中所研究的所有传统。聖經傳統在哪裡地震被视为偶尔的神圣干预, 在另一个稳定的范围内。创造了秩序, 在伊斯兰传统将其纳入一个以色列的统治范围内。仍然是未来的和连续的, 阿兹特克传统使终端地震它的整个宇宙和仪式系统的结构性前提。世界不只是危险结束在地震; 它是宪法目的, 以便这样做, 并且整个宗教生活是以这种信心为回应而组织的。



图 16.12: 和 **太阳之城** (阿兹特克太阳石) 与 The **奥林** 格里夫在其中心。

16.3.6 Shinto

日本地震与宗教思想之间的关系 是非常见的文档, 延伸近一千年的文学、艺术和仪式证据。正如我们讨论的 §16.2.1 流行神话传统以巨型地下捕鱼为中心 **纳马斯** 提供的主导的民间解释地震事件在前现代日本。需要什么强调這是這個神話傳統被吸收到正式的程度。Shinto 的结构 宗教实践 - 描述与特殊流体 神话与宗教之间的界限的清晰度在介绍中确定到这个章节。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

卡西马与抵抗的神学

Shinto 地震传统的神学核心是**阿克米卡苏奇 - 没有基米**, 在卡西马的圣地神秘 伊巴拉基省他的角色是神圣的阻碍者。**纳马斯**. 在西安的实践中, 神话讲故事成为活跃的仪式关系的基础社区及其保护神性: 圣殿日历明确包括仪式以神圣的捕鱼限制为导向, 行徒们前往卡西马寻求地震保护 (图 16.13). 此图的顶部部分显示了石头在卡西马神庙里, 在神 Takemikazuchi 下方正在挖掘巨型捕鱼 Ō 纳马佐与他的剑。Ō 纳马佐被称为居住在日本岛屿下当加重时, 是其许多地震的原因。Takemikazuchi 阻止捕鱼通过使用 Keystone。地震灾难的威胁因此需要不断的仪式维护 - 结构上与阿兹特克牺牲派对相似端口 地震 (§16.3.5).

和 **卡纳扎基**, 月亮的第十個月, 在那裡 Kashima 去伊斯的神教大集会, 被视为一个时期增加地震的脆弱性, 通过强烈的祷告、礼物和清洁仪式。因此, 仪式日历在节奏周围部分安排。地震危险。



图 16.13: 卡什马神庙 (伊巴拉基省), 座位**阿克米卡苏奇 - 没有基米** 首頁 〉 外文書 〉 西洋文學 〉 Shinto Seismic 保护仪式在现代日本。

地震, 清洁和更新

和 **纳马斯** 1855 年, 在 §16.2.1 作为流行的文件, 值得在这里重新考虑为宗教。许多人明确塔利斯曼 在功能中: 显示一个图像泰克米卡佐奇 捕鱼的定义被理解为提供保护, 防止进一步的地震灾难, 将印刷方形放在内部西因托实践的内在奉献领域 (图 16.14). 和**纳马斯** 自己, 作为一个极大而可怕的力量的存在, 是**我们** [13]● 不只有一個要被壓迫的生物, 而是一個要受益的力量。社区的宗教经济。

这是在概念中最深的表达。**孟加拉** ("世界修正"). 在 Shinto 框架内, 社会腐败和仪式忽视作为污染的形式积累 (**可爱**) • 灾难性事件 - 包括地震 - 可以被理解为暴力清洁, 痛苦需要恢

[13]术语 **我们** 提到神圣的存在或在 Shinto 世界观中引发自然现象的力量 一切拥有一个不寻常的力量, 激发恐惧, 无论是善良还是可怕, 如所述。科学家 Motoori Norinaga (1730–1801).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

复平衡 (Smits, 2006). 这种灾难的神学更新发现了在本章中调查的传统中的结构平行: 圣经审判和赎罪 (§16.3.1) 印度教布拉格 (§16.3.3) 阿塞拜疆的愿景连续世界日 (§16.3.5). 经过传统, 地震它很少只是破坏性的: 它也是一个新世界的暴力先例。



图 16.14: 一个塔利斯曼 纳马斯 印刷描述阿克米卡苏奇 - 没有基米 放下捕鱼。

Shinto, 佛教, 和 Seismic Syncretism

没有 Shinto 地震传统的记录将是完整的, 没有承认佛教的影响力。在日本, 辛托和佛教共同存在。超過一千年, 在同步融合中被稱為 *shinbutsu-shūgō*[14], 以及地震的解释并不是一个例外。佛教学科框架包括《教义》地图 *ō* (其它 “达尔玛的最后几天,” 相似于印度教 加利尤加 讨论在 §16.3.3) 是的, 易于吸收到辛托的地震焦虑, 产生一层宗教反应同时, 这两种传统都相同。Shinto 地震 傳統它代表了长久的文化合成过程的高峰, 其中原住民神话、中国宇宙学和佛教的偶像学框架是逐步融入地震灾难的一致宗教解释。

16.3.7 概述: 宗教与地震灾难的意义

在本节中调查的传统揭示了一个显著一致性的模式在广泛分离的文化和历史时期。在每一个被研究的传统中, 地震被嵌入在一个神学框架内, 实现了三件事同时: 它给了地震事件的意义 (不是偶然, 而是有目的。); 它的意思在道德秩序中 (地震 传达某些信息人与神的关系) 它创造了一个规定的社区。答案 (献祭、祈祷、清洁、仪式维护). 具体内容的意思, 具体的道德框架和具体的仪式反应不同。从传统到传统, 但三党结构本身是普遍的。

三个交叉主题值得特别关注。首先, 是对以斯卡特思维。印度教 布拉格伊斯兰最后一天, 阿兹特克奥林匹克和佛教徒 地图 *ō* 全部放置 地震 在或接近宇宙史的终端事件 一个结构性相匹配。传统与彼此没有历史联系, 并且谈到一个共享的认知反应到已经在地震中观察到的地震灾难的经历神话合成 (§16.2.5).

[14]字面意为 “我們和佛陀的恩典,” 这种同性恋主导日本宗教纳拉时代的生命 (710–794 AD) 直到被迫分离的梅吉的两种传统 1868 年政府。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

其次是对地震道德解释的持久性。历史时期。地震事件的反射性归咎于神圣的惩罚人性侵犯　在圣经、希腊崇拜实践、印度教文档中**卡尔玛** 神学, 在伊斯兰教 **哈迪斯** 传统, 在阿塞拜疆仪式制度　与现代主义的到来没有解散。甘地的解释 1934 Bihar 地震 因不触摸的罪恶而受到惩罚這種神學反射保持了 20 世紀的吸引力, 引發了塔戈尔提出的同样的理性反论, 沃尔泰对里斯本地震的预备主义阅读, 近两世纪早 (§16.5.2). 兩個事件分為兩個世紀和兩個大陸但是在其基本逻辑中相同: 神学和灾难的理性解释, 在不同文化记录中播出。

第三个主题是地质上活跃的神圣地点的系统定位。结构　在德尔菲、希拉波利、科洛萨和卡西马神庙文档, 以及提出一个更广泛的倾向, 将地震不稳定区解释为增加神圣的存在。在这种意义上, 地震的宗教解释它不只是对地震事件的回应; 它塑造了神圣地理。地形本身, 把神学意义写在本地上。社区建造自己的圣殿。什么开始, 恐怖变成, 通过媒介宗教故事, 证据上帝的存在和权力..... 最后, 如下部分所表明, 第一次哲学挑战的机会到这篇阅读。

正是这个全面的地震体验神学化　坚持地震 是 **意思** 它是指向人类的, 它是要求不只是耐力, 而是解释和回应　哲学的传统将受其第一次持续的批判性审查。§16.4.

在本节中文档的模式普遍性邀请一个更深入的答: 不只是 **这** 地震的神学解释灾难一直持续在各个文化和几个世纪, 但 **為什麼** 他们已证明如此令人惊叹的可持续性　生存了自然哲学的崛起, 光明, 现代地震学也是如此。答案已经是由 Spinoza 的特征性准确性组成 三个半个世纪前:

> 男人永远不会超级, 如果他们能统治他们的全部根据规则的情况, 或者如果他们总是受财富的喜好: 但经常被驱动到规则无用的地方, 常常在希望与恐惧之間有同情的波動。主条目: 信任区 以财富的恩惠为主, 因此, 大多数, 非常倾向于信任。因此, 超越是生, 保守, 受恐惧的赞助。
>
> Spinoza, 1670 Tractatus Theologico-Politicus

地震, 所有自然现象中, 最完美地突出条件斯皮诺扎描述: 它在没有警告的情况下发动攻击, 否认预测, 以人为主, 以人為主, 每一個人的命令都被人所統治。情況。它应该产生超级 - 而超级应该证明沉重　因此, 不是现代前无知的好奇心。这是事件本身的结构性后果。正是这承认, 哲学传统, 在下一节中审查, 试图回答, 不是神话或仪式, 而是理性。

上面调查的七个传统, 以及他们分享的八个重复动机, 可以是在接下来的两张表中, 按序编写。桌子 16.1 总结, 对于每个传统, 第一神学作用归功于地震, 神圣或宇宙代理人负责, 存在或缺席一个埃斯卡特学尺寸, 规定的仪式反应, 以及主要的文本来源。桌子 16.2 图为八大跨文化动机的地图传统, 在其中它们被证实, 识别他们的具体表现和其 解析 的含义。

表中的两个模式值得在这里简短的评论。首先, 该**蛇或龙作为地震代理**经过五种传统的认证印度、日本、希腊和梅索美洲, 实际上是最广泛分布的单元。整个章节的动机, 甚至比以斯卡托学读书更普遍由合成开启。其缺乏圣经和伊斯兰传统是不存在的。偶然: 这些正是最充分发展的神学的两个传统。直接的神圣机构, 在那里没有中间的基督教生物需要解释。地球的震动。蛇的存在或缺席, 因此作为一个每个传统的基本神学结构的诊断标志。

其次, 柱的 **缺席** 在桌子上 16.2 如同分析与柱的存在相同。佛教, 在所有传统中被调查, 一致拒绝道德阅读地震作为惩罚..... 佛教框架中的地震是宇宙的批准, 而不是报酬。希腊只有一個開發的考古學尺寸。这些缺席, 在这些都是传统本身的结构性特征, 而它们却阻止了表面上有吸引力的结论, 所有宗教对地震的反应都是基本上相同。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 16.1: 宗教传统和地震: 比较总结。

传统	地震的主要角色	代理 / locus	埃斯卡特?	仪式回应	关键来源
圣经 (犹太基督徒)	神学; 奇迹解放或判断的工具; 编码地质记忆	*YHWH* 神直接	《启示》中的部分 - 地震图像意味着终端事件	祈祷; 投票报价; 社区惩罚	出 19:18; 行 16:26; 马太福音。27–28; Nur and Burgess, 2008
希腊 (希腊宗教)	神圣的愤怒神学 (安东尼) 如同: 故障区, 如同神圣的存在和预言; 失败的原始力量的持久性 (恩塞拉德) 被困在地下	波西多 安东尼恩塞拉多斯和克托尼亚巨人地下地质力量	没有被识别	动物牺牲给波西登; 故意坐在圣殿上方活跃的错误痕迹	伊利亚德 十三、18; Vergilius Maro, 2008 The Aeneid; Piccardi, 2007; Broad, 2006
印度教	宇宙不稳定; 集体侵犯的卡尔米后果; 接近的迹象 布拉格	Shesha / Vishnu; 集体卡尔玛	是的..... 布拉格终端解体宇宙	宗教礼拜; 通过卡尔马神学的解释	布拉哈纳 *Shatapatha Brahmana*; 清洁甘地 - 塔戈尔交换 (1934) (Paranjape, 2011)
佛教	佛陀生命事件的宇宙批准; 三重因果制度, 区分自然、人类和超越原因	地球作为反应宇宙 纳加斯	部分 -地图 *ō* 教义: 近达尔马时代结束的地震上涨	仪式的崇拜 纳加斯 • 游行	卡通; 尼加利亚尼加里亚
伊斯兰教	神圣信号 (阿提) 道德宣告在现在; 宇宙揭示的工具在最后一天	所有 āh 直接; 《古兰经》作为频道权威	是的 Surah 99 在最后一天开幕式上将地震置于位置	盐 *ā* 阿尔 · 库斯 *ūf* (特殊教會的悔改禱告)	第 99 章 (阿尔扎拉); 有 *īth* 收藏
美洲 (阿塞拜疆)	目前世界时代的宇宙命运; 每一个真实的地震对终端冲击的回报	奥林 力量; 宇宙日历结构	是的 宪法; 世界是由地震结束的 (奥林匹克)	人性牺牲; 仪式日历维护, 以便将终端地震推翻	阿纳尔斯 · 德 · 库瓦希特兰; 太阳之城; León-Portilla, 1963
Shinto (日本)	纳马佐的侵略需要神圣的限制; 灾难性清洁 (孟加拉) 世界修正	纳马斯 (巨型捕鱼) • Takemikazuchi 作为限制者	部分 -地图 *ō* 通过佛教同步主义吸收	卡西马神圣仪式; 纳马斯 塔利斯曼: 清洁仪式	纳马斯 印刷 (1855); Smits, 2006 卡西马神圣纪录

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 16.2: 重复的跨文化动机在宗教解释地震。✓ = 证实的动机; × = 缺席或边缘。

动机	圣经	希腊	印度教	佛教	伊斯兰教	美洲	Shinto	意义
蛇 / 龙作为地震代理人	×	✓	✓	✓	×	✓	✓	最广泛分布的动机。塞尔宾丁的身体地图在错误痕迹和地面上破裂; 其由上帝或圣人所击败的命令, 是对上帝的秩序的征服。克托尼的力量。缺少两种传统, 最完整的神学直接神圣的机构 (圣经; 伊斯兰教).
地震 作为斯卡特学术语	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	在每个传统中都存在着一个发达的埃斯卡托学。地震的数字如宇宙封闭机制　同时结束的物理表达地质、道德和神学。只有希腊才会缺少这一层次。
神圣地点坐在地质错误的顶部	✓	✓	×	×	×	✓	✓	社区在某个地点重复经历地震障碍不稳定是神圣的近距离。地质形成了神圣的地理: 恐怖变成了神圣的存在。
地震 作为道德惩罚 / 卡尔米特后果	✓	✓	✓	×	✓	×	✓	历史上最持久的阅读 - 在现代中生存 (甘地,1934 年). 佛教独自一致拒绝它: 地震是宇宙的批准, 不是回报。它在每个时代都引起了相同的理性主义拒绝。
规定的社区仪式反应	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	全世界的传统。地震 要求不只是耐力, 而是活跃社区仪式。形状大多不同 (祈祷为牺牲) 但结构性逻辑　地震作为需要答案的有目的通信　是相同的。
灾难作为清洁和更新	✓	×	✓	×	×	✓	✓	地震 既是生成性, 又是破坏性　暴力先驱给一个世界新的。它将恐怖转化为天文学: 灾难服务于一个比自己更大的目的。显著缺乏希腊和伊斯兰框架。
暗号化记忆的真实地质事件	✓	✓	×	×	×	×	✓	某些宗教讲述是显而易见的对特定地质反应事件 (约旦山谷错误崩溃编码在 Joshua 和 Jericho 故事;《 AD 60 Anatolian 地震 被吸收到希拉波利和科洛萨的传统; 火山和地震性质以埃特纳的神话, 被称为 Enceladus 的监狱感染;1855 年 Ansei Edo 地震 晶体化 **纳马斯** 科普). 物理事件被吸收为宗教故事　转化, 但没有消除。
支持动物的运动导致地震	×	×	✓	✓	×	×	✓	不同于蛇的动机: 宇宙动物维护地球, 其无情的运动会导致地震不稳定。独立认证地理上分离的传统如印度和日本 (宇宙大象 / 西雅图; 西雅圖; 南雅图).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

16.4 哲学

哲学家们一直在猜测地震的原因。其中一个最早的解释归功于泰勒斯 • 米利图, 谁认为地球在水上浮动; 这种底层中间的干扰是因此, 思想能够产生震动。其他 SOCRATIC 哲学家进一步分析:Anaximenes 提出压缩空气被困在地面下, 使土壤崩溃和加重。阿波罗尼亚的 Anaximander 和 Diogenes 寻求解释, 根源于四个基本的单元 - 地球、水、空气和火 (De Boer and Sanders, 2005). 这些早期试图, 尽管有猜测, 建立了智力寻求的习惯, 而不是纯粹地震现象的神话原因 - 第一次持久挑战对在宗教传统中记录的解释反射 §16.3.

16.4.1 亚里士多德

最有影响力的古代理论之一是肺结核解释。由亚里士多德提出。根据这一观点, 地震由地下风陷入地球表面下的洞穴中。這些風力為逃避而戰鬥, 使地面震動或破裂。亚里士多德的理论显然是令人惊叹的持久性, 并保持了主导的智力框架, 以解释许多人的地震几个世纪。

相似的宇宙学解释在其他领域独立发展文化。在古代中国, 地震有时被归因于宇宙力量的平衡障碍, 通过相互作用表达五大主要代理人 (**戈吉奥**) 與 Yin 和 Yang 相結合 (Guidoboni and Poirier, 2004). 雖然有不同的框架, 但這些想法分享希腊哲学试图解释地震的结果自然过程而不是纯神话原因。

16.4.2 埃拉托斯特

一个显著但经常被忽视的贡献到哲学和地震的地理理解是由 Cyrene 的 Eratosthenes 所做的 (c. 276–194 BCE) 亚历山大多元图书馆庆祝首先是因为他对地球周围的显著准确测量。在他的 **地理**,Eratosthenes 提出什么可以被认为是第一次系统地理地图化地震活动在古代世界。而不是将地震视为孤立或随机事件, 他寻求确定其发生最频率的地区, 并它们的分布与景观的更广泛的物理特征有关。

Eratosthenes 注意到, 沿海的地震活动集中区域和火山区附近 - 可持续的相互关系有意义的, 不会得到严格的物理解释, 直到现代时代。他注意到地中海岛链的地震性质并将某些海岸线的不稳定性归因于行动的地下水道将海洋连接到地下洞穴。当时这些隐藏的连接被打破了, 超越的土地是负责任的。或 Shake。这种水力地震理论, 尽管最终错误, 代表了一个真正的尝试将地震现象纳入一个地球的物理地理。

Eratosthenes 的贡献的含义在正确性中较少。任何特定机制, 而不是其方法方法: 通过目录地震区和与地理和地质特征有关, 他预测现代认可, 地震的出现不均匀它分布, 但由地球十字架的结构特性统治。他的因此, 工作代表了神话之间的重要过渡时刻。解释和系统的自然调查, (Dragoni, 2005).

16.4.3 卢塞蒂乌斯和普利尼

一个特别重要的哲学治疗在工作中出现罗马诗人和哲学家卢塞蒂乌斯 (Lucretius, 1995). 他的流行诗歌**河流自然 (关于事物的本质)** 写在第一世紀 BCE 寻求通过 Epicurean 解释自然现象哲学。在书中 路克雷蒂乌斯讨论地震, 并将其归功于空气的动作陷入地球洞穴中。当这

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

些地下人风积累并寻找出口,它们产生振动地面或甚至使它分裂开放。这种解释反映了更广泛的尝试通过物理机制了解自然世界而不是上帝的干预。

古代作家经常在这种肺炎理论上编写。一些作家与大地相比,它与一个内洞允许风的螺旋。通过地下通道。当积累的空气超过这些洞的容量,结果的压力产生旋转声音,震动地面,有时破裂,通过它风逃脱。这些解释是由后来的经典作家和诗人,包括萨洛斯特和卢坎,谁描述地震作为力量的后果在地球的隐藏空间中移动。

另一项重要的古代资料出自老普林尼的 **自然人历史** (AD 77–78) 这是一个经典研究,研究了许多自然现象,包括地震 (Pliny the Elder, 1906). 天气观察地震冲击发生在某些地区更频繁,特别是在海上地区,尽管山区没有免除。他也指出季节性模式,表明地震发生更频繁秋天和春天　后来由坎特重复的观察。加油更多动物经常在地震前以不寻常的方式行事,最早的文档参考,后来会变成重复以 地震 lore 的主题。

16.4.4　里斯本 地震作为哲学活动

地震的哲学讨论被灾难性转变地震 击败里斯本 1 11 月 1755 - 所有圣徒日子。灾难造成数千人死亡教堂崩溃的崇拜者,火灾和津巴布韦爆发破坏了城市几天,图 16.15a. 它不只是摧毁了一座资本,它冲击了欧洲的智力生活。记录历史上的自然事件很少发生引发了如此集中和后果性的哲学辩论,并且没有其他 地震 同时作为神学、道德的点。哲学、自然科学和文学想象力。事件将是下一篇: 文学的下一部分 (§16.5.2) 其文学回归的研究在细节; 这里的担忧与其哲学尺寸有关。

地震在欧洲启蒙的最高高度,在當教育的意見被放棄看待自然世界時,合理的,最终是善良的。她以残酷的即时性,这个信任的界限。她提出的神学问题并不新鲜: 作为宗教传统的研究 §16.3 清晰的,是地震灾难的反射性归咎于神圣的惩罚从圣经到伊斯兰教的结构化答案 **哈迪斯** 和 The 印度教的教义 **卡尔玛**. 什么是新,是观众: 教育欧洲人装备了理性主义哲学的概念工具和对传统的答案不耐烦。相同的对抗地震的神学和理性解释,该结构甘地 - 塔戈尔交换后比哈尔 1934 年地震 (§16.3.3) 这是第一次在中心演奏。欧洲知识生活。

16.4.4.1　沃尔泰和鲁塞奥作为哲学对话者

沃尔特 以速度和情感强度反应甚至对他来说不寻常。在他的 *Po`* **于** *D´* **斯本之旅** (1756) (Voltaire [Arouet, 2009), 他完全拒绝了最密切相关的乐观主义哲学。莱布尼兹教义首先系统地发展在 **考验** *T´* **德华** *ée* (Leibniz, 1710) 这个世界构成 “所有可能的世界中最好的,” 每一个显而易见的邪恶都是最终可与更大的慈善设计相匹配。这个哲学此案进一步讨论在 §16.5.2 在背景下,里斯本辩论的文学层面; 重要的是它的哲学目标。莱布尼兹的乐观主义代表了主导理论照明: 系统,合理,显然与命令一致宇宙是纽顿科学所揭示的。沃尔特的 *Po`* **米** 攻击它,在无辜的人面前道德上不可防守。受苦,并在这样做时强迫自然邪恶问题回归哲学关注的中心。

饰 Jean-Jacques Rousseau 回复在一个庆祝 8 月的信 1756 (Rousseau, 1967) 改變了條款的以哲学上有后果的方向进行讨论。他的主要论点是里斯本破坏的规模不能单独归功于自然: 大部分痛苦是人类社会组织的方式的后果。自己。如果里斯本的居民生活在较小的,更分散的定居点,灾难会更少致命。它是人口浓度在密集的城市结构,其中许多不足建造,将一个地

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

质事件转化为人类灾难的第一命令。地震, 在此阅读中, 不是上帝的命令的拒绝, 而是人类疾病的揭示: 暴露人类所面临的脆弱性社会为自己创造。

这个论点代表了几乎最早的系统性声明现代灾难科学称之为 **社会建设的脆弱性**承认任何自然危险的破坏性它是不可分割的建造环境和社会安排, 通过一个社区面对它 (Blaikie et al., 1994; Wisner et al., 2004). 罗斯福的 注意 - 地震 不杀死数万人; 里斯本城 (Lisbon) 解析在今天的力量, 并预测了两个世纪的现代工程师和灾难研究人员评估地震的框架危险。

16.4.4.2 坎特

伊曼努埃尔 • 坎特 接近里斯本 地震 从不同哲学方向, 产生三项科学论文在灾难发生后的几个月内。拒绝两者神学法塔主义和基于纯粹的机会的解释, 坎特认为即灾难应当被理解为稳定的确切后果。自然法则。自然, 在这个观点上, 按照常规原则运作而不是自愿的力量。灾难不否认存在自然秩序; 相反, 它们揭示了动态进程, 通过这些过程地球正在发展。

坎特强调, 自然世界不能仅从一个以人为中心的观点。地球遵循自己的规律和经济, 地质转型是根据法律进行的, 这两者都可以产生渐进的变化和突然的干扰。宇宙本身是永恒的。自然界的转变和过渡并不总是和平的。但是这些变化仍在自然法则规定的框架内发生。

从这个角度来看, 里斯本地震不会成为一个毫无意义的事件。但一个动态表现的过程塑造地球。自然因此, 灾难必须被理解为更广泛的进化的一部分。这个星球。接受自然体内变革会造成灾难。不同哲学层面: 而不是纯粹的混乱, 灾难代表一个可能的表达法定转型, 该结构自然世界。在这种意义上, 坎特对里斯本的回应表明了决定性的自然哲学史上的瞬间: 在那时的地震它不再主要是神学问题, 而变成科学问题。一个。里斯本辩论的文学尺寸 - 伏尔塔耶 **甘地**, 克莱斯特的小说和他们所创造的文学体 - 被审查在 §16.5.2.

因此, 从古希腊的猜测到启蒙的十字架里斯本, 地震作为哲学的持久催化剂思考, 迫使思想家面对基本问题自然世界的结构, 神圣的预防界限, 以及人类在一个有时暴力和不可预测的宇宙中的位置。它是肯特人, 他首先提出了答案, 即在接下来的两世纪地球的科学会否认: 地震意味着什么, 除了什么。自然法则需要。

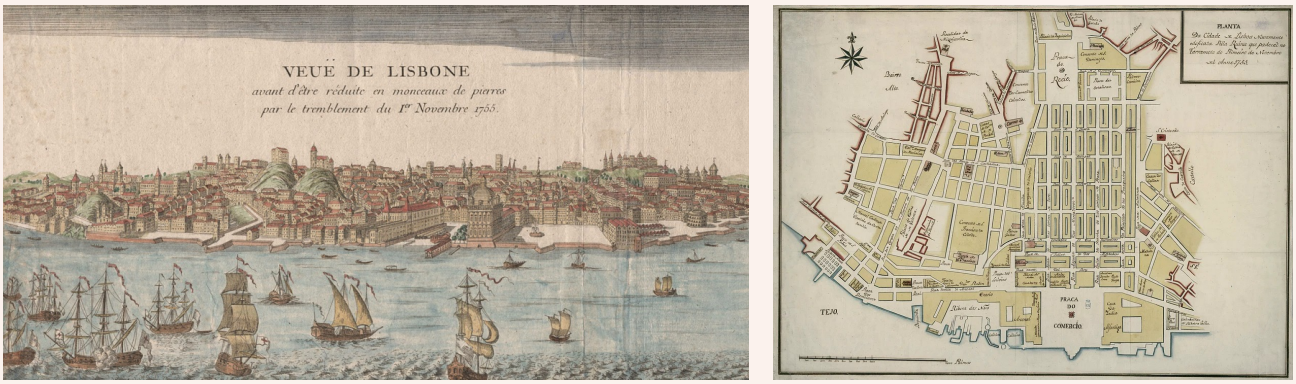
16.4.5 重建

灾难也产生了即时的物质后果, 具有持久意义。波巴尔的马克思 重建 Baixa 区 它是现代城市规划和地震工程的创始时刻　人类应该如何应对灾难的哲学问题, 在波巴尔的情况下用火柴和石头回答。然而, 建筑成就不能与使其可能的政治条件分开。波巴尔的回应从一开始就是一项可以称之为启示权威主义的练习: 相关术语子被公开挂起, 有能力的沙漠被军队压在救援工作中。新的建设立即被禁止在整个城市, 以防止混乱的重建, 破坏了 Wren 在 1666 年火灾后为伦敦的类似计划。五年之内, 战略框架　**论文** 马努埃尔•达•麦亚 (Manuel da Maia) 为新巴伊克斯设立了规划原则; 在两年内, 财产所有权的彻底法律重组将土地从贵族和教会当局转移到新兴商人阶级。有效工程一个政治地震伴随物理的 (Brand and Nicholson, 2013).

该计划所包含的技术创新并不那么有后果。新 Baixa 被放置在一个合理的正方形网络上, 图 16.15b 一个卡特西亚的秩序, 施加在中世纪城市的废墟上 - 具有标准化的区块尺寸, 统一的建筑高度, 以及清晰的街道名为将占据它们的吉尔德。河边地区的流动性观察导致木材柱上驱动的基础; 木材结构建筑的超级生存率促使发展。**盖奥拉** 系统 - 在马索尼亚周边墙壁内

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

独立坐着的内部木箱，这是欧洲历史上第一个故意抵抗地震的建筑类型。街道被扩展到这样一来，即使两侧建筑物的同时崩溃也会留下他们之间的疏散走廊。组件被预制在外面，以便快速安装，火墙延伸到天花板上方，并在整个地板上进行标准化。因此，该计划代表了灾后实验研究和大规模技术实施的生产性交叉，直到二十世纪才会系统地复制。



(a) 里斯本　　(b) 重建 Baixa 区

图 16.15: 里斯本，之前和之后

Brand and Nicholson, 2013 里斯本和后地震的比较研究得出结论，波巴林重建的成功在三个相互依赖的柱子上休息：破坏的巴伊克萨的彻底拆除，财产边界的强制性复兴。城市设计视觉坚定地基于国际最佳实践 (Brand and Nicholson, 2013)。每个人都要求在集体抵抗的名义上超越个人财产权利　私人利益对公共需要的服从，这仅仅是因为波巴尔持有并愿意使用集中执行权。教训不是权威主义本身是可取的，而是灾难后重建持久品质历史上需要决策权力的统一、技术愿景的清晰度。以一种快速和决定的方式行动的愿望，而有意志的民主进程很少允许。[15]. 在波巴尔的里斯本，对灾难的哲学答案不仅仅是用石头和火柴表达出来的：它是由法令执行的。

16.5 文学

16.5.1 文学中的地震

地震也留下了在文学上的标志，其中它们都出现在历史参考和作为强大的戏剧或象征性设备。很久以前光明将地震转化为哲学的车辆讨论，地震事件已经进入了文学想象力作为标志集体记忆。一个早期例子是 Dover Straits 地震 6 4 月 1580 年，显然是地震中记录的最大英格兰、弗兰德和法国北部的历史记录。事件这是令人难忘的，它进入了文化意识。时间，大约 11 年后，莎士比亚 其中包含了一个通用参考。**罗密欧和朱丽叶**. In 行动 我，舞台 第三，护士提醒：

[15]这种模型并不总是成功地移植。内战后贝鲁特重建 **坚定** 这是一个谨慎的对例子：历史中心被拆除，社会结构解体，结果广泛谴责为它所取代的城市的清洁、主题公园模拟室。

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

> “从地震开始, 现在 11 年了。
>
> 剧情 I、舞台 III Shakespeare, 1597 Romeo and Juliet

虽然简短, 但这项备忘录作为一个时间记录的功能, 建议地震在集体记忆中保持活力莎士比亚 演奏小, 但讲述描述地震事件在文化时代如何发生。

到十八世纪末, 自然灾害越来越多。在文学中作为道德和哲学的戏剧性工具讲故事。1755 年里斯本地震特别深影响了欧洲的智力气候, 并激发了文学作品的身体将地震转化为一个象征性的车辆, 以探索神的正义, 人类的痛苦和文明的脆弱性。显著例子包括悲剧 **里斯本人死亡** (1758) 基督徒格特利布 • 利伯克¨ 恩 (Lieberkühn, 1758), 诗歌浪漫 **印加人** (1777) 由 Jean-Franç 奥斯马尔蒙特 (Marmontel, 1777) 和海因里希饰 Von Kleist 庆祝小说 **地震智利** (写的 C。1806 年, 出版于 1810 年) (Kleist, 1810). 在所有这些地震不是一个物理现象, 而是一个故事。对道德紧张、社会矛盾和哲学的催化论關於命運、預備和人類社會的性質。

16.5.2 1755 年里斯本地震和启蒙辩论

里斯本地震的哲学尺寸已被审查在 §16.4.4: 坎特的自然主义反应, 罗塞奥对脆弱性的原社会学阅读, 以及沃尔泰的攻击莱布尼西亚乐观主义作为哲学立场。目前的部分是什么考验是平行文学回应　同一事件的方式生成不只是论点, 而是诗歌、撒蒂尔和幻想, 以其为主。问到更广泛的观众, 并给了他们一个永久性的哲学只有普罗西不能保证。兩個尺寸是不可分割的: 沃尔特 同时, 他也是里斯本哲学家。他的最伟大的文学声音, 以及他哲学的区别他的愤怒和诗歌的愤怒, 在实践中, 很难绘制。

沃尔特

沃尔特的 *Po`* **于** *D´* **斯本之旅** (1756) 给了地震最著名的文学声音。诗歌不是哲学作品。论点, 而不是哲学的愤怒: 它需要知道如何任何理论乐观主义可以生存下泥土下的孩子们的眼光里斯本。

> 正直, 在旅途中, 有受害者 :
> “上帝复仇, 他们的死亡是他们的罪恶的奖励。”?
> 什么罪, 什么错, 这些孩子
> Sur le sein maternel écrasés et sanglants ?
>
> Voltaire [Arouet, 2009 *“Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien”*

通道可以作为: **“你會說, 看見這片受害者: ‘上帝被赎罪; 他们的死亡是他们的罪恶的代价’ ? 什么犯罪, 这些孩子犯了什么罪, 破坏和流血。母亲的乳房?”** 指控不是仅针对神学乐观主义, 但在任何解释框架下　宗教或哲学 - 试图合理化受苦的无辜的。地震, 在伏尔泰的手, 变成一拒绝: 灾难的证据, 世界不是人命令的益处, 而基于这种前提的智力系统是道德上的。不可辩护。

三年后, 在 *Candide*, **或乐观主义** (1759) (Voltaire [Arouet, 1759), 沃尔特 回归到里斯本在一

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

个非常不同的记录。故事 - 可能最广泛的阅读哲学萨蒂拉在西方大道 - 携带其¨ 雄通过城里的废墟, 在那里他见证了地震和其后果。包括 Auto-da-f´ 此为目的, 以防止未来地震事件。正义是故意的格罗特斯: 官方神学地质灾害的回应, 是司法谋杀。在这个数字中, Dr. 潘格洛斯 每一个遭受的灾难, "一切都是为了最好的, 在所有可能的世界中最好的。" 沃尔特 创作文学的伟大象征之一哲学的自我观念　一个人物, 其快乐乐观主义变成了里斯本的面孔, 一种道德盲目的形式。

克莱斯特

海因里希 • 冯 • 克莱斯特 小说 **地震在智利** ("智利的地震" 写的 C。1806 年出版 1810) (Kleist, 1810) 是最正式完成的文学处理一个地震在欧洲文学, 以及最直接涉及哲学问题的人由里斯本提出　虽然它的定位是圣地亚哥的时刻灾难性的地震 1647. 他的兩個主角,Jó 尼莫 和乔斯é 法, 因违法行为而被处决城市的道德代码, 当地震摧毁监狱和城堡时同样, 使他们成为一个转变的世界。

在小说中所说的, 是最微妙的探索之一。德国文学中的灾难和幻觉。地震 简而言之, 一种社会的埃登: 正常的层次被暂停, 陌生人帮助一个另一个, 幸存者经历过渡的团结, 它切断了是殖民社会的坚固分裂。克莱斯特 看起来, 一瞬间, 写了一篇关于 **孟加拉**—"世界修正" 在日本语中, 我们讨论的 §16.2.1—in 地震作为一个暴力但最终救赎性的社会平板

但这种幻觉与特征性克莱斯蒂安暴力分裂。和生存者聚集在教堂里, 为礼拜的传道, 和讲道者, 重新建立了地震暂停的神学秩序, 将灾难定义为神圣的惩罚, 对道德人而言。违法行为, 即 ó 尼莫 和乔斯 é 法 被指控了。教會, 其神学的恐惧复兴, 转向夫妇并杀死他们。秩序社会、神学、暴力　在瞬间上重复了自己。由灾难创造的开放。地震不解雇; 它只是这是一个有系统的残酷主义的机会。

克莱斯特 以此为戏剧化, 在讲故事, 神学和理性之间的相同对抗地震 that Voltaire 的解释和罗塞奥 以哲学论点为主。(§16.4.4). 地震 是由先知阅读的神的判断; 由瞬间的生存者共同体作为解放; 并通过克莱斯特 讽刺的故事作为一个揭示暴力在所有社会秩序中都是虚假的。没有任何这些阅读被确认; 所有被曝光为解释性对一个地质事件的规定, 即在自己, 对人类的意义无关。在这个意义上, **地震在智利** 可以被阅读为哲学轨道的文学成就从伏尔图出发 通过坎特 (§16.4.4): 地震作为切割的机会远离安慰的幻想, 面对世界如同它一样。

16.5.3 梅西娜 地震 1908 年

如果里斯本地震是启蒙哲学的催化剂, 那么梅西娜 地震 的 28 十二月 1908 年是大地震灾难。现代欧洲文学想象力　虽然它的文学反应是在里斯本的哲学而不是性格上的优雅和爱国主义感覺。地震和相关的海啸, 冲击了两岸梅西纳的流离失所早晨, 杀死了一名估计 80 万到 120 万人, 几乎全部摧毁了两个城市。欧洲历史上最致命的地震事件

灾难的规模引发了意大利人的即时反应文学世界。约翰尼 • 维尔加 伟大的西西里人现实主义小说家, 写的关于幸存者 "他们在他们的废墟上不幸的城市" 引发抵抗和身份的语言这将成为事件文化记忆的中心。路易斯可口可乐 一位创始人, 是 **真理** 运动 , 描述破坏与特征性直度: 地震有它只需要一分钟才能消灭几代人所建造的东西。这些答案, 收集在出版物中 **西雅图和卡里迪** (Barzilai, 1909) 由意大利人协会制作周期新闻与地震孤儿的帮助, 描述如

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

何梅西娜灾难被吸收到民族团结的演讲中, 集体痛苦　一个结构性相似的过程与社会和政治阅读编码在日本语 **纳马斯** 印刷讨论在 §16.2.1.

然而, 最持久的文学回应到梅西娜地震来了, 这是一个作家, 他从小就经历过。诗人 Salvatore Quasimodo 谁能获得诺贝尔奖文学 1959 年 - 与他的家人一起转移到梅西娜事故发生后, 他的父亲被列为铁路。救援人员在救援工作中协助。在他的诗中 **到我父亲**, 几十年后,Quasimodo 记住舞台具有图像准确性, 保留了灾难经历多年之遥:

Dove sull'acque viola era 梅西纳 特拉 · 菲利 · 斯佩兹蒂 · 埃 · 马克里 *tu vai lungo binari e scambi* *col tuo berretto di gallo isolano.* 天下大火, 必定有日。 *12* 月 飓风 马里 · 阿维尔纳托	梅西娜在水上躺着紫色, 和 rub 之間, 你沿着铁路和交换机行走 在您的岛民的鸡尾酒。 兩天來, 地震的氣息, 这是飓风 12 月 和毒的海。

无可争议的土地, Quasimodo, 1958 *"Al padre"*

梅西娜的谎言 "紫色在水上" 用 Lyric 捕捉经济什么工程调查记录在损害统计: 一个整个城市被解散到海边的废墟。地震 應該是 "波尔" 经过三天的编码, 在诗人的压缩中, 诗人的经历随后的震撼延伸破坏超越初始事件　一个细节地震学和文学兴趣。

与里斯本的对立是指导性的。梅西娜生成埃利吉和国家在里斯本产生了哲学和神学危机的团结。和差异不仅反映了 1755 年至 1908 年之间的文化距离。但在地震的智力框架内发生了重大变化。被解释为: 在二十世纪初, 自然原因的地震不再处于严重的争议中, 问题上是神圣的。判决从教育演讲中心撤回。什么留下 - 而梅西娜文学所反映的 - 是人类灾难的经历: 悲伤、团结、记忆和工作重建。从神学到经验的转变, 文学回应 地震 反映了更广泛的智力轨道在这篇章节中, 从神话到宗教哲学对世俗的计算与自然力量的特点现代时代。

16.5.4 摘要: 文学与地震文化记忆

在本节中审查的文学传统表明, 它是多么一致地震事件作为文化和知识分子的催化剂计算 - 以及如何这种计算的性质随着时间的推移而改变。莎士比亚的 简短提到 1580 地震它作为一个神话标志, 证明地震事件在集体记忆, 成为文化时代的参考点。文学里斯本具有不同的, 更有野心的功能: 它改变了地质灾难成为一个论点, 将地震作为证据在哲学争论中, 关于世界和人类的结构其内部的位置　一个争议, 其哲学基础设施由 Kant、Voltaire 和 Rousseau, 如同在 §16.4.4, 其文学表达在这里被审查。梅西娜的文学, 由对比, 是后哲学的: 它痛苦, 它提醒, 它携带见证, 但它不再问地震是否意味着什么在神学意义。

这个轨道　从神经标志, 通过哲学催化剂, 到世俗的埃利吉　反映了整个章节中描绘的更广泛的弓: 位移的神话、宗教和预言主义地震的解释, 根源于自然研究和人类体验。迪拉克的 信任声明, 引用在开幕式的 §16.2 现代自然的理解进程使灾难的神学解释过时, 发现其最有说服力的证据, 不是在任何哲学论点中, 而是在文学记录本身: 在距离沃尔特的 *Po*` 米 ( ) 不能描述的里斯本没有面对上帝　和 Quasimodo 的 诗歌, 在那里上帝完全缺席, 地震为三天沉默在毒的海里。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

16.6 建筑

16.6.1 皮罗 • 利戈里奥

地震早期智力史中的另一个重要步骤这是 Pirro Ligorio 的作品, 谁写了**各式各样的地震** 1570 年。这个处理收集和批判评估的当代理论關於地震現象, 並代表了最早的系統性試圖之一在西方世界中, 以合理的分析为地震, 而不是神学的解释　把它四方地置于审查的传统之内在这章中。令人惊讶的是, 这篇文章还包含了被认为是西方建筑中的地震抵抗性结构的第一设计历史 , 其中一个细节利戈里奥作为哲学传统之间的过渡人物上述调查和工程传统在后期章节中审查工作。手稿被重新发现并在现代学科中出版作者:Emanuela Guidoboni (Ligorio, 2005) in 2005.[16]

16.6.2 吉布里娜

1968 年 1 月 15 日, 一场 6.4 级的破坏性 地震 击落了贝利斯谷。在西西里, 造成近 400 人死亡, 约有 10 万人无家可归 城中有许多被毁灭的城市, 是吉布林。小农民社区约 6000 居民图 16.16a. 破坏是全面的: 整个区块崩溃, 中世纪街道织物被废除, 幸存者逃跑, 在周围的乡村,Fig。16.16b. 随后, 这是意大利历史上最具政治负担的重建努力之一。意大利国家缓慢和混乱地回应; 多年来没有提供紧急住房, 流离失所的人口陷入临时困境　一些人已经过了十年。地震成为罗马对意大利南部的忽视的象征, 而贝利斯山谷是机构失败和繁荣的北方与贫困地区之间的差距。**梅佐吉诺**. 作家、知识分子和工会团体聚集在幸存者周围, 贝利西亚城镇的重建最终与城市规划、文化身份以及战后意大利灾难政策的更广泛辩论有关。(Musolino, 2017).

在这种混乱的背景下, 艺术家 Alberto Burri (1915–1995) 想象了土地艺术史上对毁灭的最非凡反应之一。布里已经是意大利最著名的战后艺术家之一, 国际上被认可为他的 **萨奇** (由布拉普袋制成的绘画) 他的塑料, 尤其是他的 **克里特** — 涂在基于相关术语的混合物中, 它们干燥和切割时, 产生了草地的网格, 令人惊叹地提到粉碎的土壤, 干燥的泥土, 或 - 必然 - 地震破裂的土地。從山谷到景觀的跳躍是概念性的, 但視覺上一致: 在吉貝琳娜, 布里只是繼續他一直做的事情, 但在文明規模。(Forty, 2013).

在 1984 年至 1989 年之间, 然后在 2015 年完成后, 布里指导了整个古吉贝琳娜的橡胶田地下一个连续的白色混凝土毛巾。(Forty, 2013), 图 16.16c. 这个过程不是破坏, 而是化石化: 混凝土跟随了以前的街道网, 保留了道路、花园和房子的脚印, 作为一系列由可航行的裂缝分开的白相关术语。此分類上一篇: 故意 “破碎” 在表面上 - 等待了导致破坏和其管道的特征性表面处理的地震裂缝, 现在扩展到整个城市区的规模。完成工作量大约为 300 到 400 m, 覆盖约 8 万平方米, 可作为空中和卫星摄影的一致形式阅读。它是最大的土地艺术设施之一曾经创造过。

[16] 另一个令人惊叹的例子早期 地震 调查被归功于 Anthemius 的特拉斯 (c. 474–c. 558), 其中一个 Hagia Sophia 的主要建筑师, 谁据报道, 建造了一台机械设备使用蒸汽来模拟地震邻居之家下的振动　根据来源, 法律反对者 - 使这一点几乎是最早记录的人工实例地震 模拟 (Dragoni, 2005; Downey, 1946). 这就是建筑师的历史上最受地震测试的建筑之一也应该是以第一個 地震 模擬為信用, 是偶然的價值保存。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我参观了 **克里特** 2008 年, 他被其无情的沉默所震惊。[17] 穿越其狭窄的白色走廊 - 在某些地方几乎不够宽, 两人可以通过 - 一人穿过什么基本上是一个社区坟墓。墙壁上升到胸部或肩膀高度, 将走路者关在绝对白色的阴道中。没有声音, 微小的阴影, 也没有视觉参考超越混凝土本身和上面的天空。体验同时是建筑和葬礼的, 抽象和强烈具体: 脚下有一座整个城镇, 封闭和沉默。和 **克里特** 它不代表损失; 它 **是** 损失, 给予物质形状 (Forty, 2013).



(a) 吉布林之前



(b) 吉布林被摧毁



(c) 由 Burri 的 Creto

图 16.16: 吉贝琳娜在混凝土中被摧毁和埋葬

幸存者的命运需要更多的纪念碑。距离 20 公里, 在下方平板的平地上, 一个替代定居点 Gibellina Nuova 应该从草坪上建造, 图 16.17a. 新城市长 Ludovico Corrao 他是一位律师、政治家和艺术家的热情守护者, 在灾难中看到一个不可能的机会: 建造一座城市的机会, 从其基础上, 将是整个艺术作品。(Badami, 2012). 科拉奥邀请一群意大利和国际建筑师、艺术家和设计师为新城做贡献。转化可能是一次社交住房的日常练习, 成为二十世纪任何地方尝试过的城市主义和当代艺术合并中最雄心勃勃的实验之一。其中有助于建筑、城市结构或公共雕塑的人是奥斯瓦尔德 • 马蒂亚斯 • 乌格尔斯。弗兰科 • 普里尼 皮特罗 • 康萨格拉路德维科 • 卡罗尼 维多利亚 • 格雷戈蒂 阿莱桑多 • 门迪尼 米莫 • 帕拉迪诺 (Venezia, 1989). 这些贡献的民间装备由 Franco Purini 和 Laura Thermes 提供。**广场系统** (1990), 图 16.17b 一个连续三个相互连接的公共广场, 被两级图法门口封闭, 用大理石和拉瓦石涂抹, 并由一条小通道带走一系列喷泉。设计为居住区之间的社会灵魂和纪念碑的设置, 以便在整个城市

[17] 事实上, 这次访问吉贝琳娜首先引起了我对写这章的兴趣, 正如引用中所指出的那样。

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分发的艺术作品。总共有 80 多位建筑师和艺术家在吉贝琳娜 • 努瓦 (Gibellina Nuova) 上留下了自己的标志, 而这座城市至少故意成为后现代主义和后现代设计的开放博物馆。



(a) 皮特罗 • 康萨格拉 **贝利斯港口**



(b) Franco Purini, Laura Thermes, *Sistema delle Piazze*



(c) 皮特罗 • 康萨格拉 **蛇**



(d) 皮特罗 • 康萨格拉 **剧院前线**

图 16.17: 吉布利娜新

有趣, 和合适的, 图 16.17c 展示一幅雕像, 归功于 Pietro Consagra 是西西里出生的艺术家之一, 他最为广为 Corrao 的户外博物馆项目, 介绍一个管形状在雕塑金属, 其曲折性形态邀请 — 无论是通过设计还是由抽象形式的逻辑找到自己的共识 - 与整个讨论的塞尔宾丁数字进行比较这个章节作为地震和克托尼力量的跨文化车辆。康萨格拉, 意大利战后学校的致力于抽象学家, 他们可能抵抗了明确的神话阅读。(他是个热烈的马克思主义者。); 然而, 在灾难后重建的城市中, 一座塞尔宾丁雕像的相遇地震, 在地质暴力被编码的地区地下之下 **克里特**很难像纯粹那样放弃巧合。

皮埃特罗 • 康萨格拉剧院前台, 图 16.17d, (1984 年, 从未完成。) 也许是吉贝琳娜 • 努瓦未实现的乌托比亚最象征性的纪念碑: 由雕塑家认为 “活雕像” 而不是传统剧院, 它的演奏混凝土的序列 - 仍然暴露在西西里天空的雷巴 - 作为一个意图不向后地震重建的野心。

然而, 这项实验并没有没有深刻和指导性的失败。[18]. 为了她的文化野心, 吉贝琳娜 • 努瓦被许多居民 - 而且最重要的是老年人 - 经历了深度偏离。(Musolino, 2017). 古吉贝利娜是一

[18] 马特拉的命运 **萨西** 提供指导性对比点吉布琳娜的双重悲剧 被政府在 1950 年代的法令驱逐贫困和不健康的根源 - 卡洛 • 莱维 **基督是农场艾博利** (1945) 曾使洞穴住宅成为南方的口号意大利的贫困 - 古老的特洛格罗迪特定居点没有被拆除, 但只是放弃了。1986 年《允许重新占领法》, 联合国教科文组织承认 1993 年, 其次是 **萨西** 今天, 你們的恩典, 若是重大的。再一次旅游, 城市区。吉布琳娜被消灭的地方重新发明, 马特拉被打破并重新解雇: 原始纺织品生存了。与此同时, 还有回归的机会。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

座密集的迷宫山城, 在西西里很常见: 街道宽不到两米, 房屋互相冲突, 邻居由墙壁或共享楼梯分开。公共生活在广场上进行, 规模为对话而不是表演。新城, 相反, 在一个平坦的平面上散布在一个分散的, 低密度布局, 宽敞的通道, 纪念碑圆形, 雕塑集件, 与传统西西里城市主义的草原无关 (Badami, 2012). 建筑物作为个体对象令人震惊, 但无法产生原始城市的日常生活结构化的空间封锁和社会亲密性。老年人发现自己无法指导自己, 无法走向邻居, 无法重复一生习惯和仪式。許多人說新城是流亡的地方, 而不是回歸。社区被给予了建筑, 但不是他们失去的城市。

因此, 吉贝琳娜被认为是最视觉拘留的, 也许是最指导性的案例研究在地震学、建筑和城市主义的交叉点。和 **克里特** 这是一个不可替代的纪念碑去失去; 吉贝琳娜 • 努瓦是建筑视觉与社会生活之间的差距中的警惕教训。它们是地震和建造的环境中最集中的冥想, 在世界上任何地方都能找到。

16.7 艺术

16.7.1 摇滚艺术与错误的痕迹

两个强迫性的例子将地震图像直接链接到活跃的地质结构, 他们一起展示了对这种类型的证据的范围。从地质观察到文化解释。

圣弗朗西斯州的 Sierra de San Francisco 巴雅加利福尼亚, 该网站被称为 **天堂** *La* **蛇** (蛇的洞穴) 保留一堵墙大约八米长, 描绘一个大角蛇 被近五十人包围和动物数字, 图 16.18. 注意人和动物人物周围的视觉安排。中角蛇, 提示板上动态侧面运动。组成不是静态: 图像的



图 16.18: Cueva de la Serpiente mural, 旧金山塞拉, 加利福尼亚州。

安排创造了一个摇滚视觉节奏, 就好像蛇在板上动态重量, 聚集人类和动物世界进入它的运动。在洞穴前面, aryo 以 挠度 向东转动, 然后重新向北转动路径 - 与东西趋势一致的排水异常火灾 - Slip 错误 放下流频道。和当然, 图像和地质的偶然性并没有证明原因; 但它提出了问题, 是否选择这个网站并绘制这个墙的人他们明白, 在自己的口号上, 这里的土壤与土壤不同地移动。其他地方。

第二个例子是 *Chumash* **画洞穴** 圣日内斯山脉 北部 Santa Barbara, 图 16.19, 靠近活跃的 Arroyo Parida 错了。在网站上发现的图像 - 复杂交锁形状、放射模式和数目, 其地质表明动作而不是休息 - 一些研究人员已经解释为可能的文化反应感受到地震活动, 雖然這種解釋仍然在考古學家中討論, 但許多相反, 他将图像与沙门的视觉体验有关。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

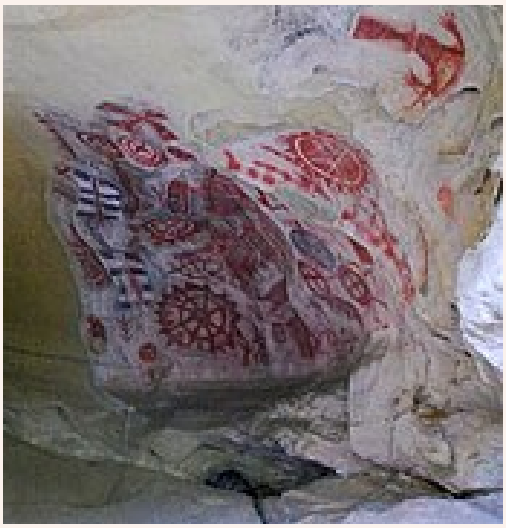


图 16.19: 圖片來源:Chumash Painted Cave, Santa Ynez Mountains, California

这两种解释不一定是相互独占的。在宇宙中地震和视觉国家的框架, 既被理解为地下权力的表现, 将引出很少的区别兩個經驗之間。可以更有信心地说的是, 该网站不可能被任意选择。其位置在 A 天文活跃的景观表明, 本地拥有一个承认的意义, 即使这种知识是通过象征性的表达或宇宙学概念与现代地质科学中使用的概念非常不同。

与本章中讨论的其他例子一起, 更广泛的模式出现了。地震-prone 景观经常引起蛇神话 , 连接的联系不难理解。蛇是动态、地下生物。能够突然出现和破坏性力量, 它在阴道中移动。侧面模式提醒错误的破裂运动或传播地震波通过不统一的土壤。巴雅的角蛇加利福尼亚到双头 **西雅图** 太平洋的西北, 数字出现了重复作为一个跨文化的形象, 为真实、重复的力量提供否则很难解释。

超越蛇本身, 美国地震神话 经常发生地震事件在循环破坏和复兴的宇宙故事中。和阿塞拜疆 连续世界时代的传统, 每一个因灾难而终结, 发现冲击性讲话平行美洲人 传统。相似思想在世界其他地方出现; 日本的概念**孟加拉** (“世界修正”) 提供这样一个例子, 将在下一部分讨论。

16.7.2 绘画

地震在视觉艺术中发现了表达, 画家们试图代表事件的物理暴力和人体暴力对灾难的回应。艺术作品在两者之间波动傳統:The **品种绘画**专注于日常生活的遭遇灾难, 以及 **历史的绘画** 谁升高以更广泛的历史和象征性的水平进行活动。

在十九世纪, 一个显著的例子是莱奥波尔德的作品。罗伯特, 谁画的场景灵感的后果一个地震在那不勒斯 1830 年左右。重点不仅仅是破坏本身, 而且关于人类戏剧在破坏的城市景观中发生 - 破坏建筑、流离失所人口和情感不安　反映了更广泛的浪漫迷恋与灾难和超级, 图 16.20a.

在拉丁美洲, 费尔南多 • 博特罗明确讨论了这个主题。**地震在波佩安**, 由破坏性 1983 地震

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的灵感它打击了历史性的哥伦比亚城市。波特罗的解释转变灾难变成一个强大的视觉讲故事, 结合了它的区别城市破坏场景的量子数字, 图 16.20b.

学术讨论强调了灾难的双重作用历史事件和美学主题。Sylvie Wuhrmann 發表評論地震图像的进化从风格场景到历史绘画, 从 Jean-Pierre Saint-Ours 饰 Léopold Robert Wuhrmann, 1994. 米歇尔·里本探索了“灾难的美学,” 假设这样的灾难地震在艺术史上占据了重要地位代表, 因为他们面对艺术家与秩序的界限, 稳定, 人力控制 Ribon, 1999.



(a) Léopold Robert, *Napolitaine pleurant sur les ruines de sa maison après un tremblement de terre* (c. 1830)

(b) Fernando Botero, *Terremoto en Popayán* (1999)

图 16.20: 两位画家对地震灾难的回应

16.7.3 科扎克收藏

非常有兴趣的是 Jan Kozák 的私人收藏 (Kozak, Moreira, and Oldroyd, 2005), 捷克地质学家在地质物理研究所由捷克科学院, 在四十年内收集了一个世界上最大的预摄影系列的自然灾难: 超过 2300 件覆盖地震、火山爆炸和海啸。875 个幻灯片被捐赠给地震工程 加利福尼亚大学研究中心 Berkeley, 由 NISEE-PEER 图书馆工作人员数字化, 并提供在线; 该门户不再是公开的。

收藏包含 1755 年里斯本的无数描绘地震 (Keller, 1998; Kozak, Moreira, and Oldroyd, 2005) 那不勒斯 地震 1830 (作者:Léopold Robert) 而且, 许多 纳马斯 (Giacomoni, 2005). 其最可访问的出版表格是体积与地质物理学家 Vladimír Cermák 合作 (Kozák and Cermák, 2010) 收藏的内容, 以提供全页重复罕见的墓地、旧地图和绘画, 每篇文章都伴随着地质和历史背景的文本事件和图像的起源。Fe 地震包括在巴塞罗那的 (1356) 君士坦丁堡 (1762) 和旧金山 (1868 年和 1906 年) 与火山爆发和海啸冲突相伴第十四至十九世纪。工作将桥梁科学史和艺术史, 文档如何预现代观察、记录和解释地震灾难的社会在摄影的到来之前。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

16.7.4 阿米利亚收藏

地震也是一个重要的和独特的私人主题。现代艺术集合 (**摩托车**) (Fondazione Amelio, 1987). 地震 打击 Irpinia 和 Basilicata 在 23 1980 年 11 月, 拿破仑当代艺术经销商卢西奥 • 阿梅利奥 (1931–1994) 相信, 只有艺术的力量才能引发重生 —邀请国际知名艺术家为贡献工作应对灾难。Amelio 基础 正式成立于 1982 年 11 月, 为该项目提供机构基础, 收藏品大于 70 多幅画和雕塑。由 50 多位意大利和国际艺术家, 其中包括约瑟夫博伊斯、安迪 • 沃霍尔、基思 • 哈林、罗伯特 • 梅普尔索普、赛 • 托姆布雷，吉尔哈德 • 里希特、安塞尔姆 • 基弗、克里斯蒂安 • 博尔坦斯基、米莫 • 帕拉迪诺和 Nino Longobardi。



(a) 安迪 • 沃尔霍尔: **命运早点**



(b) Anselm Kiefer，*Et la terre tremble encore, d'avoir vu la fuite des géants*



(c) 罗伯特 • 马普莱托尔佩 (Robert Mapplethorpe) Terrae Motus pentaptych

图 16.21: 选择的贡献 (华霍尔、Mapplethorpe 和 Kiefer) 阿米利奥收藏品

三个作品描述了阿米利奥所选的艺术反应范围。最受欢迎的是华霍尔的 **命运早点**, 图 16.21a, 波普艺术翻译拿破仑报纸的首页 **马蒂诺** 发表在地震之后的日子里。约瑟夫 • 博伊斯的 **宫殿地震**（1981）是一件安装从手工工具个人恢复的村庄被地震摧毁 一张塔利尔的桌子, 一张科布勒的 stool, 一个桶制造商的架子 脱背景和散布与相关术语玻璃, 粘贴在墙壁和家具之间, 一个单个鸡蛋平衡在不透明的平衡, 引发脆弱性和分散被灾难留下。罗伯特 • 马普莱托尔佩 (Robert Mapplethorpe) 用五大格式的五分之一回应黄金银印刷 (**丹尼斯大声与塔, 杰克与王冠, 尾巴和十字架, 吉尔 · 查普曼, 丹尼斯与花朵的声音**, 1983) 围绕着激情的象征基督; 中央面板描绘了一个骨头和十字架的阴道在参观圣玛利亚动物教堂 (Santa Maria delle Anime del Purgatorio) 阿尔科在那不勒斯的广告, 在艺术家的那不利人居住期间拍摄, 图 16.21c[19]. 安塞尔 • 基弗 [20] *Et la terre tremble encore, d'avoir vu la fuite des* **巨人** 将瓦

[19] 不要过分振动, 这就是 Mapplethorp!
[20] 对于 Kiefer 的另一个绘画, 请参阅页面 551.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

特洛战役翻译成地震的形象灾难: 直接应用到管道的地雷可图打开了巨大的伤口穿越绘画的表面, 经过黑色标志和漫步诗歌标签, 与地球本身材料合并绘画, 图 16.21b.

收藏品首次展出在拿破仑修复的修道院 1984 年, 然后在 1987 年巴黎大宫展出。项目国际认可。阿米利奥把收藏品交给了意大利国家; 自 1992 年 11 月以来, 它一直在永久展示十八世纪大画廊 Reggia di Caserta[21], 在哪里的作品在皇家公寓内的转角中显示, 放置能量现代艺术与巴洛克伟大的直接对话布尔本宫。

16.8 音乐

自然灾害, 包括地震, 也发现了表达音乐组合。最早的突出例子之一是安东尼。布鲁塞尔 (c. 1460–c. 1520) 是谁为庆祝的 米莎和 *ecce terrae* 摩托车 ("看哪, 大地倒塌了。") 经常提到如同 The "地震 质量." 标题源于福音账户描述地震伴随基督的死亡; 工作其十二声音聚合物结构, 其中最著名的文艺复兴的雄心勃勃 (Cumming, 2001).

约翰·塞巴斯蒂安·巴赫 表达式描绘相同的 地震 在两个其它 根据圣的情感 约翰 (1724) 和 The 激情根据圣。马蒂奥 [22] (1729) 翻译《暴力震动》地球在乐队和角形形式, 通过和谐的紧张和戏剧性乐队。

约瑟夫·海登同样的结论 **基督的七个最后一句话 十字架** (乐队版,1785 年) 以明确的名称为 "运动" *Il Terremoto*，以突然而强烈的动态效果唤起福音书中的地震力量 (Webster, 2001).

地震在音乐戏剧中的作用在统治期间路易斯 第十四章 被审查了 戈尔斯 (La Gorce, 1996) 谁的文件作曲家和舞台设计师如何部署音乐效果传递地震破坏法庭审判

16.9 电影化

地震在纪录片中发现了表演, 电影的视觉见证, 生存者采访和档案录像的组合可以传达在科学中仍然抽象的灾难方面会计。事实上, 其中最早已知的纪录片之一自然灾害是 **梅西纳灾难** (1909) 由由 The 意大利公司中国在 1908 年地震的即时之后..... 这是欧洲历史上最致命

[21] 永久地点的位置 **摩托车** 收藏在卡塞塔的雷吉亚不是偶然, 而是故意的结果。情感上被艾米利奥本人所指责的决定。在他去世之前, 在 1994 年, 阿米利奥两次访问当时的卡塞塔主教拉斐尔。诺加罗, 第一次陪同高级指挥官吉安·马可雅各比蒂, 一次独自一人 他要求诺加罗签署承诺的文件。个人承诺, 作为公共道德权威, 保证永久性收藏在 Reggia 的集合。阿米利奥所提供的理由是毫无疑问: 拿破仑, 他告诉主教, 已经偷走了所有的东西。他没有任何感恩, 他的决定将收集到卡塞尔塔不是由贪婪或报复的渴望驱动, 而是由深度他的故乡城市的失望, 他从未充分认识到他的文化贡献, 尽管他花了几十年将他的画廊在 Martiri 广场转化为一个中心国际当代艺术。诺加罗主教, 回应这些会议在 2009 年 8 月的一封公开信中, 他完成了牧师教义。阿米利奥被描述为内心携带深而未解决的因这种缺乏认可而感到悲伤。阿米利奥死于 2 1994 年 7 月, 和收藏正式安装在 Reggia 之后的那年根据他的遗嘱, 法律依据参观 Vanvitelli 宫。这个问题没有放松: 在艾米利奥去世后几年, 成员们多次尝试阿米利奥家族和尼泊尔文化活动家将**摩托车** 从卡塞尔塔转移到那不勒斯的一座建筑。诺加罗公开反对这些企图, 重申两者的法律力量。他的遗嘱, 他所称之为文化和道德债务。谢谢卡塞塔市对捐赠的债务。争论描述了整个历史的紧张局势。收藏: 虽然地震激励它打击了营地后土和阿米利奥是自己拿破仑, 收藏他的旅程结束了, 不是在拿破仑, 而是在布尔本王宫三十。几英里向北, 正是因为它的创造者觉得那不勒斯他失败了。

[22] 我最喜欢的

第一卷: 力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的。特别是当代评论家们赞扬它, 因为它们展示了幸存者而不是废墟。承认电影的独特力量是它的能力文档是人类的痛苦而不是单独的物理毁灭。

1908 地震的文化记忆本身已成为一个专辑中文名: John Dickie's 梅西纳: 没有记忆的城市? (2008) 研究了如何彻底摧毁城市的建筑遗产留下了它没有可见的历史身份, 大多数意大利人城市拥有, 一个缺席仍然感觉到一个世纪后。

2003 年, 伊朗电影导演基亚努什 • 艾亚里 (Kianoush Ayari) 巴姆地震伊朗现代最破坏性的地震事件之一历史。他的电影获得国际认可, 包括罗马人获纪录片奖, 并作为历史记录和对集体创伤和耐力的反思。

代码

更新的, 哲学上雄心勃勃的贡献到纪录片与地震灾难和建造环境的参与是**建筑师** (Kossakovsky, 2024) 由俄罗斯电影制片人撰写和导演维克托 • 科萨科夫斯基. 这部电影是无言的冥想在石头和混凝土作为文明的基本材料, 由意大利建筑师米歇尔 • 德 (Michele De) 构建的景观项目卢奇 用非凡的无人机电影拍摄。

科萨科夫斯基的路线在古老建筑和现代建筑地点之间移动破坏以直接对本章的担忧说话的方式: 巴尔贝克的寺庙废墟 在黎巴嫩 (pg. 38) 包括神秘无限的梅加利特, 所谓的 **怀孕妇女的石头**切断了四角, 但永远不会移动, 在景观中出现一个令人难以置信的问题关于人类的野心和地质时间, 如布里 **克里特** 是橡胶土耳其的城市被 2023 年 2 月的灾难性地震摧毁, 乌克兰战争所造成的破坏, 至于这一章节, 吉布利娜新 自己, 从上方拍摄为空气美術館後現代雕塑的科拉奥 从建造原来的山城的废墟。影片也以元素为主。美丽的简单的马索尼亚架和瓦尔特形状 (cf. 章节 32 和 31) 其结构性逻辑 通过纯粹的地质解决力 (cf. 章节 8) 主持人不仅仅是技术人员。实现, 但作为一种文明智慧的混凝土和钢材建筑大部分都被遗弃了。

基本的论点是 **建筑师**由 De Lucchi 在电影的分散对话, 就是地震的破坏性, 战争, 工业挖掘是不可分割的, 从一个更深的问题如何和為什麼要建造: "当我们设计某种东西时," 他看见了,"我们设计了人的行为。" 这个问题 - 这也是, 在另一个记录中, 每個傳統在本章中審查的問題 **建筑师** 被称为最寻找的电影关于灾难与建造环境之间的关系。对于一个历史的结构分析 - 从人类出生的纪律坚持理解事物为什么站起来, 为什么会掉下来..... 电影特别适合最终艺术冥想。它提醒我们, 即使在稳定和崩溃的机制被理解后, 废墟本身仍然需要解释。

16.10 结论

在本章中调查的八个领域 神话、宗教、哲学、文学、建筑、艺术、音乐和电影 构成一个延伸的冥想在一个问题上: 它是什么意思, 当地下我们的脚是不可靠的吗?

最早的答案被授予机构: 一只小鱼, 一只蛇转动, 一失败的巨人在山底下转动。信仰将这种反射转化为正式的结构, 包含地震在道德秩序和要求社区反应。哲学对象, 反映到批判性审查 A 在里斯本辩论的进程高峰, 在那里沃尔泰的愤怒, 罗塞奥的脆弱性原社会学, 以及坎特的自然主义共同标志着决定性过渡: 地震不再主要是神学问题, 变成一个科学。文学和艺术

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

记录此特殊敏感度的过渡: 伏尔泰之间的距离**诗歌** 谁不能描述里斯本没有面对上帝 和基西莫多对梅西娜的复仇, 在那里上帝完全缺席, 是距离。两世纪的自然探索已经过去了。

这些域的结合不仅仅是一个共享主题, 而且是一个共享的主题。预言。每一个经历地震的文化都必须回应答案是相同的问题, 每一个答案都完成了相同的基本工作: 把恐怖变成意义。神话故事, 神学故事框架, 哲学论点, 建筑记忆标志着一个整个城市在混凝土 - 这些不是连续的替代一个另一个但连续的层次, 是人类对发现的不断反应。地球不是稳定的基础我们需要它是。

迪拉克的 信任辞职, 引用在开幕式上 §16.2 假设现代的理解是神话和神学解释灾难过时。和这个章节的证据表明不一样。科学解释有把捕鱼、蛇和被囚禁的巨人移开, 但他没有消除了解释反射本身 坚持一个非凡的事件必须拥有一个不只是物理原因, 而是一个代理人, 一个意图。一个意义。这个反射转移到其他域, 在其中观察仍然分裂, 解释不确定。其中一个最现代的阴谋性表现不在地下, 而是在天空中。

16.11 标签: 从纳马佐到罗斯威尔

在本章中审查的神话不只是从无知中产生的。他们出于一个不可否认的经历和一个看不见的经历之间的相遇。原因。地球移动了, 在没有观察机制的情况下, 想象力提供了一个代理人: 在埃多日本, 一个巨大的捕鱼在一个圣石 (§16.2.1) 别处有蛇, 被囚禁的巨人, 一个受侮辱的神性, 或宇宙力量暂时释放限制。科学知识最终使这些特定的代理人, 但它并没有消除创造它们的人类冲动。

在现代技术世界中, 这种冲动并没有消失; 它转移到其他域, 其中观察仍然分裂和不确定的解释, 在路上产生自己的文学、艺术和电影, 就像地震在上面的部分一样。其中, 更多阴谋的表达 - 以及神话线性最容易跟踪 是持久的信念, 未解释的灯光和物体在天空中, 有访问的智慧的证据。

与纳马佐的平行比它首先出现更接近。纳马佐不需要唯一的信徒, 只有一个名字, 一个寺庙, 以及木块印刷的传统。成为民间想象力的固定点 (§16.2.1). An 1947 年 7 月在新墨西哥罗斯威尔附近发生的意外事件, 要求更多成为现代流行乌菲学的创始传说。十年的官方声明、调查和分类记录取得了惊人的成就。很少把它放下。像纳马佐的传统一样, 它生存了每一个失败。关于卡西马或埃比苏, 以解释一个特定的地震, 罗斯威尔传说它所提供的解释是生存的 因为, 作为一个神话, 它从来没有建造过。要被伪造。它是为了在想象中占据一个位置。只有观察不能填补。

词汇发展了, 但根本问题没有。文化的长期讨论的现象在名称下 **未识别的飞行对象**, 或 UFO, 现在正在在更广泛的官方命名下进行调查**未识别的异常现象**或 UAP。在官方科学用途中, UAP 是指尚未被识别为飞机或已知的观测。自然现象; 名称描述了当前状态的观察者的知识而不是现象本身的起源 (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). **未识别** 因此不意味着**不可解释的**但是, 更少的意思是 **外星人**.

区别很容易被隐藏, 当观察似乎违反正常的物理期望 一个物体可能似乎没有动态移动, 加速超越已知飞机的能力, 或消失。即时的。然而, 显而易见的物理侵犯可能不是在对象, 但在观察条件下: 不确定的距离或规模; 强迫视野, 平行, 传感器平台的运动, 大气条件、仪器或

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

视频压缩文件、估计错误速度，或缺乏需要重建事件的代数据。NASA 的独立研究发现，许多 UAP 报告的分析被阻止低调传感器，缺乏多次测量，缺乏传感机甲状腺数据和不适当的基准数据。对已知的人进行审查 “GoFast” 录制表明，异常动作的印象可能主要源于观察飞机的速度和平行线。效应 (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023) 此时此刻，同一案已重新审查。All-Domain Anomaly Resolution Office 的详细信息 (All-domain Anomaly Resolution Office, 2024; All-domain Anomaly Resolution Office, 2025). 也就是说，在较小的范围内，同样的过渡里斯本地震强迫在十八世纪的欧洲 (§16.4.4) 一个事件首先为其意义阅读，而不是受重建、测量和仪器化。在这种情况下，神秘是真实的，但它的来源可能是证据不足。而不是物理法的不足。

这一点都没有表明生命在宇宙的其他地方不存在。它也不要求任何不寻常的观察被否认为三位一体。科学从异常和进步开始，认真对待它们。但它它还要求解释保持与证据相比例。NASA 的研究没有发现有证据的科学证据表明，现有的 UAP 报告外星人起源 (NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team, 2023). 无法识别事件因此，这是调查的开始，而不是一个结论。外星情报已经揭露了自己。

这个现象本身不一定是神话的，因为它围绕着它变成了神话。卡尔 • 朱恩 这个论点在 1950 年代末，描述飞翔的沙发作为现代神话中所看到的东西天空 (Jung, 1959) 罗斯威尔之前的几年在流行传说和几十年前,UAP 成为官方字体。古代神话引人入地下不可访问的地区，强大动作解释了地球的震动; 现代讲述人居住了天空不可访问的距离，技术上超越的生物，其意图解释了双重的灯光、图像和痕迹。它的词汇不再是神学，而是技术: 太空船取代天地车辆，先进的动力取代神圣力量，政府秘密取代了上帝的隐藏委员会。基础结构保持相同。一个未解释的事件被任命为代理人; 代理人是有智慧和目的; 缺乏决定性的证据是被纳入讲话，而不是对它进行计算。

科学不需要我们消灭奇迹，它需要我们纪律。它。因此，在本章中调查的传统的持续教训是不是人类曾经相信愚蠢的事情，现在已经逃脱了它们。它是观察与解释之间的距离总是生育的土地。关于神话。曾经在卡什马圣殿下睡着的捕鱼，在受欢迎的想象力，给了来自罗斯威尔之外的游客的道路; 冲动那家住了，现在是另一个住了。在两种情况下，第一项义务原因是相同的: 保留神秘而不提前转换它进入机构。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。



巨人之城

巨人的落下 [a], 1532–1535. 福尔摩斯,Sala dei Giganti 城堡, 曼图亚。

[a] 与地震无关 ☹

审阅稿

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

第一卷参考文献：历史

ABAQUS User's Manual (1978). Hibbitt, Karlsson and Sorensen. Providence, RI.

Abdel Haleem, M. A. S. (2004). *The Qur'an: A New Translation*. Oxford World's Classics. Oxford: Oxford University Press.

Abe, Y. (2000). "Namazu-e no ue no Amaterasu". In: *Shiso*. Amaterasu above the catfish picture prints. Tokyo, pp. 25–52.

Accademia del Cimento (1667). *Saggi di naturali esperienze fatte nell' Accademia del Cimento*. Original Italian edition; English translation by W.E. Knowles Middleton, *The First Scientific Society*, 1971. Florence: Giunti.

Ackerman, J. S. (1949). "*ARS Sine Scientia Nihil EST*. Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan". In: *The Art Bulletin* 31.2, pp. 84–111.

Administration, F. H. (1969). *Silver Bridge Collapse Report*. Tech. rep. FHWA-RD-69-1. Investigation into the failure of the Silver Bridge, Point Pleasant, West Virginia. U.S. Department of Transportation.

Aimond, F. (1936). "Étude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion". In: *Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)* 4.

Al-Bīrūnī, A. R. (1910). *The Chronology of Ancient Nations*. Trans. by C. E. Sachau. An English version of the Arabic text of the Athār-ul-bākiya of Albīrūnī. London: W. H. Allen.

Alassi, S. (Mar. 2019). *Jacob Bernoulli' s Role in the History of Elasticity: From a Discussion with a Craftsman to the Discovery of the Elasticity Rules*. Presentation at the History of Mathematics Seminar, Mathematical Institute, University of Oxford.

– (2020). "From the Mechanics of Jacob Bernoulli to Digital History of Science. Infrastructure, Tools, and Methods". PhD thesis. University of Basel.

Alberti, L. B. (1485). *De re aedificatoria; Catoria Libri Decem Leo*. Nicolaus Laurentii, Alamanus.

– (1988). *On the Art of Building in Ten Books*. Trans. by J. Rykwert and N. Leach. MIT Press.

Alberti, L. B. and G. Tiraboschi (1804). *Della pittura e della statua di Leonbatista Alberti*. Vol. 34. Società tip. de'Classici italiani.

Alexander, K. D., R. Mark, and J. F. Abel (1977). "The structural behavior of medieval ribbed vaulting". In: *Journal of the society of architectural historians* 36.4, pp. 241–251.

Alexandria, H. of (1851). *The Pneumatics of Hero of Alexandria*. Trans. by B. Woodcroft. From the original Greek. London: Taylor Walton and Maberly.

All-domain Anomaly Resolution Office (May 2024). *Effect of Forced Perspective and Parallax View on UAP Observations*. Information Paper. U.S. Department of Defense.

– (Feb. 6, 2025). *Case: "Go Fast": Case Resolution*. Case Resolution Report. U.S. Department of Defense.

Andrade, E. N. D. C. (1950). "Wilkins Lecture-Robert Hooke". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series B-Biological Sciences* 137.887, pp. 153–187.

Anonymous (Aug. 1724). "Celebre catenariae problema geometris denuo propositum, iis praesertim qui ex Soc. Reg. sunt, quae Parisiis florent & Londini; Parisiis ad collectores

审阅稿

actorum erud. transmissum". In: *Acta Eruditorum* 43. Unsigned item (author not stated)., p. 366.
Antuña Bernardo, J. (2003). "Las estructuras de edificación de Eduardo Torroja Miret". PhD thesis. *Universidad Politécnica de Madrid; Escuela Técnica Superior de Arquitectura*.
Ap, L. and N. G. Faia (2018). "Form Finding Techniques of Branched Construction Developed by Frei Otto". In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 59.1, pp. 60–67.
Archimedes (-250). *De Planorum Æquilibriis (On the Equilibrium of Planes)*. c. 250 BCE. English translation in *The Works of Archimedes*, ed. T. L. Heath, Cambridge University Press, 1897.
Archimedes and T. L. Heath (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.
Argyris, J. H. and S. Kelsey (1960). *Energy theorems and structural analysis*. Vol. 60. Springer.
Aristotle (2000). *Mechanica*. Ed. by M. J. T. Lewis. Translated and introduced by Michael J. T. Lewis. Traditional attribution to Aristotle; authorship disputed. Oxford: Oxford University Press.
Arnold, D. (2003). *The Encyclopedia of Ancient Egyptian Architecture*. Princeton University Press.
Babbage, C. (1864). *Passages from the Life of a Philosopher*. London: Longman, Green, Longman, Roberts, and Green.
Backus, J. (1957). *The FORTRAN Automatic Coding System*. Tech. rep. New York: IBM.
Bacon, F. (2000). *Novum Organum*. Cambridge University Press.
Badami, A. (2012). "L'investimento in arte e cultura per fondare una città e generare una comunità a Gibellina. Intervista a Ludovico Corrao". In: *Archivio di Studi Urbani e Regionali* 105, pp. 66–86.
Bag, A. (2003). "Aryabhata's Contributions to Mathematics and Astronomy". In: *Indian Journal of History of Science* 38.2, pp. 123–135.
Baker, W. F. (1992). "Energy-based design of lateral systems". In: *Structural Engineering International* 2.2, pp. 99–102.
Baker, W. F. and A. McRobie, eds. (2025). *The Geometry of Equilibrium: James Clerk Maxwell and 21st-Century Structural Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, p. 322.
Baker, W. F., O. Skidmore, et al. (2013). "Structural possibilities". In: *The tall buildings reference book*. Routledge, pp. 229–240.
Baker, W. F. et al. (2015). "Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies". In: *Engineering Journal American Institute of Steel Construction* 52.3, pp. 203–217.
Balasubramaniam, R. (2000). "The Corrosion Resistance of the Iron Pillar of Delhi". In: *Current Science* 79.4, pp. 45–54.
Banū Mūsā ibn Shākir (850). *The Book of Ingenious Devices*. Arabic. Original Arabic manuscript, Baghdad. English translation in Donald R. Hill (ed. and trans.), *The Book of Ingenious Devices*, Dordrecht: Reidel, 1979. Baghdad: House of Wisdom.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Bardini, G. and G. M. Gianella (2014). “On the Evolution of the Idea of Curvature, from Newton to Gauss’ Theorema Egregium”. In: *Applied Mathematical Sciences* 8.167, pp. 8361–8376.

Barnes, J. (1984). *The Complete Works of Aristotle, Volume One: The Revised Oxford Translation*. Vol. 1. Princeton University Press.

Barrallo, J., S. Sanchez-Beitia, and P. Onati (2005). “Mathematical Models of Gothic Structures”. en. In: *Renaissance Banff: Mathemetics, Music, Art, Culture*, p. 8.

Bartholomew, A. (1840). *Specifications for Practical Architecture: Preceded by an Essay on the Decline of Excellence in the Structure and in the Science of Modern English Buildings: with the Proposal of Remedies for Those Defects*. J. Williams.

Bartlett, C. (2014). “The design of the Great Pyramid of Khufu”. In: *Nexus Network Journal* 16.2, pp. 299–311.

Barzilai, S., ed. (1909). *Scilla e Cariddi: Pubblicazione dell’Associazione della Stampa Periodica Italiana a beneficio del Patronato Regina Elena per gli orfani del terremoto*. Contributions by Giovanni Verga, Luigi Capuana, Arthur Conan Doyle, Benedetto Croce, Antonio Fogazzaro and others. Published in aid of earthquake orphans following the Messina disaster of 28 December 1908. Roma: Tipografia Roma di E. Armani & W. Stein, p. 159.

Bažant, Ž. (1976). “Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete”. In: *Journal of Engng. Mech., ASCE* 102.2, pp. 331–344.

– (1984). “Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal”. In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.

Bažant, Z. P. and Y. Zhou (2002). “Why did the world trade center collapse?—Simple analysis”. In: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 2–6.

Beeckman, I. (1939). *Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634*. Ed. by C. de Waard. 4 vols., 1939–1953. La Haye: Martinus Nijhoff.

Beghini, L. et al. (2014). “Connecting architecture and engineering through structural topology”. In: *Engineering Structures* 59, pp. 716–726.

Behnia, M. A. (2021). “Sustainability and hydraulic design in ancient Persian qanats”. In: *Journal of Hydraulic Engineering* 147.3.

Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. German. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.

Benedetti, G. B. (1585). *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber*. Original Latin text. Turin: Heirs of Melchior Sessa.

Benouville, L. (1891). *Note sur l’effondrement de la voûte du chœur de la cathédrale de Beauvais (1284)*. Unpublished manuscript / report. Referenced in 19th-century architectural structural studies.

Benvenuto, E. (1991a). *An Introduction to the History of Structural Mechanics; Part I: Statics and Resistance of Solids*. Springer-Verlag.

– (1991b). *An introduction to the History of Structural Mechanics; Part II: Vaulted structures and Elastic Systems*. Springler-Verlag.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Bergsjö, C. and M. Pettersson (2016). *A Simulation of the Millau Viaduct*. Tech. rep. KTH, Royal Institute of Technology in Stockholm.

Berlyn, P. and C. Fowler (1851). *The Crystal Palace: Its Architectural History and Constructive Marvels*. London: James Gilbert.

Bernoulli, J. (Dec. 1694). "Responsio ad Objectiones Clarissimi Hugenii de Curvatura Laminae Elasticae". In: *Acta Eruditorum*. Bernoulli's published reply to Christiaan Huygens's critique of the elastica, pp. 580–584.

– (1744). *Varia Posthuma*. Ed. by N. I. Bernoulli. Posthumous mathematical works edited by Nicolaus (I) Bernoulli. Basel: H.A. Gosse & Soc.

Bernoulli, Daniel (1726). "1726. em Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 1, 126-142". In: *Die Werke* 3, pp. 119–135.

– (1738). *Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii. Opus academicum ab auctore, dum Petropoli ageret, congestum*. Latin. With engraved title vignette and 12 folding plates. Argentorati: Sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, p. 304.

– (1744). "Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcunque legem inter se observantibus extensi una cum solutione problematum quorundam novorum eo pertinentium". In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 3. Originally written in 1728; published in the 1744 Bologna edition, pp. 57–84.

Bernoulli, Jakob (1677–1705). *Meditationes*. Manuscript. Scientific diary manuscript, 367 pages, 287 entries. Available digitally at Bernoulli-Euler Online (BEOL). Basel University Library.

– (June 1690a). "Additamentum ad Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & areis triangulorum sphaericorum". In: *Acta Eruditorum*. Contains the famous elastica challenge problem concerning the bending of elastic beams, presented in cipher, pp. 288–290.

– (May 1690b). "Problema funicularium (challenge on the curve of a hanging thread)". In: *Acta Eruditorum*. Short challenge notice; see also a follow-up item in the same year on p. 360., pp. 218–220.

– (1691). *Dialogue with a Craftsman. Didactic exchange preceding the elastica challenge*. In *Acta Eruditorum*, Leipzig. Often cited as an introductory "dialogue" attached to Bernoulli's early announcements on the elastica (1691–1694). No separate standalone edition is known.

– (1692). *Quadratura curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura*. BirkhauserMed. CLXX; Ref. UB: L Ia 3. Die Werke von Jakob Bernoulli.

– (June 1694). "Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a Pondere Inclusi Fluidi Expansi. Radii Circulorum Osculantium in Terminis Simplicissimis Exhibiti, Una cum Novis Quibusdam Theorematis huc Pertinentibus". In: *Acta Eruditorum*. Includes Bernoulli's solution of the elastica and the "Golden Theorem"; reprinted in *Opera* (1744), pp. 576–600., pp. 262–276.

– (1744a). "Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, vol 1". In: *Geneve: Cramer-Philibert*.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Bernoulli, Jakob (1744b). *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera*. Latin and French. Ed. by G. Cramer. 2 vols. Posthumous collected works, excluding *Ars Conjectandi*. Contains *Varia posthuma* and biography by J.J. Battier (1705). Geneva: sumptibus hæredum Cramer & fratrum Philibert.
– (1855). "Letter to G. W. Leibniz, December 1687". In: *Die Mathematischen Werke von Jakob Bernoulli*. Ed. by C. I. Gerhardt. Vol. 3. Originally written in 1687; first published in this 1855 edition. Leipzig: B. G. Teubner, pp. 1–5.
Bernoulli, Johann (June 1696). "Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur". In: *Acta Eruditorum* 15. Announcement of the brachistochrone (curve of fastest descent) problem, pp. 269–271.
Bernoulli, Johann (1691a). *Integral Calculus. Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque; conseriptae in usum Ill. Marchionis Hopitalii, cure auctor Parisiis ageret annis*. In Opera III.
– (1691b). "Letter to Leibniz". In: *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*. Ed. by Spiess, Otto. Vol. 1. Basel: Birkhäuser.
– (June 1691c). "Solutio problematis funicularii". In: *Acta Eruditorum*, pp. 274–276.
– (June 1697a). "Curvatura radii in diaphanis non uniformibus: Solutio problematis brachistochrona". In: *Acta Eruditorum*. Solution to the brachistochrone problem, showing the curve of fastest descent is a cycloid, pp. 269–271.
– (Jan. 1697b). *Programma [extending the brachistochrone challenge]*. Extension of the brachistochrone challenge deadline to Easter 1697. Groningen.
– (1713). *Opera Omnia*. Collected works including contributions to calculus and mechanics. Lausanne and Geneva: Apud Marcum-Michaelem Bousquet & socios.
– (1725). "Lettre de Bâle du 26 Janvier 1717". In: *Nouvelle Mécanique ou Statique*. Ed. by P. Varignon. Vol. 2. Contains Johann Bernoulli's 1717 letter on virtual velocities. Paris: Claude Jombert. Chap. Section IX, pp. 174–176.
Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Billington, D. (1979). *Robert Maillart's Bridges; The art of Engineering*. Princeton University Press.
– (1983a). *Structural Studies*. Tech. rep. Department of Civil Engineering, Princeton University.
– (1983b). *The Tower and the Bridge*. Princepton University Press.
– (1984a). *Structures and the Urban Environment*. Tech. rep. Lecture notes, CE 262. Department of Civil Engineering, Princeton University.
– (1984b). *Structures and the Urban Environment*. Tech. rep. Catalogue and Commentary on the slides. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Billington, D. and R. Mark, eds. (1970). *Civil Engineering–history, Heritage, and the Humanities: Background Papers from the First National Conference on Civil Engineering–History, Heritage and the Humanities*. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Billington, D., R. Mark, and J. Abel, eds. (1972). *The Maillart Papers: From the Second National Conference on Civil Engineering: History, Heritage and the Humanities: Commemorating the*

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Hundredth Anniversary of the Birth of Robert Maillart. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Blaikie, P. et al. (1994). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. London: Routledge.
Blasjo, V. (2017). *Transcendental curves in the Leibnizian calculus*. Academic Press.
Boller, G. and P. D'Acunto (2021). "Structural design via form finding: Comparing Frei Otto, Heinz Isler and Sergio Musmeci". In: *History of Construction Cultures*, pp. 431–438.
Boller, G. and J. Schwartz (2020). "Modelling the form. Heinz Isler, Frei Otto and their approaches to form-finding". In: *Proceedings of Seventh Conf. Constr. Hist. Soc.,(3-5 April 2020, Cambridge, UK)*, pp. 565–76.
Bony, J. (1983). *French Gothic Architecture of the Twelfth and Thirteenth Centuries*.
Bos, H. J. M. (1974). "Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus". In: *Archive for history of exact sciences* 14.1, pp. 1–90.
Bourdais, J. (1881). *Projet de phare monumental pour Paris, élévation*. Original drawing, Musée d'Orsay, Paris.
Boyer, C. B. and U. C. Merzbach (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.
Brackenridge, J. B. (1992). *The critical role of curvature in Newton' s developing dynamics*.
Brand, D. and H. Nicholson (2013). "Learning from Lisbon: Contemporary cities in the aftermath of natural disasters". In: *Approaches to Disaster Management-Examining the Implications of Hazards, Emergencies and Disasters*. IntechOpen.
Branner, R. (1962). *Le Maitre de la cathédrale de Beauvais*. Vol. II, pp. 77–92.
– (1997). "The Collapse of the Tower and Choir at Beauvais Cathedral". In: *The Engineering of Medieval Cathedrals*. Ed. by R. Mark and P. Mellars. Ashgate, pp. 141–158.
Bravais, A. (1850). "Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace". In: *Journal de l'École Polytechnique* 19, pp. 1–128.
– (1866). *Etudes cristallographiques*. Gauthier-Villars.
Brew, J. S. (2007). "Computational Analysis of Heinz Isler's Shell Structures". In: *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*. Venice, Italy, pp. 1–8.
Broad, W. J. (2006). *The Oracle: Ancient Delphi and the Science Behind Its Lost Secrets*. Penguin Books.
Brodini, A. (2013). "Le coperture a grande luce nell' opera di Sergio Musmeci". In: *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. Ed. by P. Desideri et al. U. Allemandi, pp. 253–262.
Brownbridge, A. (1986). *Ancient Chinese Bridge Architecture*. Asian Historical Press.
Brühwiler, E. (2010). "Eminent Structural Engineer: Christian Menn—Bridge Designer and Builder". In: *Structural Engineering International* 20.4, pp. 470–472.
Bukowski, J. (2008). "Christiaan Huygens and the Problem of the Hanging Chain". In: *The College Mathematics Journal* 39.1, pp. 2–11.
Buridan, J. (1971). *John Buridan: Quaestiones super libros De caelo et mundo*. Ed. by J. Hubert. Latin text. Paris: Vrin.

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Buridan, J. (1991). *John Buridan: Questions on the Eight Books of Aristotle's Physics*. Ed. by M. Clagett. Latin text with English translation. Madison: University of Wisconsin Press.
Bush, V. (1931). "The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equations". In: *Journal of the American Society of Mechanical Engineers* 53, pp. 107–116.
Butzer, K. W. (1976). "Early Hydraulic Civilization in Egypt: A Study in Cultural Ecology". In: *University of Chicago Press* 11, pp. 123–145.
Cannone, M. and S. Friedlander (2003). "Navier: blow-up and collapse". In: *Notices of the AMS* 50.1, pp. 7–13.
Capecchi, D., G. Ruta, and P. Trovalusci (2010). "From classical to Voigt's molecular models in elasticity". In: *Archive for history of exact sciences* 64.5, pp. 525–559.
Carnot, L. (1783). *Essai sur les machines en général*. First edition. Published anonymously as "par un officier du Corps Royal du Génie." Second edition with author's name: Dijon: Defay; Paris: Nyon, 1786. Dijon: [s.n.]
– (1803). *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*. Substantially revised and expanded version of the *Essai sur les machines en général* (1783). Paris: Deterville.
Castigliano, A. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.
Cauchy, A. L. (1822). "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques". In: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 9–13.
– (1823). "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques". In: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 2. Paris: De Bure Frères, pp. 42–56.
– (1827). *Exercices de mathématiques*. Vol. 2. Contains key papers on elasticity theory. Paris: De Bure Frères.
– (1828). "Sur les équations qui expriment les conditions d' équilibre ou les lois du mouvement intérieur d' un corps solide, élastique ou non élastique". In: *Exercises de Mathematiques*. Vol. 3. De Bure Frères, pp. 160–187.
– (1829). "Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle". In: *Exercices de Mathématiques*. Vol. 4. Paris: De Bure Frères, pp. 129–139.
– (1841). *Oeuvres Complètes de Cauchy*. Gauthier-Villars.
Caus, S. de (1615). *Les Raisons des Forces Mouvantes avec Diverses Machines tant Utilles que Plaisantes*. Treatise on hydraulics and mechanics; introduced the term "Travail" (work) for force times displacement. Second edition Paris, 1624. Frankfurt: Jan Norton.
Charle, C. (2004). "Le scandale de Panama: Une affaire d'État à la fin du XIXe siècle". In: *Revue Historique* 312.4, pp. 847–872.
Charlton, T. M. (1982). *A History of Theory of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge: Cambridge University Press.
Châtelet, É. du (1740). *Institutions de Physique*. Paris: Prault.
Chen, P. W. and L. E. Robertson (1972). "Human perception thresholds of horizontal motion". In: *Journal of the structural division* 98.8, pp. 1681–1695.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Child, J. (1920). *The Early Manuscripts of Leibniz*. Translations of various latin manuscripts of Leibniz. Chicago, London: The Open Court Publishing Company, p. 238.
Chilton, J. and H. Isler (2000). *The architecture of Heinz isler*. Thomas Telford.
Ching, F. D. (2011). *A visual dictionary of architecture*. John Wiley & Sons.
Chiorino, C. and C. M. Olmo (2010). *Pier Luigi Nervi: l'architecture comme défi*. Silvana Editoriale.
Cité de l'architecture & du patrimoine (Apr. 2015). *La Cité radieuse: 1945-1952, Marseille, Le Corbusier*. French. Tech. rep. Museum educational resource produced for the Éduthèque platform. Paris: Cité de l'architecture & du patrimoine, p. 12.
Clagett, M. (1964). "Nicole Oresme and Medieval scientific thought". In: *Proceedings of the American Philosophical Society* 108.4, pp. 298–309.
– (1995). *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume Two: Calendars, Clocks, and Astronomy*. American Philosophical Society.
– (1999). *Ancient Egyptian Science, Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society.
Clapeyron, B.-P.-E. (1834). "Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur". In: *Journal de l'École Polytechnique* 14.23. Work completed 1833; published 1834, pp. 153–190.
Clapeyron, B. (1857). "Calcul d' une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés". In: *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 45, pp. 1076–1080.
Clark, E. and R. Stephenson (1850). *The Britannia and Conway Tubular Bridges: With General Inquiries on Beams and on the Properties of Materials Used in Construction*. Vol. 2. London: Day, Son, and John Weale.
Clausius, R. (1850). "Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen". In: *Annalen der Physik* 155.3, pp. 368–397.
– (1854). "Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie". In: *Annalen der Physik* 169.12, pp. 481–506.
– (1879). *The Mechanical Theory of Heat*. Trans. by T. A. Hirst. 2nd. Translation of *Die mechanische Wärmetheorie*. London: Macmillan.
Clebsch, A. (1862a). *Theorie der elasticität fester körper*. BG Teubner.
– (1862b). *Theorie der Elasticität fester Körper*. Posthumously edited by Gustav Kirchhoff. Leipzig: B.G. Teubner.
– (1866). *Théorie de l'élasticité des corps solides*. Ed. by B. de Saint-Venant. Traduit de l'allemand et annoté avec des additions par M. Barré de Saint-Venant. Paris: Mallet-Bachelier.
Clough, R. W. (1960). "The finite element method in plane stress analysis". In: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960*.
– (1962). *The stress distribution of Norfork Dam*. Tech. rep. California Univ Berkeley Institute of Engineering Research.
– (2004). "Early history of the finite element method from the view point of a pioneer". In: *International journal for numerical methods in engineering* 60.1, pp. 283–287.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

第一卷参考文献：历史

Clough, R. W. and E. L. Wilson (1999). “Early finite element research at Berkeley”. In: *Fifth US National Conference on Computational Mechanics*, pp. 1–35.
Clough, R. and J Penzien (1975). *of Structures*. McGraw-Hill.
Clough, R. and E. Wilson (1962). “Stress analysis of a gravity dam by the finite element method”. In: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Coe, M. D. (2005). *The Maya*. Thames & Hudson.
Cohen, I. B. (2002). “Newton’s concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion”. In: *The Cambridge Companion to Newton*. Ed. by I. Cohen and G. Smith.
– (2013). *Introduction to Newton’ s "Principia"* . Harvard University Press.
Coleman, B. D. and W. Noll (1963). “The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity”. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13.1, pp. 167–178.
Como, M. (2013). *Statics of historic masonry constructions*. Vol. 1. Springer.
Coolidge, J. L. (1952). “The unsatisfactory story of curvature”. In: *The American Mathematical Monthly* 59.6, pp. 375–379.
Copernicus, N. (1995). *On the Revolutions of the Heavenly Spheres*. Prometheus Books.
Corazzi, R. (2012). “La curva “lossodromica” e la spina pesce”. In: *DISEGNARECON*, pp. 85–92.
Corbusier, L. (1954). *The modulor: a harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*. Vol. 1. Harvard University Press.
– (1955). *Le Modulor 2*. Paris: Éditions de l’Architecture d’Aujourd’hui.
Corbusier, L. and P. Jeanneret (1929). “Les cinq points d’une architecture nouvelle”. French. In: *Œuvres complètes 1910–1929*. Ed. by W. Boesiger. First delivered as a lecture at the Weissenhof Siedlung, Stuttgart, in 1927; reprinted in later editions of the Œuvre complète. Erlenbach-Zurich: Les Éditions d’Architecture.
Corporation, S. R. (1951). *UNIVAC I System Description*. Tech. rep. New York: Sperry Rand.
Coulomb, C (1773a). “Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l’architecture”. In: *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l’Académie Royale des Sciences*. Foundational work on earth pressure and slope stability, pp. 343–382.
Coulomb, C. (1773b). “*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l’architecture*”. In: *mémoires de l’académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.
– (1773c). “Mémoires de mathématique et de physique”. In: *Academie Royale des Sciences* 7.
Courant, R (1943). “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 49, pp. 1–23.
Cross, H. (1932). “Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments”. In: *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 96.1. *Includes all subsequent discussions*, pp. 1–78.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Cross, H. (1936). *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. Tech. rep. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering ⋯
Cross, H. and N. D. Morgan (1932). *Continuous frames of reinforced concrete*. J. Wiley & Sons, Incorporated.
Crotti, F. (1888). *La Teoria dell'Elasticità ne' suoi Principi Fondamentali e nelle sue Applicazioni Pratiche alle Costruzioni*. Milan: Ulrico Hoepli.
Crowe, M. J. (1994). *A history of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*. Courier Corporation.
Culmann, K. (1866). *Die Graphische Statik*. Meyer and Zeller, Zürich.
Cumming, J. E. (2001). "Brumel, Antoine". In: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Ed. by S. Sadie. 2nd ed. Vol. 4. London: Macmillan, pp. 485–490.
Curatola, G. and G. Scarcia (2003). *Persepolis: The Great Stairway*. Getty Publications.
Currà, E. and M. Russo (2018). "Reinforced concrete in Italy through the works of two generations of engineers: Mario and Giorgio Baroni". In: *6th International Congress on Construction History (6ICCH 2018): ''Building Knowledge, Constructing Histories*, pp. 9–13.
Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.
– (1505). *Codex Atlanticus*. Pinacota Ambrosania, Milan.
d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine.
D'Alembert, J. l. R. (1747). "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration". In: *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin* 3, pp. 214–219.
Daley, S. (2013). "A Star Architect Leaves Some Clients Fuming". In: *The New York Times*.
Daniels, P. T. and W. Bright, eds. (1996). *The World's Writing Systems*. New York: Oxford University Press.
Davis, M. (2018). *The universal computer: The road from Leibniz to Turing*. AK Peters/CRC Press.
De Belidor, B. (1729). *Architecture hydraulique ou l'Art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie*. C. Jombert.
De Boer, J. Z. and D. T. Sanders (2005). *Earthquakes in Human History: The Far-Reaching Effects of Seismic Disruptions*. Princeton University Press.
De Honnecourt, V. (1858). *Album de Villard de Honnecourt, architecte du XIIIe siècle: manuscrit publié en fac-simile, annoté, précédé de considérations sur la renaissance de l'art français au XIXe siècle et suivi d'un glossaire*. Imprimerie Imperiale.
– (2006). *The Medieval Sketchbook of Villard de Honnecourt*. Ed. by T. Bowie. Reprints the 1959 Indiana University Press edition (introduction and captions by Theodore Bowie), using plates from R. Willis's 1859 English facsimile, which in turn reproduces the engraved plates of the 1858 Lassus & Darcel edition (De Honnecourt, 1858). Dover Publications.
De l'Orme, P. (1561). *Nouvelles inventions pour bien bastir et a petits fraiz*. French. Illustrated treatise presenting geometric and constructive rules for economical building, including proportional design methods. Paris: Federic Morel.
Deakin, R. (2007). "Catenary Curve". In: Technical paper on the mathematical derivation of the catenary.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

DeJong, M. J. (2009). “Seismic assessment strategies for masonry structures”. PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology.
Descartes, R. (1637a). *Discours de la méthode*. Originally published with *La Géométrie*, *La Dioptrique*, and *Les Météores*. Leiden: Jan Maire.
– (1897a). *Oeuvres de Descartes*. Ed. by C. Adam and P. Tannery. 11 vols., 1897–1913. Paris: Léopold Cerf; later Vrin/CNRS reprints.
Descartes, R. (1898). *Oeuvres de Descartes*. Vol. 2: *Correspondance, mars 1638 – decembre 1639*. Ed. by C. Adam and P. Tannery. Paris: Leopold Cerf.
Descartes, R. (1927). *Selections*. C. Scribner’s sons.
Descartes, R. (1637b). *La Géométrie*. Leiden: Jean Maire.
– (1644). *Principia Philosophiae*. English title: Principles of Philosophy. Part II contains the laws of motion and conservation principles. Amsterdam: Ludovicus Elzevirius.
– (1897b). *Correspondance de René Descartes*. Ed. by C. Adam and P. Tannery. Vol. 2. Œuvres de Descartes. Letter to Marin Mersenne, 11 October 1638, pp. 542–544. Paris: Léopold Cerf.
Desideri, P. et al. (2013). *La concezione strutturale: ingegneria e architettura in Italia negli anni cinquanta e sessanta*. U. Allemandi.
Devlin, K. (2011). *The Man of Numbers: Fibonacci’s Arithmetic Revolution*. New York: Walker & Company, p. 192.
Diderot, D. and J. l. R. d’Alembert (1751). *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. First volume published 1751; final volume 1772. Paris: Briasson, David and Le Breton, Durand.
Dirac, P. A. M. (1963). “The Evolution of the Physicist’s Picture of Nature”. In: *Scientific American* 208.5. Based on a 1958 lecture; includes Dirac’s comments on religion and primitive explanations of nature, pp. 45–53.
Downey, G. (1946). “Byzantine Architects, their Training and Methods”. In: *Byzantion* 18, pp. 99–118.
Dragicevic, P. and Y. Jansen (2012). *List of Physical Visualizations*. Last accessed 2022-03-30.
Dragoni, M. (2005). *Terrae motus. La sismologia da Eratostene allo tsunami di Sumatra*. Frontiere. Torino: UTET Libreria. 394 pp.
Drake, S. (1970). *The Genesis of Fluid Mechanics 1640–1780*. Vol. 6. Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer-Verlag.
– (1976). “A further reappraisal of impetus theory: Buridan, Benedetti, and Galileo”. In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 7.4, pp. 319–336.
Dreyfuss, H. (1960). *The Measure of Man: Human Factors in Design*. New York: Whitney Library of Design.
Dugas, R. (1988). *A history of mechanics*. Courier Corporation.
Dugas, R. (1955). *A History of Mechanics*. Dover Publications.
Duhem, P. (1891). *Hysteresis dans les phénomènes capillaires. Application de la thermodynamique à la mécanique des fluides*. Paris: Gauthier-Villars.
– (1893). *Introduction à la mécanique chimique*. Paris: Carré.
– (1911). *Traité d’énergétique ou de thermodynamique générale*. Vol. 2. Paris: Gauthier-Villars.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

d’ Alembert, J (1761). “Démonstration du principe de la composition des forces”. In: *Opuscules mathématiques* 1, pp. 169–179.
– (1773). “Nouvelle démonstration du parallélogramme des forces”. In: *Opuscules mathématiques* 6, pp. 360–370.
D’ Ayala, D. and E Tomasoni (2008). “The structural behaviour of masonry vaults: Limit state analysis with finite friction”. In: *Structural Analysis of Historic Construction: Preserving Safety and Significance, Two Volume Set*. CRC Press, pp. 67–82.
Eagar, T. W. and C. Musso (2001). “Why did the World Trade Center collapse? Science, engineering, and speculation”. In: *Jom* 53.12, pp. 8–11.
Eckert, J. P. and J. W. Mauchly (1946). *Description of the ENIAC and the ENIAC Project*. Tech. rep. Philadelphia: University of Pennsylvania.
Einstein, A. (1935). “Emmy Noether”. In: *The New York Times*. Obituary letter to the editor.
– (1954). *Ideas and Opinions*. Originally compiled from Mein Weltbild (1934), translated by Sonja Bargmann. Includes essay “On the 300th Anniversary of Galileo’s Death.” New York: Crown Publishers.
Elizalde, R. R. (2025). “Beauvais Cathedral: The Ambition, Collapse and Legacy of Gothic Engineering”. In: *Heritage* 8.6, p. 203.
Engesser, F. (1889). “Über den Satz vom Minimum der Ergänzungsarbeit”. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 33, pp. 927–928.
Eshelby, J. (1970). “Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics”. In: *Inelastic Behavior of Solids*. Ed. by M. Kanninen et al. New York, N.Y.: McGraw-Hill, pp. 77–115.
Espion, B. (2016). “Pioneering hypar thin shell concrete roofs in the 1930s”. In: *Beton-und Stahlbetonbau* 111.3, pp. 159–165.
Établissements Eiffel, C. des (19th Century). *Historical Works and Projects of the Eiffel Company*. French. Founded by Gustave Eiffel in 1866, famous for the Eiffel Tower and other engineering achievements.
Euclid and T. L. Heath (1956). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*. Dover Publications.
Euler, L. (1728). “*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*”. In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 3, pp. 64–77.
– (1732). “*Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*”. In: *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 70–84.
– (1741). “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”. In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, pp. 128–140.
– (1744a). “Additamentum I: De curvis elasticis”. In: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Ed. by C. Carathéodory. Vol. 24. Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series I. Reprint of the 1744 Lausanne and Geneva edition with editorial notes. Basel: Birkhäuser, pp. 231–308.
– (1744b). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Euler’s definitive formulation of the elastica, building on the earlier work of Jakob Bernoulli

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

and Daniel Bernoulli. Lausanne and Geneva: Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, pp. 245–297.
Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. 2 volumes. Eneström Index E101–E102. Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet.
– (1757a). "Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides". In: *Opera Omnia*. Vol. 12. Series 2. Basel: Orell Füssli, pp. 92–132.
– (1757b). *Principes généraux du mouvement des fluides*. Vol. 11. Presented 1755; published 1757, pp. 274–315.
– (1759). "Sur la force des colonnes". In: *Mémoires de l' Académie des Sciences de Berlin* 13. Eneström number E238. Original French version of Euler's classic column buckling paper., pp. 252–282.
– (1760). "De motu rectilineo tremulo linearum". In: *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 6. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 315–347, pp. 208–242.
– (1771). " *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flesibilium quam elasticorum*". In: *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 381–413.
– (1780). "De formulis differentialibus, quas frustra hactenus quaesivit geometria flexionum et tensionum". In: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Reprinted in *Opera Omnia*, Series II, Volume 10, pp. 559–586, pp. 36–61.
– (1862). "De oscillationibus annulorum elasticorum". In: *Opera Postuma*, pp. 129–131.
Evans, J. (1998). *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford University Press.
Felippa, C. A. (2001). "A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts". In: *Computers & Structures* 79.14, pp. 1313–1324.
Fernández Casado, C. (1980). *Historia del puente en España: Puentes romanos*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Ferrers, N. M., ed. (1871). *Mathematical Papers of George Green*. London: Macmillan.
Fishman, R. (1982). *Urban Utopias in the Twentieth Century: Ebenezer Howard, Frank Lloyd Wright, Le Corbusier*. MIT press.
Fletcher, R. (2004). *The cross and the crescent: the dramatic story of the earliest encounters between Christians and Muslims*. Penguin UK.
Florensky, P. (1996). *Beyond Vision: Essays on the Perception of Art*. Trans. by W. Salmond. London: Reaktion Books.
Fondazione Amelio (1987). *Terrae Motus: Naples, Tremblement de Terre*. italian, french. Exhibition catalogue, Grand Palais, Paris, 28 March – 11 May 1987. Naples: Guida, p. 302.
Forty, A. (2013). "Happy Ghost of a Possible City: Il Cretto, Gibellina". In: *AA Files* 66, pp. 101–108.
Foundation, P. S. (2001). *Python Language Reference, Version 2.0*. Python 2.0 release documentation.
Fourier, J.-B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot.
Fourier, J. (1798). "Mémoire sur la Statique, Contenant la Démonstration du Principe des Vitesses Virtuelles". In: *Journal de l'École Polytechnique* 5. Reprinted in *Œuvres de Fourier*, ed. G. Darboux, Gauthier-Villars, Paris, 1888–1890, pp. 20–60.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Fraser, C. G. (1991). “Mathematical technique and physical conception in Euler’s investigation of the elastica”. In: *Centaurus* 34.3, pp. 211–246.
Freedberg, D. (2003). *The eye of the lynx: Galileo, his friends, and the beginnings of modern natural history*. University of Chicago Press.
Galerkin, B. G. (1915). “Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates”. In: *Vestnik inzhenerov i tekhnikov* 19.7, pp. 897–908.
Galilei, G. (1594). *Le mecaniche*. Ed. by A. Favaro. Vol. 2. Edizione Nazionale; cite “Della vite”, p. 185 for the “quanto si guadagna di forza ...” passage. Firenze: Barbera.
– (1623). *Il Saggiatore*. The Assayer. Rome: Giacomo Mascardi.
– (1632). *”Dialogue Concerning the Two Chief World Systems: Ptolemaic and Copernican”*. Originally published by Elzevir, The Neterlands, 1638. Translation by Stillman Drake and Foreword by Albert Einstein. University of California press.
– (1638). *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*. English translation: *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Leiden: Elzevir.
Galilei, G. and S. Drake (1990). “Discoveries and opinions of Galileo: including The starry messenger (1610), Letter to the Grand Duchess Christina (1615), and excerpts from Letters on sunspots (1613), The assayer (1623)”. In: *New York: Anchor Books*.
Gallagher, R. (1964). *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*. AGARDograph 69. Report to the 14th Meeting, Structures and Materials Panel, AGARD, NATO. Oxford: Pergamon Press.
– (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gauthey, E.-M. (1813). *Œuvres de M. Gauthey: Traité de la construction des ponts*. Vol. 2. Firmin Didot.
Gautier, H. (1765). *Traité des ponts*. Vol. 1. Veuve Duchesne.
Gehry, F., M. Lloyd, and D. Shelden (2020). “Empowering design: Gehry partners, Gehry technologies and architect-led industry change”. In: *Architectural Design* 90.2, pp. 14–23.
George, A. R. (1993). *House Most High: The Temples of Ancient Mesopotamia*. Winona Lake, IN: Eisenbrauns.
Germain, S. (1821). *Recherches sur la Théorie des Surfaces Élastiques*. Paris: Courcier.
Giacomoni, P., ed. (2005). *La Terra Trema*. Kozach Collection. Rovereto: Museo Arte Moderna e Contemporanea.
Gillings, R. J. (2019). “Mathematics in the Time of the Pharaohs”. In: *Mathematics*. Chapman and Hall/CRC, pp. 9–17.
Giorgio Martini, F. di (ca. 1480). *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare*. Manuscript treatise on architecture, engineering, and military art, written ca. 1478–1490.
Girard, A. (1634). “Notes et annotations (sur les cordes pendantes)”. French. In: *Les Oeuvres mathématiques*. Marginal annotation by Girard in Stevin’s posthumous work. Leiden: Bonaventure & Abraham Elzevier.
Girard, P.-S. (1798). *Traité analytique de la résistance des solides*. One of the earliest systematic treatments of structural mechanics, providing illustrative diagrams of Galileo’s and Mariotte’s theories. Paris: Imprimerie de la République.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Gleick, J. (2016). *Time Travel: A History*. Pantheon.
Goldberg, J. E. (1934). “Wind stresses by slope deflection and converging approximations”. In: *transactions of the American Society of Civil Engineers* 99.1, pp. 962–975.
Goodman, R. E. (1999). *Karl Terzaghi: The Engineer as Artist*. Contains a detailed account of the Terzaghi–Fillunger dispute and its historical context. Reston, VA: ASCE Press.
Goss, V. G. A. (2009). “The history of the planar elastica: insights into mechanics and scientific method”. In: *Science & Education* 18.8, pp. 1057–1082.
Graczykowski, C. and T. Lewiński (2010). “Michell cantilevers constructed within a half strip. Tabulation of selected benchmark results”. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 42.6, pp. 869–877.
Graham, A. (1978). *The Mohist Canon*. Cambridge University Press.
Graham, H. D. and N. Diamond (2004). *The rise of American research universities: Elites and challengers in the postwar era*. JHU Press.
Grant, E. (1977). *Physical science in the middle ages*. Cambridge University Press.
Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840*. 3 vols. Excellent on the French school. Basel: Birkhäuser.
Gravesande, W. J. (1722). *Essai d’une nouvelle theorie sur le choc des corps, fondee sur l’experience*. Also issued in the *Journal litteraire de La Haye*, tome XII, pp. 1–54 (1722). La Haye: T. Johnson.
Greco, C. (2008). *Pier Luigi Nervi: dai primi brevetti al palazzo delle esposizioni di Torino 1917-1948*. Quart Verlag.
Green, G. (1828). *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Reprinted in *Mathematical Papers of George Green*, edited by N. M. Ferrers, London: Macmillan, 1871. Nottingham: T. Wheelhouse.
– (1837). “On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1839a). “On the Laws of Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1839b). “On the Reflection and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 1–24.
– (1842). “On the Propagation of Light in Crystallized Media”. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 7, pp. 121–140.
Guidoboni, E. and J.-P. Poirier (2004). *Quand la Terre Tremblait*. Paris: Odile Jacob.
Hall, A. R. (1951). *Robert Hooke and horology*.
Halpern, A., D. Billington, and S. Adriaenssens (2013). “The ribbed floor slab systems of Pier Luigi Nervi”. In: *Proceedings of IASS Annual Symposia*. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), pp. 1–7.
Hardy, A. (2007). *The Indian Temple: Architecture and Engineering*. Oxford University Press.
Harvey, W. (1628). *Exercitatio Anatomica de Motu Cordis et Sanguinis in Animalibus*. An Anatomical Exercise on the Motion of the Heart and Blood in Living Beings. Frankfurt: Guilielmi Fitzeri.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Hassan Fangary, A. A. (2010). “Graphics analysis of gothic vaults”. M.S. Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya.
Haytham, I. al (1989). *The Optics of Ibn al-Haytham: Books I–III on Direct Vision*. Trans. by A. I. Sabra. Vol. 40. Studies of the Warburg Institute. London: Warburg Institute.
Herodotus (1921). *The Persian Wars*. Trans. by A. D. Godley. Vol. 2. Loeb Classical Library 118. Book IV.87–88 (Darius’ bridge over the Bosporus, built by Mandrocles of Samos). Cambridge, MA: Harvard University Press.
Heyman, J. (1998a). *Structural analysis; A historical approach*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1966). “The stone skeleton”. In: *International Journal of Solids and Structures* 2.2, pp. 249–279.
– (1967). “Beauvais cathedral”. In: *Transactions of the Newcomen Society* 40.1, pp. 15–35.
– (1982). *The Masonry Arch*. Ellis Horwood Series in Engineering Science. Chichester: Ellis Horwood.
– (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. en. Cambridge University Press.
– (1998b). *Structural Analysis; A Historical Approach*. Cambridge University Press.
– (2003). “Truesdell and the History of the Theory of Structures”. In: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 9–20.
Heyman, J. and G Poleni (1988). “Poleni’s problem.” In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 84.4, pp. 737–759.
Heyman, J. et al. (1992). “How to design a cathedral: some fragments of the history of structural engineering.” In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Civil Engineering*. Thomas Telford-ICE Virtual Library, pp. 24–29.
Hill, D. R. (2019). *Islamic science and engineering*. Edinburgh University Press.
Hodge, A. T. (1992). *Roman Aqueducts and Water Supply*. Duckworth.
Hogendijk, I (1994). “Pure mathematics in Islamic civilization”. In: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* 1, pp. 70–79.
Homer (1924). *The Iliad*. Trans. by A. T. Murray. Vol. 170. Loeb Classical Library. 2 vols. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
Hon, G. and Y. Zik (2009). “Kepler’s optical part of astronomy (1604): Introducing the ecliptic instrument”. In: *Perspectives on Science* 17.3, pp. 307–345.
Honigmann, C. and D. P. Billington (2003). “Conceptual design for the Sunniberg Bridge”. In: *Journal of Bridge Engineering* 8.3, pp. 122–130.
Hooke, R. (1665). *Micrographia: or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses with Observations and Inquiries Thereupon*. Royal Society of London. London: Jo. Martyn and Ja. Allestry.
– (1676). *A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments*. Imprint dated 1676; actually published October 1675. London: John Martyn.
– (1678). *Lectures de Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*. London: John Martyn.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Hooke, R. (1705). *The Posthumous Works of Robert Hooke*. Ed. by R. Waller. The decipherment of the arch anagram appears in Waller's prefatory "Life of Dr. Robert Hooke". London: Sam. Smith and Benj. Walford.
Houlsby, G. T. (2014). "John Wallis and the numerical analysis of structures". In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 207–217.
structural engineering, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1859. Oxford English Dictionary.
structural engineer, n. (n.d.). Earliest evidence recorded by OED: 1867. Oxford English Dictionary.
Hrennikoff, A. (1941). "Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method". In: *Journal of Applied Mechanics* 8, pp. 169–175.
Huerta, S. (2004). *Arcos, bóvedas y cúpulas: Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
– (2006). "Structural Design in the Work of Gaudí". In: *Architectural Science Review* 49.4, pp. 324–339.
– (2009). "The Debate about the Structural Behaviour of Gothic Vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman". In: *Proceedings of the Third International Congress on Construction History*.
– (2018). "Arch Bridge Design in Eighteenth-Century France: The Rule of Perronet". In: *Building Knowledge, Constructing Histories*. Ed. by I. Wouters et al. Proceedings of the 6th International Congress on Construction History (6ICCH), Brussels, Belgium, July 9–13, 2018. London: CRC Press/Balkema, pp. 773–780.
Huff, D. (2005). "From Median to Achaemenian palace architecture". In: *Iranica Antiqua* 40, pp. 371–395.
Huxtable, A. L. (2017). *Pier Luigi Nervi*. Pickle Partners Publishing.
Huygens, C (1673). "1673 Horologium oscillatorium". In: *Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometrical (Paris: AF Muguet)*.
Huygens, C. (Nov. 16, 1691). *Lettre à G.W. Leibniz*. French. Ed. by J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (Aug. 24, 1694). *Lettre à G.W. Leibniz*. French. Ed. by J. B. Jr. In *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, vol. 10: *Correspondance 1691–1695*. Letter. La Haye.
– (1888a). "Letter to Gottfried Wilhelm Leibniz, 1 September 1691". In: *Oeuvres Complêtes de Christiaan Huygens*. Ed. by D. B. de Haan et al. Vol. 10. Letter dated 1 September 1691. The Hague: Martinus Nijhoff, pp. 127–134.
– (1888b). *Oeuvres completes de Christiaan Huygens, vol. 1*. Correspondance 1638-1656. Société Hollandaise des Sciences; Martinus Nijhoff, pp. 35–40.
– (1986). *The Pendulum Clock or Geometrical Demonstrations*. Iowa State University Press.
Iacovou, P. (2024). "The construction of Casa Malaparte as living images". In: *Journal of Architecture/ Architectural History (Taylor & Francis)*.
Inwood, S. (2002). *The Man Who Knew Too Much: The Strange and Inventive Life of Robert Hooke, 1635–1703*. London: Macmillan.
Irons, B. M. (1966). "Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods". In: *AIAA Journal* 4.11, pp. 2035–2037.

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Istituto Geografico De Agostini, ed. (1956). *Leonardo da Vinci*. Memorial edition arising from the 1938 Leonardo Exposition in Milan. New York: Reynal & Company. 518 pp.
Jacobovici, S. and J. Cameron (2006). *The Exodus Decoded*. History Channel documentary.
Jakob Bernoulli (n.d.).
James, J. (1982). *Chartres: The Masons Who Built a Legend*. London: Routledge & Kegan Paul.
Jammer, M. (1957). *Concepts of Force*. Reprinted by Dover Books on Physics. Harvard University Press.
Jeremias, J. (1965). *Theophanie: Die Geschichte einer alttestamentlichen Gattung*. German. Neukirchen-Vluyn: Neukirchener Verlag, p. 181.
Jones, B., A. Sereni, and M. Ricci (2010). "Building Brunelleschi's Dome: A Practical Methodology Verified by Experiment". In: *Journal of the Society of Architectural Historians* 69.1, pp. 39–61.
Jung, C. G. (1959). *Flying Saucers: A Modern Myth of Things Seen in the Skies*. Trans. by R. F. C. Hull. London: Routledge & Kegan Paul.
Kant, I. (2023). *Metaphysical foundations of natural science*. Newcomb Livraria Press.
Kaplan, R. (2000). *The Nothing That Is: A Natural History of Zero*. Oxford University Press.
Kästner, A. G. (1786). *Anfangsgründe der Mathematik: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. 4. Auflage. Göttingen: Keyser.
Keller, S. (1998). "Sections and Views: Visual Representation in Eighteenth-Century Earthquake Studies". In: *British Journal for the History of Science* 31, pp. 129–159.
Kennedy, E. S. (1971). "Al-Biruni's Masudic canon". In: *Al-Abhath* 24.1-4, pp. 59–81.
Kepler, J. (1609). *Astronomia nova: Aitiologıa, seu physica coelestis*. Prague: Typographia Jonae Rosini.
– (1855). *Joannis Kepleri Astronomi Opera Omnia*. Ed. by H. Zimmer. Francofurti.
Khan, F. R. (1965). "Design of high-rise buildings". In: *ASCE Symposium on Steel, Chicago*.
Khāzinī, A. al-Rahman al (2001). *The Balance of Wisdom*. Ed. by A. S. Hamdan. Originally written in 1121 CE. Cairo: Dar al-Fikr al-Arabi.
Kim, R. D. Y. (2016). "Analysis of architectural geometries affecting stress distributions of gothic flying buttresses". Thesis. Kansas State University.
Kimmelman, M. (Apr. 29, 2020). *https://www.nytimes.com/2020/04/29/arts/design/new-york-virtual-tour-virus.htmlThe Hidden Feats That Built New York's Towering Skyscrapers*. Critic's Notebook. Published Apr. 29, 2020; updated May 4, 2020.
King, R. (2010). *Brunelleschi's Dome: The story of the great cathedral in florence*. Random House.
Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.
Kirchhoff, G. (1859). "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe". In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40, pp. 51–88.
Kleinert, A. (Dec. 2015). "Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing the works and correspondence of Leonhard Euler". In: *Prace Komisji Historii Nauki PAU* IVX, pp. 13–35.
Kleist, H. v. (1810). "Das Erdbeben in Chili". In: *Erzählungen*. Vol. 1. Written c. 1806; first published 1807 under the title *Jeronimo und Josephe*. Berlin: Realschulbuchhandlung, pp. 1–62.

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Kossakovsky, V. (2024). *Architecton*.
Kozák, J. and V. Cermák (2010). *The Illustrated History of Natural Disasters*. Dordrecht: Springer, p. 231.
Kozak, J., V. Moreira, and D. Oldroyd (2005). *Iconography of the 1755 Lisbon Earthquake*. Prague: Academia.
Kramer, S. N. (1963). *The Sumerians: Their History, Culture, and Character*. Chicago: University of Chicago Press.
Krinsky, C. H. (1967). "Seventy-eight Vitruvius manuscripts". In: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 30.1, pp. 36–70.
Kron, G. (1944). "Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures". In: *Journal of the Franklin Institute* 238.6, pp. 399–442.
Kurrer, K.-E. (2003). "The development of the deformation method". In: *Essays on the History of Mechanics*. Springer, pp. 57–87.
Kurrer, K. (2008). *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohn.
La Gorce, J. d. (1996). "Tempêtes et Tremblements de Terre dans l'Opéra Français sous le Règne de Louis XIV". In: *Le Mouvement en Musique à l'Epoque Baroque*. Ed. by H. Lacombe. Metz: Editions Serpenoise, pp. 171–188.
Lagrange, J.-L. (1788). *Mécanique Analytique*. Foundational work reformulating mechanics using variational principles. Paris: Veuve Desaint.
– (1798). "Sur le principe des vitesses virtuelles". In: *Journal de l'École polytechnique* 2.5. Prairial an VI (May–Jun 1798)., pp. 115–118.
Lamé, G and B Clapeyron (1831). "Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes". In: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences* 4, pp. 463–562.
Lamé, G. (1852). *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris: Bachelier.
Lamé, G. and B. P. E. Clapeyron (1833). "Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide". In: *Annales de chimie et de physique* 47, pp. 250–256.
Larsen, O. P. (2007). *Reciprocal frame architecture*. Routledge.
Le Corbusier (1931). *Towards a new architecture*. Republished in 2013. Courier Corporation.
Lehner, M. (1997). *The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries*. Thames & Hudson.
Leibniz, G. W. (1684). "Demonstratio generalis corporum solidorum resistentiam in flexu determinandi". In: *Acta Eruditorum*. Leibniz addresses the bending resistance of solid bodies, comparing inextensional and extensional theories., pp. 334–336.
– (Mar. 1686a). "Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii". Latin. In: *Acta Eruditorum*. English title: A Brief Demonstration of a Notable Error of Descartes and Others Concerning a Natural Law, pp. 161–163.
– (1686b). "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum". In: *Acta Eruditorum* 1686.VI, pp. 292–300.
– (1690). "Ad ea, quae vir clarissimus JB, mense Majo nupero in his Actis publicavit, responsio". In: *Acta eruditorum*, pp. 358–360.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Leibniz, G. W. (June 1691a). “De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos”. In: *Acta Eruditorum*, pp. 277–281.
– (1691b). *Description of the Stepped Reckoner*. Contemporary account of Leibniz’s calculating machine.
– (July 24, 1691c). “Letter to Christiaan Huygens”. In: *Sämtliche Schriften und Briefe*. Vol. III, 5. Akademie-Ausgabe. Letter discussing Johann Bernoulli’s catenary solution and the quadrature of the hyperbola. Berlin: Akademie Verlag.
– (Mar. 2, 1691d). “Letter to Huygens”. In: *Sämtliche Schriften und Briefe*. Ed. by Preussische Akademie der Wissenschaften. Vol. 5. Reihe III: Mathematischer, naturwissenschaftlicher und technischer Briefwechsel. Akademie-Ausgabe III, 5. Berlin: Akademie Verlag, pp. 58–64.
– (June 1691e). “On the curve formed by a heavy flexible cord”. In: *Acta Eruditorum*. Discusses plans to study the bending of beams and bows in future correspondence.
– (1710). *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l’homme et l’origine du mal*. The only major philosophical work published by Leibniz in his lifetime. *Printing and the Mind of Man*, no. 177. Amsterdam: Isaac Troyel.
– (1858). “Historia et origo calculi differentialis (1714)”. In: *Leibniz GW Mathematische Schriften. In* 7, pp. 392–410.
– (1901). “Letter to Christiaan Huygens, October 13, 1690”. In: *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. Ed. by Société Hollandaise des Sciences. Vol. 9. The Hague: Martinus Nijhoff.
– (1923). *Samtliche Schriften und Briefe. Philosophische Schriften. Vols. 1-3*.
– (1969). *Philosophical Papers and Letters*. D. Reidel.
Leibniz, G. W. and L. E. Loemker (1956). *Philosophical Papers and Letters*. Ed. by L. E. Loemker. Chicago: University of Chicago Press.
Lemoine, B. (2002). *The Eiffel Tower*. New York: Princeton Architectural Press.
León-Portilla, M. (1963). *Aztec Thought and Culture: A Study of the Ancient Nahuatl Mind*. Translated from the Spanish by Jack Emory Davis. Norman: University of Oklahoma Press.
Levien, R. (2008). “The elastica: a mathematical history”. In: *Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley*. Text reproduced with author’s permission.
Levy, S. (1953). “Structural analysis and influence coefficients for delta wings”. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20.7, pp. 449–454.
Lieberkühn, C. G. (1758). *Die Lissabonner: ein bürgerliches Trauerspiel*. Bound with *Die Insel der Pucklichten, ein Lustspiel*. First edition. [Halle]: Carl Gottfried Meyer.
Ligorio, P. (2005). *Libro di diversi terremoti*. Ed. by E. Guidoboni. Edizione Nazionale delle Opere di Pirro Ligorio, Libri delle antichità, Torino 28. Critical edition of the manuscript (Archivio di Stato di Torino, cod. Ja.II.15), written 1570–71 during the Ferrara earthquake sequence. Introduction in Italian and English. Roma: De Luca Editori d’Arte.
Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world’s most astonishing number*. Crown.
Llunji, M. (2022). *Towards A New Engineering-: Reflections of a practitioner*. Msproject.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

第一卷参考文献：历史

Londe, P. (1987). “The Malpasset dam failure”. In: *Engineering Geology* 24.1-4, pp. 295–329.
López, G. (2006). “Poleni’s Manuscripts about the Dome of Saint Peter’s”. In: *Proceedings of the Second International Congress on Construction History* 2.
Lori, T. (2009). *Pier Luigi Nervi*. Motta Architectura.
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.
Lovelace, A. (1843). “Notes by the Translator”. In: *Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage*. Ed. by L. F. Menabrea. London: Richard and John Edward Taylor.
Lucretius, T. C. (1995). *De Rerum Natura*. Trans. by A. M. Esolen. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
Ludwin, R. S. and G. Smits (2007). “Folklore and Earthquakes: Native American Oral Traditions from Cascadia Compared with Written Traditions from Japan”. In: *Myth and Geology*. Ed. by L. Piccardi and W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 67–94.
MacDonald, W. L. (1982). *The Architecture of the Roman Empire, Volume II: An Urban Appraisal*. Yale University Press.
Mahmoodi, P et al. (1987). “Performance of viscoelastic dampers in world trade center towers”. In: *Dynamics of structures*. ASCE, pp. 632–644.
Maier, G. (2007). Private Communication.
Maney, G. A. (1915). “Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution”. In: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.
Maor, E. (2001). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*.
Mark, R. (1978). “Structural experimentation in Gothic architecture: Large-scale experimentation brought Gothic cathedrals to a level of technical elegance unsurpassed until the last century”. In: *American Scientist* 66.5, pp. 542–550.
Mark, R., J. F. Abel, and K. O’Neill (1973). “Photoelastic and finite-element analysis of a quadripartite vault”. In: *Experimental Mechanics* 13.8, pp. 322–329.
Mark, R. and R. A. Prentke (1968). “Model analysis of Gothic structure”. In: *The Journal of the Society of Architectural Historians* 27.1, pp. 44–48.
Markowsky, G. (1992). “Misconceptions about the golden ratio”. In: *The College Mathematics Journal* 23.1, pp. 2–19.
Marmo, F. et al. (2019). “On the form of the Musmeci’ s bridge over the Basento river”. In: *Engineering Structures* 191, pp. 658–673.
Marmontel, J.-F. (1777). *Les Incas, ou La destruction de l’empire du Pérou*. 2 vols. 2 vols. First edition. Paris: Lacombe.
Marshack, A. (1972). *The Roots of Civilization: The Cognitive Beginnings of Man’s First Art, Symbol and Notation*. New York: McGraw-Hill.
MATLAB User’s Guide (1984). The MathWorks. Natick, MA.
Maxwell, J. (1864a). “On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces”. In: *Philosophical Magazine* 27, pp. 250–261.
– (1864b). “On reciprocal figures and diagrams of forces”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 250–261.

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Maxwell, J. (1864c). “On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27.182, pp. 294–299.
– (1890). *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell...* Vol. 2. University Press.
McCullough, D. (1972). *The Great Bridge: The Epic Story of the Building of the Brooklyn Bridge*. New York: Simon & Schuster.
McDonough, J. K. (2016). “Leibniz and the Foundations of Physics: The Later years”. In: *Philosophical Review* 125.1, pp. 1–34.
McQuaid, M. (1993). *Santiago Calatrava : structure and expression*. New York, N.Y: Museum of Modern Art.
Menn, C. (1990). *Prestressed concrete bridges*. Springer Science & Business Media.
– (1996). “The place of aesthetics in bridge design”. In: *Structural engineering international* 6.2, pp. 93–95.
Menninger, K. (2013). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. Courier Corporation.
Michell, A. G. M. (1904). “LVIII. The limits of economy of material in frame-structures”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8.47, pp. 589–597.
Michell, G. (1989). *The Stepwells of India*. Mapin Publishing.
Mieroop, M. Van de (2024). *A history of the ancient Near East ca. 3000-323 BC*. John Wiley & Sons.
Miller, D. M. (2017). “The Parallelogram Rule from Pseudo-Aristotle to Newton”. In: *Archive for History of Exact Sciences* 71.2, pp. 157–191.
Miller, G. A. (1916). *Historical introduction to mathematical literature*. Macmillan.
Miyata, N. and M. Takada, eds. (1995). *Namazu-e: Jishin to Nihon Bunka*. Tokyo: Satofuni Shuppan.
Mohr, C. O. (1868). “Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen”. German. In: *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover* 14. [Contributions to the Theory of Timber and Iron Constructions], pp. 20–52, 397–400.
– (1874). *Lehrbuch der Mechanik*. F. Vieweg.
– (1882a). “Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre”. German. In: *Der Civilingenieur* 28.2, pp. 113–156.
– (1882b). “Ueber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre”. In: *Der Civilingenieur* 28, pp. 113–156, 193–235.
Mohr, O. (1892). “Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen”. German. In: *Der Civilingenieur* 38. [The Calculation of Trusses with Rigid Joint Connections], pp. 577–594.
Moody, E. A. (1951). “Galileo and Avempace: The Dynamics of the Leaning Tower Experiment (I)”. In: *Journal of the History of Ideas*, pp. 163–193.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Moorey, P. R. S. (1999). *Ancient Mesopotamian materials and industries: the archaeological evidence*. Eisenbrauns.
Morandi, R. and F. Piccarreta (1972). “Roof structure of the new hangars by the International Fiumicino Airport (Rome): design, model tests”. In: *IABSE congress report*. International Association for Bridge and Structural Engineering.
Moseley, H. (1843). *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*. John Weale.
Mozi (2013). *The Mozi: A Complete Translation*. Trans. by I. Johnston. Originally compiled in the 5th century BCE. Hong Kong: The Chinese University Press.
Müller-Breslau, H. F. B. (1886). *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit*. German. [The Newer Methods of Strength of Materials and Statics of Building Structures, Based on the Law of Virtual Displacements and the Theorems on Strain Energy]. Leipzig: Baumgärtner.
– (1887). *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. German. 1st ed. Vol. 1. [Graphical Statics of Building Structures]. Systematic treatment of influence lines. Leipzig: Baumgärtner.
Murray, S. (1989). *Beauvais Cathedral: architecture of transcendence*. Princeton University Press.
– (1998). “Notre-Dame of Paris and the anticipation of Gothic”. In: *The Art Bulletin* 80.2, pp. 229–253.
Musolino, M. (2017). “L’arte traumatica. Gibellina e la risemantizzazione delle sue rovine”. In: *Meridiana* 88, pp. 157–178.
Musschenbroek, P. van (1739). *Elementa Physicae Conscripta in usus Academicos*. Latin. Includes early experimental studies on the tensile strength of materials. Lugduni Batavorum: Petrum vander Eyk.
Napier, J. (1614). *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Edinburgh: Andrew Hart.
NASA (1968). *NASTRAN User’s Manual*. Tech. rep. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration.
NASA Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team (Sept. 2023). *Unidentified Anomalous Phenomena Independent Study Team Report*. Tech. rep. Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration.
National Institute of Standards and Technology (NIST) (Sept. 2005). *Final Report on the Collapse of the World Trade Center Towers: Federal Building and Fire Safety Investigation of the World Trade Center Disaster*. NCSTAR 1. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards and Technology.
Naveh, J. (1987). *Early History of the Alphabet: An Introduction to West Semitic Epigraphy and Palaeography*. 2nd. Jerusalem: Magnes Press.
Navier, C (1821). “Sur les lois de l’équilibre et du mouvement des corps solides élastiques”. In: *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pp. 177–181.
– (1823). *Rapport à Monsieur le Ministre de l’ Intérieur sur le projet d’ un pont suspendu à établir au port des Champs-Élysées*. Report on the proposed suspension bridge at the Champs-Élysées, highlighting the intersection of engineering, mathematics, and architectural aesthetics. Paris: Imprimerie Royale.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Navier, C (1826). *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. First edition. Second edition published in 2 volumes, 1833-1838. Paris: Carilian-Gœury.
– (1827a). "Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques". In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France* 7, pp. 375–393.
– (1827b). "Mémoire sur les lois du mouvement des fluides". In: *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France* 6. Lu à l'Académie royale des Sciences le 18 mars 1822, pp. 389–440.
– (1830). *Rapport à Monsieur Becquey, Conseiller d'état, directeur général des ponts et chaussées et des mines; et Mémoire sur les ponts suspendus*. 2nd ed. Augmentée d'une notice sur le pont des Invalides. Paris: Carilian-Gœury.
– (1833). *Résumé des Leçons Données sur L Application de la mécanique a L'etablissement des constructions et des machines*. 2nd edition.
– (1864). *Résumé des leçons données a l' École des ponts et chaussées [...]. Troisième édition avec des notes et des appendices, par M. Barré de Saint-Venant*.
Needham, J. (1959). *Science and Civilization in China*. Cambridge University Press.
Nelli, G. B. and A. Ceccherelli (1753). *Discorsi di architettura del senatore Giovan Batista Nelli con la vita del medesimo dedicata all'illustriss. signore Bindo Simone Peruzzi e due ragionamenti sopra le cupole di Alessandro Cecchini architetto*. per gli eredi Paperini.
Nemore, J. de (1250). *Liber de Ratione Ponderis*. 13th century. Critical edition by E. A. Moody and M. Clagett in *The Medieval Science of Weights*, University of Wisconsin Press, 1952.
Nervi, P. (2018). *Aesthetics and Technology in Building: The Twenty-first-century Edition*. Translated from the Italian by Robert Einaudi. University of Illinois Press.
Nervi, P. L. (1956a). *Structures*. F. W. Dodge Corporation.
– (1956b). *Structures*. Translated from the Italian *Costruire correttamente* by Giuseppina and Mario Salvadori. F.W. Dodge Corporation.
– (1963). *Buildings, projects, structures, 1953-1963*. Praeger.
Nervi, P. L., G. Neri, et al. (2014). *Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato*. CittàStudi Edizioni.
Neufert, E. (1970). *Architects' Data*. Trans. by R. Herz. First English translation of *Bauentwurfslehre* (1936). London: Lockwood.
Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. Vol. 9. Courier Corporation.
– (2012). *A history of ancient mathematical astronomy*. Vol. 1. Springer Science & Business Media.
Newmark, N. M. (1959). "A method of computation for structural dynamics". In: *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, pp. 67–94.
Newton, I. (1680). *Index Chemicus*. The Chimistry of Isaac Newton Project, Indiana University Digital Library Program.
– (1687). *Mathematical principles of natural philosophy*. English & Latin Version.
– (1704). *Opticks: or, A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*. First edition. London: Sam. Smith and Benj. Walford.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

第一卷参考文献：历史

Newton, I. (1717). *Opticks, or, a treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Dover Publications, 1952.
– (1736). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam*. Trans. by J. Colson. Originally written in 1671. London: Henry Woodfall.
– (1960). "Letter to Henry Oldenburg, 24 October 1676". In: *The Correspondence of Isaac Newton*. Ed. by H. W. Turnbull. Vol. 2. 1676–1687. Cambridge: Cambridge University Press. Chap. 187, pp. 110–161.
Nikolinakou, M. A. and A. J. Tallon (2006). "New Research in Early Gothic Flying Buttresses". en. In: *Proc. Second Intern. Congress Construction History, Cambridge*, pp. 2347–2361.
Nikolinakou, M.-K., A. J. Tallon, and J. A. Ochsendorf (2005). "Structure and form of early Gothic flying buttresses". In: *Revue Européenne de Génie Civil* 9.9-10, pp. 1191–1217.
Noether, E. (1918). "Invariante Variationsprobleme". In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 235–257.
Noll, W. (1958). "A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media". In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 2.1, pp. 197–226.
NRC-ML19312B609 (2019). *Official Transcript of Proceedings; NextEra Energy Seabrook, LLC Seabrook Station, Unit 1; Docket Number: 50-443-LA-2;ASLBP Number:17-953-02-LA-BD01*. Newburyport, Massachusetts.
Nur, A. and D. Burgess (2008). *Apocalypse: earthquakes, archaeology, and the wrath of God*. Princeton University Press.
Oates, J. (1990). *Babylon*. See Chapter 2 for building materials and construction practice. London: Thames and Hudson.
Ochsendorf, J. A. (2002). "Collapse of masonry structures". Thesis. University of Cambridge.
Oikonomou, A. (2022). "The Use of Geometrical Tracing, Module and Proportions in Design and Construction, from Antiquity to the 18th Century". In: *International Journal of Architectural Heritage* 16.10, pp. 1567–1587.
Oldfather, W., C. Ellis, and D. M. Brown (1933). "Leonhard Euler's elastic curves". In: *Isis* 20.1. Translation of *De curvis elasticis*, Additamentum I to *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, pp. 72–160.
Oppenheim, A. L. (1977). *Ancient Mesopotamia: Portrait of a Dead Civilization*. University of Chicago Press.
Oresme, N. (1351). *De configurationibus qualitatum et motuum*.
Otto, F., R. Trostel, and F. K. Schleyer (1973). *Tensile structures; design, structure, and calculati on of buildings of cables, nets, and membranes*. MIT Press.
Oughtred, W. (1632). *The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument*. London: Augustine Mathewes.
Our history (2026). Institutional history: origin in 1908; name adopted in 1922. The Institution of Structural Engineers.
Palladio, A. (1570). *I quattro libri dell'architettura*. Domenico di Franceschi.
Palomo, M. (2017). "Describing Reality: Bernoulli's Challenge of the Catenary Curve and its Mathematical Description by Leibniz and Huygens". In: *Leibniz and the Dialogue*

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Between Sciences, Philosophy and Engineering, 1646–2016. New Historical and Epistemological Insights, p. 334.
Panofsky, E. (1945). "An Explanation of Stornaloco's Formula". In: *The Art Bulletin* 27.1, pp. 61–64.
Paranjape, M. R. (2011). "'Natural Supernaturalism?' The Tagore–Gandhi Debate on the Bihar Earthquake". In: *The Journal of Hindu Studies* 4.2, pp. 176–204.
Pardies, I. G. (1710). *La statique ou la science des forces mouvantes*. S. Mabre-Cramoisy.
Parent, A. (1713). *Essais et recherches de mathématique et de physique, dans lesquels on traite de l'utilité des différentes sciences, et principalement de la mécanique, par rapport aux arts et métiers*. 3 volumes. Paris: Jean Anisson.
Parkinson, R. B. (1999). *Cracking Codes: The Rosetta Stone and Decipherment*. Berkeley: University of California Press.
Pascal, B. (1645). *La Machine Arithmetique*. Pamphlet describing Pascal's mechanical calculator. Paris.
Pearson, K (Aug. 1905). "On the Stability of Masonry Dams". In: *Engineering*, p. 171.
Pearson, K. et al. (1907). *An experimental study of the stress in Masonry Dams*. Tech. rep. Technical Series, V. Drapers Company Research Memoirs (Technical Series).
Pedreschi, R. (2008). "Form, force and structure: a brief history". In: *Architectural Design* 78.2, pp. 12–19.
Peiffer, J. (2006). "Jacob Bernoulli, teacher and rival of his brother Johann". In: *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique [electronic only]* 2.1b, Article–1.
Perga, A. of (1896). *Treatise on Conic Sections*. Trans. by T. L. Heath. Greek text with English translation. Cambridge: Cambridge University Press.
Peripatetic School (circa 4th century BCE). *Mechanical Problems*. Traditionally attributed to Aristotle, though likely compiled by later members of the Peripatetic school. Problem 3 possibly reflects the thought of Archytas of Tarentum.
Perret, A. (1952). *Contribution à une théorie de l'architecture*. Paris: Cercle d'études architecturales.
Perronet, J.-R. (1782). *La construcción de puentes en el siglo XVIII*. Spanish translation. Reverte.
– (1782–1788). *Description des projets et de la construction des ponts de Neuilly, de Mantes, d'Orléans et autres*. 2 vols. with 67 engraved plates. Available at https://archive.org/details/chepfl-lipr-axd-20-01. Paris: Imprimerie Royale.
Petroski, H. (1997). "Engineering: Santiago Calatrava". In: *American Scientist* 85.2, pp. 114–118.
Philoponus, J. (1993). *Philoponus: On Aristotle Physics 4.1–5*. Ed. by R. Sorabji and C. Wildberg. Trans. by C. Wildberg. Ancient Commentators on Aristotle. London: Duckworth.
Piccardi, L. (2007). "The AD60 Denizli Basin Earthquake and the Apparition of Archangel Michael at Colossae". In: *Myth and Geology*. Ed. by L. Piccardi and W. B. Masse. London: Geological Society, pp. 95–105.
Picon, A. (1988). "Navier and the introduction of suspension bridges in France". In: *Construction History* 4, pp. 21–34.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Pierrefeu, F. de and L. Corbusier (1942). *La maison des hommes*. Plon.
Piola, G. (1833). "La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni". In: *Opuscoli Matematici e Fisici di Diversi Autori* 1, pp. 201–236.
Pisano, R., J. Coopersmith, and M. Peake (2021). *Essay on Machines in General (1786)*. Vol. 47. Springer.
Pizzigoni, A. (2015). "Brunelleschi's Bricks". In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 56.2, pp. 137–148.
Plato (350 BC). *Laws*. Composed ca. 350 BCE. Online editio. Tufts University: Perseus Digital Library.
Pliny the Elder (1906). *Naturalis Historia*. Ed. by K. Mayhoff. Leipzig: Teubner.
Poincaré, H. (1905). *Science and hypothesis*. London: Walter Scott Publishing CO., LTD.
Poisson, S. D. (1829). "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques". In: *Mémoires de l'Académie des Sciences* 8, pp. 357–570.
Poisson, S. D. (1831). "Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques". In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 10, pp. 549–605.
Poleni, G. (1748). *Memorie Istoriche Della Gran Cvpola Del Tempio Vaticano, E De'Danni Di Essa, E De'Ristoramenti Loro, Divise In Libri Cinqve*. Nella Stamperia del seminario.
Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.
Pope, T. (1811). *A Treatise on Bridge Architecture: In which the Superior Advantages of the Flying Pendent Lever Bridge are Fully Proved; with an Historical Account and Description of Different Bridges Erected in Various Parts of the World, from an Early Period, Down to the Present Time*. Alexander Niven.
Popovic, O. (1996). "Reciprocal frame structures". PhD thesis. University of Nottingham.
Popovic Larsen, O. (2014). "Reciprocal frame (RF) structures: real and exploratory". In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 119–134.
Povoledo, E. (2023). "A High-Maintenance Relationship for 637 Years, but Milan's Duomo Is Still Adored". In: *The New York Times*.
Powell, G. (2008). "Structural analysis: Are we relying too much on computers? Part 1: The problem". In: *Structure Magazine*, pp. 50–52.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Pugnale, A. and M. Sassone (2014). "Structural reciprocity: critical overview and promising research/design issues". In: *Nexus Network Journal* 16.1, pp. 9–35.
Quasimodo, S. (1958). "Al padre". In: *La terra impareggiabile*. Written for the 90th birthday of Gaetano Quasimodo and the 50th anniversary of the Messina earthquake of 28 December 1908. English title: *To My Father*. Milano: Mondadori.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin and Company.
Rankine, W. J. M. (1862). *A Manual of Civil Engineering*. London: Charles Griffin.
Rasch, B. and F. Otto (1996). *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*.
Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Rega, G. (2013). “Mechanics and Architecture: Nervi’s Creative Knowledge Versus The Unsolved Contemporary Complexity”. In: *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 54.2-3, pp. 243–252.
Renn, J., P. Damerow, and P. McLaughlin (2002). “Aristotle, Archimedes, Euclid, and the origin of mechanics: The perspective of historical epistemology”. In: *Symposium Arquimedes, edited by José Luis Montesinos Sirera*, pp. 43–59.
Ribon, M. (1999). *Esthetique de la Catastrophe*. Editions Kime.
Rice, J. (1968). “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”. In: *J. Applied Mechanics* 35, pp. 379–386.
Richards, E. G. (1998). *Mapping Time: The Calendar and Its History*. Oxford University Press.
Richardson, L. (Feb. 1911). “The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A.* 210, pp. 307–357.
Ritz, W. (1909). “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.” In: *Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York*.
Robertson, L. E. (2017). *The Structure of Design: An Engineer’s Extraordinary Life in Architecture*. The Monacelli Press, LLC.
Robins, G. and C. Shute (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. Transcription, translation, and commentary on EA 10057–10058. London: British Museum Press.
Robson, E. (2001). “Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322”. In: *Historia Mathematica* 28.3, pp. 167–206.
– (2002). “Words and Pictures: New Light on Plimpton 322”. In: *American Mathematical Monthly* 109.2, pp. 105–120.
Roebling, W. A. (1877). *Report of the Chief Engineer of the New York and Brooklyn Bridge*. Annual report to the directors of the New York Bridge Company.
Rousseau, J.-J. (1967). “Lettre à M. de Voltaire [sur la Providence]”. In: *Correspondance complète de Jean-Jacques Rousseau*. Ed. by R. A. Leigh. Vol. 4. Written 18 August 1756. Also known as *Lettre sur la Providence*. Genève: Institut et Musée Voltaire, pp. 37–50.
Sader, H. (2019). *The Phoenicians: A History*. Princeton: Princeton University Press.
Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855a). “Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l’équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s’exerçant simultanément”. In: *Mémoires présentés par divers savants à l’Académie des Sciences de l’Institut Impérial de France* 14. Presented 1853; published 1855, pp. 233–560.
– (1864). “Mémoire sur l’établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l’élasticité pourrait les ramener à leur premier état”. In: *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 70, pp. 473–480.
Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1855b). *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l’équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules*

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. Vol. 14, pp. 233–560.

Saint-Venant, B. de (1855c). "Mémoire sur la flexion des prismes rectangulaires". French. In: *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France* 14. Reprinted in *Mémoires de Mécanique*, Paris: Gauthier-Villars, 1883, pp. 233–560.

Salençon, J. (2018). "The Emergence of the Principle of Virtual Velocities". In: *Virtual Work Approach to Mechanical Modeling*. London: ISTE Press – Elsevier. Chap. 1, pp. 1–18.

Salencon, J. (Mar. 2017). *Equilibrium and Forces: from Aristotle to Lagrange*.

Saliklis, E. and J. Parker (2014). "The Maney-Goldberg Method: An Iterative Method Lost in the Mists of Time". In: *Proceedings of the IASS-SLTE 2014 Symposium "Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints"*. Ed. by R. Brasil and R. Pauletti. IASS. Brasilia, Brazil.

Saouma, V. E. and C. Barton (Apr. 1994). "Fractals, Fractures and Size Effects in Concrete". In: *Journal of Engineering Mechanics of the American Society of Civil Engineers* 120.4, pp. 835–854.

Saouma, V. E. and G. Fava (2006). "On Fractals and Size Effects". In: *International Journal of Fracture* 137, pp. 231–249.

Saouma, V. E., D. Natekar, and E. Hansen (2003). "Cohesive Stresses and Size Effects in Elasto-Plastic and Quasi-Brittle Materials". In: *International Journal of Fracture* 119, pp. 287–298.

Saouma, V. E. and L. Perotti (2004). *Constitutive Model for Alkali Aggregate Reaction*. Tech. rep. Bienne, Switzerland: Report No. 2, Submitted to the Swiss Federal Agency of Water and Geology.

Saxony, A. of (1988). *Quaestiones super libros Physicorum Aristotelis*. Ed. by A. Maier. Critical Latin edition. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Schmaltz, T. M. (2003). "Cartesian causation: body – body interaction, motion, and eternal truths". In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 34.4, pp. 737–762.

Schmandt-Besserat, D. (1992). *Before Writing, Vol. I: From Counting to Cuneiform*. Austin: University of Texas Press.

Schrama, W. (2021). "A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames". In: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.

Seabrook, J. (Nov. 2001). "The Tower Builder". In: *New Yorker* 36.

Sebregondi, G. C. and R. Schofield (2016). "First Principles: Gabriele Stornaloco and Milan Cathedral". In: *Architectural history* 59, pp. 63–122.

Seidel, P. L. (1873). *Ueber ein verfahren, die gleichungen, auf welche die methode der kleinsten quadrate führt, sowie lineäre gleichungen überhaupt, durch successive annäherung aufzulösen*. Vol. 11. Verlag d. Akad.

Serlio, S. (1996). *Sebastiano Serlio on Architecture, Volume I*. Ed. by V. H. Veen and P. Hicks. Yale University Press.

Serrano, I. M. and B. D. Suceavă (2017). "A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas". In: *The Best Writing on Mathematics 2016*. Princeton University Press, pp. 238–248.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Shakespeare, W. (1597). *Romeo and Juliet*. First published in 1597; numerous modern editions available.
Sharer, R. J. and L. P. Traxler (2006). *The Ancient Maya*. 6th. Stanford University Press.
Shelby, L. (1972). "The Geometrical Knowledge of Mediaeval Master Masons". In: *Speculum* 47.3, pp. 395–421.
Shelden, D. R. (2002). "Digital surface representation and the constructibility of Gehry's architecture". PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology.
Shukla, D. (1993). *Vaastu Shastra: Principles of Ancient Architecture*. Institute of Indology.
Smith, M. E. (1996). *The Aztecs*. Blackwell Publishing.
Smits, G. (2006). "Shaking Up Japan: Edo Society and the 1855 Catfish Picture Prints". In: *Journal of Social History* 39.4, pp. 1045–1078.
Southwell, R. V. (1935). "Stress-calculation in frameworks by the method of" systematic relaxation of constraints"—I and II". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.
Spinoza, B. d. (1670). *Tractatus Theologico-Politicus*. Published under the pseudonym "Operibus Posthumis"; quoted from the translation of R. H. M. Elwes (1883), Preface. Hamburg: Henricum Künraht.
Stevin, S. (1586). *De Beghinselen der Weeghconst*. English translation: *The Principal Works of Simon Stevin*, ed. E. J. Dijksterhuis, C. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam, 1955. Leiden: Christoffel Plantijn.
– (1955–1966). *The Principal Works of Simon Stevin*. Ed. by D. J. Struik. Vol. 5 volumes. Mathematics, Engineering, Navigation, Fortification, Optics, Architecture, Music. Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger.
– (1987). *Les oeuvres mathématiques. Augmentées par Albert Girard*. chez Bonaventure & Abraham Elsevier, imprimeurs ordinaires de l'Université.
Strang, G. and G. J. Fix (1973). "An analysis of the finite element method(Book- An analysis of the finite element method.)" In: *Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1973. 318 p.*
Straub, H. (1952). *A History of Civil Engineering*. London: Leonard Hill.
Sugimoto, K. (2008). "Earthquake-Resistant Design in Japanese Pagodas: A Historical Perspective". In: *Journal of Japanese Architecture* 12.3, pp. 45–67.
Sullivan, L. (Mar. 1896). "The tall office building artistically considered". In: *Lippincott's Monthly Magazine*.
Sundaram, M. and G. K. Ananthasuresh (2009). *Gustave Eiffel and his Optimal Structures*. Vol. 14. 9. Indian Academy of Sciences, pp. 846–855.
Swanson, J. A. (1971). *ANSYS Engineering Analysis System*. Tech. rep. Pittsburgh: Swanson Analysis Systems.
Szabó, I. (1977). *Geschichte der mechanischen Principien*. In German; comprehensive history. Basel: Birkhäuser.
Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Tech. rep. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.
The Baltimore Sun (1979). "Pier Luigi Nervi, famed architect, dies in Italy". In: *Proquest Historical Newspapers*.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

The Economist (July 2025). “How the Gulf’s rulers want to harness the power of science”. In: *The Economist* 449.9311. Accessed: 2025-01-12, pp. 20–23.
The Holy Bible, Containing the Old and New Testaments (1611). Authorized King James Version. London: Robert Barker, Printer to the King.
Thomson, W. (1848). “On an Absolute Thermometric Scale Founded on Carnot’s Theory of the Motive Power of Heat”. In: *Philosophical Magazine* 33, pp. 313–317.
– (1851). “On the Dynamical Theory of Heat, with Numerical Results Deduced from Mr Joule’s Equivalent of a Thermal Unit, and M. Regnault’s Observations on Steam”. In: *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 20, pp. 261–288.
Thomson, W. L. K. (1855). “On the Thermoelastic, Thermomagnetic, and Pyroelectric Properties of Matter”. In: *Philosophical Magazine* 5, pp. 4–27.
Thrall, A., D. Billington, and K. Bréa (2012). “The Maria Pia Bridge: A major work of structural art”. In: *Engineering structures* 40, pp. 479–486.
Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. New York, U.S.A: McGraw-Hill.
Timoshenko, S. and J. Goodier (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw Hill.
Timoshenko, S. P. and J. M. Gere (1976). *Mechanics of Materials (Strength of Materials)*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
Todhunter, I. and K. Pearson (1893). *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*. Two volumes, Edited and completed by Pearson, K. Cambridge University Press.
Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy’s almagest*. Princeton University Press.
Torricelli, E. (1644). *Opera geometrica*. Latin. Contains *De sphaera et solidis sphaeralibus*, *De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, and *De dimensione parabolae*. Florence: Amadoro Massa & Lorenzo de Landis.
Torroja, E. (1962a). “Hipódromo de la Zarzuela”. In: *Informes de la Construcción* 14.137, pp. 19–38.
– (1962b). *The Structures of Architecture*. University of California Press.
– (2008). “Razón y ser de los tipos estructurales”. In.
Torroja, E. and E. T. Miret (1958). *The structures of Eduardo Torroja: an autobiography of engineering accomplishment*. FW Dodge Corporation.
Torroja, E., J.-J. Polivka, and M. Polivka (1958). *Philosophy of structures*. Univ of California Press.
Truesdell, C (1960). *The Rational Mechanics of Flexible Or Elastic Bodies 1638-1788: Introduction to Vol. X and XI of Leonhardi Euleri Opera Omnia*. This is the the definitive print source for Euler’s works. Publication began in 1911, growing to scores of volumes comprising nearly all of Euler’s works. Birkhäuser and the Euler Commission of Switzerland.
Truesdell, C. (1968). *Essays in the History of Mechanics*. Springer.
– (1976). “History of classical mechanics”. In: *Naturwissenschaften* 63.2, pp. 53–62.
Truesdell, C. and W. Noll (1965). “The Non-Linear Field Theories of Mechanics”. In: *Handbuch der Physik*. Ed. by S. Flügge. Vol. III/3. Berlin: Springer.
Turnbull, S. (2003). *Japanese Castles 1540-1640*. Osprey Publishing.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Turner, M. J. et al. (1956). “Stiffness and deflection analysis of complex structures”. In: *journal of the Aeronautical Sciences* 23.9, pp. 805–823.
Turner, M. (1959). *The direct stiffness method of structural analysis*. Tech. rep. Technische Hockschule, Aachen, Germany.
Van Musschenbroek, P. (1729). *Physicae experimentales, et geometricae, de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine terrae, cohaerentia corporum firmorum dissertationes: ut et ephemerides meteorologicae Ultrajectinae*. apud Samuelem Luchtmans.
Varignon, P. (1725). *Nouvelle mecanique ou statique: dont le projet fut donné en MDCLXXXVII*. Vol. 2. chez Claude Jombert.
Vashy, A. (1892). “Sur les Lois de Similitude en Physique”. In: *Annales Télégraphiques* 19, pp. 25–28.
Venezia, F. (1989). “Base: A Museum: Homage to Gibellina Vecchia, 1985: Gibellina Nuova, Sicily”. In: *Perspecta* 25, pp. 202–215.
Vergilius Maro, P. (2008). *The Aeneid*. Trans. by C. Day Lewis. With an intro. by J. Griffin. Oxford World’s Classics. Translation first published: London, Hogarth Press, 1952. Oxford: Oxford University Press.
Vesalius, A. (1998–2009). *On the Fabric of the Human Body: A Translation of De Humani Corporis Fabrica Libri Septem*. Trans. by W. F. Richardson and J. B. Carman. Vol. 5 volumes. English translation of the 1543 edition. San Francisco: Norman Publishing.
Vignola, G. B. da (1969). *Canon of the Five Orders of Architecture*. Dover Publications.
Vinci, L. da (1881). *Les Manuscrits de Léonard de Vinci*. Manuscripts A–M, c. 1490–1519. Paris: Institut de France.
– (1938). *The Notebooks of Leonardo da Vinci*. New York: Reynal & Hitchcock.
Viola, E., L. Panzacchi, and F. Tornabene (2004). “Structural Analysis of Historical Masonry Arches”. en. In: *Restoration, International Conference of Restoration, Recycling and Rejuvenation Technology for Engineering and Architecture Application*. Cesena, Italy, pp. 7–11.
Viollet-le-Duc, E.-E. (1854). *Dictionnaire raisonné de l’architecture française du XIe au XVIe siècle*. Vol. 1. Bance.
– (1875). *Discourses on Architecture*. Translated from the French by Benjamin Bucknall. Boston: Ticknor and Company.
Virlogeux, M. (2001). “Bridges with multiple cable-stayed spans”. In: *Structural Engineering International* 11.1, pp. 61–82.
Virlogeux, M. et al. (2005). “Millau Viaduct, France”. In: *Structural Engineering International* 15.1, pp. 4–7.
Vitalis, L. (Sept. 2021). *Pier Luigi Nervi, l’architecture biomimétique avant la lettre ?* Rapport de recherche hal-03359251. MAP – Modèles et simulations pour l’Architecture et le Patrimoine.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vitruvius and M. H. Morgan (1914). *The Ten Books on Architecture*. Harvard University Press.
Voigt, W. (1898). *Die fundamentalen Eigenschaften der Krystalle. 243 pp.*
Voigt, W. (1910). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Voltaire [Arouet, F.-M. (1759). *Candide, ou l'Optimisme, traduit de l'allemand de Mr. le Docteur Ralph*. Published without author's name or place of publication. First edition; priority of the Cramer Geneva printing (299 pp.) established by Gagnebin (1952) and confirmed by Wade and Barber. *Printing and the Mind of Man*, no. 204. [Genève]: [Gabriel Cramer], p. 299.
– (2009). "Poème sur le désastre de Lisbonne, ou Examen de cet axiome : Tout est bien". In: *Œuvres complètes de Voltaire*. Ed. by D. Adams and H. T. Mason. Vol. 45A. Written December 1755; first authorised edition Geneva: Cramer, 1756. 180 lines. Oxford: Voltaire Foundation, pp. 315–360.
Wagner, D. L. (1983). *The Seven Liberal Arts in the Middle Ages*. Collection of essays covering each of the seven liberal arts and their historical development. Bloomington: Indiana University Press.
Wakamizu, S. (2003). *Namazu wa Odoru*. Tokyo: Bungeisha.
Wallis, J. (1670). *Mechanica, sive de Motu Tractatus Geometricus*. London: Guliemi Godbid.
– (1695). *Opera mathematica*. Oxford University Press.
Wassell, S. R. (2008). "Andrea Palladio (1508-1580)". In: *Nexus Network Journal* 10, pp. 213–226.
Webster, J. (2001). "Haydn's *Seven Last Words*: An Introduction". In: *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Ed. by S. Sadie. 2nd ed. Vol. 11. London: Macmillan, pp. 171–173.
Weidman, P. (2009). "Modified shape of the Eiffel Tower determined for an atmospheric boundary-layer wind profile". In: *Physics of Fluids* 21.6, p. 067102.
Westfall, R. S. (1980). *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.
Whiteside, D. T. (1969). *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume V: 1683–1684*. Editor and commentary by Derek T. Whiteside. Cambridge: Cambridge University Press.
Wilkes, M. V. (1951). "The EDSAC". In: *Journal of the British Institution of Radio Engineers* 11, pp. 327–331.
Willis, R. (1842). "On the Construction of the Vaults of the Middle Ages". In: *Transactions of the Royal Institute of British Architects, I*.
– (1910). *On the construction of the vaults of the Middle Ages*. Royal Institute of British Architects.
Wilson, E. L. (1969). *SAP: A General Structural Analysis Program*. Tech. rep. Berkeley: University of California, Berkeley.
Wilson, E. (1960). "Matrix Analysis of Nonlinear Structures". In: *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa.*
Wilson, E. and R. Clough (1962). "Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis". In: *Proc. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. Laboratorio Nacional de Engenliaria Civil, Lisbon, Portugal.
Winchurch, M. E. (2007). *The Art of Thin Shell Design: A Comparison of Eduardo Torroja and Pier Luigi Nervi*. Undergraduate Thesis in the Department of Civil and Environmental Engineering.

 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Winkler, E. (1875). *Theorie der Brücken. Aeussere Kräfte gerader Träger*. German. 2nd ed. Vorträge über Brückenbau 1. [Theory of Bridges: External Forces on Straight Beams]. Wien: Carl Gerold's Sohn.
Wisner, B. et al. (2004). *At Risk: Natural Hazards, People's Vulnerability and Disasters*. 2nd ed. London: Routledge.
Wittkower, R. (1944). "Principles of Palladio's Architecture". In: *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 7.1, pp. 102–122.
Wolfe, M. I. and R. Mark (1976). "The collapse of the vaults of Beauvais Cathedral in 1284". In: *Speculum* 51.3, pp. 462–476.
Wolfram, S. (1988). *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Redwood City, CA: Addison-Wesley.
Wuhrmann, S. (1994). "Le Tremblement de Terre entre Peinture de Genre et Peinture d'Histoire". In: *Art + Architecture en Suisse* 45.4, pp. 330–339.
Wulff, H. E. (1968). "The Qanats of Iran". In: *Scientific American* 218.4, pp. 94–105.
Young, T. (1807). *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. Vol. 1. Lecture XXXIX, p. 463. London: Joseph Johnson.
Zammattio, C. (1980). *Leonardo the Scientist*. McGraw-Hill.
Zienkiewicz, O. (1967). *The Finite Element in Structural and Continuum Mechanics*. First. McGraw-Hill, London.
Zienkiewicz, O. and Y. K. Cheung (1964). "Buttress Dams on Complex Rock Foundations". In: *Water Power* 16, p. 193.
– (1965). "Stresses in Buttress Dams". In: *Water Power* 17, p. 69.
Zienkiewicz, O. and R. Taylor (2000). *The finite element method: Solid mechanics*. Vol. 2. Butterworth-heinemann.
Zixuan, C., C. Jixun, and Z. Zhigang (2018). "Curvature and Its Application in Huygens Isochronous Pendulum". In: *2018 IEEE International Conference of Safety Produce Informatization (IICSPI)*. IEEE, pp. 661–666.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

主题索引——第一卷：历史

各式各样的地震, 538

残疾人桥, 139

abacus, 359
ABAQUS, 355
Abbasid Caliphate, 70
Academy (Plato), 84, 85
acceleration, 124
Achaemenid period, 27
Acta Eruditorum 编辑, 180, 211, 218, 277
action at a distance, 113
ad quadratum, 442
ad triangulum, 57, 90, 442
ADINA, 355
aeolipile, 88
aeroelastic analysis, 339
aircraft structures, 339
Al-Azhar, 89
Al-Baghdaadi, 383
Al-Biruni, 89
al-Bukhari, 524
Al-Hakim bi-Amr Allah, 88
Al-Khazin, 89
Al-Khwarizmi, 71
Al-Ma'mun, 70
Al-Mayl, 383
Alberti, Leon Battista, 85, 90, 431, 437
  definitor, 437
Alexander the Great, 84
Alexandria, 85, 86, 88
Alhazen, 88
Altissimum planetam tergeminum observavi 天文学, 110
American Society of Mechanical Engineers (ASME), 306
Ammann, Othmar, 467
anagram, 116, 150
Anagrams and ciphers, 110, 116, 118, 123, 150
analysis, 133
Ananta, 521
anatomical
  observation, 74
anatomical revolution, 74
Andreas Vesalius, 74
Anguttara Nikaya, 521
anisotropy, 302
Ansei Edo earthquake, 508
Anthemius of Tralles, 538
anthropometry, 437, 440
anthropomorphic, 371
Apollo, 518, 519
Apollonius (son of Apollonius of Perga), 86
Apollonius of Perga, 87
applied mechanics, 306
Arab-Islamic
  iwan, 29
  muqarnas, 29
  qanāt, 29
Arab-Islamist
  Al-Khwarizmi, 29
  Córdoba, 29
  Omar Khayyam, 29
Arcetri, 111
arch, 87
  Etruscan, 34
  Persia, 27
  Roman, 33
Archimedes, 86, 89, 379
Archimedes Palimpsest, 86
Archimedis, 31
Archippus, 519
Architect
  Candela, 488
  Gehry, 488
  Otto, 476
  Saarinen, 474
architect-engineer, 305

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

主题索引——第一卷：历史

architecte, 305
architects
  Paladio, 35
  Phidias, 14
  Vitruvius, 34
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 306
Archytas, 30
arcitect
  Gaudi, 474
Argyris, John, 339
Aristotelian
  grip, 72
Aristotle, 72, 85, 88, 377
Arroyo Parida fault, 542
artificial intelligence, 502
assembly by superposition, 343
astronomical
  observation, 73
astronomy, 73
Aswan, 88
Athena, 516
Automata, 88
axiom, 85
axiomatic field theory, 308
Aztec
  world-ages, 543

Baalbeck, 38
Baalbek, 546
Babbage, 362
Babylonians, 11, 12
Bach, J.S., 546
Bacon, Francis, 72, 107
Bacon, Roger, 89
Baghdadi, 383
Baixa, Lisbon, 534
Baja California, 541
Baker, William, 495
balance, 89
  laws, 282, 296, 308, 311
Bandel, Hannskarl, 474
Banu Musa, 71
Basel, 126, 130, 131
  mathematical school, 127
Basra, 88
Bayt al-Hikma, 70
beam
  bending, 145
  cantilever, 109
  cantilevered, 172
  deflection, 133
  equation, 311
Beeckman, Thomas, 173
Beghini, Alessandro, 495
Belice Valley, 538
Bellarmine, Robert, 110
bending, 142
  moment, 210, 246
  unsymmetrical sections, 142
Benedetti, 386
Benouville, Léon, 52
Benvenuto, Edoardo, 379
Berkeley, 365
Bernoulli
  Daniel, 129, 210, 267, 406
  Family, 126
  Jakob, 127, 187, 199, 210, 246, 267, 278
  Johann, 128, 198, 210, 243, 273, 401, 406
Bibliotheque nationale de France, 90
Bihar earthquake, 1934, 521
Billington, David P., 498
BIM, 368
biomechanics, 355
biomimetic architecture, 463
blood circulation, 74
Bodhi tree, 521
Bossut, Charles, 183
Botero, 543
boundary value problem, 242, 307
Boyle, Robert, 76
brachistochrone, 237
Brahe, Tycho, 73, 122
bridge

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Alamillo, 489
Alcantara, 34
Alexandre III, 451
Anji, 36
Bosphorus, 29
Brooklyn, 472
Darius, 27
du Gard, 102
Hellespont, 29
invalides, 139
Königsberg, 133
Menai, 138
Millau, 496
Morandi, 466
Navier, 138
Neuilly (de), 105
Pont des Invalides, 139
Pont du Gard, 34
Ponte Maria Pia, 453
Salginatobel, 456
Shushtar, 27
Sunniberg, 468
Tacoma Narrows, 130
Telford, 139
Vieille-Brioud, 105
xerxes, 27
Brumel, A., 545
Bruneleschi, 61, 62
Bruno, Giordano, 394
brutalism, 456
Bubnov–Galerkin method, 345
buckling, 133
Buddha, 521
Buddhism, 521
bundled tube, 468
Buonarroti, Michelangelo, 59
buoyancy, 86, 89
Buridan, Jean, 384
Burj Khalifa, 495
Burri, Alberto, 539
Buyid dynasty, 88
Byzantine Empire, 89
cable-stayed bridge, 496
Cairo, 89
Calatrava, Santiago, 489
calculus, 133, 210
invention, 122
variations, 131, 134, 210
Cambridge tripos, 283
Candela, Félix, 488
capcity-demand, 178
Capuana, L., 537
Caravaggio, M., 81, 192, 281, 312, 358, 421, 505
Carnot's theorem (impact), 418
Carnot, Lazare, 418
Cartesian coordinates, 113
Cascadia suduction, 510
Castiglian, Alberto, 134
Castigliano, Alberto, 317, 339
theorems, 317
catenary, 128, 210, 473
Bernoulli, Jakob, 218
Galileo, 214
Huygens, 215
Leonardo, 214
Stevin, 215
catenoid, 474
catfish, 508
cathedral
Beauvais, 49
1284 collapse, 50
1573 collapse, 52
astronomical clock, 49
dimensions, 40
Duomo of Milan, 55
Gothic, 39
notable, 40
Santa Maria del Fiore, 62
St Peter, 59
CATIA software, 489
Catoptrica, 88
Cauchy
stress tensor, 298

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第一卷：历史

Cauchy, Augustin-Louis, 141, 242, 282, 289
  equations of motion, 297
  stress principle, 298
  stress tensor, 289
  tetrahedron, 290
  theorem, 290
center of gravity, 84–86, 89
  Torricelli's principle, 401
chain model, 60
Champollion, Jean-François, 16
Chartres, 90
du Châtelet, Emilie, 410
chevet, 42
China
  Hampi, 37
  Khajuraho, 37
Chumash Painted Cave, 542
Cicero, 86
cipher, 150
civil engineer, 306
Clapeyron, Benoît, 315
classical orders, 100
classification
  Greek, 32
Clausius, 297, 298
Clausius-Duhem inequality, 299
Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 186, 321
Clough, Ray W., 342, 348
Codex, 93
  Madrid, 175
Coleman, Bernard, 297, 303
column
  buckling, 145, 210
computation, advent of, 336
computational
  mechanician, 307
  methods, 336
conchoid, 64
concrete, 434
Condoglia marble, 56
conic sections, 87
Conon of Samos, 86
Consagra, P., 539
Consagra, Pietro, 539
conservation
  laws, 296
  mass, 282, 296, 297
  of motion, 113
constitutive
  relations, 282, 292, 311
  theory, 300, 308
constraints
  inequality, 417
  unilateral, 417
continuity equation, 297
continuum mechanics, 141, 148, 210, 282, 305
  general formulation, 283
  mathematical foundations, 282
  modern, 306
  synthesis, 311
coordinate
  system
    zodiac, 11
  transformation, 343
Copernicus, Nicolaus, 73, 107
Corrao, L., 546
Corrao, Ludovico, 539
Coulomb, Charles-Augustin de, 134, 182, 287, 289, 355
Courant, Richard, 345
Cramer, Gabriel, 278
creep, 308
Cretto, Grande, 539
Cross, Hardy, 323
crystal lattices, 302
Cueva de la Serpiente, 541
Culmann, Carl, 455
Culmann, Karl, 143
cuneiform, 10, 11, 14
  Yale Babylonian Collection 7289, 10, 11
Curator of Experiments, 116

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第一卷：历史

Curie family, 126
Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, 279
curvature, 193, 211, 242
  Bernoulli, Jakob, 199
  Bernoulli, Johann, 198
  Kästner, 202
  Leibniz, 197
  Newton, 195
  Oresme, 194
cycloid, 211

d'Alembert, Jean le Rond, 140, 242
  principle, 410, 413
da Vinci, Leonardo, 91, 170, 175, 214, 385, 438
  Architect, 94
  Engineer, 94
  notebooks, 92
  Vitruvian Man, 438
dams
  finite element analysis, 349
  stress analysis, 336
Darcy, Henry, 355
De Honnecourt, V., 69
论柔性线在自重作用下弯曲形成的曲线, 279
De Lucchi, M., 546
De motu corporum in gyrum, 122
De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum, 110, 401
deductive reasoning, 85
deformation, 300
  consistent, 319
della Porta, Giovanni Battista, 88
delta wing problem, 339
density measurement, 89
Descartes, René, 73, 113, 211, 214, 380, 396
detrusion, 184
Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano, 110
differential
  equations, 213
diffusion, 354
dimensional analysis, 112
Dioptra, 88
Diplom-Ingenieur, 306
Dirac, P., 507, 517, 521, 538, 547
Dirac, Paul, 419
Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali, 278
Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences, 171
displacement
  method, 321, 339
dissipation inequality, 299
dome, 87
  Arab-Islamic, 29
Dositheus of Pelusium, 86
Dreyfuss, Henry, 441
Dugas, René, 148
Duhem, Pierre, 297, 298
Durer
  Melencolia, 19
dynamic, 110, 114
  analysis, 350
  temporal discretization, 338

earth pressure, 144
earthquake, 11
  mythology, 543
earthquake-resistant design
  earliest Western, 538
Ebisu, 508
Echidna, 519
École
  Polytechnique, 287
  Ponts et Chaussées, 287
Egypt, 21
  hypostyle hall, 23
  Imhotep, 22
  Karnak temple, 23
  mastaba, 22

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Egyptians, 11, 15
Eiffel, Gustave, 452
Einstein, Albert
  on the Modulor, 440
elastic
  body, 306
  curve, 133
  energy, 236
  hypothesis, 266
  resistance, 262
elastician, 306
élasticité, 306
elasticity, 144, 147, 217, 305
  continuum theory, 282
  molecular theory, 282
  paradigm shift, 282
  theory, 145, 147, 306
electrical conduction, 354
elephant, cosmic, 520
Elixir of Life, 123
ellipse, 87
elliptic
  functions, 254
  integrals, 217, 251
Elzevir, 77, 111
Empedocles, 375
empirical
  design, 90
  method, 107
Enceladus, 516
energy
  balance, 282, 296, 298
  Bernoulli's usage, 408
  methods, 308, 311
  minimization, 242
  principles, 282
engineer, 305
  etymology, 17
engineering
  education, 157, 296
  practical, 144
Enlightenment, 77, 129
Enlil, 374
entropy production, 299
equilibrium, 89, 133
  condition, 108
  equations, 292
Erasmus program, 131
Eratosthenes, 86
Ergonomics, 441
Escher, M., 209
Essai sur les machines en général (Carnot), 418
Euclid, 71, 85, 89, 211
Euclid of Megara, 85
Eudemus of Pergamum, 86
Euler, Leonhard, 121, 130, 133, 188, 210, 240, 265
  Genuina principia, 273
  Methodus inveniendi, 242, 278
Euler-Bernoulli beam theory, 266
Euler-Lagrange equation, 231, 243, 417
Evolute/involute, 204
experimental
  mechanics, 110

fatigue, 308
fault
  strike-slip, 541
Fermat's principle, 237
Fermat, Pierre de, 211
ferrocement, 461
Festigkeitslehre, 306
field theory, 307
filament, 172
finite difference method, 336
  mesh discretization, 337
finite element, 256, 308, 344
  generalization, 354
first principles, 282
five percent, 491
five points of a new architecture, 438
flexibility
  matrix, 327
  method, 145, 319, 343

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

主题索引——第一卷：历史

flexural
rigidity, 255, 267
fluid mechanics, 354
flying buttresses, 43, 48, 90
folio, 93
force, 86, 124, 133, 371
centrifugal, 115
equilibrium, 108
flow, 459
impressed, 385, 387, 405
innate, 382, 404
method, 319, 339, 343
parallelogram, 387, 388, 405, 411, 414
parallelogram of, 108
path, 87
polygon, 143, 307
system, 108
transmission, 88
versus stiffness method, 353
form
finding, 472
follows function, 450, 490
Fourier, Joseph, 287, 355, 417
fourth-order differential equation, 242
fracture mechanics, 308
frame-indifference, 308
free body diagram, 178
French school, 282
achievements, 311
friction, 378
fulcrum, 181
functional, 233, 242
functionalism, 438
fundamental theorem, 123, 155
funicular polygon, 143
Föppl, August, 308

gaiola, 534
galenic theory, 74
Galerkin method, 345
finite element interpretation, 345
Galerkin, Boris, 345
Galilei, Galileo, 75, 109, 171, 214, 276, 289, 391
Gallagher, Richard H., 352
Gandhi, M.K., 521
Gaudi, Antoni, 474
Gauss, Carl Friedrich, 338
Gauss–Seidel iteration, 338
Gautier, Hubert, 101
Gehry, Frank, 488
generalized coordinates, 415
Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii, 280
geomechanics, 355
geometric motion (Carnot), 418
geometry, 29, 55, 85, 193
angles, 11
operative, 442
seked, 23, 26
triangles, 11
Germain, Sophie, 149
Gibellina, 538, 546
di Giorgio Martini, Francesco, 438
Girard, Albert, 181
Goldberg, Joseph Ely, 324
Golden
rule of mechanics, 392
theorem, 199
graphical
methods, 47, 100
statics, 455
gravity
specific, 89
Greece
Archimedis, 31
Parthenon, 31
Peripatetic school, 30
Phidias, 31
trabeated, 31
Greeks, 12, 17
Green, George, 142, 282, 301
Gregotti, Vittorio, 539
Guggenheim Museum Bilbao, 489

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Guidoboni, Emanuela, 538

Hagia Sophia, 538
Hamilton's principle, 240
Hamilton, William, 373
hand calculation, 336
hanging basket, 171
harmony, 431
Harun al-Rashid, 70
Harvey, William, 74
Haydn, J., 546
heaviness, 378
heliocentrism, 73, 110
Hennebique, François, 464
Hero of Alexandria, 88
Hesiod, 516
Heyman, Jacques, 47, 51
Hieron II, 86
Hipparchis, 23
history
  big picture
    historically, 7
    thematically, 6
  coverage approach, 5
  why, 5
Homer, 516
de Honnecourt, Villard, 55, 57, 90, 437, 479
Hooke's law
  generalized, 303, 307
Hooke, Robert, 76, 116, 305, 355
house arrest, 111
Hrennikoff, Alexander, 345
Hungary, 90
Huygens' Principle, 115
Huygens, Christiaan, 114, 125, 205, 210, 215, 273, 397
hydraulic systems, 88
hydrodynamics, 130
hydrostatics, 86, 89
hyperbola, 87
hyperelasticity, 283, 301
  significance, 311

IBM 701, 349
IBM 704, 349
Ibn al-Haytham, 88
Ibn-Sinna, 382
Imhotep, 21
impetus, 382
inclination, 382
inclined plane, 108, 393
incorporeal, 382
indeterminate structures, 312
India
  Iron Pillar of Delhi, 37
  stepwells, 37
inductive reasoning, 107
inertia, 378
influence lines, 145, 327
ingénieur
  17th-18th century, 305
  militaire, 305
  ponts et chaussées, 305
Institution of Civil Engineers, 306
integro-differential equation, 266
intellectual history, 70
internal energy, 298
Irons, Bruce M., 355
Islamic Golden Age, 71
Isler, Heinz, 476
ISMES, 463
isoparametric elements, 354
isoperimetric problem, 240, 242
isostatic lines, 461
isotropic materials, 303
isotropy, 302
iterative methods, 338

Jacobovici, S., 515
Jacquier, François, 59
Japan
  Himeji, 37
  shinbashira, 37
Japanese aesthetics, 431
Jerónimo, 536

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

John Hancock Center, 468
Johnson, K., 370
Jordanus de Nemore, 383
Joséphe, 536
Jung, C. G., 548

Kali Yuga, 520
Kant, I., 533, 537
karma, 374, 521
Kashima Shrine, 526
Kepler
  Johannes, 24, 73, 394
  laws, 73
Kepler, Johannes, 89
Khan, Fazlur, 468
Khayyam, Omar, 89
Kimmelman, Michael, 494
kinematics, 148
Kirchhoff, Gustav, 242, 355
Kleist, H. von, 535–537
Koechlin, Maurice, 486
Kossakovsky, V., 546
Kozac Collection, 515
Kron, Gabriel, 338
Kästner, Abraham, 202

l'Hôpital, Guillaume de, 237
La Construction la plus avantageuse des digues, 183
La Hire, Philippe de, 305
La Science des Ingénieurs, 305
Lagrange
  Joseph-Louis, 140, 213, 242, 287, 288, 414
  multipliers, 417
Lagrangian, 417
Lambot, Joseph-Louis, 464
Lamé constants, 303, 311
Lamé, Gabriel, 287, 294
land art, 539
Laon, 90
lateral load resistance, 469
LaTeX, 369
lattice analogy, 345
Le Corbusier, 438
  Modulor, 439
    red and blue series, 440
Leç 我们数据到皇家学校的桥梁和街道关于应用机械到建造和机器, 137
League of Nations, 456
least action principle, 240
left-handedness, 91
Leibniz, G., 125, 126, 197, 210, 211, 273, 403
Leibniz, G.W., 521, 533
Letter to a craftsman, 226
lever, 84, 85, 88
  law of, 86
Lever law
  Archimedes, 379
Libera, Adalberto, 499
Lieberkuhn, C.G., 535
light
  Huygens' Principle, 115
lightness, 378
Ligorio, Pirro, 538
limit analysis, 308
line of thrust, 41
load
  distribution, 87, 92
loads
  moving, 327
local details, 54
Longitudinal Challenge, 114, 116
Love, Augustus Edward Hough, 306
loxodrome, 63
lunar eclipse, 88
Lyceum, 84

Macedon, 84
MacNeal, Richard H., 349
Madrilenian rationalism, 458
Mahabharata, 520
Maillart, Robert, 455
major disputes, 156
Manderla, Heinrich, 321

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Marcellus, 86
Mariotte, Edme, 289
Marmontel, J.-F., 535
mastaba, 22
master mason, 90
material
  behavior, 89, 148, 300
  failure, 147
  frame indifference, 301
  strength, 109
  symmetry, 282, 300, 302, 308
Mathematica, 367
mathematical
  modeling, 107
  notation, 133, 213
  physics, 282
mathematicians
  Aryabhata, 13
  classical
    Al-Biruni, 12
    Al-Khwarizmi, 12
    Archimedes, 12
    Aristarchus, 11
    Brahmagupta, 10, 12
    Euclid, 13
    Euler, 13
    Fibonacci, 12
    Hipparchus, 11
    Leibniz, 12
    Ptolemy, 11
    Sacrobosco, 12
    Thales of Miletus, 11
  Descartes, 113
  Euler, 130
  Fathers Boscovich, 59
  Huygens, 114
  Jones, W., 13
  Lambert, J.H., 13
  Le Seur, 59
  Leibniz, 124
  Lindemann, F., 13
  Madhava, 13
  Newton, I., 13
mathematics, 72
  Euler's identity, 13
  Fibonacci numbers, 14
  Golden Ratio, 10, 13, 14, 31
  Leibniz–Gregory series, 13
  mechanics, 30
  Pythagorean triples, 11
  quadrature of the circle, 13
  Rhind Papyrus, 12
  superior highly composite number, 11
mathematization, 136, 141, 157
MATLAB, 367
matrix
  historical development, 327
  partitioning, 343
  structural analysis, 338
Maxwell's reciprocal theorem, 146
Maxwell, James Clerk, 146, 316, 339, 355, 481
Mayan
  Chichen Itza, 21
  Tikal, 21
measurement
  braccia, 56
  byzantine foot, 442
  cubit, 23, 26
  earth circumference, 71
  historical units, 445
  seked, 23
  Système international d'unités, 12
  Tlacxitl, 26
Meaux, 90
mechanical
  advantage, 84, 88
  engineer, 306
Mechanical advantage, 392
mechanician, 305
mechanics
  general, 305
  human body, 92
  impact, 88

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

主题索引——第一卷：历史

lever, 31, 36
materials, 305
rational, 128
solid, 306
solids, 305
theoretical, 144
mechanistic worldview, 113
Medici, 110
Meiji government, 527
membrane structures, 476
Mencke, Otto, 223
Mendini, Alessandro, 539
Menelaus of Alexandria, 89
Menn, Christian, 467, 489
Mersenne, Marin, 178, 397
Merv, 89
mesh refinement, 354
Mesoamerica
aztec, 21
cosmological narratives, 543
Mesopotamia, 10
Etemenanki, 20
Ziggurats, 20
Messina disaster, 546
路线 *Methodus inveniendi* 线路曲线, 131, 243, 279
的评论 *Methodus universalis determinandae curvaturae fili* 通用方法, 279
Mezzogiorno, 539
Michael, Archangel, 519
Michell
Anthony, 482
structures, 483
truss, 482
middle third rule, 185
Mignot, Jean, 58
military engineering schools, 78
Millau Viaduct, 496
mirror writing, 91
Mo Jing, 84
modular construction, 464
Mohist, 36
Mohr's
circle, 145, 292
theorems, 317
unit load method, 145
Mohr, Otto, 145, 292, 317, 339
Mohr-Coulomb criterion, 145
molecular theory, 282
moment, 86
activity (Carnot), 418
curvature relationship, 267
distribution, 323, 360
three-moment equation, 311
momentum
balance, 282, 296, 297
balance (angular), 298
conservation, 113
Monge, Gaspard, 287
Monier, Joseph, 464
monoclinic symmetry, 303
morphogenesis, 472
Moseley, Henry, 145
motion, 133, 378
impetus, 371
pendulum, 114, 205
Mozi, 84
Mucalinda, 521
Muhammad, Prophet, 524
multiphysics analysis, 355
Museion (Alexandria), 86, 88
Muslim ibn al-Hajjaj, 524
Musmeci, Sergio, 477
van Musschenbroek, Peter, 77, 173
Müller-Breslau
Heinrich, 318
principle, 327

nagas, 522
Nahui Ollin, 520
Namazu, 508
NASTRAN, 353
natural philosopher, 305
natural philosophy, 72, 375

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第一卷：历史

Naucrates, 86
Navier, Claude Louis, 136, 282, 293, 315
  bridge, 138
Nero, 88
Nervi, Pier Luigi, 460
Neufert, Ernst, 441
Neugebauer, Otto, 87
neutral axis, 176
Newmark's method, 351
Newmark, Nathan M., 351
Newton
  Isaac, 76, 121, 124, 195, 404
  laws, 124
  mechanics, 283
  third law, 123
Nht, 373
Nile River, 88
Noether, Emmy, 149
Noll, Walter, 301, 303, 306
nonlinear analysis, 350
Nordenson, Guy, 494
Norfork Dam, 349
Norinaga, Motoori, 527
Nouguier, Émile, 486
Nullius 在 *Verba*, 76
number systems
  binary, 10, 12
  decimal, 10–12
  duodecimal, 10–12
  Hindu-Arabic numerals, 12
  sexagesimal, 10–12
number theory, 133
Nur, A., 515

objectivity principle, 282, 300, 301
observation, 88
operator
  variation, 257
optimization, 241, 266
Opus Spicatum 饰演, 63
Oresme, 72, 194, 385
orthotropic materials, 303
Otto, Frei, 476

Pacific Northwest
  earthquake mythology, 542
Padua, 110
Paladino, Mimmo, 539
Pali Canon, 521
Palladio, 85
Palladio, Andrea, 99, 432, 438
Pamphylia, 86
pandemic
  architecture during, 494
Pangloss, 536
Pannini, G.P., 166
papyrus
  Moscow, 16, 23
  Rhind, 16, 23
parabola, 87
parallelogram of velocities, 85
Parent, Antoine, 181, 289
parinirvana, 521
partial differential equation, 354
Pascal, Blaise, 115
Paul III, 111
Paul, Saint, 514
Pearson, Karl, 336
pendulum, 114
  motion, 205
Perga, 86
Pergamum, 86
Peripatetic school, 30, 85, 371
perpetual motion, 90
Perret, A., 456
Persia
  Persepolis, 27, 29
  qanat, 27
phenomenological approach, 282
Phidias (astronomer), 86
Philip, Apostle, 519
Philoponus, 381
philosopher's stone, 123
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 122

第一卷：力学与结构分析简史 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Phoenicians, 10, 16
Phoronomy, 414
photoelasticity, 463
physical model, 60
Picardy, 90
pinnacle, 42, 45
planetary motion, 73
plastic limit analysis, 47
plasticity, 308
Plato, 377
Pliny the Elder, 88
Plotinus, 381
pneumatic devices, 88
Pneumatica, 88
Poisson's ratio, 282
  experimental refutation, 311
Poisson, Siméon, 242, 287, 292
Poleni, 59
polymath, 281
  Al-Biruni, 12
  Eratosthenes, 86
  Galileo, 111
  Hooke, 76
  Leibniz, 125
  Mersenne, 114
Pombal, Marquis of, 534
Poseidon, 516
Posidonius, 380
Positional gravity, 383
postulate, 85
potential energy, 246
potential-based formulation, 282
pralaya, 520
Prandtl, Ludwig, 308
prefabrication, 464
Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement (Carnot), 418
principle
  continuity, 419
  virtual work, 318, 371, 392, 393, 408
  virtual work Torricelli, 402
progettista, 450
proportion, 431
  geometric tracing, 442
  systems, 432
Przemieniecki, J. S., 353
Ptolemy, 71
pulley, 85, 88
Puranas, 520
Purini, Franco, 539
pyramid
  Giza, 22
  saqqara, 22
  Templo Mayor, 21
Pythagorean triangle, 446
Python, 368

quadpartite, 42
Quadratura Curvae, e cujus evolutione describitur inflexae laminae curvatura, 228
quantity of matter, 384
Quaroni, Ludovico, 539
Quasimodo, S., 537, 538

radius of curvature, 246
Ramberg–Osgood equation, 350
Rankine, William, 106, 144
Raphael
  School of Athens, 9
rational mechanics, 306
Rayleigh, Lord (John William Strutt), 345
Rayleigh–Ritz method, 345
reciprocal
  diagrams, 146
  theorem, 316
Reformation, 111
Reims, 90
reinforced concrete, 464
reinterment, 111
Renaissance
  architectural treatises, 431
reversible process, 419
revolution
  anatomical, 74

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Richardson
extrapolation, 337
method, 337
Richardson, Lewis Fry, 336
rigid body, 88
Ritter, Wilhelm, 455
Ritz, Walther, 345
Robertson, Leslie, 493
Romanesque, 39
Rome, 111
Colosseum, 33
Pantheon, 34
Roriczer, Matthias, 55
rose, 501
rotational motion, 115
Rousseau, J.-J., 521, 533, 537
Royal Society, 76
résistance des matériaux, 306

Saarinen, Eero, 474
Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento, 76
Sagrada Famiglia, 62
Sagredo, 110
Saint-Venant's principle, 143
Saint-Venant, Adhémar, 142, 186, 287, 294
Salginatobel bridge, 456
Salviati, 110
Sanjar, Sultan, 89
Santa Maria del Fiore, 61
Santa Ynez Mountains, 542
SAP (Structural Analysis Program), 349
Sarnath, 521
scaling
laws, 109
proportion, 35
scholastic method, 73
school of Athens, 31
science, 72
scientia est unum et ars est aliud, 58
scientific
method, 109
revolution, 72
scientists
classical
Archimedes, 31
Aryabhata, 37
Mozi, 36
Shastra, 37
Zhang Heng, 36
Imhotep, 21
screw, 88, 392
Sears Tower (Willis Tower), 468
Seidel, Philipp Ludwig von, 338
seismic activity
cultural responses to, 542
Seljuk Empire, 89
Seneca, 88
Serlio, Sebastiano, 100
serpent
as seismic metaphor, 542
horned, Baja California, 541
Serra, Richard, 489
Seven Bridges of Königsberg, 133
sexpartite, 42
Shaddai, 374
Shakespeare, 501
Shakespeare, W., 535, 538
Shatapatha Brahmana, 520
shell structures, 458
hyperbolic, 458
hyperbolic paraboloid, 488
Shesha, 521
Sicily, 538
Sierra de San Francisco, 541
Silas, 514
simple machines, 88, 393
Simplicio, 110
sisiutl, 542
Sive motus scientia analytice exposita 机械学科, 131
size effect, 112
Skidmore, Owings & Merrill, 468, 495
slide rule, 360
slope-deflection method, 322

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Snell's law, 239
solidity, 179
Southwell, Richard Vynne, 326
Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromis naturarum, & 首頁 〉外文書, 226
Specimen alterum calculi differentialis 算法型号:*Alterum Calculi Differentialis*, 278
sphere and cylinder, 86
Spina di pesce 鱼, 63
Spinoza, B., 528
springs, 118
stability, 130, 133, 144
  floating bodies, 86
  theory, 308
statically indeterminate structures, 315
statics, 84, 86, 108, 148, 387
  Archimedis, 31
  graphical, 143
Stevin, Simon, 88, 108, 215, 388
stiffness
  global matrix, 343
  matrix, 327, 343
  method, 321, 343
Stoicism, 381
Stokes, George Gabriel, 306, 355
straightedge and compass, 211
strain, 147, 148, 173
  displacement relations, 292
  energy, 240, 245, 282
strength, 170
  of materials, 92, 144, 147, 306
stress, 147, 148, 175
  concentration, 142
  concept of, 289
  pre-history, 289
  principal, 141, 145, 291, 298
  resultants, 274
  tensor, 141, 282, 289
    Cauchy, 307
    importance, 311
    symmetry, 291, 298
  transformation, 145
structural
  analysis, 282, 310
  analyst, 307
  architecture, 501
  art, 498
  behavior, 90
  clarity, 433
  elegance, 464
  experimentation, 450
  expression, 464
  failures, 139
  forms, 464
  intuition, 459
  morphogenesis, 472
  necessity, 487
  optimization, 134, 460, 483
  stability, 147
  theory, 310
structural engineering
  etymology, 314
substructuring, 338
successive over-relaxation (SOR), 338
symmetry
  condition, 298
  group, 302
sympathy, 380, 381
Syracuse, 86
system integration, 54

Tagore, R., 521
Takemikazuchi-no-kami, 526
tall building design, 468
tangent, 211
Technische Hochschulen, 306
Ten Books on Architecture, 34
tension, 222
Thé 奥里 · 德斯机器简单, 135
Thayer 系统, 157
thermal conduction, 354

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

Thermes, Laura, 539
thermodynamics
consistency, 283, 300
first law, 298
laws, 296
restrictions, 282, 308
restrictions on constitutive relations, 303
second law, 299
thin concrete forms, 458
Thomson, Lord Kelvin, 297, 298, 306
three moment equation, 315
three-hinged arch, 455
thrust line, 87
Tibet, 522
time integration
finite difference, 338
timekeeping
calendar, 10
Republican, 12
time, 11, 12
Timoshenko, Stephen, 147, 306
Todhunter, Isaac, 147, 336
topology optimization, 483
Torricelli, Evangelista, 401
Torroja, Eduardo, 458
torsion, 142, 184
tortoise, cosmic, 520
tracery, 90
traction vector, 289, 297
transverse isotropy, 303
triclinic symmetry, 303
triforium, 42
Truesdell, Clifford, 148, 297, 306
Trump, Donald, 110
truss
analysis, 143
trust but verify, 502
von Tschirnhaus, Ehrenfried Walther, 218
tubular structure, 468
Turner, M. Jonathan, 342
Tutte l'opere d'architettura 所有作品所有建筑作品, 100
tychonic system, 73

U.S. Army Corps of Engineers, 349
Ungers, Oswald Mathias, 539
university transformation, 73
untouchability, 521
urban planning, 34

Vajrayana, 522
Varaha, 520
variational
calculus, 266
formulation, 129
methods, 126, 241
principles, 240, 245, 283, 308
Varignon
Pierre, 188, 372, 407, 408
theorem, 409
Vaucelles, 90
vault, 87
ribbed, 45
vector, 143, 389
mechanics, 108
vectorial, 168, 330
Verga, G., 537
Vermeer, J., 335
Verrocchio, Andrea, 91
Vignola, Giacomo Barozzi da, 100
Viollet-le-Duc, Eugène, 40, 47, 61, 451
Virlogeux, Michel, 496
virtual work, 108
viscoelasticity, 308
Vishnu, 520
Vitruvian triad, 429
Vitruvius, 6, 34, 57, 87, 425, 437
Voigt, Woldemar, 302
Voltaire, 521, 533, 535–538
vortex theory, 113
voussoir, 41
Vérité, Auguste-Lucien, 49

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Wallis, John, 401, 403
Warhol, A., 544
water-powered saw, 90
wedge, 85, 88
weight
  specific, 89
weighted residuals, 345
West Point, 157
wheel and axle, 88
Williot-Mohr diagram, 145
Wilson, Edward L., 349
Winkler, Emil, 327
Witelo, 89
wooden architecture, 37
work
  Carnot's moment of activity, 418
World Trade Center, 493
Wright,Frank Lloyd, 455
Wright-Patterson Conference (1965), 352
writing
  abjad, 17
  acrophonic principle, 17
  alphabet, 10, 16
  Arabic alphabet, 17
  Brahmic scripts, 17
  Chinese characters, 16
  clay tokens, 14
  Demotic, 16
  Epic of Gilgamesh, 14
  Hammurabi, 14
  Hebrew alphabet, 17
  Hieratic, 16
  hieroglyphs, 10, 15
  Ishango bone, 14
  Latin alphabet, 17
  Lebombo bone, 14
  Phoenician alphabet, 17
  phono-semantic compounds, 16
  Proto-Sinaitic, 17
  Rosetta Stone, 16
  tally sticks, 14
  vowels, 17
wrought iron construction, 453

yin-yang, 508
yonaoshi, 543
Young, Thomas, 120, 184
yugas, 520

Zarzuela Hippodrome, 458
Zienkiewicz, Olgierd C., 354
+, div , ∞, 195

《关于与力学有关的两门新科学的论述与数学证明》& 地方运动, 109, 111
《古兰经》《圣经》Mizan al-Hikma《古兰经》《圣经》, 89
《坚固的身体运动的法则》, 137

王之脚, 444
中世纪学术主义, 73
中性轴, 137
庆祝催眠问题, 279
五条命令的规则《五大建筑规则》*(Regola delli cinque ordini d'architettura)*, 100
五角大楼, 32
亚里士多德
  机械, 122
人工工厂, 74
人文研究, 32
以平衡为主平衡的计划 (阿基米德), 379
以色列弹性, 128, 129, 193, 217
以色列弹性九种品种, 251, 253
任何人类研究若不经过数学证明，就不能称为真正的科学。, 58
体育宫, 460

光学, 76
克劳特克朗, 389, 408
入口, 44
坚固、实用、美观, 430
坚定, 429
关于一个应用的 *Rè* 二是最大和最小 *à* 一些问题 *è* 静态的关系 *à L* 建筑, 134

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

关于一个应用的论文 *R*` 最大和最小为主 ` 些问题 ` 静态相似之处 *Á* 建筑, 182
关于分析无限的介绍, 132, 212
关于殖民地的力量关于殖民地的力量, 280
关于计算平衡和框架的密度, 316
冥想 *CLXX*, 279
利克人平衡条约, 115
加利福尼亚生命史史的故事, 110
加泰罗尼亚催眠, 217
动物公交车的 *Motu Cordis et Sanguinis Anatomica*, 74
化学, 123
化学指数, 123
单位 é 家居, 440
单元的评论, 13, 85, 211
卡纳扎基, 508
卢卡西亚教授, 121
历史
  材料力学, 147
  材质
    材料, 7
  结构工程, 8
历史机械机械, 7, 8, 148
历史与奥里戈计算差异, 211
原名:*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, 122, 195
哲学原则 (德卡特) 希伯来人, 113, 178
参观 *InSita*, 404
合唱作品, 57
吉隆坡, 64
向一个建筑走向一个建筑, 438
吸引力逆四法则, 123
周围的旋转, 63
哈萨克斯坦, 508
哲学自然原则数学自然哲学的原则数学, 72, 76, 116, 124, 205, 404
四十字四角形, 90
四本书《建筑》四大建筑图书馆, 35, 99, 100, 432
四角形, 32, 57, 373, 446
国际反对派联合会, 459
图形统计学图形静态, 143
圣。圣彼得堡, 131
圣家家族, 474
地质学, 113
坦克, 211
埃德鲁多 • 托罗贾研究所埃德鲁多 · 托罗贾研究所, 459
城市 VIII (教宗), 110
塔和桥梁, 498
外出, 44
天文学
  學院, 436
奥姆尼亚歌剧, 128, 129
奥斯基拉托时钟, 114
威利亚威利亚, 217
威尔图威尔图, 381
威恩斯特威尼斯, 429
威斯 • 维瓦 *VIVA* 争论, 403
孔子, 431
孟加拉, 508, 510
´ 校吉尼 • 德 • 梅西雷斯天文学家, 78
´ 校政治学波利技术, 136, 141, 157, 305
´ 校点头和混乱桥梁和街道 ´ 面, 78, 138, 142, 157, 305
安西 · 肯蒙罗克, 508
定位和摩托车的配置, 194
实验室 *Sive Curiosum*, 127
尝试和重新尝试, 75
尺寸分析, 112
巴塞罗那
  收获节日, 227
布拉希斯托克朗, 128
关于平衡的计划, 31
应用机械的手册应用机械的手册, 144
建筑, 36, 87, 426
建筑师, 546
开普勒, 122
弹性, 137
的历史弹性力学的历史, 147
弹性理论 ¨ 祝 *K*¨ 儿, 186, 321
循环性通道, 114
微观, 76

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

德國地質學, 55
德拉科学机械, 110

怀孕妇女的石头, 546
思考能力, 32
悬链线, 213
扭转, 135
披萨之塔, 109
拉丁文的传记, 118
拉米娜, 245
拉米纳 *Elasticae*, 128, 279
教學之橋学院的桥梁, 436
数学的起点, 202
新机械或国家, 407, 408
新生器官新的器官, 107
方法的演讲, 113
无限无限
∞, 479
时间保留, 114
普拉吉主义, 122
曲率, 212
更新的 *Festigkeitslehre* 方法, 318
望远镜, 110
m´ 瓜多尔應用
应用 *ée*, 306
m´ 瓜多尔理性
理性, 306
机械, 75
机械分析, 408
机械学科机械学书, 145
工程与建筑的机械原则, 145
机械问题机械问题, 30, 85, 88, 371, 378
的历史材料力学的历史, 147
林, 217
林西学院林西学院, 75, 110
标签*: Librorum Prohibitorum*, 110
根据圣的情感 约翰, 546
桥梁之路桥梁交易, 101
梅西纳: 没有记忆的城市*?*, 546
欧洲混凝土委员会, 459
歌剧地质学, 401
此分類上一篇*:Sic stabit contiguum rigidum inversum*, 61, 118
步行回归, 125
毛泽东
普林顿 *322*, 10
沙特阿拉伯, 37
法律的, 377
注入, 111
流动, 122, 125, 211
海洋水泳, 64
清洁的动作, 111
演讲 (加利利), 391
激情根据圣。马蒂奥, 546

火柴 火车 火箭 火焰, 107, 110
物理元素, 173
物理实验物理实验, 279
物理机构, 410
动态条约, 140, 372, 409
特拉特´梁的, 137
特里布, 135
特里维亚, 32
现代实验, 73
理性与结构性类型拉斯´其为主的结构, 458
理性波德里斯, 383
理論 *Egregium*, 203
生存 *VIVA*, 125, 126, 242, 404, 405, 409, 413, 418
用途, 429
百科全书, 78, 140
皇家社区, 121
直线和共通, 211
真实的原则, 210
知识就是力量。, 73
石器, 55
研究实验室, 91
福克斯福尼克, 217
科吉托, 埃尔戈索姆, 113
科学
进展, 83
科学与宗教 (分离), 73
科学还是建造的艺术?科学还是建造的艺术*?*, 460
阿卡德 *é* 我的科学, 76, 114

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

科普斯桥梁和山脉´面, 136, 139
第五次急性, 64
答案是 Dn。胡格尼亚答案是 *Dn*。胡格尼, 279
算法
    计算, 129
米兰二元工厂 *Veneranda Fabbrica del Duomo di Milano*, 55
米洛, 米洛 š, 501
米特里卡测量, 88
米莎和 *ecce terrae* 摩托车, 545
结构分析; 一个历史性方法, 8
结构理论史上的论文: 以雅克 · 海曼的名义, 8
结构理论的历史, 8
维多利亚亚亚马逊, 463
建筑中的美学与技术, 460

自由阿巴西自由阿巴西, 12
艾尔扎维尔, 111
艾菲尔设施公司, 453
西伯利亚, 37, 431
西克 · 维斯 *(Sic Vis)*, 180
西德里奥斯 · 努尼西斯, 110
西点, 157
西门子学院水泥学院, 75
解决问题 卡特纳里解决問題的問題, 279
解析
    机械, 137
解決問題的關注解決問題的曲線, 279
解决问题 *Funicularii*, 278
計劃者, 471
贝洛波, 88
超级示威者 *Ponderum*, 383
超越曲线, 214
进化描述, 202

重力, 378, 387
重力:*Gravitas Secundum*, 383, 408
重定向重建建筑, 90, 431
铁路, 461
關於兩大世界系統的對話关于两个主要世界系统的对话, 171
關於報告和紀念 *Les Ponts Suspendus*, 138
關注的關注精心分配, 11
问题 Novum 问题新, 279
阿伦伯特的原则, 140
阿克米卡苏奇 - 没有基米, 508
阿卡德 *é* 我的科学, 137
阿尔 • 哈瓦里斯米基塔布 · 穆克塔斯尔, 12
阿尔辛, 446
阿米利 • 艾米利阿米利亚, 埃米利, 149
附件 *I: De curvis elasticis*, 280
附加信息 *Ad Problem Funicularium*, 223
我 陈, 12
首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 學術 〉 *Academiae Petropolitanae*, 131
首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學, 110
首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學首頁 〉 外文書 〉 文學 〉 西洋文學, 108
首頁 〉 外文書 〉 西洋學院 *Scientiarum Imperialis Petropolitana*, 131
马拉松体育, 460
鱼,SIMéon, 135
麦加尼亚机械, 392
麻烦 Funicularium 麻烦 *Funicularium*, 278

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷

第二卷

导论：基础与解析方法

第三卷

进阶：数值方法

第四卷

高级：非线性与其他专题

附录置于第四卷之后

审阅稿

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

第二至第四卷目录（分析）

第二至第四卷目录（分析） 613

第二至第四卷插图目录（分析） 649

第二至第四卷表格目录（分析） 665

第二至第四卷例题目录（分析） 669

第二至第四卷要点目录（分析） 676

17 引入 679

17.1 大图像 . . . 679
17.1.1 建筑 . . . 680
17.1.2 结构工程 . . . 680
17.1.2.1 结构设计 . . . 681
17.1.2.2 分析 . . . 681
17.1.2.3 安全评估 . . . 682
17.1.3 学科集成在结构分析 . . . 683
17.2 单元: 主要内部力量 . . . 683
17.3 荷载 转换 单元 . . . 683
17.4 结构类型 . . . 684
17.5 工程工具的转型 . . . 688
17.6 结构工程 课程 . . . 689

18 负载 691

18.1 引入 . . . 691
18.2 货物分类 . . . 691
18.2.1 垂直 . . . 692
18.2.2 侧面 . . . 693
18.2.2.1 风 . . . 693
18.2.2.2 地震 . . . 696
18.2.3 水道和地球 . . . 697
18.2.3.1 例题 18.1: 水晶 荷载 . . . 698
18.2.4 效应 荷载 . . . 698
18.2.5 二级 . . . 699
18.2.6 热量 . . . 700
18.2.6.1 例题 18.2: 热扩展/应力 . . . 701
18.3 考虑 . . . 701
18.3.1 计划的负载 . . . 701
18.3.2 荷载 定位 . . . 702
18.3.3 荷载 组合 . . . 703
18.3.4 荷载 路径 . . . 703
18.3.5 税务区 . . . 706

审阅稿

18.3.5.1 例题 18.3: 税务区 . . . 707
18.3.6 结构性反应 . . . 708
19 反应 **711**
19.1 引入 . . . 711
19.1.1 支持的类型 . . . 712
19.1.2 平衡 . . . 712
19.1.3 条件方程式 . . . 714
19.1.4 静态决心 . . . 714
19.1.5 地质不稳定 . . . 715
19.1.6 自由体图 . . . 716
19.2 例子 . . . 716
19.2.1 例题 19.1: 水静态 荷载 . . . 717
19.2.2 例题 19.2: 荷载 转换 . . . 717
19.2.3 例题 19.3: 简单支持 梁 . . . 718
19.2.4 例题 19.4: 平衡 荷载 . . . 719
19.2.5 例题 19.5: 四分之一 梁 . . . 720
19.2.6 例题 19.6: 3 加布式框架 . . . 721
19.2.7 例题 19.7: 包含支持 . . . 722
19.2.8 例题 19.8: 网络结构 . . . 723
19.2.9 例题 19.9: 飞机 平衡 . . . 724
19.2.10例题 19.10: 吉姆博酒 . . . 725
19.2.11例题 19.11: 排名: 平衡的浮动身体 (液化证据) . . . 728
19.2.12例题 19.12: 体育运动员: 神经 . . . 730
20 威胁 **733**
20.1 引入 . . . 733
20.1.1 假设 . . . 733
20.1.2 签约 . . . 734
20.1.3 确定性和稳定性 . . . 734
20.2 分析方法 . . . 736
20.2.1 合成方法 . . . 736
20.2.1.1 例题 20.1: 桁架分析; 关节方法 . . . 737
20.2.1.2 例题 20.2: 3D 桁架 . . . 740
20.3 部分方法 . . . 743
20.3.1 部分方法 . . . 743
20.3.2 例题 20.3: 部分方法 . . . 743
20.4 共用/矩阵 . . . 744
20.4.1 例题 20.4: 简单的特鲁斯; 合体/矩阵方法 . . . 745
20.4.2 例题 20.5: 综合特鲁斯; 合体/矩阵方法 . . . 748
21 灵活成员的内部力量 **751**
21.1 引入 . . . 751
21.1.1 工程方法: 从压力到内部力量 . . . 751

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

21.1.2 2d/3d 直 / 曲线射击的内部力量 . . . 752
21.1.3 为什麼這是重要的 . . . 754
21.1.4 设计签约 . . . 754
21.2 荷载, 表, 瞬间关系 . . . 755
21.2.1 差异形式 . . . 756
21.2.2 综合形式 . . . 757
21.3 例子 . . . 757
21.3.1 例题 21.1: 梁 與傾向 荷载 . . . 758
21.3.2 例题 21.2: 包含 框架 . . . 759
21.3.3 例题 21.3: 框架 與水位性 荷载 . . . 762
21.3.4 例题 21.4: 线性不同 荷载 . . . 763
21.3.5 例题 21.5: 框架; 例子弯曲天花板 . . . 764
21.3.6 例题 21.6: 相反 框架 . . . 765
21.3.7 例题 21.7: 3D 框架 . . . 769

22 缺陷; 弹性曲线 **773**
22.1 引入 . . . 773
22.2 差异方程式 . . . 774
22.2.1 例题 22.1: 双重融入 . . . 774
22.2.2 例题 22.2: 最大 挠度 . . . 776
22.2.3 例题 22.3: 最佳滑雪形状 . . . 777
22.2.4 例题 22.4: 浮动 梁 . . . 777
22.3 曲率 . . . 780
22.3.1 例题 22.5: 自行车轮子 . . . 782
22.3.2 例题 22.6: 直升式的春天 . . . 788
22.3.3 曲线与曲线关系 . . . 789
22.3.3.1 例题 22.7: 二元交换器 . . . 790
22.3.4 曲率 区域方法 (瞬间区) . . . 791
22.3.4.1 签约 . . . 791
22.3.4.2 第一 曲率 区域理论 . . . 791
22.3.4.3 第二个曲率区域理论 . . . 793
22.3.4.3.1 例题 22.8: 曲率 区域, cantilevered 梁 . . . 793
22.3.4.3.2 例题 22.9: 瞬间 曲率, 仅支持 梁 . . . 794
22.3.4.4 最大 挠度 . . . 795
22.3.4.4.1 例题 22.10: 最大 挠度 . . . 796
22.3.4.5 温度 曲率 关系 . . . 797
22.3.4.5.1 例题 22.11: 框架 受温度加载 . . . 797
22.3.4.6 例题 22.12: 塑料长度 . . . 800
22.3.4.7 弹性重量 / 结合点击 . . . 801
22.3.4.7.1 例题 22.13: 接口 梁; 点 荷载 . . . 802
22.3.4.7.2 例题 22.14: 合成 梁; 变量 I . . . 803

23 Shear 和 扭转 **806**

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

23.1 Shear 歪曲 (转向) . . . 806
23.1.1 字体, 无限的单元 . . . 806
23.1.1.1 例题 23.1: 挠度 加密式 梁 . . . 807
23.1.2 股票分布; $\tau(y)$ . . . 807
23.1.3 共享率 . . . 808
23.1.4 SHAR 因素 . . . 808
23.1.5 Shear 歪曲 v_s 泰莫森科 . . . 810
23.2 转型变形 . . . 811
23.2.1 S^t 虚拟或统一 扭转 . . . 811
23.2.2 Vlasov 或 Nonuniform 扭转 . . . 812
23.2.2.1 例题 23.2: 不统一的扭转 I 部分 . . . 817

24 附加 虚功 **821**
24.1 引入 . . . 821
24.2 简化补充 虚功 原则的衍生 . . . 822
24.2.1 衍生品 . . . 822
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti 相互理论 . . . 824
24.2.3 外部 虚功 $\delta\overline{W}^*$ . . . 825
24.2.4 内部 虚功 $\delta\overline{U}^*$ . . . 825
24.3 例子 . . . 827
24.3.1 例题 24.1: 梁 . . . 827
24.3.2 例题 24.2: 框架; 缺陷 . . . 828
24.3.3 例题 24.3: 框架, 转角 . . . 829
24.3.4 例题 24.4: 灵活的手套 . . . 830
24.3.5 例题 24.5: 索 支持的 cantilever 梁 . . . 832
24.3.6 例题 24.6: Torsional 和 Flexural Deformation . . . 833
24.3.7 例题 24.7: 梁中的灵活和叶形变异 . . . 835
24.3.8 例题 24.8: 热效应在梁 . . . 836
24.3.9 例题 24.9: 管道 . . . 837
24.3.10 例题 24.10: 桁架; 简单 . . . 838
24.3.11 例题 24.11: 桁架; 复杂 . . . 839
24.3.12 例题 24.12: 桁架 与初始交换器 . . . 840
24.3.13 例题 24.13: 桁架 二次压力 . . . 840
24.3.14 例题 24.14: 圆环 . . . 842
24.3.15 例题 24.15: 春天 . . . 845

25 柔度法 **848**
25.1 引入 . . . 848
25.2 力量 / 柔度法 . . . 853
25.2.1 例子 . . . 854
25.2.1.1 例题 25.1: 梁 與 tie rod . . . 854
25.2.1.2 例题 25.2: 钢材 构建 框架 分析 . . . 856
25.2.1.3 例题 25.3: 桁架, 一大强度 . . . 859

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

25.2.1.4 例题 25.4: 桁架: 两支救援力量 . . . 862
25.2.1.5 例题 25.5: 桁架: 热 荷载 . . . 864
25.2.1.6 例题 25.6: 春天支持 梁 . . . 865
25.2.1.7 例题 25.7: 皇后邮件 . . . 867
25.2.1.8 例题 25.8: 灵活性矩阵; 曲线泡沫 . . . 869
25.3 三瞬间方程式 . . . 872
25.3.1 例题 25.9: 连续 梁 . . . 875
25.3.2 例题 25.10: 连续 梁 . . . 875
26 武力在转移方面 **878**
26.1 引入 . . . 878
26.1.1 签约 . . . 878
26.1.2 分析方法 . . . 879
26.2 Axial Deformations 轴形变形 . . . 880
26.3 灵活 . . . 880
26.3.1 差异方程式 . . . 880
26.3.2 Nodal 终端力量为初步的压力 . . . 883
26.3.3 诺达等级力量为单元的灵活性 . . . 884
26.3.3.1 均匀分布的货物 . . . 884
26.3.3.2 集中负载 . . . 885
27 手中的坚固 **887**
27.1 引入 . . . 887
27.2 挠度; 直接解决方案 . . . 887
27.2.1 例子 . . . 889
27.2.1.1 例题 27.1: 彩色 梁 . . . 889
27.2.1.2 例题 27.2: 连续 梁 . . . 890
27.2.1.3 例题 27.3: 双间 梁 . . . 891
27.2.1.4 例题 27.4: 双螺旋 梁, 初始 挠度 . . . 892
27.2.1.5 例题 27.5: 框架 . . . 894
27.2.1.6 例题 27.6: 彩色盒子 . . . 896
27.3 瞬间分配 . . . 897
27.3.1 引入 . . . 897
27.3.1.1 例题 27.7: 连续 梁 . . . 900
27.4 Slope 挠度; 瞬间分配; Gauss-Seidel . . . 902
27.4.1 例题 27.8: Slope 挠度 / 瞬间分配 / Gauss-Seidel . . . 903
28 影响线 **905**
28.1 引入 . . . 905
28.2 程序 . . . 905
28.2.1 例题 28.1: 对一个简单支持的 梁 的影响线 . . . 906
28.2.2 例题 28.2: 簡單支持 梁 與超端 . . . 908
28.3 Mü 布雷斯拉夫原则 . . . 909
28.3.1 衍生品 . . . 909

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

28.3.1.1 例题 28.3: Müller-Breslau; Shear 影响线 . . . 910
28.3.1.2 例题 28.4: Müller-Breslau; 瞬间 影响线 . . . 911

29 二、灵活分析 912
29.1 引入 . . . 912
29.2 大型移动, 稳定 . . . 913
29.2.1 例题 29.1: 地质不稳定 . . . 913
29.2.2 例题 29.2: 荷载对灵活性变形的影响 . . . 914
29.2.3 例题 29.3: Cantilever Beam 的大漏洞 . . . 916
29.3 小动作, 不稳定 . . . 920
29.3.1 格式硬带 . . . 920
29.3.1.1 单栏系统 . . . 920
29.3.1.1.1 例题 29.4: 屈曲 兩個粘固 柱 . . . 922
29.3.2 连续系统 . . . 924
29.3.2.1 Euler 屈曲 加载 . . . 924
29.3.2.1.1 例题 29.5: 屈曲 的 折叠式 柱 . . . 925
29.3.2.1.2 例题 29.6: 屈曲 的固定 柱 . . . 926
29.3.2.1.3 例题 29.7: 屈曲 固定曲线 柱 . . . 928
29.3.2.1.4 例题 29.8: 柱 具有弹性支持 . . . 929
29.3.2.1.5 例题 29.9: 可限制 屈曲 . . . 931
29.3.2.1.6 例题 29.10: 水塔 . . . 932
29.3.2.2 与自由振动相似之处 . . . 934
29.3.2.3 有效长度因素 K . . . 935
29.3.2.4 无线列 . . . 938

30 索 结构 941
30.1 引入 . . . 941
30.2 集中负载 . . . 942
30.2.1 例题 30.1: 光学索 . . . 942
30.2.2 例题 30.2: 包含的光学索 . . . 944
30.2.3 例题 30.3: 索 甘道拉 . . . 945
30.3 分布的货物; . . . 946
30.3.1 平衡方程 . . . 946
30.3.2 qdx • 侧 荷载; 平板 . . . 947
30.3.2.1 地质学 . . . 947
30.3.2.2 内部力量 . . . 951
30.3.2.3 弹性伸展 . . . 952
30.3.2.4 相同的轴性强度 . . . 954
30.3.2.5 特殊案例: 垂直管道 . . . 956
30.3.2.5.1 例题 30.4: 包含 索 地质 . . . 956
30.3.2.5.2 例题 30.5: 包含 索 力量 . . . 957
30.3.2.5.3 例题 30.6: 盖伊德塔 . . . 958
30.3.2.5.4 例题 30.7: 关闭桥梁 . . . 960

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

30.3.2.5.5 例题 30.8: 不可延伸的 索; 温度 961
30.3.2.5.6 例题 30.9: 可扩展 索; sag 961
30.3.2.5.7 例题 30.10: 可扩展 索; 热 962
30.3.2.5.8 例题 30.11: 可扩展 索; 前列 962
30.3.3 *qds* • 催眠 963
30.3.3.1 地质学 963
30.3.3.2 力量 965
30.3.3.3 加泰罗尼亚倾斜 965
30.3.3.3.1 例题 30.12: Sag 在一个倾斜的索 967
30.3.3.3.2 例题 30.13: Trolley 公交车电缆支持 967
30.3.4 平板和基于凯特纳的解决方案之间的比较 970
30.3.4.1 例题 30.14: 加泰罗尼亚 vs Parabola 972

31 马索尼亚档案的分析 (你的) 973
31.1 引入 973
31.2 一些历史记录 974
31.2.1 De la Hire; 1640 年至 1718 年 974
31.2.2 贝利多; 1698-1761 975
31.2.3 双胞胎; 1670-1744 978
31.2.4 丹尼西; 1698-1777 979
31.2.5 科隆布 1736-1806 979
31.2.6 莫塞利; 1801-1872 年 981
31.2.7 灵活的解决方案 981
31.2.7.1 卡斯蒂格利亚诺; 1847-1884 981
31.2.7.2 温克勒;1835 年至 1888 年 982
31.2.8 皮帕德,1891 年至 1969 年 982
31.2.8.1 例题 31.1: 荷载的失败; 胡萝卜的方法 985
31.3 管道的通用化方法; 香味 988
31.4 算法 992
31.5 最后评论 995
31.5.1 雅克 • 海曼,1925 年 995
31.5.2 Thrust 线 995
31.5.3 Thrust 线和 pippard 997

32 和曲线的 Be 999
32.1 循环档案 999
32.1.1 四个圆形弓 1000
32.1.1.1 爱迪的理论 1001
32.1.1.2 例子 1001
32.1.1.2.1 例题 32.1: 三根相关术语弓; 点负载; 分析 1001
32.1.1.2.2 例题 32.2: 四分之三的拱; 点荷载 1003
32.1.1.2.3 例题 32.3: 三根相关术语弓; 单一负载 1004
32.1.2 两张圆形弓 1006

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

32.1.3 无缝循环 拱 1006
32.1.3.1 例题 32.4: 无缝循环 拱 1007
32.1.4 通用解决方案 1014
32.1.4.1 衍生品 1014
32.1.4.1.1 中心 重力 1014
32.1.4.1.2 衍生品 1016
32.1.4.1.3 验证 1020
32.1.5 基于数学的解决方案 1021
32.2 最佳形状的拱 1021
32.2.1 例题 32.5: 完美的拱 1022
32.3 帕拉布利亚 1022
32.3.1 例子 1022
32.3.1.1 例题 32.6: 三角形 模拟 拱 1023
32.3.1.2 例题 32.7: 兩個垂直的平凡變量交叉部分 拱 1023
32.3.2 固定 拱 与同步 荷载 1027
32.3.2.1 例题 32.8: 无情的模拟 拱 1029
32.3.3 基础 调节和温度效应 1031
32.3.3.1 例题 32.9: 热 荷载 在 Parabolic 拱 上 1034
32.4 曲线 BAMS 1034
32.4.1 球旋转 1034
32.4.1.1 例题 32.10: 球旋转 1035
32.4.2 赫利科伊德 1037
32.4.2.1 地质学 1037
32.4.2.2 平衡 1038
32.4.2.2.1 例题 32.11: 拱; 点 荷载 1040

33 静态不定义拱的设计 **1042**
33.1 例题 33.1: 设计静态不定义的拱 1042
33.2 例题 33.2: 温度变化在一个 拱 1048

34 板块 **1051**
34.1 厚板理论: 雷斯纳 • 明德林 1051
34.1.1 电影关系 1051
34.1.2 宪法关系 1053
34.1.3 平衡 1054
34.2 薄 板 理论:Kirchhoff 1056
34.2.0.1 例题 34.1: 薄相反厚 板 理想化 1056
34.2.1 基本关系 1057
34.2.2 差异方程式 1058
34.2.3 压力 1058
34.2.3.1 例题 34.2: 恢复 板 瞬间结果的压力 1059
34.2.3.2 例题 34.3: 简单支持的平方 板 在统一的 压力 1060
34.2.3.3 例题 34.4: 板 挠度 对厚度的敏感性 1061

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

34.2.4 循环板 1061
34.2.4.1 例题 34.5: 圆形 板 模型 压力 1065
34.2.5 变量 表述 1065
34.3 总结 1066

35 沙特 **1069**
35.1 一般理论 1069
35.1.1 定义 1069
35.1.2 假设 1072
35.1.3 强度 位移 关系 1073
35.1.3.1 平衡 1073
35.1.3.2 平衡 方程式的完整集 1080
35.1.3.3 变形协调 1080
35.1.3.4 总结 1084
35.1.3.5 压力压力 1084
35.1.3.5.1 应力-应变 1084
35.1.3.5.2 Sress 力量 1086
35.1.3.6 最终表达 (武力在转移方面) 1087
35.1.4 简化 1087
35.1.4.1 Shallow Shells 饰 1089
35.1.4.1.1 假设 1089
35.1.4.1.2 假设的应用 1089
35.1.4.1.3 深度梁方程式 1090
35.1.4.1.4 Slab 方程式 1092
35.1.4.1.5 浅壳方程 1092
35.1.4.2 膜理论 1093
35.1.4.2.1 假设 1093
35.1.4.2.2 理论 1093
35.1.4.2.3 分类 1093
35.1.4.2.4 专业化 1094
35.2 单桶的分析 (圆形圆形 壳) 1095
35.2.1 引入 1095
35.2.2 膜理论 1098
35.2.2.1 应力 结果 1098
35.2.2.1.1 错误 1101
35.2.2.1.2 修正 1101
35.2.2.2 转移 1102
35.2.3 Shallow Shell 理论 1106
35.2.3.1 平衡的方程式 1106
35.2.3.2 表述 1107
35.2.3.2.1 独特的单一 荷载 解决方案 1109
35.2.3.2.2 标签: membrane 五 *S* Shallow 壳 1110

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

35.2.3.2.3 例题 35.1: 膜的比较 & 壳 . . . 1113
35.2.3.3 一般解决方案 . . . 1113
35.2.3.3.1 位移 w . . . 1113
35.2.3.3.2 M_ϕ . . . 1116
35.2.3.3.3 其他条款; 程序 . . . 1117
35.3 静态不定义的 . . . 1119
35.3.1 艾德 • 贝姆 . . . 1119
35.3.1.1 垂直边缘线 . . . 1120
35.3.1.2 垂直边缘 . . . 1123
35.3.2 首頁 〉 外文書 梁 . . . 1123
35.3.2.1 例题 35.2: 圆形设计 壳 . . . 1124
35.3.3 MATLAB® 代码和数值例子 . . . 1136

36 动态 I **1137**
36.1 哲学基础 . . . 1137
36.2 什么时候 动力分析 被警告 . . . 1138
36.3 基本原则 . . . 1139
36.3.1 d'Alembert 的原理和动态平衡 . . . 1139
36.3.2 自由的单一学位奥斯基拉特 . . . 1139
36.3.3 固有频率和期限 . . . 1140
36.3.3.1 例题 36.1: 计算机 $\omega_n, T_n,$ 和 f_n 为 SDOF 系统 . . . 1140
36.3.4 Damping 和 阻尼比 . . . 1141
36.4 自由振动 . . . 1142
36.4.1 无缝自由振动 . . . 1142
36.4.2 蒸发自由振动 . . . 1143
36.4.3 逻辑衰退 . . . 1143
36.4.3.1 例题 36.2: 从 Logarithmic Decreement 中估计 . . . 1144
36.5 强迫振动: 和谐的兴奋 . . . 1145
36.5.1 无情的和谐反应 . . . 1145
36.5.2 和谐的反应 . . . 1146
36.5.2.1 例题 36.3: 和谐反应: 增强和阶段 . . . 1146
36.6 对仲裁负载的回应 . . . 1147
36.6.1 冲动反应与单位冲动 . . . 1147
36.6.1.1 例题 36.4: 蒸发 SDOF 系统的单元冲动反应 . . . 1148
36.6.2 杜哈梅尔综合 . . . 1149
36.6.2.1 例题 36.5: 突然步 荷载: 动态增强因素的 2 . . . 1149
36.6.2.2 例题 36.6: 直角脉冲 荷载 和冲击频谱 . . . 1150
36.6.3 四级分析与频率反应 . . . 1152
36.6.3.1 例题 36.7: 频率回应定期机器兩個和諧的力量 . . . 1153
36.7 支座 兴奋和 地震 回复 . . . 1154
36.7.1 运动方程 为基础兴奋 . . . 1154
36.7.2 回复 光景 . . . 1155
36.7.2.1 例题 36.8: 使用响应频谱的单层框架的地震设计 . . . 1156

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

36.8 多级自由制度 1157
36.8.1 动作方程式 1157
36.8.2 免费振动: 自然模式 1157
36.8.3 模型分析 1158
36.8.4 地震 回复中的代码参与 1159
36.8.4.1 例题 36.9: 3DOF 板建筑在地震负载下的模块分析 1159
36.9 连续系统 1161
36.9.1 波的轴振动 1161
36.9.2 转向的振动 Beams 1162
36.9.2.1 例题 36.10: 固有频率 的 钢材 脚桥和步行者反射检查 1162
36.10 非线性动态 1163
36.10.1非线性来源 1164
36.10.2催眠和能源分散 1164
36.10.2.1例题 36.11: 相当于 黏性阻尼 从双重催眠路径 1165
36.10.3Ductility 和 Capacity Design 1166
36.10.3.1例题 36.12: 二元性需求和强力减少为一钢筋混凝土 框架 . . 1166
36.11 实用考虑 1167
36.11.1沉浸在现实结构中 1167
36.11.2土-结构相互作用 1168
36.11.3质量 Dampers 混凝土 1168
36.11.4例题 36.13: 设计一台突发的质量蒸汽机, 用于高楼 1168
36.11.5基础隔震 1169
36.11.6例题 36.14: 建造一座孤立的医院建筑 1170
36.12 关闭评论 1171
36.12.1实践者对反应谱方法的警告 1171
36.12.2下一篇: 线性理论的限制 1171

37 单元 结构设计 **1172**
37.1 引入 1172
37.1.1 分析与设计; 一项异常过程 1172
37.1.2 安全 1172
37.2 可用的应力设计 (ASD) 1174
37.2.1 例题 37.1: ASD; 灵活性 1175
37.3 荷载 和抵抗因素设计 (LRFD) 1175
37.4 lrfd 基于设计代码的例子 1178
37.4.1 应用: R/C 梁 分区的塑料强度 1179
37.4.1.1 例题 37.2: 极限强度; 评论 1183
37.4.1.2 例题 37.3: 极限强度; 设计 I 1184
37.4.1.3 例题 37.4: 极限强度; 设计 II 1184
37.4.1.4 例题 37.5: 精确分析 1185
37.4.2 应用:R/C 列的塑料强度 1187
37.4.2.1 例题 37.6: R/C 柱 等。c 已知 1191
37.4.2.2 例题 37.7: R/C 柱 等。e 已知 1193

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

37.4.3 预应力混凝土 1196
37.4.3.1 例题 37.8: 案例研究:Walnut Lane Bridge 1197
37.5 性能基工程 (PBE) 1200

38 Fermi 解决方案 (接近分析) 1202
38.1 内部力量 1202
38.1.1 破碎的形状 & 影响点 1202
38.1.2 梁 时刻在 支座 的强度方面 1206
38.1.3 分析方法 1207
38.1.3.1 垂直负载 1207
38.1.3.2 水平负载 1210
38.1.3.2.1 门户方法 1210
38.1.3.2.1.1 例题 38.1: 门户方法; 低升楼 1212
38.1.3.2.1.2 例题 38.2: 马特拉布解决方案 1224
38.1.3.2.2 Cantilever 方法 1225
38.1.3.2.2.1 例题 38.3: Cantilever 方法; 高升建筑 . . . 1226
38.2 结构性反应 1227
38.2.1 Shaft 子系统 1227
38.2.1.1 例题 38.4: Shaft 子系统 1228
38.2.2 墙 1229
38.2.2.1 例题 38.5: 混凝土 Shear 墙壁 1229
38.2.3 威胁的墙壁 1231
38.2.3.1 例题 38.6: 威胁的墙壁 1232
38.2.4 侧面缺陷 1232
38.2.4.1 短墙 1233
38.2.4.2 高墙 1233
38.2.4.3 墙壁和线条 1234
38.2.4.4 框架 1234
38.2.4.4.1 例题 38.7: 建造大约转 挠度 1237

39 初步设计 1241
39.1 例题 39.1: 杜勒斯机场 1241
39.2 例题 39.2: 艾菲尔塔 1247
39.3 例题 39.3: 杂志一般 1254
39.4 例题 39.4: 乔治华盛顿桥 1258
39.5 例题 39.5: 设计双环拱 1264
39.6 例题 39.6: 温度变化在一个 拱 1273
39.7 例题 39.7: 平凡的拱与分裂变异 *I* 1275

40 引入 直接刚度法 1279
40.1 為什麼 矩阵 结构分析? 1279
40.2 结构理想化 1280
40.3 签约 1282
40.4 协调系统 1282

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

40.5 灵活性 *vs.* 精力 1282
40.6 自由度 1283
40.7 静态 *vs.* 动画不确定性 1286
40.8 结构分析 / 机械; 一个 边值问题 1286

41 单元 密度矩阵 $\mathbf{k}^{(e)}$ 1288
41.1 密度定义 1288
41.2 桁架 单元 1289
41.3 标签: Euler-Bernoulli 1290
41.4 2D 框架 单元 (a.k.a beam 列元素) 1290
41.5 網絡 单元 1291
41.6 3D Beam 列元素 1291
41.7 泰莫森科 梁 1292
41.7.1 额外的歪曲 1294
41.7.2 改變 单元 刚度矩阵 1295
41.8 布拉索夫 扭转 1296

42 密度方法; I 正统结构 1299
42.1 引入 1299
42.2 理论 1299
42.2.1 灵活性重复 1300
42.2.2 直接刚度法 1300
42.2.3 从 单元 到结构 1301
42.3 例子 1302
42.3.1 例题 42.1: 正统 梁 1302
42.3.2 例题 42.2: 正统 框架 1304
42.3.3 例题 42.3: 网格 1311
42.3.4 例题 42.4: 混合式 框架 1315
42.3.5 例题 42.5: 混合网络 1319

43 转型矩阵 1324
43.1 引入 1324
43.2 某些理论 1325
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ 关系 1325
43.2.2 指向科森 1326
43.3 转型矩阵为单元框架 1328
43.3.1 2D 案例 1328
43.3.1.1 2D 框架 1328
43.3.1.2 网格 1329
43.3.1.3 布拉索夫 梁 1330
43.3.1.4 2D 桁架 1331
43.3.2 3D 框架 1331
43.3.3 Eulerian 旋转 1332
43.3.4 单元 轴 1334

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

43.3.5 3D 桁架 1336

44 直接刚度法 **1338**
44.1 目标 1338
44.2 理论 1338
44.3 差异化 1341
44.3.1 无限制 vs 有限 自由度 1341
44.3.2 结构性差异化 1341
44.4 计算机实施 1342
44.4.1 边界条件, [id] 矩阵 1342
44.4.2 **LM** 向量 1343
44.4.3 全球 刚度矩阵 的集合 1345
44.4.4 步骤程序 1345
44.5 例子 1346
44.5.1 例题 44.1: 框架 1347
44.5.1.1 初步 1347
44.5.2 例题 44.3: 桁架 1358

45 刚度矩阵的数学特性; 计算问题 **1362**
45.1 低调的矩阵 1362
45.1.1 相同价值 1362
45.1.1.1 自我价值的物理解释 1365
45.1.2 条件号 1366
45.1.3 无条件的硬度矩阵 1367
45.1.3.1 例题 45.1: 无条件 1370
45.2 数值 评论 1371
45.2.1 逆转 vs 分裂 1371
45.2.2 诺达数 1372

46 特殊主题 **1375**
46.1 混凝土 / Substructuring 1375
46.2 静态和电影学的方程式 1376
46.2.1 静态 矩阵 $\mathcal{B}$ 1376
46.2.1.1 衍生品 1376
46.2.1.2 静态定义 1376
46.2.1.2.1 例题 46.1: 静态定义 truss statics matrix 1377
46.2.1.2.2 例题 46.2: 梁 静态 矩阵 1378
46.2.1.3 静态不确定 1379
46.2.1.3.1 例题 46.3: 静态不定义 桁架 静体 矩阵 1379
46.2.1.4 解放力量的识别 1381
46.2.1.4.1 例题 46.4: 解放力量的选择 1381
46.2.1.5 电影不稳定 1383
46.2.2 電影 矩阵 $\mathcal{A}$ 1383
46.2.2.1 例题 46.5: Kinematics Matrix: truss 例子 1385

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

46.2.3 静态化学 矩阵 关系 1385
46.2.3.1 静态定义 1386
46.2.3.2 静态不确定 1387
46.3 通过静态逆转的动画关系 矩阵 1387
46.4 密度灵活性关系 1388
46.4.1 从稳定到灵活性 1388
46.4.1.1 例题 46.6: 柔度矩阵 1389
46.4.2 从灵活性到坚固性 1389
46.4.2.1 例题 46.7: 灵活性到坚固 1391
46.4.2.2 例题 46.8: 曲线元素的密度矩阵 1392
46.4.3 灵活性与固态方法之间的双重性 1394
46.5 合并的转型方法 **K** 1394
46.5.1 例题 46.9: 合并转型 1395
46.5.2 例题 46.10: 框架的合成转型 1397
46.6 特殊 单元 1399
46.6.1 强烈的折扣; 1399
46.6.2 半固体射击 1402
46.6.3 变量十字段 1407
46.7 瞬间框中的侧驱动的来源 1409

47 机械中的变量计算:Euler-Lagrange 框架 1421
47.1 引入 1421
47.2 Euler 1422
47.2.1 初步 1422
47.2.2 不同形式的 $\delta\Pi$ 1424
47.2.3 欧拉方程 1425
47.2.4 $\delta\Pi$ 1426
47.2.5 观察 1426
47.2.6 边界条件 1426
47.2.6.1 例题 47.1: 标签:Axial 1428
47.2.6.2 例题 47.2: 标签: flexure 1429
47.3 总数 势能 原则 1430
47.4 汉密尔顿 1433
47.4.1 动态; Euler/Lagrange 1433
47.4.1.1 差异制度 1433
47.4.1.2 连续系统 1435
47.4.2 例题 47.3: 汉密尔顿 1437
47.5 Hu-Washizu 变量原则 1440
47.6 “色情名称” 图表 1443
47.6.1 德 • 阿伦伯特的原则 1443
47.6.2 汉密尔顿的平衡 1444
47.6.3 拉格兰的平衡 1444

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

48 结构分析中的变量和能源原则 **1448**
48.1 引入 1448
48.1.1 热力学 1448
48.1.2 基本关系 1449
48.1.3 定义 1450
48.1.4 真实的条款 1450
48.1.5 虚拟表达式 1452
48.1.6 注意事项 1452
48.1.6.1 内部工作與 应变能 1452
48.1.6.2 外部工作独立之路 1453
48.1.7 应用程序 1D 单元 1454
48.1.7.1 补充能量, 线性弹性 U^* 1454
48.1.7.2 能量, 线性弹性 U 1455
48.1.7.3 虚拟 应变能 δU^* 1455
48.1.7.4 虚拟 应变能 δU 1457
48.1.8 关于 VW 和 CVW 的概述 1459
48.2 接近 1460
48.3 虚功 1460
48.3.1 补充 虚功 的原则 (PCVW) 1460
48.3.1.1 衍生品 1461
48.3.1.2 例题 48.1: PCVW, 粘贴的梁 1463
48.3.2 例题 48.2: 四半循环 拱 1464
48.3.3 虚功原理 (PVW) 1466
48.3.3.1 衍生品 1466
48.3.3.2 例题 48.3: PVW, 粘贴的 Cantilevered 梁 1468
48.4 势能的原则 1470
48.4.1 总数 势能 的原则 (PTPE) 1470
48.4.1.1 衍生品 1470
48.4.1.2 例题 48.4: PTPE, 春天和质量 1472
48.4.1.3 例题 48.5: PTPE; 粘贴 梁 与变量 I 1472
48.4.2 总补充 势能 的原则 (PTCPE) 1473
48.5 卡斯蒂格利亚诺的理论 1473
48.5.1 第一理论 1473
48.5.1.1 例题 48.6: 非线性弹性 桁架 1475
48.5.2 第二理论 1476
48.5.2.1 例题 48.7: 卡斯蒂格利亚诺 2; cantilevered 梁 1477
48.5.2.2 例题 48.8: 卡斯蒂格利亚诺 2; 使用加斯蒂里亚诺的第二理论, 单一负载的喷雾的破裂 1477
48.5.2.3 例题 48.9: 卡斯蒂格利亚诺 2、非线性桁架 1478
48.5.2.4 例题 48.10: 卡斯蒂格利亚诺 2 号, 春天挠度 1479
48.6 雷莱里茨方法 1479
48.6.1 衍生品 1479

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

48.6.1.1 例题 48.11: Rayleigh Ritz 均匀充电 仅支持 梁 1480
48.6.1.2 例题 48.12: 变量方法 1481
48.7 总结 1488

49 干扰功能 1492
49.1 引入 1492
49.1.1 形状功能的特点 1492
49.1.2 帕斯卡的三角形 1493
49.1.3 协调系统 1494
49.1.3.1 卡特西亚 1494
49.1.3.2 自然 1494
49.1.3.3 三角形 1495
49.1.4 连续性 1498
49.2 形状功能 1499
49.2.1 直播 表述 1499
49.2.1.1 桁架 单元; 线性 1499
49.2.1.2 一般化 1500
49.2.1.3 永久 应变 三角形 单元 1501
49.2.1.4 直角二重 单元 1502
49.2.1.5 布里克三角形 单元 1503
49.2.2 Lagrangian Interpolation 功能 1505
49.2.2.1 四角形 1505
49.2.2.2 三角形 1506
49.2.2.3 信条元素; 四角形 1507
49.2.2.4 梁 1508
49.2.3 赫米蒂亚交叉功能 1510
49.2.3.1 梁 格式功能修订 1511
49.2.3.2 四方 单元 1512
49.2.3.2.1 四方线路 (q4) 1512
49.2.3.2.2 四角形方位 1513
49.2.3.2.2.1 直径 单元 (q8) 1514
49.2.3.2.2.2 拉格兰单元 (q9) 1515
49.2.3.3 变量 (希拉里) 单元 1518
49.2.3.4 三角形 单元 (t6) 1518

50 线性 单元表述 1521
50.1 引入 1521
50.2 结尾 单元 1522
50.2.1 引入 1522
50.2.2 应变 位移 关系 1522
50.2.2.1 Axial 成员 1522
50.2.2.2 灵活成员 1523
50.2.3 虚拟位移和线条 1523

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

50.2.4 单元 刚度矩阵 表述 1523
50.2.5 应力 恢复 1525
50.3 应用 1525
50.3.1 桁架 单元 1525
50.3.2 灵活 单元 1526
50.4 一般要求 单元 1526
50.5 差异化错误和转换率 1528
50.6 基于 势能 的最低解决方案的低限性 1529
50.7 平衡 和 变形协调 在解决方案中 1529

51 以色列 单元 **1532**
51.1 引入 1532
51.2 单元表述 1534
51.2.1 酒吧 单元 1534
51.2.2 四方 (q4) • 详细 表述 1535
51.2.3 三角形 单元 1539
51.2.3.1 T3 三角形 1539
51.2.3.2 T6 三角形 1541
51.2.4 例题 51.1: 雅各比亚运营商 1542
51.3 数值积分 1543
51.3.1 纽顿评论 1544
51.3.2 Gauss-Legendre 四角形 1546
51.3.2.1 传奇聚合物 1547
51.3.2.2 Gauss-Legendre 四角形 $n = 2$ 1548
51.3.3 直角和普里斯姆地区 1549
51.3.4 三角区 1549
51.4 应力恢复; 节点压力 1549
51.5 Nodal 等级负载 1552
51.5.1 重力 荷载 1552
51.5.2 特拉克 荷载 1553
51.5.3 初始压力/压力; 热 荷载 1554
51.5.4 集成命令 1555
51.5.4.1 完整的整合 1555
51.5.4.2 减少整合 1556
51.5.4.3 选择性减少融入 1557
51.6 寄生虫/不兼容的单元 1557
51.6.1 Q4 问题 1557
51.6.2 Q6 答案 1558
51.6.3 Qm6, 进一步改进 1558
51.7 旋转 D.O.F 1559

52 重量残留方法 **1561**
52.1 引入 1561

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

52.2 一般 表述 1562
52.2.1 不同运营商 1562
52.2.1.1 例题 52.1: 检查 1D 轴成员的同步性和积极定义性 1562
52.2.2 剩余 表述 1563
52.3 重量残留方法 1565
52.3.1 点配置方法 1565
52.3.2 Subdomain 配置方法 1565
52.3.3 最小四方方法 1565
52.3.4 伽辽金法 1565
52.3.4.1 例题 52.2: 强烈的振动 1566
52.4 应用程序 伽辽金法 到 3D 弹性 问题 1567
52.4.1 弱形的衍生 1568
52.4.2 信任差异化 1570
52.4.2.1 例题 52.3: 刚度矩阵 的 梁 单元 1571
52.4.2.2 例题 52.4: 热转换 1573

53 动态二 1576
53.1 引入 1577
53.2 框架 理想化为 动力分析 1577
53.2.1 轴心 *vs* 灵活性 1577
53.2.2 模型 1578
53.2.2.1 例题 53.1: 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应 . . . 1581
53.3 问题 表述 1582
53.3.1 变量 表述 1582
53.3.2 质量 代表性 1583
53.3.3 冲浪 1585
53.3.3.1 例题 53.2: 瑞利阻尼 加密对一层建筑的比例 1586
53.3.3.2 例题 53.3: 解析基线: 从一般初始条件自由振动 1587
53.3.4 数值技术:Euler 方法 1588
53.3.4.1 例题 53.4: Euler 方法 1589
53.4 时间差异化 1589
53.4.1 包容性 1589
53.4.1.1 纽马克的方法 1589
53.4.1.1.1 衍生品 1589
53.4.1.1.2 纽约 β 暗示方法 1592
53.4.1.2 希尔伯 - 胡格斯 - 泰勒方法 1593
53.4.2 明确时间集成 1595
53.4.2.1 线性系统 1595
53.4.2.2 非线性系统 1598
53.5 数值方法 为 动力分析 1598
53.5.1 中央区别方法 1598
53.5.2 例题 53.5: 中央差异稳定时间步骤 1599
53.5.3 纽马克 - 贝塔方法 1599

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

53.5.4 超级模式 vs. 直接集成 1599
53.6 连续系统 1600
53.6.1 波的轴振动 1600
53.6.1.1 例题 53.6: 波速和钢材 tie-rod 的轴自然频率 1601
53.6.2 转向的振动 Beams 1602
53.7 非线性动态 1602
53.7.1 非线性来源 1602
53.7.2 Ductility 和 Capacity Design 1603
53.8 实用考虑 1603
53.8.1 沉浸在现实结构中 1603
53.8.2 土-结构相互作用 1604
53.8.3 质量 Dampers 混凝土 1604
53.8.4 基础隔震 1604
53.9 总结 1604

54 引入 **1607**
54.1 引入 1607
54.1.1 非线性来源 1607
54.1.2 為什麼 非线性分析 1608
54.2 结构非线性分析类型 1610
54.3 增長 荷载 / 位移 1612
54.4 安全 1613
54.4.1 术语 1613
54.4.2 安全 & 负载 1613
54.5 设计代码 1614
54.5.1 引入 1614
54.5.2 进化: 古代 1615
54.5.2.1 梅索波塔米亚; 哈穆拉比 1615
54.5.2.2 罗马; 维特鲁维亚 1616
54.5.3 现代时代 1616
54.5.3.1 可用的应力设计,ASD 1618
54.5.3.2 荷载 抵抗和因素设计,LRFD 1618
54.5.3.3 基于性能 地震工程 1618
54.5.4 总结 1619

55 塑性 I; 纤维 & 连续 (為 有限元分析) **1622**
55.1 引入 1622
55.2 塑料生产条件 1623
55.2.1 压力 独立模型 1623
55.2.2 压力依赖型号 1625
55.3 实验室观察 1626
55.3.1 金属 1626
55.3.2 混凝土 1627

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

55.4 微观失败 1628
55.4.1 化学债券 1628
55.4.2 杜克特和布里特的失败 1628
55.4.3 散步 1629
55.5 塑性的基本内容 1630
55.5.1 引入 1630
55.5.2 弹性模量 直播 1631
55.5.2.1 一般化衍生 1631
55.5.2.1.1 利率功能; 以色列硬化模型 1631
55.5.2.1.2 流规则 1631
55.5.2.1.2.1 库恩 • 图克的条件 1633
55.5.2.1.3 一致性条件 1633
55.5.2.1.4 模块 1633
55.5.2.2 Tangent Modulus 工程 1634
55.5.2.3 例题 55.1: 模块 1635

56 塑性 II; 部分: 1638
56.1 引入 1638
56.2 理论框架: 假设和关键结果 1638
56.3 时刻 - 曲率; $M - \Phi$ 1640
56.3.1 从现在 曲率 关系 1641
56.3.1.1 例题 56.1: 非线性分区分析; 解析 1641
56.3.2 压力与流动关系 1643
56.3.2.1 例题 56.2: 平板; 钢材 1644
56.3.2.2 例题 56.3: 平板; 混凝土/ACI 1648
56.4 时刻 曲率, 通用化 1650
56.4.1 解析 方法 1651
56.4.1.1 例题 56.4: 时刻 曲率 的 I R/C 部分 1653
56.4.1.2 互动图表 $M - N$ 1658
56.4.2 数值方法 1659

57 塑性 III; 结构: Yield Lines 1663
57.1 引入 1663
57.2 线性 单元 (布, 框架) 1665
57.2.1 动画: 上限 1665
57.2.1.1 例题 57.1: 固定 梁; 中心 荷载 1667
57.2.1.2 例题 57.2: 固定 梁; 折扣 荷载 1667
57.2.1.3 例题 57.3: 连续 梁 1668
57.2.1.4 例题 57.4: 正统 框架 1668
57.2.1.5 例题 57.5: 包含 框架 1669
57.2.2 静态; 下限 1671
57.2.2.1 例题 57.6: 提交的 Cantiliver I 1673
57.2.2.2 例题 57.7: 提交的 Cantiliver II 1673

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

57.2.2.3 例题 57.8: 固定 梁 1674
57.2.2.4 例题 57.9: 包含 框架 1675
57.3 编程 单元 (弱点) 1679
57.3.1 标签: 下限 1680
57.3.1.1 例题 57.10: 广场弱点 1680
57.3.2 主条目: 上限 1681
57.3.2.1 例题 57.11: 直角弱点 1683
57.4 静力推覆分析 1684
57.5 低边界分析与 1685
57.5.1 静力推覆分析 1685
57.5.2 彩色 塑性 1688

58 损伤力学 1691
58.1 由 ChatGPT 提供 1691
58.1.1 动机与物理基础 (~1.5 页) 1691
58.2 热力框架 (~2 页) 1691
58.3 斯卡拉的异常损害: 马扎尔模型 (~4 页) 1691
58.4 压力 - 压缩无形和单方面效果 (~2 页) 1691
58.5 破坏 - 塑性 结合 (~2 页) 1691
58.6 规律和客观性 (~3 页) 1692
58.7 應用於 梁 和 柱 单元 (~3 页) 1692
58.8 参数识别和实用指南 (~1.5 页) 1692
58.9 图书馆笔记及进一步阅读 (~0.5 页) 1692

59 非线性分析; 材料 1693
59.1 数值 根找到 1693
59.1.1 纽顿方法 1694
59.1.1.1 引入 1694
59.1.1.2 泰勒系列和线性化 1694
59.1.1.2.1 例题 59.1: 纽顿的方法, 斯卡拉 1696
59.1.1.3 转型和错误估计 1698
59.1.1.4 最后评论 1699
59.1.1.4.1 例题 59.2: 纽顿的方法; 向量 1699
59.1.2 秘密方法 1700
59.1.3 解释 1701
59.2 与 结构力学 的关系; 随机 1702
59.3 集成方法 1703
59.3.1 荷载 控制 1704
59.3.1.1 Newton-raphson / 压力硬度方法 1704
59.3.1.2 改造新顿拉夫森 1707
59.3.1.3 西安 • 纽顿 1707
59.3.1.4 转型标准 1708
59.3.1.5 总结表 1709

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

59.3.2 位移 控制 1711

60 非线性分析; 地质 **1715**
60.1 地质 刚度矩阵 1715
60.1.1 衍生品 1716
60.1.1.1 弱形 1716
60.1.1.2 应变 1716
60.1.1.3 内部 应变能 1717
60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$ 1717
60.1.2 弹性不稳定性; 二进制分析 1718
60.1.2.1 例题 60.1: 柱 屈曲 1719
60.1.2.2 例题 60.2: 框架 屈曲; Matlab 解决方案 1721
60.1.2.3 例题 60.3: 框架 屈曲; 数学解决方案 1724
60.1.2.4 例题 60.4: 荷载对灵活性变形的影响 1724
60.2 增加明确分析 1727
60.2.1 例题 60.5: Cantilever Beam 的大漏洞 1729
60.3 $P-\Delta$ 重定向 1733
60.3.1 例题 60.6: 包装负载无 $\mathbf{K}_{geom}$ 1734

61 非线性; 单元表述 **1737**
61.1 引入 1737
61.2 桁架 单元 1738
61.2.1 协调系统 2D 桁架 单元 1739
61.2.2 国家决心 1739
61.3 Beam 列元素的定义 1740
61.3.1 基于 Stiffness 的 2D Beam 列元素 1740
61.3.1.1 基于密度的 2D be 列元素的协调系统 1742
61.3.1.2 国家决心 1744
61.3.1.3 “隐藏” 错误 1746
61.3.1.4 非线性分析 使用基于固态的方法 1748
61.4 层/纤维部分 1750
61.4.1 灵活性方法 2D beam-column element 1753
61.4.1.1 以灵活性为基础的 2D be 列元素的协调系统 1756
61.4.1.2 国家决心 1757
61.4.1.2.1 没有单元级别的调节 1758
61.4.1.2.2 与纽顿-拉夫森在单元级的直径 1760
61.4.1.3 非线性分析 使用基于灵活性的方法 1764
61.4.1.3.1 没有单元级别的调节 1764
61.4.1.3.2 与新顿-拉夫森在单元级的振动曲线 1767
61.4.2 精力 *vs.* 基于灵活性 单元 1771
61.5 零长度 2D 单元表述 1775
61.5.1 协调系统在零长度 2D 单元 1775
61.5.2 单元 状态定义 1776

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

61.6 零长度部分 单元 1779
61.6.1 刚度矩阵 1779
61.6.2 协调系统 1780
61.6.3 单元 状态定义 1780
61.7 数值积分 1783
61.8 单元 力量 1783

62 分布式和折叠式塑性的宪法模型 1785
62.1 引入 1785
62.1.1 线性热量弹性 1786
62.1.2 希腊模型 1787
62.2 分布 塑性 1787
62.2.1 钢材 模型 1787
62.2.1.1 引入 1787
62.2.1.2 双向模型与以色列硬化 1789
62.2.1.2.1 紧张关系 1789
62.2.1.2.2 二进制模型的定义 1790
62.2.1.3 Menegotto - 色彩模型 1790
62.2.2 混凝土 模型 1798
62.2.2.1 封锁的影响 1798
62.2.2.2 改造 Kent 和 Park 模型 1800
62.2.2.2.1 紧张关系 1800
62.2.2.2.2 改造的 kent 和 park 模型 1807
62.2.3 Anisotropic 损害模型与有效的损害和硬度恢复 1810
62.2.3.1 宪法模型 1810
62.2.3.2 多纤维 表述 1812
62.2.3.3 定义 anisotropic 损害模型 1813
62.2.3.3.1 压力负载: 1813
62.2.3.3.2 压缩充电: 1814
62.2.3.4 安尼斯特洛普损伤模型与永久性线条 1820
62.2.3.4.1 统一数值系统 1820
62.2.4 邦德斯利普 1824
62.2.5 零长度部分 单元 1825
62.3 彩色 塑性 1828
62.3.1 塑料长度 1828
62.3.1.1 塑料粘贴的潜在位置 1829
62.3.1.2 曲率的变形 ($\Delta(\phi)$) 1829
62.3.1.3 钢筋混凝土 有效的 惯性矩 和 曲率 1830
62.3.1.4 塑性铰 长度的变形 1831
62.3.1.4.1 钢筋混凝土 1831
62.3.1.4.2 钢材 1835
62.3.1.5 例题 62.1: 塑性铰 在一个 钢材 柱 1836
62.3.2 Shear 失败模式 (极限状态 材料) 1837

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

62.3.2.1 引入 1837
62.3.2.2 Shear 极限状态 模型 1837
62.3.3 Ibarra 包含能源分散的歇斯底里模型 1840
62.3.3.1 催眠模型 1844
62.3.3.1.1 顶级模型 1845
62.3.3.1.2 Pinching 模型 1846
62.3.3.2 强度衰退模式 1851
62.3.3.2.1 基本强度衰退模式 1853
62.3.3.2.2 后覆盖强度衰退模式 1854
62.3.3.2.3 解除硬度衰退模式 1856
62.3.3.2.4 加速重新充电强度衰退模式 1857
62.3.3.3 总结 1858
62.3.4 Ghannoum 的模型 1858
62.3.4.1 背部曲线 1858
62.3.4.2 循环行为 1859

63 科学与艺术的终端单元模型 **1862**
63.1 引入 1862
63.1.1 完成 单元 按摩/分析验证 1865
63.1.2 模型验证和验证的概念 1865
63.2 混合 1866
63.2.1 马克思 单元 1867
63.2.1.1 例题 63.1: 柱 模型 1872
63.2.1.2 例题 63.2: 梁 模型 1873
63.2.2 截面 1873
63.2.3 “Pick 和 Stick” 1874
63.2.4 结论评论 1874
63.3 恶化参数定义 1875
63.3.1 定义 1875
63.3.1.1 参数识别 1876
63.3.2 数据库模型参数 1876
63.3.2.1 伯利 / 伯里 1876
63.3.2.1.1 柱 属性 1876
63.3.2.1.2 灵活能力的概述 1881
63.3.2.1.3 例子 1881
63.3.2.2 斯坦福 / 利格诺斯 1882
63.3.2.3 UTSA / 加诺姆 1884
63.3.2.4 终端 单元/Dolati 1884
63.3.2.5 ACI 437-A 1884

Intermezzo: 从前进分析到参数识别 **1885**

64 数据与疑问: 不确定性和敏感性分析 **1887**
64.1 引入 1887

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

64.2 数据质量与疑问来源 . . . 1888
64.3 不确定性量化与分析 . . . 1888
64.3.1 输入不确定性特征化 . . . 1889
64.3.1.1 不确定性类型 . . . 1889
64.3.1.2 数学代表性 . . . 1889
64.3.2 依赖与相关样品 . . . 1889
64.3.2.1 Covariance 和 Correlation . . . 1890
64.3.2.1.0.1 例题 64.1: 相同性 矩阵 . . . 1890
64.3.2.2 太空科瓦里安 . . . 1891
64.3.2.3 暂时的封锁 . . . 1891
64.3.2.4 生成相关样品 . . . 1892
64.3.3 不确定性宣传 . . . 1892
64.3.3.1 蒙特卡洛模拟 (MCS) . . . 1892
64.3.3.2 拉丁 Hypercube 样品 (LHS) . . . 1892
64.3.3.2.0.1 例题 64.2: 拉丁 Hypercube: 工作例子与两个变量 . . . 1894
64.3.3.3 接近和超越直接样品采集的替代方案 . . . 1896
64.3.3.3.1 点估计方法 (PEM) . . . 1896
64.3.3.3.1.1 例题 64.3: 点估计方法例子 . . . 1896
64.3.3.3.2 一时一刻一 (泰勒的系列最终差异估计 TSFD) . . . 1897
64.3.3.3.2.1 例题 64.4: 泰勒系列 有限差分法 例子 . . . 1898
64.3.3.3.3 多元化混乱扩张 (PCE) . . . 1898
64.3.3.3.3.1 例题 64.5: 多元化混乱扩张 . . . 1899
64.3.4 输出不确定性解释 . . . 1899
64.4 敏感性分析 . . . 1900
64.4.1 莫里斯方法 . . . 1900
64.4.1.1 例题 64.6: 莫里斯方法 . . . 1904
64.4.2 Sobol 基于变量的敏感性指数 . . . 1904
64.4.2.1 第一命令指数 . . . 1905
64.4.2.2 相互作用与总效应指数 . . . 1905
64.4.2.3 解释 . . . 1905
64.4.2.4 计算与成本 . . . 1905
64.4.2.5 关于莫里斯的评论 . . . 1906
64.4.3 宣传和敏感性方法的比较 . . . 1906
64.4.4 确定重要随机变量 . . . 1906
64.4.4.1 例题 64.7: 莫里斯方法; 重要变量的识别 . . . 1907
64.4.5 塔纳多图表 . . . 1910
64.5 从敏感性分析到参数识别 . . . 1911

65 决策: 参数识别方法 1913
65.1 参数识别作为逆转问题 . . . 1913
65.2 申请和决策框架 . . . 1914
65.2.1 从敏感性分析到参数识别 . . . 1915

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

65.2.2 决策框架: 什么方法? 1915
65.3 数据质量与强度 1915
65.3.1 数据污染的来源 1915
65.3.2 强大的共识估计:RANSAC 1915
65.3.2.1 算法 1916
65.4 莱文伯格 - 马克思算法 1919
65.4.1 模型方法与模型选择 1919
65.4.2 重量不线 最小二乘法 1919
65.4.3 莱文伯格 - 马库尔德更新步骤和算法直觉 1919
65.4.4 例题 65.1: 适合非线性超级模型 1920
65.4.5 扩展、限制和调节 1922
65.4.6 可识别 1922
65.4.6.1 地方不确定性接近 1923
65.4.7 模型差异 1923
65.5 巴伐利亚参数识别 1924
65.5.1 Bayesian 参数识别: 设置 1924
65.5.2 地图估计与点估计 1924
65.5.3 后面样本和 MCMC 为参数 1925
65.5.4 例题 65.2: 巴耶西复兴与平方基和 Metropolis–Hastings 样品 1925
65.5.5 算例：退化参数的贝叶斯推断 1926
65.5.6 什么时候使用 Bayesian 识别 1926
65.6 Levenberg - 马克思算法在实践中 1927
65.6.1 最低四方实践 1929
65.6.1.1 MATLAB 参数识别计划: 描述 1929
65.7 混合工作流和最佳实践 1935
65.7.1 定义与验证 1935
65.7.2 结构性应用 1936
65.7.3 工作流决策框架 1936
65.8 桥到基于性能的地震工程 1936

66 间隔 **1940**
66.1 荷载和抵抗因子设计的限制 (LRFD) 1940
66.2 為什麼要移動到 基于性能的地震工程 (PBEE)? 1941
66.3 PBEE 的四个组成部分 1941
66.4 图书的结构 1941

67 危险性分析 **1943**
67.1 引入 1944
67.2 重复关系 1944
67.3 注意模型 1946
67.3.1 基本 1946
67.3.2 Boore, Joyner 和 Fumel (1997) 1947
67.3.3 参数评估 1947

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

67.4 定位性地震 危险性分析 1948
67.5 可靠性地震 危险性分析 1950
67.6 事件时间 1952
67.7 地震危险曲线 1953
67.8 地震危险地图 1954
67.9 地震危险分裂 1954
67.10 目标反应视野 1955
67.11 斯托卡斯特地面动作模拟 1959
67.11.1雷扎伊安和基乌里希安 (R-D) 模特 1959
67.11.2Yamamoto 和 Baker (Y - B) 模型 1961
67.12 耐力时间刺激功能 1962
67.12.1第一代 ETEF 1963
67.12.2二世代 ETEF 1963
67.12.3第三代 ETEF 1964
67.12.4第四代 ETEF 1964
67.12.5第五代 ETEF 1965
67.13 例题 67.1: 地震 危险性分析 1967

68 地震 危险性分析 II **1971**
68.1 引入 1971
68.2 年度超越率 1972
68.3 危险曲线 1972
68.4 工程地震风险分析 (ESRA) 1973
68.4.1 例题 68.1: 返回期计算 1974
68.5 可行性地震 危险性分析 (PSHA) 如 SHA + ESRA 1975

69 结构分析 **1978**
69.1 引入 1979
69.2 基本定义 1979
69.3 能力与需求 1980
69.3.1 需求能力关系 1980
69.3.2 需求估计方法 1980
69.3.3 能力设计原则 1981
69.4 地震分析方法 1982
69.4.1 Push Over 分析 (波) 1982
69.4.1.1 例题 69.1: 请求曲线的例子 1985
69.4.1.2 例题 69.2: Push-over 分析; 实用例子 1988
69.4.2 增長 动力分析 (伊达) 2015
69.4.3 多条线路分析 (MSA) 2017
69.4.4 云分析 (克拉) 2019
69.4.5 耐力时间分析 (艾特) 2020
69.4.6 总结 2022
69.5 什么是下一个 2023

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

70 损害分析 **2026**
70.1 引入 . . . 2027
70.2 限制国家 . . . 2027
70.2.1 边界国家的层次 . . . 2028
70.2.2 概率框架 . . . 2028
70.2.3 PBEE 框架中的实施 . . . 2028
70.2.4 定义与验证 . . . 2029
70.2.5 多客观考虑 . . . 2029
70.2.6 与损害指数的联系 . . . 2029
70.3 损害指数 . . . 2030
70.3.1 损害指数和性能标准 . . . 2030
70.3.2 转向可能损害评估 . . . 2031
70.3.3 损害的概率代表性 . . . 2031
70.3.4 损害测量和工程需求参数 (EDP) . . . 2032
70.3.5 主条目: 信任区 损害评估 . . . 2032
70.3.6 量化损害测量 . . . 2032
70.4 表现 . . . 2034
70.4.1 基于性能的工程框架 . . . 2034
70.4.2 性能水平和接受标准 . . . 2035
70.4.3 整合限制状态、损害指数和性能水平 . . . 2036
70.5 过渡到脆弱性曲线和风险评估 . . . 2038

71 损失分析 **2039**

72 风险概率评估 (⊇ PBEE)[23] **2041**
72.1 新模式: 基于性能的地震工程 (PBEE) . . . 2042
72.1.1 荷载和抵抗因素设计的限制 (LRFD) . . . 2042
72.1.2 第一部分: 明确性能目标 . . . 2042
72.1.2.1 方法 . . . 2042
72.1.2.2 PBEE1 的限制 . . . 2042
72.1.2.3 设计 vs. 分析 . . . 2044
72.1.3 第二部分: 功能和经济后果的直接定量化: . . . 2044
72.1.3.1 引入 . . . 2044
72.1.3.2 一般框架 . . . 2045
72.1.3.3 PBEE 1 和 PBEE 2 之间的差异 . . . 2046
72.1.4 PBEE 实施程序 . . . 2047
72.2 从回应到损害: 脆弱性曲线 . . . 2049
72.2.1 基本和定义 . . . 2049
72.2.2 开发脆弱性曲线 . . . 2050
72.2.3 数学代表性 . . . 2050
72.2.4 连续功能 *vs.* 直播 矩阵 . . . 2051
72.3 PBEE 框架中的作用 . . . 2053
72.4 例题 72.1: 完整的 PBEE 例子 . . . 2054

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

72.5 历史遗迹和基础文件 2057

附录

第一部分：基础参考资料

A 单位 **2061**
A.1 是单位 2061
A.2 测量预定和多元化 2062
A.3 单位 & 转换因素 2062
A.4 强度、长度、工作和应力的概述, 在各个测量单位 2063
A.5 物理量从计量转换为帝国单位 2063

B 包装, 以帝国为基础的设计 **2064**
B.1 死负载 2064
B.2 风负载 2065
B.2.1 例题 B.1: 风荷载 2068
B.3 地震 2070
B.3.1 例题 B.2: 地震在一个框架上加载 2073
B.3.2 例题 B.3: 地震 荷载 在高楼上 2075
B.4 桥梁负载 2076
B.5 荷载 组合 2076
B.6 活载 减少 2077
B.6.1 例题 B.4: 活载 减少 I 2078
B.6.2 例题 B.5: 活载 减少 II 2079
B.7 荷载 定位 2079

C 线性均匀差异方程式 **2080**
C.1 管理差异方程式的概述 2080
C.2 解决方案 2081
C.3 稳定 I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2081
C.4 二、稳定性 $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2082
C.5 梁 弹性 基础; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ 2083

D 灵活的架子; 先进的分析 **2085**
D.1 引入 2085
D.2 三角圆 拱 2086
D.2.1 分析程序 2086
D.2.2 点 荷载 2087
D.2.3 自我重量 2093
D.2.4 统一 分布荷载 2097
D.2.4.1 挠度 2099
D.2.5 三角圆 拱: 验证 2099

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

D.2.6 结论 2101
D.3 2 - 旋转圆形 拱 2101
D.3.1 分析程序 2102
D.3.2 点 荷载 2102
D.3.3 自我重量 2112
D.3.4 统一 分布荷载 2120
D.3.5 双环圆 拱: 验证 2123
D.3.6 结论 2126
D.4 无缝循环 拱 2126
D.4.1 分析程序 2126
D.4.2 点 荷载 2127
D.4.3 自我重量 2139
D.4.4 统一 分布荷载 2147
D.4.5 无缝循环 拱: 验证 2151
D.4.6 结论 2154
D.5 结论 2154

第二部分：结构分析与设计表格

E 圆形壳分析表 **2156**

F 彩票设计 壳 Roofs **2169**

G 阿拉米洛的桥梁数据集 **2198**

H 标签: Visual Hashing **2202**
H.1 引入身份证 2202
H.2 识别一代算法 2203
H.3 GitHub vs. Stack Exchange Identicon 定位 2204
H.4 我们的 MATLAB 实施 2205
H.5 核心代码分区 2207
H.6 使用该计划 2208
H.7 优点和应用 2209
H.8 结论 2209

第三部分：程序实现

I MATLAB®, 数学 代码 **2210**
I.1 第一部分: 基本和计算分析方法 2211
I.1.1 静态 矩阵 的 桁架 B 2211
I.1.2 圣路易斯 拱 形状 2213
I.1.3 仲裁三重循环 拱; 数学 2215
I.1.4 马索尼亚架的崩溃 2226
I.1.5 主 2226
I.1.6 大 挠度 的 梁 2237

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

I.2 第二部分: 结构设计与分析 . . . 2241
I.2.1 圆形盾牌设计 . . . 2241
I.2.2 接近 框架 分析; cantilever 方法 . . . 2253
I.2.3 非统一 扭转 . . . 2265
I.2.4 正统 框架 . . . 2268
I.2.5 混合式框架 . . . 2271
I.2.6 框架; 硬直 . . . 2274
I.2.7 直接刚度法; 框架 . . . 2278
I.2.8 主要代码 . . . 2278
I.2.9 刚度矩阵 非普里斯马特成员 . . . 2290
I.2.10 隔离线 . . . 2296
I.2.11 进化设计 . . . 2302
I.2.12 主 . . . 2302
I.2.13 柱 互动图表 . . . 2308
I.2.14 变量方法: 数学 . . . 2311
I.2.15 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应 . . . 2322
I.2.16 以色列 单元 . . . 2324
I.3 第三部分: 材料模型与宪法行为 . . . 2335
I.3.1 增長 塑性 . . . 2335
I.3.2 宪法模型 . . . 2339
I.3.3 二元模型 . . . 2339
I.3.4 哈登 . . . 2343
I.3.5 催眠 . . . 2346
I.3.6 修正的吉夫雷 Monegotto Pinto . . . 2365
I.3.7 改造城区公园 . . . 2370
I.3.8 伊巴拉 . . . 2375
I.3.8.1 催眠 . . . 2375
I.3.8.2 混凝土 Pinch . . . 2394
I.3.9 极限状态 Shear 标签 . . . 2415
I.4 第四部分: 数据驱动的方法和参数识别 . . . 2436
I.4.1 参数识别计划 . . . 2437
I.4.2 主节目和核心乐队 . . . 2437
I.4.3 数据 I/O 和 Spreadsheet 集成 . . . 2447
I.4.4 优化工作流和辅助功能 . . . 2458
I.5 第五部分: 数值和统计基础 . . . 2471
I.5.1 莱文伯格 - 马库尔德 . . . 2471
I.5.2 数值 技术 . . . 2472
I.5.3 FFT 和 Butterworth 过滤器 . . . 2472
I.5.4 单一价值分解 . . . 2475
I.5.5 预条件 . . . 2477
I.5.6 随机样本共识 (拉纳克) . . . 2478
I.5.7 拉丁 Hypercube . . . 2483

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

I.5.8 巴伐利亚回归以四方基础 . . . 2487
I.5.9 马尔科链 Monte Carlo Simulation . . . 2495
I.6 第六部分: 优化和参数匹配 . . . 2496
I.6.1 莱文伯格 - 马库尔德 . . . 2496
I.6.2 定制实施 . . . 2497
I.6.3 使用内置功能 . . . 2499
I.7 第七部分: 地震可靠性和不确定性 . . . 2501
I.7.1 地震 危险性分析 . . . 2502
I.7.2 基于性能 地震工程 . . . 2504
I.8 第八部分: 有用 . . . 2508
I.8.1 身份 . . . 2509

J MathCad 例子 **2515**

第四部分：数值与统计方法

K 地震记录过滤 (快速转型) **2681**
K.1 如何处理 Fourier 转型 . . . 2682

L 关于线性阿尔及利亚的评论 **2687**
L.1 关于矩阵 . . . 2687
L.1.1 定义 . . . 2687
L.1.2 基本 矩阵 操作 . . . 2689
L.1.3 定义者 . . . 2690
L.1.4 投资 . . . 2691
L.2 线性方程式的解决方案 . . . 2691
L.2.1 策略 . . . 2691
L.2.2 解体 . . . 2692
L.2.2.1 Gauss 排除 . . . 2692
L.2.2.2 加斯 - 约旦排除 . . . 2692
L.2.2.3 **LU** 解体 . . . 2693
L.2.2.4 霍尔斯基的分裂 . . . 2695
L.2.2.5 单一价值分解 . . . 2696
L.2.2.6 QR 分解 . . . 2697
L.2.3 间接方法 . . . 2698
L.2.3.1 盖斯 • 塞德尔 . . . 2698
L.3 矩阵 特性和计算改进 . . . 2698
L.3.1 独特性和排名 . . . 2698
L.3.2 自我价值与自我 vectors . . . 2699
L.3.3 条件号 . . . 2700
L.3.4 条件前 . . . 2700
L.3.4.1 左前提 . . . 2701
L.3.4.2 正确的前提 . . . 2702
L.4 例子 . . . 2702

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

L.4.1 例题 L.1: Gauss 排除 . . . 2703
L.4.2 例题 L.2: 加乌斯 - 约旦排除 . . . 2704
L.4.3 例题 L.3: **lu** 解体 . . . 2705
L.4.4 例题 L.4: 霍尔斯基的分裂 . . . 2706
L.4.5 例题 L.5: 加斯西德尔 . . . 2707
L.4.6 例题 L.6: 盖斯 • 塞德尔 . . . 2708
L.4.7 例题 L.7: 单一价值分解 . . . 2708
L.4.8 例题 L.8: 预条件 . . . 2709

M 概率与统计 **2712**
M.1 引入概率与统计 . . . 2712
M.2 概率的基本概念 . . . 2712
M.2.1 定义 *vs.* 概率 . . . 2712
M.2.2 定义 . . . 2713
M.2.3 条件概率 . . . 2714
M.2.4 随机变量类型 . . . 2714
M.3 统计工具可靠性分析 . . . 2715
M.3.1 累积分配功能 . . . 2715
M.3.2 信任间隔 . . . 2716
M.4 统计措施 . . . 2717
M.4.1 中央趋势的时刻和措施 . . . 2717
M.4.2 变量之间的关系 . . . 2720
M.5 分布 . . . 2720
M.5.1 统一分布 . . . 2720
M.5.1.1 比较 . . . 2723
M.5.2 二元化分布 . . . 2725

N 可靠指标 **2728**

第五部分：高级理论与优化

O 变形物体的机械, 一个初级 **2734**
O.1 引入 . . . 2734
O.1.1 评论 . . . 2734
O.1.2 装修器 . . . 2737
O.1.2.1 行动 . . . 2737
O.1.2.2 转角 的轴 . . . 2738
O.1.2.3 张量 转型 . . . 2740
O.1.2.4 交响二级紧张器的主要值 . . . 2740
O.1.3 应力的物理解释 . . . 2742
O.2 向量字段; 变形体的机械 . . . 2743
O.2.1 力量 . . . 2743
O.2.2 卡西的应力张量 . . . 2743
O.2.2.1 液化和偏差 应力 发动机 . . . 2745

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

O.2.2.2 应力 州的地质代表性 2746
O.2.3 电影学 2746
O.2.3.1 位置和 位移 2746
O.2.3.2 斯特林 2747
O.3 连续介质力学的基本法则 2749
O.3.1 保守法 2749
O.3.2 流动 2750
O.3.3 质量的保留; 连续性方程式 2750
O.3.4 保持动力; 运动方程 2751
O.3.5 能源保养: 热力学的第一原则 2753
O.4 宪法方程式 2755
O.4.1 一般 3D 2755
O.4.2 超越性异常案例 2757
O.4.3 2D 案例 2757
O.5 现象观察 2758
O.5.1 充电、驱动和压力控制测试 2758
O.5.2 钢材和混凝土的预/后峰材料反应 2759
O.6 变形的位置 2760
O.6.1 实验证据 2760
O.6.1.1 σ 代码图, 希尔伯格的模型 2760
O.7 边界条件 2763
O.8 彩色图表 2763
O.9 内部力量的概念 2764

P 向威斯特加德致敬 **2765**
P.1 Crack 提示 应力 字段 2765
P.1.1 Airy 应力 功能 2765
P.1.2 解决方案 2767
P.2 流体 结构相互作用 2772

Q 信任区和莱文伯格 - 马库尔特方法 **2784**
Q.1 信任区 2785
Q.2 算法 2787
Q.3 MATLAB®formulation 2788
Q.4 实时视觉化 2790

R 向量 计算; 一个初始 **2792**
R.1 基本定义 2792
R.1.1 衍生品为一个滑板 2792
R.1.1.1 例题 R.1: 向曲线倾斜 2794
R.1.2 差异 2794
R.1.2.1 向量 2794
R.1.2.1.1 例题 R.2: 向量的差异 2796
R.1.2.2 第二次订单 张量 2796

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

R.1.3 格拉迪特 2796
R.1.3.1 滑板领域 2796
R.1.3.1.1 例题 R.3: 学士学位: 一个规模的领域 I 2797
R.1.3.1.2 例题 R.4: (二) 斯卡拉字段的格拉迪特 2798
R.1.3.2 向量 字段 2799
R.1.3.2.1 例题 R.5: 一个向量字段的格拉迪特 2800
R.2 综合理论 2800
R.2.1 整合一个 向量 2800
R.2.2 完整线 2800
R.2.3 集成部分 2801
R.2.4 加斯: 差异理论 2801
R.2.4.1 例题 R.6: 差异理论的物理解释 2802
R.2.5 斯托克的理论 2803
R.2.6 绿色: 格拉迪特理论 2803
第二至第四卷及附录参考文献 **2804**

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

第二至第四卷插图目录（分析）

17.1 结构分析; 大图像 679
17.2 结构中的力量类型 单元 (1d) 684
17.3 索系统的基本方面 685
17.4 档案的基本方面 685
17.5 特斯拉的类型 686
17.6 邮件和 Beams 配置的变量 686
17.7 不同 梁 类型 687
17.8 基于框架的基本形式 687
17.9 空气支持结构的例子 688
17.10 基本形状 Shell 688
17.11 结构工程课程的序列 690

18.1 美国雪地图 692
18.2 翼型, 伯诺利方程式。 694
18.3 美国风景地图 694
18.4 风荷载对结构的影响 695
18.5 美国地震地图 696
18.6 地球和结构上的水位负载 698
18.7 计划的负载 702
18.8 荷载 定位以最大限度的时刻 702
18.9 荷载 转换在 R/C 建筑物 705
18.10 一或两种方式在滑板中的行动 705
18.11 荷载在哥特式大教堂和深宫的转移机制 706
18.12 对结构成员负载的税收区的概念 707
18.13 荷载 一个结构的生命, (Lin and Stotesbury, 1981) 709

19.1 反应边界的例子 712
19.2 平衡的瞬间, 从莱昂纳多 (Da Vinci, 1490) 到 Calder 714
19.3 包含 滚动支座 反应 715
19.4 静态不确定度 715
19.5 反应是竞争的 716
19.6 免费的梁身体图表, 受不同负载 717

20.1 静态不确定 桁架 735
20.2 力量与长度之间的关系 736
20.3 用火箭展示力量 737
20.4 合体/矩阵方法, 合体自由体图表 745
20.5 复杂静态定义 桁架 746

21.1 内部压力 752

审阅稿

21.2 直线和曲线的内部力量 . . . 753
21.3 内部力量 . . . 755
21.4 标签和时刻签名设计公约 . . . 755
21.5 设计签约 . . . 755
21.6 无限的梁部分的自由体图 . . . 756
21.7 荷载的变量, 页面和时刻 . . . 758

22.1 曲率和线条 . . . 781
22.2 签署曲线区域方法对反向曲线的条约 . . . 792
22.3 曲率 区域方法 . . . 792
22.4 最大 挠度 使用瞬间区域方法 . . . 796
22.5 混合 Beam . . . 802

23.1 清洁的甲状腺变形 . . . 806
23.2 Infinitesimal 单元 受 剪应力 的约束 . . . 807
23.3 剪应力 和比例 . . . 809
23.4 扭转 转角 关系 . . . 811
23.5 为什么会发生冲浪 . . . 813
23.6 非统一 扭转 (适应从 (McGuire and Winter, 1968)) . . . 814
23.7 I 梁 受 扭转 的约束 . . . 816

24.1 虚拟和真实的力量在一个自愿的结构 . . . 822
24.2 Maxwell-betti 相互理论 . . . 825

25.1 静态不确定 3 索 结构 . . . 850
25.2 可供选择的梁 . . . 851
25.3 柔度法的描述问题 . . . 852
25.4 描述柔度法与两个未知的 . . . 853
25.5 女王后灵感结构的例子 . . . 868
25.6 三瞬间方程式, 衍生 . . . 873
25.7 三分钟方程式, 荷载条款 . . . 875

26.1 签署对固态方法的协议 . . . 879
26.2 灵活问题 表述 为固度条件 . . . 881

27.1 象征性的例子为挠度方法 . . . 888
27.2 时刻分布的关键概念 . . . 898

28.1 Mü 布雷斯拉夫原则 . . . 910

29.1 硬酒吧的稳定性 . . . 921
29.2 硬带的稳定性与初始不完美 . . . 922
29.3 简单支持 梁 柱; 差异性分区; 效果的 轴力 p . . . 924
29.4 2 DOF 动态系统 . . . 935
29.5 梁 和框架的有效长度 . . . 936

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

29.6 列有效长度在多层多层框中 . . . 937
29.7 半灵活连接的配置图 (American Institute of Steel Construction, 2016) . . . 937
29.8 无线 屈曲 . . . 938
29.9 Euler 屈曲, ssrc 柱 曲线 . . . 939

30.1 索理论的验证 . . . 943
30.2 索 地质学 # 1 . . . 946
30.3 索 地质学 # 2 . . . 948
30.4 倾向电缆的地质学, 受均匀水平转载负载 . . . 953
30.5 索 硬度 . . . 954
30.6 Catenary 替代参考协调 . . . 965
30.7 的 incl, (Cella, 1999) . . . 966
30.8 基于卡特纳和帕拉博利的解决方案的比较 . . . 971

31.1 什么是胡子 . . . 973
31.2 德拉伊尔的拱分析 . . . 974
31.3 四方和圆根大数方法 de Belidor, B. F., 1757 . . . 975
31.4 比利多的表尺寸垂直支座 (右脚) 根据《租金》的规定, de Belidor, B. F., 1757 976
31.5 档案分析 (de Belidor, B. F., 1729) . . . 977
31.6 贝利多的失败标准 (Brandonisio and De Luca, 2020) . . . 977
31.7 档案分析 (Couplet, 1729) . . . 978
31.8 塑料模型 Danyzy, 1732 . . . 979
31.9 无情的毛巾分析 Coulomb, 1773 . . . 980
31.10 莫塞利的最低抵抗原则 (Moseley, 1869) . . . 981
31.11 查尔斯 • 莫斯卡 (Charles Mosca) 的桥梁 (塔林) 由分析 (Castigliano, 1879) 982
31.12 温克勒的弹性分析 (Winkler, 1880) . . . 982
31.13 使用的实验装置 Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 要研究胡塞树木的稳定性。 . . . 983
31.14 一个小羊的逐步失败 Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 . . . 984
31.15 您分析的 Pippard and Baker, 1943 . . . 984
31.16 在一个拱中的区块上流动力量 . . . 988
31.17 定义起源的力量集 . . . 991
31.18 MATLAB® 生成一系列的相关术语子在一个胡子里 . . . 992
31.19 崩溃机制; abutment thrusts (Nobile and Bartolomeo, 2014) . . . 996
31.20 逆转的阴道聚合物和相应的振动线和兴奋性 . . . 996
31.21 失败模式三环半圆 拱 . . . 997
31.22 Hinge 地点的序列 . . . 998

32.1 瞬间抵抗在弓或悬挂系统中的力量, 与火箭相比, (Lin and Stotesbury, 1981) .1000
32.2 三角形拱的静态 1000
32.3 兩個折叠 拱, 與固定結末的類似性 梁 (Lin and Stotesbury, 1981) 1007
32.4 重力的中心 1015
32.5 平衡 无限的阴影 1016

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

32.6 最佳的 Parabolic 拱 为一个单一的 荷载 1021
32.7 无缝的模拟拱; 自由体图 1027
32.8 初始调整和温度变化的影响 1032
32.9 卢浮宫博物馆的螺旋楼梯 (巴黎) 圣家大教堂 (Sagrada Familia) (巴塞罗那) .1037
32.10 空间中的曲线结构的地质学 1038
32.11 空间中的曲线结构的自由体图 1039

34.1 移动和压力在一个板 1052
34.2 内部力量 1054
34.3 应力 分布 1059
34.4 圆板无限元素的平衡 1063

35.1 差异性 壳 单元, 地质学, 压力和其结果 1070
35.2 区别单元的电影 1071
35.3 平衡的差异性 壳 单元 1072
35.4 差异性 壳 单元, V_x 应力 结果 1076
35.5 差异性 壳 单元, 主要曲线 1077
35.6 差异性 壳 单元, 初始和扭曲状态 1081
35.7 差异性 壳 单元, 初始和变形状态; 由于积极侧长增加而引起的 应变 表 . . .1082
35.8 差异性 壳 单元, 初始和变形状态; 转角 1083
35.9 差异性单元的中间表面 1085
35.10 壳牌的分类 1094
35.11 例子在膜假设的阴道 (大多数) 有效 1094
35.12 自由体图表的超波利德和多姆无限性单元 1095
35.13 一个无限的圆形阴影元素的自由体图 1097
35.14 压力导致的分布在一个完整的圆形阴影只是支持 1100
35.15 Edge 效果 1102
35.16 修正应用线 荷载 在圆形 壳 1103
35.17 他的系列演讲 1103
35.18 静态不定义的壳和梁类似 1120
35.19 弹性支承上的圆柱壳 1121

36.1 理想化的单级自由奥斯卡 1140
36.2 概念动态强化曲线, 用于在和谐强制下蒸发的 SDOF 振动器 1147
36.3 加速度 反应谱 S_a 作为一个自然时期的功能 T_n 各式各样的蒸汽比例。. . . .1155
36.4 第一個三種模式形式的簡單支持 梁 1158
36.5 双线 elastoplastic hysteresis loop 在同步循环充电下。 1164

37.1 建筑工程师 - 结构工程师 二进制互动 1173
37.2 需要和能力在一个梁 1173
37.3 安全 1174
37.4 概率分布 功能 C 和 D 1176
37.5 失败的可能性在 β 1178

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

37.6 限制一个破碎的强化具体部分的状态分析 1179
37.7 威特尼应力区块 1180
37.8 柱 免费体和互动图表 1188
37.9 柱 自由體, 平衡狀態 1189

38.1 相容的角旋转 1203
38.2 挠度 一个简单的 梁 1203
38.3 挠度 端口 框架 与垂直下方的硬列 荷载 1204
38.4 端口框架在垂直负载下消失 1204
38.5 端口 框架 的例子, 受侧 荷载 的约束 1205
38.6 破碎的形状和时刻图; 门户框与侧负载 1205
38.7 梁 缺陷在 支座 固定性方面 1206
38.8 框架 垂直低于 荷载; 近距离点的位置 1207
38.9 对垂直负载的框架进行近距离分析; 旋转时刻 1208
38.10 对垂直负载的框架的近距离分析; 柱轴力 1209
38.11 对垂直负载的框架进行近距离分析 1210
38.12 接近对侧负载的框架分析; 柱 页面 1211
38.13 对侧负载的框架进行近距离分析; 旋转时刻 1211
38.14 在短型建筑中出现变形,(Lin and Stotesbury, 1981) 1233
38.15 在高楼的灵活变形, (Lin and Stotesbury, 1981) 1233
38.16 挠度在由两个滑板墙和绳子组成的建筑结构中, (Lin and Stotesbury, 1981) . 1234
38.17 一本相关术语的歪曲 (Lin and Stotesbury, 1981) 1235
38.18 硬 框架 子系统的横向和灵活的 挠度 , (Lin and Stotesbury, 1981) 1236
38.19 侧路 挠度 从不交响的垂直 荷载 , (Lin and Stotesbury, 1981) 1236

40.1 時間依賴 应变; 切割和縮小 1281
40.2 建造热负载 1281
40.3 签约、设计与分析 (图 26.1) 1282
40.4 单元 内部勢力及地點 Dof 1283
40.5 独立迁移 1284
40.6 當地及 总体坐标系/dof 1284
40.7 静态和电影不确定性学位 1286
40.8 边值问题 1287

41.1 定义固态术语 K_{ij} 1288
41.2 不同类型的 单元 的粘度比例 1289
41.3 3D 白色列元素的自由度 1291
41.4 個別的堅固性條件在 3D 棒列元素 1293
41.5 因强制性变形而引起的寄生虫骨折 1294
41.6 终止部队和转移一个旋转元素与旋转限制 1297

42.1 梁 例子, 以比较灵活性和坚固性方法 1300
42.2 梁的例子, 以确定电影不定义程度 1301

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

43.1 地方 ($\mathbf{k}^e$) 和全球 ($\mathbf{K}^e$) 单元 硬度矩阵 1324
43.2 转型矩阵为 2D 白色列 1325
43.3 算法 3D 向量 转换 1327
43.4 2D 框元素旋转与 Z (或 z) 1328
43.5 網絡 单元 转角 1329
43.6 变换矩阵 为 vlasov 梁 1330
43.7 2D 桁架 转角 1331
43.8 3D 转角 1332
43.9 垂直成员的 3D 转型特殊案例 1334
43.10 3D 複合體 转角 1335

44.1 无限和有限的 DOF 1341
44.2 结构性歧视的例子 1342
44.3 例子为 [**ID**] 矩阵 定义 1343
44.4 例子 **LM** 任命 1344
44.5 全球 刚度矩阵 过程的集合 1345

45.1 地图转移到力量 1363
45.2 将一个单位的位移循环地图化为力量排泄物, (Gavin, 2012). 1364
45.3 特征值 测试问题 1366
45.4 会员组合导致不良条件 **K** 1368
45.5 以 K_1 K_2 表示的病态矩阵 1369
45.6 节点数的重要性 1373
45.7 结构性 刚度矩阵 的存储要求 1374

46.1 桁架 单元的电影 1384
46.2 稳定和静态定义 单元 1388
46.3 梁 具有硬折扣 1400
46.4 Fbd 的 梁 与硬折扣 1400
46.5 灵活、坚固、半坚固的泡沫 1402
46.6 半固体斑点的变形 1403
46.7 $\overline{K}_{22}$ 半灵活的连接率 1406
46.8 来自框架常态手册的提取物 (Portland Cement Association, 1947) 1407
46.9 梁 与变量部分 1408
46.10 线性不同深度的部分; 参数研究 1409
46.11 参数不同深度的部分; 参数研究 1410

47.1 变量和差异运营商 1423
47.2 基本和自然边界条件的例子 1427
47.3 对合体势能方法的色调图表 1433
47.4 图为 Hu-Washizu, (Červenka, 1994) 1444
47.5 拉格兰奇、汉密尔顿和德阿伦伯特的图表 1445

48.1 拖拉机定义 1450

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

48.2 应变 和附加的 应变能 密度 1450
48.3 势能 1452
48.4 荷载 历史的影响 U 和 W_i 1453
48.5 虚拟和补充虚拟作品的原则图表 1461
48.6 量子和经典机械的减少 1471
48.7 变量方法的概述 1489
48.8 二元性变量原则 1490

49.1 自然协调系统沿着直线 1495
49.2 三角形的自然协调系统 1496
49.3 跨越三角形的融合 1498
49.4 轴端 单元 1499
49.5 永久 应变 三角形 单元 1501
49.6 直角二重 单元 1502
49.7 形状功能为 4 节点四方 单元 1504
49.8 固体三角直角 单元 1504
49.9 形状功能为 3 节点线性三角形 单元 1507
49.10 三角四角栏 单元 1507
49.11 灵活端口 单元 1508
49.12 格式功能为单一 梁 单元 的旋转。 1510
49.13 四个节点 等参单元 1513
49.14 Serendipity 和 Lagrangian 四角形 1514
49.15 四方元素和三角元素的复活三角形 1514
49.16 Serendipity isoparametric quadratic finite element: 全球和母元素 1514
49.17 形状功能为 8 节点四方 单元 1515
49.18 形状功能为 9 节点四方 单元 1519
49.19 以色列分数的节点编号 单元 1519
49.20 形状功能为 6 节点四角三角 单元 1520

50.1 完整性和变形协调 1527
50.2 h, p 和 r 接近 1528
50.3 应力的相互元素连续性 1530
50.4 应变的相互元素连续性 1530

51.1 二维地图某些 单元 1532
51.2 现有和父母 单元 1533
51.3 Iso、Super 和 Sub Parametry 单元 1534
51.4 曲线协调系统中的单元差异 1537
51.5 二重 vector 交叉产品 1538
51.6 单元 有可能的独特雅各比 1539
51.7 纽顿评论 数值积分 1544
51.8 盖斯传奇集成在表面上 1549
51.9 数值积分 超越三角形 1549

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

51.10 4 节点四节点加斯点 (Felippa, 1999) 1550
51.11 重力 加载 1552
51.12 荷载 以色列式的 单元 1553
51.13 拖拉 荷载 在相容的以色列分数 单元 1554
51.14 二进制元素的独立转移模式 1556
51.15 Hourglas 模式在低集成四方 单元 中 1557
51.16 受弯矩形双线性单元：双线性单元与正确几何形状 1558
51.17 与 q6 单元 不兼容模式相关的移动 1559
51.18 由 drilling d.o.f 引发的副转移 1560

53.1 轴心 *vs* 灵活的坚定性 1578
53.2 减少不受限制的移行, 当忽略轴硬度时 1579
53.3 建筑模型为地震荷载 1579
53.4 一个节点的自由体图 1580
53.5 质量 和密度比例蒸汽 1585
53.6 Euler 前向 vs Euler 后向方法 1590

54.1 地质非线性, 大差异例子 (**B**), 29.2.3 1608
54.2 材料非线性, 纤维 (**D**) 1609
54.3 材料非线性 部分 (**D**) 1609
54.4 线性 *vs.* 非线性分析 1610
54.5 类型 结构分析 1611
54.6 负载漏洞曲线和各种响应范围 1614
54.7 古代设计代码 1616
54.8 混凝土规则 *F u* 艾森贝顿巴布 1617
54.9 现代设计代码的例子 1617
54.10 性能水平 1619
54.11 不同设计框架的比较 1620

55.1 利息表面; 定义 1623
55.2 压力 独立模型 1624
55.3 压力 依赖的产量表面 1625
55.4 压力依赖型号 1626
55.5 金属的压力 - Baushinger Effect 1627
55.6 混凝土 微型折叠 1628
55.7 化学债券 1628
55.8 杜克特和英国债券 1629
55.9 散步 1629
55.10 Elasto 塑料 应力 应变 回复 1630
55.11 硬化模型 1632

56.1 算法 截面 考虑到确定 $M - \Phi$ 1651
56.2 增長決定的程序 $M - \Phi$ 分析 1652

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

56.3 瞬间曲线和瞬间轴力 (互动) 图表 1658
56.4 将 截面 分为层 1659
56.5 增加方法确定 $M - \Phi$ 数字化 1661

57.1 利点线在滑板上 1680
57.2 定义直角板的产量线 1682
57.3 静态低线解决方案 五 S 静力推覆分析 1685

59.1 纽顿方法 1695
59.2 清晰的整合方案 1702
59.3 纽顿的方法解释了 (荷载 控制) 1704
59.4 Newton-raphson 荷载 控制方法 1705
59.5 改造新顿拉夫森方法, 初始坦根 1707
59.6 加重干燥, quasi-newton 方法 1708
59.7 纽顿的方法; 荷载 与 位移 控制 1711
59.8 纽顿的方法; 位移控制 (与数字比较 59.3) 1712
59.9 纽顿 - 拉夫森方法; 位移 控制 1713

60.1 结构分析 级别 1728
60.2 对几何非线性的明确增进方法 1728
60.3 定义 屈曲 荷载 没有地质 刚度矩阵 1733

61.1 协调系统 2D 桁架 1740
61.2 内部力量和相应的转移, 为基于 2D 密度的方法 1743
61.3 国家定义基于固态的方法 1745
61.4 非线性分析的流图使用基于固态的方法 1747
61.5 纤维分区 - 控制部分的分布和分区分为纤维 1751
61.6 非线性交叉分区 应力 分布 1751
61.7 2D 框架元素没有固体模式 1753
61.8 签署条约关于部分力量 1754
61.9 内部力量和相应的位移为 2D 灵活性方法 1756
61.10 固体模式与没有固体状态之间的关系 1757
61.11 以灵活性为基础的方法的状态确定, 没有单元字符串 1758
61.12 国家决心 (Taucer, Spacone, and Filippou, 1991a) 1761
61.13 单元和部分状态定义 1762
61.14 流图 非线性分析 使用基于灵活性的方法 w/o 单元 引用 1772
61.15 流图 非线性分析 使用基于灵活性的方法 w/ 单元 调节 1773
61.16 基于固态的比较 *vs.* 基于灵活性 表述 1774
61.17 零长度 2D 单元 1776
61.18 零长度 2D 元素的流图, 以确定元素状态 1777
61.19 零长度部分 单元, 平衡 1779
61.20 协调系统为零长度部分 单元 1781
61.21 流图为零部分 单元 1782

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

62.1 塑性 模型 1786
62.2 催眠模型 1788
62.3 坦根模块比较; 塑性 vs. 梅内戈托 - Pinto 1790
62.4 二进制模型的定义 1791
62.5 逆循环 荷载 模型比较: 塑性 *vs.* 梅内戈托 - Pinto 1792
62.6 梅内戈托 Pinto (Menegotto and Pinto, 1973) 钢材 模型 1792
62.7 定义 (1) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。 . . . 1794
62.8 定义 (2) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。 . . . 1795
62.9 定义 (3) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。 . . . 1796
62.10 定义 (4) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。 . . . 1797
62.11 限制对混凝土强度的影响 (Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928) 1798
62.12 限制 *vs.* 无限压缩 混凝土 强度 (Mander, Priestley, and Park, 1988) 1799
62.13 冲突在提供混凝土限制中的作用 1799
62.14 混凝土 材料模型在压缩中 1801
62.15 混凝土 材料模型在压缩中循环充电 1803
62.16 混凝土 材料模型在周期充电时紧张 1805
62.17 定义 (1) 改造的 Kent 和 Park 模型 1808
62.18 定义 (2) 改造的 Kent 和 Park 模型 1809
62.19 由压缩、紧张、压力和压缩引起的裂缝 1811
62.20 an 压力曲线为无永久紧张的麻醉损伤模型 1816
62.21 定义 (1) 对 anisotropic 损害模型 1817
62.22 定义 (2) 对 anisotropic 损害模型 1818
62.23 定义 (3) 对 anisotropic 损害模型 1819
62.24 应变-应力曲线, 用永久的应变为无神经损伤模型 1823
62.25 Slip 模型 1824
62.26 简化债券模型 1825
62.27 波恩斯滑曲 1826
62.28 中性轴的位置 1827
62.29 塑料区识别 1829
62.30 一个元素的 flexural deformation 1830
62.31 有效 惯性矩 在 R/C 1831
62.32 塑料长度的位置 (Park and Paulay, 1991) 1832
62.33 提示 位移 的 R/C cantilevered 梁 与 Lumped 塑性 假设 1833
62.34 提示 位移 的 钢材 cantilevered 梁 與 lumped 塑性 假設 1835
62.35 塑性 模型与叶片故障 1838
62.36 极限状态 Shear 失败 1838
62.37 春季回复 1839
62.38 限制国家列反应 1840
62.39 极限状态 个别回复 1841
62.40 代表性催眠周期 1842
62.41 应变 缓解强度损失 1842
62.42 逆循环强度衰退 1843

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

62.43 甲状腺模型背部 1844
62.44 背部曲线为灵活 (Ghannoum, 2020) 1845
62.45 顶级和滑板模型 1845
62.46 顶级模型基本循环 1846
62.47 荷载 逆向和目标状态更新 1847
62.48 按顶导向模型增加循环荷载历史 1847
62.49 Pinching 模型基本循环 1848
62.50 Breakpoint 定义 1849
62.51 确定第一分点 1850
62.52 Breakpoint 更新 1850
62.53 超越 break-point 1851
62.54 按 pinching 模型增加循环 荷载 历史 1852
62.55 UCSD 结构实验室结果 (Ibarra, 2004) 1852
62.56 基本强度衰退模式 1854
62.57 后覆盖强度衰退模式 1855
62.58 解除硬度衰退模式 1856
62.59 解载中断 1857
62.60 加速重新充电强度衰退模式 1858
62.61 背部曲线 (Ghorbani et al., 2022) 1859
62.62 基于 Cubic spline 的歇斯底里模型 (Suselo, 2021) 1860

63.1 完成 单元 过程 (被启发的 Bathe, 1996) 1863
63.2 统一分布的模型复杂性 1864
63.3 与 非线性分析 相比的 线性分析 的差距 1864
63.4 完成 单元 为 非线性分析 的框架 1867
63.5 柱 终端连接 1868
63.6 梁 或 柱 单元 1870
63.7 Column-beam 连接 1871
63.8 截面 模型到层 1874
63.9 理想化的彩虹模型 rc beam-column (Haselton et al., 2016) 1876
63.10 限制的类型 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 1877
63.11 对方结构性能数据库的图形用户界面 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) . 1877

64.1 MCS 和 LHS 的比较 1894
64.2 一条路线的例子 $k = 2$. 1901
64.3 来自不同莫里斯轨道的超越或密切分组点。 1902
64.4 随机变量及其累积分配功能 (CDF). 1902
64.5 随机变量的定期反应 x_i. 固定步骤尺寸可能无法检测定期变异。 1903
64.6 路线比较 (a) 放射点 (b) 方法为 $k = 3$ 量子超空间中的 RV。 1903
64.7 在修改的放射点筛查程序中的启动和后启动 1907
64.8 敏感度排序例子 (Gakuhari, 2021) 1911
64.9 敏感性分析确定候选人参数; 参数识别确定观察支持的值 1911

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

65.1 系统识别方法的原则: 以色列参数进行重定向, 以尽量减少模型数据不一致性。 . . . 1914
65.2 与 RANSAC 线性回归的模范 . . . 1916
65.3 RANSAC 适用于 混凝土 衰退: 案例研究 (Gakuhari, 2021) . . . 1917
65.4 参数识别程序流图 . . . 1928
65.5 图形用户界面为单个剩余函数和五个变量。查看 图 65.7 以更全面的例子。 . . . 1928
65.6 输入数据文件为 Levenberg–Marquardt 非线性最小方位优化 . . . 1930
65.7 Levenberg-Marquardt 非线性最小方位优化: 12 个预测目标和 8 个变量。 . . . 1933
65.8 网站特征化、模型开发、不确定性、参数识别、结构分析和脆弱性评估的集成 . . . 1937

66.1 PBEE 的四个组成部分 . . . 1942

67.1 和 (束缚) Gutenberg-richter 重复法 . . . 1945
67.2 地震源的分类 . . . 1946
67.3 区分网站到来源距离 . . . 1949
67.4 关于 GMP 的参数调查 . . . 1949
67.5 定位性地震 危险性分析 . . . 1950
67.6 可靠性地震 危险性分析 . . . 1951
67.7 波士顿的概率模型 . . . 1952
67.8 中型和脆弱的地震危险曲线的样本 . . . 1953
67.9 样品我们危险地图 . . . 1955
67.10 彩色大学的地震分裂区样本 . . . 1956
67.11 不同反应光谱的比较 . . . 1956
67.12 比较 IBPA、SBPA 和 TBPA 的地面运动选择和规模 . . . 1958
67.13 模型 ETEF . . . 1963
67.14 以太 40lc01 对目标 . . . 1965
67.15 天体能量 eta20kd01 vs 目标 . . . 1966

68.1 危险曲线 左曲线描述了返回期的概念, 而右曲线显示了一个特定位置的危险曲线。 . . . 1973
68.2 工程地震风险分析表面 . . . 1975
68.3 可行性地震 危险性分析 (PSHA). . . . 1976

69.1 可靠性质能力和需求 . . . 1980
69.2 能力曲线 . . . 1983
69.3 侧重负载 push-over 分析 . . . 1984
69.4 桥梁的位置和图像 . . . 1988
69.5 列和皮层尺寸 . . . 1990
69.6 柱子和切割十字部分 . . . 1991
69.7 压力压力关系为有限和无限混凝土的单调充电 (Mander, Priestley, and Park, 1988) . . . 1992
69.8 皮革形状和曲率图表; 适用于 AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 . . . 1993
69.9 瞬间曲线和塑料时刻 . . . 1994
69.10 反应谱 分析 (C_S) . . . 1997

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

69.11 位移 反应谱 分析 1998
69.12 可用 地震 抵抗 单元 (你是) (AASHTO, Seismic, 2011) 1999
69.13 强化钢压力线模型 2001
69.14 时刻 曲率 (适应从 (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1)) 2002
69.15 瞬间分布在皮尔的高度 2003
69.16 皮革形状和曲率图表; 适用于 AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2 2003
69.17 雷莎模型 2006
69.18 相互作用图为所需的三个列 2007
69.19 塑料时刻 2008
69.20 卡尔特兰的沙夫定义 (CALTRANS, 2013) 2010
69.21 改造的弹性模型, 形成第一 塑性铰 2012
69.22 改造二次塑性铰形成后的弹性模型 2013
69.23 崩溃机制, 形成 4 个塑料轴承 2014
69.24 概念崩溃脆弱性曲线基于 IDA 方法 2017
69.25 概念崩溃脆弱性曲线基于 MSA 方法 2019
69.26 基于 ETA 的能力功能生成 2021
69.27 四种不同的策略 (Hariri-Ardebili, Saouma, and Porter, 2016) 2024
69.28 地震分析的相对复杂性 2024

70.1 一个 DI 和两个 DV 之间的关系 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 2033
70.2 PBEE: 大画 2034
70.3 建议建筑设计最低地震性能目标 (Porter, 2003) 2036

72.1 第一代 PBEE 的概念描述; (Whittaker03, Hamburger, and Mahoney, 2003) 2043
72.2 透明的性能水平图像, (FEMA, 2012) 2043
72.3 PBEE 的四个组成部分 2045
72.4 地震脆弱性、脆弱性和危险曲线的比较 2050
72.5 脆弱性曲线与损害概率之间的关系 矩阵 2052
72.6 地震脆弱性表面的不同方面 2053

B.1 风荷载对结构的影响 (Schueller, 1996) 2067
B.2 接近的风设计 压力 p 为普通风力抵抗建筑结构 2069
B.3 建筑物的振动 2071
B.4 美国地震区, (ICBO, 1994) 2071
B.5 卡车 荷载 2076
B.6 荷载 定位以最大限度的时刻 2079

D.1 圆形地质 拱 2086
D.2 三角圆 拱 点下 荷载 2087
D.3 关系的 β 至于 θ 2089
D.4 Fbd 三角形, 循环 拱 点下 荷载 2090
D.5 三角圆架在点负载下的内部部队 2093
D.6 三角圆 拱 低自重 2094

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

D.7 Fbd 三角圆 拱 低自重 2095
D.8 三角圆形拱在自我重量下 2097
D.9 三角圆形拱在均匀分布的荷载的插槽 2099
D.10 三角圆 拱 低自重 vs. 点系列 荷载 2100
D.11 三角圆 拱 均匀分布 荷载 vs. 点系列 荷载 2100
D.12 Sap 2000 - 三角圆形拱在自我重量下的时刻图 2100
D.13 Sap 2000 - 自我重量下的三角圆形弓的轴力图 2100
D.14 Sap 2000 - 自我重量下的三角圆形弓的 force 强图 2101
D.15 三角圆 拱 低自重 vs. udl 2101
D.16 三角圆 拱 点下 荷载 在 1/2 和 1/4 间隔 2101
D.17 双环圆 拱 点下 荷载 2102
D.18 双环圆 拱 在 abutment' b' 中移除 redundant 鼓 2104
D.19 双环圆 拱 具有应用虚拟力量 2106
D.20 原始双环圆形拱的 Fbd 在点下荷载 2108
D.21 Fbd 可在双环圆形 拱 中计算 挠度 2111
D.22 双环圆形 拱 在点下 荷载 的插件 2112
D.23 双环圆 拱 低自重 2113
D.24 Fbd 的双环圆 拱 后移除 redundant thrust 在 abutment' b' 2114
D.25 Fbd 的原始双环圆 拱 低自重 2117
D.26 双环圆形拱在自我重量下 2120
D.27 双环圆形拱在 UDL 下 2124
D.28 双环圆 拱 低于自我重量 vs. 点系列 荷载 2124
D.29 双环圆 拱 均匀分布 荷载 对比 点系列 荷载 2124
D.30 Sap 2000 - 双环圆形拱在自我重量下的时刻图 2125
D.31 Sap 2000 - 自我重量下双环圆架的轴力图 2125
D.32 Sap 2000 - 自我重量下双环圆架的相关术语力图 2125
D.33 双环圆 拱 低自重 vs.udl 2125
D.34 双环圆 拱 在点下 荷载 在 1/2 和 1/4 间隔 2126
D.35 无缝循环 拱 点下 荷载 2127
D.36 无缝圆形拱与虚拟时刻在“b” 2129
D.37 无缝圆形拱与虚拟时刻在“A” 2130
D.38 原始无缝循环 拱 的 Fbd 在 荷载 点下 2135
D.39 荷载 点下的无缝圆形 拱 2139
D.40 无缝圆形拱低于自我重量 2140
D.41 无缝循环的内部力量 拱 2144
D.42 无缝圆形拱在自我重量下 2147
D.43 无缝循环 拱 在 UDL 下 2152
D.44 无缝循环 拱 低于自我重量 vs. 点系列 荷载 2152
D.45 无缝循环架在均匀分布负载下 vs. 点负载系列 2152
D.46 Sap 2000 - 无缝圆形拱的时刻图在自我重量下 2153
D.47 Sap 2000 - 自我重量下无缝循环弓的轴力图 2153
D.48 Sap 2000 - 自我重量下无缝循环弓的光力图表 2153

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

D.49 无缝循环 拱 在自我重量下 vs.udl 2153
D.50 无缝圆形拱在点下荷载在 1/2 和 1/4 间隔 2154

K.1 Butterworth 过滤信号的例子 2681
K.2 不同类型的 Butterworth 过滤器的比较 n 2683

M.1 概率分析中包含的概念相互连接 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) . . . 2713
M.2 样品空间的概念和相互分离事件 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) . . . 2714
M.3 因 100 个样品而进行三次的歇斯底里的比较 2715
M.4 因 1000 至 100000 个样品而进行的希斯托格拉姆比较 2715
M.5 三个连续分销功能的例子 2716
M.6 PDF 和 CDF 之间的关系 2716
M.7 限制 PDF 和 CDF 之间的关系 2717
M.8 信任间隔的描述 2717
M.9 描述 Mean 和 Median 2718
M.10 描述 标准差 2719
M.11 智慧和库尔托西斯的描述 2719
M.12 描述相互关系的因素 2720
M.13 不同概率的比较 (和累积) 分布功能 2725
M.14 二元性正常分布 2727
M.15 相互关系的影响 ρ 平常分布的 Bivariate 2727

N.1 可靠指标的定义 2728
N.2 可靠指标的失败概率 β 2731

O.1 向量 转型 2739
O.2 张量 命令二的主要方向 2741
O.3 奥克塔德拉飞机 2742
O.4 表面力量 2743
O.5 卡西:Tetrahedron 到应力 2744
O.6 应力的地质代表性 2746
O.7 位置和位移 vectors 2747
O.8 通过区域流动 dS 2750
O.9 平衡的压力, 卡特西亚坐标 2753
O.10 板 从霍克的讲座上 2755
O.11 测试控制 2758
O.12 金属和混凝土的压力曲线 2759
O.13 捕获实验性位置在单轴上载的混凝土样本 2760
O.14 希勒博格的虚构克拉克模型 2761
O.15 混凝土 应变 调节模型 2762
O.16 托尼的图表组件 (Felippa, 2000) 2764
O.17 变形体的机械图表 2764
O.18 以应力表示的内力 2764

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

P.1 破碎在一个无限的板 2768
P.2 克拉克移动的独立模式 2772
P.3 由于水的动态作用而施加压力 (Westergaard, 1933) 2777
P.4 压力分布的接近 (Westergaard, 1933) 2780
P.5 水泡的身体可以被认为是用相关术语子移动。(Westergaard, 1933) 2783
P.6 质量 按单位区域相比高度 2783

Q.1 信任区算法 2786
Q.2 参数识别程序流图 2790
Q.3 图形用户界面为碱集合反力参数识别 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) . 2791

R.1 位置差异 向量 $\mathbf{p}$ 2793
R.2 曲率 的曲线 2793
R.3 向量 跨越坚实的区域 2794
R.4 通过区域流动 dA 2795
R.5 Infinitesimal 单元 对差异的评估 2795
R.6 一个向量的格拉迪特 2799

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

第二至第四卷表格目录（分析）

18.1 热扩张率 700

20.1 静态决心和稳定性 735
20.2 适用 平衡 的方程式 735

22.1 两组关系之间的类似性 801
22.2 合并 梁 限制条件 801

25.1 荷载 点条款和统一负载 875

26.1 密度 vs 灵活性方法 878
26.2 密度与灵活性分析 879
26.3 Nodal 相当于简单负载的力量 882

29.1 列的基本和自然边界条件 925

34.1 弹性 和 板 旋转的统治方程的比较 (Pilkey and Wunderlich, 1994) 1067

35.1 平衡和未知的总结在薄壳中 1074
35.2 平衡方程式的个人贡献在薄壳 1074
35.3 细壳中的主要治理方程的概述 1088
35.4 对膜结构的假设和管理方程式 1096
35.5 应力 膜分布在不同负载下进行比较 1099
35.6 膜和底部 壳 解决方案对单一 荷载 的比较 1112
35.7 壳 比例 (ϕ 从冠冕中测量) 1118

37.1 可靠指标 目标值 1177

38.1 相似的沙夫子系统, 沙墙, 和压缩沙墙 1231

40.1 静态和电影不确定性学位 1286
40.2 基本和自然边界条件 1287

43.1 线性单元的 3D 转型 1333

44.1 结构的差异化 1341

45.1 不良条件的矩阵的影响 1369

46.1 对静态矩阵的内部元素强度定义 1377
46.2 静态决定的条件和电影不稳定 1384

47.1 线性弹性的功能 1441
47.2 总 势能 和 Hu-Washizu 表格的比较 1443

审阅稿

48.1 对 vw,cvw、pe、cpe 的方程式总结 1459
48.2 虚拟工作原则和补充虚拟工作的原则的替代路径 1460

49.1 形状功能在多元序列的解释 (1d & 2d) 1493
49.2 不同 单元 格式中的多元术语 (1d & 2d) 1493
49.3 梁 单元 形状功能的特点 1510
49.4 形状功能和天然衍生品 q8 单元 1515
49.5 诺达协调 (自然) Q9 单元 的 1516
49.6 形状功能为变量节点 单元 1518
49.7 T6 单元 的形状功能和衍生品 1519

51.1 Newton-Cotes 四角形公式的重量 1545
51.2 整合点和重量在间隔内为 gauss-quadrature 公式 $[-1, 1]$ 1548
51.3 数值积分 的坐标和重量在三角形上 1550
51.4 二元四方节点的自然协调 1551
51.5 四方元素的完整和缩小数字集成 1556
51.6 双重和准确的转移/流动 1558

53.1 不同方法的稳定条件 1592
53.2 不同类别结构的代表性蒸汽比例 1603

54.1 结构分析 水平表格 1611
54.2 不同分析水平的相互关系 1612

57.1 对 荷载 分析限制的动态和静态方法的比较 1665
57.2 比较低界限分析与静力推覆分析 1687
57.3 塑性 和较低的界限分析 1689

59.1 数学中 quasi-newton 方法与 结构力学 的暗示分析之间的平行性 1703
59.2 纽顿 • 拉夫森方法的变化 1706
59.3 负载控制算法在非线性分析中的比较 1710

61.1 多层国家决策 1744
61.2 灵活性与基于固度的单元比较 1771

62.1 限制 *vs.* 无限的 混凝土 弹性和强度特性 1803
62.2 模块 1844

63.1 柱 连接 1868
63.2 连接单元兼容性 1868
63.3 模型 “点击和点击” 选项 1874
63.4 恶化量化 1875
63.5 材料属性 1878
63.6 跨部分分类 1878
63.7 失败模式代码 1878

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

63.8 柱 地质学 1879
63.9 限制细节 1879
63.10限制细节 1880
63.11对直角增强列的测试总结 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 1881
63.1230 个实验测试的定义研究结果 (Haselton et al., 2008) 1883

64.1 本书中采用的术语不确定性量化和不确定性的分析 1888
64.2 描述皮尔森相互关系因子的质量描述 1890
64.3 MCS 和 LHS 的比较 1893
64.4 不确定性宣传和敏感性方法的比较 1906
64.5 敏感性分析和参数识别的独特但补充作用 1912

65.1 代表性配置输入 标签:xlsx 1931
65.2 参数识别程序中的主要功能 1934
65.3 由 spreadsheet reader 和 aggregation layer 使用的私人助理功能 1934
65.4 配置结构的主要领域 S 1934
65.5 选择的运行时间变量在 标识 M 1935

67.1 周期依赖的比例 Boore, Joyner, and Fumal, 1997 模型 1948
67.2 估计 V_S 基于网站类 1948

69.1 静力推覆分析和地震分析的比较 1986
69.2 Nj 方法结构设计 反应谱 1989
69.3 对 静力推覆分析 的序列分析 1996
69.4 应力 增强的 钢材 条品的特性 (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1) 2001
69.5 三个不同部分的瞬间容量在一系列轴力 2007
69.6 分析结果: 零环 2011
69.7 轴调整导致第一环形成 2012
69.8 分析结果: 一根手指 2012
69.9 Shear 调整导致第二环 2013
69.10分析结果; 两次倾斜 2013
69.11带到第三和第四轴的线调整 2014
69.12失败时的力量、瞬间和转移的集合 2015
69.13地震性结构分析方法的比较 2023

70.1 允许 Interstory Drift Ratios (IDR) 根据 ASCE 41-17 的不同性能级别 2037
70.2 损害指数边界和相应的结构国家 2037
70.3 需求能力比例 (DCR) 根据 FEMA 356 的限制 2037

72.1 各个目标建筑性能级别的结构和非结构组件损害范围 (表 C1-2) (FEMA-356, 2000) 2044
72.2 PBEE 1 和 PBEE 2 的比较 2047
72.3 连续的对比 vs. 差异性差异性的表现 2052
72.4 基于性能的地震工程的历史发展中的关键文件 (PBEE). 2058

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

B.1 材料重量单位 2064
B.2 建筑物中平均 Gross 恒载 2064
B.3 建筑材料的重量 2065
B.4 最低均匀分配的现场负载, (ICBO, 1994) 2066
B.5 风 速度 地面上方的变化 2066
B.6 C_e 对 风荷载 的比例, (ICBO, 1994) 2067
B.7 风 压力 因子 C_q, (ICBO, 1994) 2067
B.8 风和地震负载的重要因素, (ICBO, 1994) 2068
B.9 接近的风格设计 压力 p 普通风力抵抗建筑结构 2069
B.10 Z 不同地震区的因素, UBC1994 年 2070
B.11 S 地震 加载的位置比例, (ICBO, 1994) 2072
B.12 部分列表 R_W 各式各样的结构系统, (ICBO, 1994) 2073

G.1 阿拉米洛的节点坐标 (Pollalis, 1999) 2199
G.2 阿拉米洛的成员属性 (Pollalis, 1999) 2200
G.3 阿拉米洛的边界条件 (Pollalis, 1999) 2201
G.4 阿拉米洛的荷载组合 (Pollalis, 1999) 2201

L.1 线性方程式的解决方法 2692
L.2 上一篇: 左与右之间的比较 2701
L.3 矩阵 预条件和单一值分解的比较 (SVD) 2703

N.1 钢材 和 混凝土 结构的选择值 2730
N.2 可靠性 钢材 和 混凝土 结构 2730

O.1 笔记 2735
O.2 应变 代表性 2747
O.3 例子 结构分析 的边界条件 2763

P.1 数值 与期相匹配的结果, $T = \frac{4}{3}$ 第二 2778

R.1 多元化和差异化运营商之间的相似之处 2792

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

第二至第四卷例题目录（分析）

18.1 水晶 荷载 706
18.2 热扩展/应力 709
18.3 税务区 715
19.1 水静态 荷载 725
19.2 荷载 转换 725
19.3 简单支持 梁 726
19.4 平衡 荷载 727
19.5 四分之一 梁 728
19.6 3 加布式框架 729
19.7 包含支持 730
19.8 网络结构 731
19.9 飞机 平衡 732
19.10吉姆博酒 733
19.11排名: 平衡的浮动身体 (液化证据) 736
19.12体育运动员: 神经 738
20.1 桁架分析; 关节方法 745
20.2 3D 桁架 748
20.3 部分方法 751
20.4 简单的特鲁斯; 合体/矩阵方法 753
20.5 综合特鲁斯; 合体/矩阵方法 756
21.1 梁 與傾向 荷载 766
21.2 包含 框架 767
21.3 框架 與水位性 荷载 770
21.4 线性不同 荷载 771
21.5 框架; 例子弯曲天花板 772
21.6 相反 框架 773
21.7 3D 框架 777
22.1 双重融入 782
22.2 最大 挠度 784
22.3 最佳滑雪形状 785
22.4 浮动 梁 785
22.5 自行车轮子 790
22.6 直升式的春天 796
22.7 二元交换器 798
22.8 曲率 区域, cantilevered 梁 801
22.9 瞬间 曲率, 仅支持 梁 802
22.10最大 挠度 804
22.11框架 受温度加载 805
22.12塑料长度 808
22.13接口 梁; 点 荷载 810

审阅稿

22.14合成 梁; 变量 I . . . 811
23.1 挠度 加密式 梁 . . . 815
23.2 不统一的扭转 I 部分 . . . 825
24.1 梁 . . . 835
24.2 框架; 缺陷 . . . 836
24.3 框架, 转角 . . . 837
24.4 灵活的手套 . . . 838
24.5 索 支持的 cantilever 梁 . . . 840
24.6 Torsional 和 Flexural Deformation . . . 841
24.7 梁中的灵活和叶形变异 . . . 843
24.8 热效应在梁 . . . 844
24.9 管道 . . . 845
24.10桁架; 简单 . . . 846
24.11桁架; 复杂 . . . 847
24.12桁架 与初始交换器 . . . 848
24.13桁架 二次压力 . . . 848
24.14圆环 . . . 850
24.15春天 . . . 853
25.1 梁 與 tie rod . . . 862
25.2 钢材 构建 框架 分析 . . . 864
25.3 桁架, 一大强度 . . . 867
25.4 桁架: 两支救援力量 . . . 870
25.5 桁架: 热 荷载 . . . 872
25.6 春天支持 梁 . . . 873
25.7 皇后邮件 . . . 875
25.8 灵活性矩阵; 曲线泡沫 . . . 877
25.9 连续 梁 . . . 883
25.10连续 梁 . . . 883
27.1 彩色 梁 . . . 897
27.2 连续 梁 . . . 898
27.3 双间 梁 . . . 899
27.4 双螺旋 梁, 初始 挠度 . . . 900
27.5 框架 . . . 902
27.6 彩色盒子 . . . 904
27.7 连续 梁 . . . 908
27.8 Slope 挠度 / 瞬间分配 / Gauss-Seidel . . . 911
28.1 对一个简单支持的 梁 的影响线 . . . 914
28.2 簡單支持 梁 與超端 . . . 916
28.3 Müller-Breslau; Shear 影响线 . . . 918
28.4 Müller-Breslau; 瞬间 影响线 . . . 919
29.1 地质不稳定 . . . 921
29.2 荷载对灵活性变形的影响 . . . 922

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

29.3 Cantilever Beam 的大漏洞 924
29.4 屈曲 兩個粘固 柱 930
29.5 屈曲 的 折叠式 柱 933
29.6 屈曲 的固定 柱 934
29.7 屈曲 固定曲线 柱 936
29.8 柱 具有弹性支持 937
29.9 可限制 屈曲 939
29.10水塔 940
30.1 光学索 950
30.2 包含的光学索 952
30.3 索 甘道拉 953
30.4 包含 索 地质 964
30.5 包含 索 力量 965
30.6 盖伊德塔 966
30.7 关闭桥梁 968
30.8 不可延伸的 索; 温度 969
30.9 可扩展 索; sag 969
30.10可扩展 索; 热 970
30.11可扩展 索; 前列 970
30.12Sag 在一个倾斜的索 975
30.13Trolley 公交车电缆支持 975
30.14加泰罗尼亚 vs Parabola 980
31.1 荷载的失败; 胡萝卜的方法 993
32.1 三根相关术语弓; 点负载; 分析 1009
32.2 四分之三的拱; 点荷载 1011
32.3 三根相关术语弓; 单一负载 1012
32.4 无缝循环 拱 1015
32.5 完美的拱 1030
32.6 三角形 模拟 拱 1031
32.7 兩個垂直的平凡變量交叉部分 拱 1031
32.8 无情的模拟 拱 1037
32.9 热 荷载 在 Parabolic 拱 上 1042
32.10球旋转 1043
32.11拱; 点 荷载 1048
33.1 设计静态不定义的拱 1050
33.2 温度变化在一个 拱 1056
34.1 薄相反厚 板 理想化 1064
34.2 恢复 板 瞬间结果的压力 1067
34.3 简单支持的平方 板 在统一的 压力 1068
34.4 板 挠度 对厚度的敏感性 1069
34.5 圆形 板 模型 压力 1073
35.1 膜的比较 & 壳 1121

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

35.2 圆形设计 壳 1132
36.1 计算机 $\omega_n, T_n,$ 和 f_n 为 SDOF 系统 1148
36.2 从 Logarithmic Decreement 中估计 1152
36.3 和谐反应: 增强和阶段 1154
36.4 蒸发 SDOF 系统的单元冲动反应 1156
36.5 突然步 荷载: 动态增强因素的 2 1157
36.6 直角脉冲 荷载 和冲击频谱 1158
36.7 频率回应定期机器兩個和諧的力量 1161
36.8 使用响应频谱的单层框架的地震设计 1164
36.9 3DOF 板建筑在地震负载下的模块分析 1167
36.10固有频率 的 钢材 脚桥和步行者反射检查 1170
36.11相当于 黏性阻尼 从双重催眠路径 1173
36.12二元性需求和强力减少为一钢筋混凝土 框架 1174
36.13设计一台突发的质量蒸汽机, 用于高楼 1176
36.14建造一座孤立的医院建筑 1178
37.1 ASD; 灵活性 1183
37.2 极限强度; 评论 1191
37.3 极限强度; 设计 I 1192
37.4 极限强度; 设计 II 1192
37.5 精确分析 1193
37.6 R/C 柱 等。c 已知 1199
37.7 R/C 柱 等。e 已知 1201
37.8 案例研究:Walnut Lane Bridge 1205
38.1 门户方法; 低升楼 1220
38.2 马特拉布解决方案 1232
38.3 Cantilever 方法; 高升建筑 1234
38.4 Shaft 子系统 1236
38.5 混凝土 Shear 墙壁 1237
38.6 威胁的墙壁 1240
38.7 建造大约转 挠度 1245
39.1 杜勒斯机场 1249
39.2 艾菲尔塔 1255
39.3 杂志一般 1262
39.4 乔治华盛顿桥 1266
39.5 设计双环拱 1272
39.6 温度变化在一个 拱 1281
39.7 平凡的拱与分裂变异 I 1283
42.1 正统 梁 1310
42.2 正统 框架 1312
42.3 网格 1319
42.4 混合式 框架 1323
42.5 混合网络 1327

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

44.1 框架 1355
44.2 梁 1361
44.3 桁架 1366
45.1 无条件 1378
46.1 静态定义 truss statics matrix 1385
46.2 梁 静态 矩阵 1386
46.3 静态不定义 桁架 静体 矩阵 1387
46.4 解放力量的选择 1389
46.5 Kinematics Matrix: truss 例子 1393
46.6 柔度矩阵 1397
46.7 灵活性到坚固 1399
46.8 曲线元素的密度矩阵 1400
46.9 合并转型 1403
46.10框架的合成转型 1405
47.1 标签:Axial 1436
47.2 标签: flexure 1437
47.3 汉密尔顿 1445
48.1 PCVW, 粘贴的梁 1471
48.2 四半循环 拱 1472
48.3 PVW, 粘贴的 Cantilevered 梁 1476
48.4 PTPE, 春天和质量 1480
48.5 PTPE; 粘贴 梁 与变量 I 1480
48.6 非线性弹性 桁架 1483
48.7 卡斯蒂格利亚诺 2; cantilevered 梁 1485
48.8 卡斯蒂格利亚诺 2; 使用加斯蒂里亚诺的第二理论, 单一负载的喷雾的破裂 . . . 1485
48.9 卡斯蒂格利亚诺 2、非线性桁架 1486
48.10卡斯蒂格利亚诺 2 号, 春天挠度 1487
48.11Rayleigh Ritz 均匀充电 仅支持 梁 1488
48.12变量方法 1489
51.1 雅各比亚运营商 1550
52.1 检查 1D 轴成员的同步性和积极定义性 1570
52.2 强烈的振动 1574
52.3 刚度矩阵 的 梁 单元 1579
52.4 热转换 1581
53.1 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应 1589
53.2 瑞利阻尼 加密对一层建筑的比例 1594
53.3 解析基线: 从一般初始条件自由振动 1595
53.4 Euler 方法 1597
53.5 中央差异稳定时间步骤 1607
53.6 波速和钢材 tie-rod 的轴自然频率 1609
55.1 模块 1643
56.1 非线性分区分析; 解析 1649

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

56.2 平板; 钢材 1652
56.3 平板; 混凝土/ACI 1656
56.4 时刻 曲率 的 I R/C 部分 1661
57.1 固定 梁; 中心 荷载 1675
57.2 固定 梁; 折扣 荷载 1675
57.3 连续 梁 1676
57.4 正统 框架 1676
57.5 包含 框架 1677
57.6 提交的 Cantiliver I 1681
57.7 提交的 Cantiliver II 1681
57.8 固定 梁 1682
57.9 包含 框架 1683
57.10广场弱点 1688
57.11直角弱点 1691
59.1 纽顿的方法, 斯卡拉 1704
59.2 纽顿的方法; 向量 1707
60.1 柱 屈曲 1727
60.2 框架 屈曲; Matlab 解决方案 1729
60.3 框架 屈曲; 数学解决方案 1732
60.4 荷载对灵活性变形的影响 1732
60.5 Cantilever Beam 的大漏洞 1737
60.6 包装负载无 $\mathbf{K}_{geom}$ 1742
62.1 塑性铰 在一个 钢材 柱 1844
63.1 柱 模型 1880
63.2 梁 模型 1881
64.1 相同性 矩阵 1898
64.2 拉丁 Hypercube: 工作例子与两个变量 1902
64.3 点估计方法例子 1904
64.4 泰勒系列 有限差分法 例子 1906
64.5 多元化混乱扩张 1907
64.6 莫里斯方法 1912
64.7 莫里斯方法; 重要变量的识别 1915
65.1 适合非线性超级模型 1928
65.2 巴耶西复兴与平方基和 Metropolis–Hastings 样品 1933
67.1 地震 危险性分析 1975
68.1 返回期计算 1982
69.1 请求曲线的例子 1993
69.2 Push-over 分析; 实用例子 1996
72.1 完整的 PBEE 例子 2062
B.1 风荷载 2076
B.2 地震在一个框架上加载 2081
B.3 地震 荷载 在高楼上 2083

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

B.4 活载 减少 I 2086
B.5 活载 减少 II 2087
K.1 FFT 2693
L.1 Gauss 排除 2711
L.2 加乌斯 - 约旦排除 2712
L.3 **lu** 解体 2713
L.4 霍尔斯基的分裂 2714
L.5 加斯西德尔 2715
L.6 盖斯 • 塞德尔 2716
L.7 单一价值分解 2716
L.8 预条件 2717
N.1 可靠指标 2738
R.1 向曲线倾斜 2802
R.2 向量的差异 2804
R.3 学士学位: 一个规模的领域 I 2805
R.4 (二) 斯卡拉字段的格拉迪特 2806
R.5 一个向量字段的格拉迪特 2808
R.6 差异理论的物理解释 2810

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

第二至第四卷要点目录（分析）

17.1 结构分析 要求 690
17.2 结构设计要求 690
18.1 动力分析的条件 705
19.1 平衡 方程式 721
19.2 自由体图 724
21.1 结构中的内部力量 761
21.2 ; 差异性 764
21.3 时刻; 差异 764
21.4 首頁 > Integral 765
21.5 时刻: 完整 765
22.1 区别平衡灵活性管理 782
22.2 提议; 第一 曲率 区域理论 801
22.3 提议: 第二个曲率区域理论 801
23.1 Shear 歪曲 819
23.2 统一和非统一 扭转 823
24.1 热力学第一法则 831
24.2 原则的 (补充) 虚功 832
24.3 麦克斯威尔 • 贝蒂的相互理论 833
25.1 灵活性方程式 862
26.1 强度位移关系在一个梁 891
27.1 挠度 方法 896
27.2 瞬间分配 908
27.3 瞬间分销, 折叠 挠度 和 Gauss-Seidel 911
28.1 影响线 913
28.2 Mü 布雷斯拉夫原则 918
30.1 一般 索 952
32.1 爱迪的理论 1009
40.1 自由度 1291
40.2 不同 单元 的 自由度 1293
41.1 不同 单元 类型的内部力量 1296
44.1 心脏的直接刚度法 1347
45.1 刚度矩阵 自己的值 1373
45.2 单元 刚度矩阵 特性 1373
45.3 条件号码 1374
45.4 准确性和不良状态 1377
46.1 灵活性密切关系 1397
46.2 灵活性密切关系 1398
46.3 合并转型 1403
47.1 汉密尔顿的原则 1442
48.1 热力学国家第一法则 1457

审阅稿

48.2 虚拟补充工作原则 1471
48.3 虚拟位移的原理 1475
48.4 势能的静态值原则 1479
48.5 卡斯蒂格利亚诺的第一理论 1482
48.6 卡斯蒂格利昂的第二个理论 1484
50.1 刚度矩阵 和 单元 力量 1532
50.2 转型标准 1535
57.1 顶部相关理论 1673
57.2 下限理论 1679
63.1 關於 Finite 单元 研究的角色 1873

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Part II

导论：基础与解析方法

这个卷提供了几乎唯一的综合结构分析处理，从基本原则到先进的计算和概率方法在一个统一的框架内。使用一致的评级和一贯的哲学方法，我把极大的重视严格的理论基础，承认对基本原则的深入理解，而不是简单的程序设施，对于精心工程判断和信任地应用方法至超越文本中遇到的问题至关重要。这不是对弱心工程师内容的表面处理的工作；它要求和奖励真正的智力参与。

从经典方法到能源原则，矩阵结构分析，终端元素，非线性分析，并在基于性能的地震工程的高峰，这项工作表明，结构分析的真正掌握依赖于超越任何特定计算工具或设计代码的理论洞察力。

工程师创造了还不存在的东西。你不能看一眼你在书中要做什么。那么，你做什么？你回到理论。它允许你绘制以前所做的一切，并合成一些新的东西。它允许你看到事物，并建立其他人不会想要的连接。

工程学生这一代，特别是应该掌握理论。目前，工程师的工作很大一部分是计算事物。但我认为人工智能很快将带我们进入后计算时代，在那里一切都是自动完成的。在这个时代，具有深度理论教育的工程师将真正突出。

Baker, 2023 William Baker: Structural Engineer and Problem Solver

审阅稿

17 引入

摘要

本书第一章介绍了其原则、应用和建筑行业专业人员的独特角色的一般概述。起初，它展示了一个广泛的观点结构分析，设置了更深入探索主题的阶段。它描述了建筑师与结构工程师相比的具体责任和前景。该章节的核心是致力于结构工程的基本方面，包括设计、分析和安全评估。讨论扩展到与结构分析相互连接的各个学科，强调该领域的跨学科性质。该章节的一个重要部分介绍了内部力量的概念，建议在某些背景下使用它们作为应力计算的简化替代品。这种方法使人们能够更直观地了解在一个结构中如何管理力量。接下来，章节探讨了各种类型的负载传输元素 - 如线条、列和轴承 - 以及它们在整个结构中分发负载中的作用。最后，章节通过从最基本的到复杂的各式各样的结构进行审查结束。

17.1 大图像 679
17.1.1 建筑 680
17.1.2 结构工程 680
17.1.3 学科集成在结构分析 683
17.2 单元: 主要内部力量 683
17.3 荷载 转换 单元 683
17.4 结构类型 684
17.5 工程工具的转型 688
17.6 结构工程 课程 689

17.1 大图像

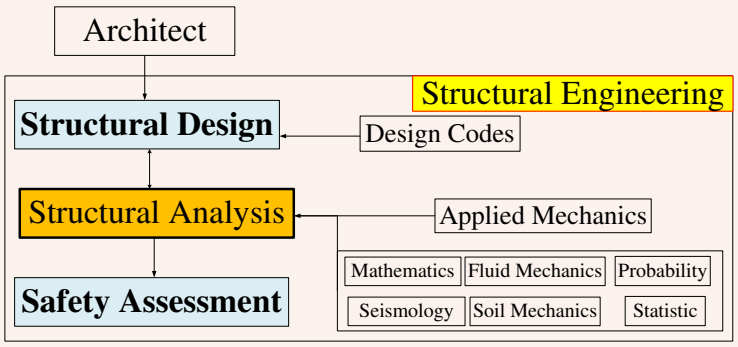


图 17.1: 结构分析; 大图像

1 首先，结构工程真的专注于一个 (或更多) 下列任务，图 17.1:

设计 由 新 结构 (无论是建筑物、飞机还是潜艇。).

分析 由 新 结构 (再建建筑物、飞机、潜艇或其他).

安全评估 任何结构。

17.1.1 建筑

2 建筑包括设计和建造建筑和其他物理结构的艺术和科学。它超越了简单的建设，包括美学、功能性、文化背景和环境可持续性的考虑。

3 建筑师是设计和规划结构的专业人士，他们与客户密切合作，将他们的需求和愿望转化为实用的建筑设计。

4 建筑涉及创造空间，不仅为实用目的服务，而且以有意义的方式引发情绪、灵感和贡献建造的环境。

5 这是一个多学科领域，基于工程，艺术，社会学，心理学和环境科学的原则，创造结构，既美观愉快又功能。建筑在塑造城市、社区和社会方面起着重要作用，反映文化价值观、技术进步以及社会愿望。

6 建筑师 应力 的整体，而不是基本的方法设计。在设计过程中，他们概念化了一个空间形状的计划。作为一个整体系统。他们是一般主义者。

7 建筑设计必须遵守各种限制 基本上相同的是维特鲁维亚两千年前提出的。(§6.3.1).

功能性: 采用的结构对该结构建造的目的的影响。

美学: 建筑师经常对工程师提出了他的美学担忧。这可能会对结构系统造成严重的限制。

经济: 要记住，一个结构的两个主要组成部分是工作和材料。设计成本相对可忽视。

8 术语 “建筑” 在复兴时期获得广泛的认可因为对古典建筑的兴趣恢复了，新的建筑风格和理论出现。建筑师如 Andrea Palladio、Leon Battista Alberti 和 Filippo Brunelleschi 在塑造建筑辩论和建立建筑作为尊敬的职业中发挥了关键作用。(章节 15).

17.1.2 结构工程

9 结构工程 是非仅民用工程的分支 [1] 但也机械、海上和航空空间，处理结构的设计和分析。

10 结构工程师负责确保建筑物安全、稳定，能够抵抗他们一生中可能遭受的负担和力量。

11 结构工程师的主要作用是设计可以支座自己的重量以及他们可能从环境因素中经历的负担的结构。

12 他们必须考虑各种因素，包括使用的材料、建筑规则和法规。(当适用时)，环境条件，以及结构的意图使用。

13 正如我们讨论的 §11.2，这个术语 “结构工程” 直到 19 世纪中期才出现，作为当时成熟的机械领域的自然延伸。(专注于单一结构成员). 事实上，可以说结构分析只是应用的机械对单元系统。

14 历史上，我们首先 “建筑师” (吉。金字塔的伊姆霍特普，佛罗伦萨穹顶的布鲁内莱斯基).

[1] 历史上，只有两种类型的工程: 军事和民用。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

17.1.2.1 结构设计

15 这是结构工程师承担的两个主要任务之一。

16 基于建筑绘图, 无论是建物还是汽车。) 随后分析, 工程师设计建筑或基础设施项目的结构单元以安全地运载负载。其中包括选择合适的材料。(如 混凝土, 钢材, 木材或合成材料), 确定结构成员的尺寸和地质 (如标签、列、板和基础), 并详细说明这些单元之间的联系。请注意, 他是一个以色列的过程, 如讨论在 §37.1.1.

17 为 (远方) 更多了解建筑师与结构工程师之间的关系, 读者提到章节 15.

18 结构设计必须符合现有 **设计代码**. 此事进一步讨论在 §37.

19 结构设计的不同层次:

概念设计: 这个初步阶段涉及基于项目要求、地点条件和建筑考虑的结构创建思想和概念。工程师和建筑师共同开发一个基本的设计概念, 描述结构的形状、功能和整体布局。

初步设计: 在这个阶段, 工程师进行初步分析和计算来评估概念设计的可行性。他们可以进行大约的结构分析, 以估计负载, 选择潜在的结构系统, 并确定预先成员尺寸。目标是发展对结构要求的更详细了解, 并确定任何重大设计挑战。

详细设计: 在这个阶段, 工程师改进设计基于更详细的分析和计算。它们指定了所有结构单元的精确尺寸、材料和连接, 包括线条、列、板块和基础。详细的绘图、计划和规格创建, 以便向承包商和建筑团队传达设计要求。

建筑设计: 这个设计层面专注于为建筑做好准备。工程师开发建设计划和序列, 包括临时支座系统、形状工作和轴承, 以确保建筑现场设计的安全和高效执行。他们还讨论了与建筑有关的考虑, 如材料可用性、现场物流和规划。

评估和回归: 在现有结构需要评估或康复的情况下, 工程师可以进行评估和回归设计。这包括对结构进行检查, 评估其状况, 识别任何缺点或弱点, 并开发重复调整策略来加强或升级结构以满足当前的安全标准和性能要求。

这些结构设计的水平代表了从概念化到建设的进步, 每个阶段都有越来越多的细节和改进。建筑师、工程师、承包商和其他利益相关者之间的有效合作, 在每个设计层面都能取得成功。

17.1.2.2 分析

有关历史背景，请参见 §??

20 虽然这正是本书所涵盖的主题, 分析本身从来没有终结, 它只是设计一个新的结构或评估现有结构的安全性的基本步骤。

21 分析可以从单手计算中分开 (如《二书》中所描述) 计算机模拟 (书 III), 到复杂 非线性分析 (书 4).

22 从机械的角度来看,

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 17.1: 结构分析 要求

所有结构分析解决方案必须满足

1. 静态 (平衡)
2. 本构关系 (压力冲动或暴力驱逐关系)
3. 电影学 (转移或压力/转移关系的兼容性)

23 在结构设计过程中, 一个被赋予一组力量和结构组件的尺寸。(, 柱子, 弱点) 然后为

钢材 / 木材结构 选择合适的部分。

钢筋混凝土: 确定 单元 的尺寸和内部强化 (增强条的数量和尺寸).

24 对于新结构来说, 它是分析与设计之间的异常过程。首先, 一个初步设计是用橡胶规则进行的。(最熟悉的工程师与设计经验) 分析, 然后重新设计, 章节 37.

25 经过设计过程 (面对力量)[2] 然后, 我们必须检查

可用性: 缺陷, 在应用的 荷载 下切断宽度。与设计代码中指定的可接受值进行比较。

失败: 与所应用的负载时间相比。适当的安全因素。

如果设计被认为是不接受的, 那么它必须修改和重新分析。

26 总的来说, 分析总是需要的。

定义 17.2: 结构设计要求

结构设计必须满足:

1. 强度 ($\sigma < \sigma_f$)
2. 精力 (“小小” 歪曲)
3. 稳定性 (屈曲, 折叠)

27 有趣的 Torroja (§15.4.6) 考虑到计算作为一个后思考, 只需要评估设计的可行性。

17.1.2.3 安全评估

28 这对于结构工程师来说是一个相对较新的任务。它源于结构的衰老, 以及需要重新评估其结构完整性。

29 错误地说, 一些工程师根据设计规则的遵守来评估安全。[3].

[2]请注意, 对于飞过海洋的飞机, 服务性 (能保持裂缝的能力) 接下来的火, 后来的力量。

[3]例如, 当 Seabrook 核容器建筑发现由于阿尔卡利合并反应而遭到广泛的破裂时, 核监管委员会在该结构的所有者 “双重” ACI-318 设计代码, 以评估安全!

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30 不可变的这个步骤, 是分析最复杂之一, 与设计相反。(线性弹性) 对于安全评估, 我们不能再假设答案是线性的。(可能是由于广泛的裂缝或不可逆转的变形。) 分析必须是非线性的。

17.1.3 学科集成在结构分析

31 结构分析, 作为一个学科, 包括从多个学科的原则的整合。有些人可能很明显 (机械) 或者更少的是:

机械 (坚固的) 是个人成员的理解, 受压力。相反, 结构分析 指向一个集合的 单元, 每一个由相关的基本方程式在机械学统治。

数学 一种变量计算是无数的, 多变量的计算 (向量 算法) 线性 algebra (基于计算机的方法在书 III), 差异方程式, 变量方法。

流体力学 例如, 风荷载的 Bernouilli 方程式是一个重要的因素。

土壤机械 重要的是要确定结构支持的类型。

地震学 它是必不可少的为地震分析提供地面动作加速度。

概率 (和统计) 它们是对结构安全的评估的重要工具。概率分布 功能 (PDF) 基于实验室测试的统计分析, 而需求是基于可能发生负载的 PDF。

17.2 单元: 主要内部力量

32 内在的力量和压力只是人类创造的有用概念。只有压力才能物理测量。这些可以通过 Young 的模块与压力有关, 然后它们可以在十字路口中集成, 以定义内部轴、相关术语、灵活和旋转力量。(§).

33 我将提到主要内部部队如下:

轴心 *N*: 电缆, 桁架 单元, 架子, 膜, 壳

灵活 *M*: 布, 框架, 网, 板块

托尔西亚 *T*: 网,3D 框架

谢尔 *V*: 框架、网路、墙壁。

34 事实上, 根据结构类型, 我们可能有几个内部力量的组合。§17.4.

17.3 荷载 转换 单元

35 要记住, 在荷载下, 结构变形, 我们可以测量应变. 然后, 通过弹性的假设, 我们将应变与压力相关联 (不能测量的 為 *S* 然后, 为了简单, 我们用它们的整体价值来替换压力。§O.9.

36 因此, 我们有四个基本的内部力量, 图 17.2

轴心: 电缆, 桁架 单元, 架子, 膜, 壳

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

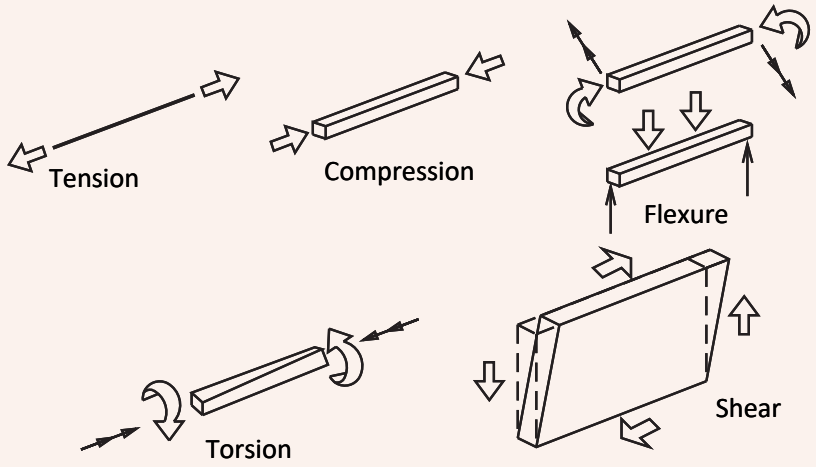


图 17.2: 结构中的力量类型 单元 (1d)

灵活的: 布, 框架, 网, 板块

转型: 网,3D 框架

谢尔: 框架、网路、墙壁。

37 请注意, 不同类型的内部力量在不同的安排中共存, 取决于单元类型 §40.4.

17.4 结构类型

38 结构可以分类如下:

紧张 & 压缩结构: 只有, 没有叶子, 灵活性, 或扭转

索 (紧张仅): 钢材 电缆的高强度, 结合以简单的电压效率, 使电缆理想结构性单元延伸大距离, 如桥梁和天花板, 图 17.3

档案 (大多数压缩) 是 A "逆转 索 结构". 在一 arch, 我们试图尽量减少灵活性, 并通过轴转移负载。只有力量。花园用于大宽的天花板和桥梁, 图 17.4

威胁 有 *PIN* **连接** 单元 可以传输只有轴力 (紧张和压缩). 单元 连接, 无论是被锁定、切割或 **彩色板**连接器但是, 由于建设细节, 可能有 **二次压力** 由于相对严格的连接。火柴用于天花板、屋顶、桥梁、电塔。图 17.5

邮件和 Beams: 基本上是一个支持列, 其中一个 "梁" 安息, 图 17.6, 和 17.7.

比特币: ar, 灵活性, 有时是轴力。记住这 $\sigma = \frac{Mc}{I}$ 只适用于 **沙特比亚姆**, 即范围/深度至少等于五。虽然 R/C 斑点主要是直角或 T 形状, 但 钢材 斑點通常我形成 (如果顶部的火柴不适当固定, 它们可以泡沫, 所以我们必须有 **立法者**).

框架: 荷载 与结构相匹配。轴, Shear, Flexure (在 2D 结构中的一个轴关于 3D 结构中的

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

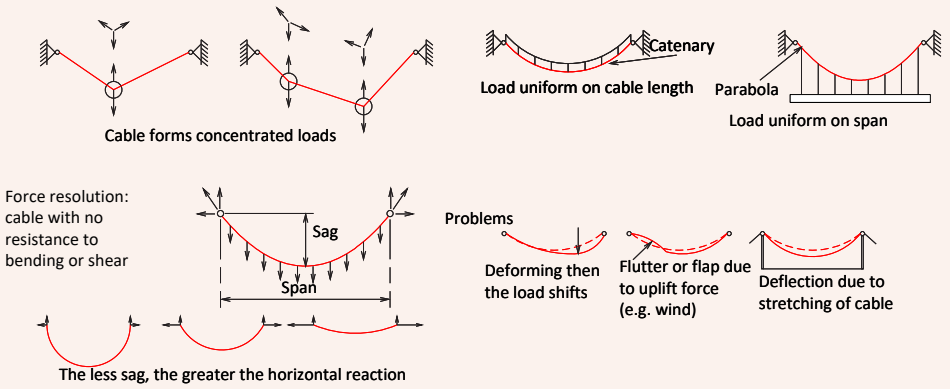


图 17.3: 索系统的基本方面

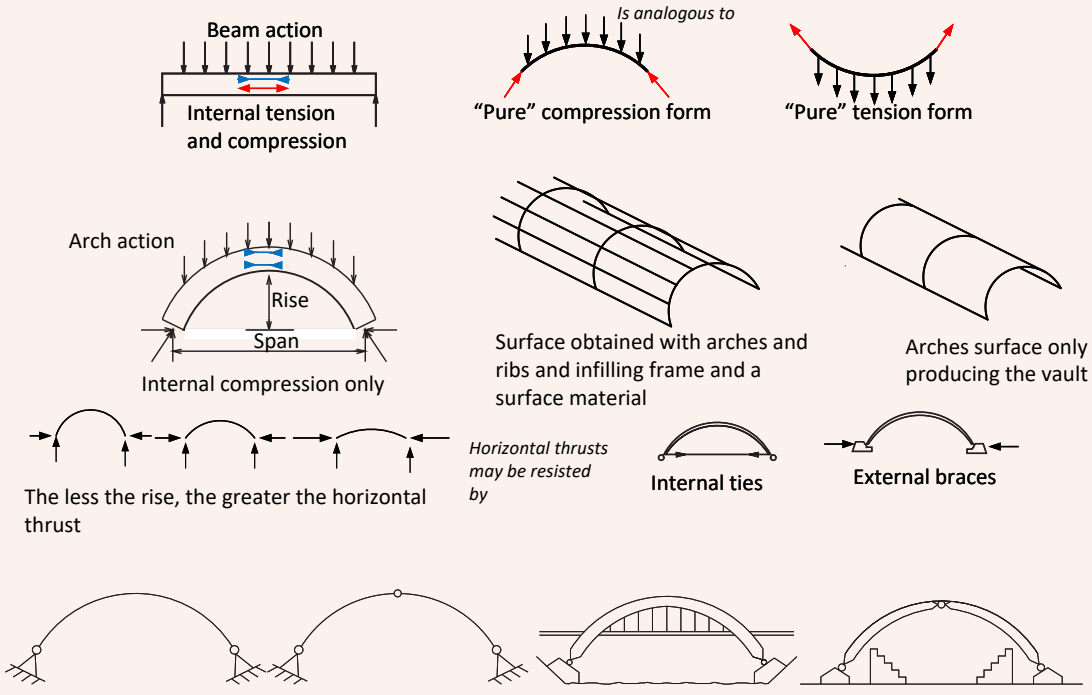


图 17.4: 档案的基本方面

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

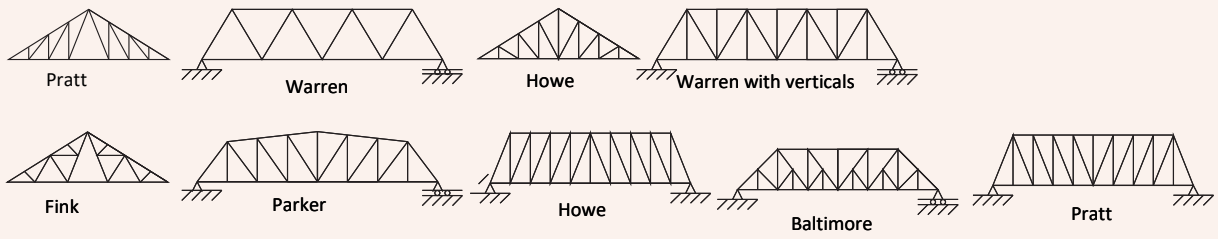


图 17.5: 特斯拉的类型

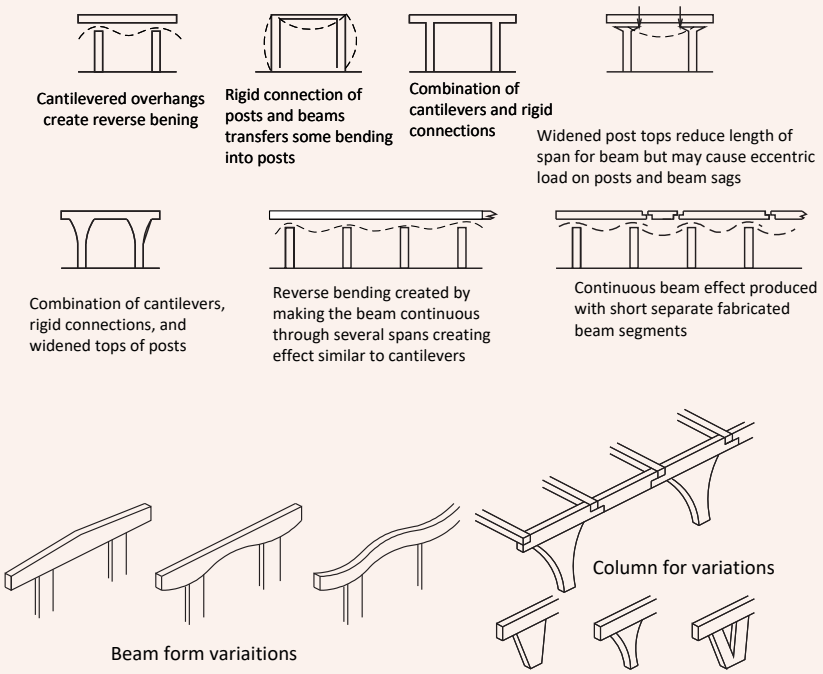


图 17.6: 邮件和 Beams 配置的变量

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

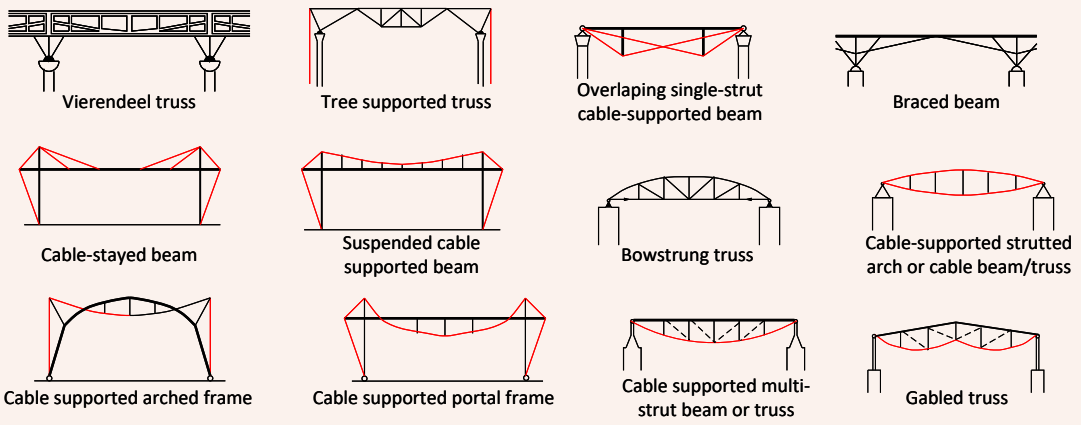


图 17.7: 不同 梁 类型

两个轴), 扭转 (只有在 3D). 框架 由至少一个垂直成员组成 (梁) 严格连接到垂直的 [4]. 垂直成员可能有不同的边界条件 (哪些是通常由土壤条件管理). 框架广泛用于房屋和建筑物, 图 17.8.

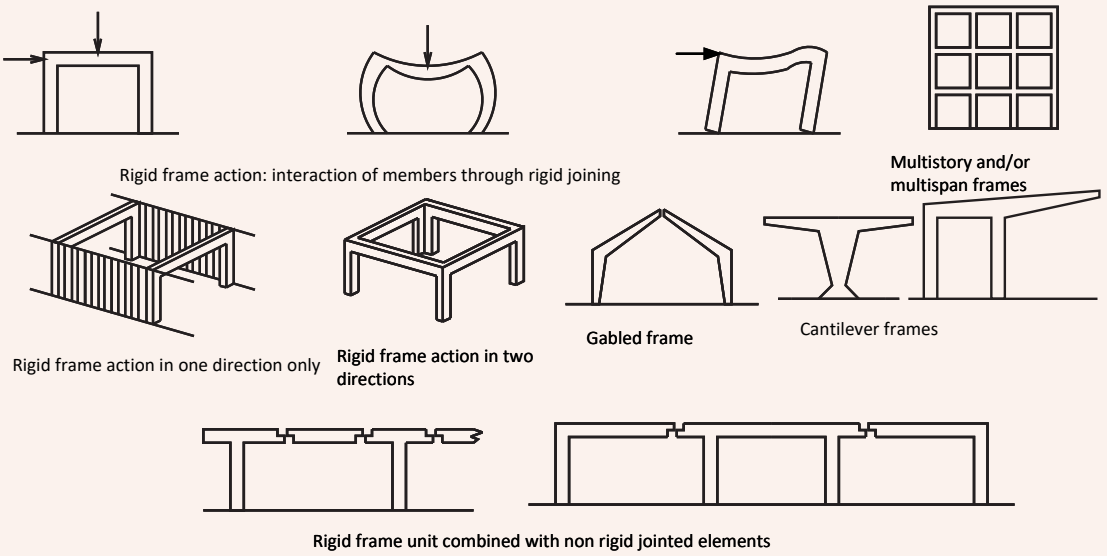


图 17.8: 基于框架的基本形式

网和板块: 荷载 是对结构的平面正方形。灵活性, 光线, 扭转。在一个网络中, 射线位于右角, 导致负载的两路分散。由于泡沫之间的紧密连接, 额外的硬度它是由会员的逆转抵抗引入。网路也可以 **被骗** 实现更高的效率, 如果比例不接近一个。平板是平坦的, 硬

[4]和框架结构的先驱是 **邮件和 Lintel** 信件是垂直的成员, 在那里线条是简单地提交。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

的, 两维结构, 传递垂直荷载 以其支持。主要用于 **地板滑板**. **包装板** 是跨越和长度的组合。梁 行动。用于长长的天花板。请注意, 板 可能被填写圆形而不是长度。F 的板块主要用作长长的天花板。但是, 他们可以也用作垂直墙到支座垂直和水平负载。

成员: 3D 结构由灵活的 2D 表面抵抗组成只是紧张。它们通常支持索, 并用于帐篷和长长的天花板图 17.9.

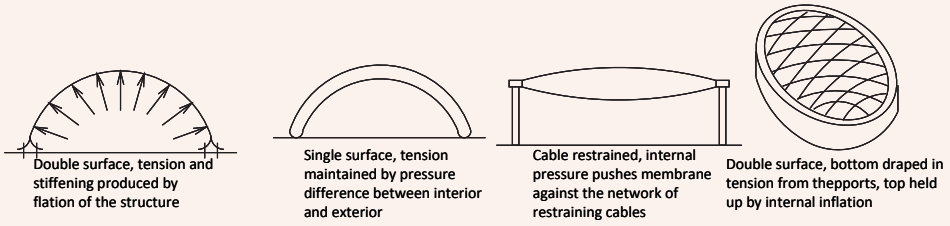


图 17.9: 空气支持结构的例子

沙特: 3D 结构由曲线 2D 表面组成, 它们通常是为了传达压缩的轴性压力而形成的, 图 17.10. Shells 按 曲率 的分类。

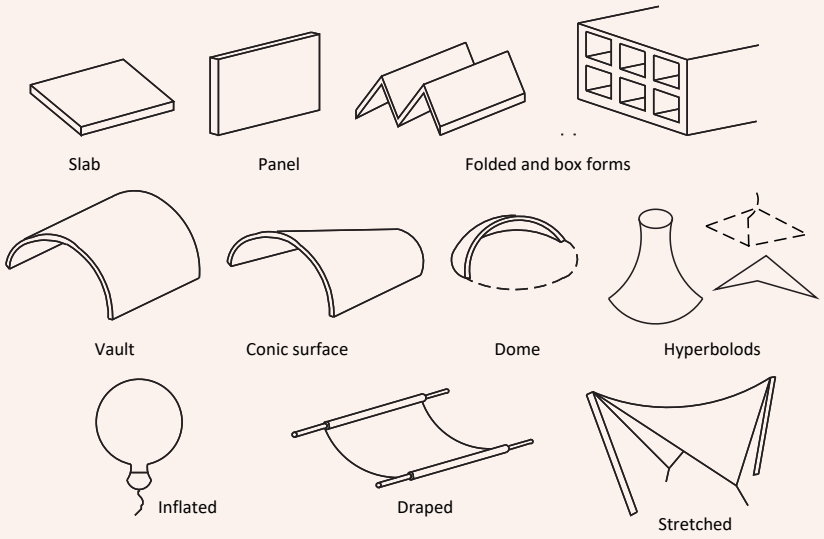


图 17.10: 基本形状 Shell

17.5 工程工具的转型

[39] 作为一名教师, 我不得不承认我们生活在一个不断发展的世界中, 我们必须适应。**之前** 我们的学生。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

40 到目前为止, 所有学生都从中学开始使用计算机。(如果不是游戏之前).

41 大多数计算机程序不再有手册, 或学习曲线。为了获得公众信任和支座的软件, 它必须简单、优雅、直观、可售。这影响了:

写作 计算机已经革命了我们的写作技能, 因为使用计算机的词汇处理越来越普遍。学生不再

- 收购金属 (用手写的技巧, 使用写作工具).
- 在把想法放在纸上之前仔细思考。(易于复制/删除/折叠).

而不是:

- WYSIWYG Word 处理器 (伊。词语).
- 文档编制系统与平板文本标记,LaTeX (与 HTML 相似).
- 计算机软件用于验证、验证和文档化数学计算, 如 MathCad[5].

计算机 它也發展了廣泛, 早在我們使用 Abaqus, 滑板規則, 我們有能力

- 执行心理计算 (算法计算只使用人类大脑) 是的。78×3.
- 得到数字的感觉 $3200 \times 400 = 1,280,000$
- 执行简单的三角形身份, 计算操作 $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ 或 $\int \frac{1}{x} dx$

然而, 目前我们依靠 (几乎盲目) 在: 可编程计算器,Excel,Matlab, 数学或 Mapple,Mathcad。

编程语言 从 Basic、Pascal、Fortran 90、Fortrann 2018、C、C++、Perl、Python 和当然, 我错过了很多。

草案 它也从编写桌子中发展出来, “蓝印”, Auto-CAD, 固体工作, BIM (构建信息模型) 再回, 等等。

42 简单地说, 我们应该在不久的将来期望更多的创新, 可能燃烧的 BAI。

43 提斯提出了这个问题, 我们真的还需要向未来的工程师教授这本书的一些材料吗?

17.6 结构工程 课程

44 结构工程 教育可以从两个观点之一:

建筑: 从整体设计开始, 然后转向细节分析。

教育: 基本的, 而不是全球的方法。焦点在于個别的結構 单元 而不是總是整體系統。

CVEN3525 将寻求这两种方法之间的平衡。

[5]我的学生预计将与 MathCad 一起提交所有家务。尽管在行业中广泛使用, 但遗憾的是, 太多的同事担心学生学习的另一个软件!

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

45 这是一个漫长的课程系列中只有第三个可以采取的在 结构工程, 图 17.11

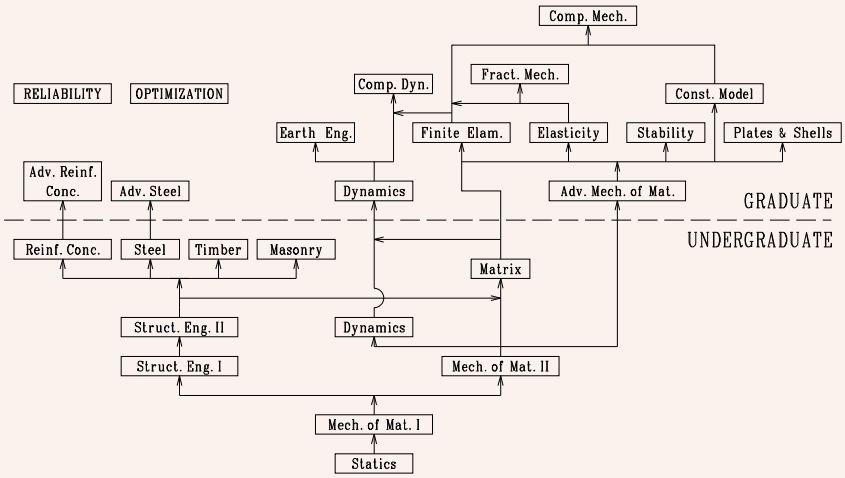


图 17.11: 结构工程课程的序列

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

18 负载

摘要

本章是对负载概念的基本介绍, 这些负载对结构分析至关重要。

拒绝传统的文本依赖于实验方程式和广泛的表格, 这章简单地提供了一个全面的分类和详细讨论各种类型的负载。该分类包括垂直负载, 如死和活的负载以及侧负载包括风力和地震力量。特别注意到动态的衍生。(风) 压力方程式和不同条件下负载行为的讨论。

然而, 对负载的实验性方法仍然被附件所涵盖 *B*

该章节还介绍了不那么常见的主题, 如影响和次要负担, 这些问题对于了解结构分析中的挑战范围至关重要。通过分散每个 荷载 类型的特性和影响, 本章节将一个强大的 基础 为进一步探索这些力量下的结构性行为。

18.1 引入 691
18.2 货物分类 691
18.2.1 垂直 692
18.2.2 侧面 693
18.2.3 水道和地球 697
18.2.4 效应 荷载 698
18.2.5 二级 699
18.2.6 热量 700
18.3 考虑 701
18.3.1 计划的负载 701
18.3.2 荷载 定位 702
18.3.3 荷载 组合 703
18.3.4 荷载 路径 703
18.3.5 税务区 706
18.3.6 结构性反应 708

18.1 引入

1 如果没有负载, 结构分析将是可折叠的。负担是结构的主要压力因素, 理解它们至关重要。事实上, 结构的基本目的是从点转移一个荷载。*A* 点数 *B*.

2 因此, 这通常是任何结构分析文本中的第一个数字章节。它涵盖了两个主要主题:A) 负载类型和相关问题; 和 b) 基于代码的实验方程式, 以确定风和地震负载。

3 在我看来, 这些实验方程式在一本书中可能令人困惑, 每一个主题都基于物理学/机械学, 并源自合理衍生。因此, 我把负载的覆盖分为两部分: 本章将专注于荷载分类和相关问题, 而所有这些基于代码的方法将在附件中讨论。B.

18.2 货物分类

4 要详细地覆盖货物, 请参阅 “普遍建筑规则” (UBC), (ICBO, 1994) 至於 The “建筑和其他结构的设计负载最低” (ASCE/SEI 7-16, 2017).

审阅稿

18.2.1 垂直

结构中的垂直负载是指由于重力而向下行动的力量。

垂直负载分为两个类别之一

死负载:

这些是由结构本身的重量产生的永久负载, 包括单元如墙壁、地板、天花板和固定永久设备。死负是静态和可预测的, 随着时间的推移保持稳定。

在设计过程中, 死负必须在每个设计周期结束时进行估计和验证。这使得设计过程 **以色列。**

直播负载:

这些是由使用结构造成的变量负载, 如人、家具、车辆和移动设备。直播负载可以在大小和位置上变化, 使其比死亡负载更不可预测。

在分析中, 荷载的配置应该是这样, 以便其效果 (Shear / 时刻) 被最大限度。

统计方法用于确定均匀分布的静态荷载相当于占领者最大浓度的重量。这些负载再次被定义为 ICBO, 1994 和 ASCE/SEI 7-16, 2017.

雪 荷载

天花板雪 荷载 因 **地理位置及高度**. 它们在 20 至 45 psf, 图 18.1.

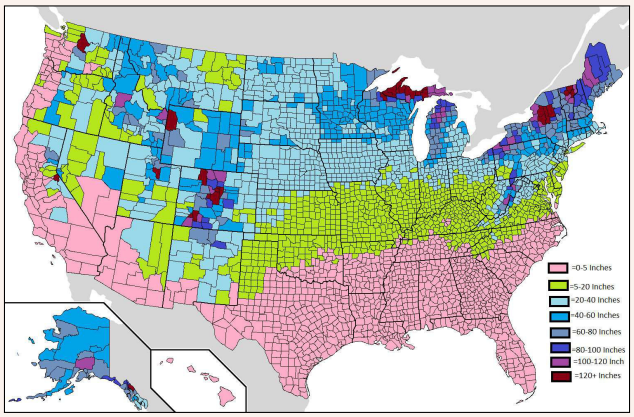


图 18.1: 美国雪地图

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

18.2.2 侧面

18.2.2.1 风

13 风荷载在结构上指的是风在建筑物或其他结构的表面区域所施加的力量。这种力量是由空气分子的运动产生, 可以根据因素的尺寸和方向有所不同, 如风速, 风向, 建筑形状, 高度, 地理位置, 建筑表面结构和结构硬度。

14 风负载特别重要。**高楼** [1].

15 首先, 让我们从 **动压 方程式** 首先是由 D。伯诺利 它源于液体的动态能量和质量的原则。动能的 (*KE*) 一个对象被给予

$$KE = \frac{1}{2}mV^2$$

哪里 m 是质量和 V 是 速度。

為 流体 與 密度 ρ, 质量 m 由 体积 ΔV 它可以被表达为:

$$m = \rho \Delta V$$

使用上面的 质量 表达式, 为 流体 体积 的 动能 是:

$$KE = \frac{1}{2}(\rho \Delta V)V^2$$

其次, 每单位量的动态能量通过分为 ΔV:

$$\frac{KE}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{18.1}$$

这代表液体的动态压力, 因液体运动而量化每单位容量的动力能量。

动压的单元 q 是 帕斯卡 (Pa), 这也是动能的单位, 为单位体积:

$$1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

因此, 动态压力是一种能量密度的形式。

16 如果我们考虑一个翼型 , 图 18.2 流量必须在上方更快。(曲线) 部分比下方。这将导致 静压 低于 翼型 与其下方相比下降。此差异在 压力 结果在 升力 。

17 空气在 Eq 中取代。18.1, 空气 质量 密度 ρ 是由加速度分的空气重量以 重力 $g = 32.2$ F / 秒 [2]. 海平面和温度 15°C (59°F), 空气重量 0.0765 lb/ft^3 这将产生一个压力的

$$q_s = \frac{1}{2}\frac{(0.0765)\text{lb/ft}^3}{(32.2)\text{ft/sec}^2}\left(\frac{(5280)\text{ft/mile}}{(3600)\text{sec/hr}}V\right)^2 \tag{18.2}$$

[1] 对于非常高的建筑物的主要设计考虑是过度 **流动** 由侧 荷载 引起 (风和可能的地震).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

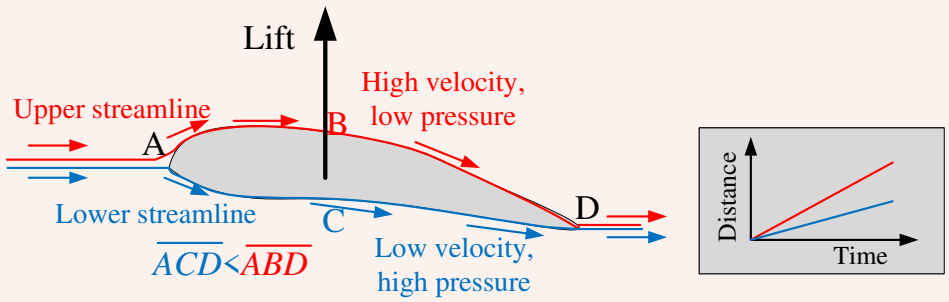


图 18.2: 翼型, 伯诺利方程式。

或 [2]

$$q_s = 0.00256V^2$$

哪里 V 是最高风 速度 (每小时几英里) 和 q_s 是在 PSF。V 可以从风地图中获取 (在美国 $70 \leq V \leq 110$), 图 18.3.

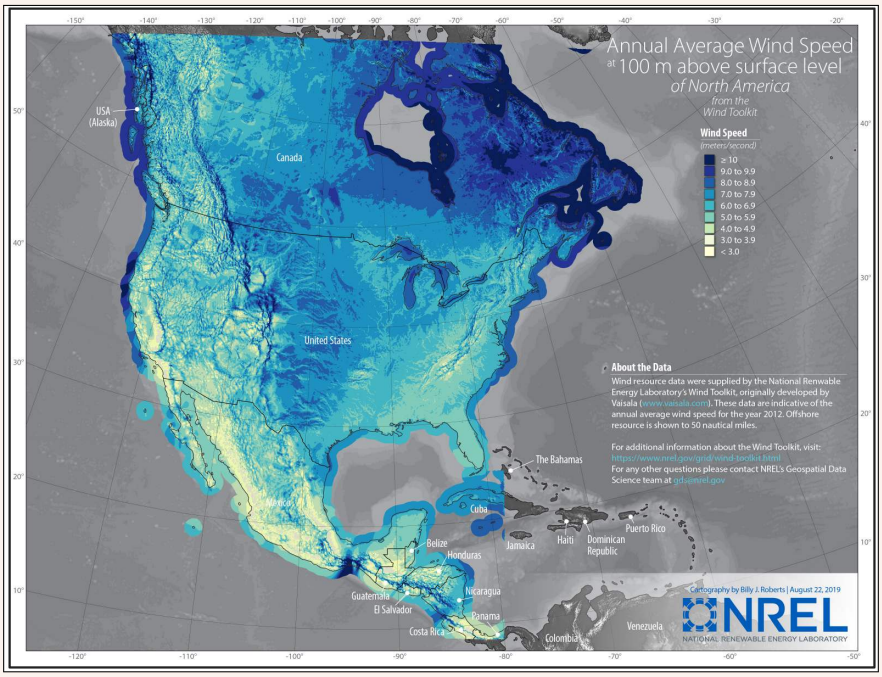


图 18.3: 美国风景地图

[18] 当风击中建筑物时, 它必须围绕结构转动, 因为建筑作为障碍。围绕建筑物的风的行为可以分成几个关键组件, 图 18.4:

[2] 不幸的是, 大多数结构分析的文本书只是没有衍生品地呈现这个方程式, 潜在地让读者怀疑它仅仅是实验性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

上风侧面 (风向): 随着风击中建筑物的面孔, 它缓慢下来, 压力升起, 在这个风向侧面形成高压区域。

绕流: 然后, 风流向和围绕建筑的侧面。随着它通过顶部和边缘, 风的速度上升由于减少的横截面积它可以通过 (与水在流的狭窄部分如何加速相似。). 根据 伯努利原理, 作为一个 速度 的 流体 (在这种情况下, 空气) 增加, 其 压力 下降。

下风侧面 (李): 当风已经超越了建筑的顶峰并向背风面下滑时, 它会经历扩张和速度下降。这种过渡创造了一个复杂的流动模式, 其特点是涡轮和相关术语。

19 在建筑物的背风面上, 有几个因素为创建吸力做出贡献:

压力恢复 不完整: 虽然风落后放缓, 经过建筑的顶峰, 但压力并没有完全恢复到环境条件。不同方向的风流混合 (顶部和周围的侧面) 导致混乱, 从而减少压力恢复的有效性。

流动分离: 随着风在建筑顶部和背风面下方流动, 它倾向于由于反对的压力梯度而从表面分开。(从低 压力 向上移动到高 压力 向地). 这种分离创造了一个低 压力 的区域, 直接与建筑物的 背风面 相反。

涡旋 和 涡流: 风流的分离和相互作用可以产生涡旋和涡流围绕建筑的角落和边缘。这些旋转的空气质量是低 压力 的区域, 并有助于整体负面的 压力. (吸力) 對 背风面 的影響。



图 18.4: 风荷载对结构的影响

20 对于高升建筑, 重要的是捕获正确的风压力分布。风 速度 $V(z)$ 作为高度的功能 z 可以用权力法方程式表达。(ASCE/SEI 7-16, 2017):

$$V(z) = V_{\text{ref}} \left(\frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^{\alpha}$$

在哪里:

- $V(z)$ 是风 速度 在高度 z,
- V_{ref} 是参考风 速度 在参考高度 z_{ref},
- α 是土地依赖者。

这个方程式可以与 Eq 相结合。18.1 以获得压力分布。

21 对 风荷载 受影响的结构分析的周边方法的详细信息在 §B.2.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

18.2.2.2 地震

22 地震性包括在特定区域内发生、频率和大小地震的研究, 对于确定与特定位置相关的地震危险至关重要。18.5. 影响地震的因素包括:

Tectonic 板块: Mov 板的运动和相互作用是地震的主要原因。

历史 地震 数据: 记录过去的地震有助于预测未来地震的概率, 地点和潜在大小。

错误区: 活性缺陷对基于其属性的本地地震产生重大影响。

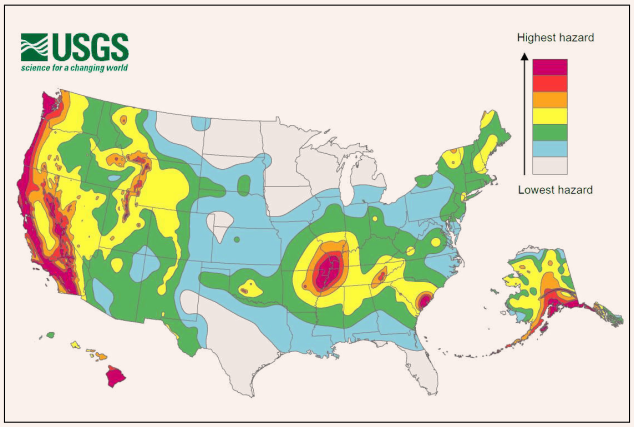


图 18.5: 美国地震地图

23 地震期间的土壤运动是由:

加速度: 随着时间的推移, 速度的变速率, 与顶级地点加速度 (PGA) 用作 地震 的强度。

速度: 波 速度 V_s 是地震学中的关键参数, 以评估地震时的土壤行为。

24 结构的 固有频率 是 质量 的功能和硬度。对于一个简单的自由度, 这很容易确定。

25 考虑一个质量 m 与春天相结合, 坚固 k 没有外部行动。动态 平衡方程 由:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

采用形式的解决方案 $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$:

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

返回 平衡方程 的替代:

$$(-m\omega^2 + k)A\cos(\omega t + \phi) = 0$$

非三位一体解决方案 ($A \neq 0$):

$$-m\omega^2 + k = 0 \implies \omega^2 = \frac{k}{m}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, 固有频率 f is:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

从上面, 我们有一个标准来确定什么时候一个动力分析是保证的 [3].

定义 18.1: 动力分析的条件

如果结构的基本 固有频率 接近动态负载频率, 则需要 动力分析。(如地震中的大地运动频率).

通过延伸到前方程式, 建筑物具有自然频率, 其倾向于振动。如果地面运动的频率符合建筑物的固有频率 (共识) 建筑物可能会经历过度和潜在损害的波动。

地震负担在建筑物主要表现为侧面力量。

这些力量是建筑物试图抵抗地面所赋予的运动的结果。沿着建筑的高度的侧面力量的分布通常由于加速效应而随着高度增加。(瞬间) 正如你把大楼移动起来一样。

侧面力量引发了建筑物的结构元素中的相关术语力和旋转时刻。一个多故事建筑的下层故事通常会经历最高的光线力量, 因为它们携带了所有故事的荷载。

如果建筑物的质量和坚固性不相同分布, 或者如果地面冲动不均匀, 则 (旋转) 力量也可以发展。这些力量可以扭曲建筑, 导致复杂的应力分布和潜在的重大损害。

所有结构都有某种程度的蒸发, 即能消耗能量的能力。在 地震 期间, 蒸发有助于减少振动的强度, 从而降低建筑中的压力和变形。

最后, 为了有效地管理地震负载, 建筑物按照地震耐用的设计标准设计。这些标准有助于确保结构能够忍受地震事件, 而无需造成重大生命损失或崩溃。关键设计策略包括使用能够承受大变形的材料, 为双重性设计 (无法破坏的能力), 并将单元纳入, 如 she 墙、时刻抵抗框架和基隔离器。

上面的所有内容将在章节中详细说明 36, 70 和 67.

18.2.3 水道和地球

地下结构必须抵抗侧面地球 压力.

$$q = K\gamma h$$

哪里 γ 是土壤 密度, $K = \frac{1-\sin\Phi}{1+\sin\Phi}$ 是 压力 因子, h 是高度。

沙子和墓地 $\gamma = 120$ lb/ ft^3, 和 $\Phi \approx 30°$.

如果结构部分沉没, 它也必须抵抗水的压力水, 图 18.6.

[3] 这是正式定义的, 因为许多学生和工程师努力提供一个合理的解释, 当一个动力分析是必要的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

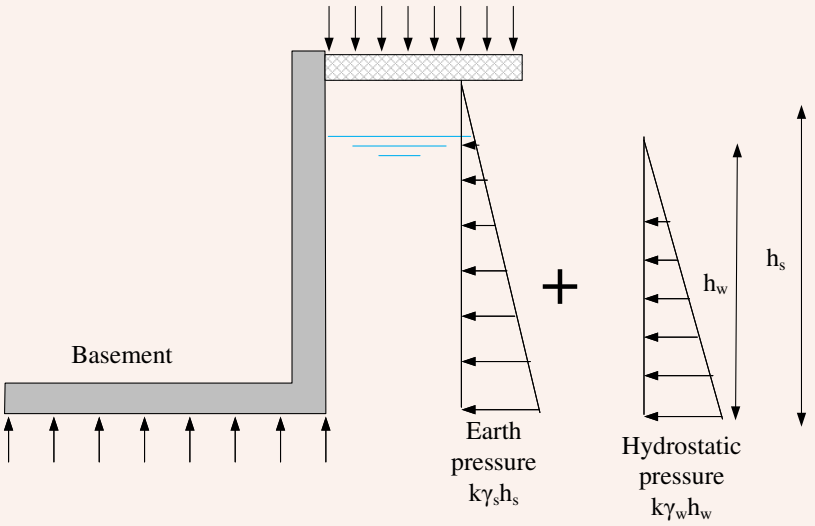


图 18.6: 地球和结构上的水位负载

$$q = \gamma_W h$$

哪里 $\gamma_W = 62.4\ \text{lbs/ft}^3$.

18.2.3.1 例题 18.1: 水晶 荷载

一栋建筑的地板是 12 英尺低于等级。地面水位 9 ft 低于等级, 什么厚度 混凝土 板是必要的正确平衡水力升高?

水位压力必须由引起的压力对抗以 混凝土 的重量。因为 $p = \gamma h$ 我们将两种压力平衡, 并解决 h 其它混凝土 板的高度 $\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{water}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{混凝土}} \Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} =$ $14.976\ \text{in} \simeq 15.0\ \text{inch}$

18.2.4 效应 荷载

38 影响负载是指对一个结构应用的力量, 非常短暂但强烈。这些负担可能来自各种来源, 如坠落物体、车辆碰撞或爆炸。

39 影响负载的关键特点是它们涉及高能量力量在短期内行动, 导致应力, 振动和潜在结构损伤。

40 影响力的衍生是相对简单的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

41 保持动力规定，在冲击之前的总动力必须等于冲击后的总动力，只要没有外部力量对系统采取行动。这个原则可以表达为：

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

在哪里：

m_1, m_2	与冲突的尸体大小
v_1, v_2	碰撞前的身体速度
v_1', v_2'	碰撞后身体的速度

42 在弹性碰撞中，动能也保留。然而，在大多数情况下影响涉及结构，碰撞是无缝的，这意味着一些动能转换为其他形式的能量，如热或被用来扭曲身体。

43 动能 之前和之后的效果是由：

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + E_{\text{loss}}$$

哪里 E_{loss} 能量是由于无线变形、热等而失去的。

44 确定影响力 F 您可以使用冲动时刻理论，它将影响的强度与冲动的变化以及时间持续的关系。Δt 对影响：

$$F = ma \Rightarrow F \simeq m \frac{\Delta v}{\delta t}$$

在哪里：

m	对象的 质量
Δv	改變 速度
Δt	影响的长度

45 要确定从高度下降的 质量 的影响力 h 我们将获得的动态能量与潜在失去的能量等同。[4]：

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \implies v = \sqrt{2gh}$$

在影响表面时，对象会减速到零。承认影响持久 Δt 二秒，平均影响力 F 将是

$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}$$

18.2.5 二级

46 结构中的次要负担是由结构本身的行为而不是外部来源产生的负担。这些负载在结构分析中很重要，因为它们可以显著影响结构的完整性和性能。下面是关于二级负载的一些关键点：

[4] 正如伽利略所发现的那样，从皮萨塔倒下的物体的速度是独立于它们的。“群众。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

47 二次负载通常是由结构对主要负载、温度变化或其他环境因素的反应引起的。与原始负载不同, 如死负载 (结构本身的重量) 生活负载 (使用和占领的负担) 二次负载通常不直接应用。

48 二级负载类型:

热负载: 这些是由于温度变化导致材料的扩张或缩小。例如, 热负载可能会导致混凝土板的压力, 因为它的顶部和底部表面之间的温度差异。

定位负载: 这些发生时, 一个结构的一部分比其他部分定于不平等的土壤压缩或其他因素, 形成结构内的应力。

建设阶段: 在建设期间, 临时负载和连续性可能会因结构单元和建筑过程的逐步增加而产生副作用。

对方位效应: Eccentricity 是指适用的 荷载 与结构成员的中心区的偏差。这可能会引发在结构分析中需要考虑的额外时刻和力量。

P-Delta 效果: P-Delta 效应是由于轴负载的结合作用而产生的。(P) 和侧重负载 (如风力或地震力量) 造成歪曲 (德尔塔) 在结构中。随着结构的扭曲, 力量的分配变化, 导致额外的内部力量在静态条件下不存在。

几何非线性: 这种情况发生时, 结构成员的缺陷变得显著, 导致非线性行为。它特别重要于具有大变形或粘膜成员的结构。

克里普和 Shrinkage: 随着时间的推移, 像混凝土这样的材料在持久的荷载下遭受变形。(克里普) 和 体积 的减少 (缩小) 它可能导致额外的内部压力。

49 工程师必须在设计过程中考虑二次负载, 以确保结构安全和可用性。例如, 在桥梁设计中, 如由于天花板曲线或热扩展而引起的副作用应考虑以防止结构故障或过度变形。

50 分析二次负载往往需要精致的模型技术, 负责物质特性、地质变化以及结构不同部分之间的相互作用。先进的终端单元方法通常用于预测结构将如何对次要负载作出反应。

18.2.6 热量

51 如果一个成员均匀加热 (或冷却) 没有限制, 然後會扩展 (或合同). 这种扩张是由

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

哪里 α 是热扩张的比例, 桌子 18.1

	α ($/^{\circ F}$)
钢材	6.5×10^{-6}
混凝土	5.5×10^{-6}

表 18.1: 热扩张率

52 如果会员被限制在扩张中, 则压缩应力 $\sigma = E\alpha\Delta T$ 正在发展。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53 避免因热充电而造成的过度压力 **扩展合成** 它在桥梁和建筑中使用。

18.2.6.1 例题 18.2: 热扩展/应力

(Schueller, 1996) 一个低楼的建筑被一边锁定为 100 英尺长的滑板大道。($\alpha = 3.6 \times 10^{-6}$ 在 / 内 /^{o}F, $E = 2,400,000$ 狗狗) 戴上墙 建筑在 60°C 的温度下建造。^{o}F 位居在美国北部的温度范围是-20° +120°F.

1. 假设墙壁可以自由移动, 不受跨墙的限制。基础, 墙的扩展和缩小 (夏天和冬天) 被授予

$$\Delta L^{Summer} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F (120 - 60)^o F (100) \text{ ft} (12) \text{ in/ft} = 0.26 \text{ in} \quad (18.3)$$

$$\Delta L^{Winter} = \alpha \Delta T L = (3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F (-20 - 60)^o F (100) \text{ ft} (12) \text{ in/ft} = -0.35 \text{ in} \quad (18.4)$$

2. 现在我们假设 (保守的) 自由运动不能发生 ($\Delta L = 0$) 因此,The 结果 应力 将相当于 $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L} = E\frac{\alpha \Delta T L}{L} = E\alpha\Delta T$

$$\sigma^{Summer} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F (120 - 60)^o F \quad (18.5)$$

$$= 518 \frac{\text{lbs}}{\text{in}^2} \text{ Tension} \quad (18.6)$$

$$\sigma^{Winter} = E\alpha\Delta T = (2,400,000)\frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}(3.6 \times 10^{-6}) \text{ in/ in/}^o F (-20 - 60)^o F \quad (18.7)$$

$$= -691 \frac{\text{lbs}}{\text{in}^2} \text{ Compression} \quad (18.8)$$

(18.9)

注意, 紧张的压力超越大麻能力, 会发生裂缝。

18.3 考虑

18.3.1 计划的负载

54 尽管仅仅是基本三角形的应用, 但学生往往很难在弯曲表面上设计荷载。

55 这是在图中最好的描述 18.7 与

Lateral inertial force x	$W_1^x = w_1^x L;$	$W^n = W_1^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_1^x \frac{L_y}{L}$
Self weight y	$W_2^y = w_2^y L;$	$W^n = W_2^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_2^y \frac{L_x}{L}$
Wind Load	$W_3^x = w_3^x L_y;$	$W^n = W_3^x \frac{L_y}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_3^x \frac{L_y^2}{L^2}$
Snow Load	$W_4^y = w_4^y L_x;$	$W^n = W_4^y \frac{L_x}{L};$	$w^n = \frac{W^n}{L}$	$= w_4^y \frac{L_x^2}{L^2}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

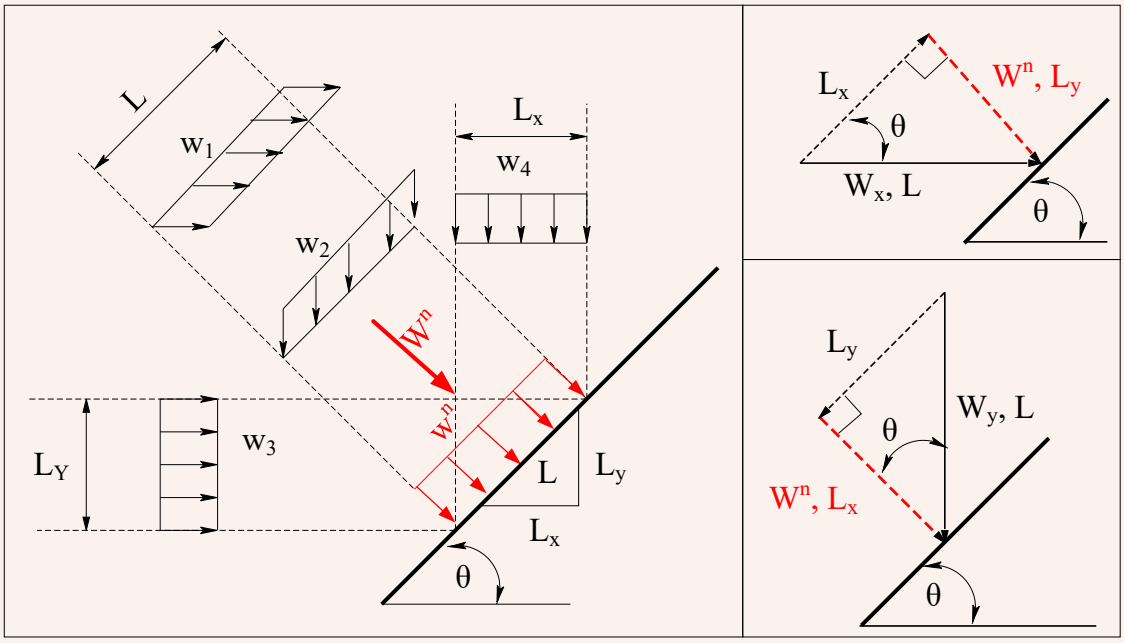


图 18.7: 计划的负载

18.3.2 荷载 定位

56 只有 恒载 是静态的。另一方面, 活载可能或可能不适用于结构的某个组件。因此, 荷载定位安排导致最高的内部力量 (时刻 +ve 或 -ve, Shear) 不同地点需要考虑。

57 為一個簡單的 梁, 图 18.8 描述了活载的三个可能的定位。LL1 将最大限度地在 梁 中间的积极时刻, 而 LL3 将在正确的 支座 中间最大限量地消极时刻。

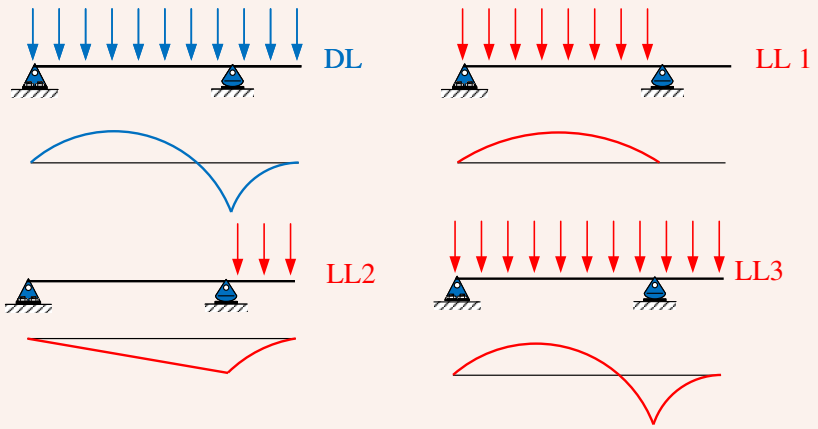


图 18.8: 荷载 定位以最大限度的时刻

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

58 放置的 (生活) 因此, 负载是一种关键考虑, 直接影响结构的安全、稳定和性能。

59 读者也应该咨询 CAP 28 覆盖的 **影响线** 哪些图表显示如何应对 (如 剪力、弯矩或反力) 在一个结构的特定点上, 当荷载单元在结构中移动时发生变化。

18.3.3 荷载 组合

60 荷载 组合在 结构工程 中是设计过程的一个关键方面, 确保建筑物和结构在各种负载条件下安全、高效。这包括分析不同类型的负载相互作用的效果, 而不是隔离, 以确保结构能够无故障地抵抗多种同时 荷载 效应。

61 荷载组合的主要目标是确保结构安全。考虑到多个荷载类型, 工程师可以设计能够抵抗极端条件的结构, 如风和地震负载的同时发生或死负载和活负载组合。这有助于预防可能导致财产损坏、伤害或死亡的结构故障。

62 荷载 组合允许工程师经济设计结构, 而无需过度设计。通过了解不同负载如何相互作用, 工程师可以优化材料使用量并选择最成本效益的解决方案, 仍然符合安全要求。这有助于降低整体建设成本, 同时保持结构完整性。

63 荷载 组合帮助工程师在罕见但可能的情况下预测结构的行为, 如与强风相结合的严重降雪或在 地震 中充电。这是对特定环境挑战的区域设计结构至关重要的。

64 通过为各种荷载组合设计, 结构不仅在即时条件下安全, 而且还建造以应对其生命周期的变化和压力。这有助于结构的长寿和可持续性, 这在公共建筑和基础设施中特别重要。

65 结构经常为多种用途服务, 并且必须在使用过程中容纳不同类型的负载。例如, 多用途的建筑可能需要支座不同的占用类型、设备或存储重量。荷载 组合确保结构能够适应这些多样性要求, 而不会损害安全。

66 荷载 组合的常见类型包括:

- 恒载 + 活载
- 恒载 + 风荷载
- 恒载 + 地震荷载
- 恒载 + 雪 荷载
- 活载 + 风荷载 (对于像占领和风能相匹配的体育场这样的结构)

67 代码所指定的直播负载代表最大可能的负载。

68 所有这些负载同时发生的可能性远程。因此, 建造代码允许在某些负载相结合时进行一定的减少。

69 提到 §B.5 更多细节。

18.3.4 荷载 路径

70 负载路的概念在结构工程、设计和分析方面至关重要。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

71 了解荷载路径, 包括跟踪负载从应用点通过各种结构组件移动到安全转移到地面时所采取的路径。

72 荷载路径必须是连续的。这意味着, 从一个荷载应用的点开始, 必须有一个清晰而无断的结构成员链将这个荷载-带到基础和最终到地面下面。荷载路径中的任何中断可能导致结构失败。

73 理想情况下, 荷载路径应该尽可能直接和短。Zigzag 或循环路径可能导致在某些区域增加力量, 创造 应力 浓度, 可以削弱结构完整性。直接路径有助于更平等地分配负载, 并减少失败的可能性。

74 负载路径的减少确保, 如果一个路径失败, 负载仍然可以通过替代路径支持。换句话说, 一个结构应该是 **静态不确定**.

75 负载的正确分配确保没有单一的 单元 或连接过量。这意味着设计结构系统, 以便负载尽可能平等地分布在多个结构成员之间, 从而减少局部故障的风险。

76 一个强大的荷载路径可以容忍一些意想不到的变化或失败, 而无需灾难性的崩溃。其中包括对结构的一部分进行意想不到的负载或损害处理能力。荷载路径的强度与其解放性以及使用材料的整体强度和双重性密切相关。

77 在复杂结构中, 负载路径必须遵循硬度的序列, 这意味着固体元素携带大部分负载。这有助于管理货物通过结构的运送方式, 确保更灵活或较弱的单元不受过度的应力的影响。

78 荷载路径中的所有组件都应具有兼容的变形, 这意味着它们应以不损害附属组件的完整性的方式变形。此 变形协调 对于维护结构在 荷载 的整体稳定至关重要。

79 荷载路径在结构中通过 A 实现 “希拉里” 简单的单元随后连接到列, 图 18.9 或以兩種方式按 图 顯示的標誌 18.10.

80 对于一个单纯支持的四个线性支持, 我们可能有一个或两个方式行动, 如果比例 a/b 更大或小于 2 个, 分别为图 18.10.

81 虽然我们将专注于加强的混凝土或钢材部分的设计, 但我们必须记住以下几点:

1. 部分是梁或旋转器的一部分。
2. 梁或旋转器实际上是三维结构的一部分在其中, 荷载从结构中的任何点传递到基础 通过各种结构形式的任何一个。

82 古代大教堂 (查普。4, 图 4.7) 梅森对荷载传输机制的理解非常清晰, 如图中所示。18.11a. 哥特式大教堂的结构系统依赖于几个关键单元的相互组合, 这些密集确保稳定, 同时允许大型开放空间和扩展窗户:

1. **Rib** 用到 支座 天花板, 通过在预先定义的线条 - 边缘 - 沿着负载进行通道, 直接向柱子和脚部发动力量。这种骨骼方法减少了<质量的阴道, 并将负载集中到特定的点。
2. **飞翔的胡萝卜** 它在抵抗波浪所执行的水平冲动中发挥着关键作用。这种震动随着瓦尔特变得更加突出而增加 (半循环较少). 飞翔的泡沫将这些侧面力量从主要墙壁转移到外部窗帘, 使墙壁能够为大型玻璃窗户开放, 同时保持稳定。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

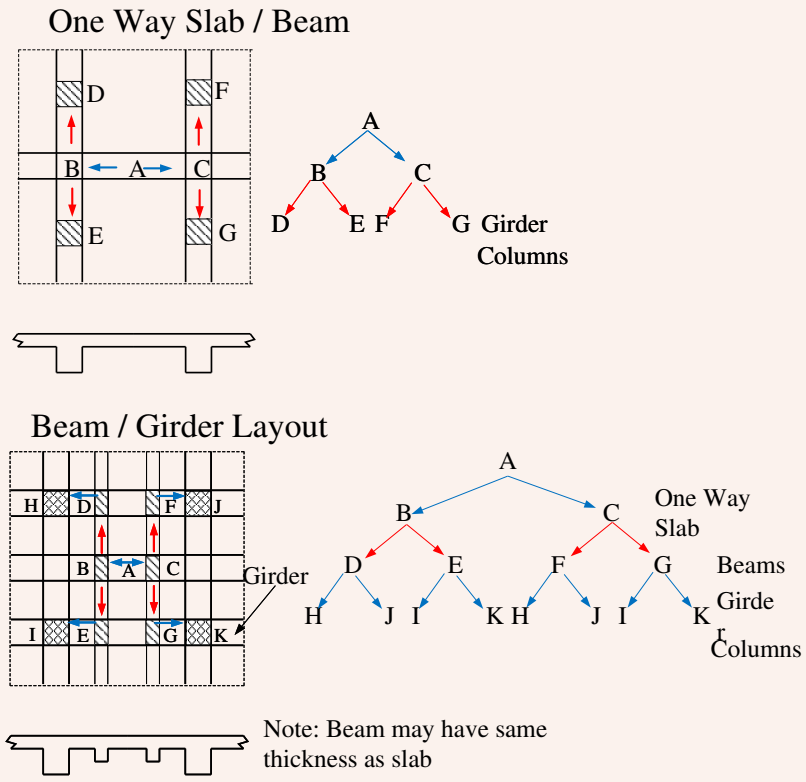


图 18.9: 荷载 转换在 R/C 建筑物

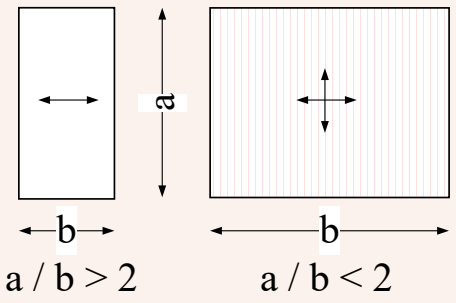
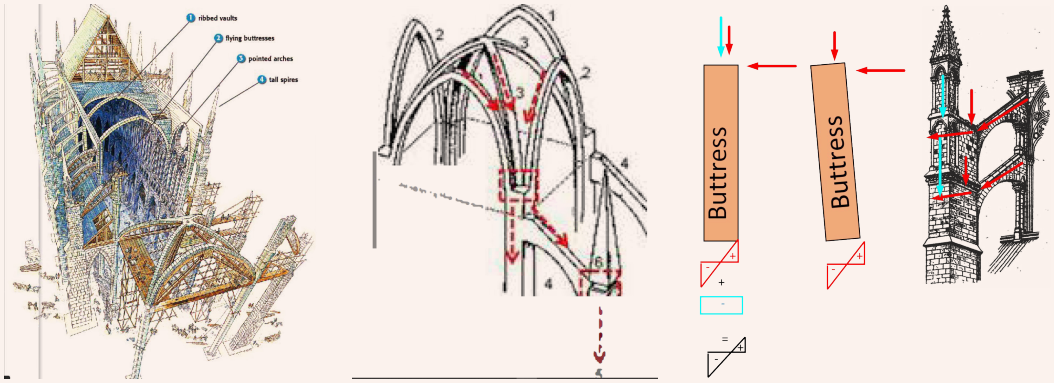


图 18.10: 一或两种方式在滑板中的行动

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

3. **标志性档案** 它既是建筑和结构创新。结构上，它们减少了与半循环弓相比的水平冲动，使更高、更滑板结构。在建筑上，它们定义了哥特式美学，并允许大窗口的插入，最大限度地提高室内光。
4. **螺旋和塔**常常位于石头上方或在大教堂的交叉点，服务于双重目的。首先，他们通过巨大的脚踏板直接将垂直负载转移到地面。其次，他们的重量提供稳定压缩力量，以应对在侧负载下的飞行泡沫和弓中发展的紧张压力。这种稳定效应概念上类似于拱桥梁的重量柱，如巴黎亚历山大三号桥、图。18.11d，在那里侧面鼓被大脚带走 (地下) 加上塔楼，尽量减少由引发的灵活性引起的紧张压力。



(a) 哥特式大教堂 (b) 荷载 转换 (c) 压力在泡沫底部



(d) 亚历山大三号桥

图 18.11: 荷载在哥特式大教堂和深宫的转移机制

18.3.5 税务区

83 我们经常需要一个简化的方式来分配与结构元素相关的负担，而无需复杂分析。这就是我们所使用的概念。**税务区**.

84 税收区被定义为转移其负担的结构区域。(死负，活负，雪负等。) 具体的结构组成部分。这个区域通常是由附近的结构成员之间的中点或中心线，或者由结构本身的边界所束缚。以下是它一般适用于不同的结构组件，图 18.12:

比特币: 泡沫的税收区域是地板或天花板上负载到泡沫的地方。对于支持单路板的梁，税收区域通常计算为梁的范围增加的附近线中心之间的板宽。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

列: 对于 柱, 税收区域是由 柱 支持的地板区域。这个区域是通过将地板分为基于列之间的中间点的区域来确定。每個 柱 都支持它周圍的區域, 直到它與附近列之間的中間點。

地板弱点: 在直接负载的板块的情况下, 例如在住宅建筑中, 如果板块从墙上到墙上伸展, 税收区可能是整个地板区域。

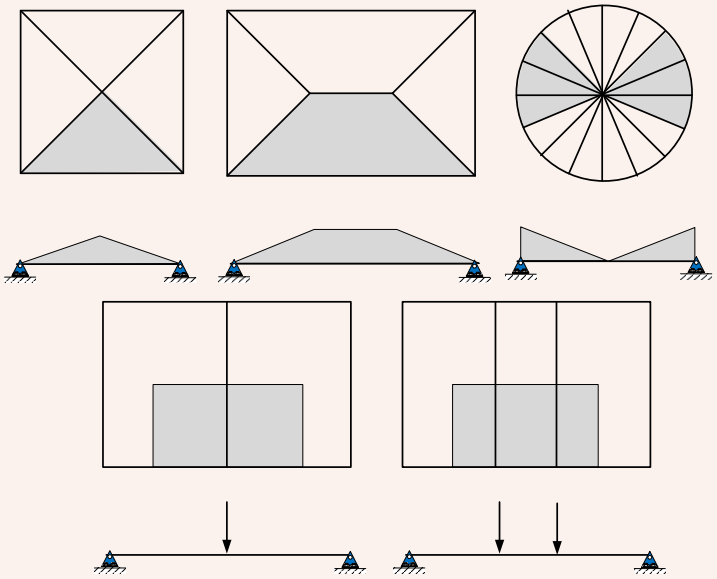


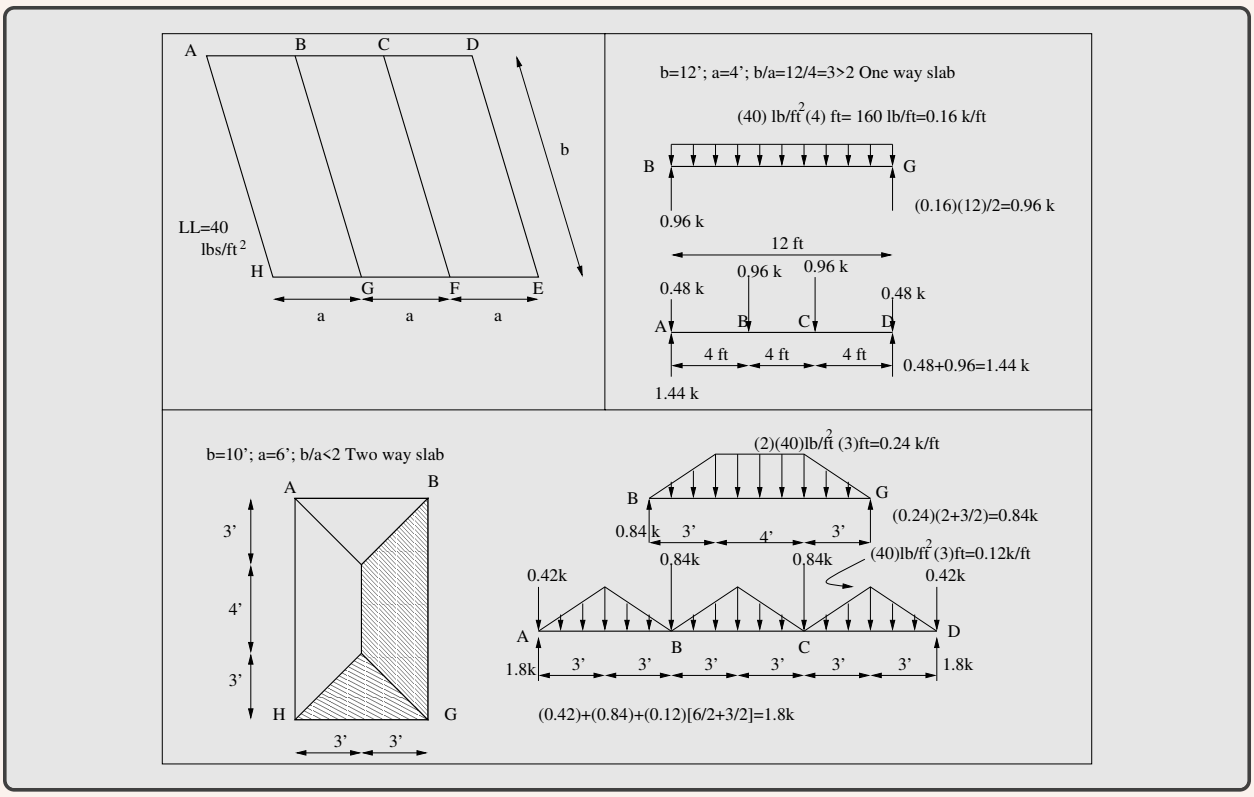
图 18.12: 对结构成员负载的税收区的概念

85 税收区的确定类似于相应产量线的识别, 图 57.1.

86 税区计算的例子在 §19.2.2.

18.3.5.1 例题 18.3: 税务区

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



18.3.6 结构性反应

87 我们将本章结束, 通过审查单个类型的负载对结构反应的作用, 图 18.13.

88 服务负载, 通常包括死和活负载的, 应在线性弹性范围内保持结构反应。它在达到无缝反应或最终失败的荷载之前将有显著的备份容量。

89 由于不寻常的负担, 如高风或地震活动, 可以接受与塑料反应过渡。

90 塑料范围只能在特殊情况下被打破, 例如在强大的地震期间。事实上, 这可能会导致永久损坏, 但结构仍然会站立, 生命得救。此事将随后在 **基于性能 地震工程**, 章节 72.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

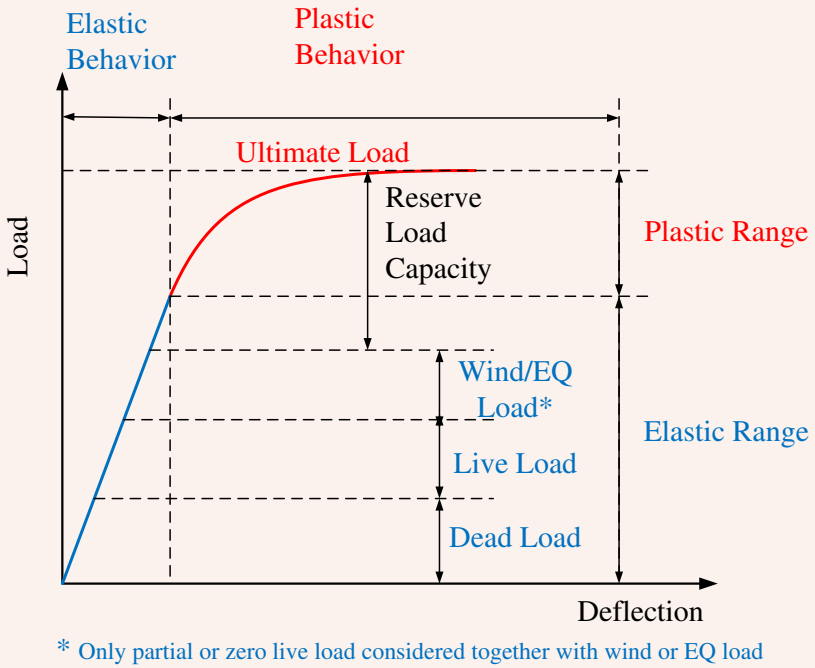


图 18.13: 荷载 一个结构的生命, (Lin and Stotesbury, 1981)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。



法兰西亚特拉斯泰坦特拉斯 (Titan Atlas) 携带天体, 是负载和力量分布的强大代表。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

19 反应

摘要

反应构成了荷载路径的最终部分，因此对基础设计产生了显著影响。定义反应也可以简化内部力量的计算（下一章）。这个章节确实有很少的机械基于除了平衡的方程式，必须仔细适应所考虑的具体结构。本章的第一部分讨论了几个似乎与此无关的主题；然而，这些集体提供了关键的洞察力，使反应的确定更容易。第二部分介绍了各种各样的例子，在复杂性中进步，以便在实践中描述这些概念。最后，如下图所示，确定反应是用柔度法解决静态不确定的结构的第一步。

19.1 引入 711
19.1.1 支持的类型 712
19.1.2 平衡 712
19.1.3 条件方程式 714
19.1.4 静态决心 714
19.1.5 地质不稳定 715
19.1.6 自由体图 716
19.2 例子 716
19.2.1 例题 19.1: 水静态 荷载 717
19.2.2 例题 19.2: 荷载 转换 717
19.2.3 例题 19.3: 简单支持 梁 718
19.2.4 例题 19.4: 平衡 荷载 719
19.2.5 例题 19.5: 四分之一 梁 720
19.2.6 例题 19.6: 3 加布式框架 . . . 721
19.2.7 例题 19.7: 包含支持 722
19.2.8 例题 19.8: 网络结构 723
19.2.9 例题 19.9: 飞机 平衡 724
19.2.10 例题 19.10: 吉姆博酒 725
19.2.11 例题 19.11: 排名: 平衡的浮动身体 (液化证据) 728
19.2.12 例题 19.12: 体育运动员: 神经 730



19.1 引入

1 雖然被認為是物理學的基本和原始概念之一，但力量的概念在歷史上並沒有真正理解。(章节 14).

2 有三种类型的力量:

负载 是结构上的外部 vectorial 数量，无论是集中还是分布。它们是力量或时刻。内容在章节中详细讨论 18.

反应 是那些在 (加载) 由支持者构建。它们通常是未知的，必须在内部力量可以确定之前确定。人们常常认为，纽顿的第三法则是错误的。**对于每个行动，有一个平等和相反的反力** 它提供两个力量的平衡，平等和反对方向行动和反力。但法律实际上说，如果一个身体 A 施加力量 F_a 在身体上 B 然后，身体 B 将发挥平等和相反的力量。F_b 在身体上 A. 没有平衡因为力量 F_a 和 F_b 它在不同的身体上，一个在身体上。A 其余的身体 B.

内部部队 结构的内部部分是需要保持结构的任何部分在平衡中。这些将在章节中讨论 21.

19.1.1 支持的类型

在结构分析中 (手数计算) 它往往更容易 (但不总是必要的) 首先, 要确定反应。

一旦反应被确定, 内部力量被确定后; 最后, 变形 (缺陷和旋转) 最后确定 [1].

要确定 基础 荷载 的反应是必需的。

根据结构的类型, 可能有不同的类型。支座 条件, 图 19.1.

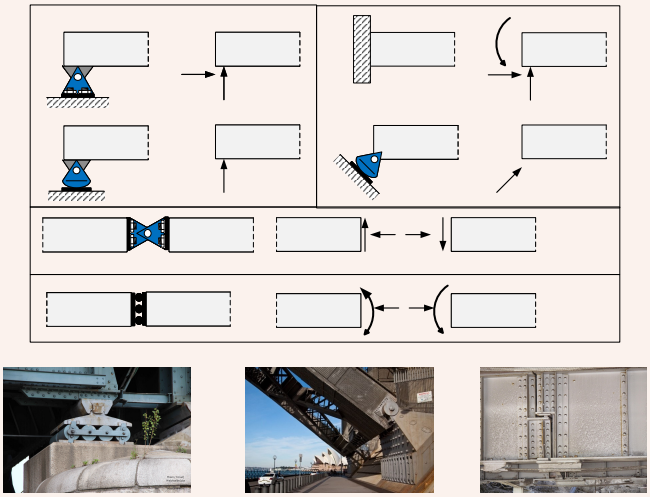


图 19.1: 反应边界的例子

滚动: 它在一个 2D 结构中只提供一个方向的限制, 在 3D 结构中, 一个滚动器可以在一个或两个方向提供限制。一个滚动器将允许转角.

英雄: 允许 转角 但没有转移。有些倾斜, 允许垂直翻译但没有转角.

固定支座: 将防止转角和所有方向的移动。

这些是常见的支持, 许多其他组合可用于 3D 结构。

19.1.2 平衡

反应是由静态平衡的适当方程式确定。

在静态系统中, 力量和时刻的总结必须等于零。[2].

[1]这就是柔度法中的操作序列, 它自己借给手工计算。在硬度方法中, 我们确定了移行的先驱, 然后是内部力量和反应。这种方法最适合计算机实施。

[2]在动态系统中 $\Sigma F = ma$ 哪里 m 是质量和 a 是 加速度。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9 在 3D 卡特西亚坐标系统中, 共有 6 个独立的 平衡 方程式:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = \Sigma F_y = \quad \Sigma F_z = 0\\ \Sigma M_x = \Sigma M_y = \quad \Sigma M_z = 0\end{aligned}$$

10 不是所有方程式都适用于所有结构。平衡 每个结构类型的方程式是

定义 19.1: 平衡 方程式

结构类型	平等					
	力量			时刻		
	x	y	z	x	y	z
梁, 没有轴力		ΣF_y				ΣM_z
网格			ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	
3D Truss, 框架	ΣF_x	ΣF_y	ΣF_z	ΣM_x	ΣM_y	ΣM_z
替代集						
Beams, 沒有 轴力					ΣM_z^A; ΣM_z^B	
二维桁架、框架、梁	ΣF_x				ΣM_z^A	ΣM_z^B
				ΣM_z^A	ΣM_z^B	ΣM_z^C

11 对于 反力 计算, 外部应用的 荷载 可减少到相当强度; 但是, 对于内部力量 (和瞬间) 我们必须使用实际的荷载分布。

12 时间的总结可以根据任何任意点进行。

13 虽然力量是由向量代表的, 但瞬间也是一种 vectorial 数量, 并且是由曲线箭或双箭 向量.

14 总是最好通过另一个平衡方程式检查计算。

- 在你写一个平衡的方程式之前,

  1. 仲裁决定什么是 **+ve** 方向
  2. 为未知数量采取方向
  3. 方程式的右侧应该是零。

  如果你的反力是负面的, 那么它将处于与假设相反的方向。
- 外部力量的集合是平等的, 与内部力量相反。因此, 净力量/时刻相当于零。

15 平衡的时刻, 已被莱昂纳多考虑 (Da Vinci, 1490 PDF) (第 94 章) 由亚历山大 • 卡德在他的标志性的手机图 19.2.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

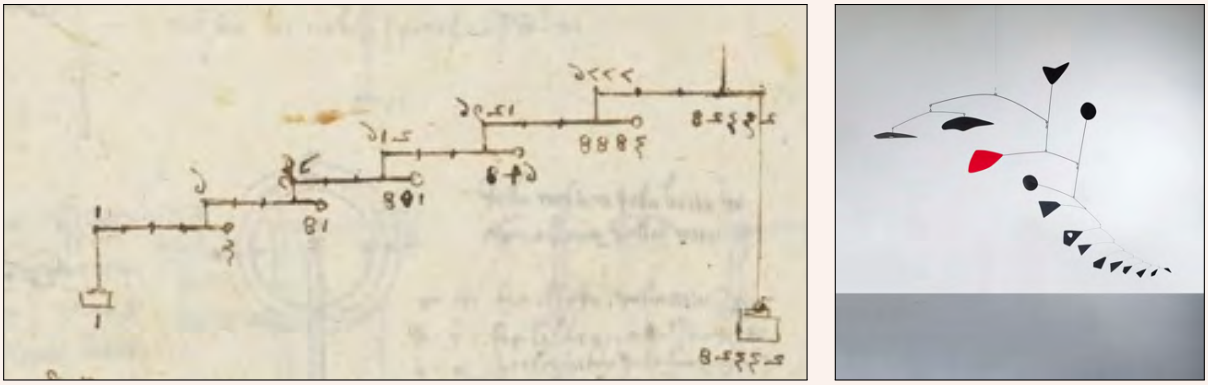


图 19.2: 平衡的瞬间, 从莱昂纳多 (Da Vinci, 1490) 到 Calder

16 作为一份副笔记, 如前所述在 §6.6.7 人们常常错误地认为, 纽顿的第三法则 “对于每个行动, 有一个平等和相反的反力” 它提供两个力量的平衡, 平等和反对方向行动和反力。但法律实际上说, 如果一个身体 A 施加力量 F_a 在身体上 B 然后身体 B 要有平等和相反的力量。F_b 在身体上 A. 没有平衡因为力量 F_a 和 F_b 它在不同的身体上, 一个在身体上。A 其余的身体 B (Cohen, 2002).

17 关于瓦里尼昂的理论 §14.5.14: **一点左右的几个相互力量的瞬间总数相当于这些力量所产生的瞬间, 或者换句话说, 一点左右的一势力的瞬间相当于其组成部分的瞬間总数。**

19.1.3 条件方程式

18 如果一个结构有一个内部环 (可以连接两个或多个子结构) 因此, 这将提供额外的方程式。($\Sigma M = 0$ 在戒指中) 可以利用来确定反应。

19 这些方程式经常在特鲁塞中被利用。(每个连接都是一个环) 要确定反应。

20 在一个倾斜的滚动支座与 S_x 和 S_y 水平和垂直的投影, 然后反力 R 将有, 图 19.3

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{S_y}{S_x}$$

19.1.4 静态决心

有关历史背景，请参见 §??

21 在静态定义的结构中, 反应仅取决于地质学、边界条件和负载。

22 在非安格洛萨克斯文学中, 我们提到静态定义和静态不定义的结构, 通过更优雅的术语。**以色列** 和 **催眠** 相应。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

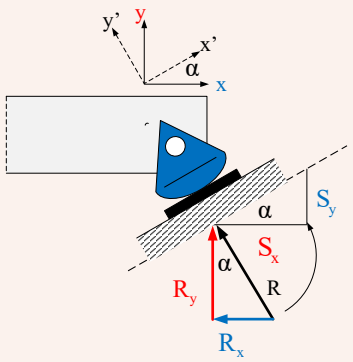


图 19.3: 包含 滚动支座 反应

23 如果反应不能简单地从静态平衡的方程式中确定 (和条件的平衡, 如果存在) 然后, 结构的反应被称为静态不确定。(或超静态).

24 静态不确定度等于反应数量与平衡方程数之间的差异。19.4

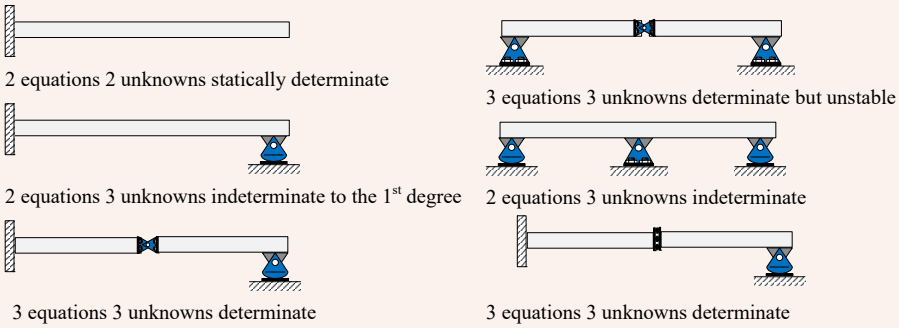


图 19.4: 静态不确定度

25 一个静态定义系统中的支座的失败导致结构崩溃。因此, 一个静态不定义的结构比一个静地定义的一个结构更安全。

26 对于静态不定义的结构, 反应也取决于物质特性 (吉。青少年和/或 剪切模量) 和 单元 交叉部分 (例如, 长度、区域、惯性矩).

19.1.5 地质不稳定

27 地质不稳定会发生, 如果:

1. 所有 **反应是平行的** 并且不平行 荷载 适用于结构。
2. 所有 **反应是竞争的** 如数字 19.5
3. 反应的数量是 更小 平衡的方程式数量, 即 机制 在结构中存在。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

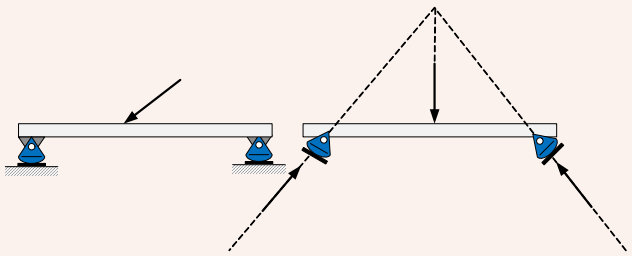


图 19.5: 反应是竞争的

28 数学上, 这可以证明如果行列式 平衡 的方程式相当于零。(等式是相互依赖的。).

19.1.6 自由体图

定义 19.2: 自由体图

自由体图表是用于显示在特定情况下对物体的所有力量/时刻的相对大小和方向的图表。它不是一幅画, 而是图表。

29 自由体图表包括:

1. 简化身体的版本
2. 能量显示为直射指向他们在身体上行动的方向, 时刻被显示为曲线与箭头或向量两个箭头指向他们的方向他们在体上行动
3. 一个或多个参考协调系统
4. 通过公约 (虽然不总是跟随), 对应用的力量的反应通过向量的根标记显示

30 显示的力量和时刻的数量取决于具体问题和假设。

31 所有的力量和时刻都必须平衡到零。

32 自由体图并不一定代表整个身体。一个身体的部分可以选择分析。这将允许计算内部力量, 使它们看起来外部, 允许分析。它可以多次用于计算身体内部的不同位置的内在力量。

33 对不同类型的负载的自由体图表显示在图中。19.6.

34 在大多数问题上,FBD 是基于未形状的格式; 对于某些问题 (涉及地质非线性) FBD 必须基于扭曲的形状提取 (§29) 特别是如果出现不稳定。(§19.1.5).

19.2 例子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

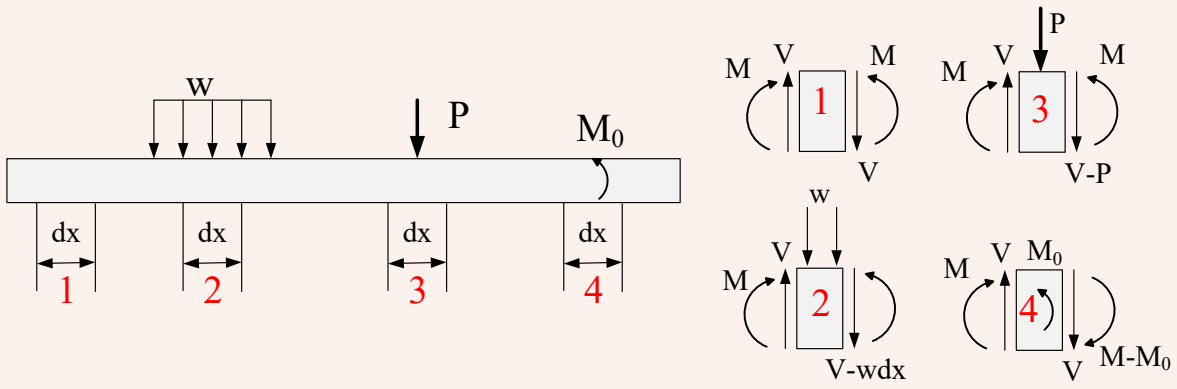


图 19.6: 免费的梁身体图表, 受不同负载

19.2.1 例题 19.1: 水静态 荷载

一栋建筑的地板是 12 英尺低于等级。地面水位为 9 英尺低于等级, 需要什么厚度的混凝土板准确平衡水静升? 水位压力必须由混凝土的重量引起的压力-对抗。因为 $p = \gamma h$ 我们将两种压力平衡, 并解决 h 混凝土 板的高度

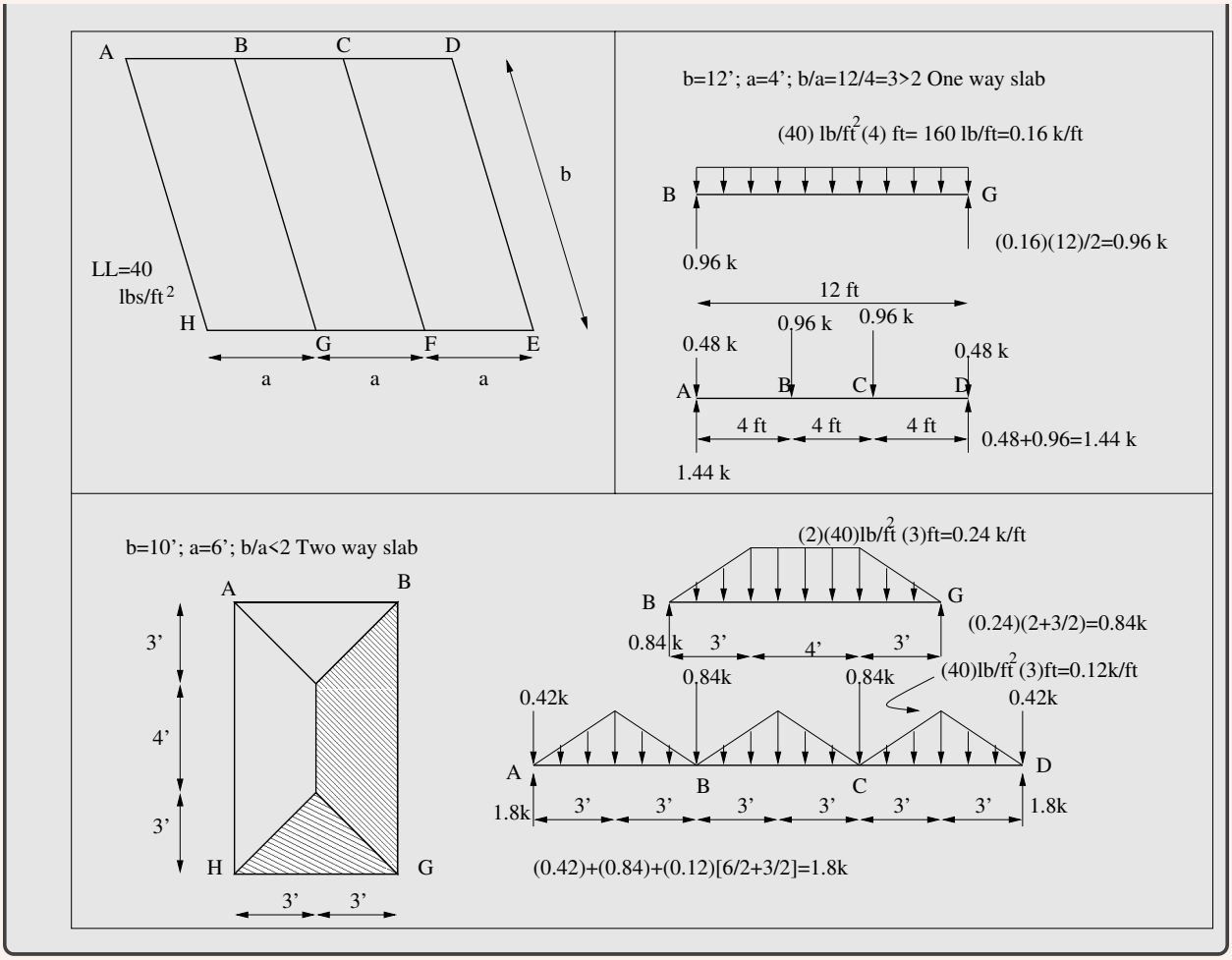
$$\underbrace{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3 \times (12-9)\ \text{ft}}_{\text{water}} = \underbrace{(150)\ \text{lbs/ft}^3 \times h}_{\text{concrete}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{(62.4)\ \text{lbs/ft}^3}{(150)\ \text{lbs/ft}^3}(3)\ \text{ft}(12)\ \text{in/ft} = 14.976\ \text{in} \simeq \boxed{15.0\ \text{inch}}$$

19.2.2 例题 19.2: 荷载 转换

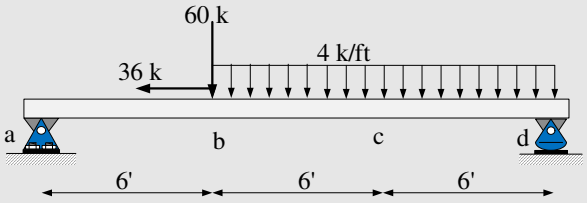
荷载转换的一个简单的例子是自己包含在下面的数字。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



19.2.3 例题 19.3: 简单支持 梁

确定下列简单支持 梁 的反应。



泡沫有 3 种反应, 我们有 3 个静态平衡方程式, 因此它是静态定义的。

$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\, \Sigma F_x = 0; \Rightarrow \quad & R_{ax} - 36\ \mathrm{k} = 0 \\
(+\uparrow)\, \Sigma F_y = 0; \Rightarrow \quad & R_{ay} + R_{dy} - 60\ \mathrm{k} - (4)\ \mathrm{k/ft}(12)\ \mathrm{ft} = 0 \\
(+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^c = 0; \Rightarrow \quad & 12R_{ay} - 6R_{dy} - (60)(6) = 0
\end{aligned}
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36 \\ 108 \\ 360 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36\text{ k} \\ 56\text{ k} \\ 52\text{ k} \end{Bmatrix}$$

否则, 我们可以使用另一个方程式:

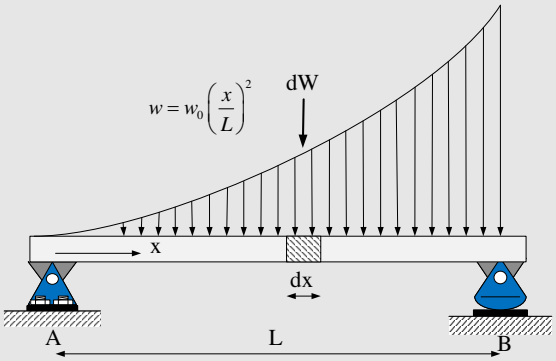
$$\begin{aligned} (+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^a = 0; \quad (60)(6) + (48)(12) - (R_{dy})(18) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{dy} = 52\text{ k} \uparrow \\ (+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^d = 0; \quad (R_{ay})(18) - (60)(12) - (48)(6) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R_{ay} = 56\text{ k} \uparrow \end{aligned}$$

检查:

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; 56 + 52 - 60 - 48 = 0 \checkmark$$

19.2.4 例题 19.4: 平衡 荷载

确定一个简单支持的 梁 长度反应 L 受一个平凡的荷载 $w = w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2$



有两个未知和两个方程式的平衡 (ΣF_y 和 ΣM), 我们正义地从第二个开始, 因为它会直接给我们反力 B 考虑到一个 无限数 单元 长度 dx 重量 dW 和瞬间 dM:

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^A = 0; \underbrace{\underbrace{\underbrace{\int_{x=0}^{x=L} \underbrace{w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2}_{w}\, dx}_{dW} \times x}_{dM} - (R_B)(L)}_{M} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{L} w_0 \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} w_0 L$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

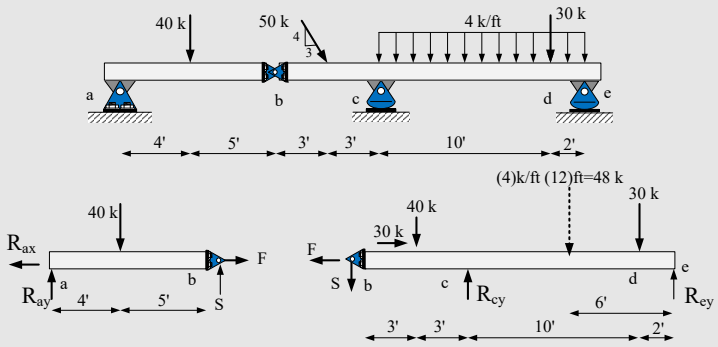
与 R_B 决心, 我们解决了 R_A 从

$$(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; R_A + \underbrace{\frac{1}{4}w_0 L}_{R_b} - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{w_0}{L^2}\frac{L^3}{3} - \frac{1}{4}w_0 L = \frac{1}{12}w_0 L$$

19.2.5 例题 19.5: 四分之一 梁

确定下列三间 梁 的反应。



4 未知 (R_{ax}, R_{ay}, R_{cy} 和 R_{ey}), 三个方程式的平衡和 一个条件的平衡 ($\Sigma M_b = 0$) 因此, 结构是 静态定义. 雖然有 多种方法 為那些四個未知的人解決 (所有正确的), 有些人更简单. 在这种情况下, 最容易 休息 结构分为两个子结构, 并单独审查每个自由体图表。隔离 AB:

$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^b = 0; (9)(R_{ay}) - (40)(5) = 0 \qquad \Rightarrow R_{Ay} = 22.2\text{ k}\uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^a = 0; (40)(4) - (S)(9) = 0 \qquad \Rightarrow S = 17.7\text{ k}\uparrow$$
$$\Sigma F_x = 0; \qquad \Rightarrow R_{ax} = 30\text{ k}\leftarrow$$

隔离是:

$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^e = 0;$$
$$-(17.7)(18) - (40)(15) - (4)(12)(6) - (30)(2) + R_{cy}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{cy} = \frac{1,266.6}{12} = 105.6\text{ k}\uparrow$$
$$(+\circlearrowleft)\Sigma M_z^c = 0;$$
$$-(17.7)(6) - (40)(3) + (4)(12)(6) + (30)(10) - R_{ey}(12) = 0$$
$$\Rightarrow R_{ey} = \frac{361.8}{12} = 30.15\text{ k}\uparrow$$

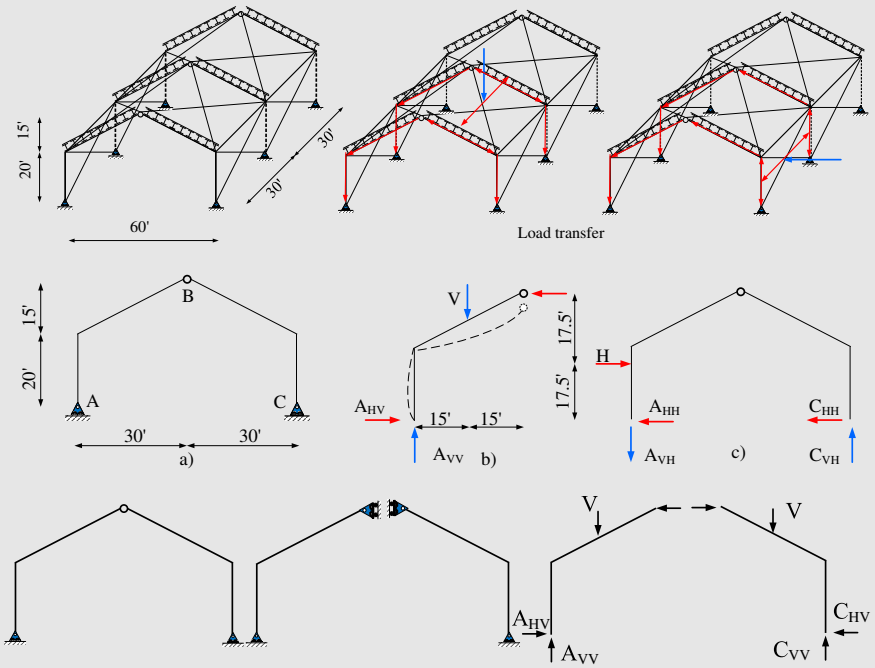
检查

$$\Sigma F_y = 0; \uparrow; 22.2 - 40 - 40 + 105.6 - 4(12) - 30 + 30.15 = -0.050 \simeq 0.\checkmark$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

19.2.6 例题 19.6: 3 加布式框架

以三角形的圆板框架为空间 30 米在中心, 确定对框架的反应组成部分, 因为: 1) 天花板 恒载 或 20 psf 天花板;2) 雪 荷载 30 psf 地平线预测; 3) 风荷载的 15 psf 垂直投影。确定的 关键设计价值观 垂直和水平反应。



由于同步, 没有垂直的力量传递由雪和恒载的绳子, 因此我们只能考虑左侧。(或正确) 框架的侧面。相同点负载:

1. 天花板 恒载 框架 的某一侧是

$$DL = (20)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}\left(\sqrt{30^2+15^2}\right)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 20.2\ \text{k}\downarrow$$

2. 雪 荷载 框架 的某一侧是

$$SL = (30)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(30)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 27.\ \text{k}\downarrow$$

3. 风荷载 由 框架 (忽略 吸力) 是

$$WL = (15)\ \text{psf}(30)\ \text{ft}(20+15)\ \text{ft}\frac{1}{1,000}\ \text{lbs/k} = 15.75\ \text{k}\rightarrow$$

有 4 个反应, 3 个 平衡 的方程式和 1 个状态方程 $\Rightarrow$ 静态定义. 否则, 通过 同义 在 C 环上没有线, 我们将有 2 个反应在 支座 和 1 个反对。(地平线) 天花板上。水平和垂直反应之间的关系 A 由于中心垂直荷载 , A_{HV} 和 A_{VV} 相应的决定是通过采取 關於 Hinge 的瞬間 (b):

$$\left.\begin{array}{rcl} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B &=& 0; \quad 15V - 30A_{VV} + 35A_{HV} = 0 \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y &=& 0; \quad A_{VV} - V = 0; \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} A_{HV} &=& \frac{15A_{VV}}{35} \\ &=& .429A_{VV} \end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

天花板死和雪的替代 荷载 我们得到

$$\begin{aligned} A_{VV}^{DL} = C_{VV}^{DL} &= & 20.2\text{ k} \uparrow \\ A_{HV}^{DL} = C_{HV}^{DL} &= (.429)(20.2) & = 8.66\text{ k} \rightarrow \\ A_{VV}^{SL} = C_{VV}^{SL} &= & 27.\text{ k} \uparrow \\ A_{HV}^{SL} = C_{HV}^{SL} &= (.429)(27.) & = 11.58\text{ k} \rightarrow \end{aligned}$$

因 风荷载 的反应 (向左吹) 以以下方式确定:

1. 垂直 反力 在 A 它是由考虑整个结构, 并采取时刻与 C, (c)

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^C = 0; (15.75)\left(\frac{20+15}{2}\right) - 60A_{VH} = 0 \qquad \Rightarrow A_{VH} = 4.60\text{ k} \uparrow$$

   A_{VH} 是垂直 反力 在 A 由于水平 荷载[a] 從 平衡 的力量在 y 方向, 我们有 $B_{VH} = -A_{VH} = -4.60 \downarrow$ (请注意, 风荷载 没有垂直组件。).
2. 垂直 反力 在 B 它是由考虑正确的基础, 并采取与内部环有关的时刻决定。B

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_z^B = 0; 35C_{HH} - (4.6)(30) = 0 \qquad \Rightarrow C_{HH} = 3.95\text{ k} \leftarrow$$

3. 地平线 反力 在 A 考虑到整个结构和集成力量在 x 方向:

$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \quad 15.75 - 3.95 - A_{HH} = 0 \quad \Rightarrow A_{HH} = 11.80\text{ k} \leftarrow$$

   要注意的是 A 它携带了大部分的水平荷载.

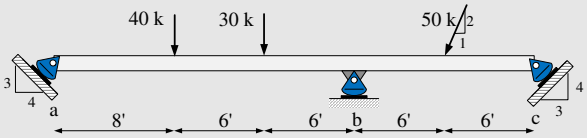
最后, 支持者应该为 最关键的 (可靠) 反应的组合:

$$\begin{aligned} H &= 8.66\text{ k} + 11.58\text{ k} + 11.8\text{ k} &= 32.04\text{ k} \\ V &= 20.2\text{ k} + 27.0\text{ k} + 4.60\text{ k} &= 51.8\text{ k} \end{aligned}$$

[a] 双子座评级在结构分析中广泛使用。X_{yz} 通常意味着数量。X 在 y 由于某些行动 z.

19.2.7 例题 19.7: 包含支持

一个例子 梁 与倾斜的 支座 显示在下面



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

A **初** 我们会识别 5 个反应, 但是我们有 2 个条件方程式。(每個傾向 支座) 因此, 有三个平衡方程式, 我们有一个静态定义的系统。

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^b = 0;$$
$$(R_{ay})(20) - (40)(12) - (30)(6) + (44.72)(6) - (R_{cy})(12) = 0$$
$$\Rightarrow 20R_{ay} = 12R_{cy} + 391.68$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0;\ \frac{3}{4}R_{ay} - 22.36 - \frac{4}{3}R_{cy} = 0 \Rightarrow R_{cy} = 0.5625R_{ay} - 16.77$$

解决這兩個方程式:

$$\begin{bmatrix} 20 & -12 \\ 0.5625 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 391.68 \\ 16.77 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.37\ \text{k}\uparrow \\ -8.69\ \text{k}\downarrow \end{Bmatrix}$$

A 和 C 的反应的水平组成部分是:

$$R_{ax} = \frac{3}{4}14.37 \quad = 10.78\ \text{k}\rightarrow$$
$$R_{cx} = \frac{4}{3}8.69 \quad = -11.59\ \text{k}\rightarrow$$

最后, 我们解决了 R_{by}

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^a = 0;$$
$$(40)(8) + (30)(14) - (R_{by})(20) + (44.72)(26) + (8.69)(32) = 0$$
$$\Rightarrow R_{by} = 109.04\ \text{k}\uparrow$$

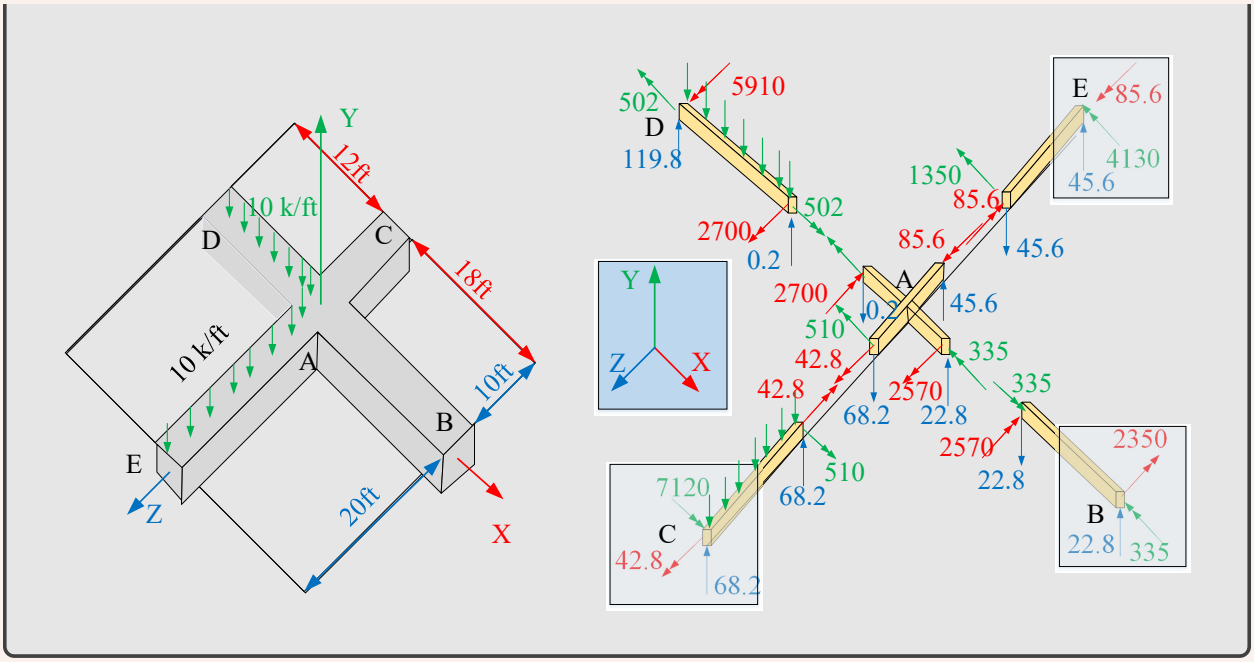
我们检查我们的结果

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; 14.37 - 40 - 30 + 109.04 - 44.72 - 8.69 \quad = 0\checkmark$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; 10.78 - 22.36 + 11.59 \quad = 0\checkmark$$

19.2.8 例题 19.8: 网络结构

下面的平面网结构在四个支持 B、C、D 和 E 的连接密切。显然, 它是静态不确定的 9th 程度 $(4\times 3-3)$. 正如我们以后看到的那样, 它在第三级上是无形的。(3 未知的 A). 它首先是由固度方法分析的, 并且在 B、C 和 E 中确定了支座反应。在此时, 网位是静态定义的。(3 外部反应) 从简单的静态 (四个平衡的方程式: ΣM_x, ΣF_y 和 ΣM_z 我们可以确定 D 和内部力量的反应。请注意, 我们不需要从 D 的反应开始, 我们可以从三个支持者中任何一个向中心前进。“行走” 向 D 走 结果可以通过静态会计仅对外负载和反应进行检查。这项练习强调了正确绘制的自由身体图表的价值。

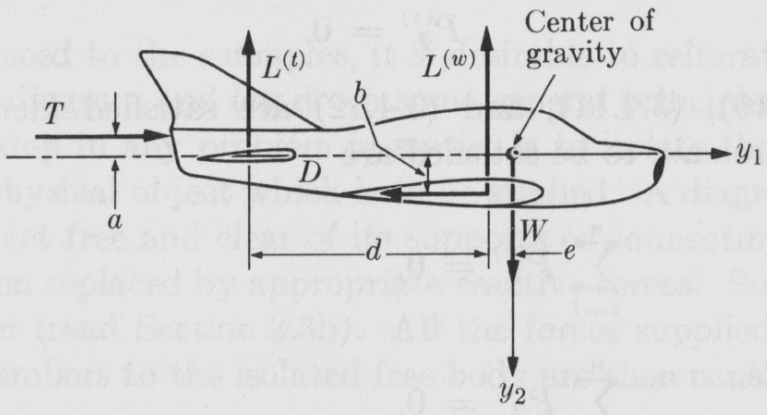
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



19.2.9 例题 19.9: 飞机 平衡

从 Statics of deformable solids
Bisplinghoff, Mar, and Pian, 1965 我们试图计算需要保持在平衡的飞机在稳定的水平飞行所需的力

量。下面是飞机重量简化自由体图 W. 假设在飞机的飞行速度上, 阻力 D 已知。我们正在寻求在翅膀上计算升力 $L^{(w)}$, 在尾部上的升力 $L^{(t)}$ 和黑暗的火焰 T 以稳定的水平飞行。



这显然是静态平衡的问题。

$$\rightarrow \Sigma F_{y1} = 0; \Rightarrow T - D = 0$$

$$\uparrow \Sigma F_{y2} = 0; \Rightarrow -L^{(w)} - L^{(t)} + W = 0$$

$$(+\circlearrowleft)\, \Sigma M_z^a = 0 \Rightarrow Ta + Db + L^{(t)}(d+e) + L^{(w)}e = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

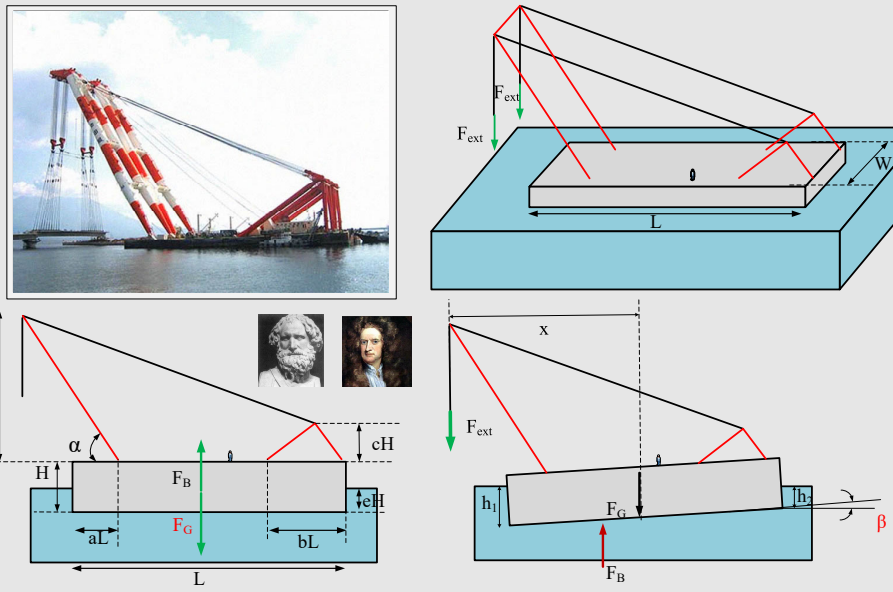
$$T = D$$
$$L^{(t)} = -\frac{D(a+b)+We}{d}$$
$$L^{(w)} = W + \frac{D(a+b)+We}{d}$$

我们注意到, 要保持平衡需要下向尾部力量。

19.2.10 例题 19.10: 吉姆博酒

尺寸 A "吉姆博酒吧"[a] 什么是升力一个荷载 $2F_{ext}$. 字符串的特征在下面显示 L, H, W 和 W, 是长度, 高度, 宽度和重量, 的绳子; F_G 和 F_B 是重力和 Booyancy 力量。假设重力的中心是 $L/2$, $W/2$, 和 $H/2$. 因子 a, b, c, d 和 e 被认为是已知的。

部分 I 假设布局是硬的。

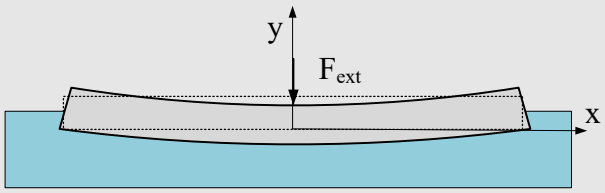


1. 假设没有外部 荷载, 解决 e (水底下方的裂缝高度).
2. 为了外部力量 F_{ext},
   (a) 制定一个清晰的自由体图
   (b) 写下适用的方程式 (s) 解决为 h_1, h_2 和 β.
   (c) 确定最大力量 F_{max} 可以升起的 (在水淹没后方,)

二部分 假设布局是灵活的, 所以 $F_{ext} \gg F_G$, 并被应用于 $L/2$. 以垂直 位移 的角度引导统治差异方

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

程式 y 和布宜安式制服 荷载 q_B.



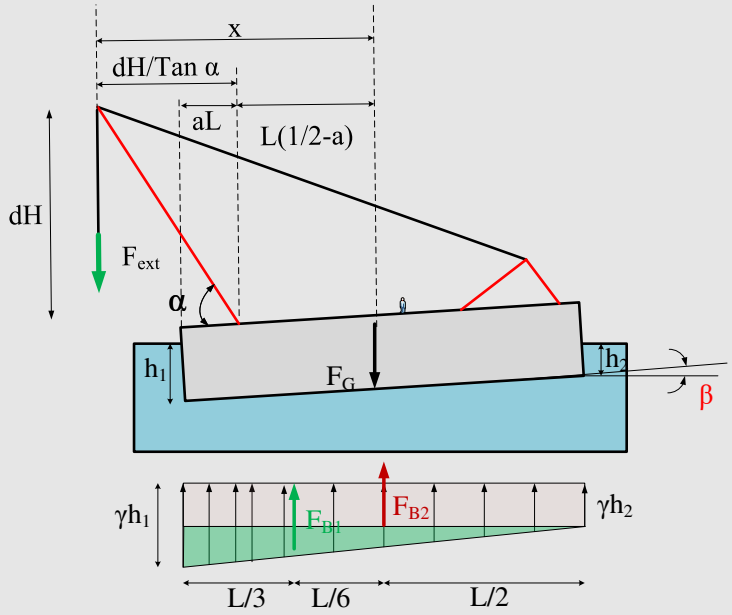
部分 I 坚固的布局

1. 根據阿基米德的法則, 水瓶的重量等於流水的重量的重量。

$$F_G = \gamma.W.L.eH \Rightarrow e = \frac{F_G}{\gamma.W.L.W}$$

2. 为了外部力量 F_{ext},

(a) 自由体图



(b) 写下适用的方程式 (s)

- 布鲁塞尔力量:

$$F_B = F_{B1} + F_{B2}$$
$$F_{B1} = \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2}$$
$$F_{B2} = \gamma h_2 WL$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 地质学

$$x = \frac{dH}{\tan}\alpha + L\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

- 關於中心的瞬間集合

$$\begin{aligned} F_{ext}x - F_{B1}\frac{L}{6} &= 0 \\ F_{B1} &= \frac{6F_{ext}x}{L} \\ \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} &= \underbrace{\frac{6F_{ext}}{L}\left[\frac{dH}{\tan\alpha} + L\left(\frac{1}{2} - a\right)\right]}_{A} \end{aligned}$$

- 垂直力量集合

$$\begin{aligned} F_{B1} + F_{B2} - F_G - F_{ext} &= 0 \\ F_{B2} &= F_G + F_{ext} - F_{B1} \\ \gamma h_2 WL &= F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L} \\ h_2 &= \frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} \end{aligned}$$

- 解决為 h_1

$$\begin{aligned} \gamma(h_1 - h_2)W\frac{L}{2} &= A \\ h_1 &= \frac{2A}{\gamma WL} - h2 \end{aligned}$$

- 解决為 β

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{h_1 - h_2}{L}\right)$$

(c) 对于这条线路, “升力 关闭”, $h_2 = 0$ 或

$$\frac{F_G + F_{ext} - \frac{6F_{ext}x}{L}}{\gamma WL} = 0 \Rightarrow F_{ext} = \frac{F_G}{6x/L - 1}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

二部分 灵活的布局

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M}{EI} \\
\frac{d^2M}{dx^2} &= q \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{q}{EI} \\
q &= -\gamma W y \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= -\frac{\gamma W y}{EI} \\
k^2 &= \frac{\gamma W}{4EI} \\
\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y &= 0
\end{aligned}$$

它是相同的方程式, 与梁在弹性基础上。第四条相同的差异方程式的解决方案是 $y = e^{\alpha x}$, 这导致

$$\begin{cases} \dfrac{d^4}{dx^4} - \alpha^4 y = 0 \\ \dfrac{d^4y}{dx^4} + 4k^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 = -4k^4 \\ \alpha^2 = \pm 2ik^2 \\ \alpha = \pm\sqrt{\pm 2ik} \\ \quad = \pm(1 \pm i)k \end{cases}$$

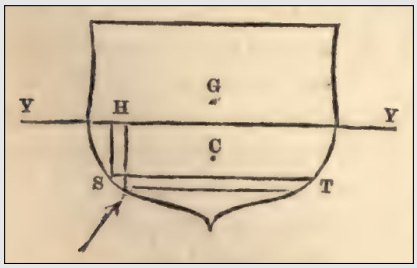
或

$$y = e^{kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{-kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

[a]以阅读为灵感 this article

19.2.11 例题 19.11: 排名: 平衡的浮动身体 (液化证据)

这个例子跟随 Rancine 的经典证据, 即液体在浮动身体上的结果作用是垂直上向的力量, 相当于移动液体的重量, 通过中间的作用。转换 体积 (布宜安的中心). (Rankine, 1858, Art. 120)



Floating body (Rankine, Art. 120). 让 YY 标记液体的水平自由表面。考虑一个小飞机部分的沉浸区域 S, 其中心位位于垂直深度 x 下面 YY. 压力的水位强度在这个深度是

$$p = wx,$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 w 是液体的重量每 单位体积。压力 所涉及的 S 因此是 pS 正常地在表面上行事。
让 α 是飞机区域之间的角度 S 地平线自由表面 (相同的角度压力方向和垂直方向之间).

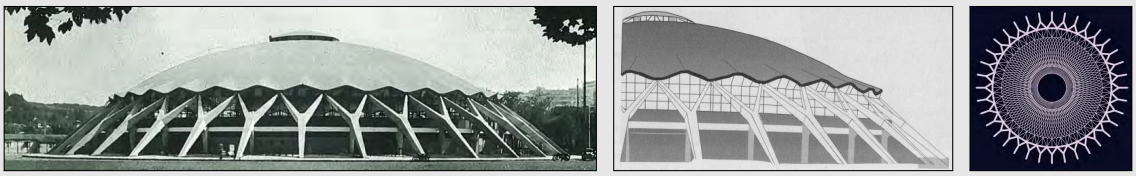
- **预测。** 倾斜区域的垂直投影 S 是
$$S_h = S\cos\alpha,$$
其垂直的预测 S 在垂直平面上, 垂直到垂直的 prism 轴是
$$S_v = S\sin\alpha.$$
- **垂直组件。** 解决 压力 pS 到组成部分, 在行动的水平组件 S 是
$$dF_H = pS_v = (wx)(S\sin\alpha).$$
Rankine 表明, 对于每一个这样的表面 单元 S, 有另一个单元的平等垂直同一深度的投影, 产生平等和相反的水平组成部分。因此, 在整个沉浸的表面上,
$$\sum dF_H = 0,$$
结果的 流体 操作没有水平组件。
- **垂直组件和移动液体。** 压力的垂直组件 S 是
$$dF_V = pS_h = (wx)(S\cos\alpha).$$
数量的 $(S\cos\alpha)\,x$ 代表一个垂直前景的液体柱的体积地平线预测 S 从自由的表面到深度 x. 多元这个 体积 通过 w 把液体的重量放在这个节点上。因此,
$$dF_V = w\,x\,S\cos\alpha$$
它是上方力量等, 反对液体的重量, 由这个身体的原始部分移动。
- **结果的布宜安和其行动线。** 将垂直组件集合到沉浸表面的所有 单元 的, 产生一个单一向上结果。
$$F_B = wV,$$
哪里 V 是移动的总值 体积. 因为每一个元素贡献都通过其原始柱的中心作用, 结果通过通过转移的体积中心, 称为 C 是布宜安的中心。
- **平衡的条件。** 让 W 是浮动身体的重量, 通过它的中心行动重力 G. 平衡 需要
$$W = wV \qquad \text{and} \qquad G \text{ 和 } C \text{ 位于同一竖直线上.}$$

现代集成 表述 (补充). 虽然 Rancine 通过地质分解来确定这一结果, 但相同的结论直接跟着。从现代连续的表述。压力 水位字段是 $p = wz$, 在哪里 z 是自由表面下方的垂直深度。由流体在身体上执行的结果力量是
$$\mathbf{F} = \iint_{\partial V} p\,\mathbf{n}\,dS,$$
哪里 $\mathbf{n}$ 是外部单位正常的平板表面。应用分离理论 (§R.1.2) 到垂直组件,
$$F_z = \iiint_V \frac{\partial p}{\partial z}\,dV = \iiint_V w\,dV = wV,$$
表明所产生的水力是垂直、向上和等于移动的流体的重量。其行动线通过中心的 V, 与 Rankin 的中心的可爱。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

19.2.12 例题 19.12: 体育运动员: 神经

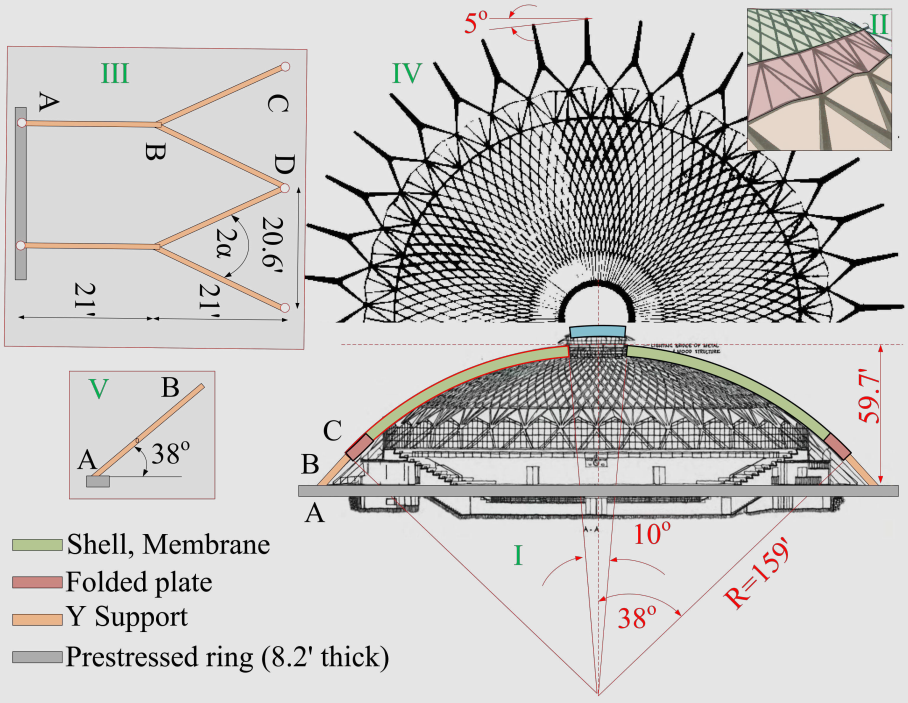
适应从 Structure: An Architect's Approach
Howard, 1966, Mécanique des structures
Voldoire and Bamberger, 2008 和 Structures
Schodek and Bechthold, 2014



名人 **体育馆** [a] 被设计 (建造的) 由 Pierl-Luigi Nervi 在 1958 年参加 1960 年罗马奥运会。它是一個令人震驚的結構, 因為它的美麗、技術優勢和建設方法。正直遵循苏利文的指导原则, "形式跟随功能" 在这里, 它确实是庆祝的。

地质学

它有一个区域性 (膜 壳 最小时刻/看) 均匀支持的折叠板 (灵活性硬) 其次将单一 荷载 转换为 36 Y 形状的支持。他们反过来将荷载转移到基地的预压圆环。



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

负载

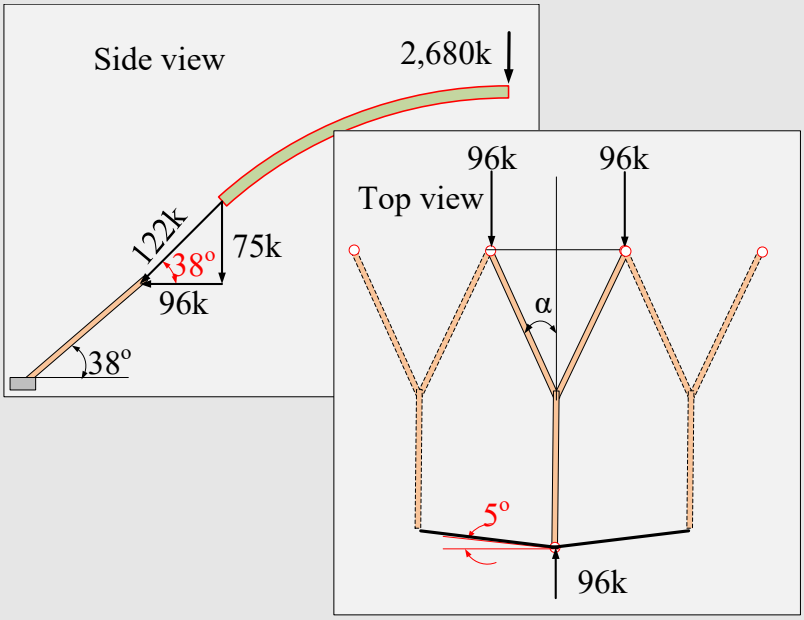
重量 [b] 穹顶重量按每平方英尺平均重量确定。将壳体和肋条合并计算，并取混凝土容重为 150 lb/ft^3，得到 61 lb/ft^2；加上保温层和顶棚后，总恒载为 80 lb/ft^2。穹顶顶棚取 40 lb/ft^2。广度两个圆圈之间的一个领域的区域由公式提供 $\pi R^2(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)$ 哪里 ϕ_1 是 Colatitude 的角度 (角度从北极, 或顶部, 的圆圈下测量).

$$\begin{array}{rrcl} \text{Cupola} & 2\pi(159)^2(\cos 0^\circ - \cos 5^\circ)(40)\ \text{psf} & = & 25\ \text{k} \\ \text{Shell} & 2\pi(159)^2(\cos 5^\circ - \cos 38^\circ)(80)\ \text{psf} & = & 2,655\ \text{k} \end{array}$$

因此, 总体重是 680 基普.

力量

每個泡沫都會帶來 $N_{AB} = 2,655/36 \simeq 75$ 各式各的芯片。根据以下自由体图表:



相应的力量在 Y 支座的附件上将是

$$N_{AB} = \frac{75}{\sin 38^\circ} = 122\ \text{k}; \quad N_{AB}^{\text{hor}} = \frac{75}{\tan 38^\circ} = 96\ \text{k}$$

从地质学

$$\tan\alpha = \frac{20.6}{21} \Rightarrow \alpha = 26^\circ$$

因此, 在 BC 的轴力将是

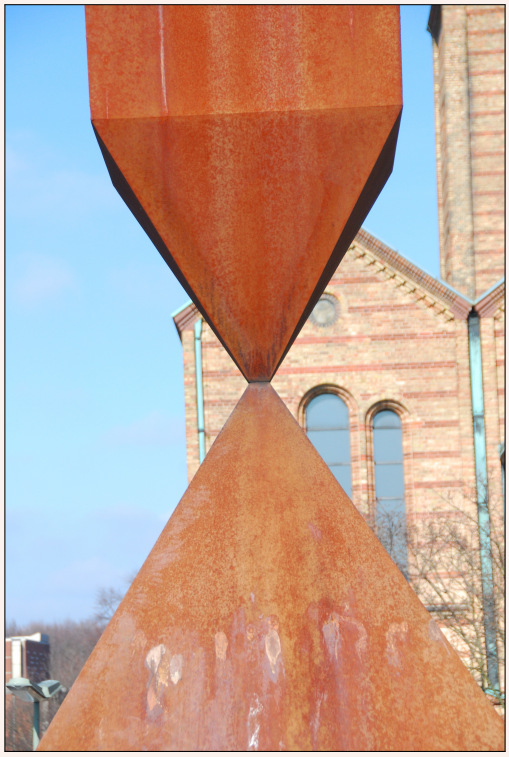
$$N_{BC} = \frac{122}{2}\frac{1}{\cos 26^\circ} = 68\ \text{k}$$

压迫的力量 N_p 需要平衡的水平组成部分

$$N_p = \frac{N_{AB}^{\text{hor}}}{2\sin 5^\circ} = 550\ \text{k}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

[a]在高中, 我习惯于在这个标志性的结构中打手球, 这给了我一个非常个人联系。
[b]本题中，力取整至最接近的千磅。



破碎的奥贝利斯克, 巴内特 • 纽曼柏林 (2009)

它抑制直觉, 并强调结构性平衡, 就像工程中的反应如何通过对应应用负载来确保稳定。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

20 威胁

摘要

本章节提供了一个详细的探索桁架分析, 从一个介绍的基本假设, 签约协议, 和定义内部/外部静态不确定性。统治方程仅是静态平衡的方程式。讨论后进展到三个主要解析方法: 关节方法, 部分方法, 和一个矩阵方法。每个方法都通过步骤程序进行全面的解释, 并以示例来补充, 以提高清晰度和促进实践理解。

20.1 引入 733
20.1.1 假设 733
20.1.2 签约 734
20.1.3 确定性和稳定性 734
20.2 分析方法 736
20.2.1 合成方法 736
20.3 部分方法 743
20.3.1 部分方法 743
20.3.2 例题 20.3: 部分方法 743
20.4 共用/矩阵 744
20.4.1 例题 20.4: 简单的特鲁斯; 合体/矩阵方法 745
20.4.2 例题 20.5: 综合特鲁斯; 合体/矩阵方法 748

20.1 引入

1 桁架 是由成员组成的结构。(通常是直) 在相互连接的三角形中安排。会员通常在其端口被认为是粘着的关节连接。(类似于旋转的连接, 不传达时刻) 它允许桁架以特定的机械方式行事。

2 图形类型显示在 图 17.5.

20.1.1 假设

3 桁架的成员之间的连接被认为是 pin 关节。这意味着会员连接到这样一种方式, 他们只能转移轴力。(紧张或压缩) 不要转移时刻。这种假设允许每个合并在两个维度的力量系统中被分析为一个节点, 其中每个方向的力量总数必须是零。

4 桁架 会员假设只在其长度上携带力量。也就是说, 每个成员都处于压缩或紧张状态, 没有弯曲力量考虑。这使得分析非常简化, 通过减少每个成员中考虑的应力因素数量。

5 负载 (力量与反应) 假设只适用于桁架的关节。这个假设是关键的, 因为它避免在成员中旋转时刻, 坚持第二个假设只有轴力。

6 尽管这些关节被模拟为力量转移的粘合物, 但它们在自己的尺寸中被认为是固定的。这意味着关节没有变形, 连接成员之间的角关系保持稳定。

7 在许多托斯分析中, 托斯成员本身的重量往往与他们所承担的负担相比被忽略。这简化了计算, 尽管在实用的应用中, 特别是对于大管或重材料, 会员的体重可以是显著的, 必须考虑。

审阅稿

8 作为有效的荷载携带结构的使用在桥梁、天花板和其他结构形状中广泛应用时显而易见。

9 概念上, 一个桁架可以被认为是一个巨大的梁在两个支持之间。这种类似性是有用的, 因为它简化了桁架如何工作的理解。就像梁一样, 桁架分发在其顶部应用的负载到其端口的支持。然而, 与坚固的 梁 不同, 一个 桁架 通过使用相互连接的三角形配置以更高材料效率的方式进行此事。这些三角形有助于在整个结构中分发力量, 同时最大限度地减少体重。

10 桁架的顶端代码通常处于压缩状态。这些是桁架顶部的水平或滑动器, 从一个端到另一个。

11 相比之下, 桁架的低调体验紧张。这些会员位于桁架的底部, 与上方轴承平行运行。

12 特鲁斯的诊断会员可以受到紧张或压缩, 取决于他们的方向和整体地质。这些直径对上层和下层轨道之间的负载传输至关重要, 以及维护桁架的结构完整性至关重要的。一个 diagonal 成员中的力量的方向和大小取决于负载分布和特定的类型。例如, 在典型的 Pratt 桁架中, 垂直成员处理压缩, 而图形成员则处理紧张。

20.1.2 签约

13 压力是积极的, 压缩是负面的。在桁架上, 轴力被指为在关节上行动的力量。

14 基本方程式

$$\text{Stress-Force: } \sigma = \frac{P}{A}$$
$$\text{Stress-Strain: } \sigma = E\varepsilon$$
$$\text{Force-Displacement: } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \text{Equilibrium: } \quad \Sigma \mathbf{F} = 0$$

20.1.3 确定性和稳定性

15 一个桁架被认为是静态确定, 如果其成员中的内部力量只能用静态平衡的方程式来计算。对于平板轴承, 这些是指在水平和垂直方向的力量总和以及任何点时刻总的每个必须为零的方程。

16 if m 是会员数量, r 反力力量的数量, 以及 j 相同的数量, 我们将有一个总数。$m + r$ 未知和 $2j$ (或 $3j$) 静态方程式 (2D 或 3D 在每个组合). 如果我们没有足够的静态方程式, 那么问题是无限的, 如果我们有太多的方程, 那么桁架是不稳定的。20.1.

17 桁架 可以是静态/外部确定或不确定的反应 (3 或 6 多于 2D 或 3D 问题中的反应).

18 桁架 可能是内部定义或不定义的, 表 20.1.

19 If $m < 2j - 3$ (在 2D) 桁架 不在内部稳定, 当它从其支撑中分离时, 它也不会保持硬体。但是, 当连接到支持器时, 桁架将是硬的。

20 反应可以通过适当的平衡方程式来确定。在 Def 中显示。19.1 (pg. 19.1.2). 桌子 20.2 总结适用的平衡方程式。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

	2D	3D
	静态不确定性	
外部	$r > 3$	$r > 6$
内部	$m + r > 2j$	$m + r > 3j$
不稳定	$m + r < 2j$	$m + r < 3j$

表 20.1: 静态决心和稳定性

表 20.2: 适用 平衡 的方程式

	反应	诺达尔 平衡
2D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣM_Z,	ΣF_X, ΣF_Y
3D	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z, ΣM_X, ΣM_Y, ΣM_Z	ΣF_X, ΣF_Y, ΣF_Z

21 特斯拉在 FIG。20.1 它有 4 个反应, 因此外部不确定。它还有 6 个组合。($j = 6$)4 反应 ($R = 4$) 9 成员 ($m = 9$). 因此, 我们有一个总的 $m + R = 9 + 4 = 13$ 未知和 $2 \times j = 2 \times 6 = 12$ 平衡方程式, 因此, 特鲁斯也内部静态不确定。

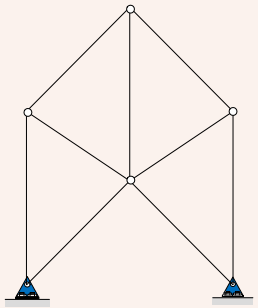


图 20.1: 静态不确定 桁架

22 有两种分析方法, 用于静态定义特征。

1. 关节的方法
2. 部分的方法
3. 矩阵 方法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

20.2 分析方法

20.2.1 合成方法

23 和 **合成方法** 分析桁架中的每个关节, 以确定桁架成员的内部轴力。所涉及的步骤是:

1. 确定结构是否静态定义
2. 计算所有反应
3. Sketch 一个免费的身体图表显示所有合体负载 (包括反应)
4. 对于每个合并, 从负载的开始, 适用适当的等式 平衡 (ΣF_x 和 ΣF_y 在 2D; ΣF_x, ΣF_y 和 ΣF_z 在 3D).
5. 因为桁架 单元只能携带轴力, 因此力量 ($\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$) 必须沿着会员, 图 20.2.

$$\frac{F}{L} = \frac{F_x}{L_x} = \frac{F_y}{L_y}$$

6. 通常, 最好先计算反应。
7. 然后移动到一个不超过两个未知的力量存在的地方, 往往在桁架边界。
8. 将静态 平衡 方程式应用到每个关节:
9. 解决这些方程式, 以便在附属成员中找到力量, 在那里积极的值表明紧张, 而负面的值则表明压缩。
10. 总是跟着你的 x 和 y 一个成员力量的组成部分 (F_x, F_y), 因为这些可能需要以后, 当考虑到强度平衡在其它附属, 该附属的附属 20.2.

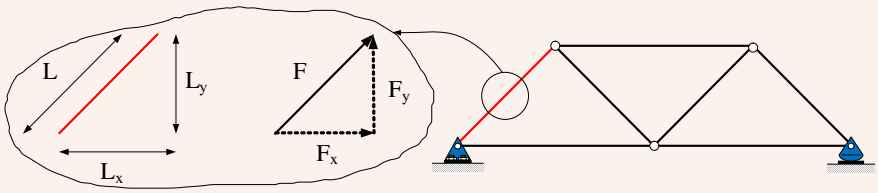


图 20.2: 力量与长度之间的关系

11. 移动到下一个联合, 重复这个过程, 直到所有成员力量都被确定。

这种方法特别适用于较小的特斯拉, 或者需要有关每个成员的详细信息。

24 在 桁架 分析中, 没有标志协议。一个成员是假设处于紧张状态 (或压缩). 如果分析后, 力量被发现是负面的, 那么这意味着错误的假设已经发生了, 并且成员应该在压缩下。(或紧张).

25 在一个自由的身体图表上, 内部力量是由在关节上行动的子弹而不是作为单元本身的终端力量所代表。这就是紧张, 箭头从关节中指向远方, 并对关节进行压缩, 图 20.3.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

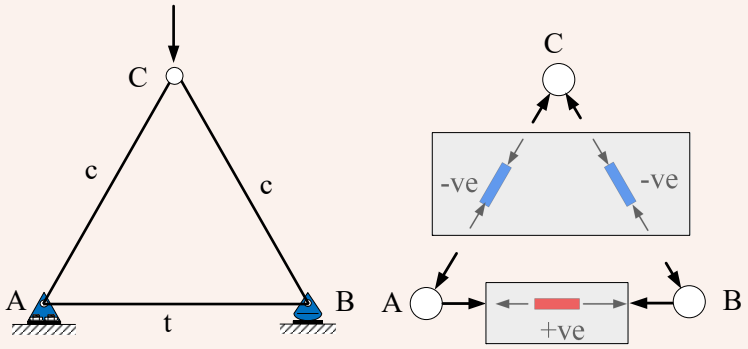
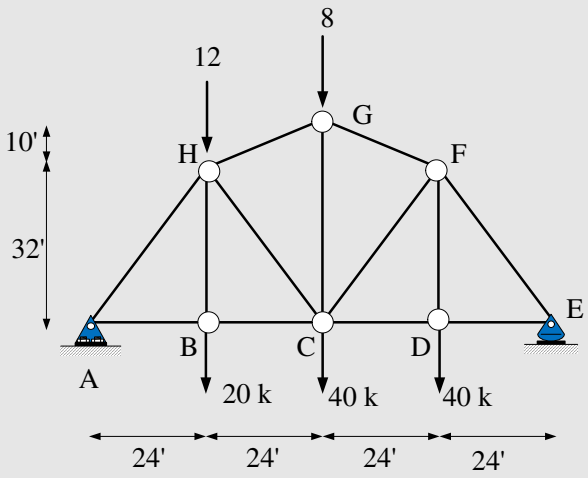


图 20.3: 用火箭展示力量

20.2.1.1 例题 20.1: 桁架分析; 关节方法

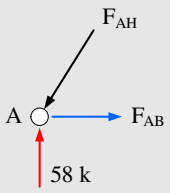


1. $R = 3, m = 13, 2j = 16$, 和 $m + R = 2j$✓
2. 计算反应

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^E = 0; \quad &\Rightarrow \quad (20+12)(3)(24) + (40+8)(2)(24) + (40)(24) \\
&\quad -R_{A_y}(4)(24) = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 58 \text{ kip } \uparrow \\
(+\downarrow)\,\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad 20 + 12 + 40 + 8 + 40 - 58 - R_{E_y} = 0 \\
&\Rightarrow \quad R_{E_y} = 62 \text{ kip } \uparrow
\end{aligned}
$$

3. 考虑每个组单独:

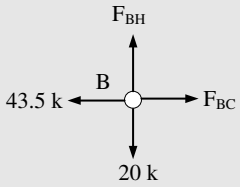
点 A: 清晰 AH 被压缩, 并且 AB 紧张下



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

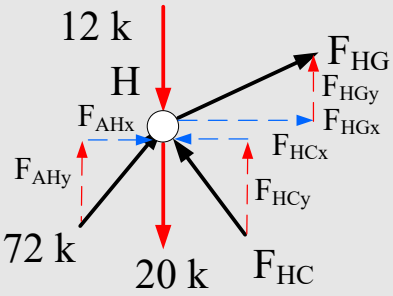
$$
\begin{aligned}
(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_y} + 58 = 0 \\
&\quad\; F_{AH} = \tfrac{l}{l_y}(F_{AH_y}) \\
&\quad\; l_y = 32; l = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \\
&\Rightarrow \quad F_{AH} = \tfrac{40}{32}(58) = 72.5 \text{ kip C} \\
(+\rightarrow)\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad -F_{AH_x} + F_{AB} = 0 \\
&\quad\; F_{AB} = \tfrac{L_x}{L_y}(F_{AH_y}) = \tfrac{24}{32}(58) = 43.5 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

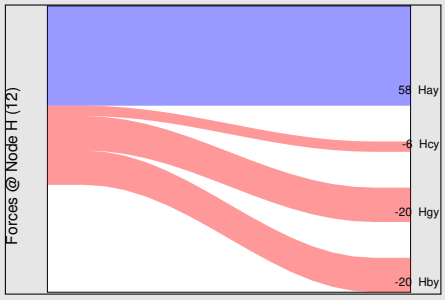
节点 B:



$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\Sigma F_x = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BC} = 43.5 \text{ kip T} \\
(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; \quad &\Rightarrow \quad F_{BH} = 20 \text{ kip T}
\end{aligned}
$$

点 H:





除了自由体图之外, 正确的图表显示了“荷载 路径”点 H[a] 阿尔及利亚, 这就是“流”垂直力量在节点上 H.

$$
\begin{aligned}
(+\rightarrow)\Sigma F_x = 0; &\Rightarrow F_{AH_x} - F_{HC_x} + F_{HG_x} = 0 \\
\Rightarrow 43.5 - \frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) + \frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) &= 0 \\
(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; &\Rightarrow F_{AH_y} + F_{HC_y} - 12 + F_{HG_y} - 20 = 0 \\
\Rightarrow 58 + \frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}}(F_{HC}) - 12 + \frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}}(F_{HG}) - 20 &= 0
\end{aligned}
$$

可以最方便地写作, 如

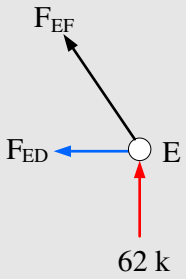
$$
\begin{bmatrix} 0.6 & -0.921 \\ -0.8 & -0.385 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 43.5 \\ 26.0 \end{Bmatrix}
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

解决我们得到的 $F_{HC} = -7.5$ 和 $F_{HG} = -52$ 因此, 我们在 H 节点的自由体图表中做了一个错误的假设, 最终答案是:

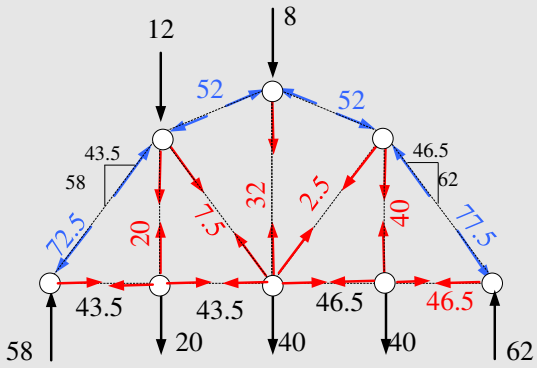
$$F_{HC} = 7.5 \text{ kip T}$$
$$F_{HG} = 52 \text{ kip C}$$

点 E:



$$\Sigma F_y = 0; \Rightarrow F_{EF_y} = 62 \Rightarrow F_{EF} = \frac{\sqrt{24^2 + 32^2}}{32}(62) = 77.5 \text{ kip C}$$
$$\Sigma F_x = 0; \Rightarrow F_{ED} = F_{EF_x} \Rightarrow F_{ED} = \frac{24}{32}(F_{EF_y}) = \frac{24}{32}(62) = 46.5 \text{ kip T}$$

此分析的结果总结

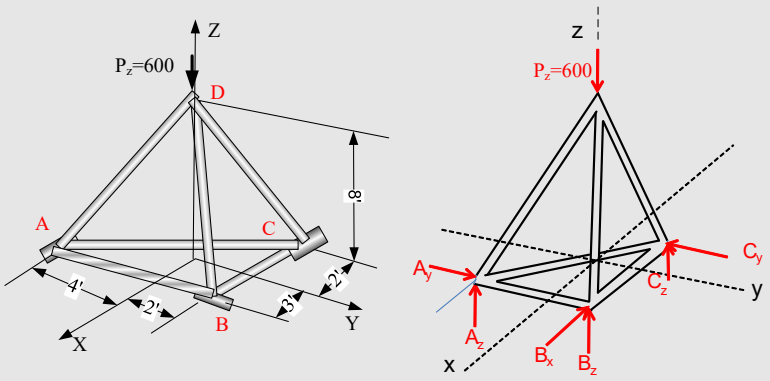


我们可以通过在未使用的节点上验证平衡的力量来检查我们的计算, 例如: D

[a] 这就是所谓的 *Alluvial* 图表.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

20.2.1.2 例题 20.2: 3D 桁架



$A(3,-4,0)$, $B(3,2,0)$, $C(-2,2,0)$, 和 $D(0,0,8)$. 没有反应在 x 或 y 方向 (结构在冰上, 没有侧 荷载).

程序

顺序解决

1. 反应

$$\begin{aligned}\Sigma M_{AB}=0 &\Rightarrow C_z\checkmark\\ \Sigma M_{CB}=0 &\Rightarrow A_z\checkmark\\ \Sigma F_z=0 &\Rightarrow B_z=40.0\checkmark\\ \Sigma F_x=0 &\Rightarrow B_x\checkmark\\ \Sigma F_y=0 &\Rightarrow A_y\checkmark; C_y\checkmark\end{aligned}$$

2. 共 B

$$\begin{aligned}&L_{BD}\\ \Sigma F_z=0; &\Rightarrow F_{BD}\checkmark\\ &F^x_{BD}\\ &F^y_{BD}\\ \Sigma F_x=0; &\Rightarrow F_{BA}\checkmark\end{aligned}$$

3. 共同 A

$$\begin{aligned}&\alpha\checkmark\\ &L_{AD}\checkmark\\ \Sigma F_z=0; &F_{AD}\checkmark\\ \Sigma F_x=0; &F_{AC}\checkmark\end{aligned}$$

4. 共 C

$$\begin{aligned}&F^Z_{CD}\checkmark\\ \Sigma F_Z=0 &\Rightarrow F_{CD}\checkmark\end{aligned}$$

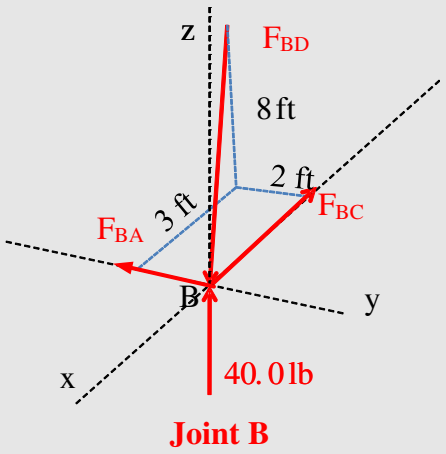
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

解决方案

1. 考虑到整个 桁架 的自由体图

$$\Sigma M_{AB} = 0; C_z(5) - 600(3) = 0 \Rightarrow C_z = 360$$
$$\Sigma M_{CB} = 0; 600(2) - A_z(6) = 0 \Rightarrow A_z = 200$$
$$\Sigma F_z = 0; B_z + 200 + 360 - 600 = 0 \Rightarrow B_z = 40.0$$
$$\Sigma F_x = 0; B_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0; A_y - C_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0; A_y(3) + C_y(2) = 0; \Rightarrow A_y = C_y = 0$$

2. 共同 B



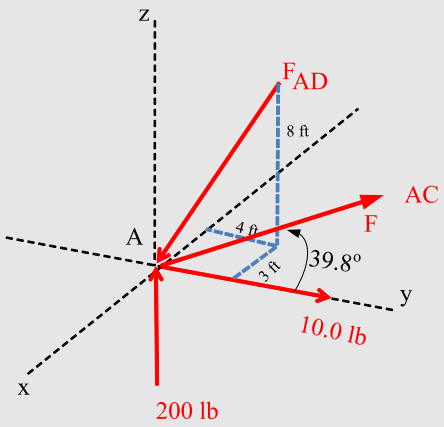
Joint B

$$L_{BD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77}$$
$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{77}} F_{BD} + 40 = 0; \Rightarrow F_{BD} = 43.87 \text{lbf (C)}$$
$$\Sigma F_x = 0; F_{BD}^x - F_{BC} = 0$$
$$F_{BD}^x = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{3}{\sqrt{77}}(43.87)$$
$$F_{BC} = 15.0 \text{lbf (T)}$$
$$\Sigma F_y = 0; F_{BD}^y - F_{BA} = 0$$
$$F_{BD}^y = \frac{L_x}{L} F_{BD} = \frac{2}{\sqrt{77}}(43.87)$$
$$F_{BA} = 10.0 \text{lbf (T)}$$

3. 共同 A

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。



$$\tan(\alpha) = \frac{L_x}{L_y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = 39.8\,\text{deg}$$

$$L_{AD} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{89}$$

$$\Sigma F_z = 0; \frac{-8}{\sqrt{89}} F_{AD} + 200 = 0 \Rightarrow F_{AD} = 236\text{lbf (C)}$$

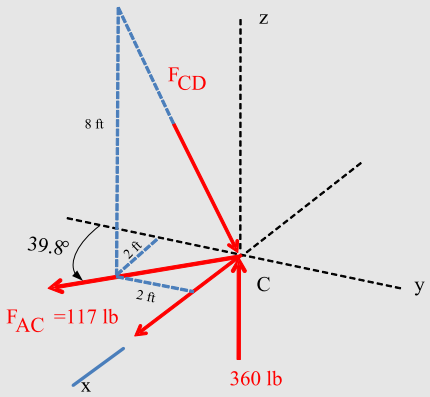
$$\Sigma F_x = 0; F_{AD}^X - F_{AC}^X = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{89}}(235.9) - F_{AC}\sin(39.8°) = 0 \Rightarrow F_{AC} = 117\text{lbf (T)}$$

检查

$$\Sigma F_y = 0 F_{AC}^Y - F_{AD}^Y + 10 = 0$$

$$117.2\cos(39.81^o) - \frac{4}{\sqrt{89}}(235.9) + 10.0 = 0 \checkmark$$

4. 共 C



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\Sigma F_Z = 0; F_{CD}^Z + 360 = 0$$
$$\frac{-8}{\sqrt{72}} F_{CD} + 360 = 0$$
$$F_{CD} = 382\text{lbf (C)}$$

20.3 部分方法

20.3.1 部分方法

26 和 **部分方法** 它提供了一个更快的方式, 在特定成员中找到力量, 特别有用于大支部。它涉及:

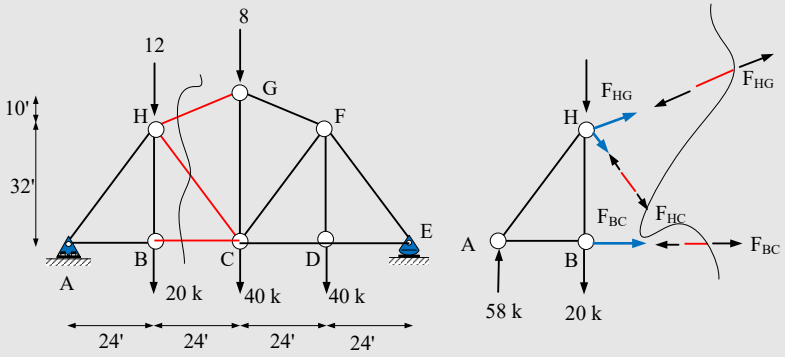
1. 计算托斯的反应支持, 使用托斯总体平衡。
2. 选择一个部分, 切断不超过三名成员的力量是未知的。这个部分应该将桁架分为两个部分。
3. 分析桁架的一部分, 确保它静态确定。
4. 将 平衡 方程式应用到部分
5. 解决这些方程式, 以确定成员中部队的力量。

27 关于某个特定的时刻的总结 (通常是 2 个切割成员的交叉) 它将允许其他成员部队的决定。

28 力量集合通常用于在倾向的成员中确定力量。

20.3.2 例题 20.3: 部分方法

在这个问题上, 我们试图确定 F_{BC} 和 F_{HG} 在前例中。切断成员 HG, HC 和 BC 首先, 我们要对 H 的力量进行总结。



Cut through the members, but in drawing FBD, remove them and just show nodal forces

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^H = 0 \Rightarrow R_{A_y}(24) - F_{BC}(32) &= 0 \\
F_{BC} = \frac{24}{32}(58) &= 43.5 \text{ kip, T} \\
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C &= 0; \\
\Rightarrow (58)(24)(2) - (20+12)(24) - F_{HG_x}(32) - F_{HG_y}(24) &= 0 \\
2784 - 768 - (32)(F_{HG})\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} - (24)(F_{HG})\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} &= 0 \\
2,000 - (29.5)F_{HG} - (9.2)F_{HG} &= 0 \\
\Rightarrow F_{HG} &= 52 \text{ kip C}
\end{aligned}
$$

20.4 共用/矩阵

[29] 这基本上是关节的方法。(在 Steroids) 以 矩阵 格式提交。简单地说, 我们在所有节点上写下所有的平衡方程式, 然后将它们放入矩阵格式。

[30] 因此, 我们试图确定静态 矩阵 $\mathcal{B}$ 与所有 桁架 的 向量 有关 $\{\mathbf{P}\}$ 核部队在全球协调中的所有未知部队 (单元 内部力量在其 局部坐标系 和结构的外部反应), §46.2.1.2.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{FF} & \mathcal{B}_{FR} \\ \mathcal{B}_{RF} & \mathcal{B}_{RR} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} F \\ R \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}} + \underbrace{\{P\}}_{\mathbf{P}} = 0
$$

或

$$\text{Internal Forces-External Forces=0}$$

我们可以思考 $\mathcal{B}$ (静态 矩阵) 如 A “物理系统”, $\mathbf{F}$ a “答案” 和 $\mathbf{P}$ a “强制功能”.

[31] 这种方法可以如下总结:

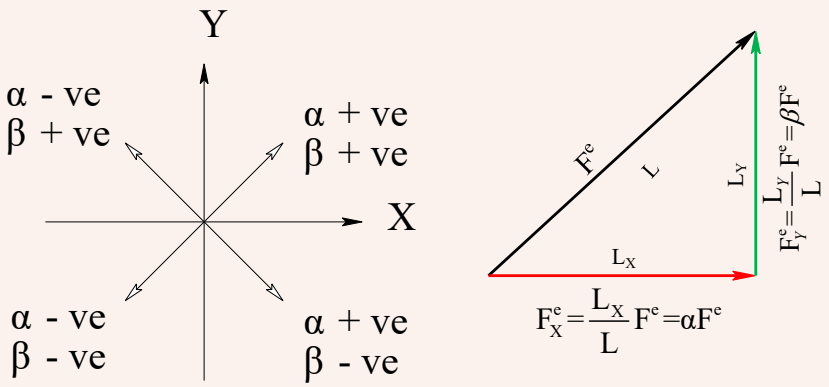
1. 选择协调系统
2. 关节和单元分数
3. 假设
   (a) 所有成员的力量都是积极的 (二、紧张)
   (b) 所有反应都是积极的
4. 计算方向的同位素 在每个节点 j 而为每個 单元 e, 图 20.4a

$$
\begin{aligned}
\alpha_j^e &= \frac{L_x}{L} \\
\beta_j^e &= \frac{L_y}{L}
\end{aligned}
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

单元 e 连接联合 i 到 j 将有 $\alpha_i^e = -\alpha_j^e$, 和 $\beta_i^e = -\beta_j^e$, 和矩阵 $[B]$ 将有 $2j$ 序列和 $m + r$ 列。它只能逆转, 如果是相似的。(伊。$2j = m + r$ 静态定义).

5. 在每个组合中写下平衡的两个方程式 j 至于未知者 (成员力量与反应)



(a) 指向科森　　(b) 联合力量

图 20.4: 合体/矩阵方法, 合体自由体图表

$$(+\rightarrow)\, \Sigma F_x = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \alpha_j^e F_e + R_{x_j} + P_{x_j} = 0$$
$$(+\uparrow)\, \Sigma F_y = 0; \Rightarrow \Sigma_{e=1}^{\#\text{ of elements}} \beta_j^e F_e + R_{y_j} + P_{y_j} = 0$$

6. 将 矩阵 转换为计算 $\{F\}$ 和 $\{R\}$

A MATLAB® 编码的实施在 §I.1.1.

[32] 这种方法的优点是, 一旦 $[\mathcal{B}]$ 矩阵 有被逆转, 我们可以轻松地重新分析相同的结构不同 荷载 案例。随着新设计代码, 死负和活负分别因果 (章节 37) 这种方法可以节省大量的重新分析努力。此外, 当虚拟力量方法确定缺陷时 (章节 24) 二是分析 (真实的荷载, 和单位虚拟一) 可以轻松完成。

[33] 这种方法可能是唯一适当的静态分析确定哪个解决方案对前两种方法进行分解, 图 20.5.

20.4.1 例题 20.4: 简单的特鲁斯; 合体/矩阵方法

确定下列 桁架 的所有成员力量

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

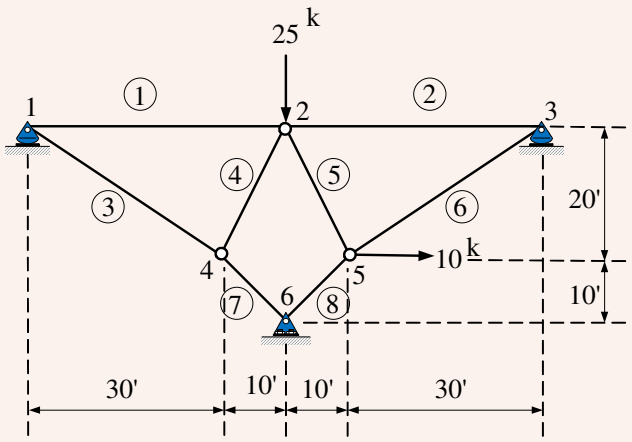
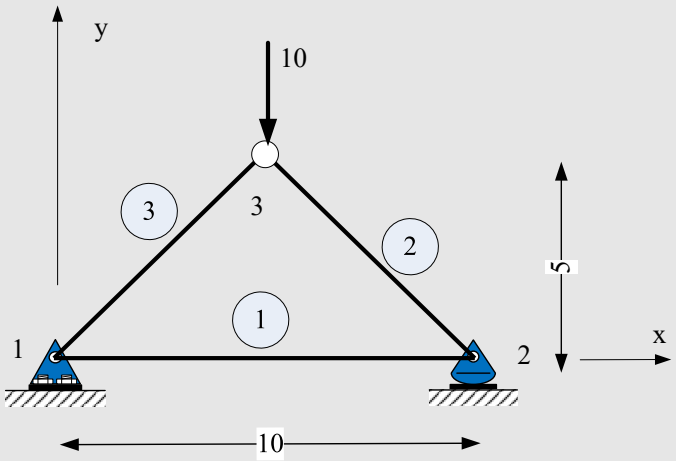


图 20.5: 复杂静态定义 桁架



1. 首先, 我们要确定方向的同步。

会员	诺德	α	β	α	β
1	1-2	诺德 1		诺德 2	
		$\alpha_1^1 = 1$	$\beta_1^1 = 0$	$\alpha_2^1 = -1$	$\beta_2^1 = 0$
2	2-3	诺德 2		诺德 3	
		$\alpha_2^2 = -.7071$	$\beta_2^2 = .707$	$\alpha_3^2 = .707$	$\beta_3^2 = -.707$
3	3-1	诺德 3		诺德 1	
		$\alpha_3^3 = -.707$	$\beta_3^3 = -.707$	$\alpha_1^3 = .707$	$\beta_1^3 = .707$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

2. 接下来我们写下平衡的方程式

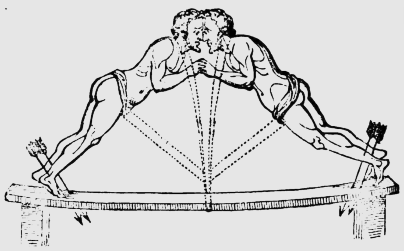
$$\begin{array}{lll} & & \begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & R_{1x} & R_{1y} & R_{2y} \end{matrix} \\ \text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & 0 & \alpha_1^3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} \beta_1^1 & 0 & \beta_1^3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Node 2} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} \beta_2^1 & \beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Node 3} & \Sigma F_x = 0 & \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \Sigma F_y = 0 & \begin{bmatrix} 0 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{Bmatrix}}_{\{F\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}}_{\{P\}} = 0$$

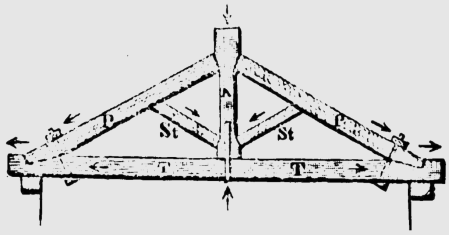
或

$$\begin{array}{ll} \text{Node 1} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{Node 2} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \\ \text{Node 3} & \Sigma F_x = 0 \\ & \Sigma F_y = 0 \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 0 & .707 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & .707 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & .707 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & .707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -.707 & -.707 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{[\mathcal{B}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{Bmatrix}}_{\{F\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}}_{\{P\}} = 0$$

逆转 $[\mathcal{B}]$ 我们从 $F = -[\mathcal{B}]^{-1}P$

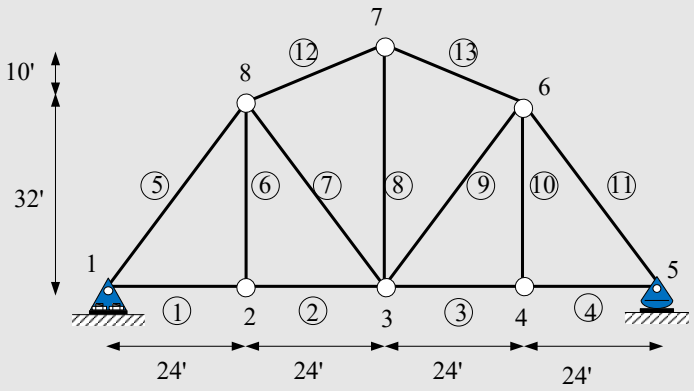
$$\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{2_y} \end{array}\right\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -7.07 \\ -7.07 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$$





结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

20.4.2 例题 20.5: 综合特鲁斯; 合体/矩阵方法



1. 定义方向配方

$$\frac{24}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{32}{\sqrt{24^2+32^2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$
$$\frac{10}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{10}{26} = 0.38$$
$$\frac{24}{\sqrt{24^2+10^2}} = \frac{24}{26} = 0.92$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

2. 设置 The $\mathcal{B}$ 矩阵

$$
\begin{array}{ll}
\#1 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#2 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#3 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#4 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#5 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#6 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#7 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y \\
\#8 & \Sigma F_x \\
 & \Sigma F_y
\end{array}
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccccc|ccc}
1 & & & & .6 & & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & .8 & & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & 1 & & & & -.6 & & .6 & & & & & & & & \\
 & & & & & & .8 & 1 & .8 & & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & & & & & & & -.6 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & .8 & & & & & & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & -.6 & & .6 & & -.92 & & & & \\
 & & & & & & & & -.8 & -1 & -.8 & & .38 & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & -.92 & .92 & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & -.38 & -.38 & & & & \\
\hline
 & & & & -.6 & & .6 & & & & & .92 & & & & & \\
 & & & & -.8 & -1 & -.8 & & & & & .38 & & & & &
\end{array}\right]}_{[\mathbf{B}]}
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ \hline R_{1_x} \\ R_{1_y} \\ R_{5_y}
\end{array}\right\}}_{?}
+
\underbrace{\left\{\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -20 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ -40 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -8 \\ \hline 0 \\ -12
\end{array}\right\}}_{\checkmark}
= 0
$$

3. 转换 (使用 **数学**)

```
b={
{ 1, 0., 0.,  0.,0.6,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0.,  1, 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,0.8,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0., 1,  0.},
{-1, 1,  0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0., 0., 0.},
{0.,0.,  0.,  0.,  0.,   1,  0., 0.,  0.,  0.,  0.,   0.,   0., 0., 0., 0.},
{0.,-1,   1,  0.,  0.,  0.,-0.6, 0.,  0.6, 0.,  0.,   0.,   0., 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0., 0.8, 1.,  0.8, 0.,  0.,   0.,   0., 0., 0., 0.},
{0., 0., -1,   1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,   0.,   0., 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 1.,  0.,   0.,   0., 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  -1,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,-0.6,   0.,   0., 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0., 0.8,   0.,   0., 0., 0., 1.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.6, 0., 0.6,   0.,-0.92, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0., -0.8,-1.,-0.8,   0., 0.38, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., 0.,   0., 0.,  0.,-0.92, 0.92, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,  0.,  0.,  0., -1,   0., 0.,  0.,-0.38,-0.38, 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0., -0.6, 0., 0.6, 0.,   0., 0.,  0., 0.92,  0., 0., 0., 0.},
{0., 0., 0.,  0.,-0.8, -1,-0.8, 0.,   0., 0.,  0., 0.38,  0., 0., 0., 0.}
}
p={0, 0, 0, -20,  0, -40 ,  0, -40,  0, 0,  0, 0, 0, -8,  0, -12}
m=Inverse[b].p
```

4. 最终结果

外出 [3]= -43.5, -43.5, -46.5, -46.5, 72.5, -20., -7.66598, -31.7344, -2.66598, -40., 77.5,

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52.2822, 52.2822, -1.22125 10 , -58., -62.
与未知的单元内部力量和外部反应相匹配。



安塞尔 · 基弗, 达斯 (1990)

坚固但相互连接的元素以形态反映了相关术语子通过三角化有效地分配力量的方式, 确保强度和稳定性。

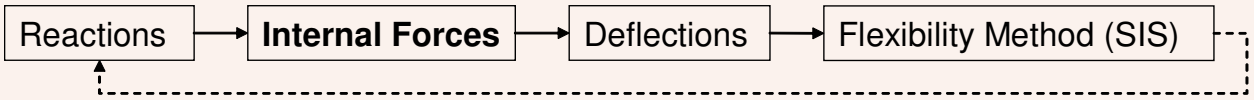
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

21 灵活成员的内部力量

摘要

本章重新审视并强调结构体系中外部需求与内部承载能力之间的基本关系——这一关键概念在标准结构分析教材中常被忽视，甚至完全缺失。因此，本章特意命名为“内力”，区别于传统且较为平常的“剪力图和弯矩图”。第一章是讨论压力与产生的内部力量之间的关系。接下来，它确定了每个结构的相关内部力量。接下来，荷载、表和瞬间关系是衍生的。该章节以一系列逐步复杂的例子结束。

21.1 引入 751
21.1.1 工程方法: 从压力到内部力量 751
21.1.2 2d/3d 直 / 曲线射击的内部力量 752
21.1.3 為什麼這是重要的 754
21.1.4 设计签约 754
21.2 荷载, 表, 瞬间关系 755
21.2.1 差异形式 756
21.2.2 综合形式 757
21.3 例子 757
21.3.1 例题 21.1: 梁 與傾向 荷载 . . 758
21.3.2 例题 21.2: 包含 框架 759
21.3.3 例题 21.3: 框架 與水位性 荷载 762
21.3.4 例题 21.4: 线性不同 荷载 . . 763
21.3.5 例题 21.5: 框架; 例子弯曲天花板 764
21.3.6 例题 21.6: 相反 框架 765
21.3.7 例题 21.7: 3D 框架 769



21.1 引入

21.1.1 工程方法: 从压力到内部力量

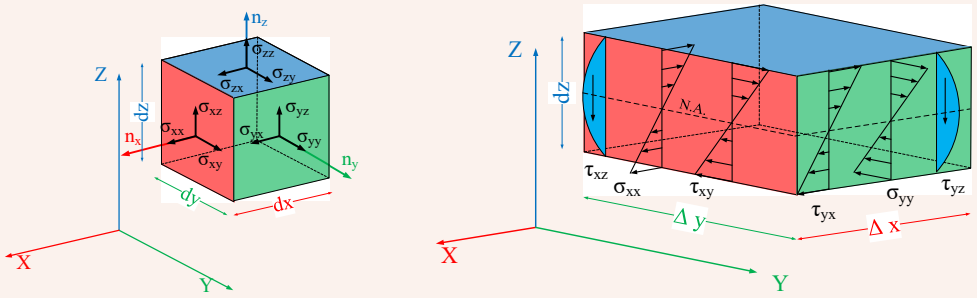
1 压力 (定义在 §O.2.2) 定义在一个无限的点, 图 21.1a 并且有 (典型) 线性分布, 如图中所示 21.1b 对于一个 板 的厚度 t.

2 过渡到内部力量, 这些不是可以直接观察的物理实体; 相反, 我们实际上可以记录和观察的是紧张。他们反过来引发压力, 再也不能直接测量。只有非常有限的和简单的问题只能基于压力分析解决。(Airy 应力 功能或符合地图). 数字上, 我们当然会使用 Continuum Finite 单元 , 在那里解决方案表达于压力。这些压力可以然后集成来计算相应的内部力量, 这些强度是必要的验证符合代码要求。

3 在复杂的场景中进行分析 (实际上是所有问题。) 我们介绍了内部力量的概念。

4 因此, 内部力量是概念性的。**抽象** 用来理解压力在特定区域的影响。数学上, 它们是应力分布在特定领域的组成部分。

5 力量是 **定义** 作为结果



(a) 内部压力在无限的点上　　(b) 压力分布在板上

图 21.1: 内部压力

轴力 $\mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma dz$

$$N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz;\ N_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} dz;\ N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} dz$$

时刻 $\mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma z dz$

$$M_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz;\ M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z dz;\ M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

谢尔 $\mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau dz$

$$V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz;\ V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz$$

6 这些将作为内部力量, 根据结构性单元的类型, 在不同的组合中使用。

21.1.2 2d/3d 直 / 曲线射击的内部力量

7 根据结构类型, 将有不同的力量组合应对, 图 21.2. 请注意, 时刻被显示为双头 vectors 而不是曲线雷 (如同在 Sect 的例子。19.2.8).

8 通常是假设会员在 x 轴, 即轴和沙尔力量被称为 N 和 V, 而扭转和时刻被称为 T 和 M.

9 在评分方面, 常见地标记轴力沿着 x 轴是正常的力量, 并被称为 N 其余的, 是武力。V. 同样的时刻, 在 x 是扭转 T 其他人是时刻。M.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10 考虑到三维内部力量时 (3D) 在背景下，重要的是清楚地说明这些力量的行动方向和计划。(吉。V_x 和 V_y, M_z)[1].

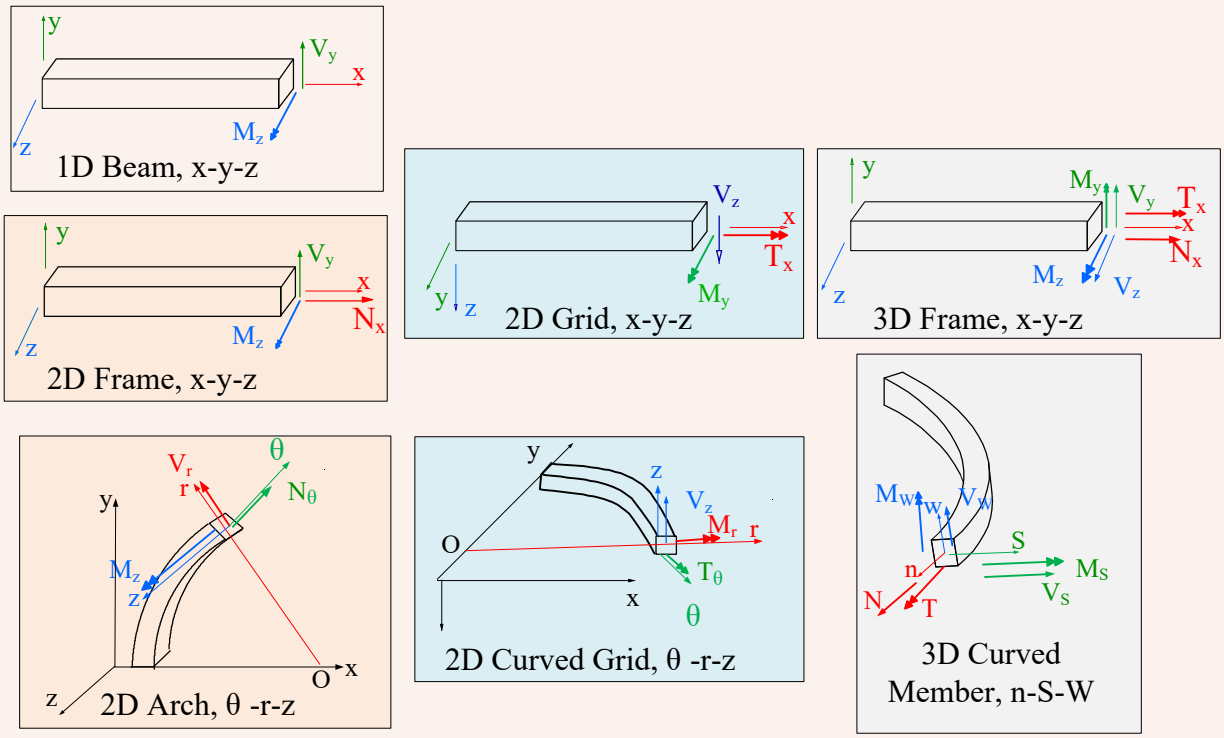


图 21.2: 直线和曲线的内部力量

11 适用的条件如下:

[1]在盘子和壳牌中，我们将有双订阅，图 34.4 和 35.3

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 21.1: 结构中的内部力量

卡特西亚							波兰						
	力量			时刻				力量			时刻		
	x	y	z	x	y	z		r	θ	z	r	θ	z
梁		V_y				M_z	拱	V_r	N_θ				M_z
2D 框架	N_x	V_y				M_z							
网格			V_z	T_x	M_y		曲线 梁			V_z	M_r	T_θ	
3D 框架	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z							

	力量			时刻		
	n	s	w	n	s	w
3D 曲线	N_n	V_s	V_w	T_n	M_s	M_w

21.1.3 为什麼這是重要的

12 在 结构工程, 我们讨论了需求和能力的概念。在本章的背景下, “要求” 指向外部应用的轴力、轴力或时刻力。“能力” 另一方面, 它被定义为结构成员开发内部应力分布的能力。这些内部压力的整体应该是平等和相反的, 与要求所应用的。

13 此分類上一篇: 图 21.3 在某种情况下, 外部荷载会导致一个瞬间沿着成员。作为一个自由的身体图表, 我们将有三个平衡方程来满足, 总结:

1. 武力在 y 垂直方向: $V = R_a - qx$
2. 武力在 x 轴方向: $C = T$
3. 时刻: $M_{ext} = M_{int} = Cd$

14 内部力量, 如这里所定义, 仅在设计中是相关的, 即物质压力驱动关系。根据 Euler-Bernoulli 的假设, 飞机部分剩余的飞机 [2], 应变分布是线性的。然后, 对于任何压力紧张关系, 相应的压力被确定。这是这个应力分布, 这将导致 C, T 和 M_{int}

15 能力与需求之间的平衡要求是一个基本原则, 基于所有设计代码。(查普 37).

21.1.4 设计签约

16 在我们之前 (re) 由 Shear-Moment 关系产生的, 让我们自愿定义一个信号公约。

17 这里通过的标志公约, 是用于设计目的的一种。[3].

18 与图的参考 21.5

[2] 只要宽度/高度大于大约 8。
[3] 后来, 在更先进的分析课程中, 我们将使用不同的一个, §26.1.1

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

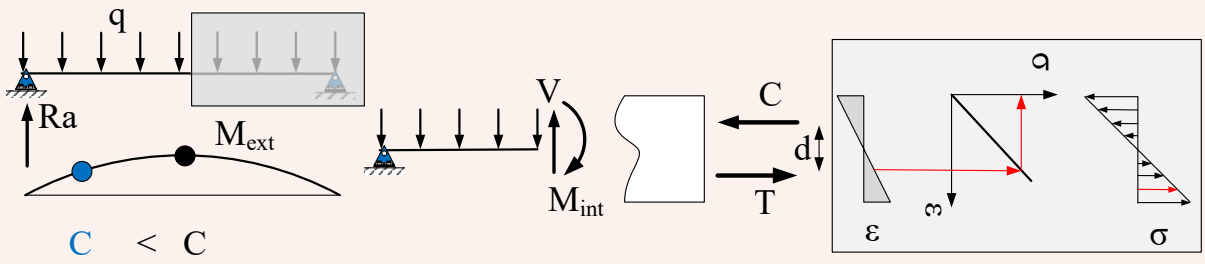


图 21.3: 内部力量

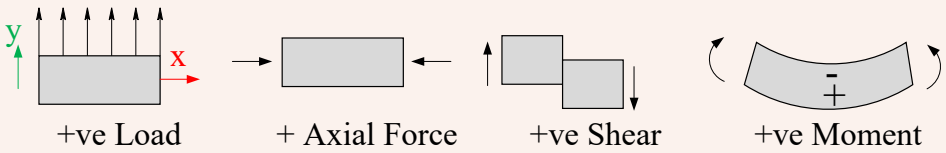


图 21.4: 标签和时刻签名设计公约

图 21.5: 设计签约

荷载 梁的本地 y 轴 (承认一个权利手侧公约) 这是一个积极的上升。

轴心: 积极的紧张。

灵活性: 一个积极的时刻, 是导致下层紧张的时光。纤维和压缩在上方。相反, 时刻在压缩侧被拖动。(有用保持心中的框架).

谢尔: 一个积极的剪力是 “up” 面对一个负面, 或 “下下” 一个积极的。相反, 一对积极的叶子能量會導致時鐘明 转角。

扭转: 对手时钟积极

19 对于所有 3D 分析, 最好使用双箭 vectors。(没有曲折的火箭). 力量和时刻 (包括 Torsion) 因此, 它被定义为右手侧协调系统。

21.2 荷载, 表, 瞬间关系

20 让我们 (re) 基于荷载之间的基本关系, Shear 和瞬间。考虑到无限的长度 dx 由 梁受积极的荷载 [4] $w(x)$, 图 21.6. 无限的部分也必须在 平衡 中。

21 没有轴力。[5] 因此, 我们只有两个平衡的方程式。要满足 $\Sigma F_y = 0$ 和 $\Sigma M_z = 0$.

22 因为 dx 它是无限的, 小差异在荷载 可以被忽略, 因此我们假设 $w(x)$ 要是连续 dx.

[4]在这个衍生, 如同在所有其他人, 我们应该假设所有的数量都是积极的。
[5]轴力将被列入统治屈曲的差异方程式中 (欧拉方程).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

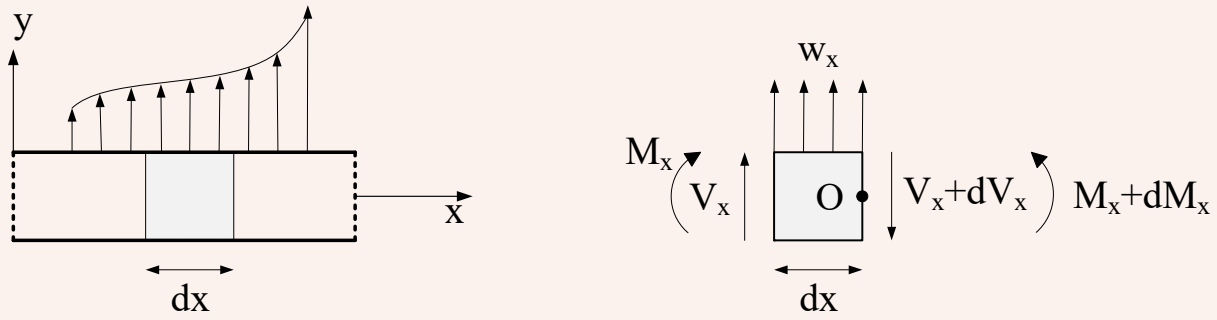


图 21.6: 无限的梁部分的自由体图

23 要注意的是, 一瞬间和一刻中发生了一小变化。长度 dx 從 单元, 我們添加差異数量 dV_x 和 dM_x 到 V_x 和 M_x 右边的面孔。

21.2.1 差异形式

24 下一篇: 考虑平衡的第一方程式

$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_x + w_x dx - (V_x + dV_x) = 0$$

或

定义 21.2: ; 差异性

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

曲线的折叠在任何点沿着一个成员的轴是由此时的荷载曲线提供。

25 同样

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_x + V_x dx - w_x dx \frac{dx}{2} - (M_x + dM_x) = 0$$

Neglecting 其它 dx^2 这个词, 简化了

定义 21.3: 时刻; 差异

$$\frac{dM}{dx} = V(x)$$

瞬间曲线的尾巴在任何点沿着一个成员的轴是由此时此刻所提供的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

21.2.2 综合形式

26 前方程式的替代形式

$$V = \int w(x)\mathrm{d}x$$

或

定义 21.4: 首頁 > Integral

$$\Delta V_{21} = V_{x_2} - V_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\mathrm{d}x$$

交换的线路在 1 和 2, ΔV_{1-2} 与此相同的区域在 荷载 中 x_1 和 x_2.

同样

$$M = \int V(x)\mathrm{d}x$$

或

定义 21.5: 时刻: 完整

$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\mathrm{d}x$$

此时此刻的变化 1 和 2, ΔM_{21} 等同于字幕曲线下的区域 x_1 和 x_2.

27 请注意, 我们仍然需要 V_1 和 M_1 为了确定 V_2 和 M_2.

28 相似的关系将随后确定。(章节 9) 與 曲率 $\frac{M}{EI}$ 和 转角 θ (22.16).

29 在不同负载下, 沿着 梁 的表和时刻的变化显示在 图 21.7. 这个数字可以作为绘制表/时刻图表的指南。

30 对于设计, 我们经常需要考虑不同的荷载组合。对于每个 荷载 组合, 我们应该绘制表、时刻图。然后我们应该使用时刻包装。为设计目的。

21.3 例子

31 下面是一些模拟的例子。它们被仔细选择, 以突出某些过程的微妙复杂性, 或者提供替代方法来确定表和时刻图。有时, 计算是从数字单独进行的, 其他人, 计算显示在自由体图表本身。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

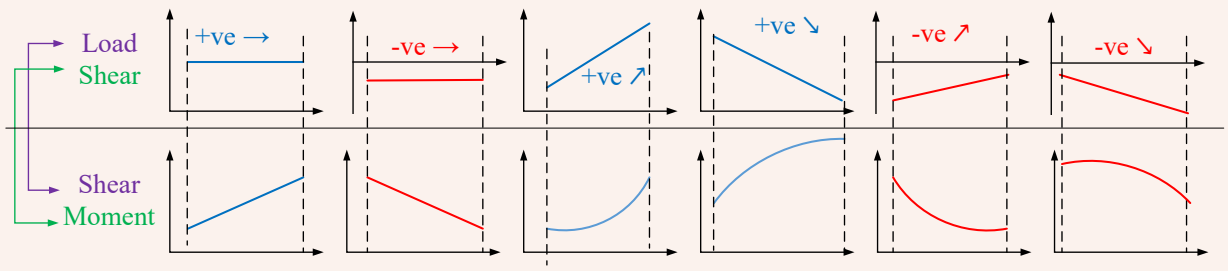
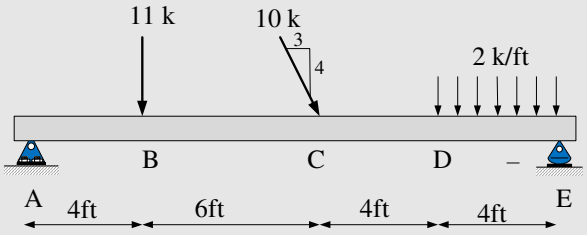


图 21.7: 荷载的变量, 页面和时刻

21.3.1 例题 21.1: 梁 與傾向 荷载



反应 由 平衡 方程式定义

$$(\leftarrow\ )\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow -R_{A_x} + 6 = 0 \Rightarrow R_{A_x} = 6\ \text{k}$$
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0; \Rightarrow (11)(4) + (8)(10) + (4)(2)(14+2) - R_{F_y}(18) = 0$$
$$\Rightarrow R_{F_y} = 14\ \text{k}$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - 11 - 8 - (4)(2) + 14 = 0 \Rightarrow R_{A_y} = 13\ \text{k}$$

谢尔 决定下一个。

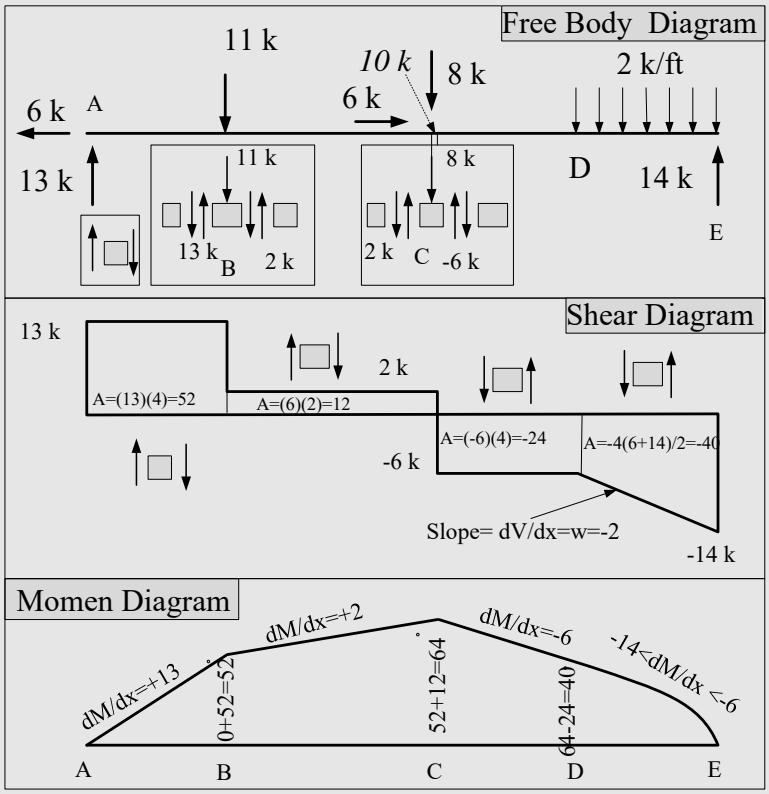
1. 在 A 表格相当于 反力 , 并且是积极的。
2. 在 B 沙子倒下 (负 荷载) 由 11 k 到 2 k.
3. 在 C 它再次落下 8 k 到 −6 k.
4. 它一直保持着 D 然后它减少 (由于荷载是均匀和负面) 由 2 k 以线脚向上 −14 k.
5. 作为检查, −14 k 此前已确定的反力 F.

瞬间 最后确定:

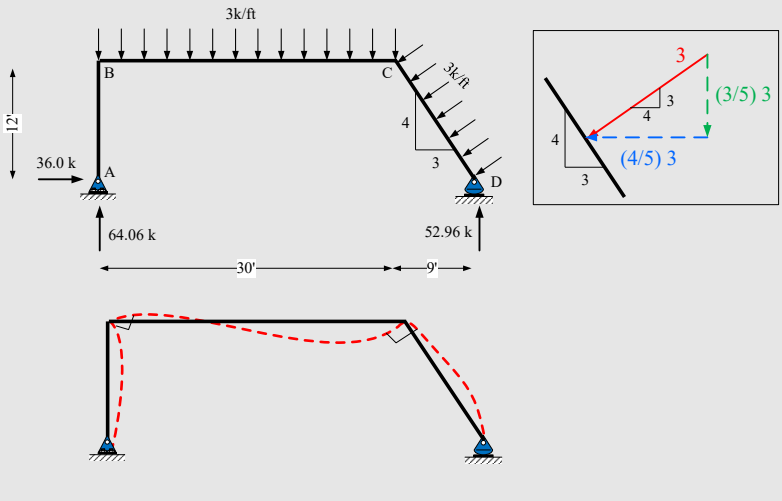
1. 时刻在 A 是零 (支座).
2. 此时此刻的变化 A 和 B 与下方区域相同。相应的表格图, 或 $\Delta M_{B-A} = (13)(4) = 52$.
3. 等等.....

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



21.3.2 例题 21.2: 包含 框架



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

反应 首先确定

$$
\begin{aligned}
(\leftarrow\quad)\Sigma F_x = 0; \Rightarrow R_{A_x} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)}_{\text{load}}(15) &= 0\\
\Rightarrow R_{A_x} &= 36 \text{ k}\\
(+\circlearrowleft)\Sigma M_A = 0; \Rightarrow (3)(30)(\frac{30}{2}) + \underbrace{\frac{3}{5}(3)(15)\left(30+\frac{9}{2}\right)}_{CD_Y} - \underbrace{\frac{4}{5}(3)(15)\frac{12}{2}}_{CD_X} &\\
-39R_{D_y} = 0 \Rightarrow R_{D_y} &= 52.96 \text{ k}\\
(+\uparrow)\Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{A_y} - (3)(30) - \frac{3}{5}(3)(15) + 52.96 &= 0\\
\Rightarrow R_{A_y} &= 64.06 \text{ k}
\end{aligned}
$$

我们隔离每个成员并为每个力量组件绘制其自由体图。

谢尔:

1. 為 $A-B$, 叶子是恒定的, 相当于水平反力在 A 根据我们之前定义的信号公约, $V_A = -36$ k
2. 為會員 $B-C$ 在 B, 必须与垂直相等。被传递的力量 $A-B$ 与垂直相同的反力 在 A, $V_B = 64.06$.
3. 因为 $B-C$ 受均匀负 荷载 的约束, 沿着 $B-C$ 将有相同的脚印。-3 至于, 在 x (测量从 B 到 C) 等同于
$$V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x$$
4. 沿着的 she $C-D$ 它是通过垂直的分解获得的。反力 在 D 以轴和叶子组成部分。因此, 在 D 沙尔等同于 $\frac{3}{5}52.96 = 31.78$ k 而且是消极的。基于我们对 荷载 的标志条约, 必须是同等的 -3 沿着 $C-D$. 此时此刻, she C 是这样的 $V_c - \frac{5}{3}9(3) = -31.78$ 或 $V_c = 13.22$. 对象的平衡是由 (為 x 从去 C 到 D)
$$V = 13.22 - 3x$$
5. 我们通过验证 平衡 的节点来检查我们的计算 C
$$
\begin{aligned}
(\leftarrow\quad)\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow \frac{3}{5}(42.37) + \frac{4}{5}(13.22) = 25.42 + 10.58 = 36\checkmark\\
(+\uparrow)\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow \frac{4}{5}(42.37) - \frac{3}{5}(13.22) = 33.90 - 7.93 = 25.97\checkmark
\end{aligned}
$$

瞬间:

1. 沿着 $A-B$ 现在是零的时刻。A (因为我们有一个戒指), 其 sl, 如同的, 以便在 B 时刻等于 $M_B = (-36)(12) = -432$ k.ft
2. 沿着 $B-C$ 时刻等于
$$
\begin{aligned}
M_{B-C} =& M_B + \int_0^x V_{B-C}(x)\mathrm{d}x = -432 + \int_0^x (64.06 - 3x)\mathrm{d}x\\
=& -432 + 64.06x - 3\frac{x^2}{2}
\end{aligned}
$$

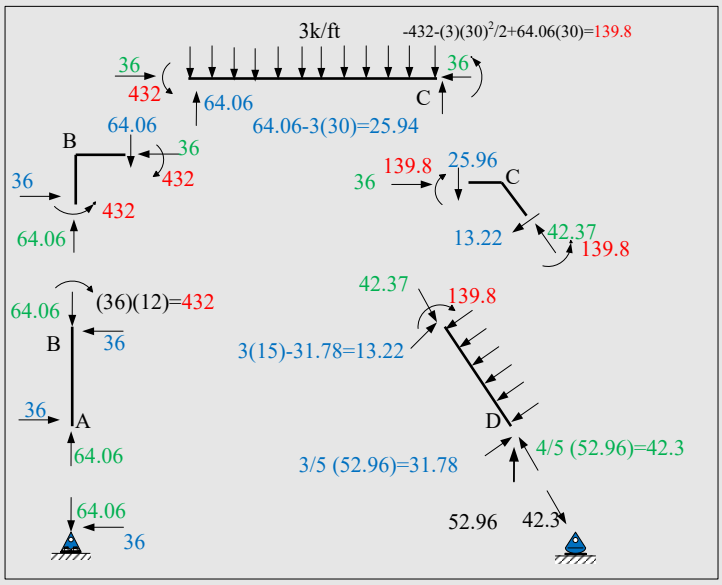
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

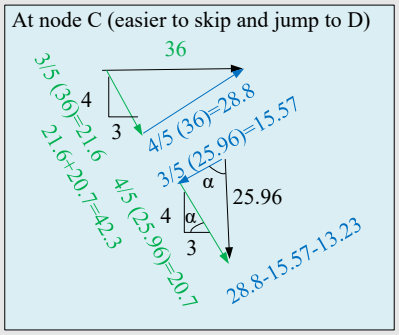
which is a 平凡。替代为 $x = 30$ 我们在 Node 中获取 C: $M_C = -432 + 64.06(30) - 3\frac{30^2}{2} = 139.8$ k.ft

3. 如果我们需要确定最长时间 $B - C$ 我们知道这 $\frac{dM_{B-C}}{dx} = 0$ 到那时, 在 $V_{B-C} = 0$, 这就是 $V_{B-C}(x) = 64.06 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{64.06}{3} = 21.35$ ft. 在其他字, 最高时刻发生在点数为零。这样 $M_{B-C}^{\max} = -432 + 64.06(21.35) - 3\frac{(21.35)^2}{2} = -432 + 1,367.7 - 683.7 = -251.98$ k.ft
4. 最终沿着 $C-D$ 时刻是四方的。(因为我们有一个线性谢尔) 第一刻, 增加了 (积极的 Shear), 然后减少 (负面 Shear). 此时此刻 $C - D$ 被授予

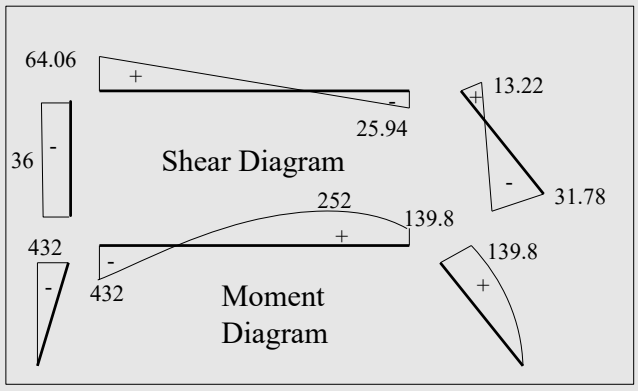
$$M_{C-D} = M_C + \int_0^x V_{C-D}(x)dx = 139.8 + \int_0^x (13.22 - 3x)dx$$
$$= 139.8 + 13.22x - 3\frac{x^2}{2}$$

这是一个模范。替代为 $x = 15$ 我们在 Node 中获取 C $M_C = 139.8 + 13.22(15) - 3\frac{15^2}{2} = 139.8 + 198.3 - 337.5 = 0$✓





cos α=3/5=N/25.96
N=(25.96)(3)/(5)=15.57

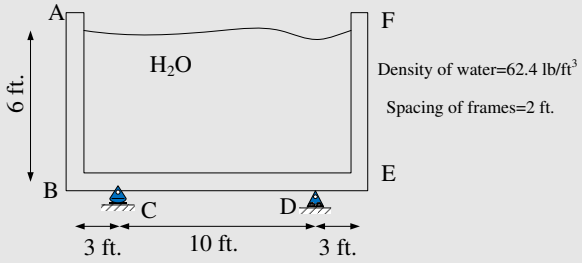


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

21.3.3 例题 21.3: 框架 與水位性 荷载

下一个框架是洪水的结构支持。假设框架在洪水长度 2 英尺分开, 我们寻求

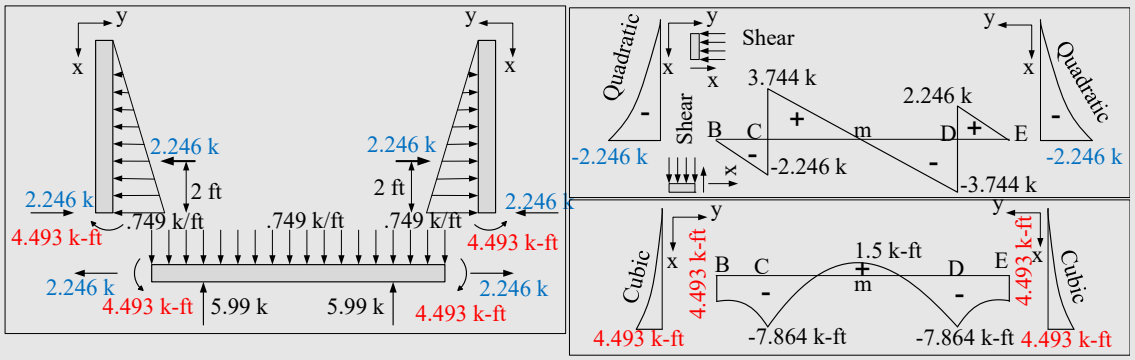
1. 确定所有内部成员终端行动
2. 绘制表和瞬间图表
3. 定位和计算最大内部旋转时刻
4. 如果这是一个增强的混凝土框架, 显示加强的位置。



水静 压力 会导致垂直肢体的侧面力量, 这些部位可以被视为在底端固定的角膜。压力是线性的, 并且由 $p = \gamma h$. 因为每个 框架 都支持 2 英尺宽的喷雾, 因此 w (英镑/脚) 是

$$w = (2)(62.4)(h) = 124.8h \text{ lbs/ft}$$

在基地 $w = (124.8)(6) = 749 \text{ lbs/ft} = .749 \text{ k/ft}$ 请注意, 这既是端墙上的侧 压力 又是垂直成员的单一 荷载。



结束行动

1. 基地力量在 B 是 $F_{Bx} = (.749)\frac{6}{2} = 2.246 \text{ k}$
2. 基本时刻 B 是 $M_B = (2.246)\frac{6}{3} = 4.493 \text{ k.ft}$
3. 终结力量 B 為會員 $B - E$ 平等和相反。
4. 反力 在 C 是 $R_{Cy} = (.749)\frac{16}{2} = 5.99 \text{ k}$

谢尔 力量

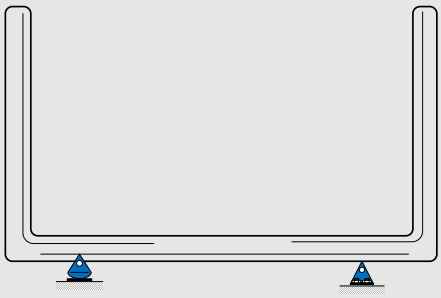
1. 基于 B 剪力 已被确定之前, 并且相当于 2.246 k. 基于其方向的 $x - y$ 轴, 这是一个负面点。
2. 垂直线路在 B 是零 (忽略重量 $A - B$)
3. 左边的 she 子 C 是 $V = 0 + (-.749)(3) = -2.246 \text{ k}$.
4. 向右转向 C 是 $V = -2.246 + 5.99 = 3.744 \text{ k}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

瞬间 图表

1. 在基地: $B\ M = 4.493$ k.ft 如上所述。
2. 在 支座 中 C, $M_c = -4.493 + (-.749)(3)(\frac{3}{2}) = -7.864$ k.ft
3. 最高时刻等于 $M_{\max} = -7.864 + (.749)(5)(\frac{5}{2}) = 1.50$ k.ft

设计: 强化应沿着紧张的纤维放置, 即在负时刻的侧面。[a]. 图表系统地描述了灵活的位置。[b] 强化。



[a]这就是为什么在大多数欧洲国家, 设计时刻的标志公约与美国常用的相反; 强化应该放在时刻的地方。“积极”.

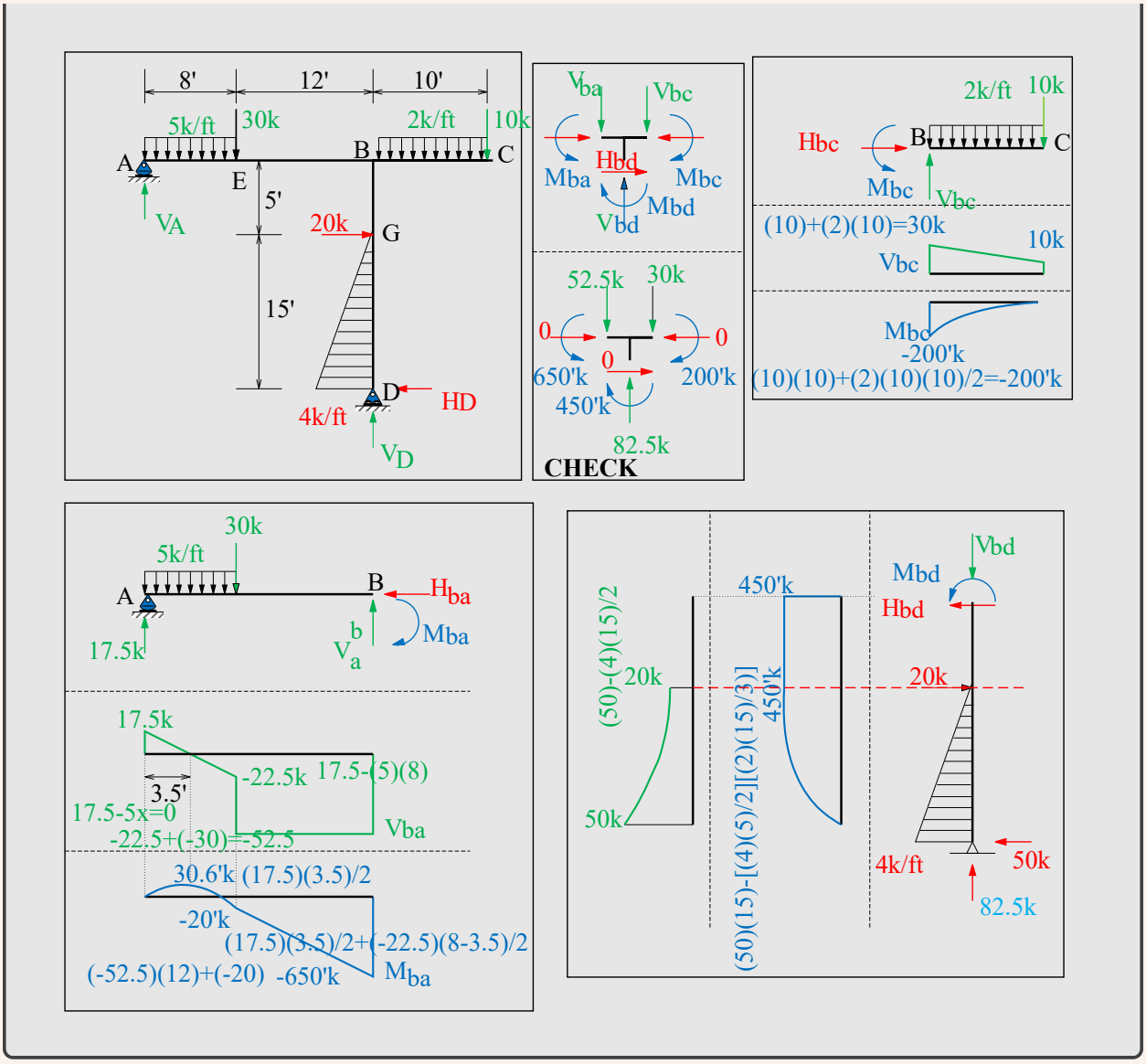
[b]Shear 增強是由一系列垂直旋轉組成的。

21.3.4 例题 21.4: 线性不同 荷载

对于这个例子的计算的细节尚未公布。但是, 表和时刻图可以轻松地确定步骤一步。

审阅稿

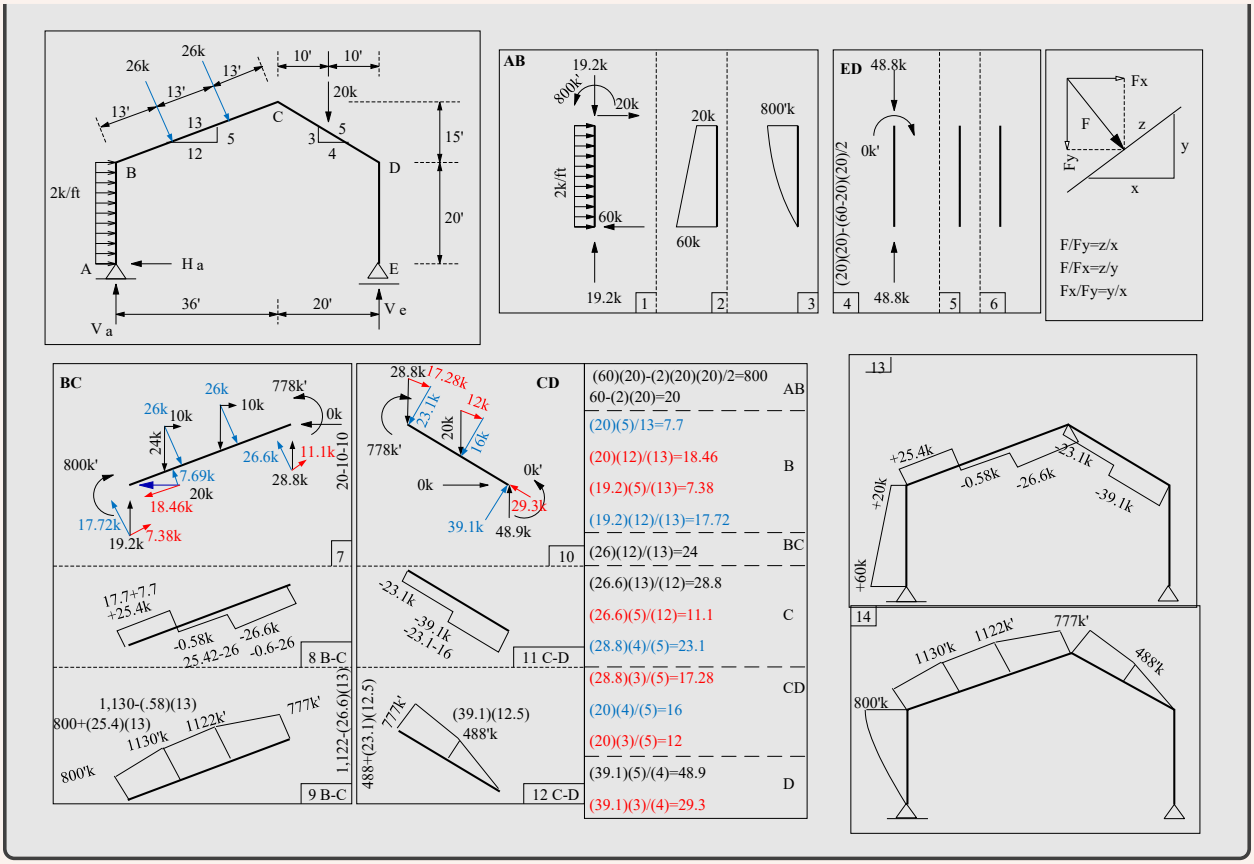
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



21.3.5 例题 21.5: 框架; 例子弯曲天花板

对于这个例子的计算的细节尚未公布。但是, 表和时刻图可以轻松地确定步骤一步。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

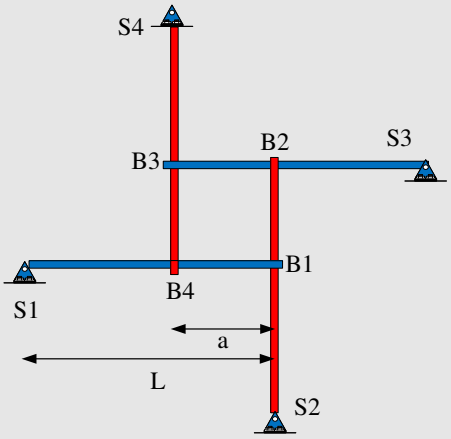


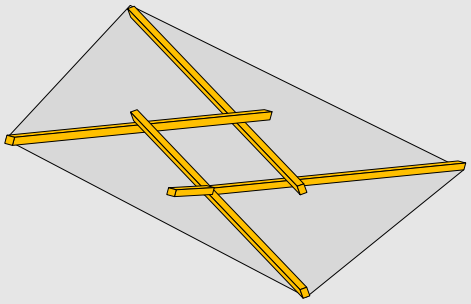
21.3.6 例题 21.6: 相反 框架

下一篇: 重复 Schrama, 2021 *"A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames"*.

简单的相互 框架 (§15.5.3) 由四个射线组成, 每个射线在一个端口由粘贴的周围支持。(S1、S2、S3 和 S4) 另一方面, 另一个泡沫 (B1、B2、B3 和 B4). 泡沫之间的连接作为一个支座。支座的类型取决于使用的连接类型。在某个地方沿着喷雾, 它支持另一个喷雾。支持点和支持点之间的距离称为 **承诺长度**. 从现在开始, 作为一个梁的支座被称为邻近的梁, 而执行荷载的梁被称为前来的梁. 用于分析的相互 框架显示在下方, 与包容长度 a.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

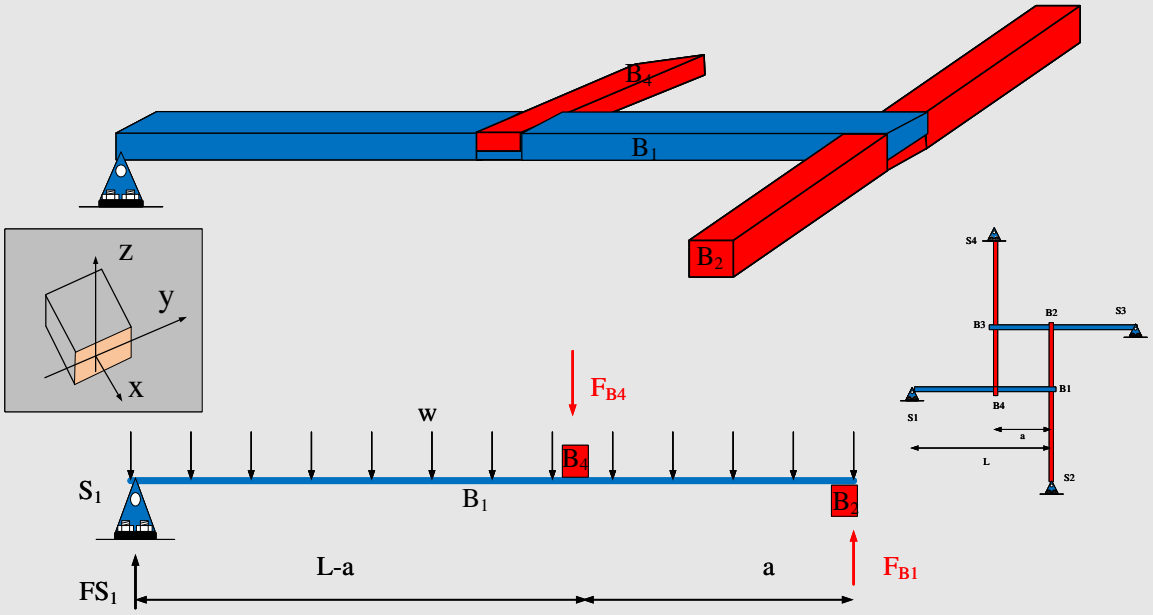




连接的灵魂

我们将使用超级位置分析相互 框架 (i.e 没有固定的连接). 假设框架将以均匀的 分布荷载 加载 w. 此外, 点 荷载 F 添加到距离 a 從 梁 終端, 由先前的 梁 執行。由于泡沫被倾斜, 两端都由铰支座支持。随后, RF 单位的单一 梁 可以作为一个简单支持的 梁 的方案化。

反应



由于同步性, 垂直支座反应仅仅是分布荷载分为支持的数量,

$$4wL - 4FS = 0 \Rightarrow F_{S1} = wL$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 FS 这是四个反应的总和。由于在 B1 中连接, 这个 梁 端被支持为 铰支座. 这些支持器无法携带弯矩, 这意味着当时 $B2$ 是零。在这种情况下, 一个表达 F_{B4} 可以通过采取时刻来确定 B

$$\left.\begin{aligned} F_{S1}L - F_{B4}a - wL\frac{L}{2} &= 0 \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} F_{B4} = \frac{wL^2}{2a}$$

接下來, 採取垂直力量的摘要

$$\left.\begin{aligned} F_{S1} + F_{B1} - wL - F_{B4} &= 0 \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} F_{B1} = F_{B4} = \frac{wL^2}{2a} = F$$

这并不奇怪, 因为垂直支持反应 F_{S1} 成为点 荷载 F 接近的梁。由于同位素和整体垂直平衡, F_{S1} 和 F 不能不等于彼此。

内部力量

部分内部力量只是从平衡衍生。B4 的。

$$\left.\begin{aligned} M_{\max} &= F_{S1}(L-a) - w\frac{(L-a)^2}{2} \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} M_{\max} = \frac{L^2 - a^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{lft}} &= F_{S1} - w(L-a) \\ F_{S1} &= wL \end{aligned}\right\} V_{\text{lft}} = wa$$

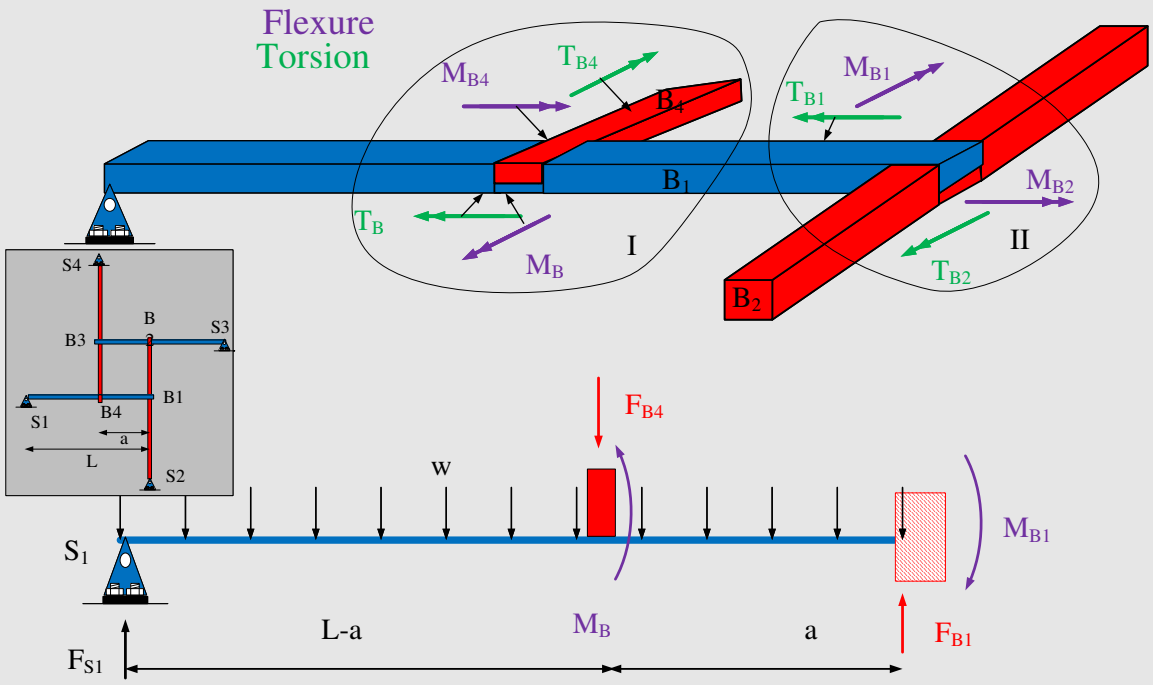
$$\left.\begin{aligned} V_{\text{rgt}} &= F_{B1} - wa \\ F_{B1} &= \frac{wL^2}{2a} \end{aligned}\right\} V_{\text{rgt}} = w\frac{L^2 - 2a^2}{2a}$$

固定连接

相互的 框架 行为不同, 当射线之间的连接固定时 (通过夜间). 在这种情况下, 连接可以采取旋转的时刻。这不仅会提供灵活的, 而且还会带来转换负载。由于固定连接, 相互 框架 在所有连接中都会有旋转时刻。首先, 弯矩的影响 M_y 对于 Y 轴, 正在进行审查。请注意, 这 弯矩 M_y 结果在一个 扭矩 M_x 在附近的梁. 这个旋转时刻的具体分布取决于周边支持和连接的类型。在这种相互的框架中, 带有粘贴支持, 旋转时刻完全转移到下一个连接。这个 扭矩 结果在一个 弯矩 M_y 在每一个喷雾中, 在与前一喷雾的交叉点上, 如有序。每个连接都包含一个 M_y 和一个 M_x 结果在 A M_x 和 M_y 在附近的梁.

审阅稿

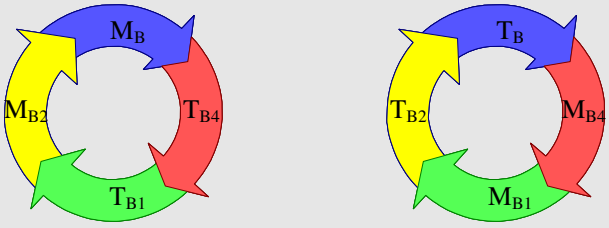
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



只考虑到垂直力量, 我们仍然有 $F_{B1} = F_{B4}$ 但是, 他们不知道他们的大小。在这个问题上, 我们有一个扭转在一个单元转移为灵活的支持一个和相反。总结我们所拥有的关系

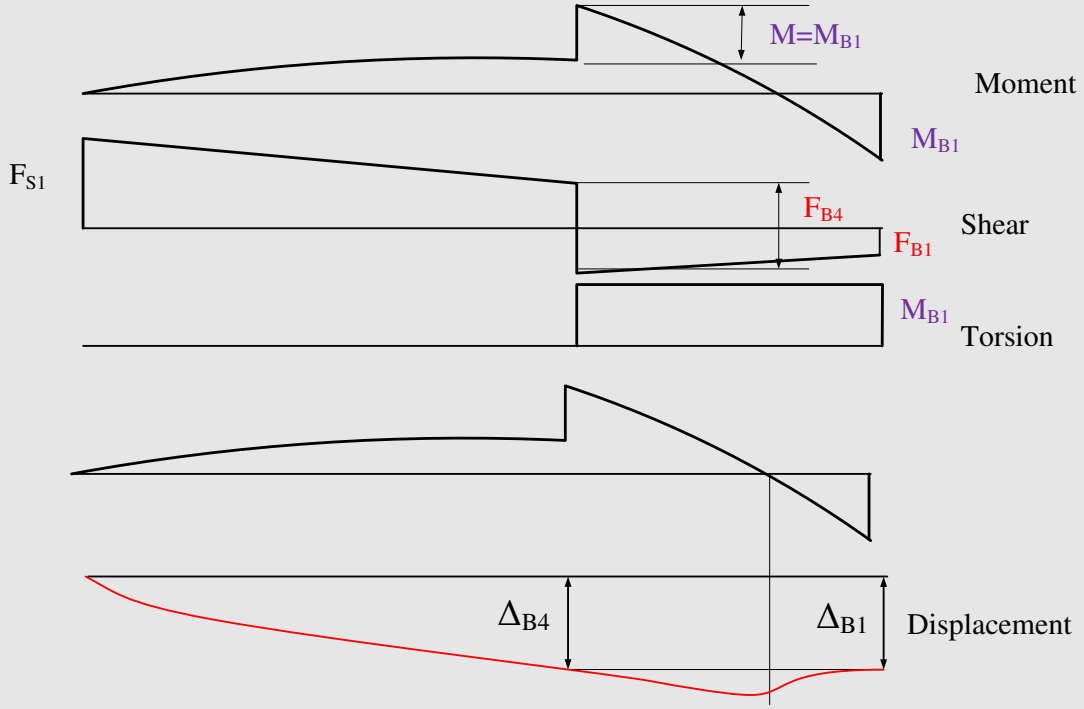
$$\underbrace{I \Rightarrow \begin{cases} M_B = T_{B4} \\ T_B = M_{B4} \end{cases}; \quad II \Rightarrow \begin{cases} T_{B1} = M_{B2} \\ M_{B1} = T_{B2} \end{cases};}_{\text{Statics}} \quad \underbrace{\begin{cases} T_{B4} = T_{B1} \\ M_{B4} = M_{B1} \\ M_{B2} = M_B \\ T_{B2} = T_B \\ F_{B4} = F_{B1} \end{cases}}_{\text{Symmetry}}$$

或



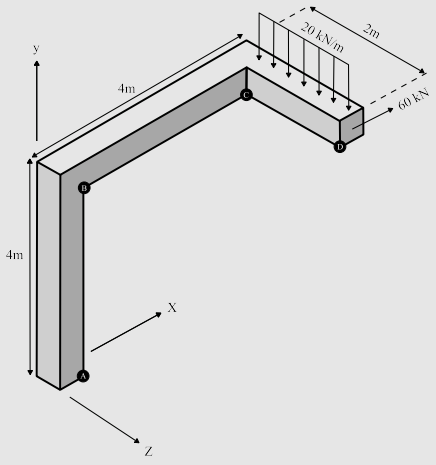
兩個集合並不相互結合。因此, 我们不能证明 $M_B = M_{B1}$ 我们留下了以下未知的: F_{B1}, M_B, M_{B1} 最终, 内部力量图表将是

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



但是, 在同情心中, 我们 $\Delta_{B1} = \Delta_{B4}$, 而 B1 和 B4 的折叠必须是零。我们可以应用曲率理论来完成解决方案。

21.3.7 例题 21.7: 3D 框架



1. 框架 共 6 個反應 (3 个力量和 3 个时刻) 在支持中, 我们共有 6 个平衡方程式, 因此它是静态定义的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 每个成员都有下列内部力量 (定义为“ **局部坐标系** 每个成员 $x'-y'-z'$ 如 x 是 同 成員 的)

会员	内部部队					
会员	轴心	谢尔		瞬间		扭转
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
$C-D$		✓	✓	✓	✓	
$B-C$	✓		✓	✓	✓	✓
$A-B$	✓	✓		✓	✓	✓

3. 在这个特定的问题上, 而不是通过确定反应开始, 更容易在每个成员的结束时确定内部力量。 $C-D$. 请注意, 我们暂时通过与当地协调系统兼容的信号协议。

C - D

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{y'}=0 \Rightarrow V_{y'}^{C} &= (20)(2) &&= +40\text{kN}\\
\Sigma F_{z'}=0 \Rightarrow V_{z'}^{C} &&&= +60\text{kN}\\
\Sigma M_{y'}=0 \Rightarrow M_{y'}^{C} &= -(60)(2) &&= -120\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'}=0 \Rightarrow M_{z'}^{C} &= (20)(2)\frac{2}{2} &&= +40\text{kN.m}
\end{aligned}$$

B - C

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x'}=0 \Rightarrow N_{x'}^{B} &= V_{z'}^{C} &&= -60\text{kN}\\
\Sigma F_{y'}=0 \Rightarrow V_{y'}^{B} &= V_{y'}^{C} &&= +40\text{kN}\\
\Sigma M_{y'}=0 \Rightarrow M_{y'}^{B} &= M_{y'}^{C} &&= -120\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'}=0 \Rightarrow M_{z'}^{B} &= V_{y}'^{C}(4) = (40)(4) &&= +160\text{kN.m}\\
\Sigma T_{x'}=0 \Rightarrow T_{x'}^{B} &= -M_{z'}^{C} &&= -40\text{kN.m}
\end{aligned}$$

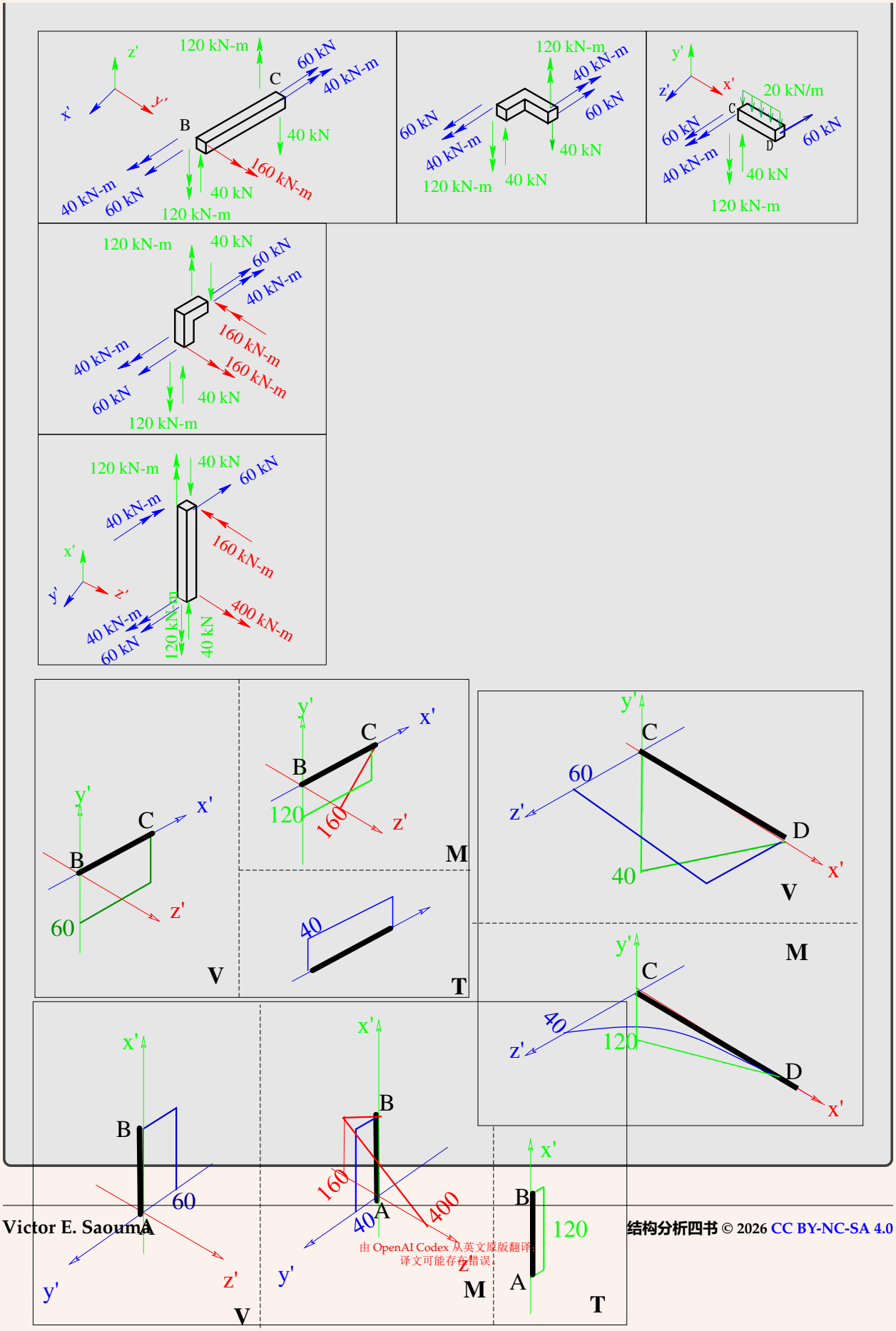
A - B

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{x'}=0 \Rightarrow N_{x'}^{A} &= V_{y'}^{B} &&= +40\text{kN}\\
\Sigma F_{y'}=0 \Rightarrow V_{y'}^{A} &= N_{x'}^{B} &&= +60\text{kN}\\
\Sigma M_{y'}=0 \Rightarrow M_{y'}^{A} &= T_{x'}^{B} &&= +40\text{kN.m}\\
\Sigma M_{z'}=0 \Rightarrow M_{z'}^{A} &= M_{z'}^{B} + N_{x'}^{B}(4) = 160 + (60)(4) &&= +400\text{kN.m}\\
\Sigma T_{x'}=0 \Rightarrow T_{x'}^{A} &= M_{y'}^{B} &&= -120\text{kN.m}
\end{aligned}$$

轴力之间的相互作用 N 和 Shear V 同时, 在时刻之间 M 和 扭转 T 这个例子很清楚。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



由 OpenAI Codex 从英文原版翻译。
译文可能存在错误。

审阅稿



芝加哥大道 (1969), 摩纳哥 Piguet, 瑞士

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

22 缺陷; 弹性曲线

摘要

此章题为挠度的灵活成员, 使用统治差异方程式或 (相关) 应变 - 曲率 关系。后者的方法导致曲线区域方法, 其中包括合并喷射方法作为一个子组。提出了不同 解析 复杂性水平的问题。

22.1 引入 773
22.2 差异方程式 774
22.2.1 例题 22.1: 双重融入 774
22.2.2 例题 22.2: 最大 挠度 776
22.2.3 例题 22.3: 最佳滑雪形状 . . . 777
22.2.4 例题 22.4: 浮动 梁 777
22.3 曲率 780
22.3.1 例题 22.5: 自行车轮子 782
22.3.2 例题 22.6: 直升式的春天 . . . 788
22.3.3 曲线与曲线关系 789
22.3.4 曲率 区域方法 (瞬间区) . . . 791



22.1 引入

1 定义缺陷是结构分析的组成部分。所有代码都设置允许的 挠度 的限制 (减少振动、跳跃和其他不良影响). 此外, 挠度的计算在静态不确定结构分析中发挥重要作用。(在章节中提到 25).

2 结构缺陷必须确定, 以满足可用性要求, 即限制下列缺陷 **服务** 负担到可接受的价值 (如如 $\frac{\Delta}{L} \leq 360$).

3 本章将根据地质考虑来探讨结构的缺陷。接下来, 我们将介绍一个基于能源考虑的更强大的方法。(章节 24).

4 在任何情况下, 挠度计算是分析静态不确定的结构的基于力量的方法的一个关键步骤。

5 二人 (相互连接) 将提出方法:

- 使用通过整合来管理的差异方程式。
- 使用 曲率 關係的瞬間。

审阅稿

22.2 差异方程式

6 对于弹性情况:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\\ \sigma &= -\frac{M(x)y}{I}\end{aligned}\right\}\varepsilon = -\frac{M(x)y}{EI}$$

将此方程式与 Eq 相结合。22.15 收益

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{22.1}$$

7 我们区分两倍

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2\frac{M(x)}{EI}}{dx^2} = \frac{1}{EI}\frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

8 然而, 我们也有前章所定义的时刻与力量关系。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dx} &= w(x)\\ \frac{dM(x)}{dx} &= V(x)\end{aligned}\right\}\frac{d^2M(x)}{dx^2} = w(x)$$

替代

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

这个方程式可以普遍化。

定义 22.1: 区别平衡灵活性管理

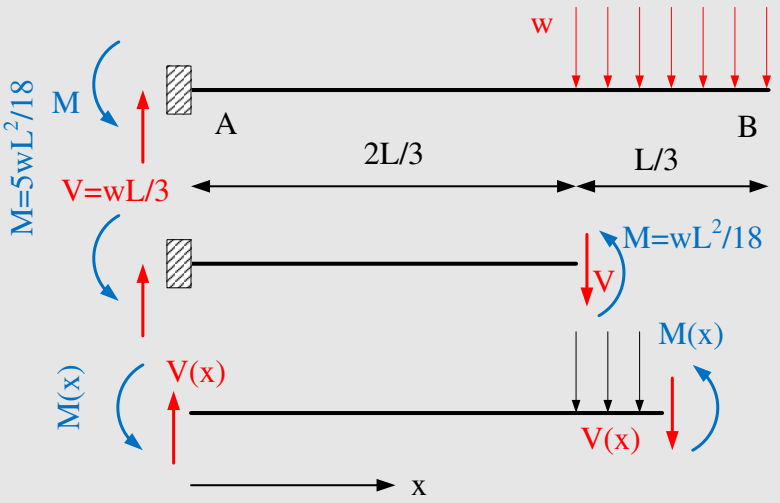
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}EI\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \text{ or } \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI} \tag{22.2}$$

这是贝姆的基本差异方程式。相似的方程式将随后用于电缆和梁列。

22.2.1 例题 22.1: 双重融入

我们正在寻求计算挠度在 B 为下列 cantilevered 梁

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



At: $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. 瞬间平衡

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2$$

2. 一次集成

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x + C_1$$

但是, 我们有 $x = 0, \frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow C_1 = 0$

3. 整合两次

$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5wL^2}{36}x^2 + C_2$$

我们又有 $x = 0, y = 0, \Rightarrow C_2 = 0$

At: $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. 瞬间方程式

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = \frac{wL}{3}x - \frac{5}{18}wL^2 - w(x - \frac{2L}{3})(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2})$$

2. 一次集成

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{6}x^2 - \frac{5}{18}wL^2x - \frac{w}{6}(x - \frac{2L}{3})^3 + C_3$$

使用边界条件 $x = \frac{2L}{3}$ 我们必须有 $\frac{dy}{dx}$ 等于从左边的价值, $\Rightarrow C_3 = 0$

3. 二次集成

$$EIy = \frac{wL}{18}x^3 - \frac{5}{36}wL^2x^2 - \frac{w}{24}(x - \frac{2L}{3})^4 + C_4$$

再次跟上面的同样的论点, $C_4 = 0$

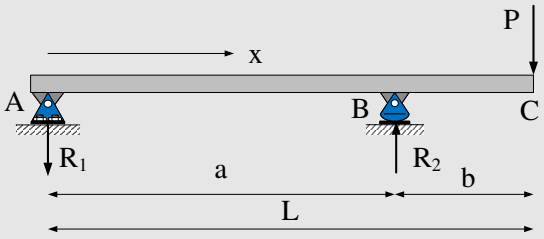
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

替代为 $x = L$ 我们获得

$$y = \frac{163}{1944}\frac{wL^4}{EI}$$

22.2.2 例题 22.2: 最大 挠度

我们试图确定附属 梁 的最大 挠度。反应



$$sigmccw_z^B = 0; \Rightarrow aR_1 - bP = 0 \Rightarrow edR_1 = \frac{b}{a}P$$
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; \Rightarrow aR_2 - PL = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{L}{a}P$$

差异方程式

$$EIy'' = -\frac{b}{a}Px + \frac{L}{a}P < x-a >$$
$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a}P < x-a >^2 + C_1$$
$$EIy = -\frac{b}{6a}Px^3 + \frac{L}{6a}P < x-a >^3 + C_1x + C_2$$

使用边界条件, 在 $x = 0, y = 0$ 因此 $C_2 = 0$, 而在 $x = a, y = 0$ 这样 $0 = -[b/(6a)]Pa^3 + aC_1$ 或 $C_1 = (ab/6)P$ 点击下方 荷载 (笔记 $x = a + b = L$)

$$\begin{aligned} EIy' &= -\frac{b}{2a}P(a+b)^2 + \frac{a+b}{2a}Pb^2 + \frac{ab}{6}P \\ &= -\frac{b}{2a}P(a^2+2ab+b^2) + \frac{ab^2+b^3}{2a}P + \frac{ab}{6}P \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{6}b(2L+b)P \end{aligned}$$

挠度 以 荷载 为基础 P:

$$\begin{aligned} EIy &= -\frac{b}{6a}P(a+b)^3 + \frac{a+b}{6a}Pb^3 + \frac{ab}{6}P(a+b) \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{3}Lb^2P \end{aligned}$$

支持者之间的最大 挠度 會發生在 $y' = 0$.

$$EIy' = -\frac{b}{2a}Px^2 + \frac{L}{2a} < x-a >^2 + \frac{ab}{6}P$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

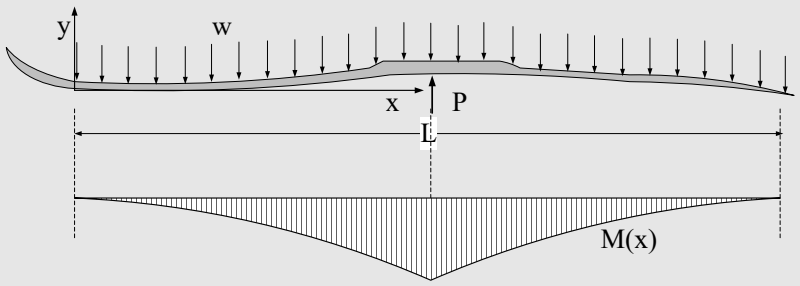
在 $y'=0,,x-a>$ 不存在, 因此 $0=-\frac{b}{2a}Px^2+\frac{ab}{6}P$ 解决为 a, $a=\frac{1}{\sqrt{3}}a$ 这样我们就可以写

$$\begin{aligned} EIy_{max} &= -\frac{b}{6a}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^3+\frac{ab}{6}P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{a^2b}{9\sqrt{3}}P \end{aligned}$$

22.2.3 例题 22.3: 最佳滑雪形状

我们试图确定滑雪的形状, 如当一个力量 P 被应用, 下方的产生的力量均匀分布。

这个问题可以用下面的数字来描述, 以及



我们必须满足

$$\frac{M(x)}{EI}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

哪里 $M(x)=wx^2/2, w=P/L$ 但是, 边界条件是 $y=0$ 在 $x=0$ 和 L.

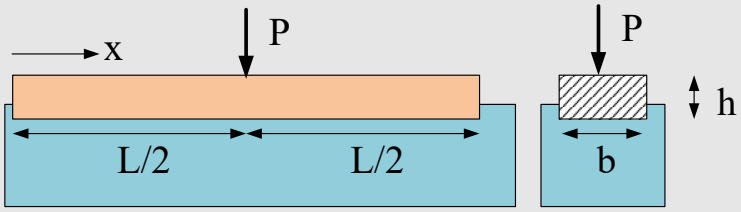
22.2.4 例题 22.4: 浮动 梁

下一篇: 重复 Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

木梁宽度 $b=20\,\text{cm}$、长度 $l=\text{m}$、高度 $h=10\,\text{cm}$，在跨中承受集中力 $P=50\,\text{kgf}$。松木的密度为 $\gamma=0.6\,\text{gf/cm}^3$，且 $E\simeq 10^5\,\text{kgf/cm}^2$。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



1. 统治的差异方程式可以写为

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$$

哪里 $q(x)$ 水的重量是流水的 (阿基米德的法则) 单位长度。

$$w(x) = -\gamma y(x)$$

2. 引入

$$4k^4 = \frac{b\gamma}{EI} = \frac{3\gamma}{Eh^3}$$

可以简化管理差异方程式

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0 \tag{22.3}$$

此分類上一篇: 梁 的差異方程式 **梁 在 弹性 基础**.

3. 解决方案是形状

$$y(x) = A\cosh(kx)\cos(kx) + \frac{1}{2}B\left(\cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right) + \frac{1}{2}C\sinh(kx)\sin(kx) + \frac{1}{4}D\left(\cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$$

4. 可以重写为

$$y = y_0Y_1(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_2(kx) + \frac{M_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_3(kx) + \frac{V_0}{EI}\frac{1}{k^2}Y_4(kx)$$

哪里 y_0, y_0', M_0 和 N_0 是 位移, 转角, 瞬间, 并在 $x = 0$. 这样

$$N_0 = 0; \qquad M_0 = 0$$

5. 我们留下决定 y_0 和 y_0' 在 $x = L/2$ 这样的那 $y_0' = 0$ 和 $N = P/2$
6. 使用下列表

n	$Y_n(kx)$	$Y_n'(kx)$	$Y_n''(kx)$	$Y_n'''(kx)$	$Y_n^{IV}(kx)$
1	$\cosh(kx)\cos(kx)$	$-4kY_4$	$-4k^2Y_3$	$-4k^3Y_2$	$-4k^4Y_1$
2	$\frac{1}{2}\left(cosh(kx)\sin(kx) + \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_1	$-4k^2Y_4$	$-4k^3Y_3$	$-4k^4Y_2$
3	$\frac{1}{2}\sinh(kx)\sin(kx)$	kY_2	k^2Y_1	$-4k^3Y_4$	$-4k^4Y_3$
4	$\frac{1}{4}\left(cosh(kx)\sin(kx) - \sinh(kx)\cos(kx)\right)$	kY_3	k^2Y_2	k^3Y_1	$-4k^4Y_4$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们获得

$$\frac{1}{k}y' = -4y_0Y_4(kx) + y_0'\frac{1}{k}Y_1(kx)$$
$$\frac{1}{k}y'' = -4y_0Y_3(kx) + y_0'\frac{4}{k}Y_4(kx)$$
$$\frac{1}{k}y''' = -4y_0Y_2(kx) + y_0'\frac{4}{k}Y_3(kx)$$

7. 边界条件被表达为[a]

$$-4y_0Y_4\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0'\frac{1}{k}Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0$$
$$-4y_0Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) + y_0'\frac{4}{k}Y_3\left(\frac{kl}{2}\right) = \frac{P}{2EIk^3}$$

8. 为 $x = 0$ 我们获得

$$y_0 = \frac{P}{8EIk^3}\frac{-Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$
$$\frac{y_0'}{k} = \frac{P}{8EIk^3}\frac{-4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

9. 位移和 Slope 将是这样

$$y=-P_0\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)Y_2(kx)Y_1(kx)\right]$$
$$y'' = 4P_0k^2\left[Y_1\left(\frac{kl}{2}\right)Y_3(kx) + 4Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4(kx)\right]$$

哪里

$$P_0 = \frac{P}{8EIk^3}\frac{1}{Y_2\left(\frac{kl}{2}\right)Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) + 4Y_3\left(\frac{kl}{2}\right)Y_4\left(\frac{kl}{2}\right)}$$

10. 用数值取代

$$k^4 = 3\times10^{-11} \Rightarrow k = 2.34\times10^{-3}\text{cm}^{-1} \Rightarrow \frac{kl}{2} = 1.17$$

和

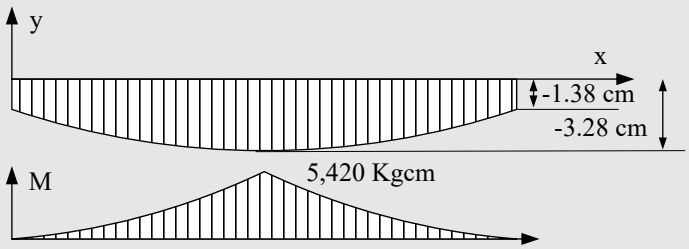
$$Y_1\left(\frac{kl}{2}\right) = 0.689$$
$$Y_2\left(\frac{kl}{2}\right) = 1.097$$

11. 最终答案将是

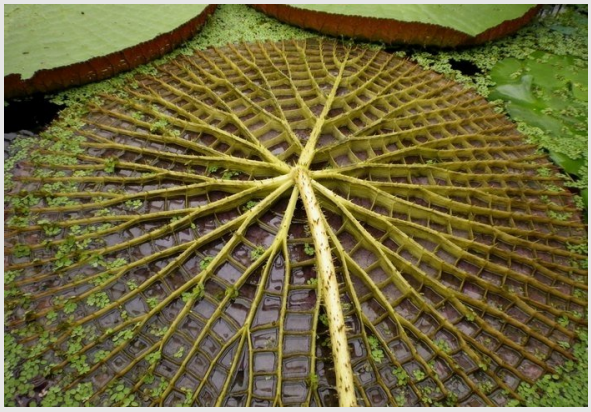
$$P_0=0.0401P$$
$$y(x)=-0.0401P\left[0.689Y_1(kx) - 1.058Y_2(kx)\right] \text{ cm}$$
$$M(x)=146.2P\left[0.689Y_3(kx) + 1.058Y_4(kx)\right] \text{ kgfcm}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

12. 溶液有效, 只要梁的全顶表面在水上。



相同的解决方案可以延伸, 尽管更困难, 到盘子。然而, 自然界已经明白了这一点。**维多利亚** (世界上最大的叶子) 它必须正确地粘贴, 以抵抗大时刻, 同时也浮动。



偶然, 这应该提醒读者所谓的 **分支建筑** 同样的树木的灵感。

[a] 记住这 $V = EI\frac{d^3y}{dx^3}$

22.3 曲率

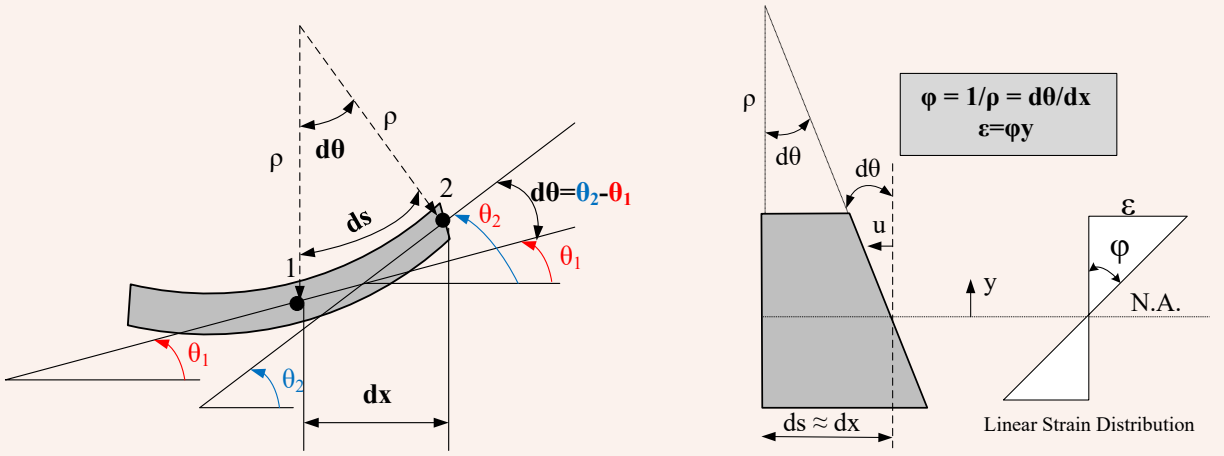
9 曲率, 图 22.1a 这是灵活性最关键的术语。(学生们经常忘记). 首先, 我们将产生它的准确关系, 然后简化它。

准确的表达

10 首先, 我们将从曲率的表达的总衍生开始, 图 22.1a 首先要定义曲率。ϕ 如

$$\phi \overset{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{ds}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 曲率 定义　　(b) 曲线与轨道关系

图 22.1: 曲率和线条

从地质学, $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$ 我们现在定义了 $t = \frac{dy}{dx}$ 我们获得 $\theta = \tan^{-1} t$ 使用链条规则 ϕ 我们得到

$$\phi = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} \tag{22.4}$$

ds 可以重写为

$$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ t &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} ds = \sqrt{1+t^2}\,dx \tag{22.5}$$

[11] 接下来的 EQ。22.4 和 22.5 我们获得

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}dx} \\ \theta &= \tan^{-1} t \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}\right\} \quad \phi = \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{dt}{dx} \quad \left.\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} \phi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

12 因此, 斯洛普 θ, 曲率 ϕ, 射线 曲率 ρ 与其相关的 y 位移在一个点上 x 通过一个灵活的成员

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{22.6}$$

接近的表达

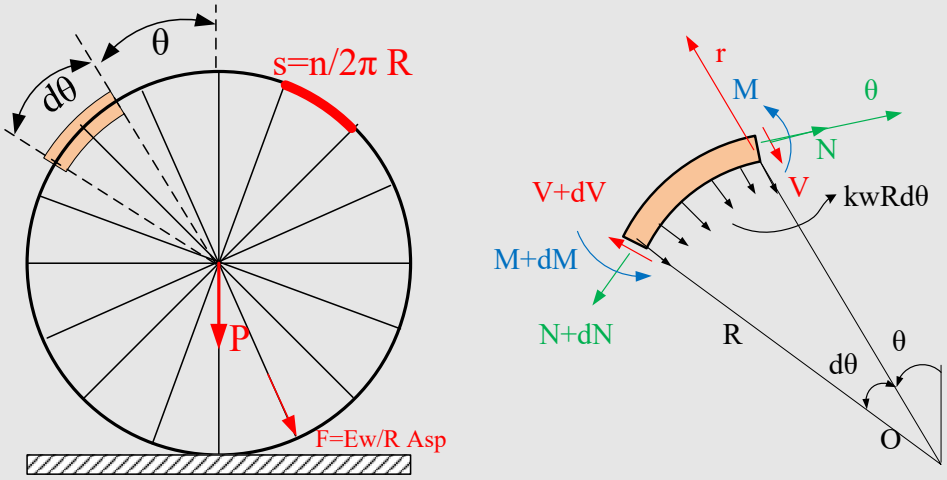
13 假如流浪量很小, $\frac{dy}{dx} << 1$ 然后, Eq. 22.6 减少到:

$$\phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{22.7}$$

22.3.1 例题 22.5: 自行车轮子

下一篇: 重复 Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

我们试图确定发言人中的力量在他们的方向上 θ[a].



1. 谈话是足够近的, 我们可以假设外部线不断支持他们。因此, 对于所有实用目的, 我们有一个圆形梁在弹性基础.
2. 每一句话的税收长度是 $n/2\pi R$. 同样, 每个发言都具有与其位移的放射性相比例的力量。w 等同于 $F = Ew/RA_{sp}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 因此, 每单位的长度, 我们有一个力量。

$$\underbrace{\frac{EwA_{sp}}{R}}_{\text{Force per spoke}} \quad \underbrace{\frac{n}{2\pi R}}_{\text{Trib. length/spoke}} = kw_s$$

4. 因此, 春天是永恒的。

$$k = \frac{EA_s n}{2\pi R^2}$$

5. 我们写了三个平衡的方程式

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow \frac{dV}{d\theta} = N + kRw_s$$
$$\Sigma F_\theta = 0 \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} + V = 0$$
$$\Sigma_z^O = 0 \Rightarrow R\frac{dN}{d\theta} + \frac{dM}{d\theta} = 0$$

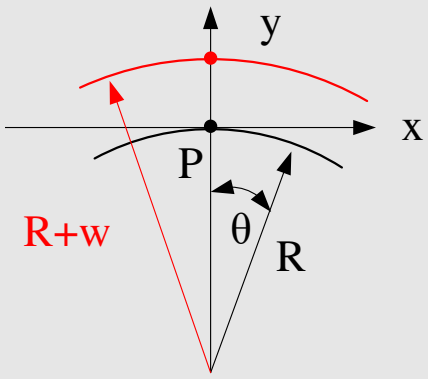
6. 排除 V 和 N

$$kR^2\frac{dw}{d\theta} = \frac{dM}{d\theta} + \frac{d^3M}{d\theta^3}$$

7. 曲率的变化 $\Delta(1/\rho)$ 与此时刻有关

$$M = EI\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

8. 接下来, 我们需要在曲率中进行变化的表达。(教授的慈善程序 F。真诚。)



在变形之前, 曲率在 P 是 $\kappa = \frac{1}{R}$ 但是, 在变形之后, 我们 $R = R + w$. 首先, 我们要寻找扭曲曲曲线的弓的接近。

$$x^2 + (y - (R + w))^2 = R^2 \tag{22.8}$$
$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R} - \left(1 + \frac{w}{R}\right)\right)^2 = 1 \tag{22.9}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 $\xi = x/R$, $\eta = y/R$, 和 $\zeta = w/R$

$$\xi^2 + \big(\eta + (1+\zeta)\big)^2 = 1$$
$$\xi^2 - \eta^2 - 2\eta - 2\eta\zeta + 1 + 2\zeta + \zeta^2 = 1$$

降低更高的订单条件 (η^2, $\eta\zeta$ 和 ζ^2 因为它们都很小, 与 1 相比) 重新安排

$$\xi^2 - 2\eta + 2\zeta = 0$$
$$\eta = \frac{\xi^2}{2} + \zeta$$
$$y = \frac{x^2}{2R} + w \quad \text{圆弧的良好抛物线近似}$$

现在, 我们正在进行替代 x 由 $R\theta$

$$y = \frac{x^2}{2R} + w \simeq \frac{1}{2R}(R\theta)^2 + w \simeq \frac{R_0 + w}{2}\theta^2 + w$$

曲率 是由

$$\kappa = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R^2}\frac{d^2y}{d\theta^2}$$
$$= \frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}$$

因此, 在 曲率 的变化是由

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R} + \frac{w}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d\theta}\right) = -\frac{w}{R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$$

因此, 对于一个积极的位移 w 指向远离循环的中心, 戒指的曲率下降。在这个表达中, 曲率的变化是由两个组成部分组成的。第一期限 w/R^2 相应于 曲率 的变化, 因为戒指的简单扩展。第二期 $\frac{1}{R^2}\frac{d^2w}{d^2\theta}$ 平等 d^2w/ds^2 代表在 曲率 中常见的变化, 发生在直线上。

9. 替代为 M 最后的统治差异方程式是

$$\frac{d^5w}{d\theta^5} + 2\frac{d^3w}{d\theta^3} + a^2\frac{dw}{d\theta} = 0$$

与

$$a^2 = \frac{R^4k}{EI} + 1$$

10. 这个差异方程式的解决方案是

$$w = C_0 + C_1\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + C_2\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta + C_3\cosh\alpha\theta + C_4\sinh\alpha\theta\cos\beta\theta$$

与

$$\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{2}}; \qquad \beta = \sqrt{\frac{a+1}{2}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

11. 替代:

$$M = -\frac{EI}{R^2}\left(C_0 - 2\alpha\beta C_1 \sinh\alpha\theta \sin\beta\theta + 2\alpha\beta C_2 \cosh\alpha\theta \cos\beta\theta\right)$$
$$V = 2\alpha\beta\frac{EI}{R^3}\left[\left(\alpha C_1 - \beta C_2\right)\cosh\alpha\theta \sin\beta\theta + \left(\beta C_1 - \alpha C_2\right)\sinh\alpha\theta \cos\beta\theta\right]$$

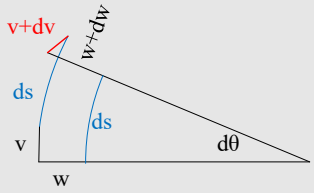
12. 我们注意到, 由于雷姆与垂直轴相似地扭曲, w 甚至必须是 (二、不应与标志的变化 θ). 这样 C_3 和 C_4 必须是零。
13. 边界条件

$$\begin{aligned} \tfrac{dw}{d\theta} &= 0; \quad \theta = \pi \\ V &= -\tfrac{P}{2}; \quad \theta = \pi \\ \int_0^\pi w d\theta &= 0 \end{aligned}$$

14. 最后的条件意味着在荷载下, 上和下点保持垂直。事实上, 考虑到在变形前和变形后带的无限部分, 不可扩展的条件将是:

$$dv + w d\theta = 0 \Rightarrow v = -\int w d\theta$$

哪里 v 它是位移在弓的长度。



15. 應用三個邊界條件

$$\begin{aligned} &C_1\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] \\ &\quad + C_2\left[\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&= 0 \end{aligned} \tag{22.10}$$

$$\begin{aligned} &C_1\left[\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi + \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right] \\ &\quad - C_2\left[\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi - \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right] &&= -\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{22.11}$$

$$\begin{aligned} &C_0\pi + \frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi + \beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right) \\ &\quad + \frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi - \beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right) &&= 0 \end{aligned} \tag{22.12}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

16. 解决常态

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{PR^3}{2\pi a^2 EI} \\
C_1 &= -\frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)} \\
C_2 &= \frac{P}{4EI}\frac{R^3}{\alpha\beta}\frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)}\pi \\
&\quad+\frac{C_1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi+\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi\right) \\
&\quad+\frac{C_2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi-\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi\right)=0
\end{aligned}
$$

17. 最后的表达 w 和 M

$$w(\theta)=\frac{PR^3}{4\alpha\beta EI}\left(\frac{2\alpha\beta}{\pi a^2}-A\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta+B\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta\right) \tag{22.13}$$

$$M(\theta)=-\frac{PR}{2}\left(\frac{1}{\pi a^2}+A\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta+B\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\right) \tag{22.14}$$

哪里

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\alpha\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi+\beta\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)} \\
B &= \frac{\alpha\sinh\alpha\pi\cos\beta\pi-\beta\cosh\alpha\pi\sin\beta\pi}{a\left(\sinh^2\alpha\pi+\sin^2\beta\pi\right)}
\end{aligned}
$$

18. 演讲中的力量将是

$$P_r(\theta)=\frac{EA_{sp}}{R}w(\theta)$$

19. **数值 應用程式**我们考虑下列特性的轮子, 采取相同的弹性模块对于 RIM 和演讲者:

数量	象征	價值
演讲者数量	n	36
雷米射线	R	31.2 cm
谈话交叉部分	A_{sp}	0.22 cm^2
里姆 惯性矩	I	0.3 cm^4

来自 EQ。(4) 和 (9) 要注意的是, E 取消:

$$a^2=\frac{A_{sp}\,n\,R^2}{2\pi I}+1=\frac{0.22\cdot 36\cdot 31.2^2}{2\pi\cdot 0.3}+1=577.7,\qquad a=24.04$$

来自 EQ。(10):

$$\alpha=\sqrt{\frac{24.04-1}{2}}=3.395,\qquad \beta=\sqrt{\frac{24.04+1}{2}}=3.539$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在 $\theta = \pi$ 超波功能满足 $\sinh\alpha\pi \approx \cosh\alpha\pi \approx \frac{1}{2}e^{10.66}$, 而三角形值则是 $\sin\beta\pi = -0.992$ 和 $\cos\beta\pi = +0.1223$. 替换表达式为 A 和 B:

$$A = -0.245\,e^{-10.66}, \qquad B = +0.326\,e^{-10.66}$$

表达式 (22.13)–(22.14) 然后, 成为一个使用 荷载 P (在 KGF):

$$M(\theta) = P\big(-0.00855 + 3.80\,e^{-10.66}\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta - 5.05\,e^{-10.66}\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta\big)\ \text{kgf cm}$$

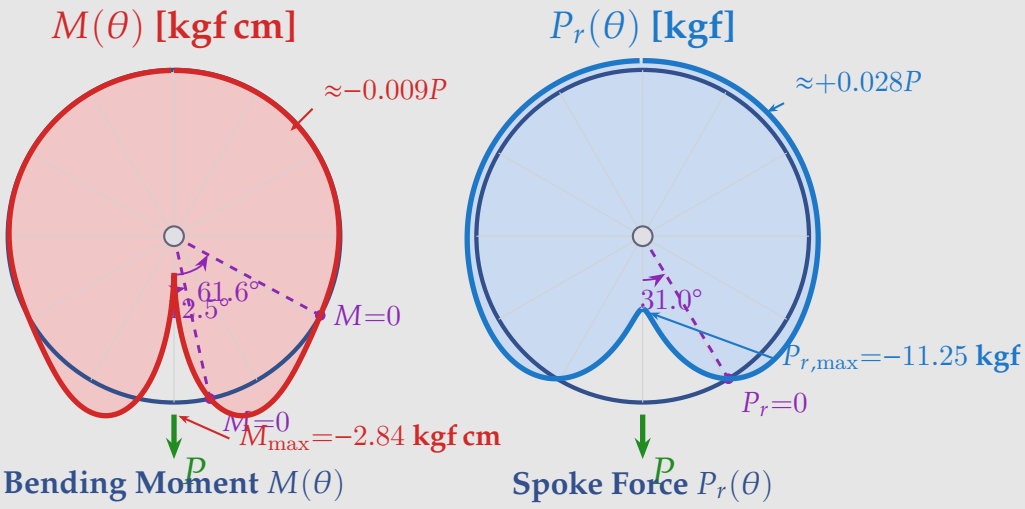
$$P_r(\theta) = P\big(\ \ 0.0278 + 0.514\,e^{-10.66}\cosh\alpha\theta\cos\beta\theta + 0.683\,e^{-10.66}\sinh\alpha\theta\sin\beta\theta\big)\ \text{kgf}$$

因素 $e^{-10.66}$ 原因两者 M 和 P_r 非常快的消失远离 荷载 点 $\theta = \pi$ 因而, 在某些角度, 甚至稍微远离 π 波动的定义是不可忽视的, 并且 $M \approx -0.00855\,P$ 和 $P_r \approx 0.0278\,P$ 大多数里姆。

為 $P = 40$ kgf 在 荷载 点的顶值是

$$M_{\max} = 88\ \text{kgf cm}, \qquad P_{r,\max} = 11.2\ \text{kgf}$$

弯矩 和旋转周围的语力分布显示下面。



注意: 弯矩 $M(\theta)$ 说话的力量 $P_r(\theta)$ 周围的轮子 ($P = 40$ 吉格斯, $n = 36$, $R = 31.2$ cm). 放射线标记零交叉; 從 荷载 方向测量的角度。远方: $M_\infty = -PR/(2\pi a^2) \approx -0.009P$ kgf cm.

20. **说话前紧张的效果。** 上面的分析将演讲者视为一个被动弹性媒体, 并且不要考虑初始压力。T_0 在轮子中引入會議 (查理). 在服务中, 发言人只能保持紧张; 一个演讲它不提供弹性抵抗, 破坏持续的... 基础 模型 数量的 $P_{r,\max}$ 上面的代表其它 **最大减少** 在使用的荷载引起的言语力量。要让轮子在荷载下保持结构性声音 P, 大会因此, 预压必须满足。

$$T_0 > P_{r,\max}$$

换句话说, 每一个演讲都必须保持积极的剩余紧张。荷载 已使用。在 数值 例子中, 这需要 $T_0 > 11.2$ kgf 说话的。典型的赛车轮子被推向 80–120 kgf 每话, 提供舒适的边界。

这个问题首先是由 Joukowsky, 1948[b].

[a] 关于卡罗琳 • 萨奥马的评论

[b] 尼古拉 • 耶戈罗维奇 • 朱科夫斯基 (1847–1921), 教授的莫斯科理工学院的机械学, 被称为俄罗斯航空的父亲和起源者 Kutta - 朱科夫斯基 升力 理论。他的自行车轮子的解决方案如灵活的基础先行器上的戒指 Feodossiev, 1977 由几十年来, 通过莫斯科学校传达了机械

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

22.3.2 例题 22.6: 直升式的春天

我們要追求堅固的 k 春天是由一根火柴组成的, 因为春天由绳子组成。

由直径线制成的火柴春天 d 它在中间直径的希利克里。D 主要是通过叶子变形, 当一个轴力 F 被应用。當我們用一種力量 F, 春天由位移伸展 Δ (或 ΔL) 根据胡克的法律:

$$F = k\delta$$

哪里 k 这是我们想要产生的春天坚固。

扭转 在 每 片 当一个力量 F 适用于春天, 每个火柴都会经历旋转或旋转效果。对于一个单一的子弹, 这种力量产生了旋转。T 关于相关术语的轴, 可以表达为:

$$T = F \cdot \frac{D}{2}$$

Torsional Deformation 和 Twist 的角度 对于一个圆形线 (或春天), 转角的角度 θ 由于一个转折点 T 可以通过计算:

$$\theta = \frac{T \cdot L_{\text{coil}}}{JG}$$

在哪里:

- $L_{\text{coil}} = 2\pi D$ 是一根尾子的长度。(因为每个曲线基本上是一个圆圈的绳子。),
- $J = \frac{\pi d^4}{32}$ 是极 惯性矩 为圆形直径的十字段 d,
- G 是春季材料的剪切模量。

因此, 对于一个单一的曲线, 旋转的角度变成:

$$\theta = \frac{T \cdot 2\pi D}{\frac{\pi d^4}{32} \cdot G} = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$$

春天的整体变形 因为每个角落都转向一个角度 θ, 而且有 n 曲线, 总角旋转 Θ 整个春天是:

$$\Theta = n \cdot \theta$$

位移 轴 Δ 春天结束时, 与总角旋转有关:

$$\Delta = \Theta \cdot \frac{D}{2} = n \cdot \theta \cdot \frac{D}{2}$$

替代和简化 替代 $\theta = \frac{32 \cdot T \cdot D}{d^4 \cdot G}$ 和 $T = F \cdot \frac{D}{2}$:

$$\Delta = n \cdot \frac{32 \cdot F \cdot \frac{D}{2} \cdot D}{d^4 \cdot G} \cdot \frac{D}{2}$$

简化, 我们得到了:

$$\Delta = \frac{16FnD^3}{d^4G}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

放下沉默 k 胡克的法律, $F = k\Delta$ 我们解决了 k:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{Gd^4}{16nD^3}$$

或者, 如经典所写的:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n}$$

关系长度 L **到 Stiffness** k 因为 $L = n \cdot p$, 在哪里 p 是春天的舞台, 我们可以表达 n 至于 L:

$$n = \frac{L}{p}$$

替代 n 到密度方程式:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3\left(\frac{L}{p}\right)} = \frac{Gd^4 \cdot p}{8D^3L}$$

最后的结论表明, 坚固 k 与长度相反的比例 L, 与:

$$k \propto \frac{1}{L}$$

因此, 增加春天的长度 (通过增加相关术语的数量) 减少硬度, 因为每个煤炭都有助于春季的整体变形在荷载下。请参见例子 24.3.15 也是。

22.3.3 曲线与曲线关系

14 曲率 应变 关系是由 图 描述的 22.1b.

15 一个积极的 $d\theta$ 在一个积极的 y (上方纤维) 会导致 A **缩短** 上方的纤维 $du = -yd\theta$ 二、双方分为 dx,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -y\frac{d\theta}{dx}$$

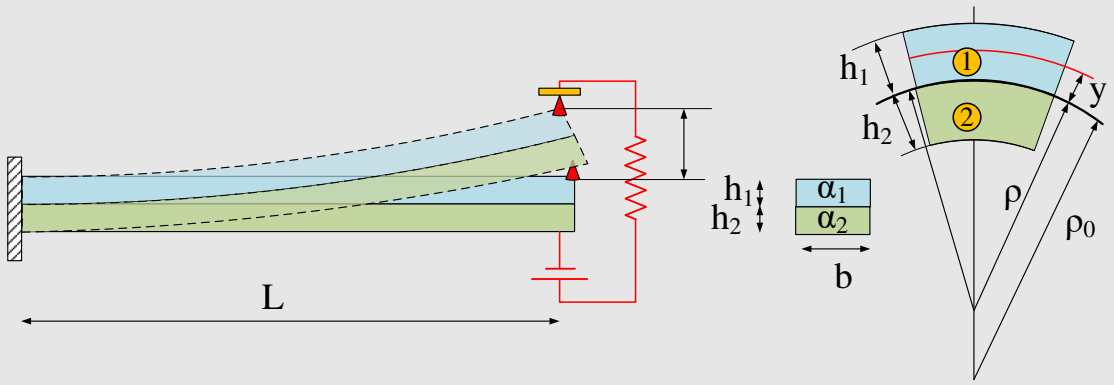
将此与 EQ 相结合。22.7, 我们获得曲率之间的基本关系 (ϕ) 弹性曲线 (二、位移) (y), 和线性 应变 (ε).

$$\frac{1}{\rho} = \phi = -\frac{\varepsilon}{y} \tag{22.15}$$

16 请注意, 到目前为止, 我们没有关于物质特性的假设, 即它可以是弹性或无弹性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

22.3.3.1 例题 22.7: 二元交换器



Bimetalic 单元 通常用作温度交换器来调节室温。二金属 单元 由两个固体连接的金属板制成, 具有不同的热扩展率。在加热时, 二元板因其组件的不平等延伸而被压缩。如果一个端子安全地粘贴, 则另一个自由端子将以一定数量移动。Δv. 单元 通常与初始 曲率 曲折。$\frac{1}{\rho_0}$. 我们试图确定曲线的变化, 转移将是最大的条件, 以及 $\Delta_v^{\max}$

因此, 我们考虑到一个部分的长度 ds 和初始 曲率 在合金表面 $\frac{1}{\rho_0}$, 一个纤维的应变在距离 y 由合金所提供的

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

我们将热延伸缩小, 并通过它们的相应弹性模量增加产生的差异, 我们可以确定一个纤维的压力距离。y 从联合

$$\sigma_1 = E_1\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_1\Delta T\right] \qquad 0 \le y \le h_1$$
$$\sigma_2 = E_2\left[\varepsilon_0 + y\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) - \alpha_2\Delta T\right] \qquad -h_2 \le y \le 0$$

然而, 正常的力量和二元单元部分时刻都必须是零。

$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 dy = 0$$
$$b\int_0^{h_1}\sigma_1 y dy + b\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 y dy = 0$$

替代为 σ_1 和 σ_2 以集成, 我们得到了

$$\varepsilon_0(E_1h_1 + E_2h_2) - (\alpha_1E_1h_1 + \alpha_2E_2h_2)\Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) = 0$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon_0(E_1h_1^2 - E_2h_2^2) - \frac{1}{2}(E_1\alpha_1h_1^2 - E_2\alpha_2h_2^2)\Delta T + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)(E_1h_1^3 + E_2h_2^3) = 0$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

消除 ε_0, 我们在曲率中找到变化

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=\frac{6\Delta T(\alpha_1-\alpha_2)}{\frac{\left(E_1h_1^2-E_2h_2^2\right)^2}{E_1E_2h_1h_2(h_1+h_2)}+4(h_1+h_2)}$$

曲率的变化是与温度变化和热扩张率差异相对的。曲率的最大变化发生时, 组件板厚度被选择为:

$$E_1h_1^2=E_2h_2^2$$

然后

$$\Delta\kappa=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=\frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}$$

通过应用第二个曲率区域理论, 我们现在可以确定挠度在分数化梁的顶部。和 (改变在) 曲率 沿着 梁 是稳定的

$$\begin{aligned}\Delta_V^{\max}&=\Delta kappa\times L\times\frac{L}{2}\\&=\frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}\frac{L^2}{2}\end{aligned}$$

当然, 第二个曲率区域理论将产生相同的结果与从虚功方法获得的。

$$\begin{aligned}\Delta_V^{\max}&=\int_o^L\underbrace{(1)(x)}_{\delta\overline{M}}\underbrace{\Delta\kappa}_{M/EI}dx\\&=\frac{3}{2}\Delta T\frac{\alpha_1-\alpha_2}{h_1+h_2}\frac{L^2}{2}\end{aligned}$$

22.3.4 曲率 区域方法 (瞬间区)

有关历史背景，请参见 §??

17 和 **曲率 区域方法** (常常被误解称为 **时刻区方法**) 这是一个地质方法 (与 解析 相反, 这是双重集成方法之一。) 以弹性曲线为基础的转移解决。有两种理论与方法有关。

22.3.4.1 签约

18 需要特别小心应用曲率区域方法的迹象。图 22.2 试图澄清事物。

22.3.4.2 第一 曲率 区域理论

19 与图的参考 22.3 从方程式 22.1 我们有 $\frac{d\theta}{dx}=\frac{M}{EI}$ 可以重写为或与图像的参考 22.3

$$\theta_{21}=\theta_2-\theta_1=\int_{x_1}^{x_2}d\theta=\int_{x_1}^{x_2}\frac{M}{EI}dx=\int_{x_1}^{x_2}\kappa(x)dx \tag{22.16}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

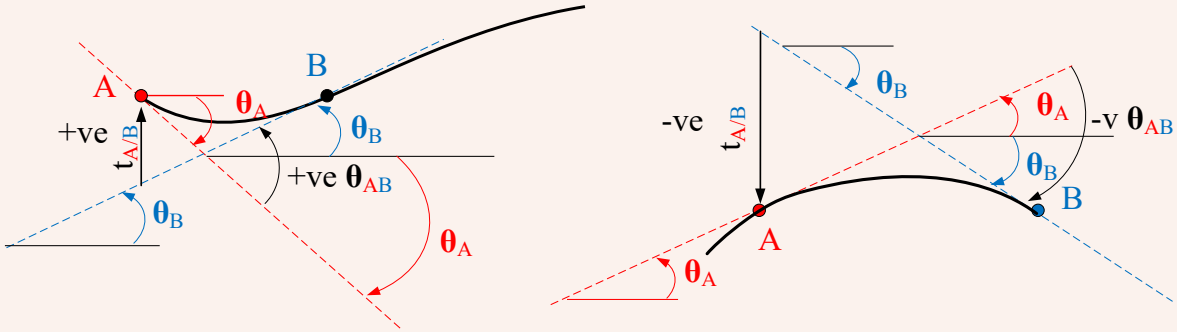


图 22.2: 签署曲线区域方法对反向曲线的条约

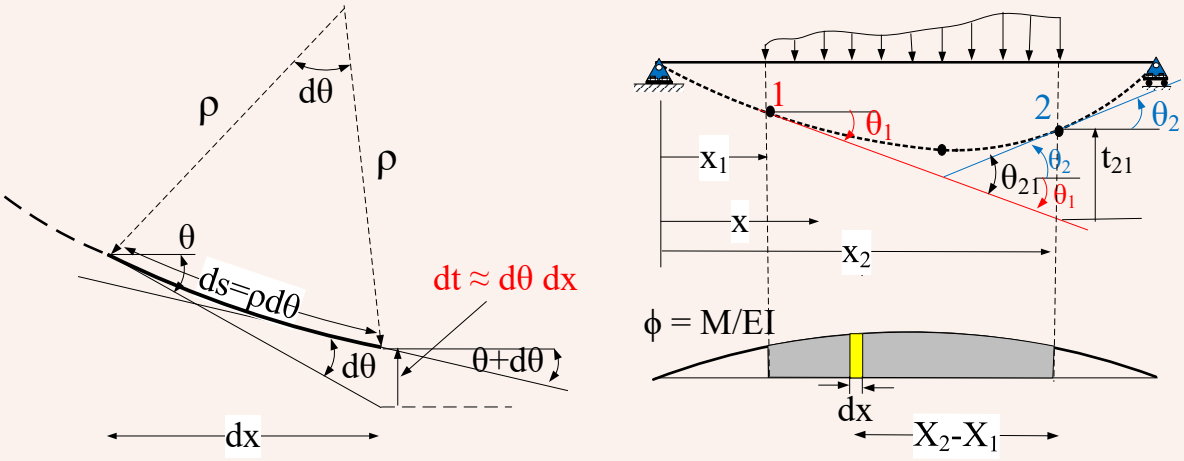


图 22.3: 曲率 区域方法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 22.2: 提议; 第一 曲率 区域理论

斯洛普的差异 (二、曲率) 一个负载的灵活器成员的任何两个部分之间的区域等于 M/EI 这两点之间的图表。或对于一个 梁 经历弯曲, 变更的折叠 (θ) 兩個點之間, 沿著 梁, 點 A 在 x_A 和点 B 在 x_B, 相当于这两个点之间的分区上线曲线的整体。

与 Def 相似之处。21.4 :

$$\Delta V_{21} = V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx$$

22.3.4.3 第二个曲率区域理论

20 再说一遍, 关于数字 22.3 我们定义为 t_{21} 点 2 和点 1 的坦根之间的距离。无限的距离 $ds = \rho d\theta$ 但是, 对于小型转移来说, 这将是

$$\left.\begin{aligned} dt &= d\theta(x_2 - x_1) \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \end{aligned}\right\} dt = \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

或

$$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{EI}(x_2 - x_1)dx$$

谨慎 $t_{AB} \neq t_{BA}$. t_{AB} 是 A 和 B 的坦根之间的距离, 另一方面, t_{BA} 是 B 节点和 A 节点之间的距离。

定义 22.3: 提议: 第二个曲率区域理论

一个负载的灵活器成员的第 2 点的坦根偏差, 从一个坦根到第 1 点的挠度曲线 (t_{21}) 等于 曲率 图表区域的 1 和 2 之间约为 2 的时刻。

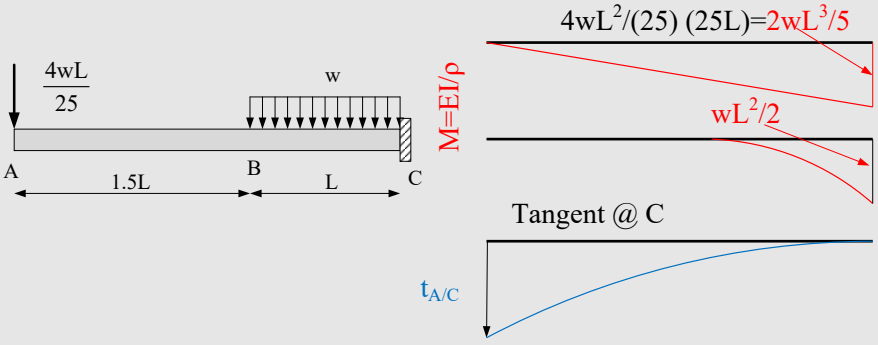
21 与 Def 相似之处。21.5

$$\Delta M_{21} = M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V(x)dx \tag{22.17}$$

22.3.4.3.1 例题 22.8: 曲率 区域, cantilevered 梁

我们要确定 A 点

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

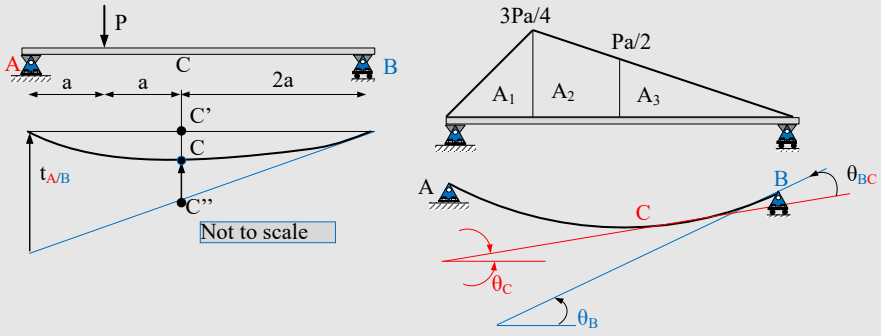


$$EIt_{A/C} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{-2wL^2}{5}\right)\left(\frac{5L}{2}\right)}_{\text{area}}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\frac{5L}{2}\right)}_{\text{Moment wrt A}} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{-wL^2}{2}\right)(L)}_{\text{area}}\underbrace{\left(\frac{9L}{4}\right)}_{\text{Moment wrt A}}$$
$$= -\frac{29wL^4}{24}$$

因此, $\Delta_A = \frac{29wL^4}{24EI}$

22.3.4.3.2 例题 22.9: 瞬间 曲率, 仅支持 梁

我们要确定 Δ_C 和 θ_C 如下例子



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

挠度 Δ_C 被定义为 $\Delta_C = c'c = c'c" - c"c, c"c = t_{C/B}$, 和 $c'c" = \frac{t_{A/B}}{2}$ 从地质学

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\right)}_{A_1}\underbrace{\left(\frac{2a}{3}\right)}_{\text{Moment}} + \underbrace{\left(\frac{3Pa}{4}\right)\left(\frac{3a}{2}\right)}_{A_2+A_3}\underbrace{\left(a+\frac{3a}{3}\right)}_{\text{Moment}}\right]$$
$$= \frac{5Pa^3}{2EI}$$

这是积极的, 因此超越 Tangent 从 B

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{Pa^3}{3EI}$$

积极, 因此超越 B 的坦克最后,

$$\Delta_C = \frac{5Pa^3}{4EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{11}{12}\frac{Pa^3}{EI}$$

转角 θ_C 是

$$\left.\begin{aligned}\theta_C &= \theta_B - \theta_{BC}\\ \theta_{BC} &= A_3\\ \theta_B &= \frac{t_{A/B}}{L}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_C = \frac{5Pa^3}{2EI(4a)} - \left(\frac{Pa}{2}\right)\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{Pa^2}{8EI}$$

22.3.4.4 最大 挠度

[22] 沿着 梁 的合并将有最大 (或最低) 相對的 挠度 如果 $\frac{dy}{dx} = 0$ 或 $\theta = 0$ 因此, 我们可以确定 Δ_{max} if x 已知, 图 22.4. 要确定 x:

1. 计算 $t_{C/A}$
2. $\theta_A = \frac{t_{C/A}}{L}$
3. $\theta_B = 0$ 和 $\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B$ 这样 $\theta_{AB} = \theta_A$. 因此, 计算 θ_{AB} 至于 x 使用第一理论。
4. 第 2 和第 3 节, 然后解决 x.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

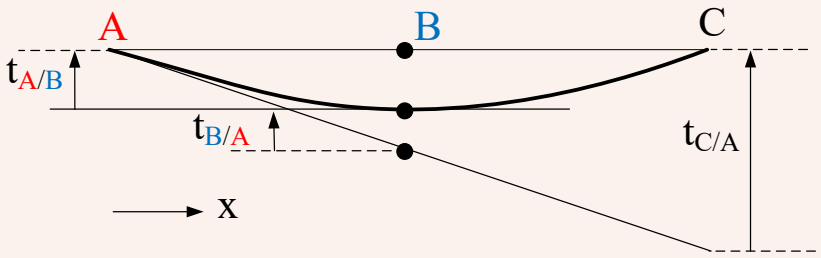
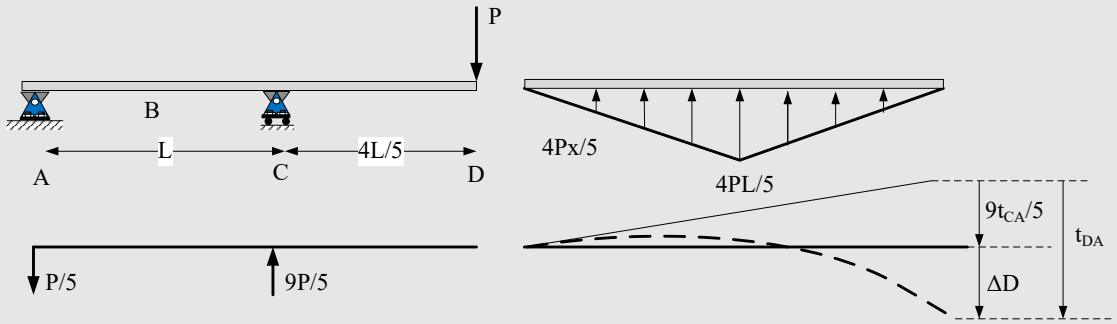


图 22.4: 最大 挠度 使用瞬间区域方法

22.3.4.4.1 例题 22.10: 最大 挠度

我们正在寻找 挠度 的 D, 和最高 挠度 在 B



挠度 在 D 中:

$$\Delta_D = t_{D/A} - \frac{9}{5} t_{C/A}$$

$$EIt_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right)$$

$$t_{C/A} = -\frac{2PL^3}{15EI}$$

$$EIt_{D/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)(L)\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-4PL}{5}\right)\left(\frac{4L}{5}\right)\left(\frac{8L}{15}\right)$$

$$t_{D/A} = -\frac{234}{375}\frac{PL^3}{EI}$$

取代我们获得的

$$\Delta_D = -\frac{48}{125}\frac{PL^3}{EI}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

最多 挠度 在 B:

$$
\begin{aligned}
t_{C/A} &= -\frac{2PL^3}{15EI} \\
\theta_A &= \frac{t_{C/A}}{L} = -\frac{2PL^2}{15EI} \\
\theta_{AB} &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4Px}{5}\right)(x)\right] = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI} \\
\theta_A = \theta_{AB} &\Rightarrow -\frac{2}{15}\frac{PL^2}{EI} = -\frac{2}{5}\frac{Px^2}{EI} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}} \\
\Delta_{max} &= \left(\frac{4Px}{5EI}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}} \\
\Rightarrow \Delta_{max} &= \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}
\end{aligned}
$$

22.3.4.5 温度 曲率 关系

23 在许多情况下, 我们试图确定由热负载引起的灵活缺陷。(例如, 在我们有不同的热扩张率的二元素, 或者当我们有不同顶部和底部温度时).

24 假设温度的线性变化

$$
\begin{aligned}
\Delta_T &= \alpha \Delta T_T dx \quad \text{Top} \\
\Delta_B &= \alpha \Delta T_B dx \quad \text{Bottom}
\end{aligned}
$$

25 下一篇: 考虑

$$
\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y}
$$

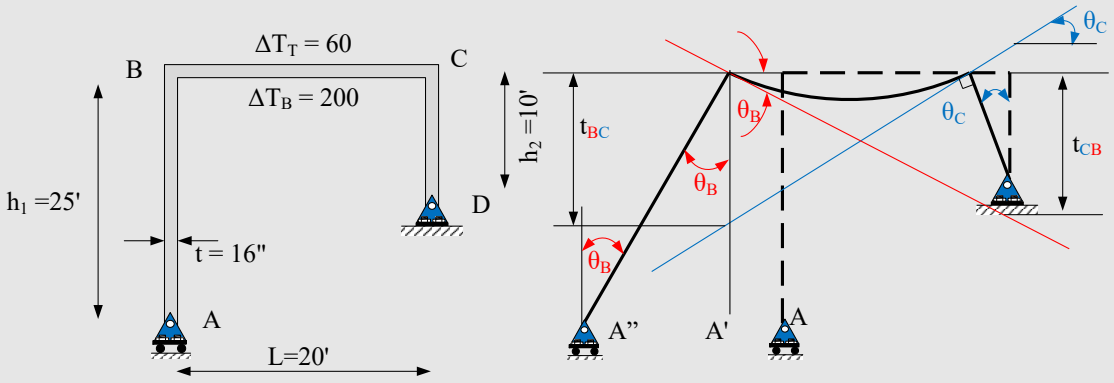
在这种情况下, 我们可以采取 $\varepsilon = \alpha \Delta T_T$ 在 $y = \frac{h}{2}$ 或 $\varepsilon = \alpha(T_T - T_B)$ 在 $y = h$ 这样

$$
\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\alpha(T_T - T_B)}{h}
$$

22.3.4.5.1 例题 22.11: 框架 受温度加载

忽略轴形变, 我们试图计算 位移 在 A 为以下框架

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



1. 首先, 让我们把扭曲的形状描绘出来。
2. BC 格式 $\Rightarrow \theta_B = \theta_C \neq 0$
3. 固定在 B 和 C 上, 没有 荷载 在 AB 和 CD 上
4. 挠度 在 A

$$\begin{aligned} \Delta_A &= AA'' = AA' + A'A'' \\ AA' &= \Delta_B = \Delta_C = |\theta_C| h_2 \\ A''A' &= |\theta_B| h_1 \end{aligned}$$

5. 我们需要计算 θ_B & θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{C/B}}{L}$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \text{ or } \theta_C = \frac{t_{B/C}}{L}$$

6. 为了应用曲率是理论, 我们需要一个曲率 (或瞬间图).

$$\frac{1}{\rho} = \alpha\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{EI}$$

7. 應用第二個理論, 我們採取一個的瞬間 曲率 與 B 相關, 我們指出 $\mathcal{A}$ 图表下方的区域 曲率

$$t_{C/B} = \mathcal{A}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow |\theta_B| = A\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ or } \theta_B = -\frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (-ve)}$$

8.

$$\left.\begin{aligned} \theta_{CB} &= \mathcal{A} \\ \theta_C &= \theta_{CB} + \theta_B \end{aligned}\right\} \theta_C = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{2} = \frac{\mathcal{A}}{2} \text{ (+ve)}$$

9. 从上面,

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{A}} &= |\theta_C| h_2 + |\theta_B| h_1 \\ &= \frac{\mathcal{A}}{2} h_2 + \frac{\mathcal{A}}{2} h_1 = \frac{\mathcal{A}}{2}(h_2 + h_1) \\ \mathcal{A} &= \frac{\alpha(T_B - T_T)}{h} L \end{aligned}\right\} \Delta_A = \alpha(T_B - T_T)\frac{L}{h}\left(\frac{1}{2}\right)(h_2 + h_1)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10. 替代

$$\Delta_A = (6.5\times10^{-6})(200-60)\frac{(20)(12)}{(16)}(\frac{1}{2})(10+25)(12)$$
$$= 2.87 \text{ in}$$

11. 其他 数值 值:

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha(T_B - T_T)}{h}L$$
$$= \frac{1}{2}(6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{(16)}(20)(12)$$
$$= .00683rad. = .39^\circ \Rightarrow \frac{dy}{dx} << 1$$

注: $\sin(.00683) = .006829947$ 和 $\tan(.00683) = .006830106$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha\frac{(T_B - T_T)}{h}$$
$$= (6.5\times10^{-6})\frac{(200-60)}{16} = 5.6875\times10^{-5}$$
$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{5.6875\times10^{-5}} = 1.758\times10^4 \text{ in} = 1,465 \text{ ft}$$

12. 为了獲得 M 我们需要 E & I.
13. $\sigma = \frac{My}{I} = \frac{EI}{\rho}\frac{y}{I} = \frac{Ey}{\rho}$
14. ρ 是永久的 $\Rightarrow$ BC 在圆圈上 M 是永久的 & $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{二二Y}{二\times2} = \frac{M}{EI} = C \Rightarrow y = C\frac{x^2}{2} + dx + e.$

[26] 让我们从平板线上获取曲率并将其与 ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$
$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = c$$

在 $x = 0, y = 0$ 这样 $e = 0$
在 $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -.00683$ 这样 $d = -.00683$
在 $x = 20$ ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = .00683$ 这样 $c(20) - .00683 = .00683$ 这样 $c = 6.83\times10^{-4}$ 这样

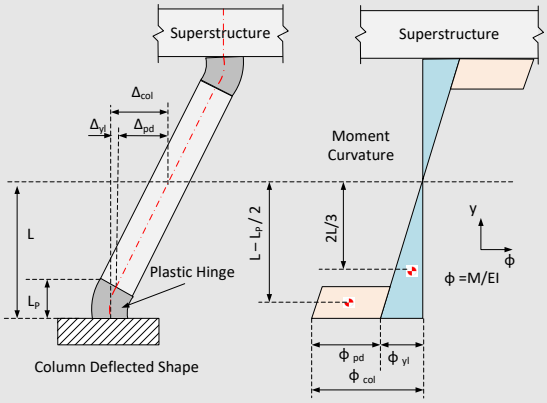
$$y = 6.83\times10^{-4}\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = 6.83\times10^{-4}(x-10)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6.83\times10^{-4}$$
$$\kappa = 6.83\times10^{-4}$$
$$\rho = \frac{1}{6.83\times10^{-4}} = 1,464 \text{ ft} \text{ as expected!}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果我们要使用正确的曲率公式

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+(\frac{dy}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6.83\times10^{-4}}{[1+(.00683)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= 6.829522\times10^{-4}$$
$$\Rightarrow \rho = 1464.23 \text{ ft} \quad \text{(compared with 1465ft)}$$

22.3.4.6 例题 22.12: 塑料长度



皮革形状和曲率图表; 适用于 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2

在 静力推覆分析 中, 我们需要确定后面应用的力量与相应的不弹性变形之间的关系。这是一个合理的假设, 因为所有的塑料变形发生在基地沿着所谓的 **塑性铰**.
假设 柱 的直径 d_c *7* **英尺, 混凝土压缩强度** f_c' **五千** *psi*, **现在** *15839 k-ft*。这种变形可以通过 曲率 区域理论来确定。有趣的是, 我们正在将方法应用到一个单元具有弹性和无弹性曲线。这个例子从章节中取出。69.4.1.

从第 1 理论中, 我们获得曲率

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P$$

第二理论

$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld}\frac{L}{2}\right)\times\frac{2}{3}L$$

来自 EQ。22.1

$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C}$$

溶解弹性模块, 瞬间的内心

$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)}$$
$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi\times7^4\times12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

最后, 我们取代了

$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5}$$
$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3}(50 \times 12) = 2.32 \text{ inch}$$

22.3.4.7 弹性重量 / 结合点击

有关历史背景，请参见 §??

26 两个 曲率 区域理论之间的类似性, 以及表和时刻的综合定义 (此前提到) 在桌子上总结 22.1.

内部力量	曲率 区域
w	$1/\rho$
$V_{21} = \int_{x_1}^{x_2} w dx$	$\theta_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\rho} dx$
$M_{21} = \int_{x_1}^{x_2} V dx$	$t_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \theta dx$

表 22.1: 两组关系之间的类似性

27 因此, 我们可以想象一个 **合成 梁** 像想象的梁相同尺寸 (长度) 如原始梁但在任何点上荷载的合并 梁等于曲率. 在这样的 A “梁”, 标志将与尾巴相同, 时刻将与原来的真实梁的位移相同。

28 边界条件是从表中确定的 22.2 和 图 22.5.

现有 梁		合并 梁		
戒指	$\theta \neq 0;\ y = 0$	$V \neq 0$	$M = 0$	“戒指”
固定结局	$\theta = 0;\ y = 0$	$V = 0;$	$M = 0$	自由结局
自由结局	$\theta \neq 0;\ y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	固定结局
内部环	$\theta \neq 0;\ y \neq 0$	$V \neq 0;$	$M \neq 0$	室内 支座
室内 支座	$\theta \neq 0;\ y = 0$	$V \neq 0;$	$M = 0$	内心灵魂

表 22.2: 合并 梁 限制条件

29 虽然 曲率 区域方法有一个精确的基础, 但它的直接应用有时会令人困惑。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

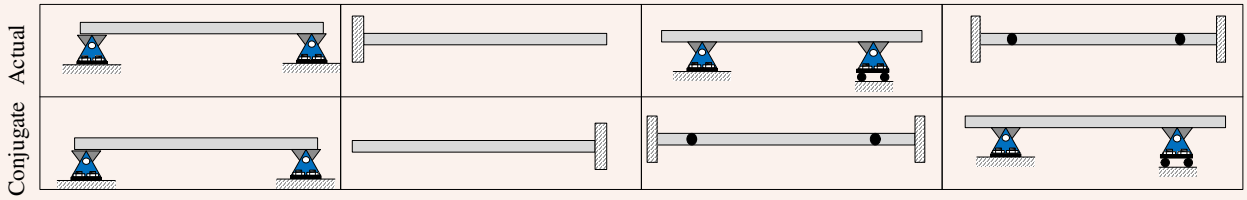


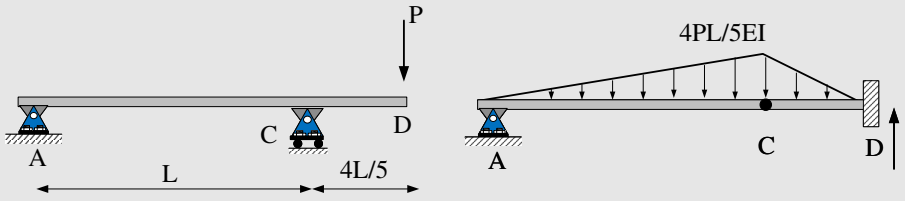
图 22.5: 混合 Beam

30 请注意, 我们只能有 分布荷载, 而 荷载 是积极的时刻, 负的时点。“谢尔” 和 “瞬间” 图表应按下编写。

31 单位的 “分布荷载” w^* 是 $\frac{FL}{EI}$ (强力时间长度分为 EI). 因此, 该 “谢尔” 會有單位 $w^* \times L$ 或 $\frac{FL^2}{EI}$ 和 The “瞬间” 會有單位 $(w^* \times L) \times L$ 或 $\frac{FL^3}{EI}$. 回忆这 EI 有单位的 $FL^{-2}L^4 = FL^2$ 我们看见, 真的是 “谢尔” 相应于转角在辐射和 “瞬间” 到 位移。

22.3.4.7.1 例题 22.13: 接口 梁; 点 荷载

分析下列 梁



在结合线中, 我们有 3 个平衡方程和 1 个条件方程, 其总数相当于反应的数量。

与 D 的 挠度 相匹配, 与相应的 梁 的 D 标志相匹为。

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0 \Rightarrow R_A(L) - \left(\frac{4PL}{5EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{2PL^2}{15EI}$$

这是一个真正的梁在 A 像计算之前!

让我们在一个点上绘制结合 梁 的时刻图 x 远离 A。从 A 到 C

$$M = \frac{P}{EI}\left[\frac{2}{15}L^2x - \left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{2}{15}L^2x - \frac{2}{15}x^3\right)$$

$$= \frac{2P}{15EI}\left(L^2x - x^3\right)$$

最大瞬间的点 (Δ_{max}) 發生時 $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2P}{15EI}(L^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow 3x^2 = L^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

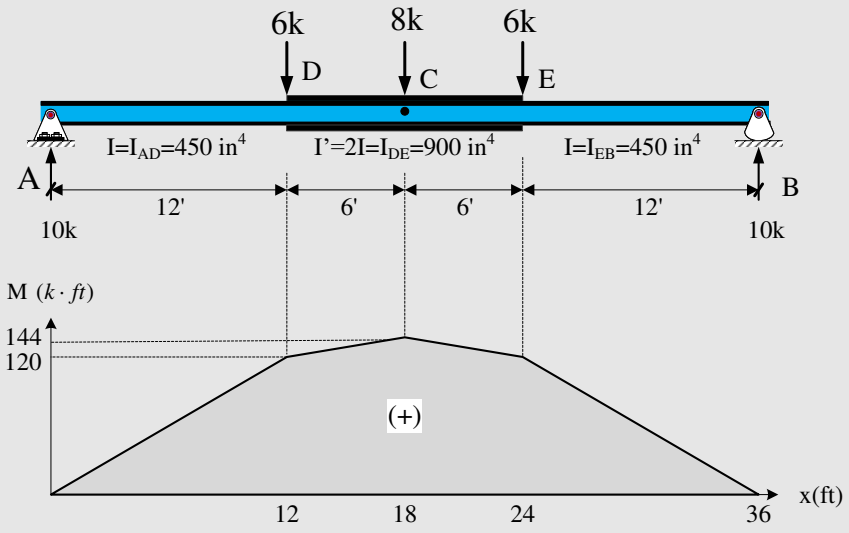
如前所述

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow M = \frac{2P}{15EI}\left(\frac{L^2 L}{\sqrt{3}} - \frac{L^3}{3\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{4PL^3}{45\sqrt{3}EI}$$

像以前一样。

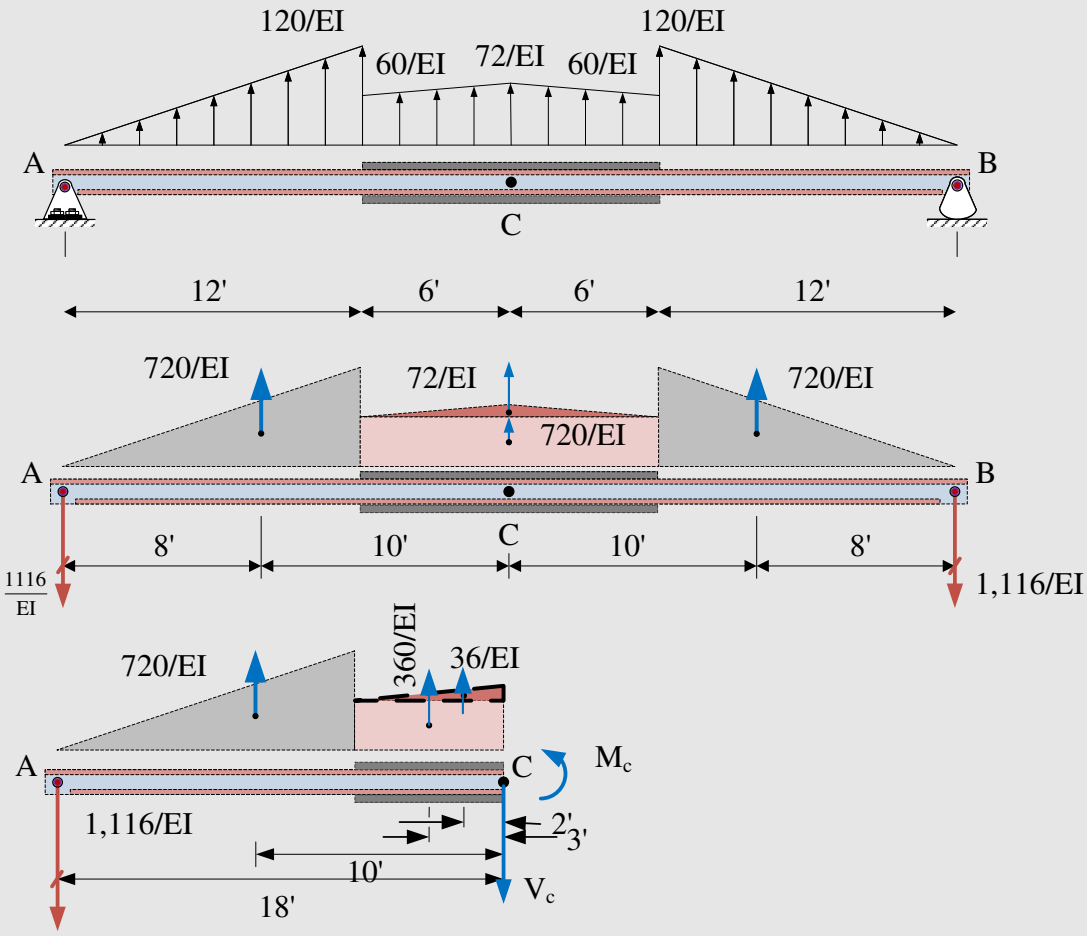
22.3.4.7.2 例题 22.14: 合成 梁; 变量 I

确定下列 梁 的 C 点的 挠度



从简单观察中,A 和 B 的反应相当于 10k。梁 连接式上的 荷载 是

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



接下来, 我们试图确定结合 梁 的 C 中的内部时刻, 它从 平衡 获得:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = -;\ \frac{1,116}{EI}(18) - \frac{720}{EI}(10) - \frac{360}{EI}(3) - \frac{36}{EI}(2) + M_C = 0$$

$$\Rightarrow M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3}{EI}$$

替代

$$\Delta_C = M_{C'} = -\frac{11,736\text{k.ft}^3(12^3)\text{in}^3/\text{ft}^3}{(29\times10^3)\text{k/in}^2(450)\text{in}^4} = -1.55"$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



加利利奥的描述, 从演讲和数学示威与两个新科学有关的梁 *(1638)*

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

23 Shear 和 扭转

摘要

Shear 和 扭转 在 结构分析 中经常被 *flexure* 所夸张。然而, 他们在许多情况下都扮演着关键角色, 并可能值得在这本书中的章节。覆盖超越基本, 并处理蒂莫申科和弗拉索夫模型。

一些衍生方程式将补充章节中的方程 *26* 准备了硬度方法。

23.1 Shear 歪曲 (转向) 806
23.1.1 字体, 无限的单元 806
23.1.2 股票分布; $\tau(y)$ 807
23.1.3 共享率 808
23.1.4 SHAR 因素 808
23.1.5 Shear 歪曲 v_s 泰莫森科 . . . 810
23.2 转型变形 811
23.2.1 S^t 虚拟或统一 扭转 811
23.2.2 Vlasov 或 Nonuniform 扭转 812

23.1 Shear 歪曲 (转向)

1 一般情况下, 由于灵活性导致的叶形变异, 图 23.1 他们是相当小的。然而, 对于低距离到深度比例的斑点, 这些变形不能被忽视。因此, 我们可以区分

伯诺伊利 梁, 我们不考虑叶形, 飞机部分仍然是飞机。

蒂莫森科 梁 是指甲形状, 平板部分假设不再有效。

因此, 本节将试图确定甲状腺变形。(没有灵活) 其后对硬度率的影响。

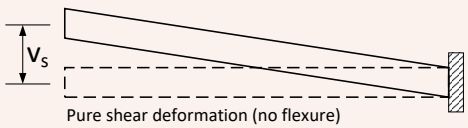


图 23.1: 清洁的甲状腺变形

23.1.1 字体, 无限的单元

2 采用线性弹性材料, 标签为应变 (小 位移, 即 $\tan\gamma \approx \gamma$), 图 23.2 被授予的

$$\tan\gamma \approx \gamma = \underbrace{\frac{dv_s}{dx}}_{\text{Kinematics}} = \underbrace{\frac{\tau}{G}}_{\text{Stress-strain}} \tag{23.1}$$

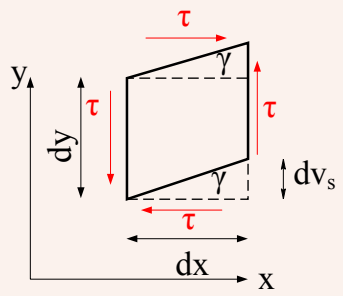


图 23.2: Infinitesimal 单元 受 剪应力 的约束

哪里 $\frac{dv_s}{dx}$ 射线中立的轴与水平方向有关。垂直部分仍然不形成。G 是 剪切模量。τ 剪应力 和 v_s 由 位移 引发.

23.1.1.1 例题 23.1: 挠度 加密式 梁

让我们看一看一张彩票 (直角 bxh) 梁 受点 荷载 的约束 P 在自由的结局。从补充虚功的原则 (并指出 这 $\delta M = (1)x$, $M = Px$, $\delta\tau = 1$, 和 τ 由 EQ 提供。23.3):

$$
\begin{aligned}
(1)\Delta &= \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx}_{\text{Flexure}} + \underbrace{\int_{Vol} \delta\overline{\tau}\frac{\tau}{G}dVol}_{\text{Shear}} \\
&= \int_0^L x\frac{Px}{EI}dx + \frac{1}{G}\int_{-h/2}^{h/2} \underbrace{(1)}_{\delta\tau} \underbrace{\left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}}_{\tau} \underbrace{Lbdy}_{dVol} \\
&= \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\Delta_{flex}} + \underbrace{\frac{6}{5}\frac{PL}{AG}}_{v_s} \\
\Delta &= \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

为 $E/G = 2.5$ (钢材 的典型值), $\Delta = EI\left(1 + 0.75\left(\frac{h}{L}\right)^2\right)\Delta_{flex}$

为 $L = h$ 总 挠度 是 1.75 倍, 因为单纯的灵活性。$L = 10h$ 挠度 由于 Shear 低于 1% 由 Δ_{felx}.

23.1.2 股票分布; $\tau(y)$

3 我们试图确定转型剪应力的垂直分布, 图 23.3a. 考虑到一个长度的部分 dx 远程切断 y 从 N.A. 平衡 要求

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$(+\rightarrow)\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{lft}} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \sigma_x^{\text{rgt}} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

取代压力程度:

$$\int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x)y}{I} b dy - \int_y^{y^{\text{top}}} \frac{M(x) + dM(x)y}{I} b dy + \tau_{xy} b dx = 0$$

简化和分配 dx 和 b 给予

$$\tau_{xy} = \frac{dM(x)}{dx} \frac{1}{Ib} \int_y^{y^{\text{top}}} y b dy$$

但自从 $V(x) = dM(x)/dx$, 然后, 剪应力分布是由

$$\tau(xy) = \frac{V(x)}{Ib} \int_y^{y^{\text{top}}} y b dy = \frac{V(x)Q(y)}{Ib} = \frac{VQ(y)}{Ib}$$

V 剪力, Q 第一瞬间 (静态时刻) 關於 中性轴 的部分的 横截面积 外部的部分, 在哪裡要確定剪应力 , I 惯性矩, b 宽度

23.1.3 共享率

4 **定义** Shear 比例 α_s 剪应力 与 中性轴 的比例 $\tau(y=0)$ 到平均 剪应力 ($\tau = V/bh$).

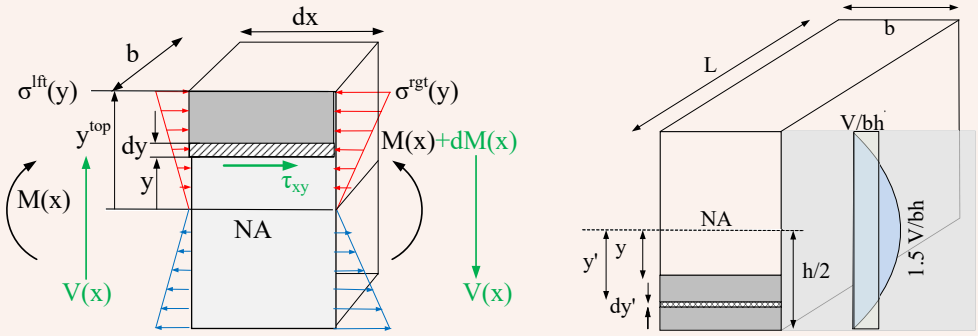
$$\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{VQ(y)}{Ib} && (23.2) \\ &= \frac{1}{Ib} \int_y^{h/2} \underbrace{V \underbrace{\underbrace{b dy'}_{dA}}_{dF} y'}_{dM} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \\ &= \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) && (23.3) \end{aligned}$$

- 剪应力 是零的 $y = h/2$ 最多在中性轴在哪里 ($y = 0$ 和 $\tau_{max} = 1.5\frac{V}{bh}$). $\Rightarrow \alpha_s = 1.5$

23.1.4 SHAR 因素

5 就像我们有 $\sigma = P/A$ 我们可以假设 $\tau = V/A$?

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 长度分区 dx 远程切断 y 来自 N。 (b) 共享率

图 23.3: 剪应力 和比例

6 正常化 剪力 V 由 A ($\tau = V/A$ 就像 $\sigma = P/A$) 因为 剪应力 不均匀分布在深度。

7 我们定义

$$\tau \overset{\text{def}}{=} V/A_s \Rightarrow A_s \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{\lambda_s} \tag{23.4}$$

哪里 A_s 是有效的 截面 为 剪力。我们要确定 λ_s，该 **剪力 因素**.

8 要确定 λ_s 我们将平等 **平均表格 应变能** U

$$U_{aver} = \int_0^L \frac{V^2}{2GA_s} dx = \lambda_s^? \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx \tag{23.5}$$

到 The **准确** 1 由实际 剪应力 分布确定

$$U_{exact} = \frac{1}{2}\int_\Omega \gamma \underbrace{G\gamma}_{\tau} d\Omega = \int_\Omega \frac{\tau^2}{2G} d\Omega = \iiint \frac{\tau^2}{2G} dxdydz \tag{23.6}$$

请注意, 在 结构力学 中 Ω 代表一个 体积, 和 Γ (或 $\delta\Omega$) 相应的表面。

9 以 剪应力 的准确表达开始

$$\tau(y) = \frac{VQ(y)}{Ib}; \qquad Q(y) = \int_y^{h/2} by'dy' = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10 替换为 Eq。23.6 要确定正确的 应变能.

$$\begin{aligned} U_{exact} &= \int_0^L \left[\int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{V^2}{8GI^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dydz \right] dx \\ &= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2 y^2}{2} + y^4 \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^L \frac{V^2 b}{8GI^2} \left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} \right]_{-h/2}^{h/2} dx \\ &= \int_0^L \frac{V^2 b h^5}{240GI^2} dx \end{aligned}$$

11 对于一个直角部分 $I = bh^3/12$

$$U_{exact} = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V^2}{GA} dx = \underbrace{\frac{6}{5}}_{1.2} \int_0^L \frac{V^2}{2GA} dx$$

12 与 EQ 相比。23.5 我们注意到, 叶子形成因素 $\lambda_s = 1.2$. 这样

$$\tau = V/A_s; \qquad A_s = \frac{A}{1.2} \tag{23.7}$$

13 因此, 由于破坏性, 我们采用了 $\tau = V/A_s$ 和来自 EQ。23.1 我们获得

$$\tan \gamma \simeq \gamma = \frac{dv_s}{dx} = \frac{V}{GA_s} = \frac{\lambda_s V}{AG} \tag{23.8}$$

14 相似的评论与 $\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{P}{AE}$

23.1.5 Shear 歪曲 v_s 泰莫森科

15 梁在一个端口粘贴的叶片变形, 在另一个端点被 荷载 折叠。(正如定义的密度同步术语) 将决定下一个。

16 来自 EQ。23.8, 并承认 V 要保持稳定,

$$\int dv_s = \int \frac{V}{GA_s} dx \Rightarrow v_s = \frac{V}{GA_s} x + C_1 \tag{23.9}$$

17 如果 位移 v_s 是零在梁的相反端, 然后 $C_1 = -\frac{V}{GA_s}(x - L)$ 和

$$v_s = \frac{V}{GA_s}(x - L) \tag{23.10}$$

18 在 $x = 0$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

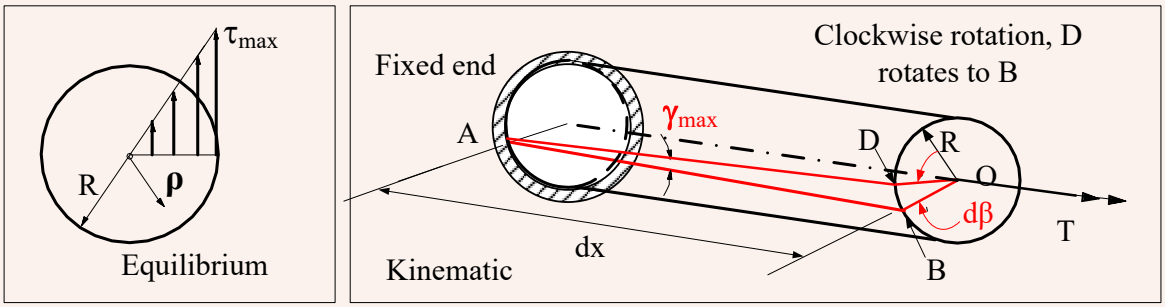


图 23.4: 扭转 转角 关系

定义 23.1: Shear 歪曲

$$v_s = \frac{V}{GA_s}L \tag{23.11}$$

[19] 这个表达式将被重复在 §41.7 在 Timoshenko 梁的背景下。

23.2 转型变形

[20] 当 扭转 适用于结构成员时, 该成员的跨部分可以加旋转。如果会员被允许自由发动, 那么使用的旋转只能抵抗 **圣文** 分享压力。这种行为被称为纯粹的或 **单身 扭转**. 另一方面, 如果会员被阻止自由冲动, 则应用的旋转是由圣文特冲动压力和冲动扭转的组合抵抗, 这称为 **非统一 扭转** (或 Vlasov 的 扭转).

23.2.1 S^t 虚拟或统一 扭转

[21] 采用线性弹性材料和线性应变 (因此, 应力) 分布在圆形截面的广径上, 受过旋转荷载, 图 23.4 我们有:

$$T_{SV} = \underbrace{\underbrace{\int_A \underbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{max}}_{stress}\underbrace{dA}_{area}}_{Force}\underbrace{\rho}_{arm}}_{torque} = \frac{\tau_{max}}{c}\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{T_{SV}\,c}{J} \tag{23.12}$$

请注意最后方程式的类似性 $\sigma = \frac{Mc}{I_{zz}}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

22 $\int_A \rho^2 dA$ 是极 惯性矩 J. 它也被称为圣。Venant 的 扭转 固定。循环十字段

$$\begin{aligned} J &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 \left(2\pi\rho d\rho\right) \\ &= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \end{aligned}$$

对直角部分 $b \times d$, 和 $b < d$ 一个接近的表达是由

$$\begin{aligned} J &= kb^3 d \\ k &= \frac{0.3}{1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2} \end{aligned}$$

对于其他部分, J 它经常被编写。

23 請注意這 J 相应的 I_{xx} 哪里 x 它是沿着单元的轴。

24 由于我们已经发展了折磨和折磨压力之间的关系, 现在我们正在寻找折磨与折磨旋转之间的关系。在 图 23.4, 我们考虑到弓长度 BD

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{max} dx &= d\beta R \\ \Rightarrow \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\gamma_{max}}{R} \\ \gamma_{max} &= \frac{\tau_{max}}{G} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dx} &= \frac{\tau_{max}}{GR} \\ \tau_{max} &= \frac{T_{SV} R}{J} \end{aligned}\right\} \frac{d\beta}{dx} = \frac{T_{SV}}{GJ}$$

25 最后, 我们可以重新写下这个最后的方程式。$\int T_{SV} dx = \int GJ d\beta$ 并获得:

$$T_{SV} = \frac{GJ}{L}\beta \tag{23.13}$$

注意这个方程式和方程之间的相似之处 26.1.

23.2.2 Vlasov 或 Nonuniform 扭转

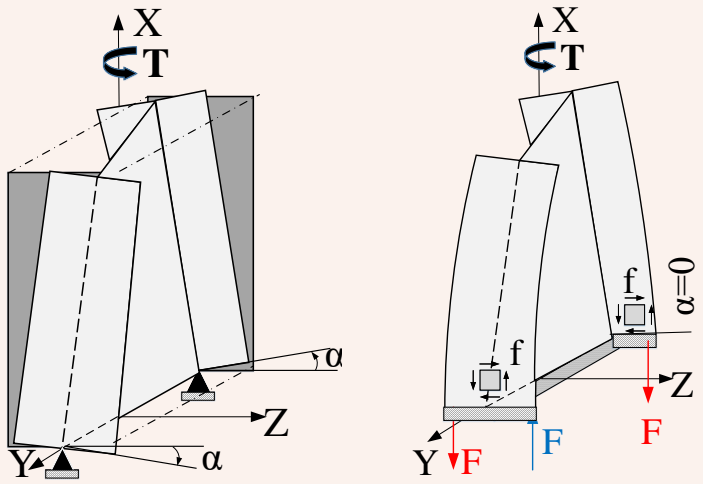
26 所有交叉部分将除圆形外, 都将被排除在现场。因此, 长度限制可能会改变应力的分布和硬度在成员的显著长度上, 通常有利于, 因为它们阻碍了旋转。[1].

27 扭转理论 Vlasov, 1961 包括限制的瓦林效应, 图 23.5. 与传统的梁理论相比, 弗拉索夫理论引入了两种额外数量; **永恒的冲浪** C_w 和 The **此刻** B. 旋转恒定是跨部分属性, 也是减少旋转所需的努力的一种措施。加密的单位是 $[L^6]$. 此时定义为

$$B = Md \tag{23.14}$$

[1] 基于衍生 (McGuire and Winter, 1968).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) , 但没有旋转　　(b) 限制旋转和扭转

图 23.5: 为什么会发生冲浪

[28] 这个新时刻的定义需要源于这一事实, 而 $M_y = M_z = \mathbf{N} = 0$, 仍然存在正常的压力在截面上作用。因此, 它将引入一个程度的自由的射线元素代表旋转由于限制的旋转。

[29] 一个 I 部分在一端是完全自由的, 并防止旋转, 但不冲动, 在另一端将像 图 中一样变形。23.5a. 在这种情况下, 对于所有实用目的来说, 这在结构上类似于在两端的无缝切割的情况, 但受平等和相反的旋转。

[30] 如果基地被阻止冲动和旋转, 事情是不同的。阻止火箭从触摸是力量 $\mathbf{F}$ 它围绕它的主要轴非常像一个直角梁是由支座, 图开发和执行的。23.5b. 这些结果是转换剪力 $\mathbf{H}_f$, 图 23.6a 在每一个旗帜上。这会导致对强轴的弯曲, 就像一个直角梁一样。[2].

[31] 交叉的力量在火箭时, 它们之间的距离是一对与抵抗旋转相同的方向。

[32] 一般情况下, 加热限制是有用的。虽然整个旋转在尾巴沿着是恒定的, 而旋转的速度通常有所不同。在基地,Fig 23.5b 它必须是零, 所有茶的抵抗都在旋转中。但是, 最终阻塞的效果就消失了, 并逐渐增加了沿着相关术语子, 直到从基地远离的一个部分。它几乎与纯 扭转 相同, 从那时起, 所有的旋转都抵抗了旋转板, 图 23.6b.

[33] 因此, 共 扭转 分为两个组成部分。

$$T = T_{SV} + T_V \tag{23.15}$$

第一個詞來自 Eq。23.12

$$T_{SV} = GJ\theta = GK\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} \tag{23.16}$$

[2]网面也有弯曲, 但由于其弱方向的微小硬度, 它可以被忽视。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

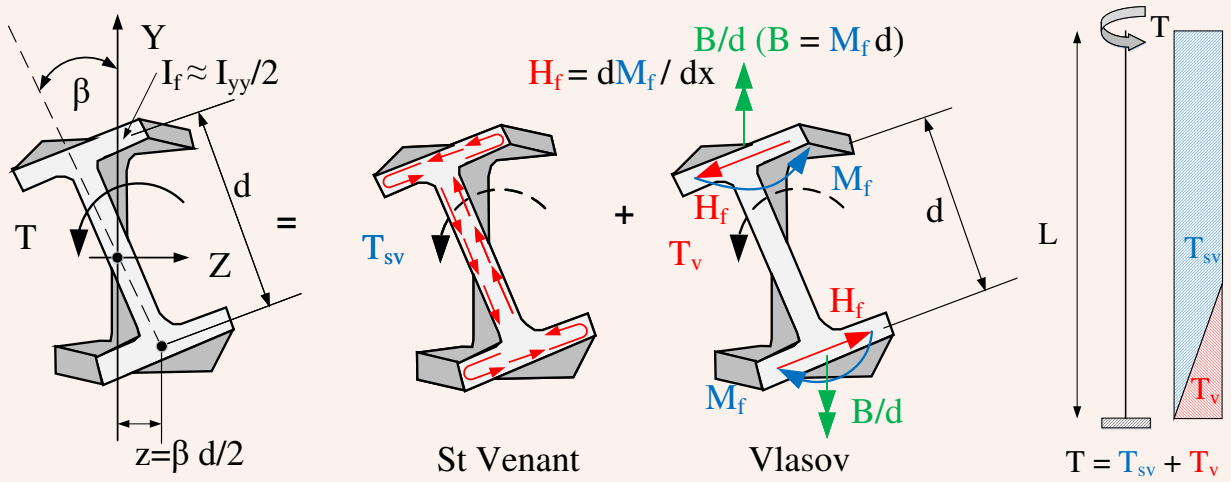
34 对于第二项，可将每个翼缘视为绕其强轴弯曲的矩形梁；由于剪力是弯矩的导数

$$\frac{M_f}{EI_f} = -\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{d}{2}\frac{d^2\beta}{dx^2} \tag{23.17}$$

我们有

$$H_f = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -EI_f\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}x^3}$$

哪里 M_f 是弯矩在旗帜中，I_f 是的，(单身) 惯性矩 字符串 z 是每个旗帜的中心在一个部分的转挠度 x 从基地 (部分的转角是 β)，图 23.6.



(a) 托尔西

(b) 折磨的破坏

图 23.6: 非统一 扭转 (适应从 (McGuire and Winter, 1968))

35 忽略网页，I_f 它是我们所拥有的整个部分,Fig 的弱轴时刻的一半。23.6a

$$\begin{aligned} I_f &= I_{yy}/2 \\ z &= \beta d/2 \\ H_f &= T_V/d \end{aligned}$$

替代

$$T_V = \frac{\mathrm{d}M_f}{\mathrm{d}x} = -E\underbrace{\frac{I_{yy}}{2}\frac{d^2}{2}}_{C_w}\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} \tag{23.18}$$

哪里 C_w 是所谓的财产部分。**永恒的冲浪**.

36 取代 EQ。23.16 和 23.18 到 eq。23.15:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 23.2: 统一和非统一 扭转

$$T = \underbrace{GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}}_{T_{SV}} - \underbrace{EC_w\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3}}_{T_V} \tag{23.19}$$

37 否则, 我们将 B 被定义为产品 M_f 与 d

$$\left.\begin{aligned} B &= M_f d \\ M_f &= -EI_f z'' \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f z'' d \\ z &= \frac{\beta d}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} B &= -EI_f \tfrac{d^2}{2}\beta'' \\ I_f &= \tfrac{I_{yy}}{2} \end{aligned}\right\} B = -E\underbrace{I_{yy}\frac{d^2}{4}}_{C_w}\beta''$$

38 因此,eq。23.19 可以重写为

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} + \frac{dB}{dx}$$

39 以便方便识别统治差异方程式,Eq。23.19 可以重写为

$$\frac{\mathrm{d}^3\beta}{\mathrm{d}x^3} - p^2\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} = -\frac{T}{EC_w}$$

哪里

$$p^2 = \frac{GJ}{EC_w} \tag{23.20}$$

其总体解决方案是

$$\beta = C_1 + C_2 px + C_3\cosh px + C_4\sinh px \tag{23.21}$$

常数将通过适用的 图 边界条件的应用来确定 23.7.

梁在两端粘贴

40 遵循下列限制条件,

$$\begin{array}{lllll} \text{End 1} & x=0, & \beta=\beta_1, & \beta'=\beta'_1, \\ \text{End 2} & x=L, & \beta=\beta_2, & \beta'=\beta'_2, \end{array} \tag{23.22}$$

我们将确定四个恒例。(Bhatt, 1986)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(SpL - C + 1)\beta_1 + (1-C)\beta_2 + p^{-1}(pL - C - S)\beta'_1 + p^{-1}(S - pL)\beta'_2}{D} \\ C_2 &= \frac{-S\beta_1 + S\beta_2 + p^{-1}(1-C)\beta'_1 + p^{-1}(1-C)\beta'_2}{D} \\ C_3 &= \beta_1 - C_1 \\ C_4 &= p^{-1}\beta'_1 - C_2 \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

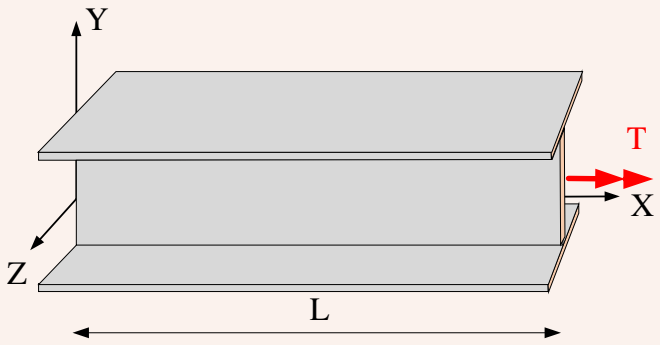


图 23.7: I 梁 受 扭转 的约束

哪里 $D = 2(1-C) + SpL$, $S = \sinh pL$, 和 $C = \cosh pL$. Eq 23.21 现在可以用形式函数来表达。

$$\begin{aligned}
\beta &= N_1\beta_1 + N_2\beta_2' + N_3\beta_2 + N_4\beta_2' \\
N_1 &= \frac{(pL - px + \sinh px)S + (1-C)(1+\cosh px)}{D} \\
N_2 &= \frac{kx(1-C) - (CpL - S)(\cosh px - 1) + (SpL + 1 - C)\sinh px}{D} \\
N_3 &= \frac{(C-1)(\cosh px - 1) - S(\sinh px - px)}{D} \\
N_4 &= \frac{(C-1)(\sinh px - px) - (S - pL)(\cosh px - 1)}{pD}
\end{aligned}$$

[41] 在 EQ。23.22 上述边界条件在转移方面被表达, 最好在转折方面表达。$T = GJ\beta' - EC_w\beta'''$ 而不是弯矩在旗帜中, 使用 bimoment B 被定义为

$$B = d\underbrace{EI_f z''}_{M_f} = EC_w\frac{d^2\beta}{dx^2}$$

这就是 EQ。23.19 现在可以重写为

$$T = GJ\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} - EC_w\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

42 使用 EQ。23.21 和整合的恒定的价值观, 我们可以表达力量在终端节点转移方面。

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{GJ}{LD}\left[(\beta_2-\beta_1)SpL-(\beta_1'+\beta_2')(C-1)L\right] \\
B &= \frac{GJ}{D}\left\{(\beta_2-\beta_1)\left[(C-1)\cosh px - S\sinh px\right]\right. \\
&\quad + p^{-1}\left[(S-CpL)\cosh px+(SpL+1-C)\sinh px\right]\beta_1' \\
&\quad \left. +p^{-1}\left[(pL-S)\cosh px+(C-1)\sinh px\right]\beta_2'\right\}
\end{aligned}
$$

梁在一端粘着

43 在此情况下, 限制条件由

$$
\begin{aligned}
&\text{End 1};x=0,\beta=0;\frac{d\beta}{dx}=0 \\
&\text{End 2};x=L, \qquad \frac{d^2\beta}{dx^2}=0
\end{aligned}
\tag{23.23}
$$

第一套条件表明, 旋转和旋转率在这一结尾是零。其次, 它指出, 在它的主要轴周围的每个旗帜上的弯曲是零。(Eq. 23.17).

44 将这些限制条件应用到 Eq。23.21 其衍生品, 解决方案是

$$\beta = \frac{T}{GJ}\left[x+\frac{\sinh p(L-x)-\sinh\ pL}{p\cosh pL}\right] \tag{23.24}$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{T}{GJ}\left[1-\frac{\cosh p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.25}$$

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = \frac{T}{GJ}\left[\frac{p\sinh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.26}$$

$$\frac{d^3\beta}{dx^3} = -\frac{T}{GJ}\left[\frac{p^2\cosh\ p(L-x)}{\cosh pL}\right] \tag{23.27}$$

23.2.2.1 例题 23.2: 不统一的扭转 I 部分

例子从 McGuire and Winter, 1968, example 5.17

一个 10 英尺长的 14W74 部分, 在一端固定, 在另一端自由, 受折叠 T 用在自由端的应用, 绘制曲线的角度和比例 T 在圣维南扭矩与翘曲扭矩之间。我们要努力确定内部压力。

物理属性

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

(在 x lb/ft 中)	h (在)	w (在)	t_w (在)	$b_f (in)$	t_f (在)	I_x (在 ^{4})	I_y (在 ^{4})	J (在 ^{4})	C_w
W 14 x 74	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.88	5,990
使用*	14.17	10.070	0.450	10.07	0.785	796	134	3.6	6,000

差异是由于在例子中采用的旧部分属性。

$E = 30 \times 10^6$ 狗, $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{1+0.3}$

托尔西

只需检查!

$$J = \Sigma \frac{bt^3}{3} = \frac{2 \times 10.07 \times (0.783)^3}{3} + \frac{12.62 \times (0.450)^2}{3} = 3.60 \text{ in}^4 \checkmark$$

$$C_w = \frac{d^2 I_y}{4} = \frac{(14.19 - 0.78)^2 (133.5)}{4} = 6,000 \text{ in}^6 \checkmark$$

使用以前衍生方程式:

$$\text{Eq. 23.20;}\ p = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} = \sqrt{\frac{E \times 3.6}{2(1+0.3)E \times 6,000}} = \frac{1}{65.9}\left(\frac{1}{\text{in.}}\right)$$

$$GJ = \frac{30 \times 10^6}{2(1+0.3)} \times 3.60 = 41.5 \times 10^6 \text{lbs-in}^2$$

$$\text{Eq. 23.24;}\ \beta = \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x + \frac{\sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right) - \sinh\left(\frac{120}{65.9}\right)}{\frac{1}{65.9}\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right]$$

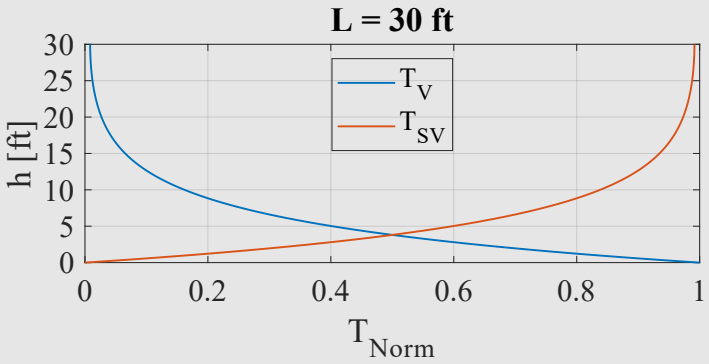
$$= \frac{T}{41.5 \times 10^6}\left[x - 62.4 + 20.8 \sinh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.16 \& 23.25;}\ T_{SV} = GJ\frac{d\beta}{dx} = T\left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[1 - \frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

$$\text{Eqs. 23.18 \& 23.26;}\ T_V = -EC_w\frac{d^3\beta}{dx^3} = T\left[\frac{\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)}{\cosh\left(\frac{120}{65.9}\right)}\right] = T\left[\frac{1}{3.17}\cosh\left(\frac{120-x}{65.9}\right)\right]$$

如果基础是简单的, 那么 $T_{SV} = T$, 和 $\beta = T_X/GJ = T_x/(41.5 \times 10^6)$.

下列数字 [a] 描述了扭转分布的正常化, 沿着轴承。至於我們所擁有的基礎, $T_V/T = 1$, 和 $T_{SV}/T = 0$. 随着我们从基地移动, 阻碍效应下降, 阻止效应减少。(在此情况下) 只有一次消失 $L = 30$ ft 。从那时起, 扭转完全抵抗了 Sait-Venant 一。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

内部压力

基地 ：$T_{SV}=0, T_V=T$

$$
\begin{aligned}
3M_f &= -EI_f\left[\frac{d^2z}{dx^2}\right]_{x=0} &&= -\frac{EI_f d}{2}\left[\frac{d^2\beta}{dx^2}\right]_{x=0}\\
&= -\frac{EI_y d}{4}\left[\frac{Tp}{GJ}\tanh(pL)\right] &&= -\frac{T}{pd}\tanh(pL)\\
&= -T\left(\frac{65.9}{14.19-0.78}\right)\tanh\left(\frac{120}{65.9}\right) &&= -4.65T
\end{aligned}
$$

采用线性分布

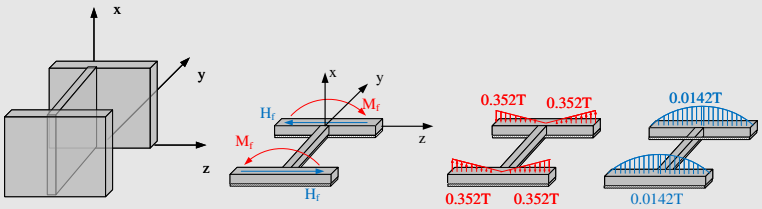
$$\sigma = \pm\frac{M_f}{t_f b_f^2/6} = \pm\frac{6\times 4.65T}{0.783(10.07)^2} = \pm 0.352T$$

翻译 Shear

$$H=\frac{T_V}{d}=\frac{T}{14.19-0.78}=\frac{T}{13.41}$$

采用 Parabolic Distribution

$$\tau=\frac{3H}{2b_f t_f}=\frac{1.5T}{13.41(10.07\times 0.783)}=0.0142T$$



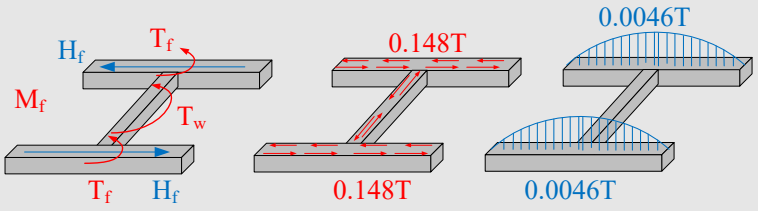
自由结局 从表达的 T_V 和 T_{SV} 我们有 $T_{SV}=0.687T$ 和 $T_V=0.32T$

翻译 Shear

$$\tau = 0.32(0.0142T) = 0.00455T$$

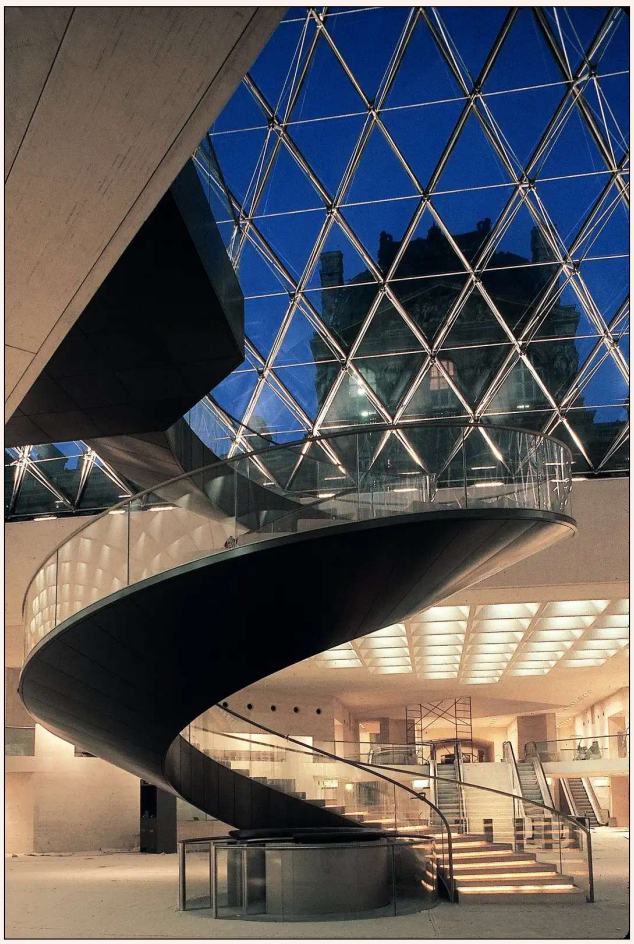
Torsional Shear 的评论

$$
\begin{aligned}
\tau_{fm} &= \frac{t_f T_{SV}}{J} = \frac{0.783(0.68T)}{3.60} = 0.148T \quad \text{Flange}\\
\tau_{wm} &= \frac{t_w T_{SV}}{J} = \frac{0.450(0.687T)}{3.60} = 0.085T \quad \text{web}
\end{aligned}
$$



[a] 生成 MATLAB® 代码在 §I.2.3.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿



卢浮宫博物馆, 楼梯 (我的 M 皮)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

24 附加 虚功

摘要

在上一章中, 引入了确定缺陷的地质方法, 这些方法仅限于灵活性成员。本章采用基本上不同的方法, 基于热力学第一法则, 适用于所有类型的结构性单元 (查看 图 17.2). 虽然在大多数文本中经常被称为 “能量方法”, 但这章则采用了更严格的标题, 以便与基于能源的方法详细描述。48. 最后, 这个章节被许多从简单到几乎复杂的例子增强, 证明了这些方法的实用应用。

24.1 引入 821
24.2 简化补充 虚功 原则的衍生 822
24.2.1 衍生品 822
24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti 相互理论 824
24.2.3 外部 虚功 $\delta\overrightarrow{W^*}$ 825
24.2.4 内部 虚功 $\delta\overrightarrow{U^*}$ 825
24.3 例子 827
24.3.1 例题 24.1: 梁 827
24.3.2 例题 24.2: 框架; 缺陷 828
24.3.3 例题 24.3: 框架, 转角 829
24.3.4 例题 24.4: 灵活的手套 830
24.3.5 例题 24.5: 索支持的 cantilever 梁 832
24.3.6 例题 24.6: Torsional 和 Flexural Deformation 833
24.3.7 例题 24.7: 梁中的灵活和叶形变异 835
24.3.8 例题 24.8: 热效应在梁 836
24.3.9 例题 24.9: 管道 837
24.3.10 例题 24.10: 桁架; 简单 838
24.3.11 例题 24.11: 桁架; 复杂 839
24.3.12 例题 24.12: 桁架 与初始交换器 840
24.3.13 例题 24.13: 桁架 二次压力 . . 840
24.3.14 例题 24.14: 圆环 842
24.3.15 例题 24.15: 春天 845



24.1 引入

1 上一章 扩展到一个地质方法来计算缺陷。但是, 这是一个有限的 (限于灵活的成员) 更好 “精英”.

2 本章将讨论一个可以适用于所有结构类型的通用方法, 并且不限于线性系统。但是, 这种方法的开发将是 “苏格兰” 更合理的衍生将被介绍为 48.3.1.

3 关于笔记的评论。本章将混合现实和虚拟数量。后者被定义为具有超条的, 并在其之前由 δ 象征 (不要被衍生品混淆).

24.2 简化补充 虚功 原则的衍生

24.2.1 衍生品

4 De 将原则由一个自愿的结构和 荷载 考虑, 如图所示。24.1 为了简单, 让我们假设 (或考虑) 这种结构只会产生内部轴压力和紧张。(σ 和 ε). 结构将受两种类型的力量的约束:

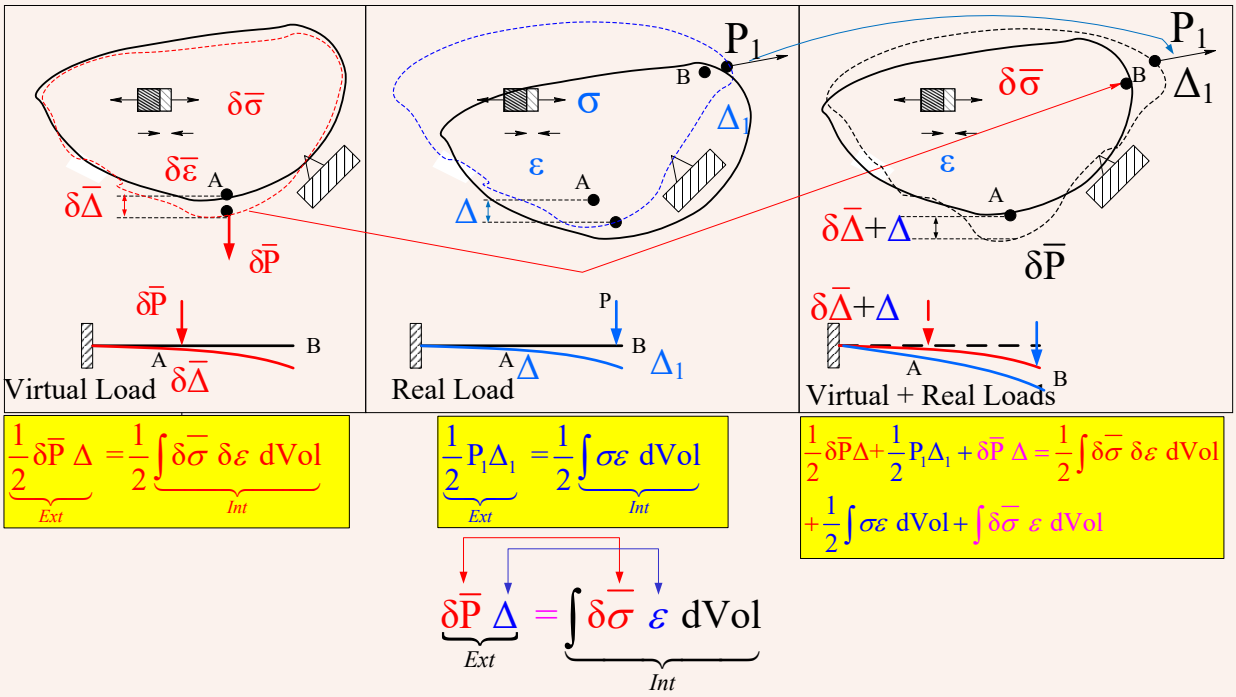


图 24.1: 虚拟和真实的力量在一个自愿的结构

虚拟 在现场使用的力量 A 沿着方向 (自由度) 我们要计算位移的位置 (或 转角). 它是虚拟的, 它的价值是无关紧要的, 但经常被认为是统一。虚拟力量必须在 **平衡**

真实的 相应于实际外部应用的 荷载, B.

相应的转移必须符合边界条件。

5 接下来的, 我们将为 **虚功** 是由虚拟力量通过一个真实的位移进行的工作。[1]. 这将通过以下序列实现:

- 应用虚拟 荷载 仅在 A (得到 Q。1)[2]
- 应用虚拟 荷载 在 A 然后应用真实的荷载 B (而虚拟荷载 仍在).

[1]或通过虚拟位移行动的真实力量。
[2]或者我们可以开始使用真实的 荷载 在 B 只有 (得到 Q。2) 然后使用虚拟一个。荷载序列是无关紧要的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

6 在此时, 我们中断了衍生, 并提醒自己

定义 24.1: 热力学第一法则

总能量的变化时间率 (即动能的总额 K 和内部能量 U) 相当于外部力量所做的劳动率的总和, 我们和温度内容的变化。单位时间 H

$$\frac{d}{dt}(K+U)=W_e+H$$

对于一个阿迪亚巴特系统 (没有热交换) 或者, 如果用几乎静态的方式 (没有 动能) 上面的关系简化到:

$$W_e=U$$

7 简单地说, 在我们的情况下, 外部工作必须相当于内部应变能. 因此:

1. 当我们应用虚拟 荷载 时 A, 然后外部工作必须相当于整个容量的内部压力能量, 然后:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}}_{\text{External virtual work}}=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}}\delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\text{dVol}}_{\text{Internal virtual strain energy}}$$

   - 1/2 源于 荷载 逐渐应用从 0 到它的完整值线性。曲线下的区域代表了外部工作 (同样适用于内部 应变能).
   - 应变能 是内部工作, 并在 体积 中集成。

2. 同样, 实用的荷载的应用 B 将给予

$$\underbrace{\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{\text{External real work}}=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{dVol}}\sum\varepsilon\text{dVol}}_{\text{Internal real strain energy}}$$

3. 现在, 虚拟 荷载 首先应用, 然后我们将实际应用 (真实的) 荷载在系统的顶部。但是, 正如我们应用了第二个真实的荷载, $\delta\overline{P}$ 保持稳定, 但经历了额外的位移 Δ. 因此, 有一个 **额外** 外部工作等于 $\delta\overline{P}\Delta$ 在这个地方, 等于

$$\delta\overline{P}\Delta=\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\text{dVol}$$

   缺席 *1 / 2* **期**. 因此, 完成的全部工作将成为

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

4. 收集 EQ。1, 2 和 3 我们得到了:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\delta\overline{P}\delta\overline{\Delta}+\frac{1}{2}P_1\Delta_1}_{\text{Uncoupled}}}^{A}+\overbrace{\underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\text{Coupled}}}^{B}=\overbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\delta\overline{\varepsilon}\,\mathrm{dVol}+\frac{1}{2}\int_{\text{Vol}}\sum\varepsilon\,\mathrm{dVol}}_{\text{Uncoupled}}}^{A}+\overbrace{\underbrace{\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\,\mathrm{dVol}}_{\text{Coupled}}}^{B}}^{A-B}$$

5. 由于应变能和完成的工作必须是相同的, 无论负载是否被应用在一起或单独, 我们从分解 Eqs 的金额中获得。2 和 1 从 4 一般化, 我们得到了

$$\underbrace{\int_{\text{Vol}}\delta\overline{\sigma}\varepsilon\,\mathrm{dVol}}_{\delta\overline{U}^*}=\underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\delta\overline{W}^*}$$

8 这个最后的方程式是虚拟力量方法的关键。左手侧是内部虚拟应变能 $\delta\overline{U}^*$[3]. 同样, 右手侧是外部虚功.

9 最后的方程式可以如下描述:

定义 24.2: 原则的 (补充) 虚功

如果在 平衡 中的可扭曲的结构, 并支持一定组载量, 因某种额外行动而遭受虚拟变形, 则该组载量的外部 虚功 , 相当于由该负载组造成的压力内部 虚功。

24.2.2 f_{ij}, f_{ji} Maxwell-Betti 相互理论

有关历史背景，请参见 §??

10 记住这 f_{ij} 是的, 是 位移 在 Dof 上 i 由于 A 单一力量在 DOF j.

$$\text{自由度 } i \text{ 处的集中力在自由度 } i \text{ 产生的位移 } \Delta_i = \int \delta\overline{M}_i\frac{M_i}{EI}\mathrm{d}x$$

$$\text{自由度 } i \text{ 处由 自由度 } j \text{ 处的单位力 产生的位移 } f_{ij} = \int \delta\overline{M}_i\frac{M_j}{EI}\mathrm{d}x$$

$$\text{自由度 } j \text{ 处由 自由度 } i \text{ 处的单位力 产生的位移 } f_{ji} = \int \delta\overline{M}_j\frac{M_i}{EI}\mathrm{d}x$$

因为虚拟负载和真实负载都是统一的 $\delta\overline{M}_i = M_i, \delta\overline{M}_j = M_j$ 然后, $f_{ij} = f_{ji}$.

[3]我们使用 * 来区分它与内部虚拟 应变能 $\delta\overline{U}$ 从虚拟位移中获取 (以后被覆盖) 方法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 24.3: 麦克斯威尔 • 贝蒂的相互理论

挠度的点 A 方向 1 因单位 荷载 在点 B 在方向 2 的尺寸相当于点挠度 B 在方向 2 由一个荷载应用的单位生产 A 方向 1。

$$f_{ij} = f_{ji}$$

或, 延伸: 如果两个 荷载 设置在线性弹性结构上行动, 第一组货物在由第二组货物を产生的转移行动中的工作相当于第二组的货物所产生的工作在由第一组产生的移动行动中进行的工作。

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$$

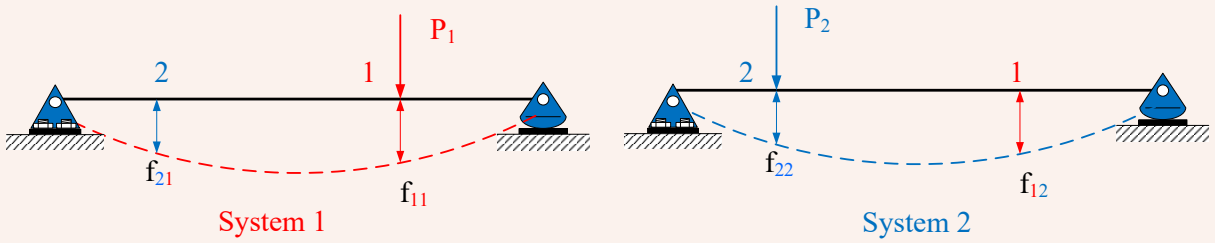


图 24.2: Maxwell-betti 相互理论

24.2.3 外部 虚功 $\delta\overline{W}^*$

有关历史背景，请参见 §??

11 虚功的外部对点负载或时刻的结构是

$$\delta\overline{W}^* = \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i)\delta\overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n}(\theta_i)\delta\overline{M}_i$$

请注意, 没有这样的东西分发的虚拟荷载. 请记住, 所有过度数量都是虚拟的, 其余数量是真实的。

24.2.4 内部 虚功 $\delta\overline{U}^*$

12 来自 EQ。标签:pvwd, 内部 虚功 的通用表达是

$$\delta\overline{U}^* = \int \delta\overline{\sigma}\varepsilon \mathrm{dVol}$$

13 线性弹性系统 ($\sum = E\varepsilon$), 这可以扩展到与力量和时刻有关,

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Axial 成员

14 一个替代的时代会导致

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^{*} &= \int_{\text{dVol}} \varepsilon(x)\delta\overline{\sigma}(x)d\text{Vol} \\ \delta\overline{\sigma}(x) &= \frac{\delta\overline{P}^{(e)}(x)}{A} \\ \varepsilon(x) &= \frac{P^{(e)}(x)}{AE} \\ dV &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^{*} = \int_0^L \delta\overline{P}^{(e)}(x) \underbrace{\frac{P^{(e)}(x)}{AE}}_{\Delta} dx \tag{24.1}$$

15 请注意, 对于一个桁架, 我们有 n 上述表达式, 变成

$$\delta\overline{U}^{*} = \sum_1^n \delta\overline{P}^{(i)} \frac{P^{(i)}L_i}{A_iE_i}$$

我们应该记住, P 是由实际负载造成的轴力, 以及 $\delta\overline{P}$ 是由虚拟 荷载 引起的 轴力。这些力量是由桁架分析确定的。

16 请注意, 这个方程式与 Maxwell 在 §15.5.4.2.

灵活的成员

17 按照类似的方法:

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^{*} &= \int_{\text{Vol}} \varepsilon(x) \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}(x)}_{\delta\overline{\sigma}(x)} \text{dVol} \\ \delta\overline{\sigma}_x(x) &= \frac{\delta\overline{M}_z(x)y}{I_z} \\ \varepsilon(x) &= \frac{M_z(x)y}{EI_z} \\ d\text{Vol} &= dA\,dx \\ I_z &= \int_A y^2 dA \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^{*} = \int_0^L \delta\overline{M}(x) \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{\Phi(x)} dx$$

18 再一次, 请记住 $M(x)$ 是由真实 荷载 引起的瞬间图表和 $\delta\overline{M}(x)$ 是由虚拟一个引起的时刻图表。

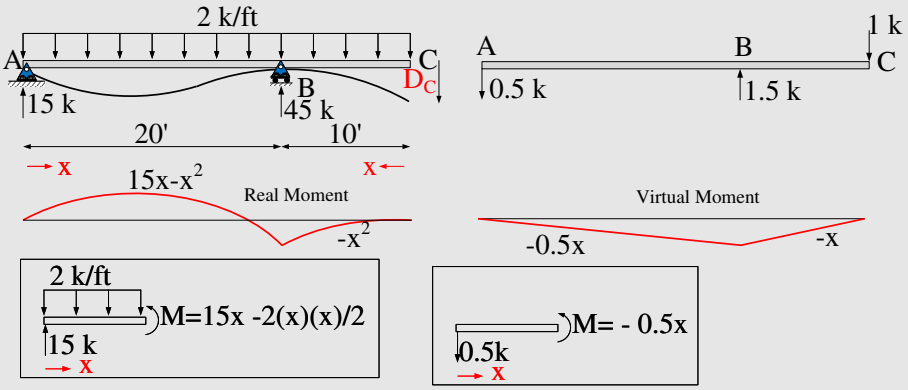
19 显然, 我们将需要 解析 表达时刻.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24.3 例子

24.3.1 例题 24.1: 梁

我们正在寻求在 C 点确定挠度。$E = 29,000$ 李, $I = 100$ in^4.



对于虚拟力量方法, 我们需要有两个表达式现在, 一个是因为真实的荷载, 另一个是为了真正的 XXQ。(单位) 虚拟一 梁的虚拟和真实时刻在下面总结

单元	$x=0$	$M(x)$	$\delta\overline{M}(x)$
AB	A	$15x-x^2$	$-0.5x$
BC	C	$-x^2$	$-x$

使用 虚功原理, 我们获得

$$\underbrace{\Delta_C \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

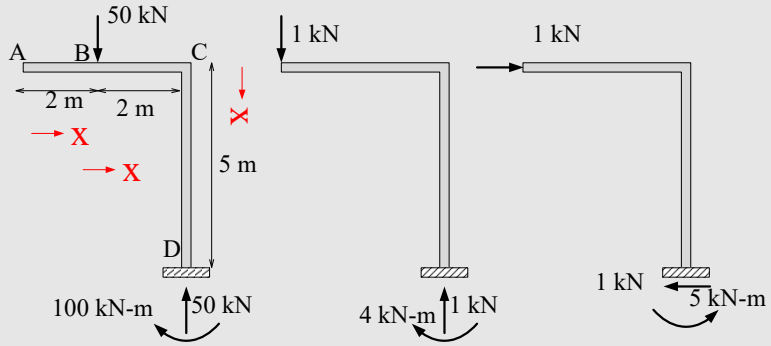
$$(1)k(\Delta_C)ft = \int_0^{20}(-0.5x)\frac{(15x-x^2)}{EI}dx + \int_0^{10}(-x)\frac{-x^2}{EI}dx$$
$$= \frac{2,500}{EI}$$

$$(1)k(\Delta_C)\text{ in} = \frac{(2,500)\text{ k}^2 - \text{ ft}^4(1,728)\text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(29,000)\text{ k/ in}^2(100)\text{ in}^4}$$
$$= 1.49\text{ in}$$

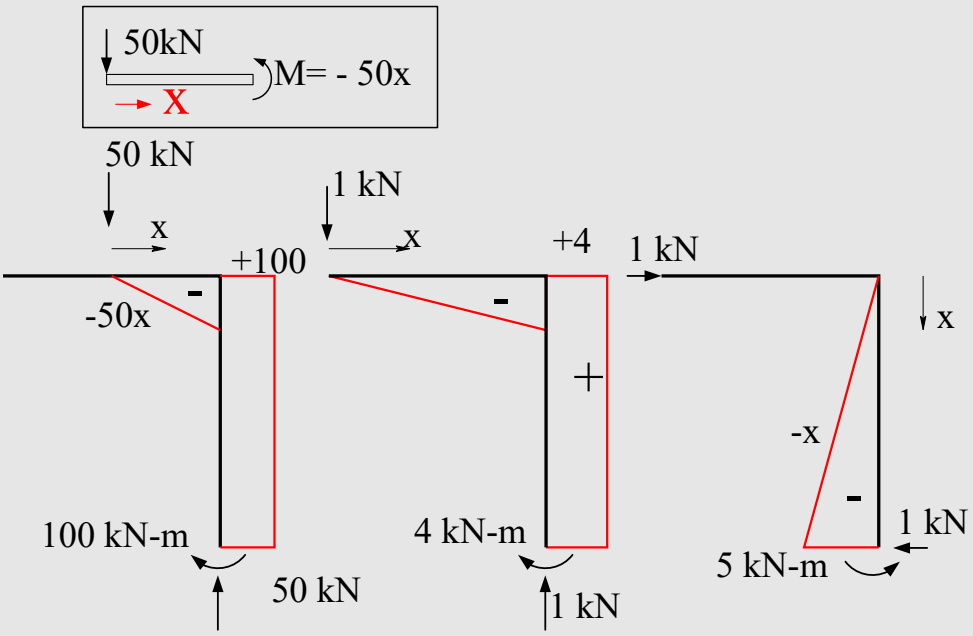
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24.3.2 例题 24.2: 框架; 缺陷

对于下一个框架我们试图确定垂直和水平的挠度在 A。$E = 200 \times 10^6$ kN/ m^2, $I = 200 \times 10^6$ mm^4.



要分析这个 框架 , 我们必须确定 解析 表达式为每个成员的时刻, 对于真实的 荷载 和两个虚拟的。一个虚拟负载是 A 的单元水平负载, 另一个单元垂直负载也是 A。所需的负载集的时刻图, 将分析描述, 显示在下面



单元	$x = 0$	M	$\delta\overline{M}_v$	$\delta\overline{M}_h$
AB	A	0	$-x$	0
BC	B	$-50x$	$-2 - x$	0
CD	C	100	4	$-x$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

单位:KN & m 现在我们替代

$$\underbrace{\Delta_v \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_v)m &= \int_0^2 (-x)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (-2-x)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (4)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{2,333\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(2,333)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= 0.058\ \text{m} = 5.8\ \text{cm}\end{aligned}$$

同樣的水平 位移:

$$\underbrace{\Delta_h \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$\begin{aligned}(1)kN(\Delta_h)m &= \int_0^2 (0)\frac{(0)}{EI}dx + \int_0^2 (0)\frac{-50x}{EI}dx + \int_0^5 (-x)\frac{100}{EI}dx \\ &= \frac{-1,250\ \text{kN}^2\ \text{m}^4}{EI} \\ &= \frac{(-1,250)\ \text{kN}^2\ \text{m}^4(10^3)^4\ \text{mm}^4/\ \text{m}^4}{(200\times10^6)\ \text{kN}/\ \text{m}^2(200\times10^6)\ \text{mm}^4} \\ &= -0.031\ \text{m} = -3.1\ \text{cm}\end{aligned}$$

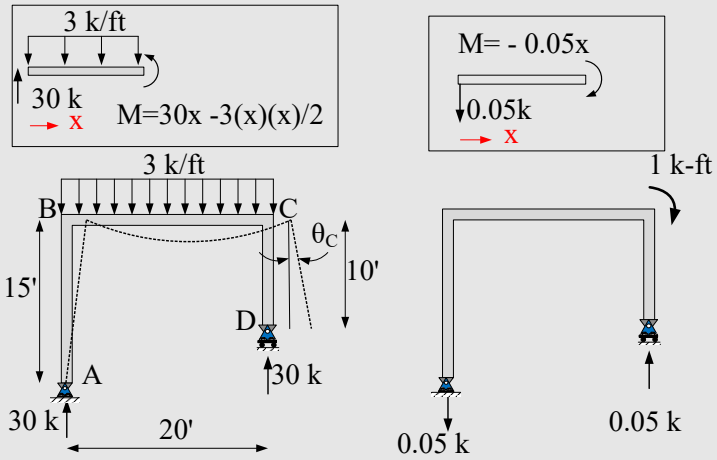
请注意, 水平 挠度 位于左侧。(反对虚拟力量的方向).

24.3.3 例题 24.3: 框架, 转角

我们要确定合体 C 的转角。$E = 29,000$ ksi, $I = 240$ in^4.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



在这个问题上, 虚拟力量是应用于合体 C 的单一时刻。$\delta\overline{M}_e$. 它会产生内在的时刻。$\delta\overline{M}_i$ 被表达为

单元	$x=0$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	0	0
BC	B	$30x-1.5x^2$	$-0.05x$
CD	D	0	0

替代的收益:

$$\underbrace{\theta_C \delta\overline{M}_e}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$(1)k - ft(\theta_C)\text{rad} = \int_0^{20}(-0.05x)\frac{(30x-1.5x^2)}{EI}dx \quad \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

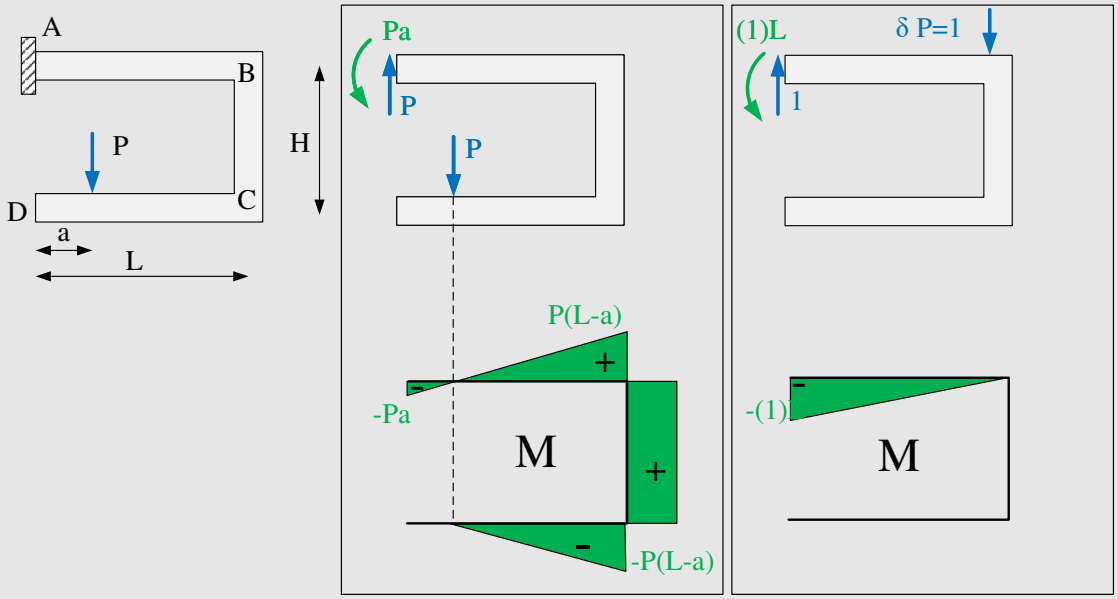
$$= -\frac{(1,000)k^2\ \text{ft}^2(144)\ \text{in}^2/\ \text{ft}^2}{(29,000)\ \text{k/ in}^2(240)\ \text{in}^4}$$

$$= -0.021 \text{ radians}$$

24.3.4 例题 24.4: 灵活的手套

我们要确定 a 如垂直 挠度 在 B 是零。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



对现实和虚拟力量的相应反应和时刻图很容易确定, 并在上面的相应图表中显示, 并且在他们的解析形式下总结。

单元	$x=0$ @	M	$\delta\overline{M}$
DE	D	0	0
EC	E	$-Px$ 0	
CB	C	$-P(L-a)$	0
BF	B	$P(L-a-x)$	x
FA	F	Px	$L-a+x$

$$\underbrace{\Delta_B \delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}_*} == \int_L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx$$

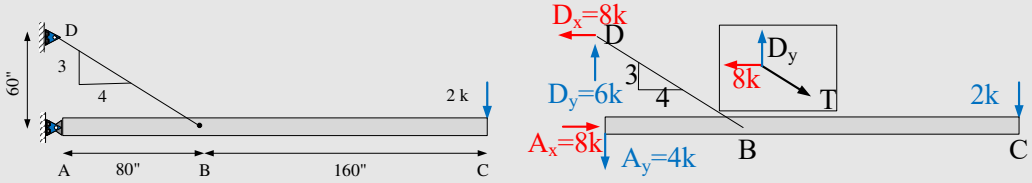
$$\Delta_B(1) = \int_0^{L-a} \frac{P(L-a-x)x}{EI}dx + \int_0^{a} \frac{-Px(L-a+x)}{EI}dx$$

$$\Delta_B = \frac{PL^2}{6EI}(L-3a) \Rightarrow a = \frac{L}{3}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24.3.5 例题 24.5: 索 支持的 cantilever 梁

输入管道由铝制成的索支持 ($A = 1$ 在 ^{2}; E=10^7 狗狗), 以及铝合金的梁也 ($A = 10$ 在 ^{2}; $I = 171$ 在 ^{4}, $E = 10^7$ 狗狗). 我們試圖在 C 中確定 位移。



我们首先计算与真实的荷载相关的力量。

$$
\begin{aligned}
(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^A = 0; &\Rightarrow D_x(60) - 2(240) = 0 \Rightarrow D_x = 8k \\
(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; &\Rightarrow -D_x + A_x = 0 \Rightarrow A_x = 8k \\
(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; &\Rightarrow -A_y + D_y - 2 = 0
\end{aligned}
$$

然而, 倾斜的索只能携带轴力, 因此

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{3}{5}T - D_y &= 0 \\
\frac{4}{5}T - D_x &= 8k
\end{aligned}
\right\} T = 10k
$$

因此 $D_y = 6k$ 和 $A_y = 4k$. 然后我们将结果与相应的解析表达式一起表格为内部力量。

单元	$x = 0$ 在	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	-8	-4	$-4x$	$-2x$
BC	B	0	0	$2x - 320$	$x - 160$
DB	D	10	5		

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

从这两张桌子

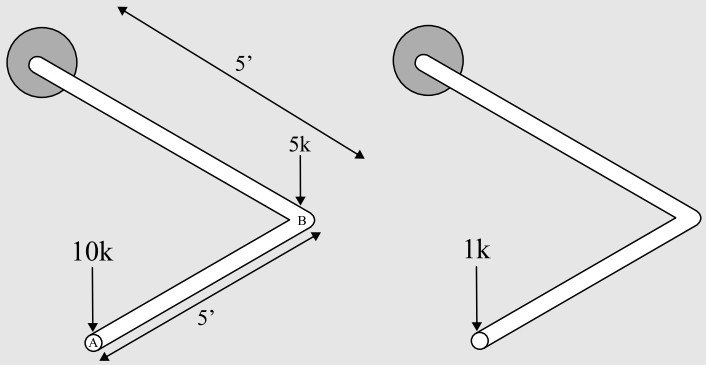
$$\underbrace{\delta\overline{P}\Delta_c}_{\delta W*} = \underbrace{\int_L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx + \int \delta\overline{M}\frac{M}{Ei}dx}_{\delta\overline{U}*}$$

$$\begin{aligned}
(1)\Delta_C &= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{A_cE}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{A_bE}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{EI_b} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{EI_b}dx \\
&= \int_0^{100}\frac{(5)(10)}{(1\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx + \int_0^{80}\frac{(-4)(-8)}{(10\text{in}^2)(10^7\text{psi})}dx \\
&\quad + \int_0^{80}\frac{(-2x)(-4x)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)} + \int_0^{160}\frac{(x-160)(2x-320)}{(10^7\text{psi})(171\text{in}^4)}dx \\
\Delta_C &= 0.0005 + 0.0000256 + 0.0007984 + 0.001597 \\
&= \underbrace{0.000526}_{\text{Axial}} + \underbrace{0.00239}_{\text{flexural}} \\
&= 0.0029\text{in}(\downarrow)
\end{aligned}$$

24.3.6 例题 24.6: Torsional 和 Flexural Deformation

我们现在正在寻求在下面的结构中确定垂直挠度到 A ($E = 30,000$ ksi, $I = 144$ in^4, $G = 12,000$ ksi, $J = 288$ in^4)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



1. 在这个问题上, 我们有灵活和旋转变形。因此, 我们必须确定内在的时刻和 torsion 分布为实体和单位的虚拟负载。
2. 然后我们将使用下列关系。

$$\overbrace{\delta\overline{P}\Delta_A}^{\delta\overline{W}^*} = \overbrace{\underbrace{\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x}_{\text{flexure}} + \underbrace{\int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x}_{\text{Torsion}}}^{\delta\overline{U}^*}$$

3. 时刻和扭转的表达是给予的

单元	$x=0$	M	$\delta\overline{M}$	T	$\delta\overline{T}$
AB	A	$10x$	x	0	0
BC	B	$15x$	x	50	5

4. 取代,

$$\begin{aligned}
\delta\overline{P}\Delta_A &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x + \int \delta\overline{T}\frac{T}{GJ}\mathrm{d}x \\
1\Delta_A &= \int_0^5 x\frac{10x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 x\frac{15x}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^5 (5)\frac{50}{GJ}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(1,042)(1,728)}{(30,000)(144)} + \frac{(1,250)(1,728)}{(12,000)(288)} \\
&= \underbrace{0.417}_{\text{Flexure}} + \underbrace{0.625}_{\text{Torsion}} \\
&= 1.04 \text{ in}
\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24.3.7 例题 24.7: 梁中的灵活和叶形变异

确定一个分数化的 梁 的 挠度 长度 L 被终极力量所施加 P 由于灵活性和的歪曲。假设 $G = 0.4E$, 和一个平方坚固的泡沫交叉部分。

1. 虚功 方程式是

$$\underbrace{\delta\overline{P}}_{1} \cdot \Delta = \int_0^L \delta\overline{M} d\phi + \int_0^L \delta\overline{V}\gamma_{xy}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx + \int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x$$

2. 第一個完整的收益 $M = Px$, 和 $\delta\overline{M} = (1)(x)$

$$\int_0^L \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{P}{EI}\int_0^L x^2 dx$$
$$= PL^3/3EI$$

3. 第二个积分表示分享活动对整体内部虚拟的贡献工作, 因此到整体 位移.
4. 兩個真正的相关术语 V 与虚拟剪力 $\delta\overline{V}$ 沿构件长度保持不变，因此, 会员

$$\int_0^L \delta\overline{V}\lambda\frac{V}{GA}\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{GA}\int_0^L 1(P)\mathrm{d}x = \frac{\lambda PL}{GA}$$

5. 因为 λ= 1.2 为一个平方 梁; 因此

$$1 \cdot \Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{1.2PL}{GA}$$
$$= \frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{3.6}{0.4A}\right] = red\frac{PL}{3E}\left[\frac{L^2}{I} + \frac{9}{A}\right]$$

6. 四分之一 梁 的尺寸 h

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

然后

$$\Delta = \frac{PL}{3E}\left[\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right] = \frac{3PL}{Eh^2}\left[\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right]$$

7. 选择 $L = 20$ ft 和 $h = 1.5$ ft $(L/h = 13.3)$

$$\Delta = \frac{3PL}{Eh^2}[1.33\left(\frac{20}{1.5}\right)^2 + 1] = \frac{3PL}{Eh^2}(237 + 1)$$

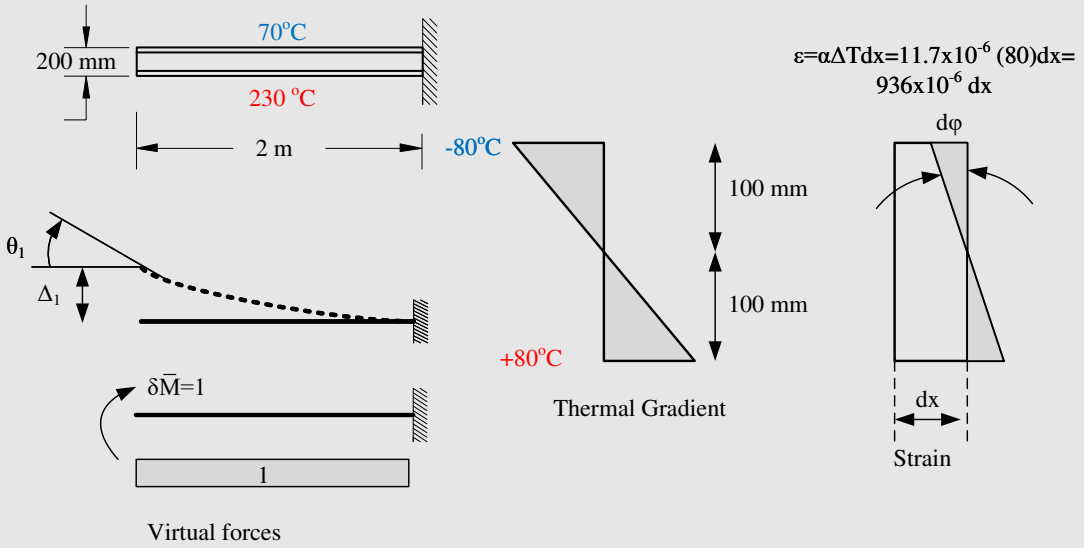
因此, 灵活的变形是位移的 237 倍。这种比较揭示了为什么我们通常会忽略相关术语虫的变形。梁 变得更短或更深, 或者 L/h 减少, 灵活性变形与表 位移 相比下降。在 $L/h = 5$ 灵活性变形减少了 $1.33(5)^2 = 33$ 时间表 位移。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24.3.8 例题 24.8: 热效应在梁

下一篇: 重复 White, Gergely, and Sexmith, 1976 Structural Engineering.

我们试图确定转角的角度, θ_1, 在梁的结束时, 由于下一个梁.



梁 是一个 钢材, 宽的旗舰部分, 长 2 米和深 200 毫米, 原始均匀温度的射线是 40°C.

1. 外部虚拟力量符合所需的真实 位移 θ_1 是瞬间 $\delta\overline{M} = 1$ 在顶部的 cantilever, 产生一个外部工作时间的时刻转角. 此 cantilever 梁 的内部虚拟力量系统是单一的瞬间 $\delta\overline{M}_{int} = 1$.
2. 真正的内部变形是由: (a) 平均 梁 温度 of 150°C 是 110°C 超過原始的温度和 (b) 温度格拉迪因 160°C 跨越梁的深度。
3. 第一部分的热效应只产生一个梁的延伸, 并且不进入工作方程式虚拟加载不会产生轴力相应的轴变更梁的长度。
4. 第二个效果 (热格拉迪特) 生产转角 $d\phi$, 和一个内部虚功术语由 $\int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x$.
5. 我们决定了价值的 $d\phi$ 考虑到极端纤维热 应变 如上所示。角 转角 在长度 $\mathrm{d}x$ 是极端的纤维热线, 分为泡沫深度的一半; 或

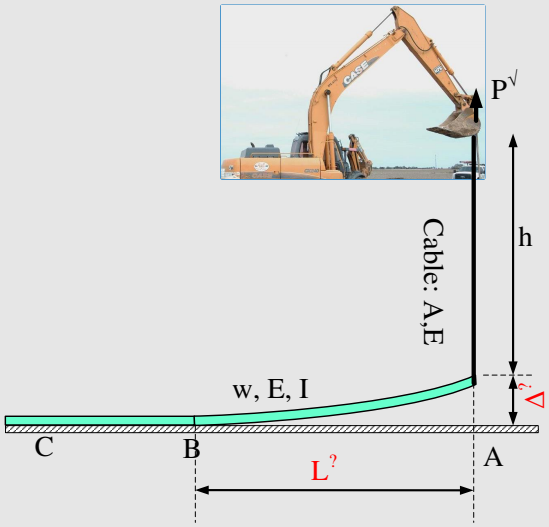
$$
\begin{aligned}
1 \cdot \theta_1 &= \int_0^L \delta\overline{M}\phi \mathrm{d}x \\
&= \int_0^L (1)\frac{\alpha(T_b - T_t)}{h}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(11.7\times 10^{-6})m/m(230-70)^o\mathrm{C}(2)\ \mathrm{m}}{(0.2)\ \mathrm{m}} \\
&= 0.01872 \text{ radians}
\end{aligned}
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

6. 这个例子引发了以下几点:
   (a) 价值的 θ_1 对于任何形状的 200 毫米深度都相同。钢材 梁 它有它的 中性轴 旋转在中间。
   (b) 曲率 仅由热格拉迪因制成, 并且独立于绝对温度值。
   (c) 通过虚拟力量方法计算旋转是简单的。简单; 应用的虚拟力量是瞬间在这一点上发挥作用。转角 要计算的地方。
   (d) 内部角形变形 $d\phi$ 已计算为一与荷载引发的压力不同。延伸方法的虚拟的力量来处理无线移动是显而易见的 - 我们需要的一切知识是确定无线性内部变形的方法。

24.3.9 例题 24.9: 管道

假设我们是一名领域工程师, 将自己重量的管道放下。w (单位长度), 惯性矩 I, 弹性模量 E_p, 和 Poisson 理性 ν. 管道的一端 BC 躺在地板上, 另一条腿 AB 要举起高度 Δ 由一支力量 $P^{\checkmark}$ 通过一个 索 的长度 应用 h 区域 A 和 弹性模量 E_c



克里恩运营商要求我们

1. 定义 (关于已知的力量 $P^{\checkmark}$) 长度 $L^{?}$ 从地板上分离的管道 (AB).
2. 绘制管道上升部分的表和时刻图。
3. 计算 位移 $\Delta^{?}$ 点的 A 至于: P, w, L, h, E, A, 和 I.

解决方案如下:

1. 在 B 曲率 是零 ($d\theta/dx = 0$) 因此, 零时刻。

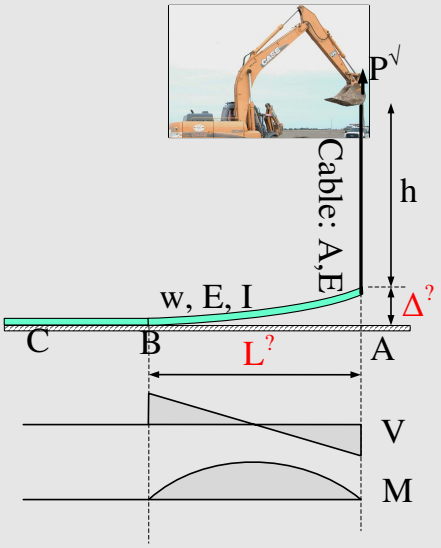
$$PL = wL^2/2 \Rightarrow L = 2P/w$$

   右 支座 在 B 是指甲。注意分离点:

$$+ve \uparrow \sum F_Y = 0; P - wL + R_B = 0; \Rightarrow R_B = w\left(\frac{2P}{w}\right) - P = P \uparrow$$

   我们有一个独特的力量。P

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



2. 挠度 接收 $x=0$ 在 A:

$$\delta\overline{P}\Delta_C = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\frac{M(x)}{EI_z}\mathrm{d}x + \delta\overline{P}^{(e)}\frac{Ph}{AE}$$

$$M(x) = Px - w\frac{x^2}{2}$$

$$\delta\overline{M}(x) = (1)x$$

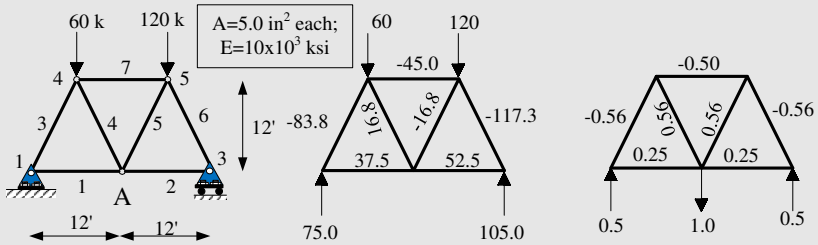
$$\delta\overline{P} = 1$$

$$(1)\Delta_C = \int_0^L x\frac{Px - w\frac{x^2}{2}}{EI}\mathrm{d}x + (1)\frac{Ph}{AE}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{Ph}{AE}$$

24.3.10 例题 24.10: 桁架; 简单

我们试图在下列 桁架 的 A 节点中确定 挠度



计算的概述在下表中表达

会员	$\delta\overline{P}^{(e)}$ 吉普赛	$P^{(e)}$, 吉普赛	L, ft	A, in^2	E, 基	$\delta\overline{P}^{(e)}\frac{P^{(e)}L}{AE}$
1	+0.25	+37.5	12	5.0	10×10^3	$+22.5\times10^{-4}$
2	+0.25	+52.5	12	5.0	10×10^3	$+31.5\times10^{-4}$
3	-0.56	-83.8	13.42	5.0	10×10^3	$+125.9\times10^{-4}$
4	+0.56	+16.8	13.42	5.0	10×10^3	$+25.3\times10^{-4}$
5	+0.56	-16.8	13.42	5.0	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5.0	10×10^3	$+176.6\times10^{-4}$
7	-0.50	-45.0	12	5.0	10×10^3	$+54.0\times10^{-4}$
						$+410.5\times10^{-4}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

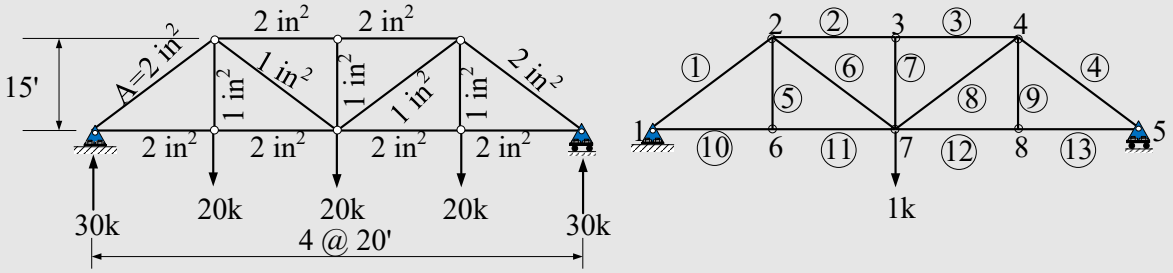
这样

$$(\delta\overline{P})\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \sum_{1}^{7} \delta\overline{P}^{(e)} \frac{PL}{AE}$$

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = (410.5\times 10^{-4}) \frac{\text{k}^2\ \text{ft}}{\text{in}^2\ \text{k/ in}^2} (12\ \text{in/ ft}) = 0.493\ \text{in}$$

24.3.11 例题 24.11: 桁架; 复杂

我们试图确定合金 7 的垂直挠度。$E = 30,000$ ksi.



需要两次分析。其中一个与真实的荷载, 另一个使用单元垂直荷载在合并 7。这些分析的结果在下面总结。请注意, 优点是从相同的荷载和结构中获取。

会员	A in^2	L ft	$P^{(e)}$ k	$\delta\overline{P}^{(e)}$ k	$\frac{\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2	n	$\frac{n\delta\overline{P}^{(e)}P^{(e)}L}{A}$ k.ft/ in^2
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1,037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
11 & 12	2	20	40	0.67	268.0	2	536.0
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693.0
2& 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1,417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
全集							4,220.3

$$\underbrace{\Delta\delta\overline{P}}_{\delta\overline{W}^*} = \underbrace{\int_0^L \delta\overline{P}\frac{P}{AE}dx}_{\delta\overline{U}^*}$$

$$= \sum \delta\overline{P}^{(e)} \frac{P^{(e)}L}{AE}$$

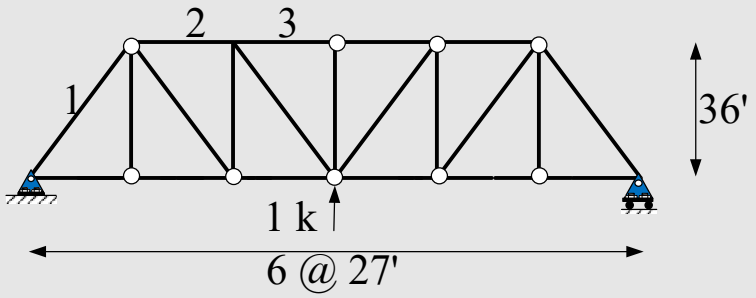
$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = \frac{(4,220.3)\ \text{k}^2\ \text{ft/ in}^2 (12)\ \text{in/ft}}{30,000\ \text{ksi}}$$

$$= 1.69\ \text{in}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24.3.12 例题 24.12: 桁架 与初始交换器

希望提供 3 英寸的相关术语子, 在底部显示的 tr 子的中心, 通过制造终点和顶层成员额外长。每个端点和顶层板的长度应该增加多少?



首先, 我们假设每个终点和顶端的每个部分增加了 0.1。

会员	$\delta\overline{P}_{int}^{(e)}$	ΔL	$\delta\overline{P}_{int}^{(e)}\Delta L$
1	+0.625	+0.1	+0.0625
2	+0.750	+0.1	+0.0750
3	+1.125	+0.1	+0.1125
			+0.2500

给予的

$$(1)\ \text{k}(\Delta)\ \text{in} = (2)(0.250)\ \text{k in} \Rightarrow \Delta = 0.50\ \text{in}$$

由于结构是线性和弹性, 每个部分所需的长度增加将为

$$\left(\frac{3.0}{0.50}\right)(0.1) = 0.60\ \text{in}$$

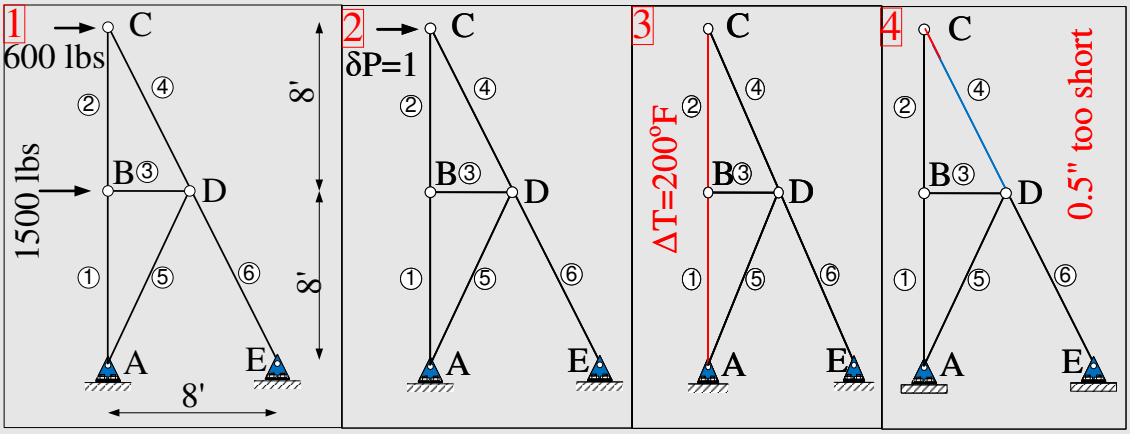
如果我们使用 0.625 英寸的实用值, 那么理论计算器将是

$$\frac{(6.25)(0.50)}{0.1} = 3.125\ \text{in}$$

24.3.13 例题 24.13: 桁架 二次压力

我们试图在各种负载条件下确定 C 节点的水平转移:) 力量 (1); 2) 温度上涨 2 台 (3) 和制造错误 (4). 单独计算的会员力量将适当表格。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



侧面力量

会员	$\delta\overline{P}$ (LBF)	P (LBF)	L (在)	AE	$\delta\overline{p}\frac{PL}{AE}$
1	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
2	2	1,200.0	96.00	AE	230,400/AE
3	0	-1,500.0	48.00	AE	0
4	-2.24	-1,341.6	107.33	AE	322,560/AE
5	0	1,677.0	107.33	AE	0
6	-2.24	-3,018.7	107.33	AE	725,760.0/AE
					1,509,120/AE

因此 $\Delta_C = \frac{1,509,120}{AE}$ lb-in $\rightarrow$

温度 荷载

会员	L (在)	α (1/°F)	ΔT (在)	$\Delta L = \alpha \Delta T L$ (在)	$\delta\overline{P}$ (LBF)	$\delta\overline{P}\Delta L$ (lbf 中的)
1	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
2	96	10^{-6}	200	0.0192	2	0.0384
3	48	10^{-6}	0	0	0	0
4	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
5	107.33	10^{-6}	0	0	0	0
6	107.33	10^{-6}	0	0	-2.24	0
						0.0768

因为 $\delta\overline{P} = 1$, $\Delta_C = 0.0768$ in $\rightarrow$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

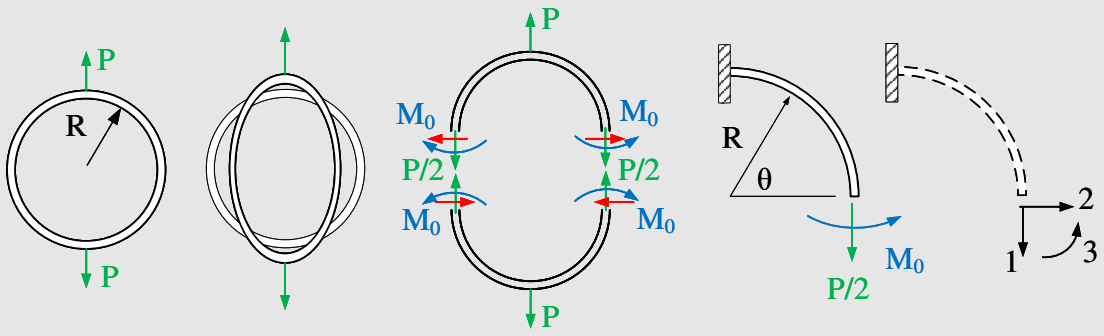
制造错误

会员	L (在)	ΔL (在)	$\Delta\overline{P}$ (LBF)	$\Delta\overline{P}\delta L$ (lbf 中的)
1	96	0	2	0
2	96	0	2	0
3	48	0	0	0
4	107.33	-0.5	-2.24	1.12
5	107.33	0	0	0
6	107.33	0	0	0
				0.0768

因为 $\delta\overline{P}=1$, $\Delta_C = 1.12$ in $\rightarrow$

24.3.14 例题 24.14: 圆环

一个戒指被两个相反的集中力量所施加。P 我们要确定垂直延伸。Δ_y 和垂直缩小 Δ_x.



Strength of materials
Den Hartog, 1961 引发同义, 我们将戒指切成两部分, 并绘制自由体图表。

1. 如果我们假设剪力在四个端之一的方向, 并按其它力量进行引导。通过检查, 我们注意到上半将向侧扩展, 而在同一位置, 它将在底环中交换。因此, she 的力量相当于零。
2. 轴力等同于 $P/2$ 因此, 我们留下了要决定的时刻。
3. 然后我们将分析只有一个四角形, 受垂直力量的约束。$P/2$ 一瞬间 M_0 但是, 要在某种程度上确定 R 和 P.

解决方案如下:

1. 时刻 (积极的, 如果引起内部紧张):

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

垂直 荷载 $P/2$	$M_{P/2}$	$-\frac{PR}{2}(1-\cos\theta)$
最后一刻 (时钟)	M_0	M_0
虚拟单位垂直 (下向下) 力量	$\delta\overline{M}_V$	$-R(1-\cos\theta)$
虚拟单位垂直 (外面) 力量	$\delta\overline{M}_H$	$R\sin\theta$
虚拟单位 转角	$\delta\overline{M}_M$	1

2. 转角 由于垂直的 荷载:

$$f_{32}=\theta_{P/2}=\int\delta M_M\frac{M_{P/2}}{EI}Rd\theta=-\int_0^{\pi/2}(1)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta=-\frac{PR^2}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)d\theta$$
$$=-\frac{PR^2}{2EI}\left[\theta+\sin\theta\right]_0^{\pi/2}=-\frac{PR^2}{2EI}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

3. 转角 因瞬间 M_0

$$f_{33}=\theta_{M_0}=\int M_M\frac{M_0}{EI}Rd\theta=\int_0^{\pi/2}(1)\frac{M_0}{EI}Rd\theta=\frac{\pi}{2}\frac{M_0R}{EI}$$

4. 从对称总的旋转必须平等。

$$\theta_{P/2}+\theta_{M_0}=0$$
$$-\frac{PR^2}{2EI}(\frac{\pi}{2}-1)+\frac{\pi}{2}\frac{M_0R}{EI}=0$$
$$M_0=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)PR=0.182PR \tag{24.2}$$

5. 因垂直负载而垂直脱落:

$$f_{22}=\Delta^V_{P/2}=\int\delta M_V\frac{M_{P/2}}{EI}=\int_0^{\pi/2}R(1-\cos\theta)\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta$$
$$=\frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$
$$=\frac{PR^3}{2EI}\left[\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{PR^3}{8EI}(3\pi-8)$$

6. 由于垂直负载而导致的水平偏差

$$f_{12}=\Delta^H_{P/2}=\int\delta M_H\frac{M_{P/2}}{EI}=-\int_0^{\pi/2}R\sin\theta\frac{PR}{2EI}(1-\cos\theta)Rd\theta$$
$$=-\frac{PR^3}{2EI}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\sin\theta d\theta$$
$$=-\frac{PR^3}{2EI}\left[-\cos\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}=-\frac{PR^3}{4EI}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

7. 垂直 挠度 由于时刻

$$\begin{aligned} f_{23} = \Delta^V_{M_0} &= \int \delta M_V \frac{M_0}{EI} = -\int_0^{\pi/2} R(1-\cos\theta) M_0 R d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI} \int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI}\left(1-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

8. 水平 挠度 由于时刻

$$\begin{aligned} f_{13} = \Delta^H_{M_0} \int \delta M_H \frac{M_0}{EI} &= \int_0^{\pi/2} R\sin\theta M_0 R d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{M_0 R^2}{EI} \end{aligned}$$

9. 全水平 挠度

$$\Delta^H = 2(\Delta^H_{P/2} + \Delta^H_{M_0}) = 2\left[-\frac{PR^3}{4EI} + \frac{M_0 R^2}{EI}\right]$$

取代解决方案 M_0 来自 EQ。24.2

$$\Delta^H = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right) = -0.135\frac{PR^3}{EI} \text{ Contraction}$$

10. 全垂直 挠度

$$\Delta^V = 2(\Delta^V_{P/2} + \Delta^V_{M_0} = 2\left[\frac{PR^3}{8EI}(3\pi - 8) + \frac{M_0 R^2}{EI}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

取代解决方案 M_0 来自 EQ。24.2

$$\Delta^V = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) = 0.150\frac{PR^3}{EI} \text{ Elongation}$$

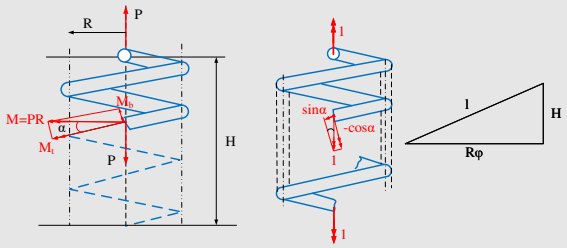
11. 请注意, 我们已经引入了一份将随后使用的笔记。f_{ij} 以 位移 在方向 i 因方向上的力量 j 结果是

$$\begin{bmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} & f_{23} \\ f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

这不是一个柔度矩阵但由于应用的力量不统一, 而第一个柱是缺失的。(没有应用的水平力量).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24.3.15 例题 24.15: 春天



以希利克角度的春天 α 和火箭的射线 R 被武力伸展 P. 我们试图确定春天的高度和直径的变化, 以及曲线数量的变化。

我们将春天视为三维线。春天延伸的角落的每个部分都有一个扭转 $M_t = PR\cos\alpha$ 一瞬间 $M_b = PR\sin\alpha$.

1. 首先, 我们要确定春天的高度上升。

$$\Delta H = \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI} ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{EI} ds$$

哪里 $\delta\overline{M}_b$ 和 $\delta\overline{M}_t$ 是由于统一的虚拟力量应用于部队的位置而旋转和旋转的时刻。P 等同于

$$\delta\overline{M}_b = R\sin\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = R\cos\alpha$$

因此, 在替代和整合后

$$\Delta H = \frac{PR^2 l}{EI}\sin^2\alpha + \frac{PR^2 l}{GJ}\cos^2\alpha \tag{24.3}$$

哪里 l 是春季的尾巴的总长度。

2. 接下来, 让我们来找出春天的顶端与水平层的下端相反的角度。因此, 我们将统一时刻应用到春天结束:

$$\delta\overline{M}_b = -\cos\alpha, \qquad \delta\overline{M}_t = \sin\alpha$$

和

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_l \frac{\delta\overline{M}_b M_b}{EI} ds + \int_l \frac{\delta\overline{M}_t M_t}{GJ} ds \\ &= PRl\left(\frac{1}{GJ} - \frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned} \tag{24.4}$$

3. 看不见春天, 我们

$$R^2\phi^2 + H^2 = l^2$$

我们采取了差异性, 并且从 l 保持稳定

$$2R\phi^2\Delta R + R^2 2\phi\Delta\phi + 2H\Delta H = 0$$

在此情况下, 在哪里 Δ 这是增加的 (终结) 相应的参数。从这个表达, 我们得到了

$$\Delta R = -\frac{R}{\phi}\Delta\phi - \frac{H}{R\phi^2}\Delta H$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

4. 替代为 $\Delta\phi$ 和 ΔH 给予

$$\Delta R = -\frac{PR^2 l}{\phi}\left(\frac{1}{GJ}-\frac{1}{EI}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{PHRl}{\phi^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI}+\frac{\cos^2\alpha}{GJ}\right) \tag{24.5}$$

5. 从三角形中, 它表明

$$l=\frac{\phi R}{\cos\alpha},\qquad H=\phi R\tan\alpha$$

我们也有

$$\phi = 2\pi n,\qquad \Delta\phi = 2\pi\Delta n$$

哪里 n 是 co 的数量。

6. 消除 $l, H,$ 和 ϕ 来自 EQ。24.3, 24.4 和 24.5 给予

$$\Delta H = \frac{PR^3 n 2\pi}{\cos\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha}{EI}+\frac{\cos^2}{GJ}\right)$$

$$\Delta n = PR^2 n\left(\frac{1}{GJ}-\frac{1}{EI}\right)\sin\alpha$$

$$\Delta R = -\frac{2PR^3\sin\alpha}{GJ}+\frac{PR^3}{EI}\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)$$

7. 春天由圆线制成的直径 d 然后,

$$GJ = G\frac{\pi d^4}{32}$$

$$EI = 2G(1+\nu)\pi\frac{d^4}{64} = G(1+\nu)\frac{\pi d^4}{32}$$

我们得到了

$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}\frac{1+\nu\cos^2\alpha}{(1+\nu)\cos\alpha}$$

$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\sin\alpha}{1+\nu}$$

$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{\sin\alpha}{1+\nu}\frac{1+2\nu\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

上述表达的右侧前面的迹象表明, 在春天的延长期间, 它的长度会增加。($\Delta H > 0$)co co 的数量越来越多 ($\Delta n > 0$) 放射率下降 ($\Delta R < 0$).

8. 如果你的角度 α 是小, 然后

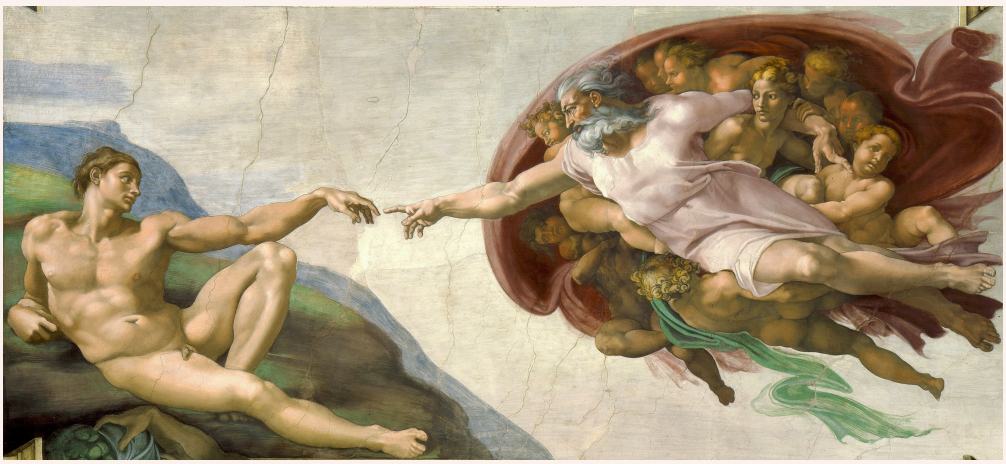
$$\Delta H = +\frac{64PR^3 n}{Gd^4}$$

$$\Delta n = +\frac{32PR^2 n}{G\pi d^4}\frac{\nu\alpha}{1+\nu}$$

$$\Delta R = -\frac{32PR^3}{G\pi d^4}\frac{1+2\nu}{1+\nu}\alpha$$

请参见例子 22.3.2 也是。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



亚当、米歇尔天使、弗雷斯科、西斯蒂娜教堂、梵蒂冈城的创作。

虚拟工作具有强大的形象, 因为几乎触摸的手象征着无限的移动 - 在虚拟工作的核心概念中, 想象的小干扰有助于分析平衡。

审阅稿

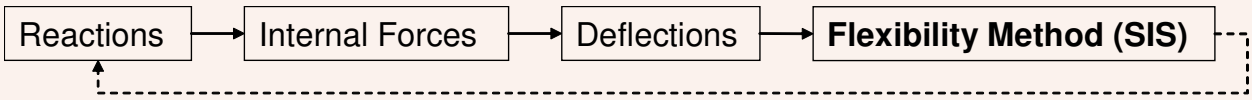
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

25 柔度法

摘要

此章题为使用灵活性方法解决静态不确定结构的解决方案 (阿卡 (基于力量的方法) 它不依靠计算机的应用。该方法包括将静态不确定结构转化为静态定义的初始结构, 通过消除足够的支持或内部力量。此初级结构的转移, 然后在外部负载下计算。接下来, 单位部队一次性应用到支持或内部部队被移除的地方, 并计算这些单位部隊所造成的结果转移。变形协调 方程式是用实际负载和单位力量的转移来制定和解决, 以确保整体结构保持兼容性, 并在 平衡 中。通过解决这些 变形协调 方程式, 确定了未知的旋转力量, 并使用这些力量计算了原始静态不确定的结构的最终内部力量和移动。章节开始了对静态不确定结构的好处的讨论。然后, 跟随一些简单的示例介绍了最终正式化的方法。此外, 还包含了《三时方程》的简短覆盖。章节结束了许多增加复杂性的例子。

25.1 引入 848
25.2 力量 / 柔度法 853
25.2.1 例子 854
25.3 三瞬间方程式 872
25.3.1 例题 25.9: 连续 梁 875
25.3.2 例题 25.10: 连续 梁 875



有关历史背景，请参见 §??

25.1 引入

1 一个静态不确定的结构比平衡的方程式多于未知。(和条件方程式, 如果适用).

2 静态不确定结构的优点是:

增加的折扣: 静态不定义的结构有更多的支持和连接, 而需要保持平衡。这种回收意味着如果一个 支座 或会员失败, 则可以将 荷载 重新分配给其他支持者或会成员, 从而提高结构的整体安全性和可靠性。

改进荷载分布: 这些结构在整个结构中更平等地分布负载, 从而减少局部失败的可能性。即使这种压力和压力分布也会导致材料的更高效、更经济使用。

更严格的: 静态不定义的结构往往更硬, 因为它们在荷载下更好地抵抗变形。这种增强的硬度可能有利于应用程序, 其中 挠度 必须尽量减少, 例如桥梁或高楼建筑。

增强结构性能: 通过拥有多个荷载路径, 这些结构可以更好地处理动态负载、振动和影响。这种特征特别重要, 在随着时间的推移, 如由于风、交通或地震活动而造成的结构。

美学与设计灵活性: 额外的支持和会员可以让更复杂和美学上令人愉快的设计。建筑师和工程师可以创建具有独特的形状和形状的创新结构, 这些设计可能无法在静态上确定。

材料优化: 随着荷载的分布和硬度提高, 材料往往可以更有效地使用。这种优化可能导致更轻的结构使用较少的材料, 而不会损害强度和安全性。

对定居点和温度变化更好的反应: 静态不定义的结构可以更好地适应支持和热扩展或缩小的差异性安排。这种适应性可以防止裂缝和其他可能发生在静态定义结构的损害。

提高安全性: 回收力和重分负载的能力提高了结构的整体安全性。这在关键基础设施, 如桥梁、建筑物和其他必需结构中特别重要, 失败可能造成严重后果。

3 唯一的缺点是, 分析更为复杂。

4 静态不确定结构的分析方法 **必须满足** 3 要求

1. 平衡的力量
2. 强度位移 (或压力) 关系 (线性弹性在此过程中).
3. 变形协调 移行 (二、没有不停性)

5 可以通过两类解决方案实现。

力量或灵活性 方法, 这个章节

位移 或 Stiffness 将被覆盖在章节中的方法 44 和 27. 第一個將覆蓋 “基于手” 方法 (瞬间分配和折叠 挠度) 其次是基于计算机的一个。

模拟例子 1

6 柔度法 首先由以下描述: 一个静态不定义的索结构的问题, 其中硬 板 由两个铝电缆和一个 钢材 一支支持。我们试图确定每个 索, 图 的强度。25.1

1. 我們有三個未知和只有兩個獨立方程式。以 平衡。因此, 问题是静态不确定的。第一等级。
2. 使用 平衡 的方程式

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = 0; &\Rightarrow P_{Al}^{\text{left}} = P_{Al}^{\text{right}} \\ \Sigma F_y = 0; &\Rightarrow 2P_{Al} + P_{St} = P \end{aligned} \tag{25.1}$$

   因此, 我们实际上有两个未知和一个方程式。
3. 我们需要一个第三方程来解决这三个陌生人。这将是由 **变形协调 的移行**在所有三个电缆中, 即所有三个转移都必须是相同的:

$$\Delta_{Al} = \Delta_{St}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

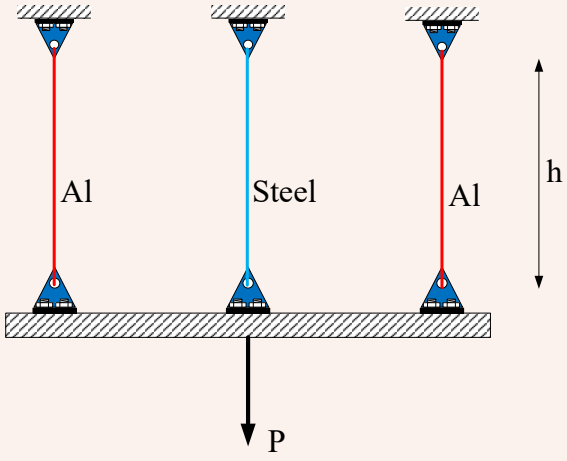


图 25.1: 静态不确定 3 索 结构

4. 最后, 这些转移是从**强度位移** 关系:

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A}\\ \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L}\\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\underbrace{\frac{P_{Al}L}{E_{Al}A_{Al}}}_{\Delta_{Al}} = \underbrace{\frac{P_{St}L}{E_{St}A_{St}}}_{\Delta_{St}} \Rightarrow \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

或

$$-(EA)_{St}P_{Al} + (EA)_{Al}P_{St} = 0$$

5. 答案是 Q。25.1 和 4 收益

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2(EA)_{Al} + (EA)_{St}}}_{\text{Determinant}} \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. 我们注意到, 解决这个问题的方法, 相反于静态定义, 取决于 **弹性属性**.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

模拟例子 2

7 另一个例子是长度的预定 cantilever 梁 L, 图 25.2

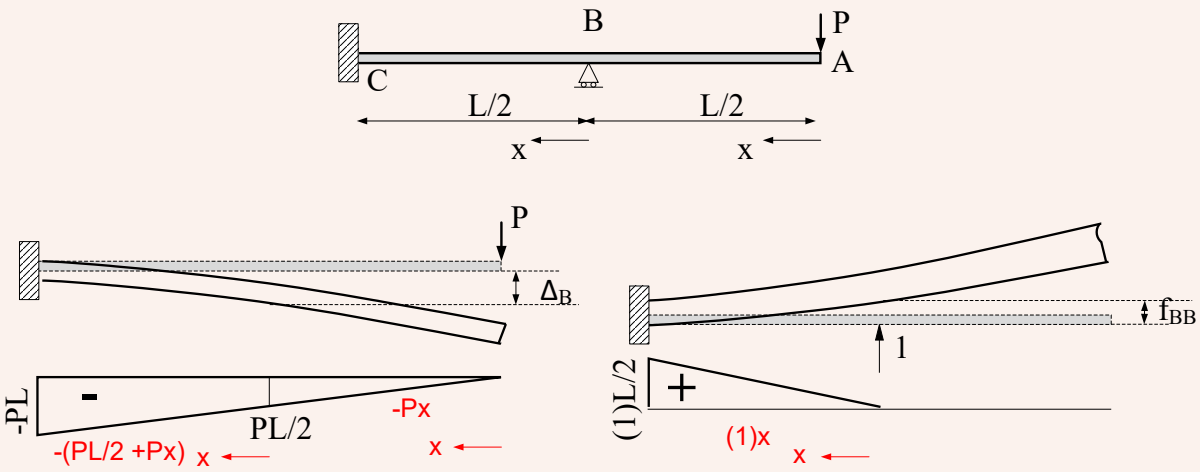


图 25.2: 可供选择的梁

1. 首先, 我们移除滚动支座, 并留下与 cantilever 作为一个基本结构。
2. 接下来我们将确定 挠度 的点 B 由于应用的荷载 P 使用虚拟力量方法

$$
\begin{aligned}
1.\Delta &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{L/2} 0\frac{-px}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^{L/2} -(x)\frac{\left(\frac{PL}{2}+Px\right)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{PL}{2}x + Px^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI}\left[\frac{PLx^2}{4} + \frac{Px^3}{3}\right]\Big|_0^{L/2} = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}
\end{aligned}
$$

3. 然后我们将应用一个单位 荷载 在点 B 和解决 位移在 B 使用虚拟力量方法

$$
1f_{BB} = \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}\mathrm{d}x = \int_0^{L/2}(x)\frac{x}{EI}\mathrm{d}x = \frac{(1)L^3}{24EI}
$$

4. 接下来, 我们认为位移在 B 是零, 因此位移 f_{BB} 要加倍的 R_B 这样的那

$$
R_B f_{BB} = \Delta
$$

为保证位移协调，因此

$$
R_B = \frac{\Delta}{f_{BB}} = \frac{\frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}}{\frac{(1)L^3}{24EI}} = \frac{5}{2}P
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

模拟例子 3

[8] 我们试图确定静态定义射线的灵活性矩阵。25.3. 柔度矩阵 會是 2×2 每一个术语 d_{ij} 相匹配 位移 在 自由度 i 由于单位强度在自由度 j.

- 我们有两个 DOF 相应的旋转在每个端。

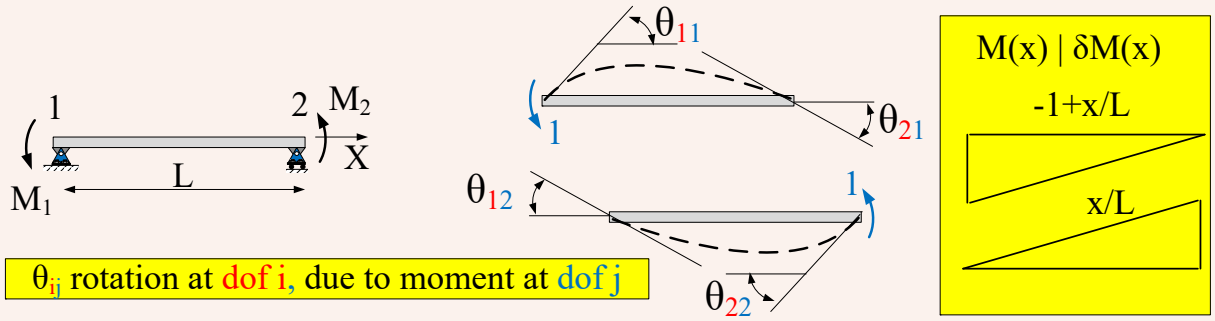


图 25.3: 柔度法的描述问题

- 和 **强度 位移** 现在的关系如

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} \overset{\begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{25.2}$$

  哪里 M_i 与外部应用的时刻相匹配, $d_{ij} = \theta_{ij}$, 和 θ_i 相应的未知旋转在 DOF i 因一瞬间在 DOF j.
- 使用的 **附加 虚功**或者更具体地说, 分析这个问题的虚拟力量方法:

$$d_{ij} = \underbrace{\int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx}_{\text{Internal}} = \underbrace{\delta\overline{P}_i \, \Delta_j + \delta\overline{M}_i \, \theta_j}_{\text{External}}$$

  哪里 $\delta\overline{M}(x)$, $\frac{M(x)}{EI_z}$, $\delta\overline{P}$ 和 Δ 是虚拟内部力量, 真实的内部位移, 虚拟的外部荷载, 和真实的外面的位移相应。
- 这里, **两者** 外部虚拟力量和瞬间被视为统一。

$$EI \underbrace{1}_{\delta\overline{M}} \underbrace{d_{11}}_{\Delta} = \int_0^L \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{\delta\overline{M}(x)} \underbrace{\left(-1+\frac{x}{L}\right)}_{M(x)} dx = \frac{L}{3} \tag{25.3}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 同样, 我们会得到:

$$EId_{22} = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{3}$$
$$EId_{12} = \int_0^L \left(-1 + \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx = -\frac{L}{6} \quad = \quad EId_{21}$$

- 这些结果可以在 矩阵 表格中总结为:

$$[\mathbf{d}] = \frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

然后, 我们可以解决转移问题。(旋转) 由于外部时刻。

模拟例子 4

9 该方法以微型形式, 通过图进一步描述。25.4.

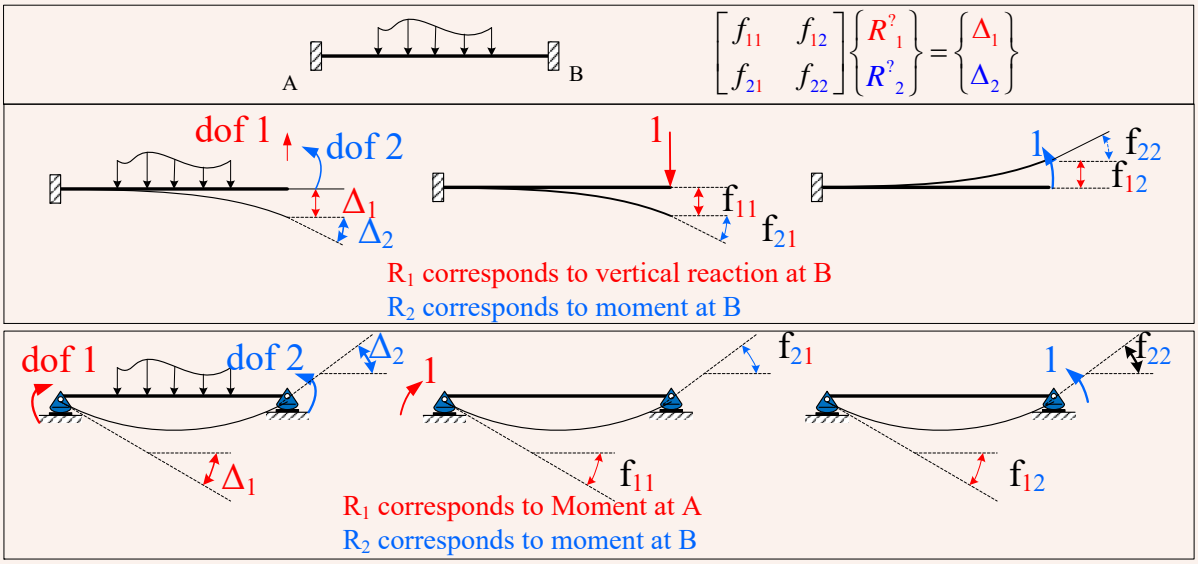


图 25.4: 描述柔度法与两个未知的

25.2 力量 / 柔度法

10 基于前两种示例, 我们现在正在寻求发展。一般方法为 **线性弹性** 静态分析不定义的结构。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 25.1: 灵活性方程式

1. 识别 **静态不确定性程度** (外部和/或内部) n.
2. 选择 n **不知不觉的力量和/或夫妻** 在加载的结构中, 与 n 相应发布 (角度或翻译): **初级结构**.
3. 确定的 n **首要结构中的转移** (使用的 荷载) 相应于发行, Δ_i.
4. 應用 A **单位力量** 在每一个发行中 j 关于主要结构 (没有外部 荷载) 并确定所有发布中的转移 i: **灵活性指数**, f_{ij}, 即位移在发布时 i 由于一个单位的力量 j. 方向是无关紧要的; 如果 反力 是积极的, 它将沿着指定的方向, 如果负, 否则。
5. 請注意這 f_{ij} 每单位负载的移动单位。
6. 写下 The **转移关系的兼容性**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{R}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \\ \cdots \\ \Delta_n^0 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}_i^0} \tag{25.4}$$

7. 然后, 这些反应是通过简单地转换柔度矩阵来获得的。

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}^{-1} \left(\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}_i^0 \right)$$

在一个未知的存在下, $\mathbf{f}^{-1}$ 被替换为 $1/f_{11}$

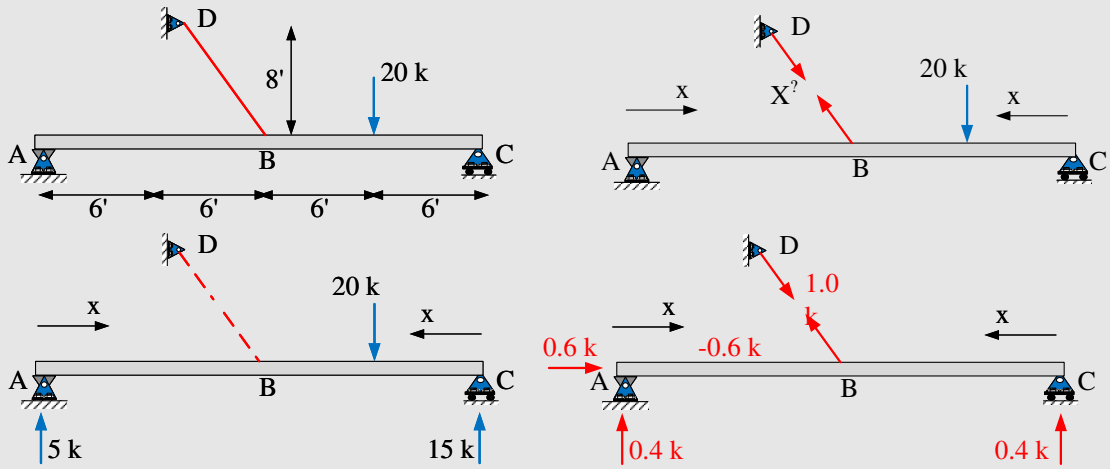
[11] 請注意這 $\boldsymbol{\Delta}_i^0$ 向量的初始移行, 通常是零, 除非我们有初始 位移 的 支座 (如 支座安排).

[12] 请注意, 从麦克斯威尔-贝蒂的相互理论中, §24.2.2, 柔度矩阵 [**f**] 它总是相同的。

25.2.1 例子

25.2.1.1 例題 25.1: 梁 與 tie rod

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



我们正在寻求计算轴力在天线中。梁: I=600 in^4, A=20 in^2 但是, 杆有 A-2in^2.

结构不确定到第一级。我们切断了绳子, 然后选择字符串的强度作为旋转。然后

$$\Delta + X\delta = 0.$$

我们评估 Δ 和 δ 通过虚拟力量方法, 并包括灵活和轴形状。

会员	$x=0$	L	A	I	P	$\delta\overline{P}$	M	$\delta\overline{M}$
AB	A	12	20	600	0	-0.6	$5x$	$-0.4x$
CE	C	6	20	600	0	0	$15x$	$-0.4x$
EB	C	6	20	600	0	0	$120-5x$	$-0.4x$
DB	-	10	2	-	0	1	0	0

使用 虚功原理 为 Δ 和 δ

$$\begin{aligned}(1)\Delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= 0 + \int_0^{12}(5x)\frac{-0.4x}{EI}dx + \int_0^{6}(15x)\frac{-0.4x}{EI} + \int_6^{12}(120-5x)\frac{-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\Delta &= -3,168\text{kft}^3\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}(1)\delta &= \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE} + \sum\int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx \\ &= (-0.6)\frac{(-0.6)^2(12)}{EA_2} + (1)\frac{(1)(10)}{EA_1} + 2\int_0^{12}(-0.4x)\frac{(-0.4x}{EI}dx \\ \Rightarrow EI\delta &= 206.05\text{kft}^3\end{aligned}$$

因为

$$\frac{I}{A_2} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{20}\right) = \left(\frac{30}{144}\right) \quad \text{and} \quad \frac{I}{A_1} = \left(\frac{600}{144^2}\right)\left(\frac{144}{2}\right) = \left(\frac{300}{144}\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

然后在协调方程中取代

$$\frac{-3,168}{EI}+\frac{206.05}{EI}=0 \Rightarrow X=+15.38 \text{ Tension}$$

如果我们忽略了由于轴力而导致的歪曲, 那么

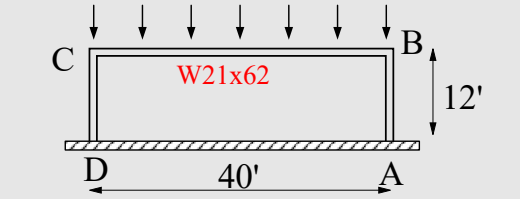
$$X=\frac{3,168}{184.32}=+17.2$$

25.2.1.2 例题 25.2: 钢材 构建 框架 分析

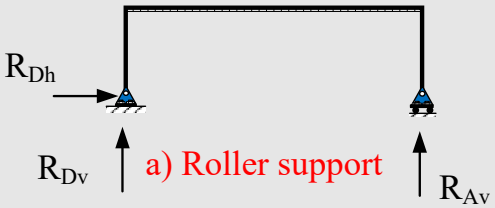
从 Structural Engineering
White, Gergely, and Sexmith, 1976 一个小型大规模制造的工业建筑, 必须以结构钢制成框架, 如下所示, 具有典型的交叉部分。三种设计正在考虑

a) 在一个基地和另一个角落; 这是要采取的, 当我们有不良或未知的土壤条件, 而基于框架可能无法在其基地开发任何可依赖的水平力量。
b) 两点的灵魂 A 和 D 以优良的土壤条件为主。
c) 使用 钢材 连接器, 只能在点之间运行的紧张 A 和 D (兩個<). 该基础不应为此后案提供任何水平限制。

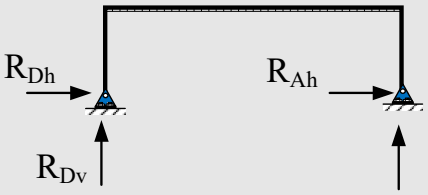
我们将假设框架是由 21 英寸的钢板部分制成的, 深度和重量为 62lb/ft。(W 21 × 62), 以及连接会员为设计 (*c*) 试图选择为 2in。[2] 酒吧



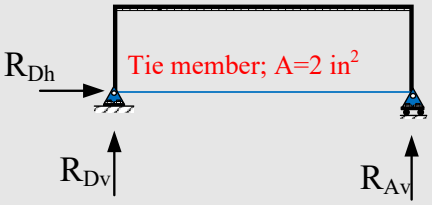
Structure cross section; spaced at 15'



a) Roller support



b) Hinged support



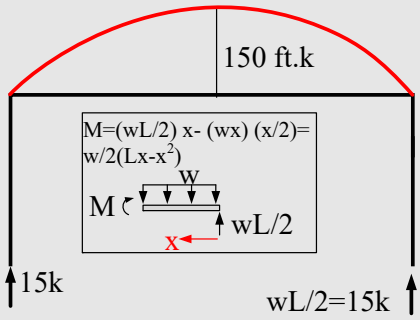
c) Roller with tie

使用 30 psf 的雪 荷载 和 20 psf 估计的合計 恒载。以 15 英尺的框架在建筑长度沿着中心, 设计荷载为 15 米。(30 + 20) = 750 lb/ft。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

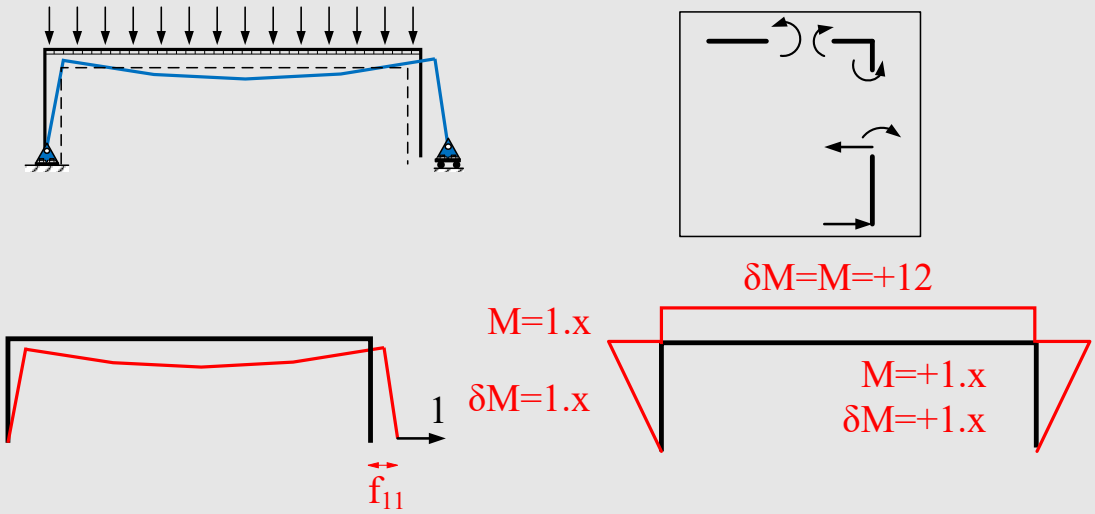
选项 A

这个选项是静态定义的, 因为有三个未知反应和三个方程式平衡.



选择 B

结构 B 静态不确定到第一级 (一个 redundant). 申请释放在 A, 折叠 剪力 R_1. Δ_1:



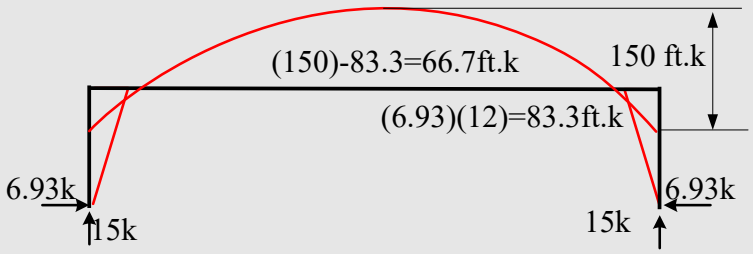
解决为 Δ_1 和 f_{11}:

$$1(\text{k})\cdot\Delta_1(\text{ft}) = \int_0^L (12)\frac{w}{2}\frac{LX-x^2}{EI}dx = \int_0^{40}(12)\frac{(1/2)(.75)(40x-x^2)}{EI}$$
$$= \frac{48,000}{EI}\ \text{k}^2\ \text{ft}^3$$
$$1(\text{k})\cdot f_{11}(\text{ft}) = 2\left[\int_0^{12} x\frac{x\mathrm{d}x}{EI} + \int_0^{20} 12\frac{12\mathrm{d}x}{EI}\right] = \frac{6,912}{EI}\ \text{k}^2\ \text{ft}^3$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

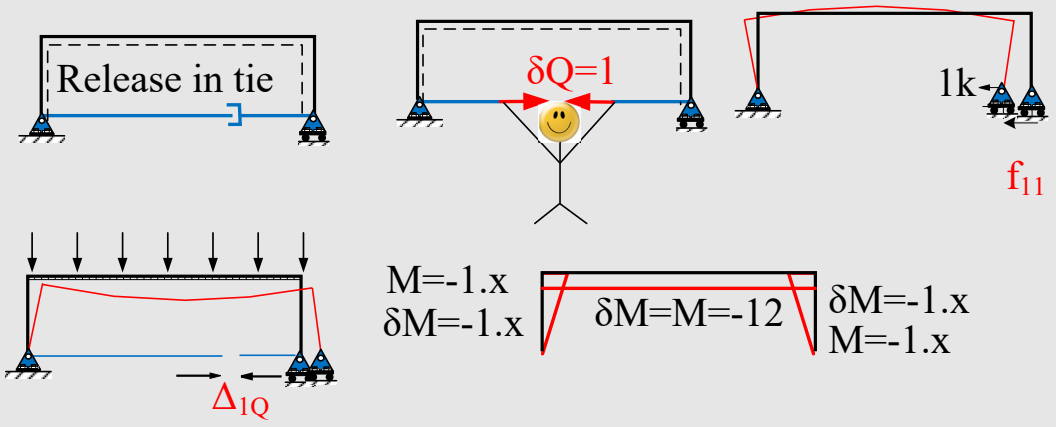
解决为 R_1

$$\frac{1}{EI}[48,000 + 6,912R_1] = 0 \Rightarrow R_1 = -6.93 \text{ k} \leftarrow$$



选择 C

三个未知的外部力量, 但结构是 静态不确定 到第一等级, 因为联盟成员提供一等级的 内部回报. 释放连接会员, 其相关长度位移和轴力。



协调方程: 释放时的两部分的相对 位移 必须为零。, or $\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0$ 哪里

Δ_1 = 位移 在初始结构中的 1 发布时

f_{11} = 相对 位移 在发布 1 为一个单位 轴力 在附属成员, Δ_1 根据 B 案例的规定:

R_1 是指在原始结构中的联系成员的力量。

$$\Delta_1 = \frac{(48,000) \text{ k ft}^3 (1,728) \text{ in}^3/\text{ ft}^3}{(30 \cdot 10^3) \text{ ksi} (1,327) \text{ in}^4} = 2.08 \text{ in} \rightarrow$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

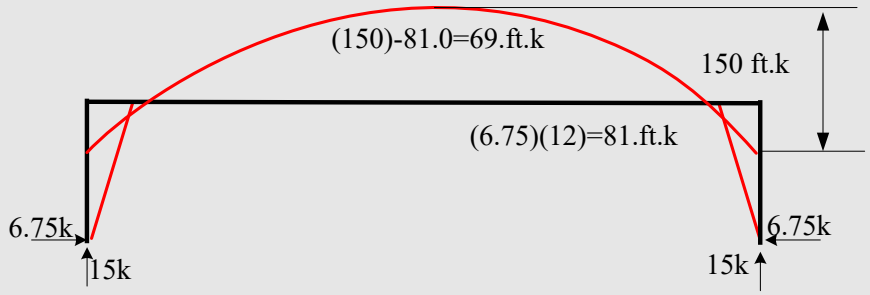
f_{11} 由于灵活和轴性变形。

$$
\begin{aligned}
1 \cdot f_{11} &= \underbrace{2\left[\int_0^{12}(-x)\frac{(-x)\mathrm{d}x}{EI}+\int_0^{20}(-12)\frac{(-12)\mathrm{d}x}{EI}\right]}_{\text{Flexure}}+\underbrace{\delta\overline{P}\frac{PL}{EA}}_{\text{Axial}} \\
&= \frac{6,912}{EI}+\frac{1(1)(40)}{EA} \\
&= \frac{(6,912)\ \mathrm{k\ ft^3}(1,728)\ \mathrm{in^3/\ ft^3}}{(30\cdot 10^3)\ \mathrm{ksi}(1,327)\ \mathrm{in^4}}+\frac{(40)\ \mathrm{ft}(12)\ \mathrm{in/\ ft}}{(30\cdot 10^3)\ \mathrm{ksi}(2)} \\
&= 0.300+0.008=0.308
\end{aligned}
$$

这样 $f_{11}=0.308$ 英寸 / k 常见的变形:

$$\Delta_1+f_{11}R_1=0\Rightarrow 2.08+.308R_1=0\Rightarrow R_1=-6.75\ \mathrm{k}$$

方程式中的两个 位移 术语必须包含 相反的迹象 要考虑他们的方向差异。

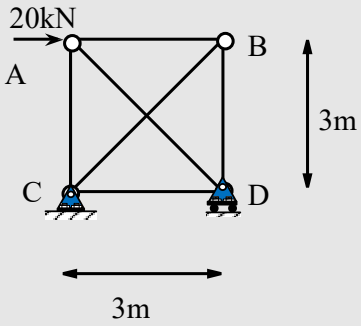


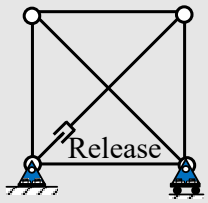
评论

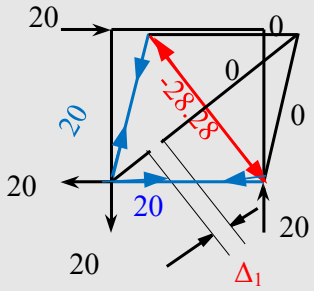
M 图表 c 非常接近 M b. 索 非常强大。减少索的区域将增加这一刻。带属的框架在工业建筑中广泛使用。最大瞬间框架 (b) 和 (c) 大约 55% 由 (a). 连续性导致积极时刻的下降, 负时刻增加。更多 最佳设计. 垂直反应不受水平支座条件的影响。

25.2.1.3 例题 25.3: 桁架, 一大强度

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

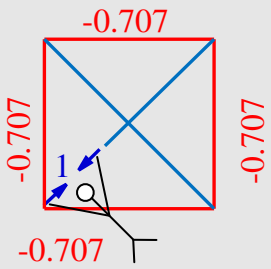


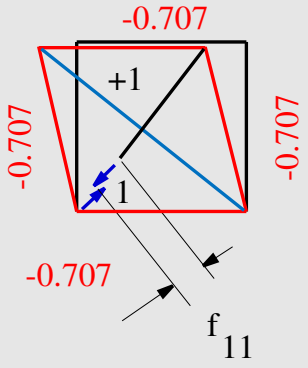




1. 查看: $2\times4=8$ 方程式,6 名成员 $+3$ 反应 $\Rightarrow$ 一级不确定性. 在六条线中的任何一个可以选择长度释放。
2. 释放 diagonal 会员 BC 为了释放。
3. Δ_1 相對 位移 共同的 B 关于联合 C.
4. 平衡 变形协调 沿 CD

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 = 0$$
$$1\cdot\Delta_1 = \Sigma\delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$
$$f_{11} = \Sigma\delta\overline{P}\frac{\overline{P}L}{AE}$$





5. 以表格形式评估这些总结:

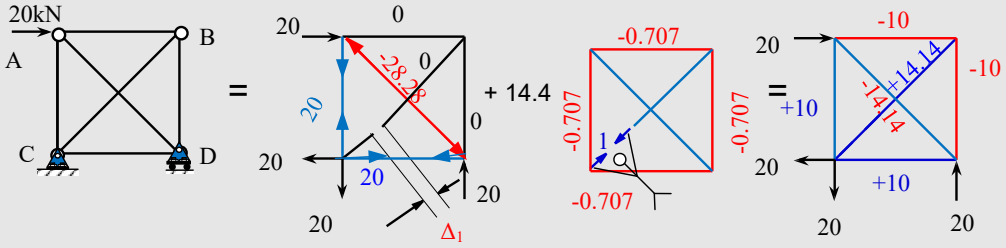
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

会员	P	$\delta\overline{P}$	L	$\delta\overline{P}PL$ (Δ_1)	$\delta\overline{P}\overline{P}L$ (f_{11})
AB	0	-0.707	3	0	1.5
BD	0	-0.707	3	0	1.5
CD	$+20$	-0.707	3	-42.42	1.5
AC	$+20$	-0.707	3	-42.42	1.5
AD	-28.28	$+1$	4.242	-119.96	4.242
BC	0	$+1$	4.242	0	4.242
				-204.8	14.484

$$\Delta_1 = \Sigma\delta\overline{P}\frac{PL}{AE} = -\frac{-204.8}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$f_{11} = \frac{14.484}{AE}\text{m.kN}^2$$
$$0 = \frac{1}{AE}[-204.8 + 14.484F_1]$$
$$F_1 = 14.14\ \text{kN}$$

.

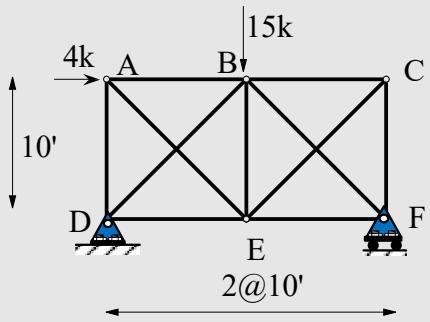
6. 最终的力量是由 超级强制 因重量而造成的力量和因真正负载而导致的力量。
7. 减少力量效应: 成员部队增加 14.14(回归力量)

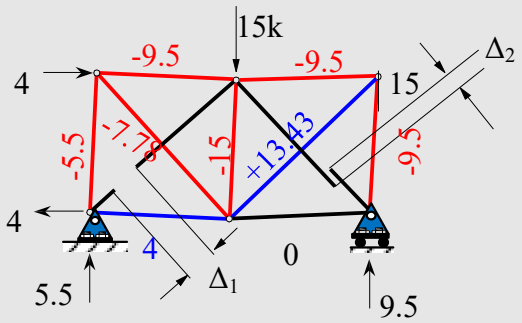


会员	$\delta\overline{P}$	$F_1\delta\overline{P}$	P	P_{total}
AB	-0.707	-10.0	0.0	-10.0
BD	-0.707	-10.0	0.0	-10.0
CD	-0.707	-10.0	$+20.0$	$+10.0$
AC	-0.707	-10.0	$+20.0$	$+10.0$
AD	$+1.0$	$+14.14$	-28.28	-14.14
BC	$+1.00$	$+14.14$	0	$+14.14$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

25.2.1.4 例题 25.4: 桁架: 两支救援力量





另一个包含第二个 redundant 会员的面板被添加到前例 桁架

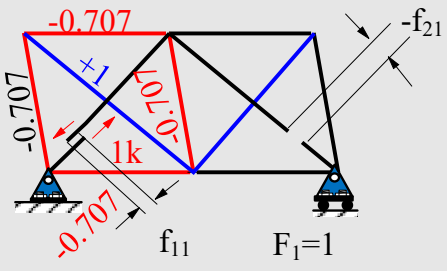
1. 释放 2 个字符串 (DB 和 BF).
2. 会员部队和需要的移行为真正的负载和强大的两个解放部队在会员 DB 和 BF.
3. 雖然實際充電通常強調整個 桁架 的所有成員, 但我們看到相同的單位力量與 应力 相匹配的單元力量只有包含放置器的面板中的成員; 所有其他字符串力量都是零。
4. 认识到这一事实, 使我们能够更快地解决双重图形图形问题, 而不是一个具有多重折叠的框架。
5. 虚功 等式计算所需的六个移动 (2 由于 荷载 和 4 个灵活性) 是

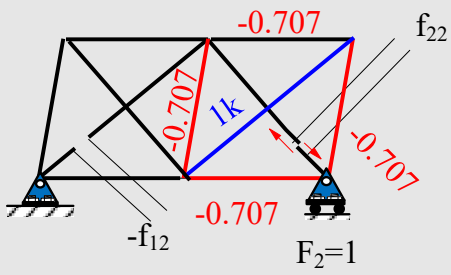
$$1 \cdot \Delta_1 = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{PL}{AE} \right) \qquad 1 \cdot \Delta_2 = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

$$1 \cdot f_{11} = \Sigma \delta \overline{P}_1 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right) \qquad 1 \cdot f_{21} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \left(\frac{\overline{P}_1 L}{AE} \right)$$

$$f_{12} = f_{21} \text{ by the reciprocal theorem} \qquad 1 \cdot f_{22} = \Sigma \delta \overline{P}_2 \frac{\overline{P}_2 L}{AE}$$

6. 接收紧张单位力量 (积极的).





结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

7. 图书馆:

					转移		灵活性		
会员	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	L	Δ_1 $\delta\overline{P}_1PL$	Δ_2 $\delta\overline{P}_2PL$	f_{11} $\delta\overline{P}_1\overline{P}_1L$	f_{21} $\delta\overline{P}_2\overline{P}_1L$	f_{22} $\delta\overline{P}_2\overline{P}_2L$
AB	-9.5	-0.707	0	120	+806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	120	0	+806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	120	0	0	0	0	60
DE	+4	-0.707	0	120	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	120	+466	0	60	0	0
AE	+7.78	+1	0	170	+1,322	0	170	0	0
BE	-15.0	-0.707	-0.707	120	+1,272	+1272	60	60	60
CE	+13.43	0	+1	170	0	+2,280	0	0	170
BD	0	+1	0	170	0	0	170	0	0
BF	0	0	+1	170	0	0	0	0	170
					+3,528	+5,164	+580	+60	+580

$$\Delta_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0$$
$$\Delta_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0$$

或

$$\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 580 & 60 \\ 60 & 580 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3,528 \\ 5,164 \end{bmatrix}$$

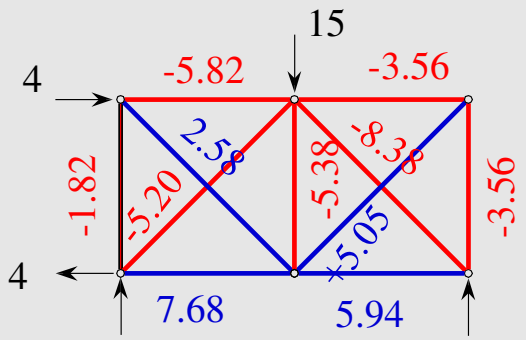
和 F_1 = -5.20 吉普赛 和 F_2 = -8.38 吉普赛

8. 最后一组力量: 为每个成员添加三个单独的效果: $F = P + F_1\overline{P}_1 + F_2\overline{P}_2$

会员	P	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$F_1\overline{P}_1$	$F_2\overline{P}_2$	P_{tot}
AB	-9.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-5.82
BC	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0.0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0.0	0.0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	+4	-0.707	0.0	3.676	0.0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0.0	3.676	0.0	-1.82
AE	+7.78	+1	0.0	-5.20	0.0	2.58
BE	-15.0	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	+13.43	0.0	+1	0.0	-8.38	5.05
BD	0.0	+1	0.0	-5.20	0.0	-5.20
BF	0.0	0.0	+1	0.0	-8.38	-8.38

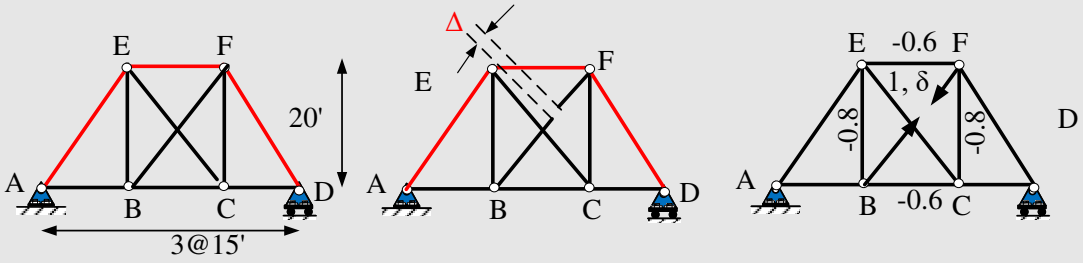
审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



25.2.1.5 例题 25.5: 桁架: 热 荷载

W eseek 分析下列 桁架 (无限到第一级) 受温度上升的 $\Delta T = 60°\text{F}$ 是 AE、EF 和 FD 的成员。带 $\alpha = 1/150,000$ 为 °F, $E = 30 \times 10^3 \text{K}$ / SQ 中的 所有十字部分均为 10 sq。对于这个问题, 我们选择切断条 BF, 并选择其条线强度为 redundant。



然后

$$\Delta + X\delta = 0$$

虽然我们仍然有

$$(1)\delta = \frac{1}{E}\sum \delta\overline{P}\frac{PL}{A}$$

为 Δ 它有点不同。

$$(1)\Delta = \sum \delta\overline{P}\frac{PL}{AE}$$

正如这本书所说, 我们已经明确地将虚拟与现实数量分开。因此, 真正的位移可以表达为

$$\frac{P}{AE} = \varepsilon = \alpha\Delta T$$

哪里 α 是热扩张的比例, 以及 ΔT 温度的变化。因此, 对于这个问题, 我们应该使用

$$(1)\Delta = \alpha\sum \delta\overline{P}\Delta TL$$

图表结果

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

酒吧	L	A	$\frac{L}{A}$	$\delta\overline{P}=P$	$\delta\overline{P}\frac{PL}{A}$	ΔT	$\delta\overline{P}\Delta TL$	$X\delta\overline{p}$
	ft	在 ^{2}	ft/in^2	k	k^{2}ft/in^2	°F	k°F 英	k
EF	15	10	1.5	-0.6	+0.54	+60	-540	-7.5
BC	15	10	1.5	-0.6	+0.54	0	0	-7.5
EB	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
FC	20	10	2	-0.8	+1.28	0	0	-10.0
EC	25	10	2,5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
BF	25	10	2.5	+1.0	+2.5	0	0	+12.5
Σ					+8.64		-540	

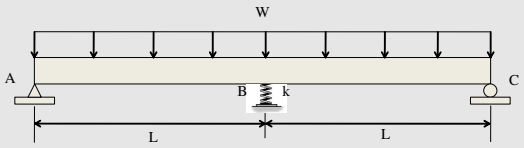
$$\Delta = (-540)\frac{1}{150,000} = -0.0036 \text{ ft}$$

$$\delta = \frac{8.64}{30\times 10^3} = 0.000288 \text{ ft}$$

因此

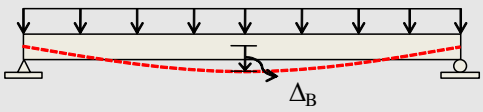
$$-0.0036 + 0.000288X = 0 \Rightarrow X = +12.5 \text{ k (Tension)}$$

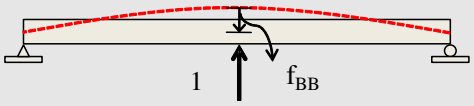
25.2.1.6 例题 25.6: 春天支持 梁



梁 由 PIN 支持 A 春天, 有坚固的 k 在 B 和一个角色在 C. 确定春季运动的强度在梁. 我是永恒的。

1. 定义主要结构 (取消春天) 并确定此位置的缺陷为真实的荷载和单位荷载. 既然这是一个非常常见的地质学, 让我们解决转移时间 L





结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

单身 荷载

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{1}{2}w(LX - x^2)$$
$$\delta\overline{M} = \frac{1}{2}x$$
$$1.\Delta = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{1}{2}x\frac{w(Lx - x^2)}{2EI}dx$$
$$= \frac{2w}{4EI}\int_0^{L/2}(Lx^2 - x^3)dx = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{L/2} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

点 荷载:

$$M = \frac{P}{2}x = \frac{Px}{2}$$
$$\delta\overline{M} = \frac{\delta\overline{P}}{2}x = \frac{x}{2}$$
$$1.f_{BB} = 2\int_0^{L/2} \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = 2\int_0^{L/2} \frac{x}{2}\frac{Px}{2EI} = \frac{2P}{4EI}\int_0^{L/2} x^2dx$$
$$\Rightarrow f_{BB} = \frac{PL^3}{48EI}$$

2. 计算由于整体 荷载 和单位 荷载. 我们有一个春天, 所以挠度不是零, 而是比例。(春天常态 k) 到反力 力量

$$\Delta_B + f_{BB} = \Delta_{sp} \quad \text{and} \quad \Delta_{sp} = \frac{F_{sp}}{k}$$

现在, 让我们调整长度为 2L 的 梁 的转换, 而不是 L 如以前衍生方程式所示。

$$\Delta_B^* = \frac{5wL_{AC}^4}{384EI} = \frac{5w(2L)^4}{384EI} = \frac{5wL^4}{24EI}$$
$$f_{BB}^* = \frac{PL_{AC}^3}{48EI} = \frac{F_{sp}(2L)^3}{48EI} = \frac{F_{sp}}{L^3}6EI$$

替代

$$\Delta_B^* + f_{BB}^* = \Delta_{sp} \Rightarrow \frac{5WL^4}{24EI} + \left(-\frac{F_{sp}L^3}{6EI}\right) = \frac{F_{sp}}{k} \Rightarrow F_{sp} = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$$

随着中间支持的反应已知, 问题现在静态确定。

读者提到附件 F 对于类似的, 但更复杂的问题: 一个壳桶, 由弹性梁支持。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

25.2.1.7 例题 25.7: 皇后邮件

钢材 地板 梁 旨在携带 3 k/ft 的 荷载 在 24 英尺的简单范围内。由于建筑物的使用变化, 新主人希望荷载地板与材料将增加总负载到 4.8k/ft。一位工程师建议通过压缩线和两条紧张连接来加强梁, 形成一个 “國王郵件 桁架” 如下所示。新成员将隐藏在不负载的分区下方。我们希望为新梁绘制时刻图, 并评估这种回归方案的效率。梁采用 W 18x60 截面（I=984 in^4），撑杆采用 W 4x13 截面（A=4.83 in^2）。钢索截面积为 A=1 in^2。

1. 这是一个静态不定义的结构, 梁有三个支持 (A、B 和 C).
2. 对于初级结构, 我们取消中央支座, 然后解决中间挠度。Δ. ($\Delta = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$).
3. 使用单位的力量 B 为此解决 f_{BB}, 请记住, 我们将在梁中有灵活性, 在两个电缆中有轴。(AD 和 DC) 和 Axial 在成员 BD.
4. 解决 反力 的問題 B.

1. 在 BD 成员中选择 轴力 作为解放力
2. 确定 挠度 的 梁

$$D_B = -\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI} = -\frac{5}{384}\frac{(4.8)\text{ k.ft}(24)^4\text{ ft}^4(12)^4\text{ in}^4/\text{ ft}^4}{E(984)\text{ in}^4} = -\frac{36,414}{E}$$

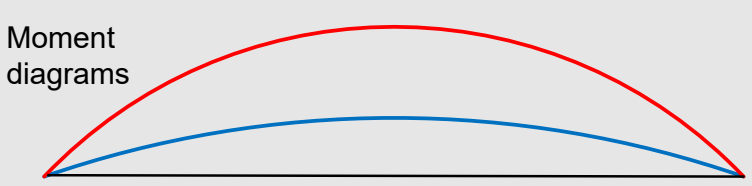
3. 从地质学, 每个索的长度是 $L = \sqrt{7^2+12^2} = 13.89$ ft
4. 从静态, 一个单位力量在成员 BD 将产生一个力量在索等于 $\frac{13.89}{7}0.5 = 0.9923$ 吉普赛
5. 请注意, 如果我们将 荷载 单元应用到旋转器上, 我们假设我们在 B 中有一个固体 支座 而不是一个弹性。(二元元和索的组合).
6. 定义灵活性期限

$$\begin{aligned} f_{BB} &= 2\left[\int_0^{12\times12} 0.5x\frac{0.5x}{EI}dx + (0.992)\frac{(0.992)(13.89)(12)}{E}\right] + (1)\frac{(1)(7)(12)}{(3.83)E} \\ &= 2\frac{(0.25)(144)^3}{3E(984)} + 2\frac{(0.992)^2(13.89)(12)}{(1)E} + \frac{(7)(12)}{3.83E} \\ &= \frac{1}{E}(505.7 + 328 + 21.93) = \frac{855.63}{E} \end{aligned}$$

7. 变形协调的转移需要

$$R f_{BB} + D_B = 0 \Rightarrow R = -\frac{D_B}{f_{BB}} = -\frac{-36,414}{855.63} = 42.5\text{ k}$$

8. 相应和原始时刻图表是



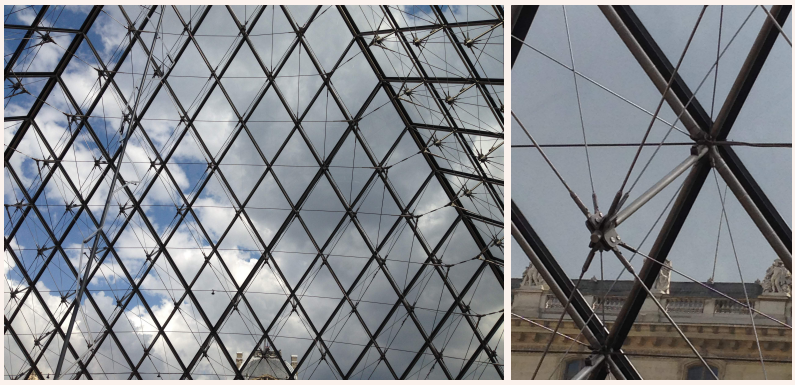
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们注意到, 最高时刻从 230.4 k-ft 下降到 90.6。k.ft

13 图 25.5 它展示了一些基于 Queen-Post 概念的设计例子。



(a) 华盛顿杜勒斯机场 (国王邮报



(b) 卢浮宫的金字塔 (我的 M 皮)



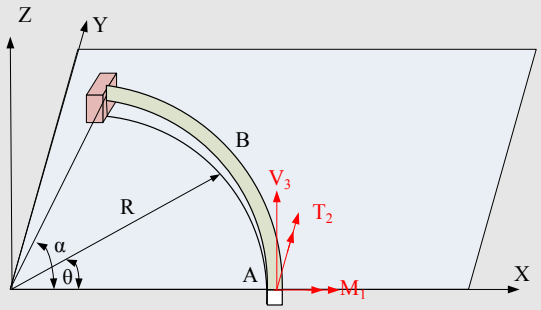
(c) Sony Center, Berlin (Helmut Jahn)

图 25.5: 女王后灵感结构的例子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

25.2.1.8 例题 25.8: 灵活性矩阵; 曲线泡沫

我们正在寻找柔度矩阵为圆形射线盒子的衍生品 R 和角度 α. 拱在一端粘贴, 而在另一端是免费的。

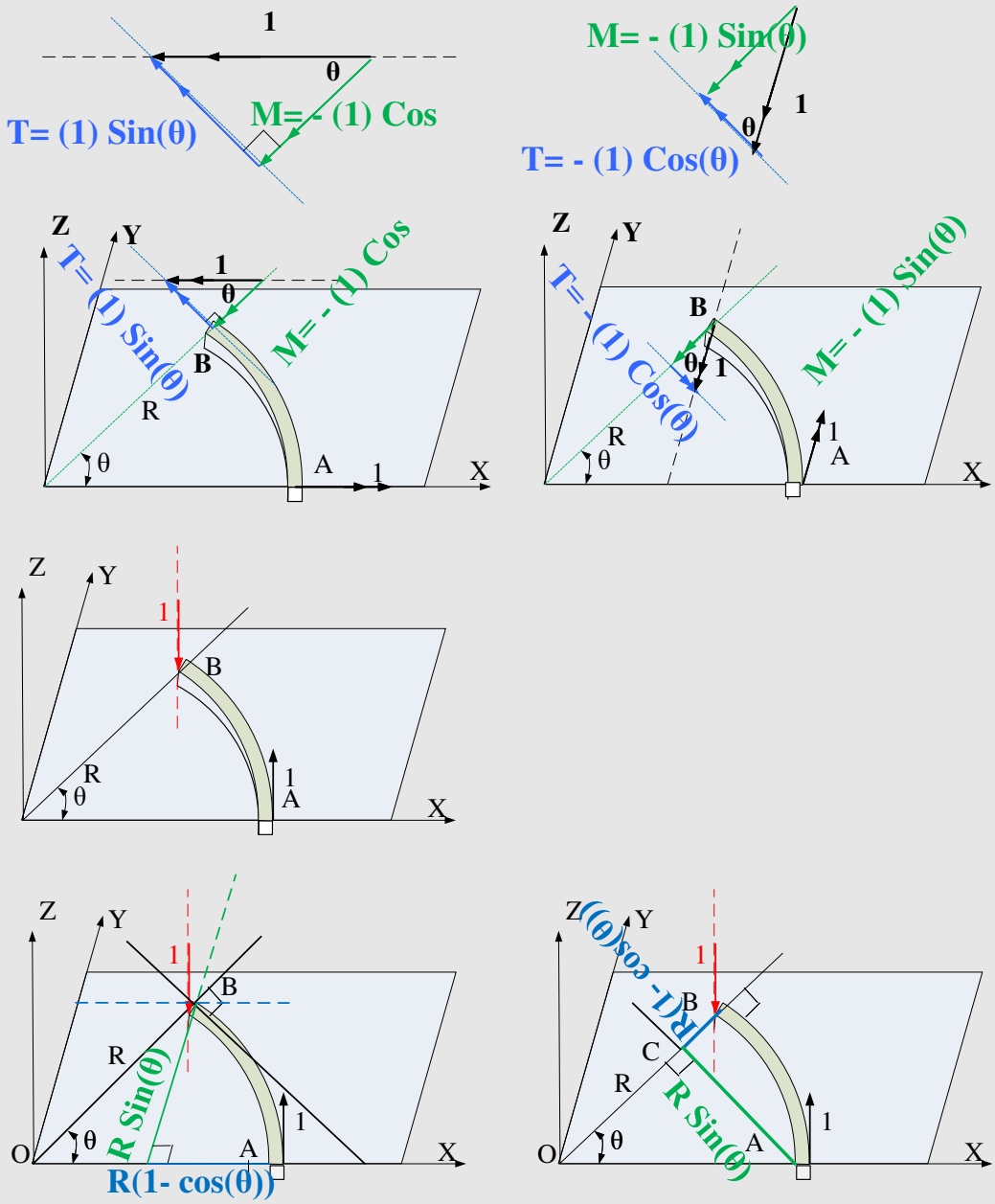


1. 三个自由度相当于时刻, 扭转和 Shear。
2. 由于单元外部时刻或适用于 A 的扭转而引起的时刻和旋转可以从地质学中轻松获得。
3. 对于单位外部应用的力量在 A, 需要从地质学确定两个时刻的手臂。

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



杜克:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	M_A=1	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 需要应用

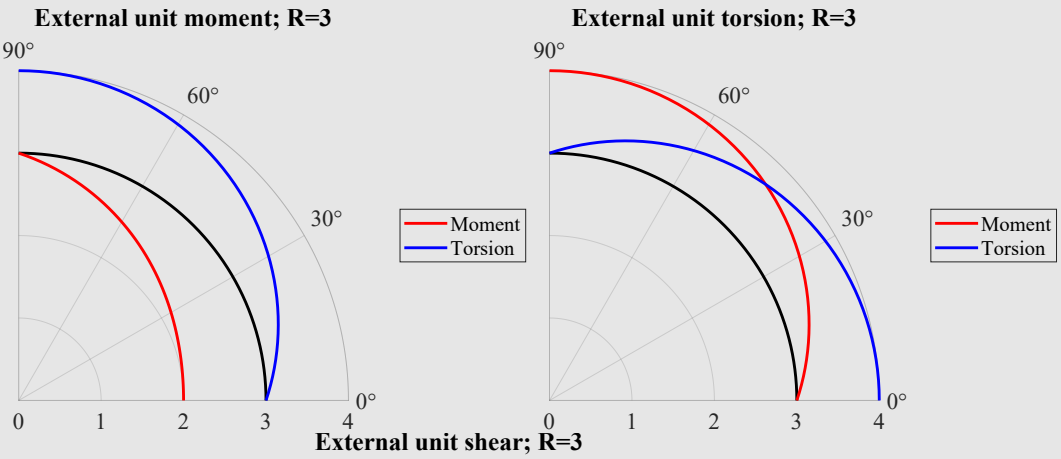
$$d_{ij} = \int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

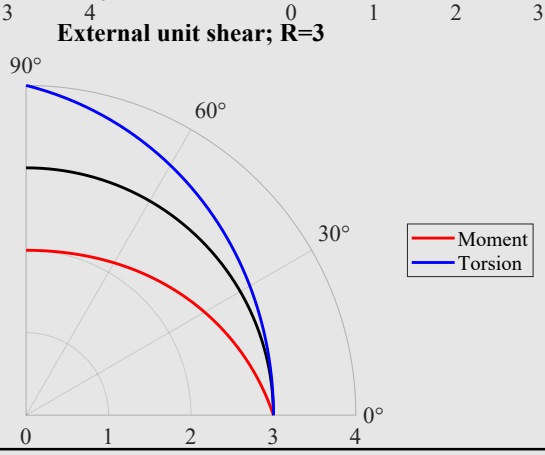
哪里 $1 \le i, j \le 3$, 即我们在线 2 或 4 上运行。这样 (迹象的 d_{x3} 改變的統合結果可能錯誤:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{12} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2} \\
d_{13} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha + \cos^2\alpha\right) \\
d_{22} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{23} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= -\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) \\
d_{33} &= \int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta \\
&= \int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta \\
&= \frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right) + \frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。





	外部单位					
	瞬间		扭转		力量	
英特。力量	开始	结局	开始	结局	开始	结局
瞬间	1	0	0	1	0	1
扭转	0	1	1	0	0	1

25.3 三瞬间方程式

有关历史背景，请参见 §??

14 三时方程式，也被称为克莱皮龙的三时理论，由法国工程师本奥特·克莱佩隆于 1857 年开发。(§10.3.2.9). Clapeyron 在弹性力学和结构分析上的工作，为分析持续的射击提供了基础。三瞬间方程式是分析静态不确定结构的第一种方法之一，提供了一个方式来将时刻与连续三次支持的连续梁相连。

15 今天不可能使用，但我选择包括它为历史原因和精彩的 TIS 解决方案。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

16 和“三分钟平衡”也被称为“ 三时理论”or 克莱皮伦的理论 它被称为这样, 因为它与梁的三个接近点的旋转时刻有关。

17 基本上, 这种方法提供了一个简单的公式来计算弯矩在支座中间的一个连续的梁有三个支持。

18 该方法还可以扩展到多个支持的射线, 导致一系列方程式形成一个三位数矩阵。.

19 成员 [1] 被认为是直的, 我们指定为 L, C, 和 R, 在 图 中显示的点 25.6. in 的时刻被认为是支持者之间的连续性, 并由 I_L 和 I_R. 从原始位置的偏差被认为是 δ_L, δ_C, 和 δ_R 正如我所表明的那样, 在上升时被认为是积极的。

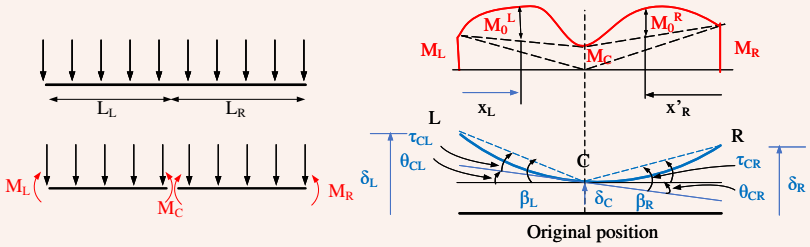


图 25.6: 三瞬间方程式, 衍生

20 让这三个点的时刻 M_L, M_C, 和 M_R. 关闭时刻是积极的, 当引起压力在梁的下纤维。时刻图为部分 LC 或 CR 可以被认为是由三种单独影响的超越所产生的:

1. 各个最后的时刻分别行动的贡献, 由三角形指定的单一行所给予。
2. 應用的荷载的貢獻, 與最後瞬間移除相同, 由普通人在普通人中提供。M_0^L 在部分中 LC.
3. 由 M_0^R 在部分中 CR.

21 從 图 25.6 我们有

$$\theta_{CL} = \beta_L - \tau_{CL} \quad \text{and} \quad \theta_{CR} = \tau_{CR} - \beta_R$$

22 但是, 由于弹性曲线必须通过点保持连续性 C (為什麼這種方法落在柔度法中 [2])

$$\theta_{CL} = \theta_{CR} \Rightarrow \beta_L - \tau_{CL} = \tau_{CR} - \beta_R \tag{25.5}$$

23 因为这些是小角度, 我们可以考虑

$$\beta_L = \frac{\delta_L - \delta_C}{L_L} \quad \beta_R = \frac{\delta_R - \delta_C}{L_R} \tag{25.6}$$

[1]基于一个由 Norris and Wilbur, 1960.

[2]注明类似性与折叠 挠度 方法 (§27.2) 在那里, 我们在节点上写一个平衡方程而在三分钟方程中, 我们写一个方程式的变形协调 oof 转移。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24 如果时刻图要转换为 M/EI 一个 (曲率) 然后, τ_{CL} 和 τ_{CR} 可以从第二瞬间区域理论中进行评估 [3] (§22.3.4.3):

$$\begin{aligned}\tau_{CL} &= \frac{1}{EI_L L_L}\left(\frac{M_L L_L^2}{6} + \frac{M_C L_L^2}{3} + \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L\right)\\ \tau_{CR} &= \frac{1}{EI_R L_R}\left(\frac{M_R L_R^2}{6} + \frac{M_C L_R^2}{3} + \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R\right)\end{aligned} \tag{25.7}$$

让

$$(\mathcal{M}_0)_L = \int_0^{L_L} M_0^L x_L dx_L \quad \text{and} \quad (\mathcal{M}_0)_R = \int_0^{L_R} M_0^R x'_R dx'_R \tag{25.8}$$

25 取代 EQ。25.8 在 EQ。25.7 其次, 从埃克斯 25.6 和 25.7 以 Q。25.5 我们得到了所谓的 **三分钟平衡**.

$$M_L\frac{L_L}{I_L} + 2M_C\left(\frac{L_L}{I_L} + \frac{L_R}{I_R}\right) + M_R\frac{L_R}{I_R} = -\frac{\mathcal{L}_0}{I_L} - \frac{\mathcal{R}_0}{I_R} + 6E\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right] \tag{25.9}$$

荷载 定义为

$$\mathcal{L}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_L}{L_L} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_0 = \frac{6(\mathcal{M}_0)_R}{L_R}$$

哪里

1. M_L. M_C 和 M_R 它是积极的, 当导致压力下纤维。
2. δ_L, δ_C, 和 δ_R 从原始位置上涨时是积极的。
3. $\mathcal{L}_0$ 和 $\mathcal{R}_0$ 是 荷载 条款依赖于应用的 荷载 在字符串中 LC 和 CR 相应。
4. 和 M_0 一个会员的图表是旋转时刻图表提取给会员, 如果它被认为是一个简单的终端支持梁.
5. $(\mathcal{M}_0)_L$ 代表该图表下的区域的静态时刻, 通过左端围绕一个轴。
6. $(\mathcal{M}_0)_R$ 代表该图表下的区域的静态时刻, 通过右端围绕一个轴。

最后两个静态时刻的标志仅仅取决于常规的标记。M_0 图表

26 If $I_L = I_R = I$ 然后是 eq。25.9 简化为

$$M_L L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R L_R = -\mathcal{L}_0 - \mathcal{R}_0 + 6EI\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right] \tag{25.10}$$

27 荷载 单一和 集中荷载 的定义在 图 中显示 25.7 在桌子上提供 25.1.

[3] 一个负载的灵活器成员的第 2 点的坦根偏差, 从一个坦根到第 1 点的挠度曲线 (t_{21}) 等于 曲率 图表区域的 1 和 2 之间约为 2 的时刻。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

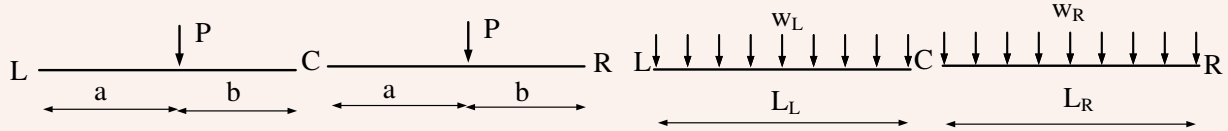
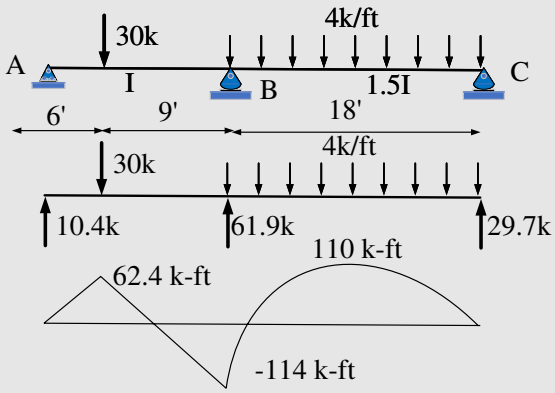


图 25.7: 三分钟方程式, 荷载条款

表 25.1: 荷载 点条款和统一负载

集中荷载	$\mathcal{L}_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$
单身 荷载	$\mathcal{L}_0 = \frac{w_L L_L^3}{4}$	$\mathcal{R}_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$

25.3.1 例题 25.9: 连续 梁



用 eq。25.9, 采取 A, B, 和 C 如 L, C, 和 R:

$$M_a = 0 \quad M_B = ? \quad M_C = 0$$

和

$$\delta_A = \delta_B = \delta_C = 0$$

从桌子 25.1

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(30)(6)(9)(21)}{15} = 2,268$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{(4)(18)^2}{4} = 5,832$$

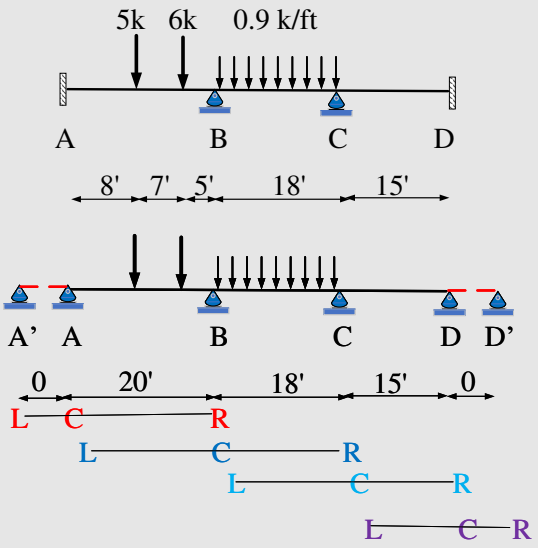
最终

$$0 + 2M_B\left(\frac{15}{I} + \frac{18}{1.5I}\right) + 0 = -\frac{2,268}{I} - \frac{5,832}{1.5I}$$

$$54M_B = -6,156 \Rightarrow M_B = -114\text{k-ft}$$

25.3.2 例题 25.10: 连续 梁

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



在这个情况下，有四个未知的时刻，M_A, M_B, M_C，和 $M_D d$. 因此，需要四个方程式。固定终端可以通过将其替换为基本零长度的额外范围来处理。需要的方程式可以通过应用 Eq 获得。25.10 四个不同的时间，考虑 L, C, 和 R 换句话说，如所示。

$$\delta_{A'} = \delta_A = \delta_B = \delta_C = \delta_D = \delta_{D'} = 0$$

1. 考虑 A', A, 和 B 如 L, C 和 R

$$\mathcal{L}_0 = 0 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(5)(8)(12)(32)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(25)}{20} = 1,330.5 \quad M'_A = 0$$
$$\Rightarrow 40M_A + 20M_B = -1,330.5$$

2. 考虑 A, B, 和 C 如 L, C 和 R

$$\mathcal{L}_0 = \frac{(5)(8)(12)(28)}{20} + \frac{(6)(15)(5)(35)}{20} = 11,459.5 \quad \mathcal{R}_0 = \frac{(0.9)(18)^2}{4} = 1,312.2$$
$$\Rightarrow 20M_A + 76M_B + 18M_C = -2,771.7$$

3. 考虑 B, C, 和 D 如 L, C 和 R

$$\mathcal{L}_0 = 1,312.2 \quad \mathcal{R}_0 = 0 \Rightarrow 18M_B + 66M_C + 15M_D = -1,312.2$$

4. 考虑 C, D, 和 D' 如 L, C 和 R

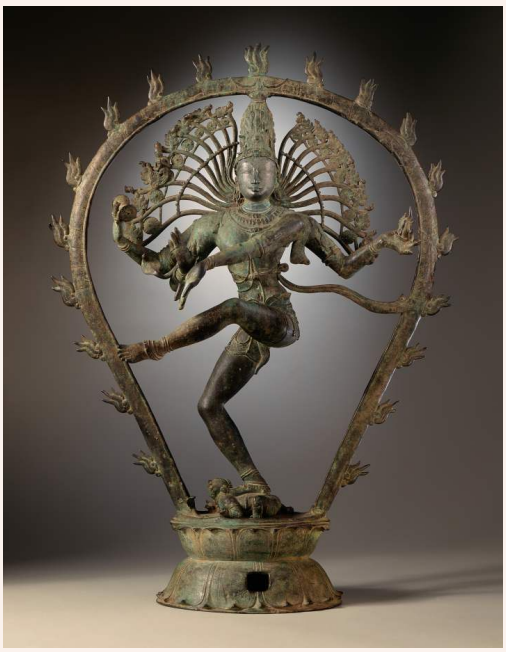
$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{R}_0 = 0 \quad M_{D'} = 0 \Rightarrow 15M_C + 30M_D = 0$$

四个方程式可以写为

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 76 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 66 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 30 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1,330.5 \\ -2,771.7 \\ -1,312.2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19.17 \\ -28.20 \\ -13.74 \\ +6.87 \end{Bmatrix} \text{k-ft}$$

(注意预期的三位数结果 矩阵).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿



Shiva, Chola 君主制

Shiva 的宇宙舞蹈的动态姿势和流动运动象征着灵活性和适应性, 就像在荷载中灵活结构如何变形而保持平衡一样。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

26 武力在转移方面

摘要

因为在前章中, 我们已经研究了以强度为意义计算流离失所的方法。(灵活性/力量方法的本质) 这个章节会做相反的。我们将努力在已知的流离失所方面确定力量。这反过来是坚固性/位移方法的本质。此覆盖仅为随后的手动计算覆盖提供准备。(挠度 和时刻分布为灵活的 单元 仅) 其次, 基于计算机的分析 (直接刚度法) 复杂的结构。本章仅限于灵活, 对于 *Shear* 和 扭转, 读者应该查看章节 *23*.

26.1 引入 878
26.1.1 签约 878
26.1.2 分析方法 879
26.2 Axial Deformations 轴形变形 880
26.3 灵活 880
26.3.1 差异方程式 880
26.3.2 Nodal 终端力量为初步的压力 883
26.3.3 诺达等级力量为单元的灵活性 884

26.1 引入

1 我们记得从 §40.8 结构分析 是一个 边值问题 在那里有力量和转移之间的双重性。一个是已知的, 然后我们试图通过适当的分析来确定另一个。

2 到目前为止, 我们一直在行动。Γ_t (图 40.8) 在那里, 力量是已知的, 我们试图确定流离失所。柔度法 也被称为 **力量方法**.

3 现在, 为了这个章节, 我们将继续工作。Γ_u 在哪里有流离失所, 我们将寻找相应的力量。(满足 平衡 , 这将导致已知的转移).

4 这对我们来说是一个重要的步骤。**随后** 开发强度方法, 这是对已讨论的灵活性/力量方法的补充之一。26.1.

表 26.1: 密度 vs 灵活性方法

	灵活性	**精力**
主要变量 (二、f。)	力量	转移
不可确定性	静态	电影
强度位移	位移 (力量)/ 结构	力量 (位移)/单元
管理关系	变形协调 或 位移	平衡

26.1.1 签约

5 虽然柔度法有任意选择的信号协议, 但图 21.5, 与硬度方法相关的, 是符合本地单元协调系统。因此, 我们将一个积极的时刻定义为对手时钟的时光。26.1.

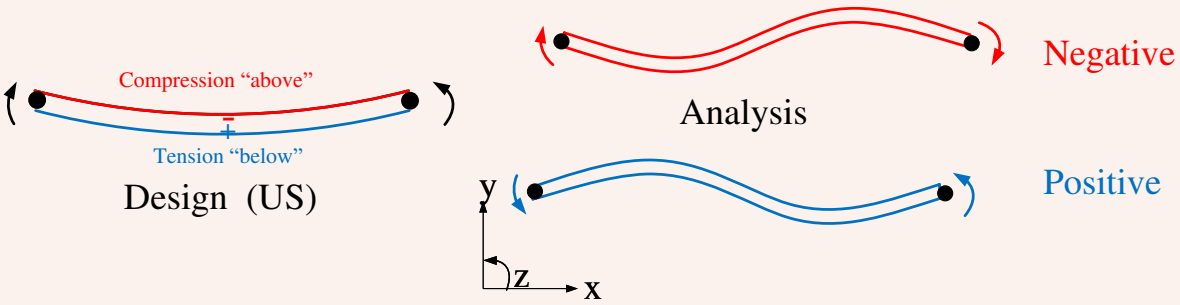


图 26.1: 签署对固态方法的协议

26.1.2 分析方法

6 本章节提供介绍的概念, 将适用于硬度方法。基于这种方法, 有三种方法:

挠度 插槽: (莫克,1892 年) n 线性方程式与 n 不知道, 在哪里 n 是 kinematic indeterminance 的程度 (即独立迁移的总数/转角).

瞬间分配: (十字路口 1930) 以色列的方法解决问题 n 移动和相应的内部力量在灵活结构。

直接刚度法: (≃1960) 硬度方法的正式陈述, 并以矩阵形式投放, 是结构分析的最强大方法。

第一兩種方法借用自己手計算 (章节 27) 第三个是基于计算机的分析。(广泛覆盖的部分 39 通过多个章节).

7 在所有的坚固方法中, 我们将需要优先于自己。**之前** 我们开始分析, 以已知的位移的意义上的力量平衡。

8 值得注意的是, 灵活性和坚固性方法在不同层次上运行, 并寻找不同的未知, 图 26.2.

表 26.2: 密度与灵活性分析

方法	水平	分析
灵活性	结构	转移在力量方面
精力	单元	以 位移 的意义上的力量

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

26.2 Axial Deformations 轴形变形

9 從 材料力学:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \underbrace{A\sigma}_{P} = \frac{AE}{L}\underbrace{\Delta}_{1} \tag{26.1}$$

10 对于一个单位 位移, 应用的强度应等于 $\frac{AE}{L}$.

11 从静态, 另一端的力量必须平等和相反。

26.3 灵活

12 目标: 解决 **在已知的流离失所方面** 在一个梁: 四个未知的力量 ($V_1^?, V_2^?, M_1^?$ 和 $M_2^?$) 四个已知的转移 ($v_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_1^\checkmark$ 和 $\theta_2^\checkmark$), 图 26.2.

$$\begin{aligned} V_1^? &= V_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\ M_1^? &= M_1^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\ V_2^? &= V_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \\ M_2^? &= M_2^?(v_1^\checkmark, \theta_1^\checkmark, v_2^\checkmark, \theta_2^\checkmark) \end{aligned}$$

有四个未知, 我们将需要四个方程式, 两个将由 **二、线性差异方程式** 政府的灵活性, 以及两 **兩個方程式 平衡**.

26.3.1 差异方程式

13 开始与

$$M = \underbrace{-EI\frac{d^2v}{dx^2}}_{\text{Diff Eq.}} = \underbrace{M_1^? - V_1^? x + m(x)}_{\text{Statics}}$$

哪里 $m(x)$ 是由于应用 荷载 的时刻 $q(x)$ 在部分 x (以 分布荷载 相同的方式: $m(x) = -\frac{1}{2}wx^2$). 整合两次

$$\begin{aligned} -EIv' &= M_1^? x - \frac{1}{2}V_1^? x^2 + f(x) + C_1 \\ -EIv &= \frac{1}{2}M_1^? x^2 - \frac{1}{6}V_1^? x^3 + g(x) + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

哪里 $f(x) = \int m(x)dx$, 和 $g(x) = \int f(x)dx$. 使用限制条件在 $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} v' &= \theta_1^\checkmark \\ v &= v_1^\checkmark \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} C_1 &= -EI\theta_1^\checkmark \\ C_2 &= -EIv_1^\checkmark \end{aligned}\right.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

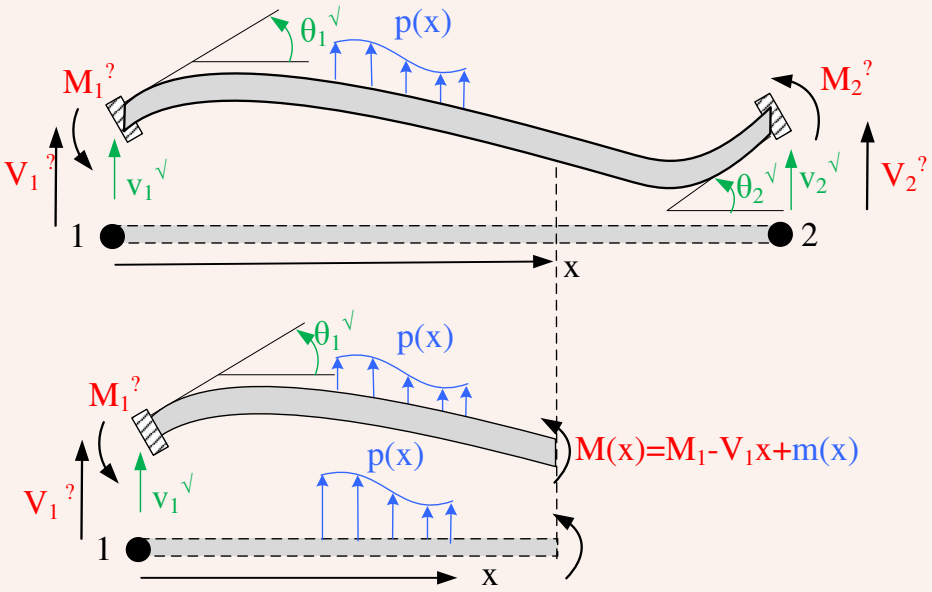


图 26.2: 灵活问题 表述 为固度条件

然后在 $x = L$ 与此相结合 C_1 和 C_2

$$\left.\begin{array}{rl} v' & = \theta_2^{\checkmark} \\ v & = v_2^{\checkmark} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} -EI\theta_2^{\checkmark} & = M_1^? L - \frac{1}{2}V_1^? L^2 + f(L) - EI\theta_1^{\checkmark} \\ -EIv_2^{\checkmark} & = \frac{1}{2}M_1^? L^2 - \frac{1}{6}V_1^? L^3 + g(L) - EI\theta_1^{\checkmark} L - EIv_1^{\checkmark} \end{array}\right. \tag{26.2}$$

雖然我們可以解决 $M_1^?$ 和 $V_1^?$ 至于 $v_1^{\checkmark}, v_2^{\checkmark}, \theta_1^{\checkmark}$ 和 $\theta_2^{\checkmark}$ 我们继续与

14 從 平衡 ,

$$V_1^? + q + V_2^? = 0 \qquad M_1^? - V_1^? L + m(L) + M_2^? = 0$$

哪里 $q = \int_0^L w(x)dx$,

15 这样

$$V_1^? = \frac{(M_1^? + M_2^?)}{L} + \frac{1}{L}m(L) \qquad V_2^? = -(V_1^? + q) \tag{26.3}$$

16 替代 V_1 进入 θ_2 和 v_2 (Eq. 26.2)

$$\left\{\begin{array}{rl} M_1^? - M_2^? & = \frac{2EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} + \frac{2EI_z}{L}\theta_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{2}{L}f(L) \\ 2M_1^? - M_2^? & = \frac{6EI_z}{L}\theta_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_1^{\checkmark} - \frac{6EI_z}{L^2}v_2^{\checkmark} + m(L) - \frac{6}{L^2}g(L) \end{array}\right.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

17 解决的时刻

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II} \tag{26.4}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II} \tag{26.5}$$

哪里在 EQ。26.4 和 26.5 如果我们允许 $\Delta = v_2 - v_1$ (**相對的 位移**), $\psi = \Delta/L$ (**转角 会员编号**), 和 $K = I/L$ (**强度因素** [1]) NEF **节点等级力量** , 即我们将元素负载替换为同等的节点力量集。

18 最后, 这些方程式可以重写为:

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + NEF_1 \tag{26.6}$$

$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + NEF_2 \tag{26.7}$$

請注意這 ψ 如果是反时, 会是积极的, 否则会是负面的。

19 来自 EQ。26.6 和 26.7, 如果一个节点有 位移 Δ 然后, **两者** 接近的单元时刻将具有相同的信号。然而, 在每个节点侧的单元时刻都会有不同的迹象。

$$\Psi_{21} = \frac{v_2 - v_1}{2}$$

$$K = \frac{I}{L} \text{ Relative stiffness}$$

$$NEF_1 = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$

$$NEF_2 = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$

20 NEF_1 和 NEF_2 是的, **固定终点时刻** 为 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 和 $v_1 = v_2 = 0$. 他们将分开发作。§26.3.3. 对于最常见的 荷载 类型, 它们在表中显示 26.3.

表 26.3: Nodal 相当于简单负载的力量

荷载	NEF_1	NEF_2
单身 荷载 w	$\frac{wL^2}{12}$	$-\frac{wL^2}{12}$
中心点 荷载	$\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$

[1] K 将被定义为 $K = 4EI/L$ 在目前的分配方法, 并作为矩阵在直接刚度法.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

21 在 EQ。26.4 和 26.5 我們看到發展的時刻一位成员的结局是由:I) 转角和移行; 以及 II) 固定终端成员。

22 我们可以用 Eq 来替换这些表达式。26.3 以此为主, 以此為主。

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II} \tag{26.8}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II} \tag{26.9}$$

哪里

$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\left[\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] + q\right]$$

23 值得注意的是, 衍生方程式是基于: **平衡**, **应力-应变**, 和 **变形协调**.

定义 26.1: 强度位移关系在一个梁

$$V_1 = \underbrace{\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_1^F}_{II}$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{6EI_z}{L^2}\left(\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) + \frac{12EI_z}{L^3}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{V_2^F}_{II}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(2\theta_1^{\checkmark} + \theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{12}}_{II}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI_z}{L}\left(\theta_1^{\checkmark} + 2\theta_2^{\checkmark}\right) - \frac{6EI_z}{L^2}\left(v_2^{\checkmark} - v_1^{\checkmark}\right)}_{I} + \underbrace{NEF_{21}}_{II}$$

26.3.2 Nodal 终端力量为初步的压力

24 在存在的 **热** **荷载** (或初步的压力), 节点等级力量可以轻松地确定如下:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

信任

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T$$

梁

$$F_1^T = -AE\alpha\Delta T^{avg}; \qquad F_2^T = AE\alpha\Delta T^{avg}$$
$$M_1^T = \frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}; \qquad M_2^T = -\frac{EI\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})}{h}$$

哪里 α 是热扩张的比例和

$$T^{avg} = \frac{\Delta T^{top} + \Delta T^{bot}}{2}$$

25 初步力量 (如如 **受压的成员**) 需要简单地说明 $\alpha\Delta T$ 对于初始 应变 由前压引发的

26 在 荷载 输入数据文件中, 只需要指定 $\alpha\Delta T$ 对于热充电的桁架, 以及 $\alpha(\Delta T^{top} - \Delta T^{bot})$ 和 h 对于 BAM。

26.3.3 诺达等级力量为单元的灵活性

27 從前的方程式,

$$m(x) = \text{外荷载在截面处产生的弯矩 } x$$
$$f(x) = \int m(x)dx; \quad g(x) = \int f(x)dx; \quad q(x) = \int p(x)dx$$
$$\text{total load on the span}$$

和

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[Lf(L) - 3g(L)\right]$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2 m(L) - 4Lf(L) + 6g(L)\right]$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right]$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[Lf(L) - 2g(L)\right] - q$$

26.3.3.1 均匀分布的货物

28 单一的分布荷载 w 在整个广场上,

$$m(x) = -\frac{1}{2}wx^2; \quad f(x) = -\frac{1}{6}wx^3; \quad g(x) = -\frac{1}{24}wx^4; \quad q = wL$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29 替代

$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 3\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2\left(-\frac{1}{2}wL^2\right) - 4L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) + 6\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL^2}{12}$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] = \frac{wL}{2}$$
$$V_2^F = -\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{6}wL^3\right) - 2\left(-\frac{1}{24}wL^4\right)\right] - wL = \frac{wL}{2}$$

26.3.3.2 集中负载

30 使用单位步骤函数找到 $m(x)$. 为一個 集中荷载 P 行动在 a 从左手的结尾与 $b = L - a$,

$$\begin{aligned} m(x) &= -P(x-a)H_a && \rightarrow m(L) = -Pb \\ f(x) &= -\frac{1}{2}P(x-a)^2H_a && \rightarrow f(L) = -\frac{1}{2}Pb^2 \\ g(x) &= -\frac{1}{6}P(x-a)^3H_a && \rightarrow g(L) = -\frac{1}{6}Pb^3 \end{aligned}$$

我们在哪里定义 $H_a = 0$ if $x < a$, 和 $H_a = 1$ if $x \geq a$, 和

$$q = P$$
$$M_1^F = \frac{2}{L^2}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 3\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb^2a}{L^2}$$
$$M_2^F = -\frac{1}{L^2}\left[L^2(-Pb) - 4L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) + 6\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = \frac{Pb}{1^2}\left(L^2 - 2Lb + b^2\right) = \frac{Pba^2}{L^2}$$
$$V_1^F = \frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] = -\frac{Pb^2}{L^3}(3L - 2b) = \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$$
$$V_2^F = -\left(\frac{6}{L^3}\left[L\left(-\frac{1}{2}Pb^2\right) - 2\left(-\frac{1}{6}Pb^3\right)\right] + P\right) = \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$$

31 如果 荷载 在中间使用 $(a = B = L/2)$ 此后, 前方程式将减少到

$$M_1^F = -\frac{PL}{8}; \qquad M_2^F = \frac{PL}{8};$$
$$V_1^F = -\frac{P}{2}; \qquad V_2^F = -\frac{P}{2};$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



迪斯科布鲁斯 (五世纪公元前, 古希腊)

抓住一个身体在紧张的顶峰, 在那里移动决定了投射磁盘所需的力量。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

27 手中的坚固

摘要

根基于位移方法 (二、坚固性), 是 20 世纪初开发的两种方法, 并为手工计算提供借款。这些方法似乎是 "祖父" 到目前为止, 在结构分析文本中, 虽然它们在现代时代更具有教学价值。然而, 本章节将突出某些概念。(如分配时刻, 基于相对紧密的连接), 有时可以为简单的结构提供分析方法。两种方法都限于灵活的成员。最后一部分将数学对手转向 *Slope*-挠度的解决方案 (加斯 - 约旦) 瞬间分配 (盖斯 · 塞德尔) 方法。

27.1 引入 887
27.2 挠度; 直接解决方案 887
27.2.1 例子 889
27.3 瞬间分配 897
27.3.1 引入 897
27.4 Slope 挠度; 瞬间分配; Gauss-Seidel . 902
27.4.1 例题 27.8: Slope 挠度 / 瞬间分配 / Gauss-Seidel 903

27.1 引入

1 上一章为坚固工作奠定了基础 (位移) 方法是通过在众所周知的流动性成员方面发展力量关系。对 Shear 和 扭转 的同等关系在章节中开发 23.

2 因为灵活性 (力量) 方法借自在手计算, 硬度方法出现在两种类型: 手计算和通过计算机程序自动化 (直接刚度法, 章节 44).

3 因此, 本章将涵盖传统的手动计算方法: Slope 挠度 和 Moment Distribution。

27.2 挠度; 直接解决方案

有关历史背景，请参见 §??

4 该方法由 Bendixen, 1914 由精致的 Maney, 1915 (§11.5.2)

5 该方法首先通过图描述。27.1 在那里, 一个简单支持的梁是静态不确定到第一级。

我们确定了电影不定义的程度 (§40.5) 三个旋转 θ_1, θ_2, 和 θ_3 (伊。*3* **自由度**) 在支持中。

6 分裂结构在各侧的限制, 我们绘制自由体图表并假设 **积极的** 每一部分结束时刻。时刻可以以未知旋转的角度表达。

7 使用方程式 26.6 和 26.7 我们获得

$$\begin{aligned} M_{12} &= 2EK_{12}(2\theta_1+\theta_2)+FEM_{12}; & M_{21} &= 2EK_{12}(\theta_1+2\theta_2)+FEM_{21};\\ M_{23} &= 2EK_{23}(2\theta_2+\theta_3); & M_{32} &= 2EK_{23}(\theta_2+2\theta_3); \end{aligned} \tag{27.1}$$

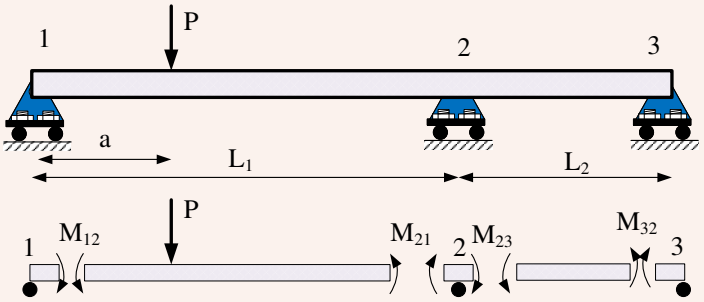


图 27.1: 象征性的例子为挠度方法

记住这 $K = I/L$.

8 3 不知不觉 θ_1, θ_2, 和 θ_3 我们需要三个方程式的平衡 [1]. 我们写一 **每個 支座 的 平衡 方程式**

$$\begin{aligned} M_{12} &= 0 \\ M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} &= 0 \end{aligned}$$

取代, 我们得到了:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 4K_{12} & 2K_{12} & 0 \\ 2K_{12} & 4(K_{12}+K_{23}) & 2K_{23} \\ 0 & 2K_{23} & 4K_{23} \end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{F_{int}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{FEM_{12}}{2EK_{12}} \\ -\frac{FEM_{21}}{2E} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{F_{ext}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

固定终点可以单独确定。这是一个方程式 **全球 平衡**.

9 首先, 我们解决了转移, 然后在 Eq 中取代。27.1 要确定每个端的梁分区时刻。

10 计算要求远低于 柔度法 (或一贯的歪曲方法) 因为我们 implicitly 负责的力量 位移 关系。(虽然我们正在比较静态和电影无知).

[1] 与三分钟平衡方法相同的笔记 (§25.3) 在这里, 我们写了一个变形协调的转角方程式在节点上, 而在这里我们写一个平衡方程。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

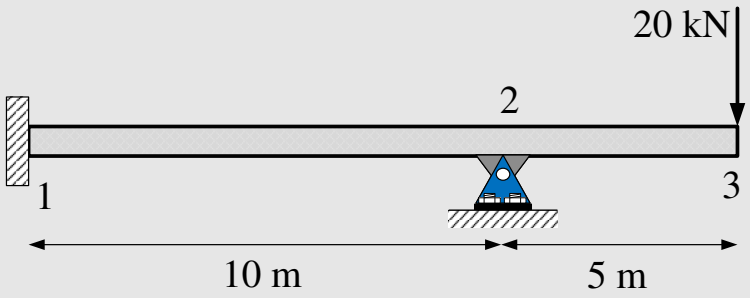
定义 27.1: 挠度 方法

1. 切尔西的形状。
2. 识别未知的支持自由度 (旋转和脱落).
3. 写下 平衡 方程式在所有支持的结尾时刻。
4. 以 支座 旋转、偏差和固定终点时刻表达结局时刻。
5. 在 平衡 方程式中取代前一步所获得的表达式。
6. 解决 平衡 方程式, 以確定未知的 支座 转角 和/或缺陷。
7. 使用插槽 挠度 方程式来确定终点。
8. 创建时刻图, (注意签名协议中的差异) 列表 挠度 时刻和时刻图之间。

27.2.1 例子

27.2.1.1 例题 27.1: 彩色 梁

我们要确定 M_{12} 為下一個 梁



1. 梁 是 kinematically indeterminate 到第三级 (θ_2, Δ_3, θ_3) 但是, 通过在 支座 2 中以 +100 kN.m 的固定终点替换过渡时, 我们将 kinematic indeterminacy 的程度减少到 1 (θ_2).
2. 平衡的关系是 $M_{21} + M_{23} = 0$ 或 $M_{21} + 100 = 0$
3. 成员在旋转方面结束时刻是 (Eq. 26.6 和 26.7)

$$M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 + 2\theta_2) = \frac{4}{10}EI\theta_2 \text{ Solve for } \theta_2$$

$$M_{12} = 2EK_{12}(2\theta_1 + \theta_2) = \frac{2}{10}EI\theta_2 \text{ Solve for the end moment}$$

4. 取代到 平衡 方程式, 解决 θ_2.

$$\theta_2 = \frac{10}{4EI}M_{21}$$
$$= \frac{10}{4EI}(-100) = -\frac{250}{EI}$$

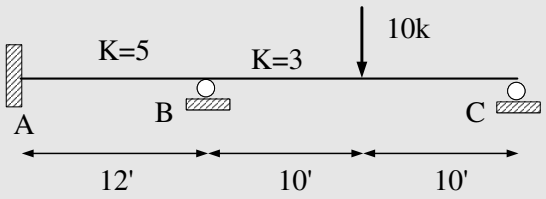
(时钟尺寸 转角: -ve)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 取代和解决 M_{12}

$$M_{12} = \frac{2}{10}EI\theta_2 = -\frac{2}{10}EI\frac{250}{EI} = -50 \text{ kN.m}$$

27.2.1.2 例题 27.2: 连续 梁



1. 五 $=PL/8 = (10)(20)/8 = 25$
2. 平衡的方程式

$$M_{BA} + M_{BC} = 0; \quad M_{CB} = 0$$

3. 瞬间表达

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\theta_B = 2EK_{AB}\theta_B = 10E\theta_B$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_A) = 4EK_{AB}\theta_B = 20E\theta_B$$
$$M_{BC} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_C) + 25 = 4EK_{BC}\theta_B + 2EK_{BC}\theta_C + 25 = 12E\theta_B + 6E\theta_C + 25$$
$$M_{CB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_C + \theta_B) - 25 = 4EK_{BC}\theta_C + 2EK_{BC}\theta_B - 25 = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25$$

4. 平衡 方程式中的替代

$$\begin{cases} 32E\theta_B + 6E\theta_C = -25 \\ 6E\theta_B + 12E\theta_C = 25 \end{cases}$$

5. 解决

$$\theta_B = -\frac{75}{58E} = -\frac{1.293}{E}$$
$$\theta_C = -\frac{475}{174E} = \frac{2.730}{E}$$

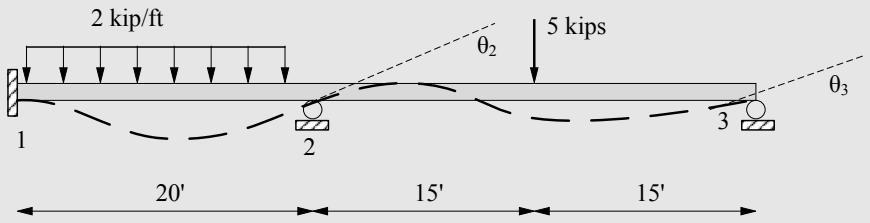
6. 取代以获得时刻

$$M_{AB} = 10E\theta_B = -10E\frac{75}{58E} = -12.9310$$
$$M_{BA} = 20E\theta_B = -20E\frac{75}{58E} = -25.8621$$
$$M_{BC} = 12E\theta_B + 6E\theta_c + 25 = -12E\frac{75}{58E} + 6E\frac{475}{174E} + 25 = 25.8621$$
$$M_{CB} = 6E\theta_B + 12E\theta_C - 25 = -6E\frac{75}{58E} + 12\frac{475}{174E} - 25 = 0\checkmark$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

27.2.1.3 例题 27.3: 双间 梁

我们试图绘制下面的梁的时刻图



1. 未知者是 θ_2, 和 θ_3
2. 平衡的关系是 $M_{21}+M_{23}=0$ 和 $M_{32}=0$
3. 固定终点时刻是

$$FEM_{12}=-FEM_{21}=\frac{wL^2}{12}=\frac{(2)(20)^2}{12}=66.67 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{23}=-FEM_{32}=-\frac{PL}{8}=\frac{(5)(30)}{8}=18.75 \text{ k.ft}$$

4. 成员在旋转方面结束时刻是 (Eq. 26.6 和 26.7)

$$\begin{aligned}
M_{12}&=2EK_{12}(\theta_2)+FEM_{12}=\frac{2EI}{L_1}\theta_2+FEM_{12} &&=\frac{EI}{10}\theta_2+66.67 \text{ Not used}\\
M_{21}&=2EK_{12}(2\theta_2)+FEM_{21}=\frac{4EI}{L_1}\theta_2+FEM_{21} &&=\frac{EI}{5}\theta_2-66.67\\
M_{23}&=2EK_{23}(2\theta_2+\theta_3)+FEM_{23}=\frac{2EI}{L_2}(2\theta_2+\theta_3)+FEM_{23} &&=\frac{EI}{7.5}\theta_2+\frac{EI}{15}\theta_3+18.75\\
M_{32}&=2EK_{23}(\theta_2+2\theta_3)+FEM_{32}=\frac{2EI}{L_2}(\theta_2+2\theta_3)+FEM_{32} &&=\frac{EI}{15}\theta_2+\frac{EI}{7.5}\theta_3-18.75
\end{aligned}$$

5. 取代 平衡 方程式

$$\frac{EI}{5}\theta_2-66.67+\frac{EI}{7.5}\theta_2+\frac{EI}{15}\theta_3+18.75=0$$
$$\frac{EI}{15}\theta_2+\frac{EI}{7.5}\theta_3-18.75=0$$

或

$$\underbrace{EI\begin{bmatrix}5&1\\1&2\end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}}\underbrace{\begin{Bmatrix}\theta_2\\\theta_3\end{Bmatrix}}_{\text{Internal Force}}-\underbrace{\begin{Bmatrix}718.8\\281.25\end{Bmatrix}}_{\text{External Force}}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

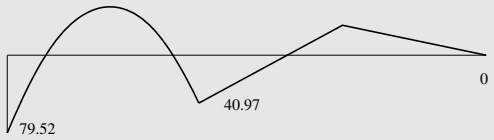
谁会给 $EI\theta_2=128.48$ 和 $EI\theta_3=76.38$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

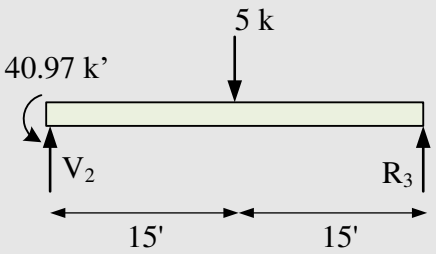
6. 回归时刻的替代

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{128.48}{10} + 66.67 && = 79.52 \text{ k.ft} \\
M_{21} &= \frac{128.48}{5} - 66.67 && = -40.97 \text{ k.ft} \\
M_{23} &= \frac{128.48}{7.5} + \frac{76.38}{15} + 18.75 && = 40.97 \text{ k.ft} \checkmark \\
M_{32} &= \frac{128.48}{15} + \frac{76.38}{7.5} - 18.75 && = 0 \text{ k.ft} \checkmark
\end{aligned}
$$

注意, 过去两个方程式是写的只是为了检查我们的计算。

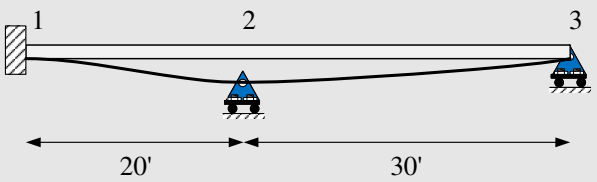


7. 我们注意到, 中间时刻必须分开。從 平衡 的方程式計算, 以完成圖表。
8. 反力在 3 是从静态中获得的



$$
\begin{aligned}
15(5) - 30R_3 - 40.97 = 0 \Rightarrow R_3 &= 1.134 \\
V_2 = 5 - 1.134 &= 3.77
\end{aligned}
$$

27.2.1.4 例题 27.4: 双螺旋 梁, 初始 挠度



1. 由于我们正在进行线性弹性分析, 所以我们可以单独分析 梁 为 支座 设置, 然后添加时刻到那些由于应用的负载。
2. 未知者是 θ_2, 和 θ_3

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 平衡的关系是 $M_{21}+M_{23}=0$ 和 $M_{32}=0$
4. 成员在旋转方面结束时刻是 (Eq. 26.6 和 26.7)

$$\begin{aligned}
M_{12} &= 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{10}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{21} &= 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\left(2\theta_2 + 3\frac{0.5}{20}\right)\\
&= \frac{EI}{5}\theta_2 + \frac{3EI}{400}\\
M_{23} &= 2EK_{23}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{7.5}\theta_2 + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300}\\
M_{32} &= 2EK_{23}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{0.5}{30}\right)\\
&= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{EI}{300}
\end{aligned}$$

5. 取代 平衡 方程式

$$\begin{aligned}
\frac{EI}{5}EI\theta_2 + \frac{3EI}{400} + \frac{EI}{15}\theta_3 + \frac{EI}{300} &= 0\\
\frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\theta_3 + \frac{5EI}{300} &= 0
\end{aligned}$$

或

$$\underbrace{\underbrace{EI\begin{bmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}}\begin{Bmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{Bmatrix}}_{\text{Internal Force}} - \underbrace{EI\begin{Bmatrix}-\frac{13}{4}\\ -1\end{Bmatrix}}_{\text{External Force}} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

谁会给 $\theta_2 = -\frac{5.5}{180} = -0.031$ radians 和 $\theta_3 = \frac{-1+\frac{5.5}{9}}{40} = -0.0097$ radians

6. 因此, 该 额外 由于安排的时刻,

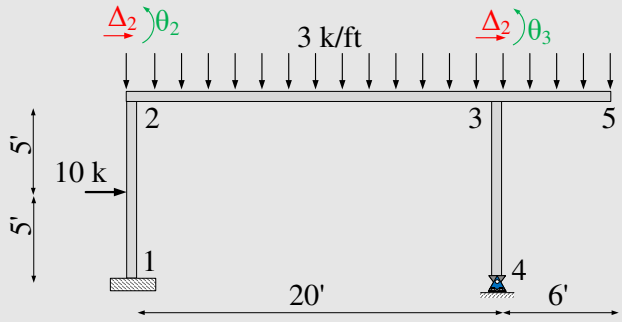
$$\begin{aligned}
M_{12} &= \frac{EI}{10}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0044EI\\
M_{21} &= \frac{EI}{5}(-0.031) + \frac{3EI}{400} = 0.0013EI\\
M_{23} &= \frac{EI}{7.5}(-0.031) + \frac{EI}{15}(-0.0097) + \frac{EI}{300} = -0.0013EI\checkmark\\
M_{32} &= \frac{EI}{15}\theta_2 + \frac{EI}{7.5}(0.0097) + \frac{EI}{300} = 0.\checkmark
\end{aligned}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

27.2.1.5 例题 27.5: 框架

确定下一个 框架 的终点时刻 $I = 60\ \text{in}^4$ 对于垂直成员和 $24\ \text{in}^4$ 至于水平的。



1. 五十五条的效应可以通过替换其最后一刻。

$$M_3 = -wL\frac{L}{2} = -(3)(6)(3) = -54\ \text{k.ft}$$

2. 未知的转移和旋转是

   - Δ_2 和 θ_2 共 2。
   - θ_3 和 θ_4 附件 3 和 4。

   我们观察到, 由于缺乏对称性, 将有一个侧 位移在框架中, 并忽略了轴形变异, $\Delta_2 = \Delta_3$.

3. 平衡的关系是

$$\begin{aligned} M_{21} + M_{23} &= 0 \\ M_{32} + M_{34} &= -54 \\ M_{43} &= 0 \\ V_{12} + V_{43} - 10 &= 0 \end{aligned}$$

   因此, 我们有四个未知的转移和四个方程式。然而, 最后一兩個方程式是關於相关术语的力量, 我們必須在最后的时刻, 可以通过以下平衡实现。关系

$$\begin{aligned} V_{12} &= \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}} \\ V_{43} &= \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}} \end{aligned}$$

   因此, 所有四个方程式都现在在瞬间的角度。

4. 第 23 章 最后的结局

$$\begin{aligned} M_{21}^F &= -\frac{PL}{8} = -\frac{-(10)(10)}{8} = 12.5\ \text{k.ft} \\ M_{23}^F &= -\frac{wL^2}{12} = -\frac{-(3)(20)^2}{12} = 100\ \text{k.ft} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 成员在旋转方面结束时刻是 (Eq. 26.6 和 26.7)

$$
\begin{aligned}
M_{12} &= 2EK_{12}\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12}^F = 0.2EI(\theta_2 - 0.3\Delta_2) + 12.5\\
M_{21} &= 2EK_{12}\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{21}}\right) + M_{21}^F = 0.2EI(2\theta_2 - 0.3\Delta_2) - 12.5\\
M_{23} &= 2EK_{23}\,(2\theta_2 + \theta_3) + M_{23}^F = 0.1EI(2\theta_2 + \theta_3) + 100.\\
M_{32} &= 2EK_{32}\,(\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32}^F = 0.1EI(\theta_2 + 2\theta_3) - 100.\\
M_{34} &= 2EK_{34}\left(2\theta_3 + \theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2)\\
M_{43} &= 2EK_{43}\left(\theta_3 + 2\theta_4 - \frac{3\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2)
\end{aligned}
$$

6. 替换到 平衡 方程式, 并分为 EI

$$
\begin{aligned}
6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 &= -\frac{875}{EI}\\
\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 &= \frac{460}{EI}\\
\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 &= 0
\end{aligned}
$$

最后的 平衡方程 是通过取代 V_{12} 和 V_{43} 以多元化为 $10/EI$:

$$
\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = -\frac{83.3}{EI}
$$

或

$$
\underbrace{EI\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6\\ 1 & 6 & 2 & -0.6\\ 0 & 1 & 2 & -0.3\\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{bmatrix}}_{\text{Stiffness Matrix}}
\begin{Bmatrix} \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\\ \Delta_2 \end{Bmatrix}
= \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -875\\ 460\\ 0\\ -83.3 \end{Bmatrix}
$$

谁会给

$$
\begin{Bmatrix} \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\\ \Delta_2 \end{Bmatrix}
= \frac{1}{EI}\begin{Bmatrix} -294.8\\ 68.4\\ -240.6\\ -1,375.7 \end{Bmatrix}
$$

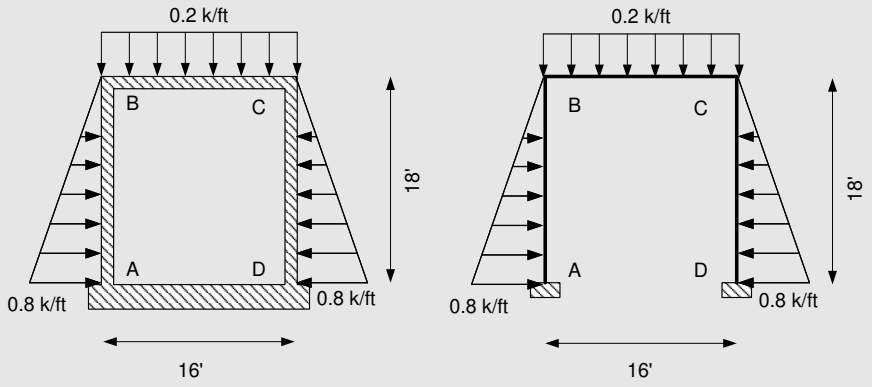
7. 交换到插槽 挠度 方程式给了终点

$$
\begin{Bmatrix} M_{12}\\ M_{21}\\ M_{23}\\ M_{32}\\ M_{34}\\ M_{43} \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} 36.0\\ -47.88\\ 47.88\\ -115.80\\ 61.78\\ 0 \end{Bmatrix}
$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

27.2.1.6 例题 27.6: 彩色盒子



1. 從同義 $\theta_B = -\theta_C$ 在基地上, $\theta_A = \theta_D = 0$ 因此, 只有一个未知的 (没有侧 位移, 没有相对垂直位移).
2. 固定终点时刻由

$$FEM_{BC} = \frac{wL^2}{12} = \frac{(0.2)(16)^2}{12} = 4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{CB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{(0.2)(16)^2}{12} = -4.267 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{AB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{(0.8)(18)^2}{20} = 12.96 \text{ k.ft}$$
$$FEM_{BA} = \frac{wL^2}{30} = \frac{(0.8)(18)^2}{30} = -8.64 \text{ k.ft}$$

3. 时刻是由

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16}(2\theta_B + \underbrace{\theta_C}_{-\theta_B}) + 4.267 = \frac{EI}{8}\theta_B + 4.267$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}(2\theta_B + 0) - 8.64 = \frac{2EI}{9}\theta_B - 8.64$$
$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}(\theta_B) + 12.96$$

4. 平衡 在 合 B

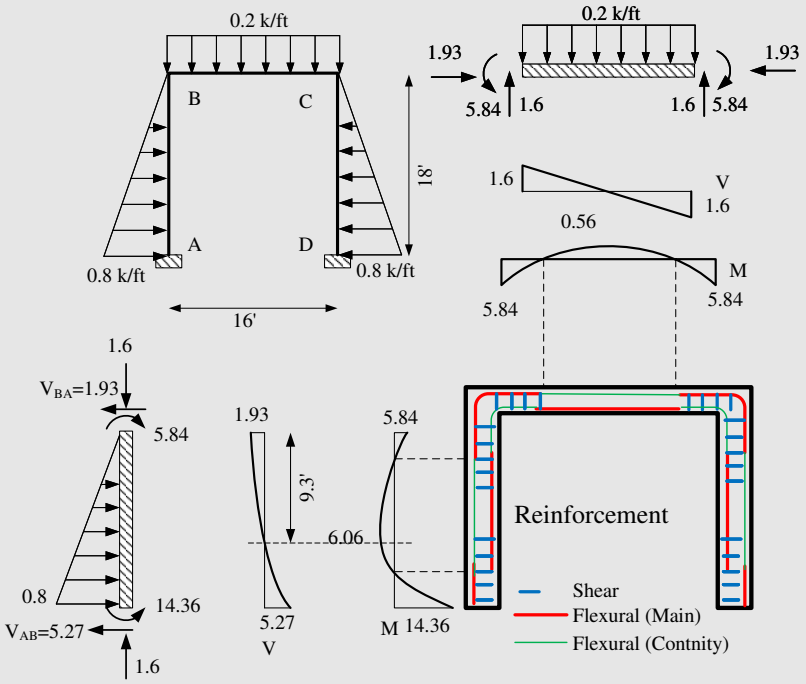
$$\begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ \tfrac{2EI}{9}\theta_B - 8.64 + \tfrac{EI}{8}\theta_B + 4.267 &= 0 \\ \theta_B &= -\tfrac{12.61}{EI} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 替代 θ_B 为了获得时刻

$$M_{BC} = \frac{EI}{8}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 4.266 = 5.84 \text{ k.ft}$$
$$M_{AB} = \frac{EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) + 12.96 = 14.36 \text{ k.ft}$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{9}\left(\frac{12.61}{EI}\right) - 8.64 = -5.84 \text{ k.ft}$$

6. 会员力量是由静态来定义的。要小心，现在的图表是基于所谓的“设计”签约。



27.3 瞬间分配

有关历史背景，请参见 §??

27.3.1 引入

11 在 挠度 方法中，我们必须转换一个 $n \times n$ 矩阵. 当只有滑板规则或机械计算器可用时 (≃ 1030’s) 需要一个简化解决方案。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

12 对于所有实用目的, 时刻分配方法是对挠度一的线条, 加斯-塞德尔是对加斯 - 约旦解决线性方程的方法。我们将用一个矩阵的直接逆转替换一个异常解决方案。

13 物理上, 这意味着**锁** 所有联合 → **解锁** 以其继承 (一时一刻一) → 内部时刻是 “**分布**” 平衡的 直到所有联盟都转向他们的终结 (或许是最终) 平衡 位置 [2].

14 要更好地了解方法, 首先需要定义一些关键术语, 图 27.2

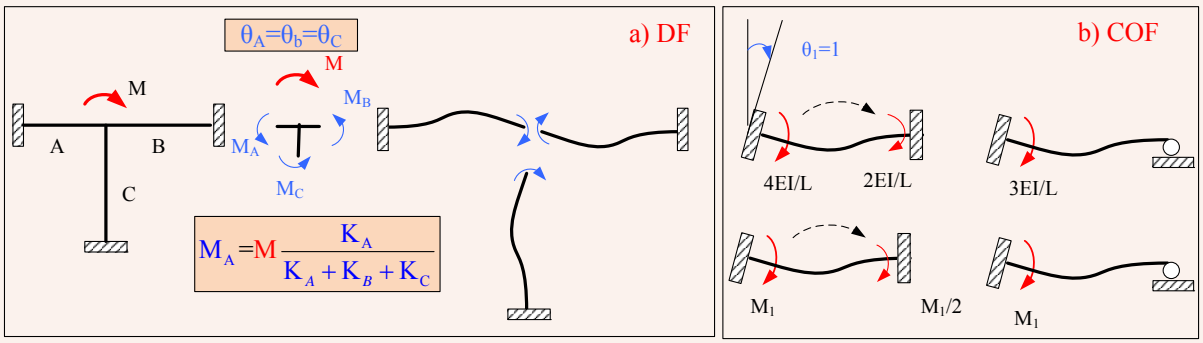


图 27.2: 时刻分布的关键概念

签约

15 标志条约是相同的, 采用了<挠度方法, 反时刻时刻**单元的结局** 是积极的。

固定终点时刻

16 再次固定的终点时刻是同一组力量, 定义在字符串挠度方法为一个梁在两端密切连接。

17 符合信号条约, 固定终点时刻是由应用的荷载在梁结束时引起的时刻。(假设它是严格连接的).

强度因素

18 我们定义了 **强度因素** 如 **所需的时刻旋转一个梁的尽头, 由一个放射线的一个单元角度, 而另一个尽头已固定**. 来自 EQ。26.4 我们设置 $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$, 和 $\theta_1 = 1$ 这将带来

$$K = \frac{4EI}{L} \quad \text{Far End Fixed}$$

19 我们注意到, 这与所定义的定义略有不同。挠度 方法 (I/L).

[2]这是一个 **放松技术** 与南威尔相似 (Southwell, 1935)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

20 如果梁的遥远端是倾斜而不是固定, 那么我们将有一个**减少硬度因素**. 来自 EQ。26.4 和 26.5, 与 $M_2 = v_1 = v_2 = 0$ 我们得到了

$$M_2 = \frac{2EI_z}{L}(\theta_1 + 2\theta_2) = 0$$
$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{\theta_1}{2}$$

替换到 M_1

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2EI_z}{L}(2\theta_1 + \theta_2) \\ \theta_2 &= -\frac{\theta_1}{2} \end{aligned}\right\} M_1 = \frac{3EI}{L}\theta_1 \text{ Far End Pinned}$$

21 相比之下, 这种减少的强度 $\frac{3EI}{L}$ 以其坚固的梁, 我们定义了 **减少硬度因素**

$$\text{Reduced Stiffness Factor} = \frac{K_{red}}{K} = \frac{3}{4} \text{ Far End Pinned}$$

分布因素 (DF)

22 如果一个会员被应用到固定连接组合, 在那里这是一个总的 n 會員, 然後從 平衡:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

但是, 从 eq。26.6, 和 **假设第二个结局会员要固定**然后,

$$M = K_1\theta + K_2\theta + \cdots + K_n\theta$$

或

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i}{\Sigma K_i}$$

23 因此, 如果一瞬间 M 用在一个合并, 然后部分的 M 由此附属的会员所携带的, 是与分布因素。成员越强, 时刻越大带走。

24 同样, $DF = 0$ 以定位的终结, 以及 $DF = 1$ 可用於 支座 的 pin。

超越因素

25 又是 Q。26.6, 和 26.7

$$M_1 = 2EK(2\theta_1 + \theta_2 - 3\psi) + M_1^F$$
$$M_2 = 2EK(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\psi) + M_2^F$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们观察到, 如果一个梁的终端被限制 ($\theta_2 = \psi = 0$), 和没有 荷载 会员, 然后以前的方程式减少到

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 2EK(2\theta_1) \\ M_2 &= 2EK(\theta_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2}M_1$$

26 因此, 在这种情况下, 负载因素代表了 M 这就是 "携带过" 从旋转端到固定端。

$$CO = \frac{1}{2} \text{ Far End Fixed}$$

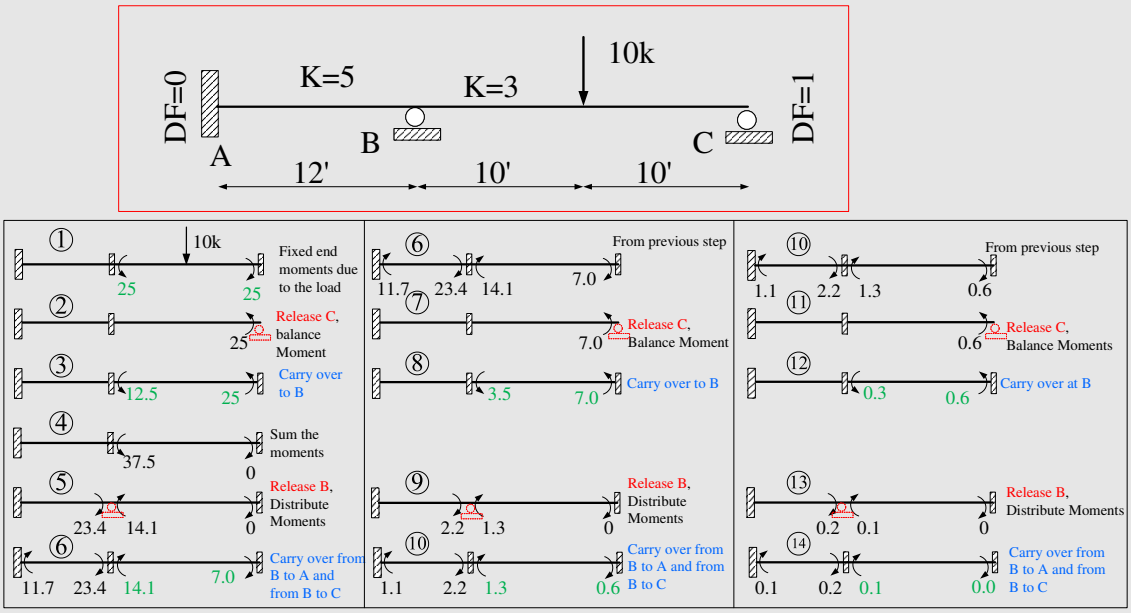
27 如果遥远的终点被打破, 就没有转移。

定义 27.2: 瞬间分配

1. 阻止所有旋转和翻译。
2. 應用 荷载, 並確定固定結束時刻 (可能由 单元 加载或 支座 翻译引起).
3. 在任何合并中 i 平衡 不满意 $M^F_{left} \neq M^F_{right}$ 如今, 网络时刻是 M_i
4. 我们通过在节点上应用 平衡 $-M_i$ 换句话说, 我们 平衡 在节点上的力量。
5. 多少的 M_i 到每个单元连接到节点 i 取决于 分布因素.
6. 但是, 用一份 $-M_i$ 到一个梁的结尾, 而另一个仍然被限制, 从 Eq。26.6 那一刻的一半也必然是 携带过 到另一端。
7. 然后我们关闭点。i 然后继续到 Node。j 这些操作重复的
   (a) 瞬间 Sum
   (b) 平衡时刻
   (c) 分布时刻 (K, DF)
   (d) 穿越时刻 (CO)
   (e) 锁点
8. 重复上述操作, 直到所有节点均衡。金额 每一刻。
9. 以前的操作可以通过适当的表格轻松进行。

27.3.1.1 例题 27.7: 连续 梁

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



1. 为此例子 (此前分析的插槽挠度方法 §27.2.1.2, 固定终点时刻如下计算:

$$M_{BC}^F = \frac{PL}{8} = \frac{(10)(20)}{8} = +25.0 \text{ k.ft}$$
$$M_{CB}^F = -25.0 \text{ k.ft}$$

2. 由于每个区域的相对密度都被给予, 分布因素是

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0,$$
$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5+3} = 0.625,$$
$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5+3} = 0.375,$$
$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1.$$

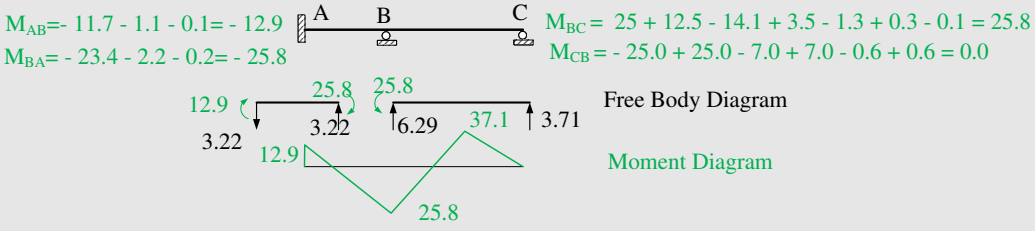
3. 平衡计算显示在下面。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

共同	A		B	C	步骤	芭蕾舞	CO
会员	AB	BA	BC	CB			
K	5	5	3	3			
DF	0	0.625	0.375	1			
五			+25.0	-25.0	①		
			+12.5	+25.0	② ③	C	BC
	-11.7	-23.4	-14.1	-7.0	④ ⑤ ⑥	B	AB;CB
			+3.5	+7.0	⑦ ⑧	C	BC
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6	⑨ ⑩ ❶	B	AB;CB
			+0.3	+0.6	• ❸	C	BC
	-0.1	-0.2	-0.1		❹	B	AB
全集	-12.9	-25.8	+25.8	0			

4. 注意 thawt 我们得到相同的结果, 如从<挠度方法获得的结果 §27.2.1.2.
5. 答案的准确性可以通过验证 $\Sigma M = 0$ 每一个共同点。但是, **尽管最终答案在每个关节中都满足了这个方程式, 但这绝对不是初步固定终点时刻的检查。**. 因此, 这些固定终点时刻在开始平衡操作之前应仔细检查。此外, 有时会发生在平衡中犯下补偿错误, 这些错误不会在检查时显而易见。$\Sigma M = 0$ 每一个共同点。
6. 要绘制最后一页和时刻图, 我们开始用计算的时刻绘制每个梁部分的自由体图, 然后从静态中解决反应:

$$12.9 + 25.8 - 12V_A = 0 \Rightarrow V_A = R_A = 3.22 \text{ k} \downarrow$$
$$V_A + V_B^L = 0 \Rightarrow V_B^L = -3.22 \text{ k} \uparrow$$
$$25.8 + (10)(10) - 20V_B^R = 0 \Rightarrow V_B^R = 6.29 \text{ k} \uparrow$$
$$6.29 + V_C - 10 = 0 \Rightarrow V_C = R_C 3.71 \text{ k} \uparrow$$
$$-V_B^L - V_B^R + R_B = 0 \Rightarrow R_B = 9.51 \text{ k} \uparrow$$
$$\text{Check: } R_A + R_B + R_C - 10 = -3.22 + 9.51 + 3.71 - 10 = 0 \checkmark$$
$$M_{BC}^{+} = (3.71)(10) = 37.1 \text{ k.ft}$$



27.4 Slope 挠度; 瞬间分配; Gauss-Seidel

[28] 我们分析了相同的 梁 按 挠度 路径方法和时刻分配方法, §27.2.1.2 和 §27.3.1.1 相应。第二种方法是异常的, 因此自然地提醒了加斯 - 西德尔解决一个系统线性方程式的方法。(覆盖在 §L.2.3.1).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29 可以很容易地证明,

定义 27.3: 瞬间分销, 折叠 挠度 和 Gauss-Seidel

通过 Gauss-Seidel 方法, 解决与 挠度 路径相关的线性方程式系统, 然后每个步骤都会在瞬间分配方法的方程方式中准确地匹配相应的一个步骤。因此, 两种方法通过相同数量的 iterations 产生相同的最终约定结果。

30 这一点将在下一个例子中显示出来。

27.4.1 例题 27.8: Slope 挠度 / 瞬间分配 / Gauss-Seidel

相同的 梁 被分析为 挠度 方法 (§27.2.1.2) 与分配的时刻 (§27.3.1.1).

1. 现在我们将通过解决 挠度 表述 插槽来重新审视这个问题, 并写下如:

$$E\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 32 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

   现在我们将通过 Gauss-Seidel 的 iterative 方法解决这个问题。与加斯西德尔的分布和时刻分布等式相比。
2. 开始与 $\theta_C = \theta_B = 0$ 然后, 解决了 $\theta_C \rightarrow \theta_B \rightarrow \theta_C \cdots$ 直到接近。
3. 下表总结了每一个 Gauss-Seidel 步骤

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$E\theta_C$	0.0	2.083	2.670	2.724	2.729	2.730
$E\theta_B$	0.0	-1.172	-1.282	-1.292	-1.293	-1.293
M_{AB}	0.0	-11.72	-12.82	-12.92	-12.93	-12.93
M_{BA}	0.0	-23.44	-25.63	-25.84	-25.86	-25.86
M_{BC}	0.0	23.44	25.63	25.84	25.86	25.86
M_{CB}	0.0	-7.03	-0.658	-0.062	-0.006	0.000

4. 事实上, 我们以五个字符串以前所计算的时刻进行了异常恢复。
5. 请注意, 在分配时刻, 我们直接为时刻解决, 而在挠度方法中, 我们首先确定旋转, 然后确定时刻。
6. 终于比较了 **中介** 时刻分配的值与相应的字符串 挠度 方法

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

	方法	$n=1$	$n=2$
M_{AB}	MD	-11.7	-11.7-1.1=-12.8
	SD	-11.7	-12.82
M_{BA}	MD	-23.4	-23.4-2.2=-25.6
	SD	-23.44	-25.63
M_{BC}	MD	25+12.5-14.1=23.4	23.4+3.5-1.3=25.7
	SD	23.44	25.63
M_{CB}	MD	-25.0+25.0-7.0=-7.0	-7.0+7.0-0.6=-0.6
	SD	-7.03	-0.658

显然, 瞬间分布的中间步骤与加斯西德尔的异常方法相匹配。同样的结论, 如果我们开始解决 θ_B.



西格斯桥, 威尼斯 *(1603)*. 安东尼奥 · 康蒂诺

拱 精心曲折, 分发旋转时刻和偏差, 适用于 挠度 滑板和瞬间分布的模拟。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

28 影响线

摘要

影响线提供一种方法, 以确定由一个结构中的移动荷载产生的最大可能的设计反应或内部力量。它们是结构设计的重要组成部分。本章是故意简短的, 补充了荷载定位的早期覆盖。它强调了确定影响线的程序, 并解释了 *Müller-Breslau* 原则及其应用影响线。

28.1 引入 905
28.2 程序 905
28.2.1 例题 28.1: 对一个简单支持的梁的影响线 906
28.2.2 例题 28.2: 簡單支持 梁 與超端 908
28.3 Mü 布雷斯拉夫原则 909
28.3.1 衍生品 909

28.1 引入

1 到目前为止, 荷载已固定, 我们没有区分固定 (死去) 负载和变量负载 (生活). 由于变量/活载可以移动, 一个关键问题是如何在某个点上影响一个反力或内部力量的位置为活载. 因此, 我们介绍了影响线的概念。

定义 28.1: 影响线

一个 影响线 显示如何响应 (如 剪力、弯矩或反力) 在一个结构的特定点上, 当荷载单元在结构中移动时发生变化。

2 这将使荷载的放置更容易, 以最大限度地提高内部力量。(时光, 或瞬间). 数学上, 一个影响线可以被描述为 IL_{ij} 哪里 IL 是利息的数量 (再次, 反力, 剪力或弯矩) 在 自由度 i 由于一个单位 荷载 在 自由度 j.

28.2 程序

3 对于静态定义的结构,IL 将仅由 **直线** 关键普通值之间的分区。

4 在某个位置的剪力的 IL 将包含在该位置的翻译间隔。在这个位置的积极和负面叶力总结相当于团结。

5 除在内部轴承位置外, 剪力 IL 的线路将是关键部分的各侧相同的, 因为弯矩在关键部分中是连续的。

6 同样, 在旋转时刻的 IL 将包含一个单元旋转不持续性, 即旋转瞬间正在进行评估。

审阅稿

7 兩種方法:

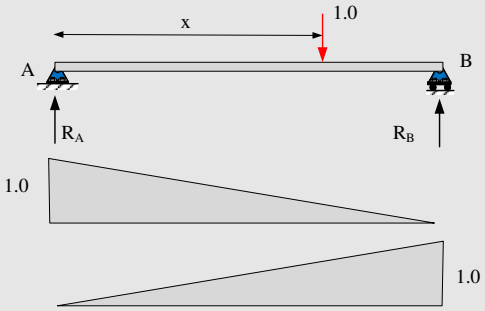
平衡: 写一个方程式的函数被确定, 例如, 方程的叶子, 时刻, 或轴力在某个点引发, 由于应用一个单位荷载在结构上的任何其他位置。

Mü 布雷斯拉夫原则 要绘制与实际 影响线 相对的质量影响线。

28.2.1 例题 28.1: 对一个简单支持的 梁 的影响线

一个重量 1 单位的下向集中负载从 A 到 B 移动, 通过简单支持的泡沫 AB。我们试图为反应制定影响线 A 和 B 至此, 在一瞬间和 C.

反力



平衡

$$\Sigma M_B = 0$$
$$R_A L = 1.(L - x)$$
$$\Rightarrow R_{Ax} = 1 - \frac{x}{L}$$

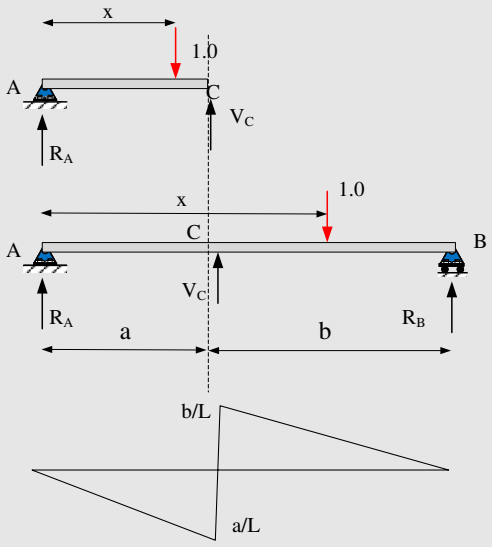
线性方程式在 x 对于反力。同样

$$\Sigma M_A = 0$$
$$R_B L = 1.0x \Rightarrow R_{Bx} = \frac{x}{L}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

谢尔



分区 AC

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow R_A(L) - (L-x)(1) = 0 \Rightarrow R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

V 在 C 由于单位 荷载 在 x (左 C):

$$V_{Cx}^{-} = R_A - 1.0 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) - 1.0 = -\frac{x}{L}$$

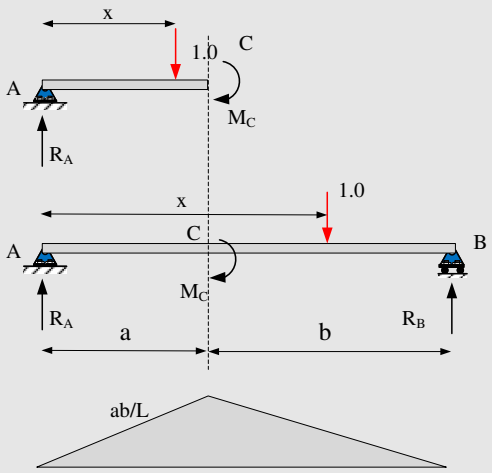
当时 $x = 0, V_{CA} = 0$, 而当 $x = a$ (点前点 C), $V_{CC} = -a/L$ 单位 荷载 超越 AC 分区

$$V_{Cx}^{+} = R_A = 1 - \frac{x}{L}$$

当时 $x = a$ (点后就 C), $V_{CC} = 1 - a/L = (L-a)/L = b/L$ 而当 $x = L, V_{CB} = 1 - L/L = 0$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

瞬间



$$M_{Cx}^{-} = aR_A - 1.0(a-x) = a\left(1-\frac{x}{L}\right) - (a-x) = a - \frac{ax}{L} - a + x = -\frac{ax}{L} + x$$

当时 $x = 0, M_{Cx} = 0$, 而当 $x = a$ (直到点前 C),

$$M_{CC} = -a^2/L + a = (-a^2 + aL)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

单位 荷载 超越 AC 分区

$$M_{Cx}^{+} = aR_A = a(1-\frac{x}{L}) = a - \frac{ax}{L}$$

当时 $x = a$ (直到 C 点之后),

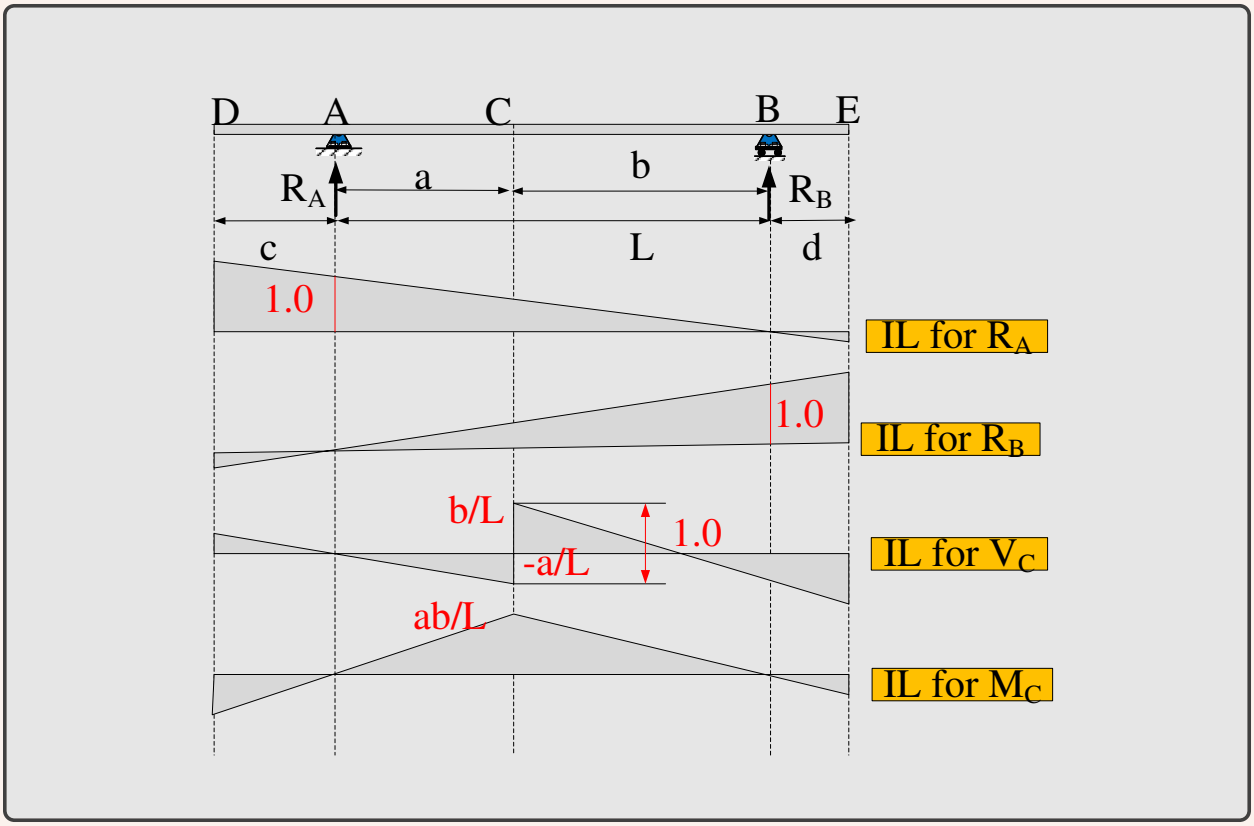
$$M_{CC} = a - a^2/L = (aL - a^2)/L = a(L-a)/L = ab/L$$

而当 $x = L$,

$$M_{CB} = a - aL/L = a - a = 0$$

28.2.2 例题 28.2: 簡單支持 梁 與超端

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



28.3 Mü 布雷斯拉夫原则

有关历史背景，请参见 §??

28.3.1 衍生品

[8] 马克斯威尔 - 贝蒂相互理论 (MBRT) (§24.2.2): 系统 *1* 中的部队通过系统 *2* 中的相应转移进行的虚拟工作应该与系统 *2* 中部队在系统 *1* 中进行的相应迁移进行虚拟工作的同等。

[9] 下面我们将考虑在图中显示的两个系统 28.1 单位的力量在哪里 P_C 可能是 “旅行” A 和 B 之间 (i.e 与移动单位负载相似, 将产生相应反应在 A), 并应用 MBRT

$$\underbrace{P_C}_{1}\ \Delta_C = R_A\ \underbrace{\Delta_A}_{1} \Rightarrow \Delta_C = R_A$$

因此, 在 C 的 位移 相当于 A 的 反力 。这就是 Mü 布雷斯拉夫理论。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

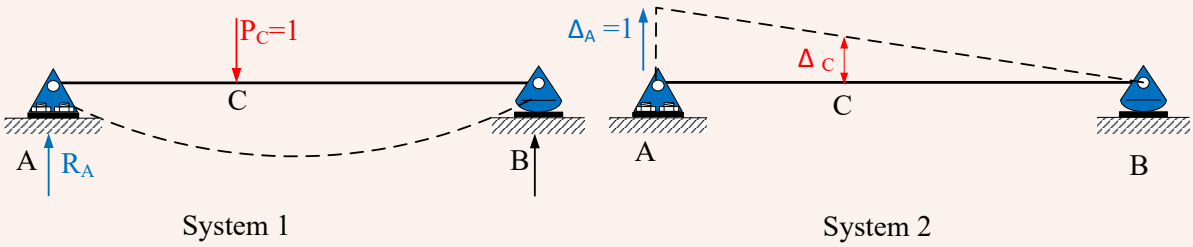
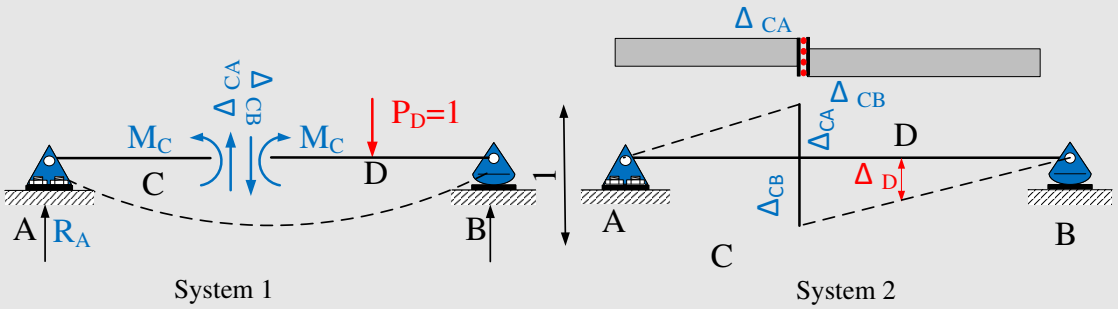


图 28.1: Mü 布雷斯拉夫原则

定义 28.2: Mü 布雷斯拉夫原则

对于任何 反力 或内部力量的 影响线 相应于由移除结构能够携带该力量而产生的结构的分裂形状, 然后将其引入修改式结构中。(或释放) 构建一个单位变形, 相当于被限制的移除。

28.3.1.1 例题 28.3: Müller-Breslau; Shear 影响线



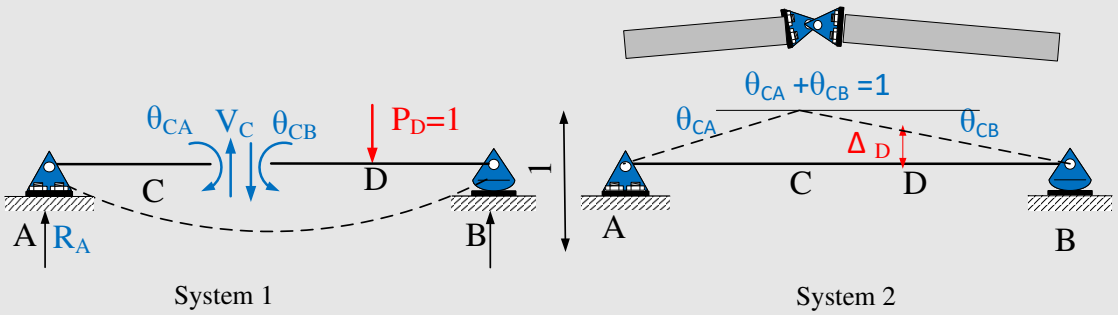
请求一张 Shear release (但是没有时刻) 在 C 由 Maxwell-Betti

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\,\Delta_D = V_C\,\underbrace{(\Delta_{CA}+\Delta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = V_C$$

因此, 系统 2 中的分解形状代表影响线为剪力 V_C.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

28.3.1.2 例题 28.4: Müller-Breslau; 瞬间 影响线



應用一瞬間 (但是, 不是 Shear) 释放在 C, 又是 Maxwell-Betti (如前)

$$\underbrace{(P_D)}_{1}\,\Delta_D = M_C\,\underbrace{(\theta_{CA}+\theta_{CB})}_{1} \Rightarrow \Delta_D = M_C$$

因此, 系统 2 中的分裂形状代表了影响线一瞬间。M_C.



阿拉伯马画廊, 埃蒂安 · 朱尔 · 马里,*1887* 年。慢形图像研究

移动荷载的影响, 平行影响线在结构中的力量变化。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29 二、灵活分析

摘要

本章 讨论了结构的分析, 其中变形 (位移) 对整体反应产生重大影响 (平衡 方程式), 而材料本身保持着线性弹性行为。这种分析形式被称为第二顺序。(弹性) 分析。

章节分为两个主要部分。第一部分处理涉及大型迁移但稳定的结构的问题。第二部分专注于可能最终变得不稳定的小移动问题, 也称为 *Euler* 屈曲.

Euler 屈曲 的控制差异方程式和控制自由振动之间的类似性也呈现出来。

最后, 章节结束了对有效长度概念的简要介绍。(与设计相关的概念) 和柱图表, 考虑到不弹性反应。

此章的 数值 对手将随后在 几何非线性 在章节中提交

29.1 引入 912
29.2 大型移动, 稳定 913
29.2.1 例题 29.1: 地质不稳定 913
29.2.2 例题 29.2: 荷载对灵活性变形的影响 914
29.2.3 例题 29.3: Cantilever Beam 的大漏洞 916
29.3 小动作, 不稳定 920
29.3.1 格式硬带 920
29.3.2 连续系统 924

.

29.1 引入

1 到目前为止, 我们已经分析了线弹性结构与小转移, 使我们能够假设无限的转移没有影响自由体图。

2 第二次分析 (索亚) 这个假设已经不再有效了。我们必须考虑在自由体图中根据荷载的变形, 就像索结构一样。(查普 30). 这个概念在图中被描述 54.5.

3 在 SOA 中, 分析的基本方面仍然不变。相同的统治方程必须满足。(平衡、兼容性和压力冲动关系). 然而, 关键差异是, 自由体图必须为终结的转移负责。虽然这些转移可以被认为是小 (允许简化, 如 $\sin\theta \simeq \theta$) 但不是无限的。

4 因此, 解决方案过程通常更复杂, 可能涉及通过已知边界条件确定的恒定的差异方程式的解决。

5 值得注意的是, 基本上有两类问题在 SOA:

Large displacements, Stable 结构有能力在负载的行动下保持其配置, 并在负担被移除后返回原始位置。

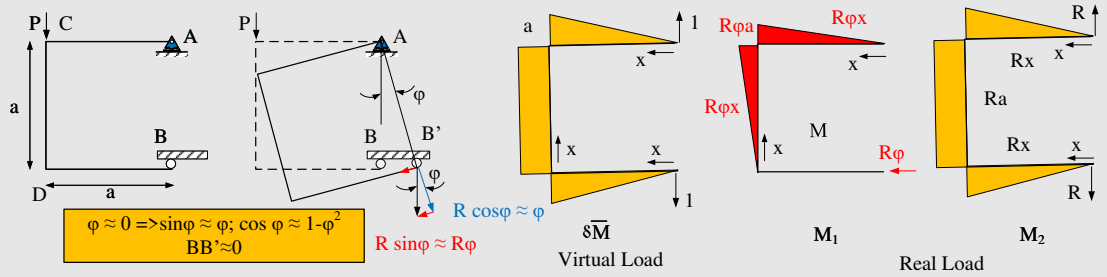
Small displacements, Unstable 结构是那些在负载时, 经历到最终的小变形而不逆转于其原始配置, 导致失去平衡和潜在的故障。(屈曲).

6 我们将通过许多描述性的例子来探讨两类问题。

审阅稿

29.2 大型移动, 稳定

29.2.1 例题 29.1: 地质不稳定



如果我们试图在低 支座 中确定 反力

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa = R \times 0 \Rightarrow R = \pm\infty$$

因此, 系统不在显示位置的平衡。

此外, 可以轻易地观察到我们有一个地质不稳定, 因为所有反应都相同的点。(§19.1.5, §46.2.1.5).

反力 只能确定, 如果我们考虑到低轮的水平 位移。

有一个无限的微小的角度 ϕ 我们在数字中显示的较低力量

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Pa - R\phi a \Rightarrow P = R\phi$$

接下来, 我们试图消除 ϕ 由二个单独的表达方式为 AB 延长到 AB 。

首先, 我们要考虑变形的地质学。阿布分区增加到阿布

$$\Delta v = AB' - AB = a(1 - cos\phi) \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

接下来, 我们将使用虚拟力量方法来确定相同的数量。

$$\begin{aligned}(1)\Delta v &= \int_0^a (1)x\frac{Rx}{EI}dx + \int_0^a (1)a\frac{R\phi x + Ra}{EI}dx + \int_0^a (1)x\frac{R\phi x + Rx}{EI}dx \\ &= \frac{Ra^3}{EI}\left(\frac{1}{3} + \frac{\phi}{2} + 1 + \frac{\phi}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI}\left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

因为 $\phi \ll 1$ 然后我们有

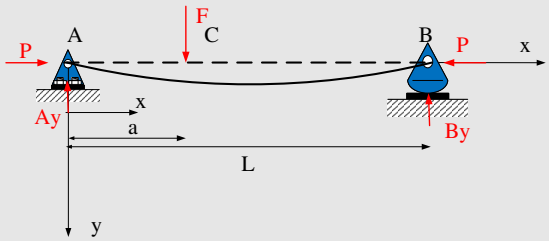
$$\Delta v \simeq \frac{5}{3}\frac{Ra^3}{EI} \simeq \frac{a\phi^2}{2}$$

替代 $\phi = \frac{P}{R}$ 从上面, 我们可以解决 R

$$R = \sqrt[3]{\frac{3P^2EI}{10a^2}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29.2.2 例题 29.2: 荷载对灵活性变形的影响



我们探讨了轴负载对每端自由旋转的泡沫列的硬度的影响, 并与一个恒定的轴力一起受到集中力量的影响。我们试图从挠度和接近的梁的内部力量中产生表达。这个例子分析解决了问题, 同样的问题将被有限元分析在后期数字化解决。§60.1.2.4.

$$\begin{aligned} EI\frac{d^2y_1}{dx^2} &= -Py_1 - A_y x &&= -Py - F(L-a) && x \le a \\ EI\frac{d^2y_2}{dx^2} &= -Py_1 - B_y(L-x) &&= -Py - F\tfrac{a}{L}(L-x) && x > a \end{aligned}$$

这些方程式的解决方案是

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\cos(nx) + D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= C_2\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

哪里 $n^2 = P/EI$.

我们注意到, 这两种功能都是线性依赖的。F 非线性依赖于 轴力 P.

根据边界条件, 在 A 和 B 流离失所是零, 导致 $C_! = 0$ 和 $C_2 = -D_2\tan(nL)$

$$\begin{aligned} y_1 &= D_1\sin(nx) - \frac{F(L-a)}{PL}x \\ y_2 &= D_2\tan(nL)\cos(nx) + D_2\sin(nx) - \frac{Fa}{PL}(L-x) \end{aligned}$$

但我们知道, 有不断的流离失所和停车场。C

$$y_1 = y_2\big|_{x=a} \quad \text{and} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx}\bigg|_{x=a}$$

扩展

$$\begin{aligned} D_1\sin(na) &= D_2\left(\sin(na) - \tan(nL)\cos(na)\right) \\ D_1 n\cos(na) &= D_2 n\left(\cos(na) + \tan(nL)\sin(na)\right) + \frac{F}{P} \end{aligned}$$

解决为 D_1 和 D_2

$$D_1 = \frac{F\sin(n(L-a))}{Pn\sin(nL)} \quad \text{and} \quad D_2 = -\frac{F\sin(na)}{Pn\tan(nL)}$$

因此, 这一刻将是

$$M(x) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Fn\sin(n(L-a))}{P\sin(nL)}\sin(nx)$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

最大时刻将发生, 如果 $a = L/2$ 然后为 $x = L/2$

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI}\underbrace{\frac{3(\tan\phi-\phi)}{\phi^3}}_{\lambda_y} \quad \text{where } \phi = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{FL}{4}\underbrace{\frac{\tan\phi}{\phi}}_{\lambda_M}$$

哪里 λ 是增强因素。显然, 压缩力量的存在将增加位移和瞬间。移动和时刻是线性依赖的 F 非线性依赖于 P

我们希望通过设置来确认前方程的准确性。$P = 0$ (因此 $\phi = 0$) 但是, 这并不简单, 因为我们会有一个 0/0 因此, 我们考虑到边界 $P \to 0$ $(\phi \to 0)$, 并适用医院规则

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{3(\tan\phi-\phi)}{\phi^3} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\phi\to 0}\frac{\tan\phi}{\phi} = 1$$

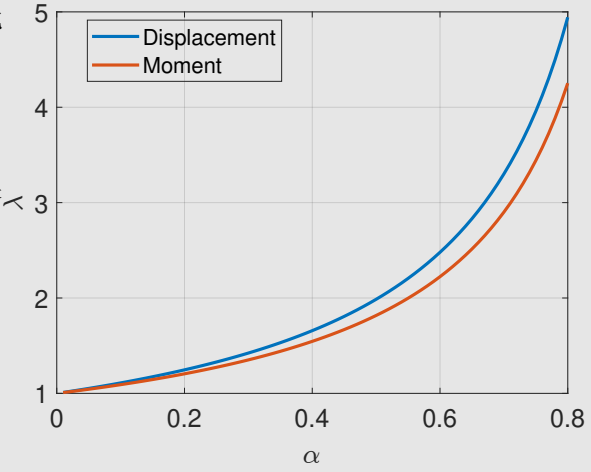
$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI} \quad \text{and} \quad M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{4}$$

因此, 我们收回了一个简单支持的梁的经典解决方案, 其中一个中心点是荷载.

如果我们设置 $P = \alpha P_{cr}$ 哪里 $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ 为此梁 柱, 因此 ϕ 减少到

$$\phi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$$

我們將兩個增強因素列出。正如预期的那样, 如果 $\phi \to 1$ 兩個增強因素將走到無限。

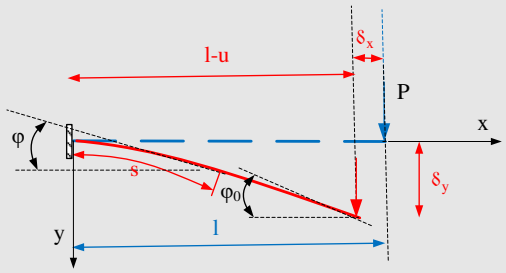


[7] 由于基本假设不再有效, 不能从元素喷雾理论中获得大漏洞的解决方案。具体而言, 基本理论忽略了曲率公式中的第一个衍生品的四分之一, 并且没有为瞬间手臂缩短提供任何纠正。梁故障的负载终端 (Bisshopp and Drucker, 1945). 对于大型终端负载, 它会产生比梁的长度更大的缺陷! 第一批衍生和纠正因素的四分之一对瞬间手臂的缩短成为解决大型挠度问题的主要贡献。

[8] 以下衍生品仍然基于基本的伯诺利-埃勒理论, 该理论指出曲率与弯矩相对。也被认为曲折不会改变梁的长度。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29.2.3 例题 29.3: Cantilever Beam 的大漏洞



考虑到一个长而薄的叶子春天, 让 L 标记 梁 的长度, u 位移的横向组成部分, 在负载端的梁中, v 相应的垂直转移,P 在自由端的集中垂直负载, EI 灵活性硬度。
请注意, 这是一个 Quintessential。**弹性** 讨论的问题在 §8.2.
此相同问题将随后通过有限元法进行分析 §60.2.1.

表述
弹性线的曲率的准确表达可在弓长度和折叠角度上方便地表达, 称为 s 和 ϕ 相应地, 如果 x 是从 梁 的固定端测量的水平坐标, 产品为 EI 和曲率的梁相当于弯矩 M:

$$EI\frac{d\phi}{ds} = P(L - x - \delta_x) = M \tag{29.1}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2\cos\phi \tag{29.2}$$

与 $\alpha^2 = P/EI$.

請注意這 $dx/ds = \cos\phi$ 和 $dy/ds = \sin\phi$.

如果我们重复 Eq 的两侧。29.2 由 $d\phi/ds$ 然后,

$$\frac{d\phi}{ds}\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\alpha^2\cos\phi\frac{d\phi}{ds}$$

整合与 s, 并将 $\phi = \phi_o$ 和 $d\phi/ds = 0$ 在 $x = l$ 我们得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = -\alpha^2\sin\phi + \alpha^2\sin\phi_0$$

这样

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} \tag{29.3}$$

自从我们采取了积极的根 $d\phi/ds$ 是积极的和

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}} \tag{29.4}$$

解决为 ϕ_0 我们将需要解决 ϕ_0 首先。承认 梁 是 **不可扩展**:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

和 ϕ_0 可以数字化解决。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

解决为 δ_y

首先:

$$\frac{dy}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{dy}{ds} = \sin\phi$$

取代 EQ。29.3

$$\frac{dy}{d\phi}\underbrace{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}_{d\phi/ds} = \sin\phi \Rightarrow dy = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi$$

最后,

$$\begin{aligned}\delta_y &= \int_0^{\delta_y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0}\frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi\end{aligned}$$

正常化 ,

$$\frac{\delta_y}{l} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_0^{\phi_0}\frac{\sin\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}d\phi}_{L} \tag{29.5}$$

哪里 $\beta^2 = \alpha^2 L^2$.

这是一个 “隐藏” 精英集成 [a].

转化为精密集成 為 (Bisshopp and Drucker, 1945) 以下替代品:

$$1 + \sin\phi = 2k^2\sin^2\theta = \left(1 + \sin\phi_0\right)\sin^2\theta \tag{29.6}$$

哪里

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin\phi_0}{2}}$$

关于 Eq 的详细转换。29.5 標準的精英整體形式如下進行。

来自 EQ。29.6:

$$\sin\phi = 2k^2\sin^2\theta - 1 \tag{29.7}$$

下一篇: 我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi} &= \sqrt{\left(1 + \sin\phi_0\right) - \left(1 + \sin\phi\right)} \\ &= \sqrt{2k^2 - 2k^2\sin^2\theta} = \sqrt{2}k\cos\theta\end{aligned} \tag{29.8}$$

区分 Eq 中的第一个平等的两面。29.6 我们得到了

$$\cos\phi\, d\phi = 4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \Longrightarrow d\phi = \frac{4k^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\cos\phi} \tag{29.9}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使用 EQ。29.7 我们将重新写下名称 29.9 如

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)^2}\\ &= \sqrt{4k^2\sin^2\theta-4k^4\sin^4\theta} = 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\end{aligned} \tag{29.10}$$

插入 29.7-29.10 进入 29.5 我们得到了

$$\begin{aligned}L &= \frac{\sqrt{2}}{2\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)\times 4k^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{2}k\cos\theta\times 2k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\\ &= \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\end{aligned} \tag{29.11}$$

哪里 θ_1 和 θ_2 这些是价值观的 θ 相应的 $\phi=0$ 和 $\phi=\phi_0$ 相应。使用 29.6 我们发现

$$1=\left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_1 \Longrightarrow \theta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin\phi_0}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) \tag{29.12}$$

$$1+\sin\phi_0=\left(1+\sin\phi_0\right)\sin^2\theta_2 \Longrightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} \tag{29.13}$$

使用完整的精密整合物 我们记得, 第一类和第二类的完整精英组分别定义为:

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

不完整的精英组合是:

$$F(\psi,k)=\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad E(\psi,k)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

全集在 Eq。29.11 可以分为:

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2}(\cdots)\,d\theta - \int_0^{\theta_1}(\cdots)\,d\theta$$

至于整体的 0 到 $\pi/2$ 我们将分解:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2k^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - K(k)$$

使用身份:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{k^2}\left[K(k)-E(k)\right]$$

我们得到了:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2k^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2\left[K(k)-E(k)\right]-K(k) = K(k)-2E(k)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

同样, 对于整体的 0 到 θ_1:

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\left(2k^2\sin^2\theta - 1\right)d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\theta_1,k) - 2E(\theta_1,k)$$

因此, 完整的表达为 δ_y/l is:

$$\frac{\delta_y}{l} = \frac{1}{\beta}\left[(K(k) - 2E(k)) - (F(\theta_1,k) - 2E(\theta_1,k))\right] \tag{29.14}$$

哪里 $\theta_1 = \arcsin(1/(\sqrt{2}k))$ 来自 EQ。29.12.

与 Bisshopp 相同 & 德鲁克的公式 所提供的表达 Bisshopp and Drucker, 1945 is:

$$\frac{\delta_y}{l} = 1 - \frac{2}{\beta}\left[E(k) - E(\theta_1,k)\right] \tag{29.15}$$

为了显示等级, 我们使用不扩展的 梁 的限制方程式。從弓長限制:

$$l = \int_0^l ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi_0 - \sin\phi}}$$

相同的替代后, 变成:

$$1 = \frac{1}{\beta}\int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{\beta}\left[K(k) - F(\theta_1,k)\right]$$

因此:

$$\beta = K(k) - F(\theta_1,k) \tag{29.16}$$

取代 EQ。29.16 到 eq。29.14 和简化 (请注意, 许多条款被取消), 一个正确恢复 Eq。29.15.

因此, 只有一个解决方案: 方程式。*29.14* 和 *29.15* 数学上相当于 δ_y/l.

解决为 δ_x

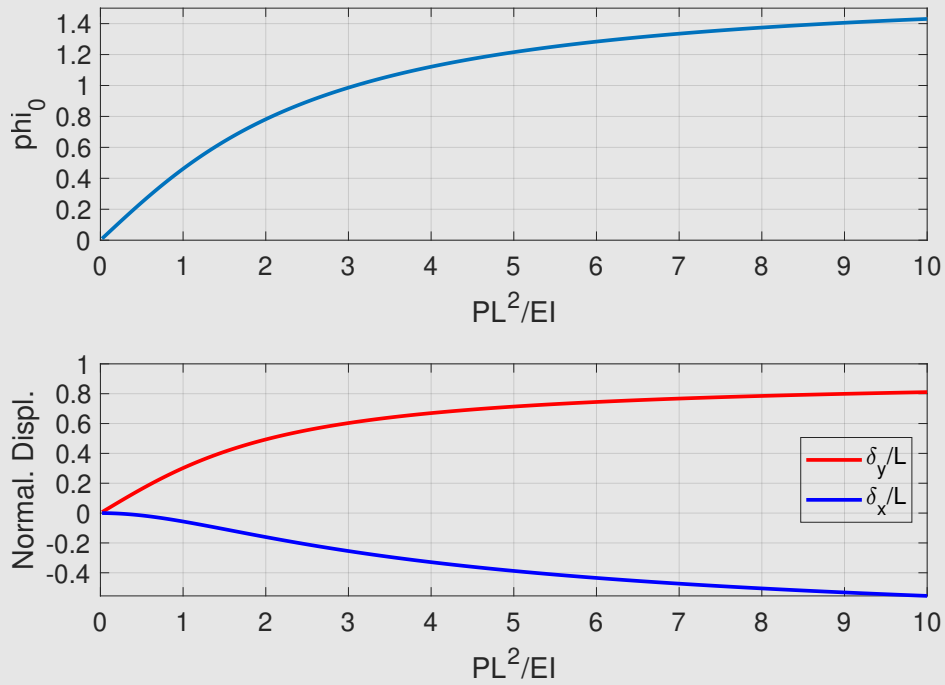
负载端的水平 位移 从 Eq 计算。29.1 和 29.3 与 $x = \phi = 0$. 这样

$$P(l - \delta_x) = EI\sqrt{2}\alpha\sqrt{\sin\phi_0}$$

或

$$\frac{l - \delta_x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{\sin\phi_0} \tag{29.17}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



所有执行此解决方案的三个 Matlab 代码都列入 §I.1.6.

[a] 一个精英整体是一般形式中的任何一体。$f(x) = \int \frac{A(x)+B(x)}{C(x)+D(x)\sqrt{S(x)}}$ 哪里 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ 和 $D(x)$ 多元化在 x 和 $S(x)$ 它是 3 或 4 级的多元体。

29.3 小动作, 不稳定

29.3.1 格式硬带

9 AA 关键要求评估稳定问题 (和 屈曲) 首先要绘制变形状态的自由体图。我们将讨论两个简单的案例。

29.3.1.1 单栏系统

10 通过介绍, 让我们先考虑一个固定的条线连接到支座的春天, 并在另一端轴上加载, 图。29.1. 假设小 转角, 我们采取点的时刻 A:

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\theta \Rightarrow P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow (P - \frac{k}{L}) = 0$$

因此, 我们有三种可能性, 图 29.1

稳定 平衡: 为 $P < k/L$, $\theta = 0$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

中性 平衡: 为 $P = k/L$, 和 θ 可以拿到任何价值

不稳定 平衡: 为 $P = P_{cr} > k/L, \theta = 0$

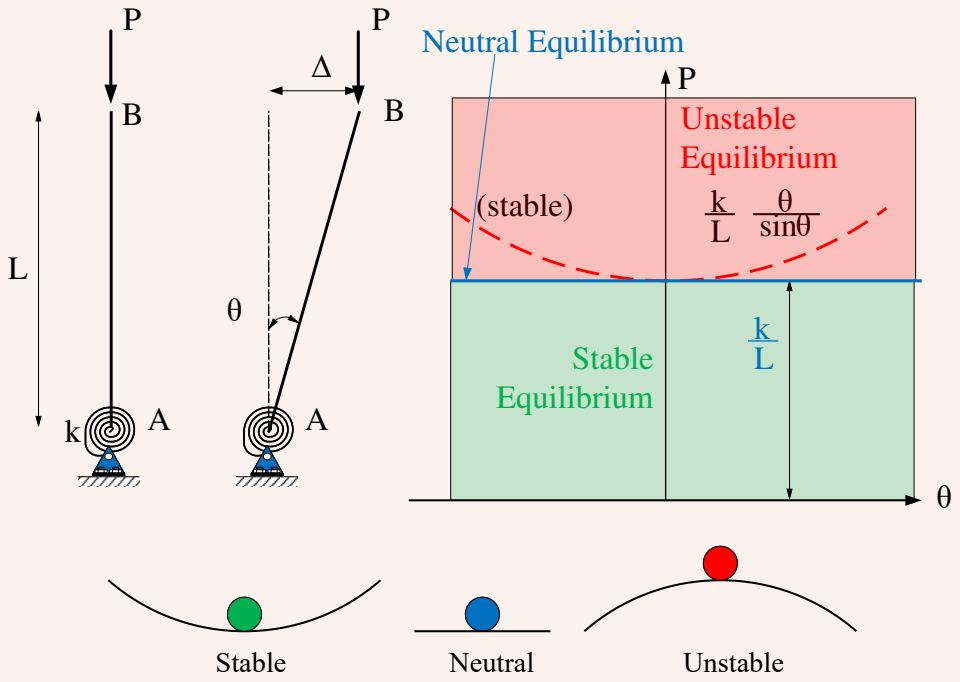


图 29.1: 硬酒吧的稳定性

11 因此, 我们引入一个关键 荷载 定义为

$$P_{cr} = \frac{k}{L}$$

12 对于大 转角, 我们将有

$$\Sigma M_A = P\Delta - k\theta = 0 \Rightarrow \Delta = L\sin(\theta)P\theta L - k\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$$

13 因为有多个可能的路径 (θ) 当 $P = P_{cr}$, 我们称之为 A **双重点**.

14 如果我们现在假设在柱中存在初始不完美, 即。柱 最初是 “克鲁克”, 图 29.2 然后,

$$\Sigma M_A = PL\theta - k(\theta - \theta_0) = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}(1 - \frac{\theta_0}{\theta})$$

15 请注意, 我们在这里有一个 **不稳定** 问题, 不要与屈曲混淆 (这是不稳定的一种形式。).

请注意，本节包含必须在下一节之前排出的浮动对象（插图和/或表格），因此此处可能出现空白或间隙。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

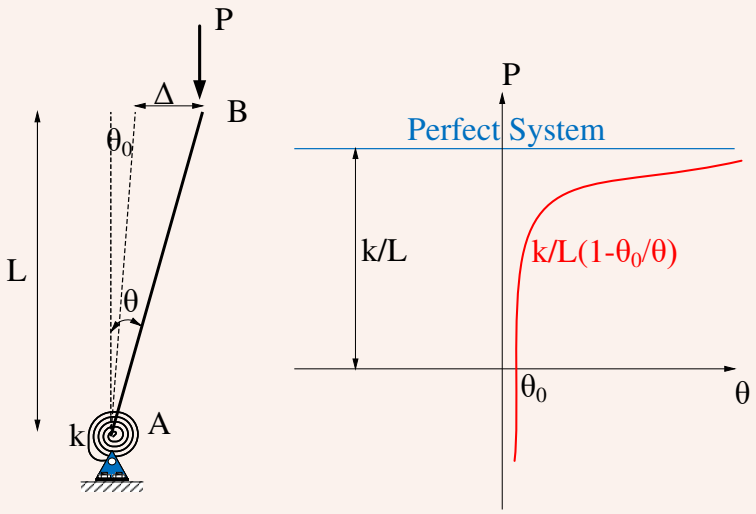
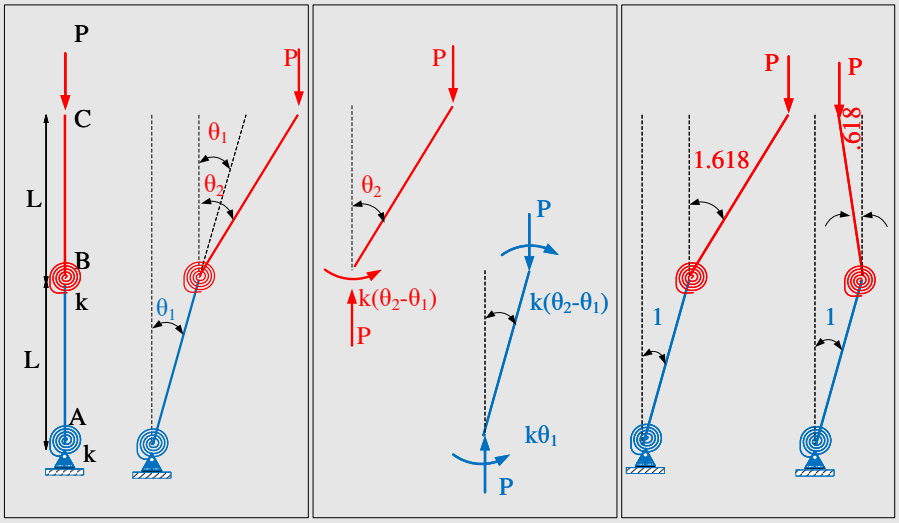


图 29.2: 硬带的稳定性与初始不完美

29.3.1.1.1 例题 29.4: 屈曲 兩個粘固 柱

我们考虑了两条固体线的稳定性, 通过喷射与硬度连接。k 到每一个结局。我们正在考虑系统的稳定性。对于这个问题, 我们必须考虑平衡的**破坏国家** (而不是不受形容的), 由于存在的巨大扭曲:



$$\Sigma M_B = PL\theta_2 - k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \qquad \Rightarrow -\theta_1 + \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_2$$

$$\Sigma M - A = PL\theta_1 + k(\theta_2 - \theta_1) - k\theta_1 = 0 \Rightarrow 2\theta_1 - \theta_2 = \frac{PL}{k}\theta_1$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

这些两种方程式可以以 矩阵 格式提取

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

哪里 $\lambda = PL/k$ 這是一個 **特征值** 表述 可以是 重写如

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \lambda \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ 2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-1 &= 0 \\ \lambda^2-3\lambda+1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

因此, 我们现在有两个关键负担:

$$\begin{aligned} P_{cr_1} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 0.382\frac{k}{L} \\ P_{cr_2} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} = 2.618\frac{k}{L} \end{aligned}$$

现在我们正在寻求确定每个第一批关键的歪曲形状。负载

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \begin{bmatrix} 2-\frac{3-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1.618 & -1 \\ -1 & 0.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

现在, 我们自愿 $\theta_1 = 1$ 然后, $\theta_2 = 1/0.618 = 1.618$ 这样第一個自己的模式是

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}$$

最后, 我们将审查第二个振型负载

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \begin{bmatrix} 2-\frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -0.618 & -1 \\ -1 & -1.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

现在, 我们自愿 $\theta_1 = 1$ 然后, $\theta_2 = -1/1.618 = -0.618$ 这样第二种自我模式是

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -0.618 \end{array} \right\}$$

29.3.2 连续系统

29.3.2.1 Euler 屈曲 加载

16 在之前的方法中, 屈曲负载为一个柱获得了确定的基本边界条件。(位移 和 Slope) 二是第二次排序差异方程。

17 在接下来的方法中, 我们还将考虑自然边界条件。(以第三和第四衍生品表达的流动和时刻). 这将导致前进顺序差异方程式。

18 考虑到一个梁-柱受轴和叶子力量以及一瞬间, 图 29.3 (与 索 结构的笔记类似, 图 30.2).

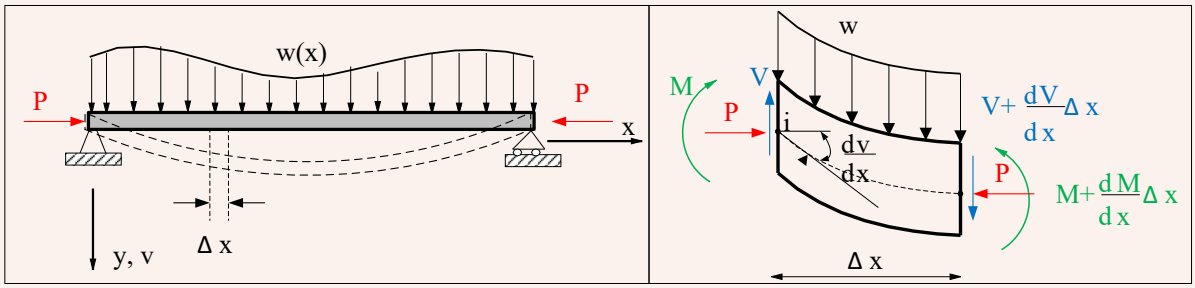


图 29.3: 简单支持 梁 柱; 差异性分区; 效果的 轴力 p

19 与此相处的瞬间 i 对于梁分区, 并采取角度 $\frac{dv}{dx}$ 与轴之間的梁和水平轴小, 导致

$$\underbrace{M - \left(M + \frac{dM}{dx}\Delta x\right) + w\frac{(\Delta x)^2}{2}^{0} + \left(V + \frac{dV}{dx}\Delta x\right)^{0}\Delta x}_{} + \underbrace{P\left(\frac{dv}{dx}\right)\Delta x}_{} = 0$$

请注意, 第一个被封锁的术语与梁的差异方程式以前衍生中使用的术词相同。(Eq. 22.2).

20 忽略了条款 dx^2 它们是小, 然后分辨每个术语的尊重。到 x 我们得到了

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{dV}{dx} - P\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{29.18}$$

但是, 考虑到 平衡 在 y 方向给了

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{29.19}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

21 从梁理论, 忽略轴和叶形变形, 我们有

$$M = -EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{29.20}$$

22 取代 EQ。29.19 和 29.20 进入 29.18, 和假设一个单一的十字部分, 我们获得

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} - P\frac{d^2v}{dx^2} = w$$

替代 $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, 和 $w = 0$ 我们终于得到了

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{29.21}$$

再一次, 我们注意到, 考虑到平衡在扭曲状态, 我们已经引入了第二个术语, 否则会是统治区别。灵活成员的平衡 (比亚姆).

最后, 我们注意到这个方程式与一个索结构的统治差异方程之间的类似性,Eq。30.5.

23 第四条 区别秩序的总体解决方案与任何一组边界条件的平等是

$$v = C_1 + C_2x + C_3\sin\lambda x + C_4\cos\lambda x \tag{29.22}$$

永恒的 $C's$ 他们从边界条件中获得。对于列, 这些显示在桌子上 29.1 基本的边界条件与位移相关, 并将其列入; 自然的那些与闪光和时刻 (通过他们的关系与位移的).

表 29.1: 列的基本和自然边界条件

重要 (导演)	自然 (尼曼)
v	$\frac{d^3v}{dx^3}$ (V)
$\frac{dv}{dx}$	$\frac{d^2v}{dx^2}$ (M)

24 我们注意到, 在每个节点上, 我们应该有两个边界条件, 所有组合除同一原料的配对外, 可以 (也就是说, 我们不能知道位移和 Shear, 或已知的旋转和时刻).

29.3.2.1.1 例题 29.5: 屈曲 的 折叠式 柱

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果我们考虑到一张挂着的柱的稳定性, 则边界条件是位移。(v) 和瞬间 ($\frac{d^2v}{dx^2}EI$) 在两端均为零, 或

$$\begin{array}{lrcrcrl} \textbf{Essential:} & v|_{x=0} & = & 0; & v|_{x=L} & = & 0; \\ \textbf{Natural:} & \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}} & = & 0; & \underbrace{v_{,xx}|_{x=L}}_{M|_{x=L}} & = & 0 \end{array}$$

取代两项条件 $x = 0$ 导致 $C_1 = C_4 = 0$.
从剩下的条件, 我们得到了

$$\begin{aligned} C_3 \sin \lambda L + C_2 L &= 0 \\ -C_3 k^2 \sin \lambda L &= 0 \end{aligned}$$

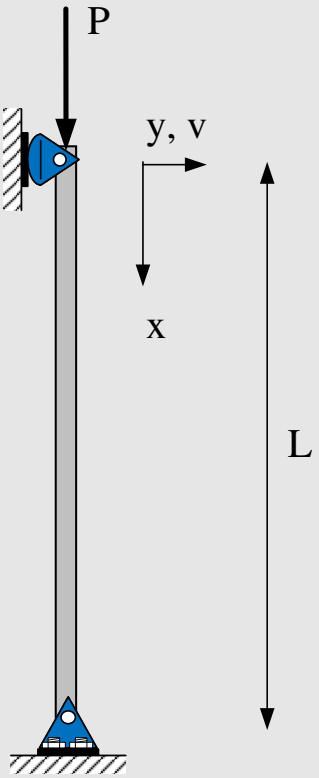
这些关系也满足于 $C_2 = C_3 = 0$ 或者如果 $\sin \lambda L = C_2 = 0$. 第一個替代方案導致在所有負載中使用 平衡 的三重解決方案, 第二個是 $\lambda L = n\pi$ 為 $n = 1, 2, 3 \cdots$. 关键 荷载 是

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

此前使用下列顺序差异方程式。柱的形状是

$$y = C_3 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

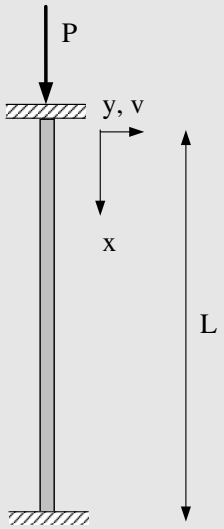
只有形状 (但不是地质) 可以确定。总的来说, 我们将承认 $C_3 = 1$ 和 plot y.



29.3.2.1.2 例题 29.6: 屈曲 的固定 柱

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果列现在被阻止在两端旋转, 并使用 Eq。29.22 边界条件是



$$\textbf{Essential:} \quad v|_{x=0}=0; \quad v|_{x=L}=0; \quad \underbrace{v_{,x}|_{x=L}}_{\theta|_{x=L}}=0;$$

$$\textbf{Natural:} \quad \underbrace{v_{,xx}|_{x=0}}_{M|_{x=0}}=0$$

$$\begin{aligned}
v(0)=0 &\Rightarrow C_1+C_4=0\\
v'(0)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda=0\\
v(L)=0 &\Rightarrow C_1+C_2L+C_3\sin\lambda L+C_4\cos\lambda L=0\\
v'(L)=0 &\Rightarrow C_2+C_3\lambda\cos(\lambda L)-C_4\sin(\lambda L)=0
\end{aligned}$$

这些方程式可以设置为 矩阵 格式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 0\\ 1 & L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}=0$$

行列式 是由

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0\\ L & \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ 1 & \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 1 & L & \sin\lambda L\\ 0 & 1 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda L & \cos\lambda L\\ \lambda\cos\lambda L & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} L & \cos\lambda L\\ 1 & -\lambda\sin\lambda L \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & \sin\lambda L\\ 0 & \lambda\cos\lambda L \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & L\\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$-2\lambda+\lambda^2L\sin\lambda L+2\lambda\cos\lambda L=0$$

第一個解决方案, $\lambda=0$ 是三位一体, 下一个是

$$\begin{aligned}
\lambda L\sin\lambda L+2\cos\lambda L-2 &= 0\\
\lambda L\sin\lambda L &= 2(1-\cos\lambda L)
\end{aligned}$$

这个超越方程式的解决方案是

$$\begin{aligned}
\lambda L &= 2n\pi\\
\sqrt{\frac{P}{EI}} &= \frac{2n\pi}{L}
\end{aligned}$$

因此, 关键的荷载和压力是由

$$\begin{aligned}
P_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2EI}{L^2}\\
\sigma_{cr} &= \frac{4n^2\pi^2E}{(L/r)^2}
\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

脱落的形状 (或自我) 可以通过替代价值的 λ 进入的 $c's$.

29.3.2.1.3 例题 29.7: 屈曲 固定曲线 柱

我们试图确定一个列固定在 $x = L$ 被挂在 $x = 0$.
边界条件是

$$\begin{aligned} v &= 0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \text{ at } x = 0 \quad \text{Natural B.C.} \\ v &= 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0 \text{ at } x = L \quad \text{Essentia B.C.} \end{aligned}$$

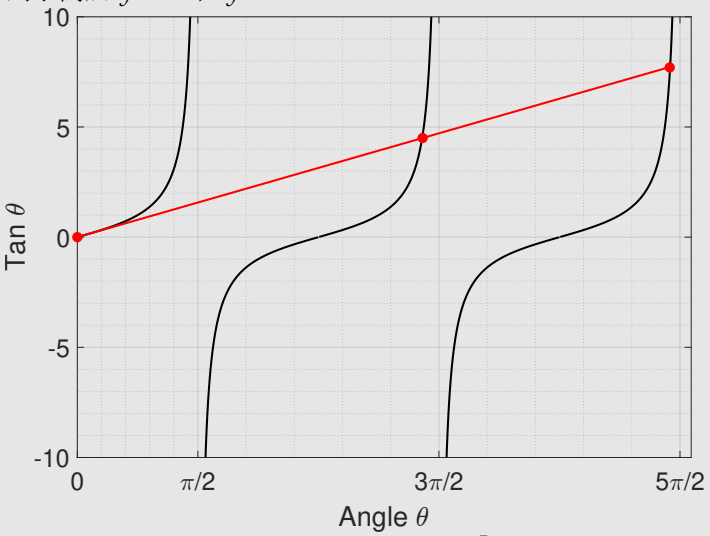
第一兩個 B.C. 收益 $C_1 = C_4 = 0$ 而其他两者

$$\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L = 0$$

但自从 $\cos \lambda L$ 可能不能等于零, 前方可以减少到

$$\tan \lambda L = \lambda L \tag{29.23}$$

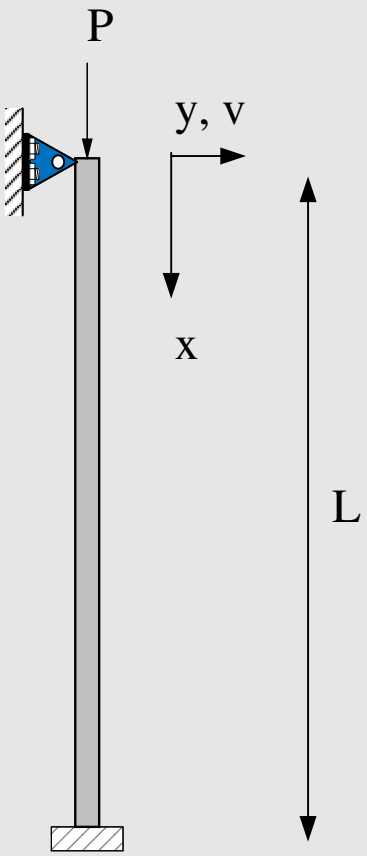
这是一个超越性算法方程式, 只能解决。数字上。我們主要看到了關於 $y = x$ 和 $y = \tan x$.



最小的积极根是 $\lambda L = 4.4934$ 因为 $k^2 = \frac{P}{EI}$, 最小的关键 荷载是

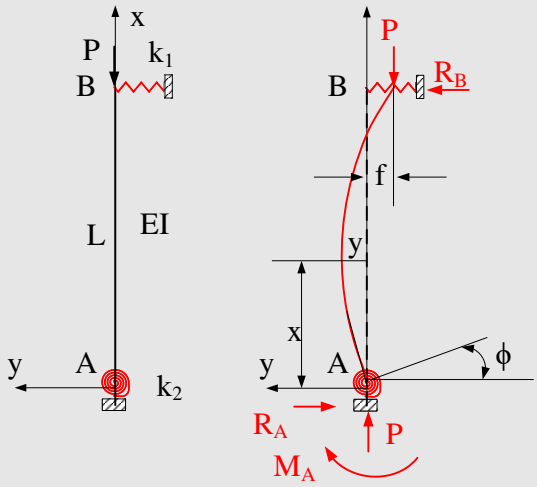
$$P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2}{(0.699L)^2} EI$$

请注意, 如果我们要解决 x 这样的那 $v_{,xx} = 0$ (即通胀点) 然后, $x = 0.699L$.
这个列的泡沫负载将以数字方式确定在 §60.1.2.1.



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29.3.2.1.4 例题 29.8: 柱 具有弹性支持



接近的 柱 有两端的弹性支持: $R_B = k_1 f$ 和 $M_A = k_2\phi$. 我们试图确定布克负载 P_{cr}.
任何时刻 X 是

$$M(x) = -P(f+y) + k_1 f(L-x)$$

替代 $EId^2y/dx^2 = M(x)$ 我们得到了

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = f\left[k_1(L-x) - P\right] \tag{29.24}$$

这是二级非同性差异方程式。如果我们定义

$$f* = f\left[\frac{k_1}{P}(L-x) - 1\right]$$

接下来是 Eq 的总体解决方案。29.24 相应的 sl 子是

$$y = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + y*$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -C_1\lambda\sin\lambda x + C_2\lambda\cos\lambda x - \frac{fk_1}{P}$$

哪里

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

我们为两个恒定的解决方案 C_1 和 C_2 和 f 以下边界条件

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = \phi; \qquad y(L) = -f$$

第一条边界条件导致

$$C_1 + f\left(\frac{k_1 L}{\lambda} - 1\right) = 0$$

在 支座 中 A, $M_A = f(k_1 L - P)$ 因此, 转角的角度是

$$\phi = \frac{M_A}{k_2} = \frac{f}{k_2}(k_1 L - P)$$

因此, 第二个边界条件导致

$$C_2\lambda - f\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) = 0$$

最后, 第三个边界条件给了

$$C_1\cos\lambda L + C_2\sin\lambda L = 0$$

这三个方程式可以表达为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ \cos\lambda L & \sin\lambda L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这是一个均匀的方程式, 所以我们必须确保 (非三位一体) 解决方案是通过将其 行列式 设置为零。因此, 在第三行更换后, 我们

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1 L}{P} - 1 \\ 0 & \lambda & -\left(\frac{k_1}{P} + \frac{k_1 L - P}{k_2}\right) \\ 1 & \tan \lambda L & 0 \end{vmatrix} = 0$$

采用 行列式, 方程式可以重写为超级一。λ

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} \tag{29.25}$$

特殊案例

1A: 顶级免费, 基础春天: $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$ 这是一个简单的替代结果。

$$\tan \lambda L = \frac{k_2 \sqrt{\frac{P}{EI}}}{P}$$

2A: 顶部固定, 基础春天: $k_1 = \infty,\ k_2 \neq 0$ 来自 EQ。29.25 我们将有一个无限的形式。$(\infty / infty)$ 因此, 我们将使用 L'Hˆ 觉规则:

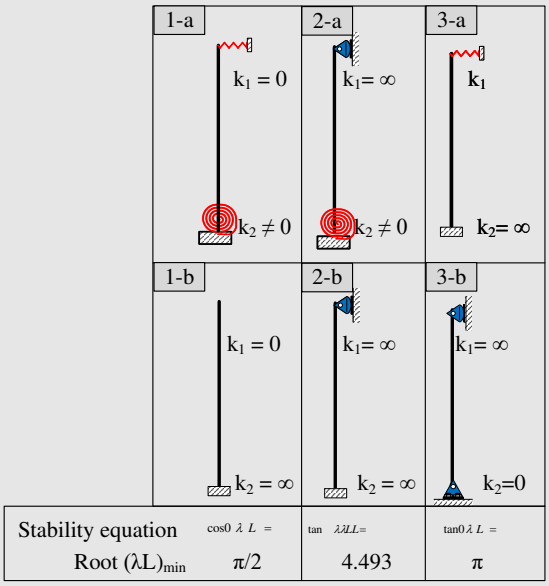
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

或

$$\tan \lambda L = \lim_{k_1 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = \frac{k_2 L \lambda}{k_2 + LP} = \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP}$$

3a: 顶春, 基础固定: $k_1 \neq 0,\ k_2 = \infty$ 再一次, 我们需要召唤 L'HÔpital 的规则:

$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 \lambda (k_1 L - P)}{k_1 (k_2 + LP) - P^2} = L \sqrt{\frac{P}{EI}} \left(1 - \frac{P}{k1L}\right)$$



从这些方程式中, 我们可以从 (或提前提取的) 方程式

1b: 顶级免费, 基础固定: $k_1 = 0, k_2 = \infty$ 只 有在检查中, 我们

$$\tan \lambda L = \infty \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \frac{\pi}{2}$$

2b: 顶部固定, 基础固定: $k_1 = \infty;\ k_2 = \infty$

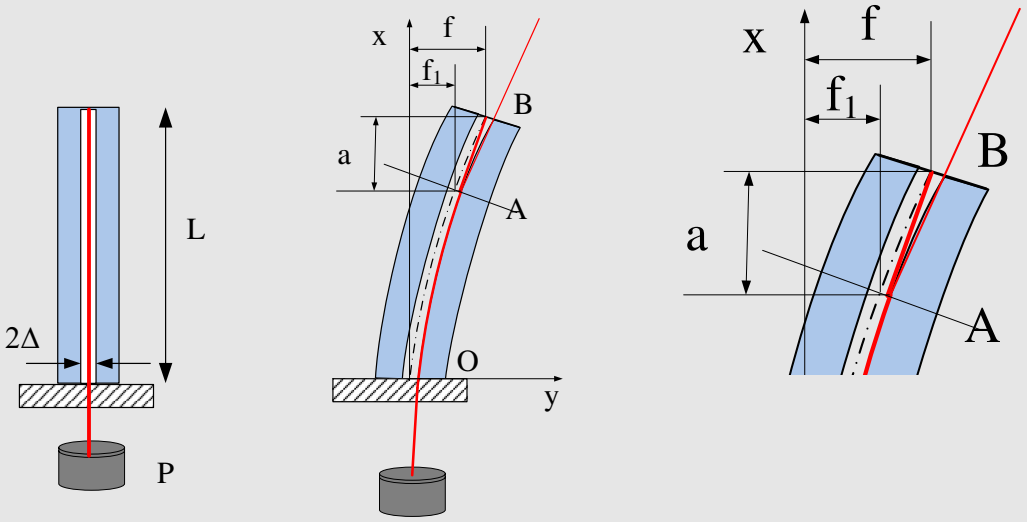
$$\tan \lambda L = \lim_{k_2 \to \infty} \frac{k_2 L \sqrt{\frac{P}{EI}}}{k_2 + LP} \Rightarrow (\lambda L)_{min} = 4.493$$

3b: 顶部固定, 基础挂着: $k_1 = \infty;\ k_2 = 0$ 这 不是以前的方程式的一个特殊案例, 因此我们重新考虑 Eq。29.25. 根据具体的边界条件, 我们必须

$$\tan \lambda L = 0 \Rightarrow (\lambda L)_{min} = \pi$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29.3.2.1.5 例题 29.9: 可限制 屈曲



管子会被打破, 当 $P = \pi^2 EI/4L^2$. 这仍然是限制强度, 只要挠度 f 未超過 Δ.

但是, 在某个时候, 绳子会与管道的曲线墙接触, 然后我们将有两个部分要考虑, OA 和 AB.

在部分中 OA 这个时刻只是等于 $P\Delta$, 管子被困在二级曲线中 (回忆 $M/EI = d^2y/dx^2$ 二、整合两次, 并在基地上执行边界条件)

$$y = \frac{P\Delta}{2EI}x^2$$

挠度 在 A 是

$$f_1 = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2$$

现在, 我们需要解决 f. 基于地质考虑, 如果条不被包围在部分 AB, 位移在 B 会是

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L-a} a = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a$$

但是, 第二部分曲线只是足够远的 B 离开坦克 AB 由 Δ. 因此

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L-a)^2 + \frac{P\Delta}{EI}(L-a)a + \Delta$$

或

$$f = \frac{P\Delta}{2EI}(L^2-a^2) + \Delta$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

但是, 我们还没有 a. a 是固定在一端的条线长度, 失去稳定力下的 P

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{\pi^2 EI}{4P}$$

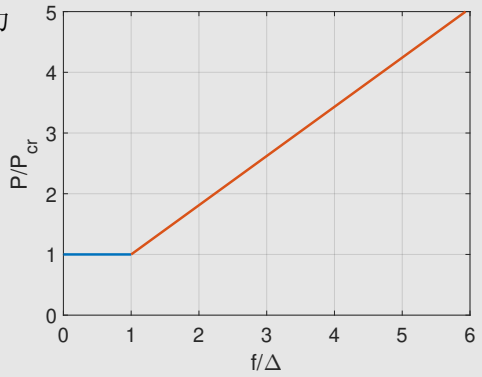
替代在 f

$$f = \Delta\left(\frac{PL^2}{2EI} - \frac{\pi^2}{8} + 1\right)$$

或

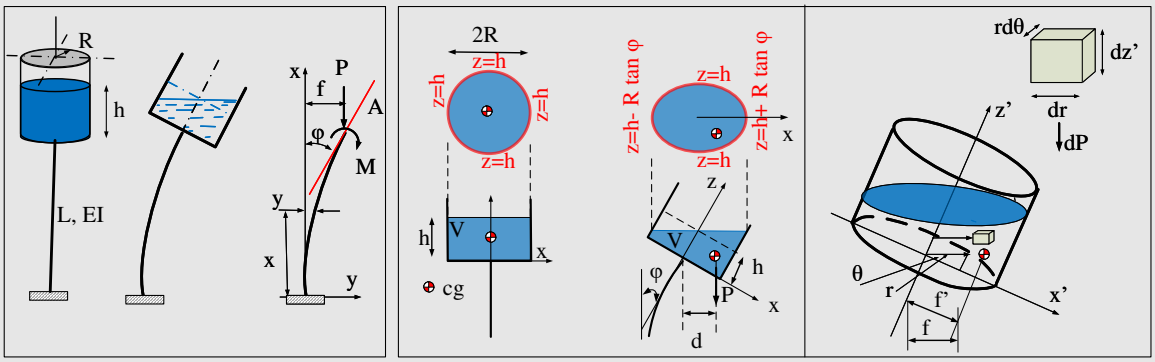
$$\frac{f}{\Delta} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{P}{P_{cr}} - 1\right) + 1$$

哪里 $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$.



29.3.2.1.6 例题 29.10: 水塔

在设计水井时, 一个自然问题是结构是否稳定。在坦克中的水的水平上, 支持极将失去稳定性 (Feodossiev, 1977).



管理差异方程式

我们开始用一个小变形绘制自由体图表带的弹性曲线的差异方程是如下:

$$EIy'' = P(f - y) + M$$

力量的 P 显然, 它相当于水的重量。

$$P = \gamma\pi R^2 h$$

哪里 γ 是水的具体重量。

施加时刻

下一篇: 我们要追求这一瞬间 M 由水在弯曲的缸容器中引起。倾向角度是 ϕ 但是, 现在是关于 z 轴, 是垂直的支座。

當輪子被一個角度傾斜時 ϕ, 质量的中心转换。我們從水平 位移 取出 d 从质量的中心, 从垂直轴到支座点。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们使用圆形坐标与 z' 轴与圆形的同步轴相匹配, 以及 x 轴与缸已粘贴的方向相匹配。我们定义 θ 这样的那 $x = r\cos\theta$. 在这个系统的意义上, 水的自由表面是由方程式给予的。

$$z = h + \alpha x = h + \alpha r\cos\theta$$

哪里 $\alpha = \tan\phi$. 体积的整合, 然后是由

$$0 \le r \le R \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le z \le h + \alpha r\cos\theta$$

然后 $dV = rdrd\theta dz$, 和水的重量的质量是 $P = \gamma\pi hR^2$.

我们要确定水的中心。(至於 Aong the x') 轴, 唯一的并发症是我们必须照顾我们评估整体的顺序。

$$\begin{aligned} df' &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{h+\alpha r\cos\theta}(r\cos\theta)rdrd\theta dz \\ &= \frac{\gamma}{P}\int_0^R\int_0^{2\pi}(hr^2\cos\theta + \alpha r^3\cos^2\theta)drd\theta \\ &= \frac{\gamma\pi}{P}\int_0^R(\alpha r^3)dr \\ &= \frac{\alpha\gamma R^4}{4P} = \frac{\alpha R^2}{4h} \end{aligned}$$

最后, 我们对 x 中心的协调, 替换, 我们获得

$$f = f'\cos\phi = \frac{\tan\phi R^2}{4h}\cos\phi = \frac{R^2}{4h}\sin\phi \simeq \frac{R^2}{4h}\phi$$

结果的时刻将是

$$M = Pd = (\gamma\pi R^2 h)\frac{R^2}{4h}\phi = \frac{\gamma\pi R^4}{4}\phi$$

这种表达是独立的 h 而且, 显然, 衍生是错误的。

因此, 我们采用了所提供的方程式。Feodossiev, 1977 (但是没有衍生品。

$$M = \frac{\gamma\pi R^2}{4}(2h^2 + R^2)\phi$$

解决方案

解决统治差异方程式

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + f + \frac{2h^2 + R^2}{4h}\phi$$

与 $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

边界条件

当时 $x=0, y=0$ 和 $y'=0$ • 当 $x=l, y=f$ 和 $y'=\phi$. 這些條件將提供

$$\begin{aligned} B+f+\frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A &= 0 \\ A\sin\alpha l + B\cos\alpha l + \frac{2h^2+R^2}{4h}\phi &= 0 \\ A\alpha\cos\alpha l - B\alpha\sin\alpha l &= \phi \end{aligned}$$

在过去的两个方程式中, 我们发现

$$\frac{\alpha l\tan\alpha l}{4\frac{h}{l}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+\frac{R^2}{l^2}\right)=1$$

取代其价值 P 我们得到了

$$\alpha l=\sqrt{\frac{P}{EI}}l=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2l^3}{EI}}\sqrt{\frac{h}{l}}$$

所需数量 h/l 以超越方程式为定义。

$$\frac{a}{4}\frac{\tan a\sqrt{\frac{h}{l}}}{\sqrt{\frac{h}{l}}}\left(2\frac{h^2}{l^2}+b^2\right)=1$$

与

$$a=\sqrt{\frac{\gamma\pi R^2l^3}{EI}}\quad\text{and}\quad b=\frac{R}{L}$$

29.3.2.2 与自由振动相似之处

25 目前所考虑的问题与二度自由大体喷泉系统 (Fig) 的振动非常相似。29.4 这也是一个 **特征值 问题**.

26 每個 质量 都會受到與 质量 相同的無效強度。加速度和春季力量:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{\mathbf{u}}_2+k\mathbf{u}_2+k(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)&=0 \\ m\ddot{\mathbf{u}}_1+k\mathbf{u}_1+k9\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_10&=0 \end{aligned}$$

或在 矩阵 格式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{U}}}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}\underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

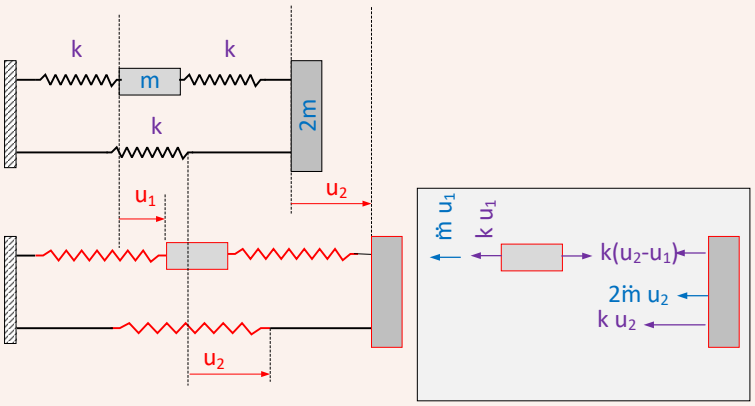


图 29.4: 2 DOF 动态系统

27 特征性方程式是 $|\mathbf{K}-\lambda\mathbf{M}|$ 哪里 $\lambda=\omega^2$, 和 ω 是 固有频率。

$$\begin{vmatrix} 2h-\lambda & -h \\ -h & 2h-2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

哪里 $h=k/m$. 减少到多元化

$$\lambda^2 - 3h\lambda + \frac{3}{2}h^2 = 0$$

解决, $\lambda=(3\pm-\sqrt{3})h/2$ 或

$$\omega_1 = 0.796\sqrt{k/m}$$
$$\omega_1 = 1.538\sqrt{k/m}$$

28 寻找模式形状 ϕ_1 和 ϕ_2 (相对大小的多夫) 我们在特征方程中取代, 并将第一个单元设置为 1:

$$\phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1.000 \\ 1.3660 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1.000 \\ -0.3660 \end{array} \right\}$$

29.3.2.3 有效长度因素 K

29 请记住,Euler 屈曲 荷载 是由一个粘贴的 柱 衍生。在很多情况下, 柱将有不同的边界条件。它可以要证明, 在所有情况下, 布克林负载将由

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{29.26}$$

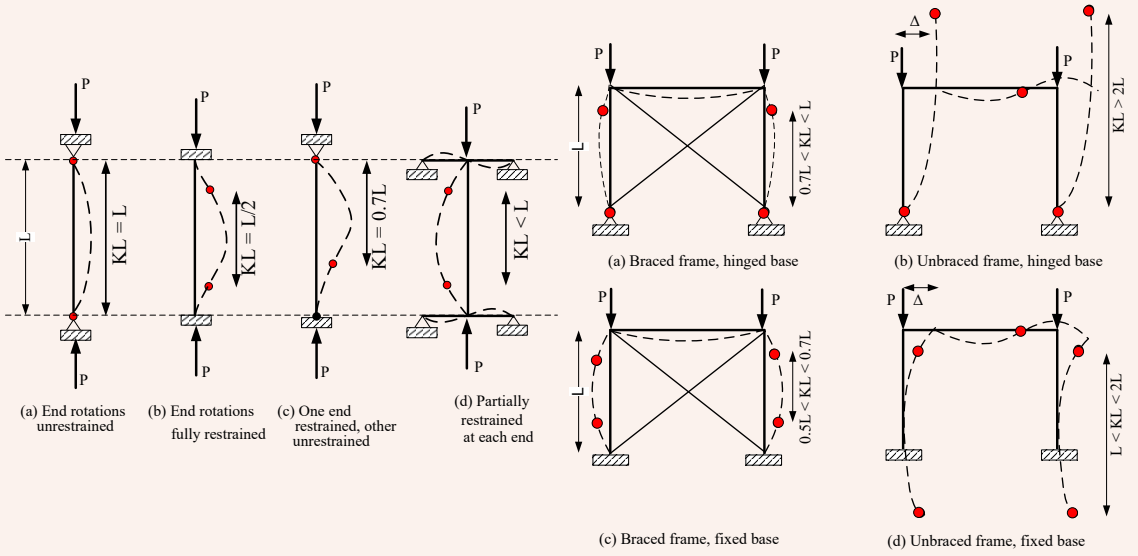
哪里 K 被称为 **有效长度因素** , 和 KL 是的, **有效长度**. 这样

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r_{\min}}\right)^2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

比例 $\frac{KL}{r_{\min}}$ 被称为 Slenderness 的比例。. 請注意這 $r_{\min}$ 应该是最小的旋转射线在无形方向 (s).

30 有效的长度, 只能通过数值或接近的方法来确定。**两个邻居之间的距离** (真实或虚拟) 通胀点, 图 29.5,



(a) 贝姆　　(b) 框架

图 29.5: 梁 和框架的有效长度

31 有效长度确定最常用的图表是由结构稳定研究委员会制作的图表。调整图, 为一个个体柱, 图 29.6 顯示在 图 29.7[1]. 值得注意的是, 该图表假设所有成员仍然处于弹性范围。

32 这个类型的图表被称为一个 **一个名称** 或 **名称**. 不幸的是, 这是一个被遗忘的艺术, 图形上代表了一个数学关系。换句话说, 它是一个双维图表设计的, 允许大约的图形计算 (通常是复杂) 数学功能。它被广泛使用多年, 为工程师提供复杂公式的快速图形计算到实用准确度。不幸的是, 它现在是时尚的, 并被计算机取代, 我们可能倾向于信任我们提供的所有重要数字。同样适用于滑板规则。

33 使用合并图表涉及计算 G 在每一个结局柱 使用下列公式

$$G_a = \frac{\sum \frac{I_c}{L_c}}{\sum \frac{I_g}{L_g}}$$

哪里 G_a 最终是坚固的 a 以 柱 為主。I_c, I_g 是的, 按时, 列和旋转器的直径。总结应仅包括严格连接的成员。 到该合并和躺在飞机上, 为此 屈曲 正在考虑。

[1]在形象中 G_a 和 G_b 相应为 0.18 和 2.0, 相应的 K 因此, 相当于 0.7。蓝线被称为 **指数线** 或 **以色列**中红线是 **尺寸轴**.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

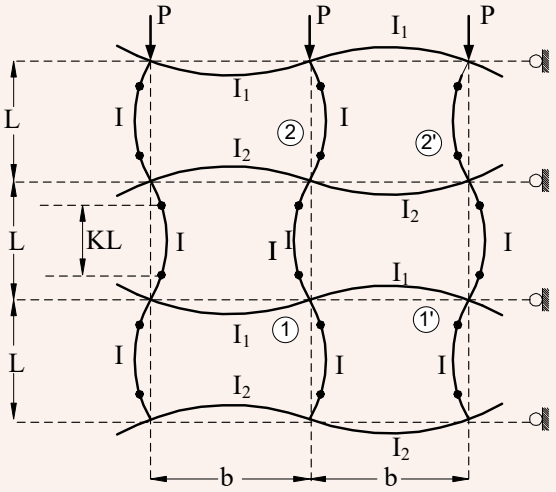


图 29.6: 列有效长度在多层多层框中

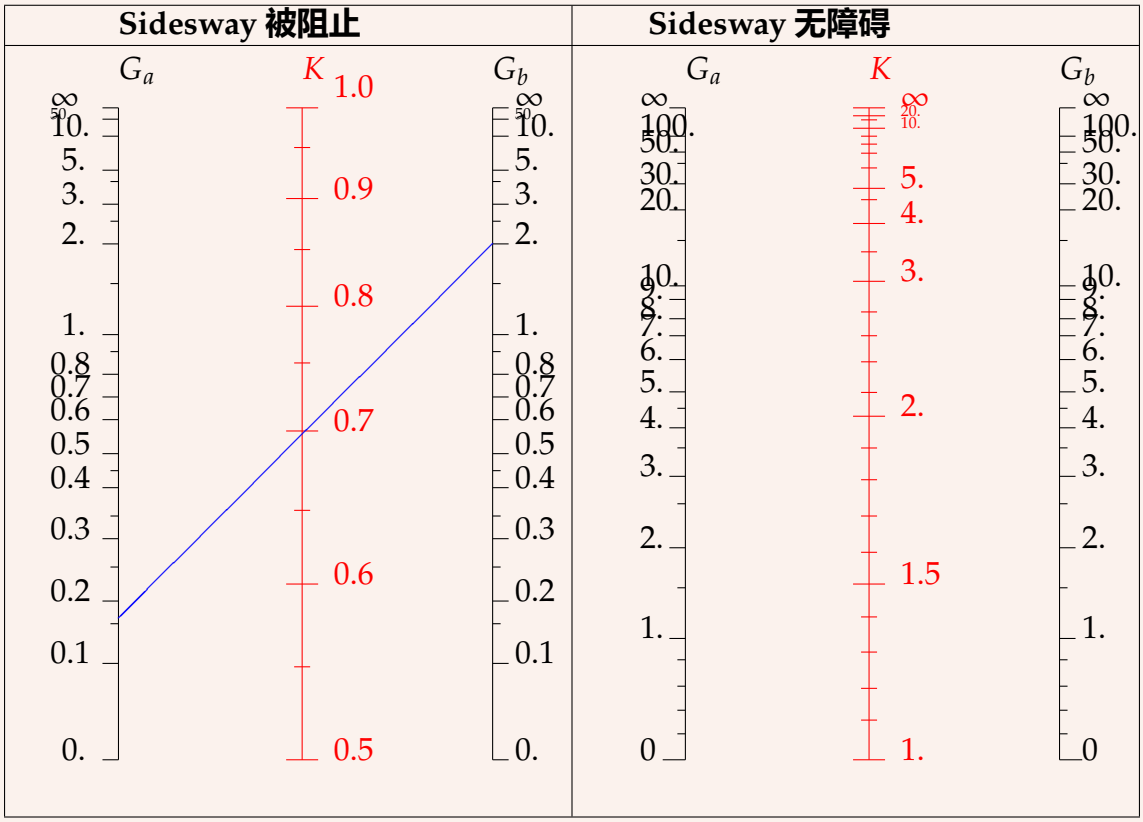


图 29.7: 半灵活连接的配置图 (American Institute of Steel Construction, 2016)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

34 因此, 一旦 G_a 和 G_b 这些价值观是确定的, 这些价值在适当的图表中通过直线连接, 以及 k 是这个线与中轴的交叉点。

35 替代:

$$\frac{G_A G_B}{4}\left(\frac{\pi}{K}\right)^2+\left(\frac{G_A+G_B}{2}\right)\left(1-\frac{\pi/K}{\tan \pi/K}\right)+\frac{2\tan \pi/2K}{\pi/K}=1$$

McGuire and Winter, 1968, pg. 467

29.3.2.4 无线列

36 有两个限制负载为一个柱

1. 批量部分的折扣 $P_{cr}=F_y A_g$, 发生在短密集列
2. 弹性 (Euler) 屈曲, Eq。29.26 $P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ 在长的滑板列中。

37 这些两个表达式是对实际 柱 屈曲 的无与伦比值。中间失败负担是由于剩余压力的存在而引起的, 这反过来会导致 **无线 屈曲**.

38 无线 屈曲 屈曲 发生时, 压力 (平均) 尚未达到 应力 的产量, 并基于 tangent 模块 E_t 低于初始模块 E.

39 剩余压力 (不平等的冷却) 将启动无线 屈曲, 图 29.8.

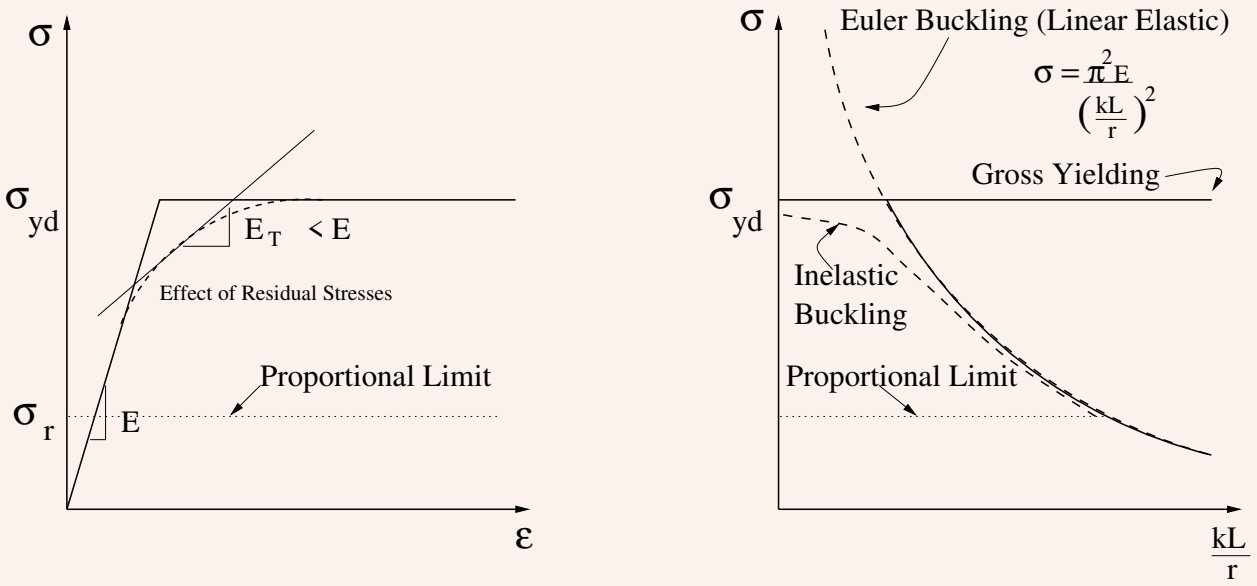


图 29.8: 无线 屈曲

40 不弹性泡沫曲线必须对两种 Euler 弹性的泡沫相同。(用于 Slender Columns), 和 到 收益应力 (对于坚固的列).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

[41] 结构稳定研究委员会 (SSRC) 提出了一个模拟曲线, 提供弹性屈曲和产量之间的过渡, 从而计算剩余压力的存在和结果不弹性的屈曲, 图 29.9.

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left[1 - \frac{\sigma_y}{4\pi^2 E} \left(\frac{KL}{r_{min}} \right)^2 \right]$$

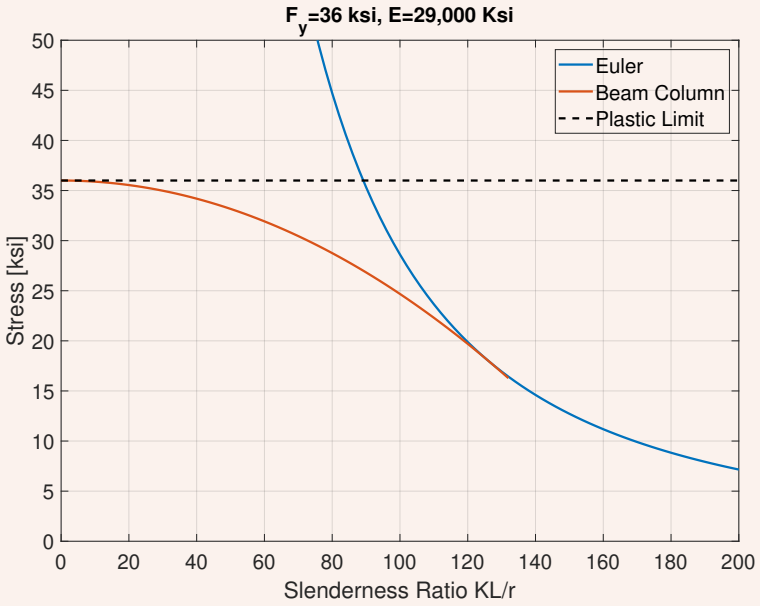
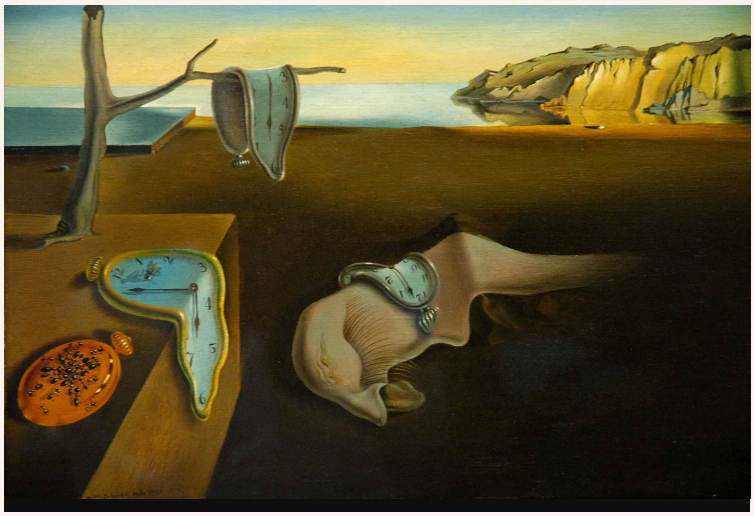


图 29.9: Euler 屈曲, ssrc 柱 曲线

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



《记忆的永恒》，萨尔瓦多 · 达利，*1931* 年

超现实的溶液时钟代表极端变形, 使绘画成为大型转移的完美形象, 结构在小型应变假设之外行事。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

30 索结构

摘要

电缆是能够维持大型变形的结构, 不断适应其地质以容纳负载, 并且仅携带紧张力量。这些特性使电缆既有价值又具有挑战性的分析, 这些复杂性将在本章中进行探索。我们从点负载和功能电缆开始, 然后转向分配的负载。分布的负载分为两种类型: 分布在预定长度上, 导致一个模拟形状, 和分布于索的弓长度下, 产生一个催化形状。在两种情况下, 不同的起点条件 (长度、*SAG*、支持等。) 需要不同的方程式。我们还将探讨温度的影响、索的扩展性以及它的前压。最后, 章节将以越来越复杂的例子来描述这个主题。

30.1 引入 941
30.2 集中负载 942
30.2.1 例题 30.1: 光学索 942
30.2.2 例题 30.2: 包含的光学索 . . . 944
30.2.3 例题 30.3: 索 甘道拉 945
30.3 分布的货物; 946
30.3.1 平衡方程 946
30.3.2 qdx • 侧 荷载; 平板 947
30.3.3 qds • 催眠 963
30.3.4 平板和基于凯特纳的解决方案之间的比较 970

30.1 引入

1 索 是具有零或可忽视的灵活性密度的滑板灵活成员, 因此它只能传输紧张力量。

2 任何点的紧张力量在坦根向索方向行动。(如同任何其他组件会导致灵活性).

3 它的强度源于其在地质学中经历广泛的变化能力。(荷载 应用的点上的插槽) 可容纳 荷载分布。

4 电缆抵抗垂直力量通过进行 SAG (h) 因此, 发展紧张势力。

5 这个力量的水平组成部分 (H) 被称为 Thrust .

6 索 支持者之间的距离称为 (西班牙).

7 sag 到 span 比例被称为

$$r = \frac{h}{l}$$

8 当一组集中负载被应用到一个索 (相对的) 可忽视的重量, 然后索分散到一系列线性部分, 结果形状被称为 X!聚合物。.

9 如果 索 只支持垂直力量, 则水平组件 H 索 压力 T 保持稳定 (因此, 两种水平反应都是平等和相反的。).

10 索结构的独特特点 (为此, 灵活的结构) 不僅是內部勢力不明, 而且地質也。换句话说, 因为地质与荷载不同 (平衡的方程式是基于变形配置的自由体图表) 它也必须确定。这也被称为几何非线性 . 因此, 索结构的分析不仅涉及反应和内部力量。(轴) 还有地质学。

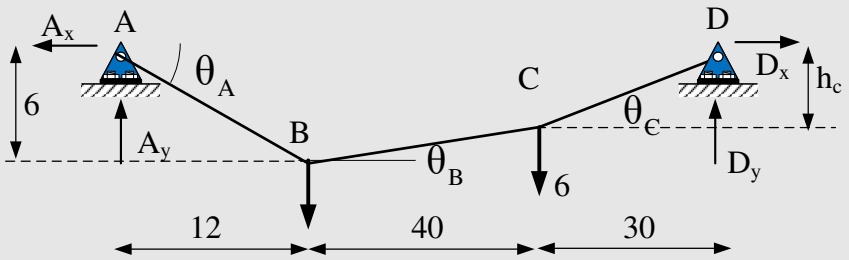
11 如果我们在应用负载之前从无负载、无压电缆开始, 问题必须以异常方式解决。(因为它是地质上非线性的). 另一方面, 我们通常在 荷载 应用之前开始一个紧张的 索。在这种情况下, 额外的变形通常很小, 我们可以将 索 视为不可扩展的, 而 平衡 的方程式就足以解决问题。

30.2 集中负载

12 支持点负载的电缆被称为 Funicular!Cable。. 它的分析是 **初步** 非常简单, 使用基本的平衡方程式。

13 我们将从一个简单的例子开始, 然后定义一个阴道索理论, 统治阴道的形状。

30.2.1 例题 30.1: 光学索



我们有 4 个外部反应, 但水平反应是相同的, 我们可以使用任何一个数量的方程式。条件除了三方程式的平衡. 首先, 我们解决了 A_y, D_y 和 $H = A_x = D_x$. 对于这个问题, 我们可以使用以下 3 个静态平衡方程式 $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$ 但是, 因为我们没有任何力量在 x 方向, 第二个方程式是无用的。相反, 我们将考虑下列 $\Sigma F_y = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. 请注意, 我们在这个问题上有 8 个未知 ($A_x, A_y, D_x, D_y, \theta_A, \theta_B, \theta_C$ 和 h_C), 我们有四个节点和两个平衡的方程式在每个节点。

1. 首先, 我们要解决 D_y

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_A = 0; \Rightarrow 12(30) + 6(70) - D_y(100) = 0 \Rightarrow D_y = 7.8 \text{ kip}$$

2. 然后我们解决了 A_y

$$(+\uparrow)\ \Sigma F_y = 0; \Rightarrow A_y - 12 - 6 + 7.8 = 0 \Rightarrow A_y = 10.2 \text{ kip}$$

3. 通过隔离自由体图 AB 来解决垂直力量

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_B = 0; \Rightarrow A_y(30) - H(6) = 0 \Rightarrow H = 51 \text{ kip}$$

4. 现在我们可以通过隔离自由体图 CD 来解决 C 点的 SAG。

$$(+\circlearrowleft)\ \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -D_Y(30) + H(h_c) = 0$$
$$\Rightarrow h_c = \frac{30D_y}{H} = \frac{30(7.8)}{51} = 4.6 \text{ ft}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 我们现在解决了索的内部力量或拖动, 在这种情况下

$$\tan\theta_A = \frac{6}{30} = 0.200 \Rightarrow \theta_A = 11.31\,\text{deg}$$
$$T_{AB} = \frac{H}{\cos\theta_A} = \frac{51}{0.981} = 51.98\ \text{kip}$$
$$\tan\theta_B = \frac{6-4.6}{40} = 0.035 \Rightarrow \theta_B = 2\,\text{deg}$$
$$T_{BC} = \frac{H}{\cos\theta_B} = \frac{51}{0.999} = 51.03\ \text{kip}$$
$$\tan\theta_C = \frac{4.6}{30} = 0.153 \Rightarrow \theta_C = 8.7\,\text{deg}$$
$$T_{CD} = \frac{H}{\cos\theta_C} = \frac{51}{0.988} = 51.62\ \text{kip}$$

14 根据前例的计算, 很明显, 步骤类似于一个简单支持的梁的分析, 范围相当于索的范围, 并携带相同的垂直荷载。我们还注意到, 索的形状和相当于梁的时刻图表是相同的, 图 30.1.

15 不是偶然, 我们有 $Hh = M$:

$$(51)(6) = (10.2)(30) = 306\checkmark$$
$$(51)(4.6) = (7.8)(30) = 234\checkmark$$

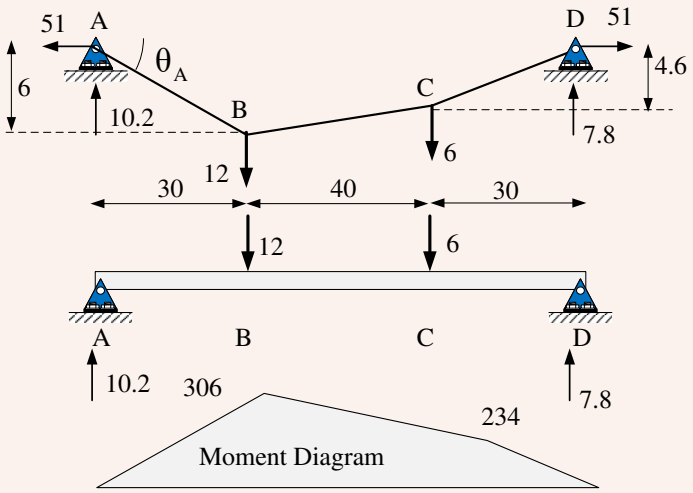


图 30.1: 索理论的验证

16 因此, 我们可以说

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

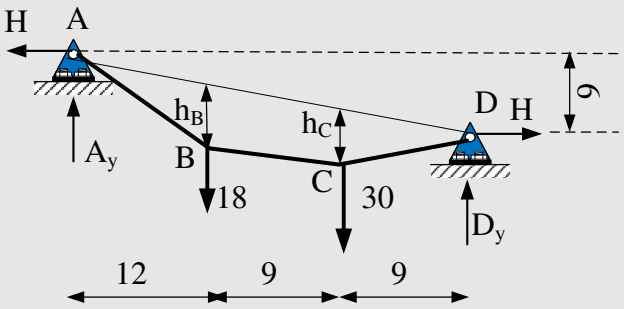
定义 30.1: 一般 索

在任何时刻, 在索上以垂直负载为作用, 电缆紧张的水平组件 9 的产物和从点到电缆轴的垂直距离相当于如果电缆所携带的负载在一个简单支持的线上运作时, 该部分会发生的旋转时刻。与索相同的范围。

17 这一点将进一步描述下面的例子。

30.2.2 例题 30.2: 包含的光学索

我们试图确定反应和问题 B 和 C 接下来的 Funicular。



使用 平衡 的方程式

$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 12(18) + 21(30) - 6H - 30D_y = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_D = 0 \Rightarrow 18(18) + 9(30) - 30A_y + 6H = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y A_y + D_y - 30 - 18 = 0$$

这三个方程式的解决方案是

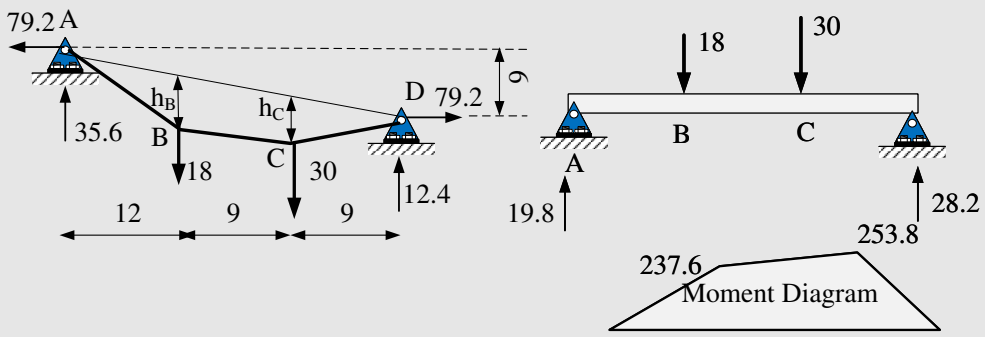
$$\lfloor\ A_y \quad D_y \quad H\ \rfloor = \lfloor\ 35.6 \quad 12.4 \quad 79.2\ \rfloor$$

相应的时刻图表显示在下面, 并且字符仅由

$$h_B = \frac{M_B}{H} = \frac{237.6}{79.2} = 3$$
$$h_C = \frac{M_C}{H} = \frac{253.8}{79.2} = 3.2$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



18 因此, 索字符可以轻松地从平衡和一般索理论的方程式中确定。

19 请注意, 通过扩展, 索的形状将保持一个单一的分布荷载在管道上将是模拟的。(相应时刻图的形状).

30.2.3 例题 30.3: 索 甘道拉

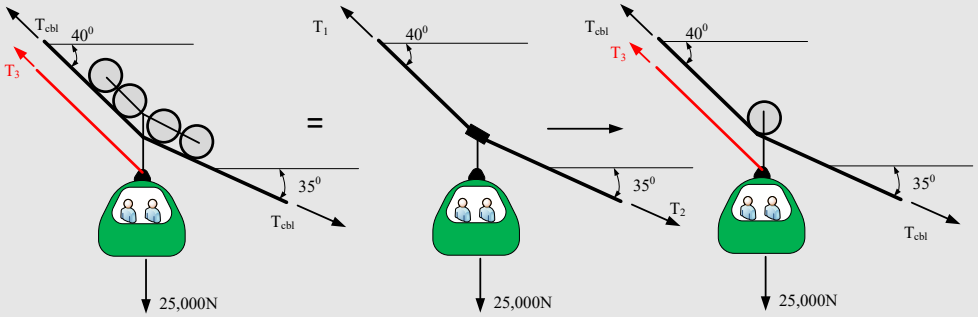
我们试图确定需要的力量来举起一个甘道 (由红色索), 由携带 索 支持 (黑色), 从一个较低的塔到一个更高的塔, 在一个恒定的速度上旅行。首先, 我们假设甘道是固定的。(cl cl) 到支持索的, 因此忽略了吸引一个, 我们有

$$\begin{cases} (\leftarrow\ \ )\,\Sigma F_x = 0 & \Rightarrow \quad T_1\cos(40) - T_2\cos(35) \\ (+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0 & \Rightarrow \quad T_1\sin(40) - T_2\sin(35) - 25,000 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 234,900 \\ 219,700 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

我们注意到, 索的压力大约是甘道重量的 10 倍, 并且 $T_1 > T_2$ 如果我们把甘道拉脱掉, 它会滑下来, 除非它被 T_3, 和 (采用支座系统的零振动) 我们应该在索中保持稳定的紧张 T_{cbl}. 因此

$$T_3 = T_1 - T_2 = 234,900 - 219,700 = 15,200 \text{ N}$$
$$T_{cbl} = 234,900 - 15,200 = 219,700 \text{ N}$$



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30.3 分布的货物;

20 在下一个部分, 我们将审查两个案例。首先, 负载均匀分布沿着电缆的预定长度。(例如, 支持均匀充电的桥梁。), 而另一个, 在那里索只是支持自己的重量 (均匀分布在弓长度).

21 在我们进展之前, 应该注意到, 在索分析中一个挑战性的问题是对某个问题的正确解决方案的多样性, 这是一个解决方案可能在水平力量、温度、最大紧张的组合方面。或 索 长度。这有时会导致解决方案, 或者与其他解决方案进行比较。

30.3.1 平衡方程

22 被暂停的 索 的自由体图与均匀 分布荷载 显示在 图 30.2. 一般来说,Span L 最大 SAG d 支持者之间的垂直距离 h 已知。

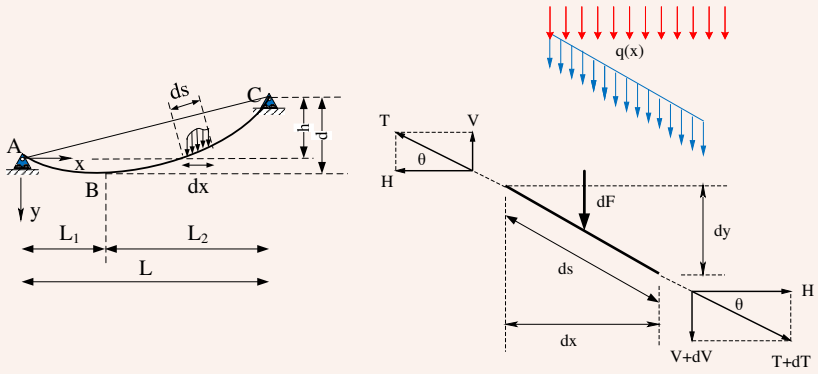


图 30.2: 索 地质学 # 1

23 在没有任何水平荷载的情况下, 我们 $H =$ 常态。

24 垂直力量的总结结果:

$$(+\downarrow)\,\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V + dF + (V + \mathrm{d}V) = 0 \tag{30.1}$$

$$dV + dF = 0 \tag{30.2}$$

哪里 V 是索的垂直组成部分 x.

25 因为 索 必须是坦克的 T 我们有:

$$\tan\theta = \frac{V}{H}$$

排除 V 又重写, 以 H 它在 索 沿着恒久的, 通过将其替换为 Eq。30.2

$$\mathrm{d}(H\tan\theta) + dF = 0 \tag{30.3}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30.3.2 qdx • 侧 荷载; 平板

30.3.2.1 地质学

26 索地质将有两个相当的方程式, 因为我们将需要两者为随后的衍生。

我在条件下 H, q, L

27 这一第一衍生将是视为水平强度。H, 荷载 q 和地质 L 和 h, 图 30.2

28 为一個單一的 分布荷载 沿著 x (如 索 支持桥梁盖) 我们有 $dF = qdx$ 和 EQ。30.3 可以重写为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H\tan\theta) = q$$

因为 H 是永久的 (没有垂直 荷载 适用

$$-H\frac{d}{\mathrm{d}x}(\tan\theta) = q \tag{30.4}$$

取代 $\tan\theta = \frac{dy}{\mathrm{d}x}$ 在 EQ。30.4 我们为电缆获得统治的差异方程式

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H} \tag{30.5}$$

29 与 flexure 相同的评论

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

30 双重融入提供

$$Hy' = -qx + C_1 \tag{30.6}$$

$$Hy = -q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{30.7}$$

C_1 和 C_2 从边界条件中获取: $y = 0$ 在 $x = 0$ 和 $y = -h$ 在 $x = L$

31 这会给

$$C_2 = 0$$

$$-Hh = -q\frac{L^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{2} - H\frac{h}{L}.$$

因此 Q。30.6 和 30.7 成为

$$y' = -\frac{q}{H}x + \frac{qL}{2H} - \frac{h}{L} \tag{30.8}$$

$$y = -\frac{q}{2H}x^2 + \left(\frac{qL}{2H} - \frac{h}{L}\right)x \tag{30.9}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, 索在形状上是模拟的, 这个方程式给了形状。$y(x)$ 至于地平线力量 H 到目前为止, 要确定。

二、关于 s, L

32 索的形状可以从 Eq 获得。30.9 (为 y) 和 EQ。30.23 为 H 把它们结合起来, 我们得到了

$$\frac{x\left(2d\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)(L-x)+h(x-2L)\right)}{L^2}$$

关于图 30.3.

33 以曲线平衡为准, 以色列的形状和 s, 图 30.3 我们设置 h=0

$$y=\frac{4sx}{L^2}(L-x)$$

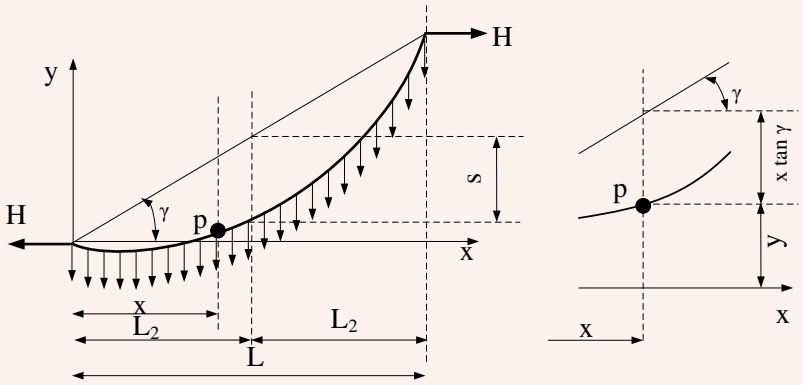


图 30.3: 索 地质学 # 2

34 我们回来, 现在试图确定索对水平轴的方程式。

$$y=\frac{4sx}{L^2}(L-x)+x\tan\gamma \tag{30.10}$$

Sag 大小

35 至于 ch 的最大值, 将是

$$s=\frac{qL^2}{8H} \tag{30.11}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36 萨格 d 至于最高的 支座 将由这两个方程式中的任何一个

$$d = \frac{hL^2 - 2hLL_1 + hL_1^2}{L(L-2L_1)} \qquad \text{in terms of } h \text{ and } L_1$$

$$d = \frac{\left(2hH + L^2q\right)^2}{8HL^2q} \qquad \text{in terms of } q \text{ and } H$$

最大 SAG 位置

37 最大 SAG 的定位 d (在 L_1) 有 $y' = 0$ 因此, 从 EQ。30.8

$$0 = -\frac{q}{H}x + \frac{0}{qL}2H - \frac{h}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{2} - \frac{Hh}{qL} = L_1 \;\&\; L_2 = \frac{L}{2} + \frac{Hh}{qL}$$

接收 AB 和 BC 的 A 和 B 相应时刻

$$\begin{aligned} H(d-h) - q\frac{L_1^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_1^2}{2d-h} \\ Hd - q\frac{L_2^2}{2} = 0 \Rightarrow H = q\frac{L_2^2}{2d} \end{aligned} \tag{30.12}$$

平等 H

$$q\frac{L_1^2}{2d-h} = q\frac{L_2^2}{2d} \Rightarrow L_1 = \sqrt{\frac{d-h}{d}}L_2$$

但 $L_1 + L_2 = L$ 因此

$$L2 = \frac{L}{\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1\right]} \tag{30.13}$$

给予的

$$L_1 = L - \frac{L}{\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1}$$

索 弓长度

38 一般情况下, 索的初始长度 L_{cbl} 它不被给予, 而不是, 例如, 它必须以一种方式确定, 以至于某种 索 sag 不超过。可以通过多样化实现 L_{cbl} 初步假设 σ_0 直到需要 SAG 实现。

39 索的长度是由

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{30.14}$$

40 我们将通过两个表达的长度, 第一在意义上 H 第二个, 在 s 和 L.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我在意思 H

41 提到二元理论无限系列扩展:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots \\ (1+b)^n &= 1 + nb + \frac{n(n-1)b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{3!} + \cdots \\ \Rightarrow \text{for } b^2 << 1; \sqrt{1+b} &= (1+b)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2\end{aligned} \tag{30.15}$$

因此, 我们将简化 eq。30.14 由

$$L_{cbl} = \int_0^L \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx \tag{30.16}$$

dy/dx 它是从 Eq 获得的。30.8, H 来自 EQ。30.23 数学的帮助, 我们得到了

$$\begin{aligned}L_{CBL} \simeq \frac{1}{120L^3}\Bigg\{&-3d^4\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^8 + 10d^2\left(\sqrt{1-\frac{h}{d}}+1\right)^4\left(2L^2-3h^2\right) - 15h^4 \\ &+ 60h^2L^2 + 120L^4\Bigg\}\end{aligned} \tag{30.17}$$

42 换句话说, 在 H

$$L_{cbl} = -\frac{h^4}{8L^3} + \frac{Lq^2\left(2L^2-3h^2\right)}{48H^2} + \frac{h^2}{2L} - \frac{L^5q^4}{640H^4} + L \tag{30.18}$$

二、关于 s 和 L

43 对于一个垂直的序列, 我们从 Eq 开始。30.10 将起源转移到最低点 (在中间的西班牙), 引导到

$$y = \frac{4s}{L^2}x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8sx}{L^2}$$

替代 EQ。30.14

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left(1 + \frac{64h^2x^2}{L^4}\right)dx$$

我们再次引用二元理论 Eq。30.15 保持结果系列的第一几个条款

$$L_{cbl} = 2\int_0^{L/2}\left[1 + \frac{1}{2}(64)\frac{h^2}{L^4}x^2 - \frac{1}{4}(64)^2\frac{h^4}{L^8}x^4 + \cdots\right]dx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

出生

$$L_{cbl} \simeq L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) \tag{30.19}$$

哪里 θ 如今已定义为

$$\theta = h/L \tag{30.20}$$

44 对于一个倾斜的索, 我们应该使用 dy/dx 来自 EQ。30.10 但是, 这将带来一个非常紧密的方程式。(通过数学)

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8\theta}\Big\{&\sqrt{\sec^2(\gamma)}(-L\tan(\gamma) - 4L\theta + 4s) \\ &+ L\left[(\tan(\gamma) + 4\theta)\sqrt{8\theta(\tan(\gamma) + 2\theta) + \sec^2(\gamma)} + \sinh^{-1}(\tan(\gamma) + 4\theta)\right] \\ &- L\sinh^{-1}(\tan(\gamma))\Big\} \end{aligned} \tag{30.21}$$

45 一个简化表达可以通过假设索的长度是相同的, 这将是一个索, 有一个水平索. 区块, 在那里范围相当于弯曲的索区块的长。$L\sec\gamma$ 和 SAG 等同 $s\cos\gamma$, 是从索到索的最大间隔的约定表达。这些假设:

$$\theta' = \frac{s\cos\gamma}{L\sec\gamma} = \frac{\theta}{\sec^2\gamma}$$

替换为 Eq。30.19

$$L_{cbl} = L\left(\sec\gamma + \frac{8}{3}\frac{\theta^2}{\sec^3\gamma}\right) \tag{30.22}$$

30.3.2.2 内部力量

水平力量

46 接下来, 结合 EQ。30.12 与 EQ。30.13

$$H = \frac{qL^2}{2d\left[\sqrt{\frac{d-h}{d}} + 1\right]^2} \tag{30.23}$$

最大压力

47 從 图 30.2[1]

$$\frac{T}{H} = \frac{ds}{dx} \Rightarrow T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

[1]由 Norris, C 改编。H、和 J。B。威尔伯“基本的结构分析. 1960.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

但是

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \Rightarrow T(x) = H\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{30.24}$$

[48] 一般情况下, 倾斜的索, 并使用 Eq。30.10

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{8sx}{L^3} - \frac{4s}{L} + \tan\gamma \\ &= \frac{8\theta x}{L^3} - 4\theta + \tan\gamma\end{aligned}$$

哪里 $\theta = s/L$ 与 SAG 比例相匹配。我们所获得的差异

$$T(x) = H\left(1 + \frac{64\theta^2 x^2}{L^2} + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - \frac{64\theta^2 x}{L} + \frac{16\theta x}{L}\tan\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \tag{30.25}$$

最大压力将在索的末端发生

$$\begin{aligned}&\text{For } x\text{=0}\,; T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma - 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &\text{For } x\text{=L}\,; T_{max} = H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{30.26}$$

30.3.2.3 弹性伸展

至于 θ 和 H

[49] 负载的 索 将遭受弹性延伸, 这可能会对阴道产生重大影响。萨格会只是 $\Delta L = FL/AE$.

[50] 尽管索的压力 $T(x)$ 随着长度的变化, 我们确定了平均压力, 如果在索的长度中应用, 会导致相同的整体弹性延伸。(Norris and Wilbur, 1960)

$$\frac{T_{avg} L_{cbl}}{AE} = \int_0^{L_{cbl}} \frac{T(l)dl}{AE}$$

A 和 E 保持稳定

$$\begin{aligned}T_{avg} &= \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} T(x)dl = \frac{1}{L_{cbl}}\int_0^{L_{cbl}} H\frac{dl}{dx}dl \\ &= \frac{H}{L_{cbl}}\int_0^{L}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx\end{aligned}$$

考虑到按水平长度均匀的负载, 以及倾斜的索轴承, dy/dx 可以从 EQ 中获取。30.10 我们得到

$$T_{avg} = \frac{HL}{L_{cbl}}\left(1 + \frac{16}{3}\theta^2 + \tan^2\gamma\right) \tag{30.27}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

最后, 我们使用 eq。30.22 要确定 索 延伸

$$\Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1+16\theta^2/3+\tan^2\gamma}{\sec\gamma+8/3(\theta^2/\sec^3\gamma)} \tag{30.28}$$

至于 q 和 L 和 L_{cbl}

51 在扭曲状态中倾斜的索的长度可以表达为:

$$\begin{aligned} L_{cbl}^{ext} &= \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ &= L_{cbl}\left(1+\alpha_T\Delta T-\frac{\sigma_0}{E}\right)+\int_0^L \frac{T\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA}dx \end{aligned} \tag{30.29}$$

其中包括热延伸 $\alpha\Delta T$, 初始 应力 σ_0, 和索的压力 T. 第二条 权利的第二条可以重写为 (使用 EQ。30.24)

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{T\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{EA}dx &= \frac{H}{EA}\int_0^L\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx \\ &= \frac{H}{EA}\int_0^L\left(\tan\gamma+\frac{V(x)}{H}\right)^2 dx \end{aligned} \tag{30.30}$$

從 图 30.4

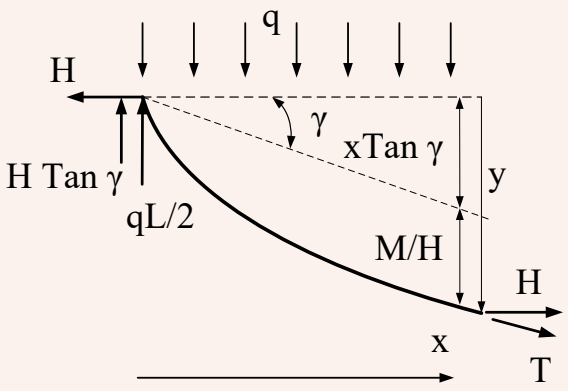


图 30.4: 倾向电缆的地质学, 受均匀水平转载负载

$$y=\frac{M(x)}{H}+x\tan\gamma;\quad y'=\frac{V(x)}{H}+\tan\gamma;\quad V(x)=H\tan\gamma+q\frac{L}{2}-qx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

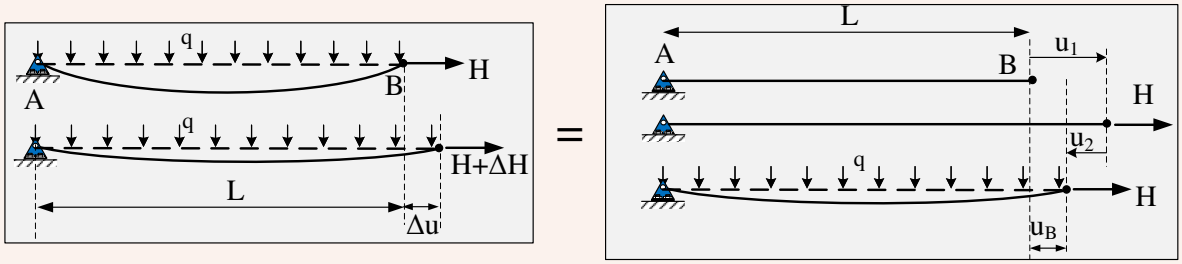
替代 EQ。30.30 和 30.29 这减少了

$$L_{cbl}^{ext} = L_{cbl}\left(1+\alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma)+8\theta^2+3\right) \tag{30.31}$$

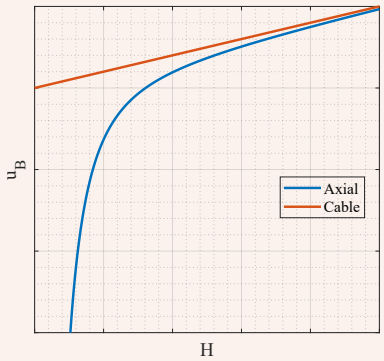
30.3.2.4 相同的轴性强度

49 硬度的术语相当于每单位移动的强度, 一个电缆是简单的 L/AE

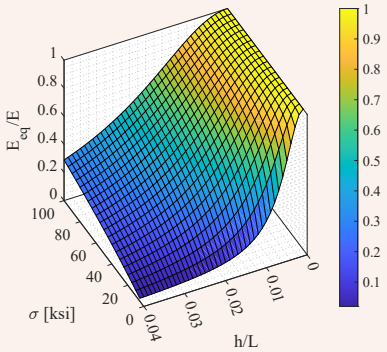
50 对于负载的 索, 硬度将是每单位相应延长的水平力量。在 图 30.5a 这将是 dH/du. 如下所示, 这种固度是通过灵活性期限的逆转来确定。(因单位力量而变形). 这个方法相对简单:



(a) 索 轴硬度



(b) 转换 荷载 缓解效应



(c) 同等 E 应力和 SAG 的意思

图 30.5: 索 硬度

1. 應用 H, 索 延伸 $u_1 = HL/AE$.
2. 与紧张 H 保持, 应用转 荷载 q 这会导致缩短。(Eq. 30.16)

$$u_2 = \int_0^L \left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right\} dx$$

和 $y(x)$ 由 EQ 提供。30.37, 替代, 收益

$$u_2 = \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 净位移, 及其衍生品与 H 这样会是

$$u_B = u_1 - u_2 = \frac{HL}{AE} - \frac{L}{24}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 + \frac{L}{640}\left(\frac{qL}{H}\right)^4 \tag{30.32}$$

$$\frac{du_B}{dH} = \frac{L}{AE} + \frac{L}{12H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{L}{160H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4$$

$$= \frac{L}{AE}\left\{1 + \frac{1}{12}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^2 - \frac{1}{160}\frac{AE}{H}\left(\frac{qL}{H}\right)^4\right\}$$

Eq. 30.32 被插入在 图 中 30.5b 和缓解效果 [2] 荷载的转型是明确确定的。

4. 但是, 我们真的很感兴趣的耐用期限。

$$\frac{dH}{du_B} = k_t = \left(\frac{1}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4}\right)\frac{AE}{L} \tag{30.33}$$

51 坦根硬度也可以在相当于 弹性模量 的意义上表达。E_{eq}

$$E_{eq} = \left(\frac{E}{1 + (1/12)(AE/H)(qL/H)^2 - (1/160)(AE/H)(qL/H)^4}\right)\frac{AE}{L} \tag{30.34}$$

值得注意的是, 侧 荷载 会减少硬度, 因此我们将始终有 $E_{eq} < E$.

52 我们可以替代

$$\sigma = \frac{H}{A}; \quad \text{and} \quad \frac{qL}{H} = 8\frac{H}{L}$$

以此为 Q。30.34 变成到

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{16}{3}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{128}{5}\frac{E}{\sigma}\left(\frac{h}{L}\right)^4} \tag{30.35}$$

因此, 相同的模块取决于初始 应力 在 索 和 sag 比例。此分類上一篇: 图 30.5c 我们在哪里注意到这一点 E_{eq} 随着 SAG 的增加或轴压力下降而减少。

[2] 这类似于 $P - \delta$ 对压缩 荷载 的列的效应, 如将在 §29.2.2 和 60.1.2.4.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30.3.2.5 特殊案例: 垂直管道

53 对于一个索的支持者在同一水平, 即 $h = 0$, 以前的一些方程式减少到:

$$\text{Eq. 30.9} \rightarrow y = \frac{4xs}{L^2}(L - x) \tag{30.36}$$

$$\text{Eq. 30.9} \rightarrow y = \frac{qx}{2H}(L - x) \tag{30.37}$$

$$\text{Eq. 30.23} \rightarrow H = \frac{qL^2}{8s} \tag{30.38}$$

$$\text{Eq. 30.17} \rightarrow L_{cbl} \simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L \tag{30.39}$$

$$\text{Eq. 30.18} \rightarrow L_{cbl} = -\frac{L^5q^4}{640H^4} + \frac{L^3q^2}{24H^2} + L \tag{30.40}$$

$$\text{Eq. 30.28} \rightarrow \Delta L = \frac{HL}{AE}\frac{1 + 16\theta^2/3}{1 + 8\theta^2/3} \tag{30.41}$$

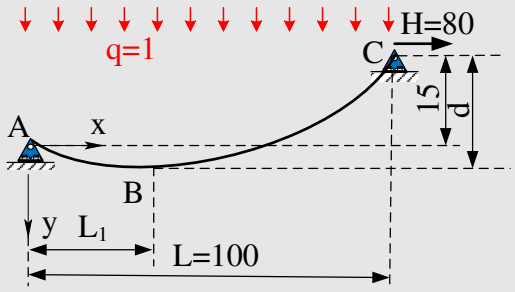
$$\text{Eq. 30.26} \rightarrow T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \tag{30.42}$$

$$\text{Eq. 30.30} \rightarrow L^{ext}_{cbl} = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T\Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2q\left(8\theta^2 + 3\right)}{12AE\theta} \tag{30.43}$$

哪里 s 是 SAG, 也是 EQ。30.42 $r = s/L$ (菲格 30.3), 和 $r = d/L$ 在 图 30.2. 可以通过 Eq 简化。30.15 (只保留第一期) 到

$$T_{max} = H\sqrt{1 + 16r^2} \approx H(1 + 8r^2) \tag{30.44}$$

30.3.2.5.1 例题 30.4: 包含 索 地质



答: 与 $H = 80, L = 100, h = 15$ 和 $q = 1$, 方程式的长度可以从 Eq 获得。30.18 并给予

$$L_{cbl} = -\frac{15^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2 - 3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + 100 = 107.03$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

下一篇: 我们解决 d 来自 EQ。30.23,

$$80 = \frac{5000}{\left(\sqrt{\frac{d-15}{d}}+1\right)^2 d}$$

哪些收益 $d = 24.025$ 我们通过计算来验证计算 L_{cbl} 来自 EQ。30.17 替代的,

$$L_{cbl} \simeq \frac{1}{120(100)^3}\left\{-3(24.02)^4\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^8 + 10(24.02)^2\left(\sqrt{1-\frac{15}{24.02}}+1\right)^4\left(2(100)^2-3(15)^2\right) - 15(15)^4 + 60(15)^2$$

换句话说, 在 H, Eq. 30.18

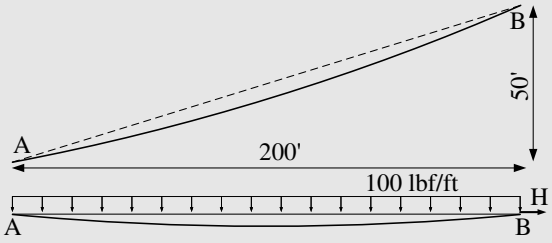
$$L_{cbl} = -\frac{(15)^4}{8(100)^3} + \frac{(100)(1)^2\left(2(100)^2-3(15)^2\right)}{48(80)^2} + \frac{(15)^2}{2(100)} - \frac{(100)^5(1)^4}{640(80)^4} + (100) = 107.03$$

最终, 最低点在距离 L_1 从左侧 支座 使用 Eq。30.3.2.1,

$$L_1 = 100 - \frac{100}{\sqrt{\frac{24.02-15}{24.02}}+1} = 38$$

30.3.2.5.2 例题 30.5: 包含 索 力量

支持每脚 100lbf 的单一负载的电缆在两点 200 英尺之间垂直隔离, 其中一个支持点高于另一点 50 英尺。索的电压调整到中间的 SAG (即垂直距离索字符串中间) 是 12.5 英尺, 我们试图确定最大 索 压力 和 索 的长度。



压力的水平组成部分由 Eq 提供。30.38

$$H = \frac{qL^2}{8s} = \frac{100(200)^2}{8(12.5)} = 40,000 \text{ lbf}$$

θ 和 $\tan\gamma$ 其次, 它是由 EQ 获得的。30.20 和 图 30.3

$$\theta = \frac{h}{L} = \frac{12.5}{200} = 0.0625$$
$$\tan\gamma = \frac{50}{200} = 0.25 \Rightarrow \gamma = 0.245 \text{ rad}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

最大压力发生在支座的高点, 并由 Eq 提供。30.26

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1+16\theta^2+\tan^2\gamma+8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 40,000\left(1+16(0.0625)\theta^2+(0.25)^2+8(0.0625)(0.25)\right)^{1/2} \\ &= 44,700 \text{ lbf} \end{aligned}$$

索的长度将从前两个衍生方程中确定。首先是具体的解决方案,Eq。30.21

$$\begin{aligned} L_{cbl} \simeq \frac{1}{8(0.0625)}\Bigg\{ &\sqrt{\sec^2(0.245)}\left[-(200)\tan(0.245)-4(200)(0.0625)+4(12.5)\right] \\ &+200\Bigg[\tan(0.245)+4(0.0625)\sqrt{8(0.0625)(\tan(0.245)+2(0.245))+\sec^2(0.245)} \\ &\quad +\sinh^{-1}(\tan(0.245)+4(0.0625))\Bigg]-(200)\sinh^{-1}(0.245)\Bigg\} \\ = 214.1 \text{ ft} \end{aligned} \tag{30.45}$$

接近, 以 Q。30.22

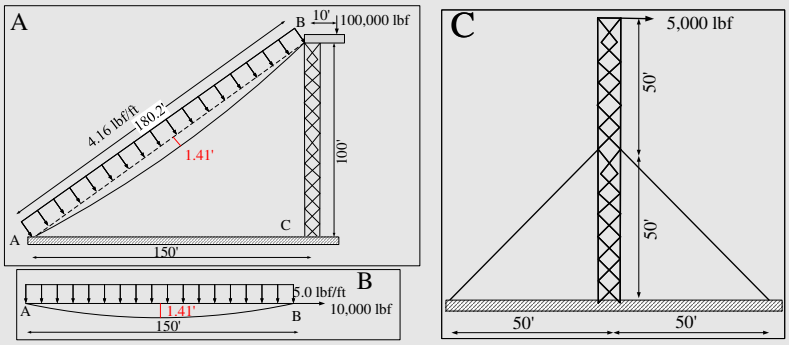
$$L_{cbl} = L\left(\sec(0.245)+\frac{8}{3}\frac{0.0625^2}{\sec^3(0.245)}\right) = 208.1\text{ft}$$

与更准确的解决方案的区别在于 3%.

30.3.2.5.3 例题 30.6: 盖伊德塔

下一篇: 重复 Norris and Wilbur, 1960 Elementary Structural Analysis.

假设一个重量为 4.16 lb/ft 的 索 将被用作男孩, 这需要这个男孩保持麻烦 BC 垂直应用时,10 万 lbf 的荷载 [a].



關於 支座 的瞬間

$$100H-100,000(10)=0 \Rightarrow H=10,000 \text{ lbf}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

H 然后必须开发, 以垂直保持粘贴。因为 4.16 lbf/ft 沿着 索 , 相当于垂直的 荷载 q' (使用 索 的同等值 在 图 中 B) 会是

$$q' = 4.16\frac{180.2}{150} = 5.0 \text{ lbf per horizontal foot}$$

索 sag 必须满足 Eq。30.38

$$H = \frac{qL^2}{8h} \Rightarrow h = \frac{qL^2}{8H} = \frac{5(150)^2}{8(10,000)} = 1.41 \text{ ft}$$

因为, 在这个接近的解决方案中, 索被认为是模拟的, 并且由一个单一的荷载的作用。

$$q = 4.16(180.2/150) = 5.0 \text{ lbf per horizontal foot}$$

男人的最大压力会发生在 B 使用 EQ。30.26

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\left(1 + 16\theta^2 + \tan^2\gamma + 8\theta\tan\gamma\right)^{1/2} \\ &= 10,000\left[1.0 + 16\left(\frac{1.41}{150}\right)^2 + \left(\frac{100}{150}\right)^2 + 8\left(\frac{141}{150}\right)\left(\frac{100}{150}\right)\right]^{1/2} \\ &= 12,240 \text{ lbf} \end{aligned}$$

值得注意的是, 接近上述解决方案可以通过考虑索作为直线绳子沿着管道的行动来实现。AB. 这个角的长度为 180.2 英尺; 紧张量将相当于

$$T_{max} = 10,000\left(\frac{180.2}{150}\right) = 12,000 \text{ lbf}$$

在此接近中引入的唯一错误是由于索的插槽在 B 事实上, 它比 ch 的更强大。除非索的 SAG 比例很大, 否则这种差异可能不重要。

通常需要在桅杆或其他拉索支撑结构上设置不止一根拉索，使桅杆能够抵抗多个方向的倾覆。在这种情况下，应将各拉索调整到一定的初始张力；通常采用约等于荷载作用下最大张力一半的初始张力。现假定拉索 AB 和 AC 的垂度已经调整，使桅杆未受水平荷载时，每根拉索张力的水平分量均为 6,000 lbf。按照上述近似分析方法，每根拉索的最大初始张力为 $6,000 \times 1.414 = 8,500$ lbf。当 5000lbf 的荷载应用于头顶时, 通过增加男人的水平压力组成部分来应用 10,000lbF 的水平强度。AC 相同的数量, 导致 $H_{AB} = 11,000$ lbf 和 $H_{AC} = 1,000$ LBF。最多男人的紧张程度等于

$$T_{max} = 11,000 \times 1.414 = 15,500 \text{ lbf}$$

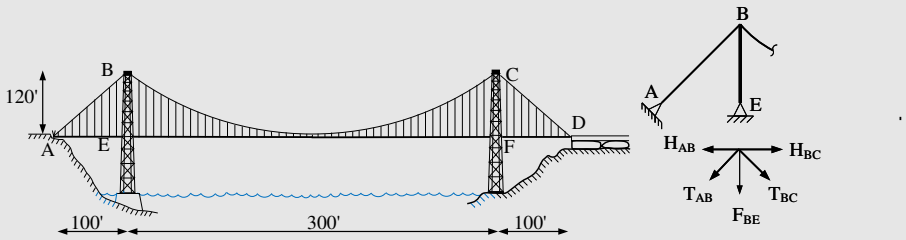
事实上, 当 5000lbf 的荷载应用于头顶时, A 向右移动。男士 AB 允许运动, 因为它经历了额外的弹性伸展, 并且由于它的相关术语缩小。男士中的 SAG AC 增加, 而那个男孩的长度以弹性缩短。准确的分析, 考虑到长度和长度的弹性变化, 可以是疯狂的, 但它相对复杂。

[a] 由 Norris, C 改编。H、和 J。B。威尔伯“基本的结构分析. 1960.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30.3.2.5.4 例题 30.7: 关闭桥梁

我们试图确定一座悬挂桥的初步直径, 承认可允许的索强度。σ_{all} 第 190 章 塔的基地被倾斜, 以避免巨大的旋转时刻。



恒载的总值估计为 200 psf。要做一个 SAG 到 SPAN 比例 $\frac{1}{5}$. 每個 索 所帶來的 恒载 將是整體 恒载 的一半或 $p_1 = \frac{1}{2}(200)\ \text{psf}(50)\ \text{ft}\frac{1}{1{,}000} = 5.0\ \text{k/ft}$. 使用 HS 20 卡车 (或其分配等值 荷载 的 0.64 k/ft 路线), 单一额外 荷载 每 索 是

$$p_2 = (2)\text{lanes/cable}(.64)\text{k/ft/lane} = 1.28\ \text{k/ft/cable}$$

因此, 整体设计 荷载 是

$$p_1 + p_2 = 5 + 1.28 = 6.28\ \text{k/ft}$$

震撼的 H 它是由 eq 定义的。30.38

$$H = \frac{pl^2}{8h} = \frac{(6.28)\ \text{k/ft}(300)^2\ \text{ft}^2}{(8)\,(60)\ \text{ft}} = 1,177\ \text{k}$$

請注意這 h 被授予 $r = h/L = 1/5$. 来自 EQ。30.44 最大压力是

$$\begin{aligned} T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (1,177)\ \text{k}\sqrt{1+(16)\left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= 1,507\ \text{k} \end{aligned}$$

请注意, 如果我们在 Eq 中使用了大约的公式。30.44 我们会得到

$$\begin{aligned} T_{max} &= H(1+8r^2) \\ &= 1,177\left(1+8\left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \\ &= 1,554\ \text{k} \end{aligned}$$

or 3% 差异! 索 沿着主要范围所需的交叉分区区域应相当于 $A = \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{1{,}507\ \text{k}}{190\ \text{ksi}} = 7.93\ \text{in}^2$ 相匹配的直径 $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{(4)(7.93)}{\pi}} = 3.18\ \text{in}$. 我们正在寻找在 AB 中确定索的力量。由于皮隆不能采取任何水平力量, 我们应该有水平组成部分。T_{max} 相同的, 与水平组成部分相反的 T_{AB} 或 $\frac{T_{AB}}{H} = \frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100}$ 这样

$$T_{AB} = H\frac{\sqrt{(100)^2+(120)^2}}{100} = (1,177)(1.562) = 1,838\ \text{k}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

索区域应该是 $A = \frac{1{,}838\ \text{k}}{190\ \text{ksi}} = 9.68\ \text{in}^2$ 相匹配的直径 $d = \sqrt{\frac{(4)(9.68)}{\pi}} = 3.51\ \text{in}$ 要确定在皮隆上运作的垂直负载, 我们必须添加垂直组件。T_{max} 和 T_{AB} (V_{BC} 和 V_{AB} 相应). 我们可以确定 V_{BC} 从 H 和 T_{max} 这样

$$P = \underbrace{\frac{120}{100}(1,177)}_{V_{AB}} + \underbrace{\sqrt{(1,507)^2 - (1,177)^2}}_{V_{BC}} = 1,412 + 941 = 2,353\ \text{k}$$

使用 A36 钢材 与可允许的 21 ksi 的 应力 , 塔的交叉分区应是 $A = \frac{2{,}353}{21} = 112\ \text{in}^2$. 请注意, 这样一座高塔的屈曲可能会控制最终尺寸。如果电缆要连接到一个混凝土区块, 则该区块的体积应该至少等于 $V = \frac{(1{,}412)\ \text{k}(1{,}000)}{150\ \text{lbs/ft}^3} = 9{,}413\ \text{ft}^3$ 或大约 21 英尺的圆圈

30.3.2.5.5 例题 30.8: 不可延伸的 索; 温度

一个垂直电缆,300 英尺长,50 英尺的中央电缆和 2k/ft 的单一负载, 我们试图确定地质变化, 因为温度上升 150°F, $\alpha_T = 6.6^{-6}$/°F. 垂直力量由 Eq 定义。

$$H = \frac{qL^2}{8s} = 450\ \text{kip}$$

索 长度 (Eq. 30.39)

$$\begin{aligned}
L_{cbl} &\simeq -\frac{32s^4}{5L^3} + \frac{8s^2}{3L} + L = 320.7\ \text{ft} \\
\Delta L_{cbl} &= \alpha \Delta T L_{cbl} = 0.317\ \text{ft} \\
\frac{\Delta L}{\Delta s} &\simeq -\frac{128}{5}\left(\frac{s}{L}\right)^3 + \frac{16}{3}\frac{s}{L} = 0.770 \\
\Delta s &\simeq \frac{0.317}{0.770} = 0.412\ \text{ft} \\
s + \Delta s &= 50.41\ \text{ft} \\
\Delta H &= 450 - \frac{qL^2}{8(s + ds)} = 3.68\ \text{kip}
\end{aligned}$$

或只有 0.82 %!

30.3.2.5.6 例题 30.9: 可扩展 索; sag

A 40.5 米长 索 (L_{cbl}), 与 $E = 195$ 千米 / mm^2 和 $A = 100\ \text{mm}^2$ 以水平的距离 $L = 40$ m 和由均匀的 分布荷载 加载 $q = 1.5$ KN / M。其 SAG 可以从 Eq 中确定。30.31 雖然 索 的實際長度是未知的, 因此我們引用 Eq。30.19 出生

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

替代[a] $\gamma = 0, \alpha_T = 0$ 和 $\Sigma M_0 = 0$ 收益 $\theta = 0.0900$ 这样

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = 40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right)$$

$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) = \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta}$$

$$40000\left(-\frac{32\theta^4}{5} + \frac{8\theta^2}{3} + 1\right) = 40.5 + \frac{10.2564\left(8\theta^2 + 3\right)}{\theta}$$

最小的根是 $\theta = 0.09$ 这样

$$\text{sag} = \theta L = 0.090(40) = 3.6 \text{ m}$$

水平紧张 H 其次是由 EQ 定义。30.23 与 $h = 0$

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{1.5(40)^2}{8(3.6)} = 83.3 \text{ kN}$$

[a]用数学解决

30.3.2.5.7 例题 30.10: 可扩展 索; 热

我们试图确定一个索的初始长度 L_{cbl} 延伸 $L = 40m$ 与 $E = 195$ 千米 / mm^2 和 $A = 100$ mm^2 和 $\alpha_T = 10^{-5}/°\text{C}$ 如下: 当被 $q = 1$ kN/m 和 $\Delta T = 40°\text{C}$ 一个 3m 的 SAG 已实现。再一次, 我们呼吁

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 + \alpha_T \Delta T\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

这样

$$\theta = \frac{3}{40} = 0.075$$

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = 40.591 \text{ m}$$

$$1 + \alpha_T \Delta T = 1.0004$$

$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) = 0.2776 \text{ m}$$

$$40.591 = 1.0004 L_{cbl} + 0.2776 \Rightarrow L_{cbl} = 40.297 \text{ m}$$

30.3.2.5.8 例题 30.11: 可扩展 索; 前列

我们试图确定需要达到 1 米的 SAG 为荷载的前压力。$q = 2$ m/m, 与 $L_{cbl} = L = 40.5m$, $E = 195$ 千米 / mm^2 和 $A = 100$ mm^2 再用, 使用

$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = L_{cbl}\left(1 - \frac{\sigma_0}{E}\right) + \frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right)$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

这样

$$\theta = \frac{1}{40} = 0.025$$
$$L\left(1 + \frac{8\theta^2}{3} - \frac{32\theta^4}{5}\right) = 40,067 \text{ mm}$$
$$L_{cbl}\left(1 - \frac{\sigma_0}{E}\right) = 40,000 - \frac{\sigma_0}{195} \text{ mm}$$
$$\frac{L^2 q}{12AE\theta}\left(6\tan^2(\gamma) + 8\theta^2 + 3\right) = 1,644 \text{ mm}$$
$$40,0067 = \left(40,000 - \frac{\sigma_0}{195}\right) + 1,644 \Rightarrow \sigma_0 = 7.688 \text{ kN/mm}^2$$

水平紧张 H 其次是由 EQ 定义。30.23 与 $h = 0$

$$H = \frac{qL^2}{8d} = \frac{2.0(40)^2}{8(1)} = 400 \text{ kN}$$

30.3.3 $q$ds • 催眠

有关历史背景，请参见 §30.3.3

30.3.3.1 地质学

54 现在, 让我们考虑一下索是否受其自己的重量影响的情况。(冰和风, 如果有). 然后, 我们必须替换 qdx 由 q_gds 在 EQ。30.2. 这个新案例的差异方程将与以前和 Eq 相同。30.5 变成

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\underbrace{\frac{q_g}{H}}_{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{30.46}$$

55 但是, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + dy^2$ 因此:

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{30.47}$$

56 这个差异方程的解决方案比 Eq 更复杂。30.5. 我们让 $dy/\mathrm{d}x = p$ 然后,

$$\frac{dp}{\mathrm{d}x} = a\sqrt{1 + p^2} \tag{30.48}$$

重新安排

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int a\mathrm{d}x \tag{30.49}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

左手是相同的。

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(p+\sqrt{1+p^2}) + c_1$$

右手将是

$$\int a dx = ax + c_2 \tag{30.50}$$

替代 EQ。30.49

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax + c_3$$

但在 $x=0$ 我们有 $\theta = dy/dx = p = 0$ 因此 $c_3 = 0$ 和

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = ax$$

我们简化

$$\begin{aligned} p+\sqrt{1+p^2} &= e^{ax} \\ \sqrt{1+p^2} &= e^{ax} - p \\ 1+p^2 &= p^2 - 2pe^{ax} + e^{2ax} \\ p = \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{2ax}-1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} = \sinh ax \\ y &= \int \sinh ax dx \\ &= \frac{\cosh ax}{a} \end{aligned}$$

最后方程式的替代形式是

$$y = c\cosh\frac{x}{c} \tag{30.51}$$

哪里 $c = 1/a = H/q_g$. 因此, 在 $x=0$ $y=c=1/a$ 相应于 图 中正确的坐标系统 30.6. 如果我们使用左方协调系统, 相应的方程式将是

$$y = c\left(\cosh\frac{x}{c} - 1\right) \tag{30.52}$$

57 弓的长度是重新安排 Eq。30.46

$$H\frac{d^2y}{dx^2}dx = q_g ds$$

集成

$$\begin{aligned} L_{cbl} &= 2\int_0^{L/2} \frac{H}{q_g}\frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{2}{q_g}H\frac{dy}{dx}\Big|_0^{L/2} \\ &= \frac{2H}{q_g}\sinh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \end{aligned} \tag{30.53}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

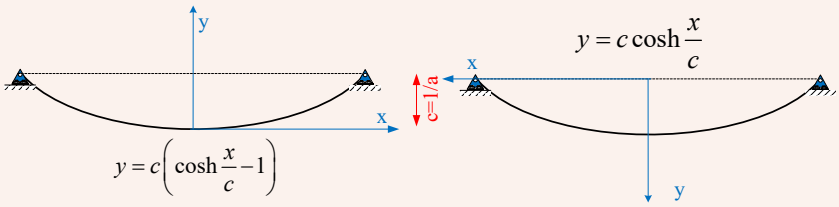


图 30.6: Catenary 替代参考协调

30.3.3.2 力量

58 沿着 索 的压力是由

$$T(x) = H\frac{ds}{dx}$$

来自 EQ。30.51

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c}$$
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

或者只是

$$T(x) = H\cosh\left(\frac{q_g x}{H}\right) \tag{30.54}$$

最大压力发生在支座 $x = L/2$

$$T_{max} = H\cosh\left(\frac{q_g L}{2H}\right) \tag{30.55}$$

30.3.3.3 加泰罗尼亚倾斜

59 接下来, 我们将从一个弯曲的角落中提取地质学。我们将遵循衍生 (Cella, 1999), 并提到图 30.7.

60 首先是 Q。30.51 我们可以轻松地发出 s 从

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (\sinh x/c)^2}dx = \int_0^x \cosh\frac{x}{c}dx = c\sinh\frac{x}{c} \tag{30.56}$$

取出来自 Eq 的衍生品。30.51

$$y' = c\cosh\frac{x'}{c}, \quad y' - v = c\cosh\frac{d - x'}{c}, \tag{30.57}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

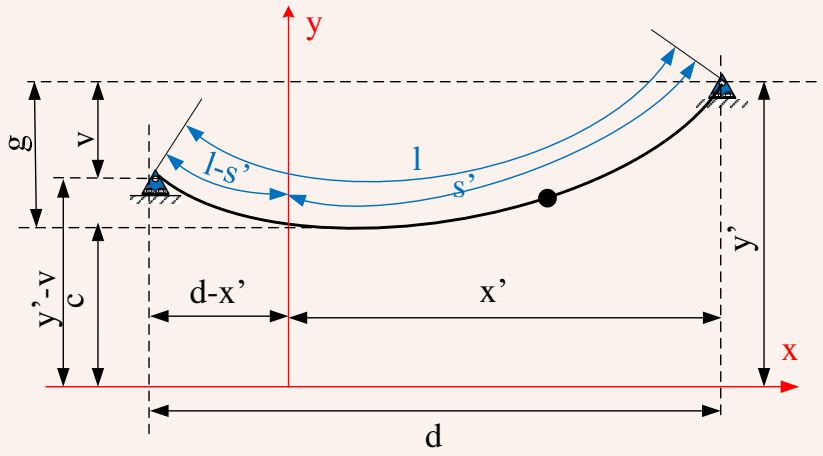


图 30.7: 的 incl, (Cella, 1999)

和 EQ。30.56 将给予

$$s' = c \sinh \frac{x'}{c}, \quad l - s' = c \sinh \frac{d - x'}{c}. \tag{30.58}$$

来自 EQ。30.57

$$v = c \cosh \frac{x'}{c} - c \cosh \frac{d - x'}{c}. \tag{30.59}$$

和 l 后来从

$$l = c \sinh \frac{x'}{c} + c \sinh \frac{d - x'}{c}, \tag{30.60}$$

这样

$$\frac{v}{l} = \frac{\cosh\left(x'/c\right) - \cosh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}{\sinh\left(x'/c\right) + \sinh\left(\left(d - x'\right)/c\right)}.$$

使用 hyperbolic 身份

$$\cosh a - \cosh b = 2 \sinh \frac{a + b}{2} \cdot \sinh \frac{a - b}{2}$$
$$\sinh a + \sinh b = 2 \sinh \frac{a + b}{2} \cdot \cosh \frac{a - b}{2}$$

取消后获取

$$\frac{v}{l} = \tanh \frac{2x' - d}{2c}$$

當被解決時, x'/c 收益

$$\frac{x'}{c} = \frac{d}{2c} + \tanh^{-1} \frac{v}{l} \tag{30.61}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

替换为 Eq。30.60 我们得到了

$$l = c \sinh\left(\frac{d}{2c} + \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) + c \sinh\left(\frac{d}{2c} - \tanh^{-1}\frac{v}{l}\right) \tag{30.62}$$

什么是用来定义的方程式 c 当未知的 g 最后, 从 图 30.7, $y' = c + g$ 和从 EQ。30.57 我们获得

$$c + g = c \cosh\frac{x'}{c} \tag{30.63}$$

因此, 知道 c 我们可以确定 g

30.3.3.3.1 例题 30.12: Sag 在一个倾斜的索

我们试图确定在 110 英寸长的电缆的顶部支持下方的线索, 这些线索分为 100 英尺垂直和 20 英镑垂直。使用 EQ。30.62 我们为 c 在非线性方程式中

$$110 = c \sinh\left(\frac{100}{2c} + \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) + c \sinh\left(\frac{100}{2c} - \tanh^{-1}\frac{20}{110}\right) \Rightarrow c = 72.288$$

替换为 Eq。30.61 给予 $x' = 63.291$ 最后, 从 EQ。30.63 我们得到 $g = 29.523'$ 同样, 方程式可以为处理未知变量的情况而产生的。v, d, or l.

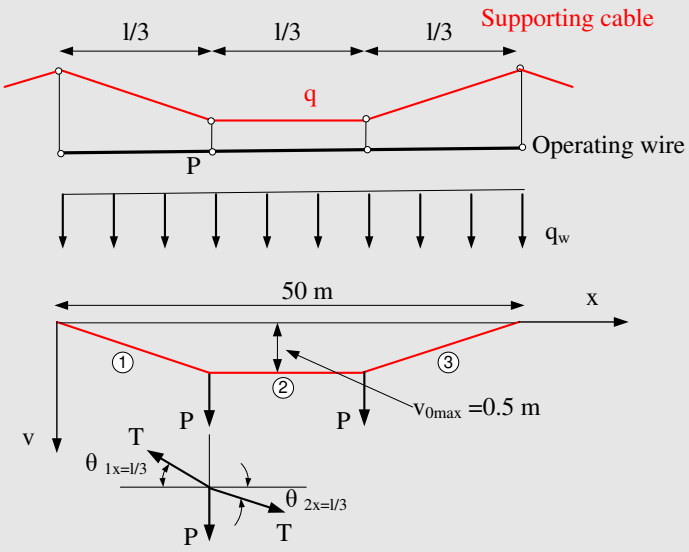
30.3.3.3.2 例题 30.13: Trolley 公交车电缆支持

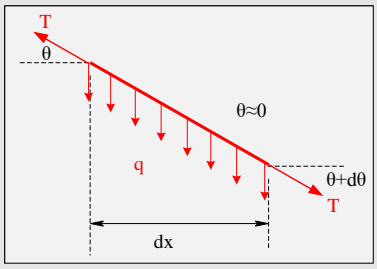
下一篇: 重复 Feodossiev, 1977 Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis.

我们正在寻求确定一个特洛利巴士线的运营电缆支持电缆的紧张和折叠曲线。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。





使用 $l = 50\text{m}$, v_{0max} 是 0.5 米。支持 钢材 的 索 有跨部分区域 $A = 0.6\text{cm}^2$ 缩小模块 [a] 以 弹性 $E = 8 \times 10^5\ \text{kgf / cm}^2$ 电线的重量 q_w 每单位长度为索的重量大于 1.5 倍 q.

首先,我们应该立即注意到,这是一个令人难以置信的“沙特”索结构与SAG到SPAN比例 $r = 1/100$ 因此,角落 θ 它会很小。

这个问题减少到一个索的分析,由两个集中力量负载。$P = q_w l/3$ 从方程式 30.38 我们有

$$T_0 = \frac{ql^2}{8v_{0\,\max}} \tag{30.64}$$

将 平衡 的方程式应用到 索 分区

$$T\theta - qdx - T(\theta + d\theta \Rightarrow \frac{q}{T} = -\frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \theta = \frac{q}{T}(C - x)$$

在 $x = l/2$ 我们有 $T = T_0$, 和 $\theta_0 = 0$ 这样 $C - l/2$ 和

$$\theta_0 = \frac{q}{T_0}\left(\frac{l}{2} - x\right) \tag{30.65}$$

哪里 θ_0 和 T_0 相应地,在下线被暂停之前,是挠度曲线的旋转和索中的紧张。

考虑左手部分 (1) 一半的中间部分 (2) 以 索 的。相应于我们所拥有的部分

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \tfrac{q}{T}(C_1 - x),\\ v_1 &= \tfrac{q}{T}\left(A_1 + C_1 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{3}\right);$$
$$\left.\begin{aligned}\theta_2 &= \tfrac{q}{T}(C_2 - x),\\ v_2 &= \tfrac{q}{T}\left(A_2 + C_2 x - \tfrac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}\left(\frac{l}{3} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

永恒的 $A_1, A_2, C_1,$ 和 C_2 根据以下条件确定: 当 $x = 0, v_1 = 0$• 当 $x = l/2, \theta_2 = 0$• 当 $x = l/3, \quad v_1 = v_2$ 和 $T\theta_1 - T\theta_2 = P$. 在此情况下

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{Pl}{3q}, \quad C_1 = \frac{P}{q} + \frac{l}{2}, \quad C_2 = \frac{l}{2}.$$

审查 EQ。30.14 我们有

$$L_{cbl} = \int_0^L \sqrt{1 + \theta^2} dx$$

我们可以使用二进制扩展, 并且假设小角度我们将有

$$L_{cbl} \simeq \int_0^L 1 + \frac{\theta^2}{2} dx$$

下一篇: 力量 T 是通过平衡自由挂的长度和紧 索 到紧张延伸之间的差异来确定。

$$\int_0^{l/3} \left(1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right) dx + \int_{l/3}^{l/2} \left(1 + \frac{\theta_2^2}{2}\right) dx - \int_0^{l/2} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right) dx = \frac{(T - T_0)\, l}{2EA}$$

或者, 在替换其价值后 θ, 和 EQ。30.65

$$\frac{q^2}{T^2} \int_0^{l/3} (C_1 - x)^2 \, dx + \frac{q^2}{T^2} \int_{l/3}^{l/2} (C_2 - x)^2 \, dx - \frac{q^2}{T_0^2} \int_0^{l/2} \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 dx = \frac{(T - T_0)\, l}{EA}$$

因此, 通过整合, 我们发现

$$\frac{q^2}{T^2} \left(\frac{P^2}{q^2} \frac{l}{3} + \frac{P}{q} \frac{2l^2}{9} + \frac{l^3}{24}\right) - \frac{q^2}{T_0^2} \frac{l^3}{24} = \frac{(T - T_0)\, l}{EA}.$$

替换为 T_0 (Eq. 30.64) 我们获得

$$\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^3 + \left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^2 \left[\frac{8}{3} \frac{EAv_{0\max}^3}{ql^4} - \frac{1}{8}\right] = = \frac{1}{3} \frac{EAv_{0\max}^8}{ql^4} \left(\frac{P^2}{q^2 l^2} + \frac{2}{3} \frac{P}{ql} + \frac{1}{8}\right)$$

进行 数值 计算:

$$P = \frac{q_v l}{3} = \frac{1.5ql}{3}, \quad \frac{P}{ql} = 0.5,$$
$$q = 0.6 \times 0.0078 = 0.00468 \text{kgf/cm},$$

哪里 0.0078kgf/cm^3 是 钢材 的具体重量; 因此, 我们获得

$$\frac{EAv_{0\max}^3}{ql^4} = 0.0205.$$

在这种情况下, 设计方程式将减少到以下:

$$\left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^3 - 0.0704 \left(\frac{Tv_{0\max}}{ql^2}\right)^2 - 0.00484 = 0,$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因此

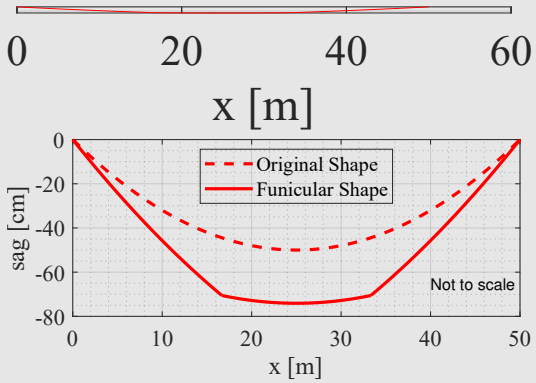
$$\frac{Tv_{0\max}}{ql^2} = 0.196, \quad T = 460\text{kgf}$$

挠度曲线的方程式 (对于外部部分的 SAG 是 v_1 而中间部分是 v_3) 变成

$$v_1 = 254\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

$$v_2 = 254\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}\right)\text{cm}$$

请注意, 事实上, 阴道几乎看不见!



这个数字清楚地表明你改变了索的形状, 以适应点负载。

[a]索的延长在紧张中不仅是由于它的弹性变形, 而且也是部分弯曲和旋转。电缆在紧张状态的弹性减少模块不稳定, 即电缆的紧张测试图表甚至在电缆中的弹性线条上也不线。首先, 索延伸紧, 电线之间的清洁度逐渐减少。在进一步的延伸中, 在电线之间的接触区域发生的地方变形的影响越来越大。

30.3.4 平板和基于凯特纳的解决方案之间的比较

61 Eq. 30.11 和 30.3.2.1 可以合并到达

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \text{ Parabola}$$

62 最后, 我们试图比较平凡和催眠。以此为例, Eq. 30.11 和 30.3.2.1 可以合并到达

$$y = \frac{q}{2H}x^2 \Rightarrow \frac{q}{H}y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{H}x\right)^2$$

至於我們的經典, 我們將重寫 Eq。30.52

$$\frac{q}{H}y = \cosh\left(\frac{q}{H}x\right) - 1 \text{ Catenary}$$

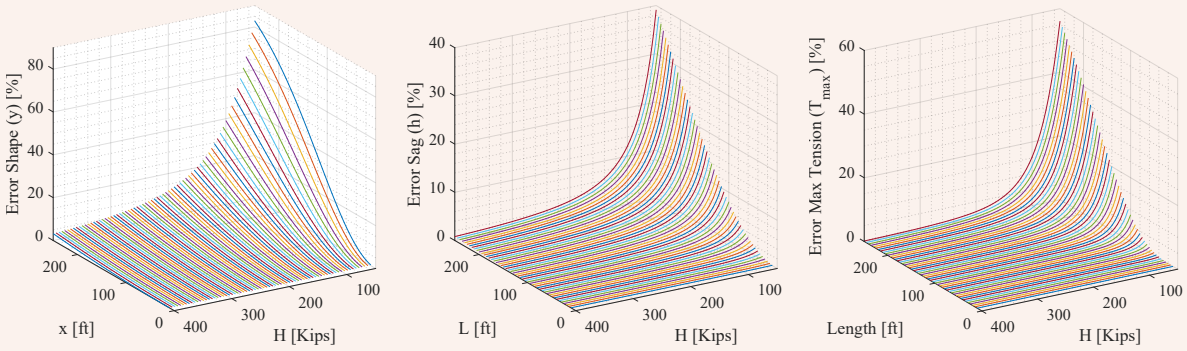
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

为了实现直接比较, 我们将表达超波利性同位素作为泰勒电源系列。

$$\frac{qy}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{qx}{H}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\frac{qx}{H}\right)^6 + \dots \tag{30.66}$$

这种发展的第一种术语与平凡的公式相同, 而另一种术语条款是两者之间的区别。差异仅为大 qx/H, 这就是与宽度相比的大型。(数字 30.8b).

63 对于具有 1.0 k/ft 的自我重量的 索 , 在 图 中显示了基于模拟和催化剂的解决方案之间的错误。30.8a, 30.8b 和 30.8c 相应地质、SAG 和最大压力。



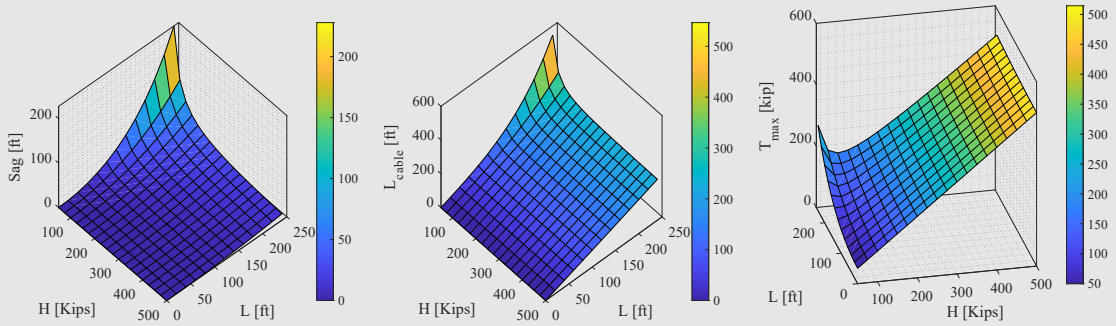
(a) 形状 (b) 萨格 (c) 最大压力

图 30.8: 基于卡特纳和帕拉博利的解决方案的比较

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30.3.4.1 例题 30.14: 加泰罗尼亚 vs Parabola

对于具有 1.0 kip/ft 的自我重量的 索 , 我们试图确定最大压力 T_{max},SAG h 和 索 的长度 L_{cable} 至于 H 和 L. 使用 EQ。30.53 和 30.55 对于 SAG, 索的长度和最大紧张性相应, 结果最好通过以下数字描述。





英卡之桥, 秘鲁

催化行动、荷载分布和平衡在灵活的结构中, 是现代悬挂桥的历史类似。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

31 马索尼亚档案的分析 (你的)

摘要

阿尔及利亚已经 "发明" 由罗马人, 并被使用了几个世纪。直到 *19* 世纪末, 这些人是胡子。*(*或马索尼亚大道*).*

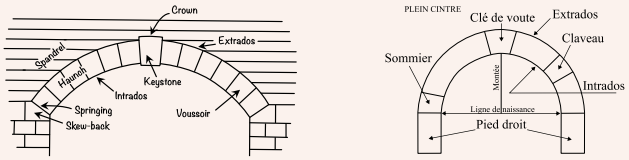
它们由精确切割的相关术语形块组成。每个人都对邻近区块的表面施压, 转载负担均匀。它们用于弓箭、瓦尔特、飞翔的胡萝卜等。

这个章节, 虽然不是完整的, 将提供一个介绍到这个时间测试结构, 分析没有被理解到 *18* 世纪。*(*虽然许多规则的泡沫显然被发现之前*).*

31.1 引入 973
31.2 一些历史记录 974
31.2.1 De la Hire; 1640 年至 1718 年 974
31.2.2 贝利多; 1698-1761 975
31.2.3 双胞胎; 1670-1744 978
31.2.4 丹尼西; 1698-1777 979
31.2.5 科隆布 1736-1806 979
31.2.6 莫塞利; 1801-1872 年 981
31.2.7 灵活的解决方案 981
31.2.8 皮帕德,1891 年至 1969 年 . . 982
31.3 管道的通用化方法; 香味 988
31.4 算法 992
31.5 最后评论 995
31.5.1 雅克 • 海曼,1925 年 995
31.5.2 Thrust 线 995
31.5.3 Thrust 线和 pippard 997

31.1 引入

1 尽管古代的胡子拱, 图 31.1 其广泛的使用, 它的行为理论似乎从未被充分审查; 虽然有大量



(a) 定义 (Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 PDF)

(b) 法语条款

图 31.1: 什么是胡子

的文学处理它的设计, 建议的方法主要是实验性的, 不考虑结构的机械学的基本特征。(Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 PDF). 雖然實際上, 可能對修道院的設計有很少的興趣, 但在世界各地的橋樑中有很多這樣的設計。

2 分析不增强的马索尼亚拱的复杂性最好被捕获

审阅稿

传统的未修复的马索尼亚建筑已经从西方新建筑活动中消失。然而, 必须保留马索尼亚的建筑遗产, 这涉及到结构分析. 经典结构理论不适用于具有未知边界条件的这种异常结构。然而, 有一个理论的马索尼亚结构基于关于材料的简单假设: 好的抗压强度, 几乎没有抗拉强度和一个建设性的照顾, 以避免滑落失败。这个理论出生于 17 世纪末, 在 18 世纪发展, 并在 19 世纪应用。它被遗弃, 最终在 20 世纪初被遗忘。半个世纪后, 在 1960 年代, 海曼将古老的理论纳入现代边界分析的框架中, 其有意义的批判性观察和经验宝藏。安全理论允许使用平衡方程式和简单的材料陈述引用。没有关于边界条件的声明, 无法了解和根本上改变, 就没有。(除了常见的力量和小移动).

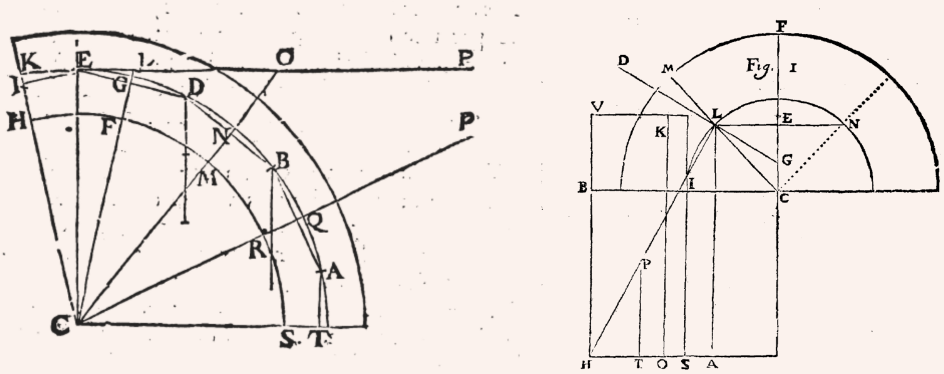
Huerta, 2008 *"The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan"*

31.2 一些历史记录

31.2.1 De la Hire; 1640 年至 1718 年

3 被迫遵循他父亲的脚步, 著名的画家在路易十四号法院, 德拉希尔 [1] 以色列疾病长期恢复后向地质学方向, 图 31.2.

4 de La Hire, Philippe, 1695 发表他的 特拉特 · 德 · *Mé* 卡尼克 它是第一个将 Funicular Polygon 概念应用到拱问题上。后来他发表了一项更全面的研究。后来, (de la Hire, 1712) 发布了一项程序, 以计算基于滑板崩溃机制的泡沫力量 (错误但安全).



(a) de La Hire, Philippe, 1695 (b) de la Hire, 1712

图 31.2: 德拉伊尔的拱分析

5 首先, 他将问题的复杂性定义为

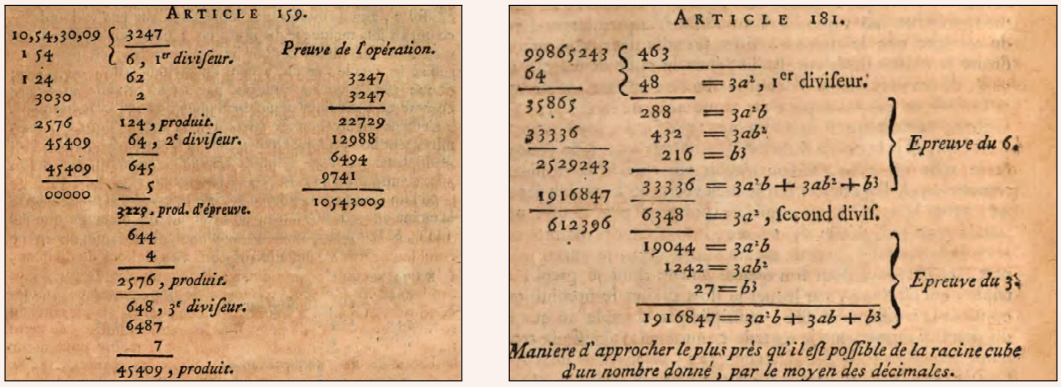
[1] 您可以在 de la Hire 的精彩生物学中找到 (Academie Royale des Sciences, 1741).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

> 这是一个问题, 更困难的是它在建筑中, 可知的 îitre la force que doivent avoir les pieds-droits des Voûtess pour en foutenir fa pouflee, & 建筑师们找不到 ée 朱元<à 此分類上一篇: Prevent Nothing Rules Certain Pour La Dé 终结。什么问题属性 à 拉 Mé 康奈, & c 是 par fon moyen que nous pouvons le ré 闪电, 以某些情感为主, 不符合情感。é 轻松在这些作品的冲突中。
>
> de la Hire, 1712 "*Sur la construction des voûtes dans les édifices*"

31.2.2 贝利多; 1698-1761

6 贝利多德首先是军事工程师。(de Belidor, B. F., 1757). 在这篇文章中, 他展示了在地质学、三角形和算法方面的伟大天赋。例如, 在 图 31.3 他描述了确定数字的四方和圆根的程序。



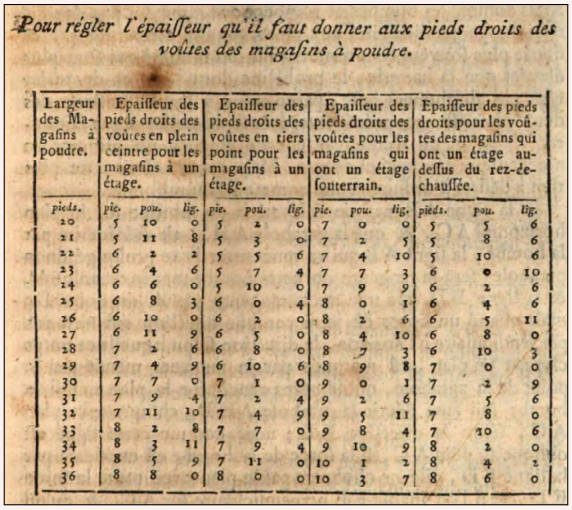
(a) 10,543,009 的平方根为 3,247　　(b) 99,865,243 的立方根为 463.9

图 31.3: 四方和圆根大数方法 de Belidor, B. F., 1757

7 在同一篇文章中, 他给出了一个表格来衡量 **脚杈** [2] 基于 De La Hire 的方法, 图 31.4[3].

[2]这个术语是指支持弓的垂直结构元素。(失败), 图 31.1b.
[3]有趣的是, 贝利多提供一个瓦尔特存储火粉的尺寸。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



Pour régler l'épaiſſeur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des magaſins à poudre.

Largeur des Magaſins à poudre.	Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en plein ceintre pour les magaſins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en tiers point pour les magaſins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes pour les magaſins qui ont un étage ſouterrain.			Epaiſſeur des pieds droits pour les voûtes des magaſins qui ont un étage au-deſſus du rez-de-chauſſée.		
pieds.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pie.	pou.	lig.	pieds.	pou.	lig.
20	5	10	0	5	2	0	7	0	0	5	5	6
21	5	11	8	5	3	0	7	2	5	5	8	6
22	6	2	2	5	5	6	7	4	10	5	10	6
23	6	4	6	5	7	4	7	7	3	6	0	10
24	6	6	0	5	10	0	7	9	9	6	2	6
25	6	8	3	6	0	4	8	0	1	6	4	6
26	6	10	0	6	2	0	8	2	6	6	5	11
27	6	11	9	6	5	0	8	4	10	6	8	0
28	7	2	6	6	8	0	8	7	3	6	10	3
29	7	4	9	6	10	6	8	9	8	7	0	0
30	7	7	0	7	1	0	9	0	1	7	2	9
31	7	9	4	7	2	4	9	2	6	7	5	6
32	7	11	10	7	4	9	9	5	11	7	8	0
33	8	2	8	7	7	0	9	8	4	7	10	6
34	8	3	11	7	9	4	9	10	9	8	2	0
35	8	5	9	7	11	0	10	1	2	8	4	2
36	8	8	0	8	0	0	10	3	7	8	6	0

图 31.4: 比利多的表尺寸垂直支座 (右脚) 根据《租金》的规定, de Belidor, B. F., 1757

8 贝利多的作品更多的是大尺寸化废物, 而不是挖掘弓。(婚礼).

9 在 (de Belidor, B. F., 1729) 贝利多尔将他的封面覆盖分为两部分: 一) 严格的理论 (第 2 和第 3 章); 和 B) 简化方法 (第 4 章). 在各个方面, 他探讨了各种各样的 (边界) 条件, 并按照理论/方法提供一个数值应用例子。

10 第四章 开幕式阅读

> 谁知道 Rè 以寻找石头的灵魂 voû 各式各样的 SPè 以数, 以数计算。为智慧的那些不明智的人,è 布里。
>
> ...
>
> 我是安格 é 第一本书的开端 à 给予以寻找石头的命令。û 以便, 以便通过计算算法, 并贡献 à 人的满意度谁, 尽管 TRès-habiles d'ailleurs dans l'architecture 军事建筑或民事, ne s'y sont point appliqué 是的。當經文為公眾, 以此为目的, 就必须尽可能。以便在某种程度上理解全世界, 主要是凡是知道事物的行事而满意的人, 也愿意 bien s'en rapporter a la bonne-foi d'un auteur.
>
> de Belidor, B. F., 1729 La science des Ingegnieurs

11 第一部分是 "抽象" 但最有趣的是第二部分, 翻译为

> **我在第二本书的开始时承诺给规则, 以查找谷物的厚度, 以便从算法计算中移动, 并为人们的满意度做出贡献谁, 虽然在军事建筑非常熟练或者民事, 不适用。写给公众时, 在这样的工作中, 必须到达广泛的观众, 特别是那些只想知道事物的实用方面的人, 更愿意在作者的专业知识上实现。**

事实上, 这是一个永久性问题面对工程教学在大学 [4].

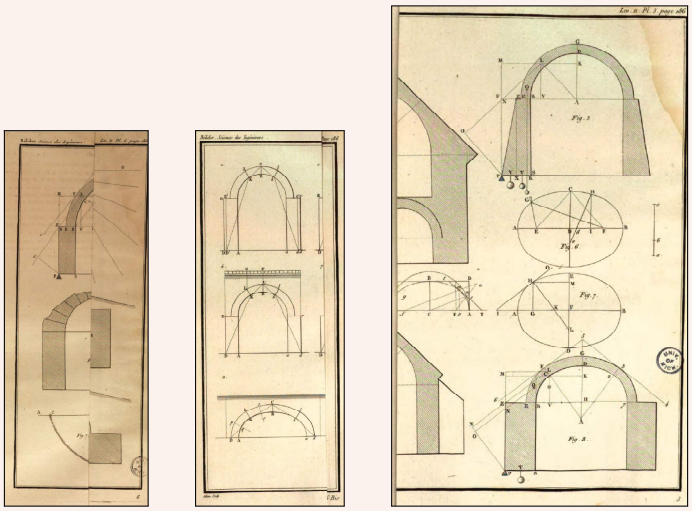
12 de Belidor, B. F., 1729 研究了一种四环失败机制, 与此不同。La Hire, 由 45 位的折叠品标志着。春天拱, 当雪花忽略接触面上的摩擦 (Brandonisio and De Luca, 2020)。在 Belidor

[4]此外, 还注意到布鲁塞尔之间的差异。"武装" 和 "民事" 工程师

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

模型中，拱中央楔块的滑动产生作用于扶壁的水平推力 T，该推力 T 有使扶壁绕 A 点倾覆的趋势；它由桥墩自重（W_{pier}）和拱其余部分的重量（W_{arch}）所平衡。此外，模型假定推力 T 作用在破裂面的中点（$t/2$），并垂直于裂缝（图 31.6）。因此, 从 平衡 的条件来确保过渡稳定性, 最小泡沫厚度可以根据 Belidor 的评估失败标准:

$$T.d_T \leq W_{arch}(t).d_{Warch} + W_{pier}(h,B).d_{Wpier}(B) \Rightarrow B_{min,Belidor} = B(t,R,h)$$



(a) (b) (c)

图 31.5: 档案分析 (de Belidor, B. F., 1729 PDF)

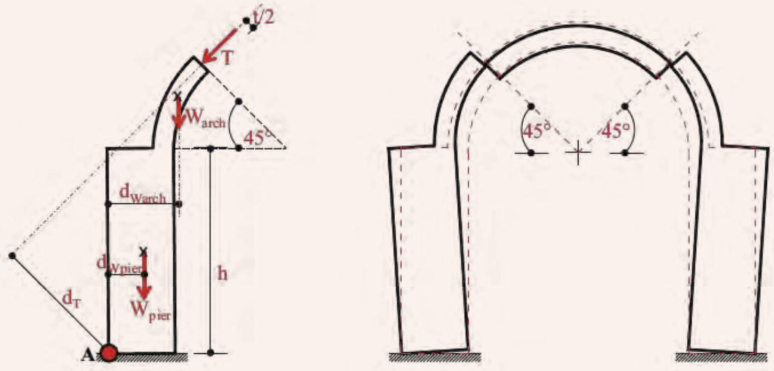


图 31.6: 贝利多的失败标准 (Brandonisio and De Luca, 2020)

13 回到故障模式的定性描述, 并引用图 31.5b (顶一) 贝利多尔写道

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

该分析表明，当拱顶即将破坏时，它分成四个部分：两个下部通过边缘 D' 和 d' 支承在基座上，两个上部通过边缘 K 和 k 支承于下部，并沿边缘 C 相互抵靠。若发生破坏，这四部分会像绕铰链一样围绕这五条边转动，直至点 K 和 k 分离到其水平距离等于线段 KC 与 kc 之和。此时上部失去支承，垂直坠落，拱顶完全倒塌。若以直线 $D'K$、KC、$d'k$、kC 连接作为转轴的各边，则可把这些直线视为端部以铰链连接的活动杠杆，每根杠杆承受相应拱段的重量。显然，杠杆的平衡条件与拱顶完全相同：上部 KCk 的重量沿 CK 和 ck 方向分解后，成为作用在端点 K、k 的力；这些端点分别属于杠杆 $D'K$ 和 $d'k$，趋使它们绕固定点 D' 和 d' 向外转动；而下部 $D'E'$、$d'e'$ 的重量使同一杠杆向内转动，拱顶稳定性取决于这些力的平衡。至于破坏接缝 K 和 k，它们位于拱顶最薄弱之处；更严格地说，是作用于 K、k 并企图使扶壁 $D'L$、$d'l$ 绕固定点 D'、d' 倾覆的压力矩，相对于这些扶壁自重矩达到最大之处。

31.2.3 双胞胎; 1670-1744

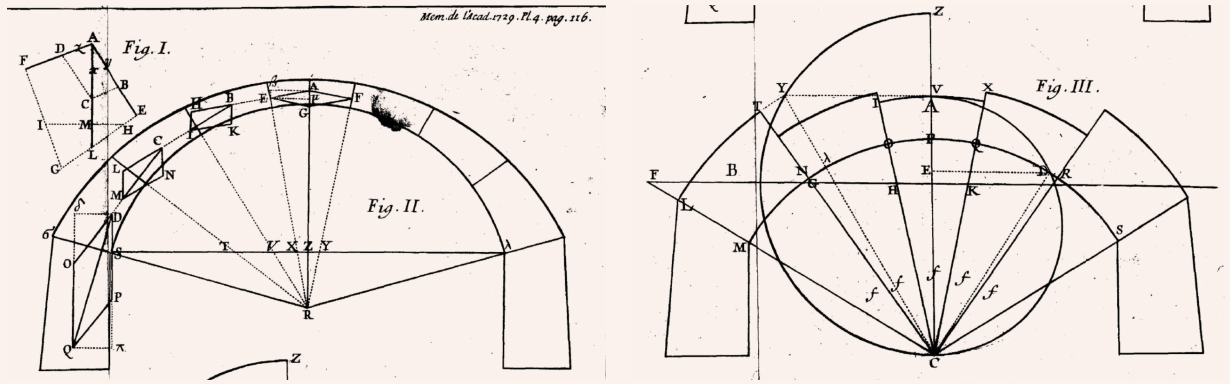
14 Couplet 出版 2 大论文 (Couplet, 1729) 和 (Couplet, 1730).

引用从他的第一 *mé* **莫尔** 在哪里他使用力量的平行图 [5] 考虑到焦虑:

若力 x 分解为两个力 y 与 z，则这三个力之间的比值，是否与由垂直于这三个力方向所作的三角形各边之比相同。此结论在几乎所有力学著作中都已有证明。

Couplet, 1729 *"De la poussée des voûtes"*

15 将力量的平行图应用到三角形, 其侧面对势力的方向是偏向的想法是由于德拉希尔。它有利于将瓦尔特循环的射线纳入问题。这很重要, 因为这个循环的射线将在随后的工作中成为曲率的射程。有了想象力的一些延伸, 可以说这是使用差异计算的一个可耻的步骤。



(a) 图 I & II　　(b) 图 第三

图 31.7: 档案分析 (Couplet, 1729)

16 在他的第二篇文章中, Couplet, 1730 第一個正確地說, 一個相关术语的正確失敗模式是通過形成四部分的機制而發生。

[5] 已知史蒂芬 §14.5.4

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

31.2.4 丹尼西; 1698-1777

17 Danyzy, 1732 是第一个在架子模型上进行系统测试, 以确定正确的倒塌机构。(因此, 检查 Couplet 的建议故障模式。), 图 31.8.

18 他做了两个原始贡献:

1. 注意曲线的无形性质, 定义一个拱或瓦尔特在高度方面所需的泡沫。换句话说, 可以从一个泡沫尺寸规则中减少到泡沫的尺寸, 即使没有考虑到高度, 只要有人考虑到无形值。
2. 试图定义一个新的规则, 在那里它不考虑高度, 而是密钥中的相关术语厚。

丹尼齐没有发表他的承诺记忆, 其中只有

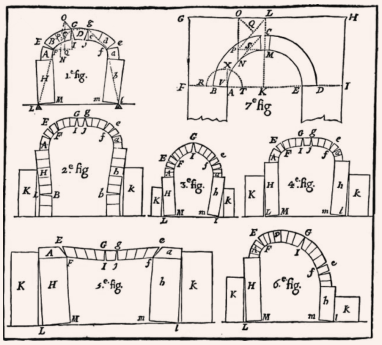


图 31.8: 塑料模型 Danyzy, 1732

31.2.5 科隆布 1736-1806

19 其中一个最早的分析是由 Coulomb, 1773 在他的研讨会中, 关于震动的论文。他在第十七章中对抗无情的毛巾 (图 31.9) 在下一个案例中, 引发被计算的情况。

十七
您在 Vû 以此为主, 以此為主; 以此不为主。é 菲昂

这个公式 fe 找到准确的 la mê 我的什么细胞谁 A été dé 终点 é 和 M。Euler (饰 Le Troifié 我的 体积阿卡德 é 我的 Pé 特拉福) 以一个链条的形状, 狂热 é 以某种方式, 有几点。谁应该有效到达; 车, 在旋转的曲线上, & La 泰纳 à 首頁 PRécé 牙齿, 适用 é 可爱 à 一或一的案例, & 女士 PRéifé 饰 Mê 预言。阿里 • 雷夫特,La Mé 德 • 德 • M。Euler 沒有什麼共用與 celle-ci , que le ré 被打。

由此 Té 奥里, 我没有樱桃 é 什么 à 填写奖项 ére 定位 Dé 基利布, 谁要求所有的力量谁以一部分的 Voû 天下之人, 必定要悔改。天下之人, 但易易。假设你是满意的 Mê 电子时间 à 二人之道条件, 谁要求这 ré 山之墓之間点 M & m; car, puifque la force conflante A agit perpeiidiculaireinent au joint vertical Ga, 在某个点什么 S , 只有在条件下逃脱。é 定位即将完成的线路,RéFultantes 必须 Couper 所有人加入, 它形成一个曲线平行 èle à 路线 inté 天下之人, 天下的天下, 天下的天下。ù la 强迫一个 Feroit 应用 é 首頁 〉 外文書 〉 Line des Prefions Feroit 正如 Mê 我是 AMB。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

十八
由 Lé 平衡 Voû, 在有 é 保守在摩擦和 à 拉科 é 菲昂。

fro fro 不信任 不信任 é 拉布尔在莱斯马特 é 里亚克斯, 我们雇用 à 混合的 Voû 特斯, 为了让他们 DIFé 上一篇: 清洁品 无人机 点 点 Gliffer L'un 反之亦然; 在某种情况下, 可以 é 微笑, 奖励 ère 条件 Dé 定位; & 以 n 加 né 天文学家:La Ré 福特以色列的力量, 一部分什么都 ûte foit perpendiculaire aux joints qui la terminent; mais feulement 她在这些关节上掉下来。阿尼菲,Né 拉 • 科赫 (La Coh)éf jo 的 jo , 在 vo 中 要做的事情 û 以新造的结论; 足够的, 最多 $\frac{\phi g M}{MQ}$ 为 Dé 终止力量 B_i, & 最少的 $\frac{\phi g M}{mQ}$ 为 Dé 终结 B' 除此之外, 他还需要更让他强迫 B 阿吉特 G 是的, 要让她力量 B 首頁 〉 外文書 〉 西洋文學 〉 Aufhi petite qu'elle puiffe ê 三。值得一提的是,Lorfqu'on cherche à 修复 Lé 饰 Dé 平衡此分類上一篇: f < 点 G & M, il faut fuppofer que ces points font 阿菲斯 é 洛伊尼 é 外部的 Sé 米特 é 合并, 为了加入假冒不允许 à 这些力量打破了他们英格兰; ce qui fe dé 终结为 Mé 我们所拥有的雇用 é 是寻找一个柱子的力量。

Coulomb, 1773 "*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*"

20 十七年 (没有冲动, 也没有凝聚力) 他首先认为, 一个拱的理想形状是相同于一个被逆转的催眠室的形状, 其形状由 Euler 确定。(提到桌子 15.5 事实上, 加迪在设计中充分利用了这一点。**圣家家族**). 然后他说, 冲动线应该保持在地质中内限。

21 正如讨论的 Heyman, 1997 十八年 (与震动), 图 31.9 他展示了一半的拱, 并考虑到拱在其自己的重量和水平振动的作用下失败, H, 在冠冕上通过点行动 f (几乎看不见). 首先要拿材料 (如土) 既有震动, 又有一致性。(Shear 力量), Coulomb 确定了价值的 H 需要在飞机上滑动的拱故障。Mm. 因此, 拱的失败取决于物质特性。然而, 库隆布立即指出 "拱建造中使用的材料的振动往往如此高, 以至于毛巾永远不能互相滑动。". 然后他得出结论, 如果失败发生在部分 Mm, 它必须是由一个部分的弓旋转, 或 m 或 M.

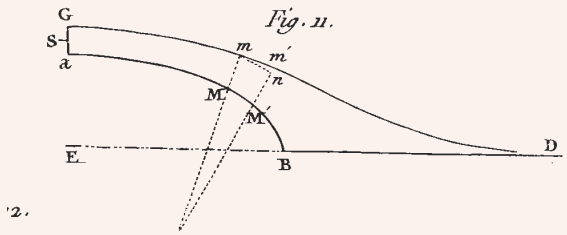


图 31.9: 无情的毛巾分析 Coulomb, 1773

22 If ϕ 是部分的重量。$GaMm$ 拱, 在行中的作用 $g'g$, 它将被看到, 如果转角发生在 M,

$$H = \phi \frac{gM}{MQ} \tag{31.1}$$

而且, 如果关于 m,

$$H = \phi \frac{qg'}{mq} \tag{31.2}$$

这些表达为 H 包含材料的 密度 和 拱 的尺寸, 但不涉及材料的强度。因此, 这些表达式是拱的稳定性纯地数学表明。

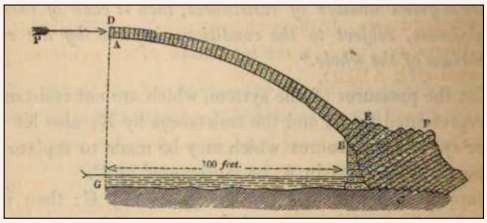
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

23 科隆布表示, 最高值的 H 需要从 EQ 寻找。31.1 考虑到不同失败和行动线的跨部分 H 同样, 必须从 Eq 中找到最低值。31.2. 库伦布指出, 一个试验和错误的方法是非常准确的, 因为最高或最低是非常 “平板”.

31.2.6 莫塞利; 1801-1872 年

24 一早 “声称名声” 莫斯科是他的 **最少压力的原则** 首先发表在 (Moseley, 1833) 后来在他的书中 [6] (Moseley, 1869), 图 31.10 .

> 它被认为是静态的新原则。如果在平衡中有任何数量的力量, 其中有一个抵抗系统进入, 那么这些抵抗是这样的, 他们的总数是最小; 每一个被认为是其应用点的坐标的功能, 以积极的信号采取, 并受整个平衡所要求的条件。
>
> Moseley, 1833 *“L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure”*



335. *Of all the pressures which can be applied to the highest voussoir of a semi-arch, different in their amounts and points of application, but all consistent with the equilibrium of the semi-arch, that which it would sustain from the pressure of an opposite and equal semi-arch is the least.*

Let EB represent the surface by which an arch rests upon

图 31.10: 莫塞利的最低抵抗原则 (Moseley, 1869)

25 我找到了这 “新原则” 要混淆。然而, 它似乎与马克思所讨论的工作有点相似。§15.5.4.2.

26 很久之后, Moseley, 1869 很清楚地说, 稳定的要求是, 冲动线不应该穿过整个交叉部分。另一方面, 如果它落在中三分之一之内, 那么没有压力。

31.2.7 灵活的解决方案

31.2.7.1 卡斯蒂格利亚诺; 1847-1884

27 卡斯蒂格利亚诺的两个理论革命了结构分析, 并被用来分析弹性弓, (Castigliano, 1879).

28 在他的书中, 他详细描述了 1827 年由查尔斯 • 莫斯卡建造的桥梁在多拉里帕里亚 (Dora Riparia), 图林 (图) 上。31.11. Catsigliano 将图林的桥梁视为一个弹性拱有三种折叠, 其价值观他将其转化为计算和他显示一个破碎的拱 (即不完美弹性拱) 可以通过试验和错误来处理, 他为桥梁做三组计算。

29 在第一, 对胡子间的摩托床的弹性进行完整补贴, 水平流动性冲浪的价值计算为 352,990 kgf/m 桥宽。如所述, 由 (Heyman, 1969) 卡斯蒂格利亚诺将计算到无数的显著数字。

[6] 它是广泛接受的, 并被西点使用。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Étude du pont en pierre de taille
construit sur la Doire à Turin, par l'Ingénieur Ch. Mosca

(Planche XV)

1. Données générales. – Corde de l'intrados . . 45m,00
Flèche de l'intrados 5m,50
Rayon » 48m,773
Amplitude » 54° 56′ 42″
Épaisseur de la voûte à la clef 1m,50
» » aux naissances 2m,00
Corde de l'extrados 46m,846
Flèche » 5m,226
Rayon » 55m,102
Amplitude » 50° 18′ 42″
Largeur du pont, y compris les garde-corps . . 12m,60.
2. Charges. – La voûte du pont est en granit du Manalaggio

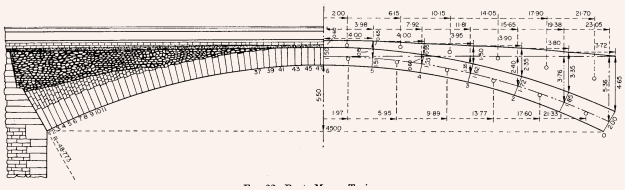


图 31.11: 查尔斯 • 莫斯卡 (Charles Mosca) 的桥梁 (塔林) 由分析 (Castigliano, 1879 PDF)

31.2.7.2 温克勒;1835 年至 1888 年

30 艾米尔 • 温克勒 (Emil Winkler) 是以弹性基础上的闪电分析而最著名的。(“温克勒的春天”), 不清楚他也是第一个进行弹性分析的弓箭。(Winkler, 1879 PDF) (Winkler, 1880 PDF), 图 31.12.

Lage der Stützlinie im Gewölbe.

Vortrag, gehalten im Architekten-Verein zu Berlin am 12. Januar 1880 von E. Winkler.

(II. Theil. Fortsetzung zu Jahrg. 1879, S. 130 dies. Ztg.)

In dem I. Theil meines Vortrages habe ich die hauptsächlichsten Gewölb-Theorien hinsichtlich der Lage der Stützlinie besprochen und bin dabei zu dem Resultate gekommen, dass nur die auf die Elastizitätslehre gegründete Theorie als richtig anzuerkennen ist und dass dieselbe in neuerer Zeit immer mehr Vertreter findet.*)

Bei der Besprechung dieser Theorie haben wir uns die Gewölbe im normalen Zustande vorgestellt, d. h. in einem solchen Zustande, dass unmittelbar vor dem Beseitigen des Lehrgerüstes zwar noch keine Drücke in den Fugen existiren, wohl aber alle Fugen vollständig geschlossen und die Widerlager absolut unverrückbar sind.

Wir haben dort den Satz aufgestellt, dass diejenige Stützlinie die richtige ist, welche die Mittellinie des Gewölbes ausgleicht oder für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Mittellinie ein Minimum ist. Hieraus folgt, dass in dem Falle, wo sich eine Stützlinie konstruiren lässt, die mit der Mittellinie zusammen fällt, die Mittellinie in der That die Stützlinie ist.

Beide Sätze sind nur annähernd richtig und nur bei nicht zu flachen Bogen anwendbar; sie ergeben sich nämlich, wenn man den Einfluss der Fugendrücke auf die Deformation gegen den der Momente vernachlässigt. In der That ist es nicht gut denkbar, dass bei einem Gewölbe in normalem Zustande die Stützlinie mit der Mittellinie zusammen fällt; denn beim Ausrüsten senkt sich das Gewölbe etwas, es ändert sich somit die Krümmung an den einzelnen Stellen; es treten somit beim Senken Momente ein oder die Stützlinie tritt aus der Mittellinie heraus. Der Krümmungs-Radius wird am Scheitel grösser, an den Kämpfern, der festen Anstemmung halber, kleiner, was darauf hinaus kommt, dass die Stützlinie im Scheitel hinauf, an den Kämpfern dagegen herab rückt (Fig. 5). Bezeichnen wir den Abstand der Stützlinie von der Mittellinie im Scheitel und an den Kämpfern mit c und b, die Bogenhöhe mit h, die Gewölbdicke mit d, so ergiebt sich annähernd durch die im ersten Vortrage aufgestellten Bedingungen für flache Bogen bei totaler Belastung:

elliptischen Bögen öffnen sich die Fugen an höher liegenden Bogentheilen.

Beim Ausrüsten öffnen sich die Fugen in Folge der Zusammendrückung des Bogens noch mehr, während sie sich als Wirkungen der entstehenden Momente und der hieraus resultirenden Verdrehungen zum Theil wieder schliefsen. Die genauere Untersuchung mit Hülfe der Elastizitäts-Theorie giebt, dass der aus beiden Ursachen resultirende Betrag e, um welchen die Fugen sich wieder schliefsen, bei flachen Bögen annähernd:

$$e = \frac{9\,l^2}{8\,E\,d}\,\frac{4\,h - 5\,d}{8\,h^2 + 10\,h\,d + 5\,d^2}$$

ist. Dieser Betrag ergiebt sich aber im allgemeinen kleiner, als der aus der Senkung des Lehrgerüstes resultirende, vielfach beobachtete Betrag, so dass in der That die Fugen im allgemeinen geöffnet bleiben, also ein Aufruhen an den unteren Kanten der Kämpferfugen oder vielmehr an einer diesen Kanten nahe liegenden Stelle eintritt (Fig. 6). Das Gewölbe verhält sich alsdann so, als ob dasselbe auf Gelenken ruhte, die sich nahe an den unteren Kanten der Kämpferfugen befinden. Bei Gewölben mit grofsem

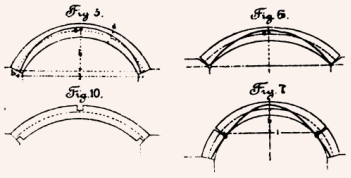


图 31.12: 温克勒的弹性分析 (Winkler, 1880 PDF)

31 他的方法比卡斯蒂格利昂的更严格和普遍。

31.2.8 皮帕德,1891 年至 1969 年

32 有兩個有趣的貢獻由 Pippard。首先, 就像 Danyzy, 1732 考验了双重理论, Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 PDF 进行测试, 以确定胡子的失败理论, 图 31.13 由卡斯蒂格利亚诺预言。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

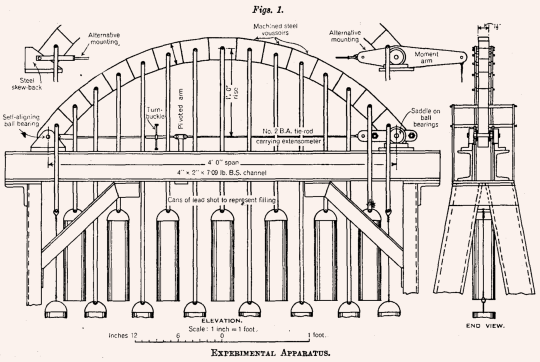


图 31.13: 使用的实验装置 Pippard, Tranter, and Chitty, 1936 要研究胡塞树木的稳定性。

33 在他的第二份贡献中, 皮帕德探讨了猪的失败。从他的书中引用:

1. 在 图 31.14 (a) 顯示一個相关术语樹, 其地面充滿, 而且還有一個負擔適用於一個特定的>樹。随着这一点 荷载 增加, 水平冲动也增加。对于小价值的 W 鼓实际上完全符合相同尺寸的坚固绳子的值, 以及类似的折叠。
2. 以一定的价值 W_1, 图 31.14 (b) 一个变化发生在与应用 荷载 的冲动变化的速度, 这是一致的形成一个 pin 在 C, 表示拱现在已成为两个固体部分。AC 和 BC 聚集在 C. 如果支持者可以轻微扩散, 则 “皮恩” 可以清楚地看到他是由附近的毛巾的倾斜形成的 C. 新的推向荷载的比例保持了一段时间。
3. 在 荷载 W_2 另一个速度的变化发生, 这是由于第二个虚拟 pin 的形成。D, 如在图 31.14 (c). 然而, 这个点是拱的输入器上, 而第一个则是在输入者上。拱现在由两个固体部分组成 AD 和 BC 由第三个固体部分连接 DC 它是由它们包围的, 基本上是峡谷桥的结构。
4. 荷载的进一步增加表明, 在 W_3 由于三分之一的形成而与荷载发生了另一个变化。“皮恩” 在入口中 B. 拱现在由三个固体部分组成, 其中一个是 AD, is **安卡斯特** *é* 在 A, 其余两者是有效的坚固的 pin 附带链接。如同在图 31.14 (d). 在这个过程中, 结构中的放松度逐渐减少。原始拱有三度的回收性, 但随着每个连续的 pin 的形成, 失去了一个程度的回复性, 因此 (b) 有兩個, (c) 有一个, 而且 (d) 没有一个, 即 (d) 它是静态的。
5. 如果充电继续超过 W_3 突然的 拱 崩溃发生在一个 荷载 W_4 由于形成 A 的第四个 pin, 这将 tho 组成一个机制,Fig。31.14 (e).

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

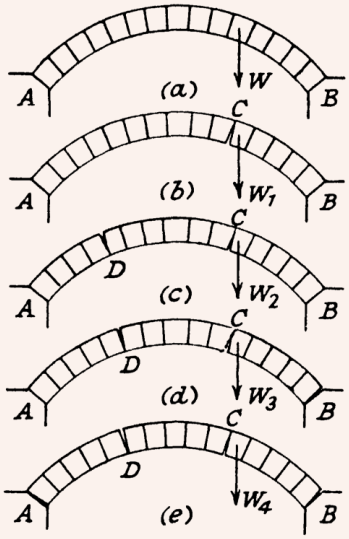


图 31.14: 一个小羊的逐步失败 Pippard, Tranter, and Chitty, 1936

34 皮帕德继续说

> 尽管在更新的工作中, 卡斯蒂格利亚诺的方法出现了为了提供最清晰的设计基础, 它到目前为止还没有一般被接受和依赖仍然放在旧理论的组合上, 将于下一节总结。
>
> Pippard and Baker, 1943 The analysis of engineering structures

35 因此, 与图的参考 31.15 他提出 程序如下:

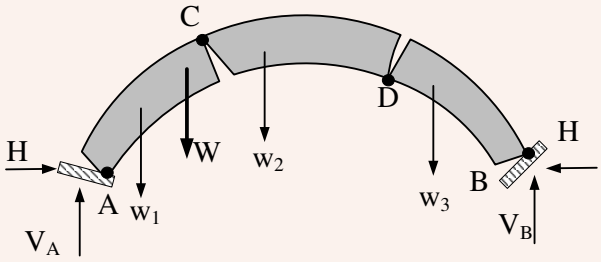


图 31.15: 您分析的 Pippard and Baker, 1943

1. 假设四方的立场 (A、B、C 和 D) 已知的。
2. 部分 CDB 在 平衡 中, 在其上行动的力量下, 但不包括未知的 W.
3. 把这些力量的时刻放在 C 和 D 上, 我们将有两个方程式。H, V_B 和适当的部分恒载系统。然后我们消除 V_B 解决为 H.
4. 考虑一下 A 的时刻, 我们将采取方程式 W, V_B, H 和恒载的条款。V_B 它再次被消除, 使用时刻对 C 的方程式, 并且 H 被发现, 然后 W 可以确定。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

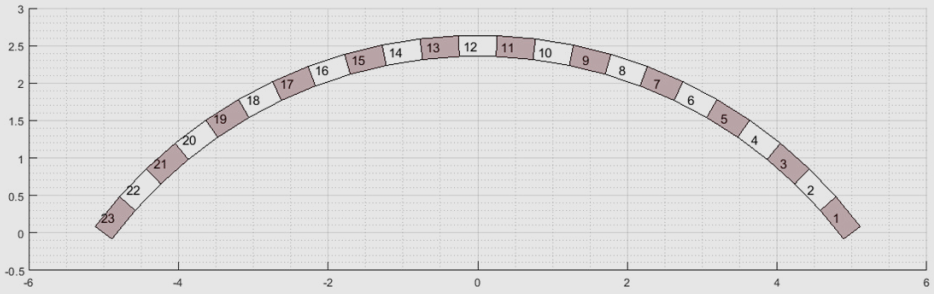
36 但是,C 和 D 的位置尚不清楚。**初步** 试验和错误程序是必要的, 但某些一般规则减少了 主条目: 信任区 显著。所以,PIN C 常常在附属的附属物中形成 W 說謊之間 W 和王冠的拱; pin B 常常在跳跃的延伸中远离 W• 皮恩 A 它在内置上, 无论是在另一个滑坡或附近的关节上, 以及 pin 的位置。D 在大多数情况下, 可以非常清楚地審判。

37 要找到 W 因此, 需要为不同 pin 位置进行几次测试。H 根据该部分的 平衡 的考虑计算 CB 如同以前, 但对于几个 (几乎两个或三个) 不同位置的 D. 以最低的价值为 H 它将是正确的, 因为它将提供最低值的 W 无论其位置如何 A. 发现后 H 一些替代的位置 A 相应的值和相应价值 W 如前所述计算。最低的将是正确的。

38 下面是数值的例子。

31.2.8.1 例题 31.1: 荷载的失败; 胡萝卜的方法

下一篇: 重复 Pippard and Baker, 1943 The analysis of engineering structures.



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	参考点		x	y	荷载	瞬间	Σw	Σwx
英特	中间	埃斯特			w	wx		
23, 0			1.600	-0.027				
		23, 0	1.636	0.000			2,016	1,649
	23		1.593		108	172		
22, 23			1.550	0.035				
		22, 23	1.584	0.064			1,908	1,477
	22		1.540		106	163		
21, 22			1.496	0.091				
		21, 22	1.526	0.123			1,802	1,314
	21		1.481		107	159		
20, 21			1.437	0.144				
		20, 21	1.465	0.178			1,695	1,155
	20		1.419		100	142		
19, 20			1.369	0.191				
		19, 20	1.399	0.228			1,595	1,013
	19		1.353		94	127		
18, 19			1.307	0.233				
		18, 19	1.329	0.272			1,501	880
	18		1.283		86	110		
17, 18			1.237	0.270				
		17, 18	1.256	0.310			1,415	776
	17		1.210		83	100		
16, 17			1.165	0.301				
		16, 17	1.181	0.342			1,332	676
	16		1.135		77	88		
15, 16			1.090	0.326				
		15, 16	1.102	0.368			1,255	588
	15		1.057		74	78		
14, 15			1.013	0.345				
		14,15	1.022	0.388			1,181	510
	14		0.978		71	69		
13, 14			0.936	0.357				
		13, 14	0.941	0.401			1,110	441
	13		0.898		68	61		
12, 13			0.857	0.364				
		12, 13	0.859	0.408			1,042	380
	12		0.818		68	56		
11, 12			0.778	0.364				
		11. 12	0.777	0.408			974	324
	11		0.737		68	50		
10, 11			0.700	0.357				
		10, 11	0.694	0.401			906	274
	10		0.657		71	47		
9, 10			0.622	0.345				
		9, 10	0.613	0.388			835	227
	9		0.578		74	43		
8, 9			0.545	0.326				
		8, 9	0.533	0.368			761	184
	8		0.501		77	39		
7, 8			0.471	0.301				
		7, 8	0.455	0.342			684	145
	7		0.425		83	35		
6, 7			0.398	0.270				
		6, 7	0.379	0.310			601	110
	6		0.353		86	30		
5, 6			0.328	0.233				
		5, 6	0.306	0.272			515	80
	5		0.283		94	27		
4, 5			0.267	0.191				
		4, 5	0.237	0.228			421	53
	4		0.217		100	22		
3, 4			0.199	0.144				
		3, 4	0.171	0.178			321	31
	3		0.154		107	16		
2, 3			0.140	0.091				
		2, 3	0.109	0.123			214	15
	2		0.096		106	10		
1, 2			0.085	0.035				
		1, 2	0.052	0.064			108	5
	1		0.043		108	5		
0, 1			0.036	-0.027				
		0, 1	0.000	0.000				

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

因为在大多数情况下, 关键价值 W 需要在 拱 的所有点上进行系统的工作, 并如下: 方法推荐。拱 戒指由 23 毛巾 3 • 33 组成” 深度。宽度为 10 英尺, 上涨 2 英尺 6 英寸。

带 B 起源与 Ox 如地平线和 Oy 作为垂直的参考轴。从左手抽相关术语开始, 每个关节的 extrados 和 intrados 的协调分为表。(在此情况下, 在中间广度方面). 每个相关术语子的中心的 x 坐标被输入到图表的 4 列中, 适用于它在柱 6 , 以及这一时刻的恒载关于起源在柱 7。所有死人负担的总和, 以及他们的时刻的总额在 8 和 9 列中输入。

作为一个例子, 我们将确定 荷载 必须适用于 voussoir No。19 使 拱 不稳定。

采取时刻关于 C 对于拱的部分 C 和 B 我们获得

$$x_c V_B = y_c H + x_c \sum_{C}^{B} w - \sum_{C}^{B} wx$$

点 C 18 - 19e[a], 并在从表中取代 数值 值时, 我们有

$$1.329V_B = 0.272H + (1.329 \times 1,501) - 886 \Rightarrow V_B = 0.204H + 835 \tag{31.3}$$

第一次审判, 请问 PIN。D 要在 9-10i 区块之间。与 拱 的部分相同的时刻 D 和 B 关于这一点是

$$0 \cdot 622V_n = 0 \cdot 345H + (0 \cdot 622 \times 835) - 227 \Rightarrow V_n = 0 \cdot 554H + 471 \tag{31.4}$$

消除 V_n 来自 EQ。31.3 和 31.4 前两种方程式

$$H = l,040 \text{ lbs} \tag{31.5}$$

二次试验, 在 10-11i 时采取 Pin D;

$$0 \cdot 700VB = 0 \cdot 357H + (0 \cdot 700 \times 906) - 274 \Rightarrow V_B = 0 \cdot 511H + 516.$$

又是 Q。31.3 和 31.2.8.1

$$H = 1,042 \text{ lbs}$$

同样, 如果铰 D 位于 8-9i

$$H = l,045 \text{ lbs}$$

位置 9-10i 是正确的, 因为它提供最低值 H. 选择左侧的折叠 (是的,23-0i) 就像 PIN A 我们得到了, 通过采取时刻 A

$$l \cdot 600V_B = -0 \cdot 027H + (l \cdot 600 \times 0 \cdot 2016) - 1,649 + 0 \cdot 247W \Rightarrow V_n = -0 \cdot 017H + 086 + 0 \cdot 155W. \tag{31.6}$$

消除 V_n 到 eq。31.3 和 31.6 取代为 H 从 31.5,

$$W = 512 \text{ lbs}$$

如果 PIN A 是 23-22

$$W = 534 \text{ lbs}$$

因此, 正确的 PIN 是 0-le; 9-l0i ; I8-l9e ; 和 23–0i, 和相应值为荷载和垂直振动是 $W = 512$ lbs 和 $H = l,040$ LBS 相应。

要注意的是, W 它与恒载直接比例, 因此从稳定性角度来看, 重填优于光。然而, 压缩压力自然增加在同等比例, 并且由于这种原因而失败的风险更大。

[a] 18-19e:18 至 19 之间的关节, 提取。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

31.3 管道的通用化方法; 香味

适应从 “Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes” 由 Smars, 2000

[39] 马索尼亚档案的分析 (在某种程度上, 到更普遍的区块结构) 可以通过对方程式进行分辨。§32.1.4, (Smars, 2000).

[40] Smars, 2000 延伸的 Pippard (差异化) 方法还应考虑变量重力负载和内部时刻。因此, 它不限于胡子。

[41] 在 矩阵 表格中可以写下 平衡 方程式, 如果有人只在分数的部分中对内部部队感兴趣, 就可以连接到外部部队。

[42] 拱 被分辨为 n 区块 每个区块都受外部力量的约束。(沿着其 intrados、extados 和 重力的中心行事 (自我重)) 有内部力量 (行动在石头上), 图 31.16.

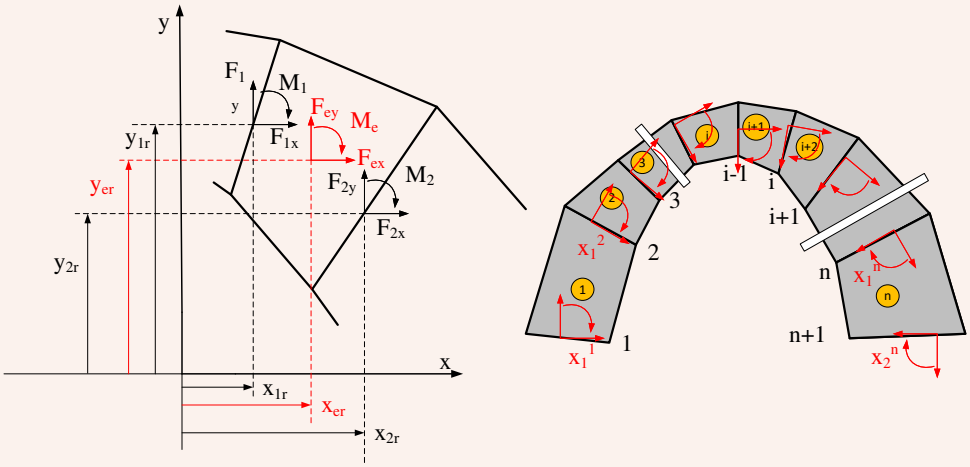


图 31.16: 在一个拱中的区块上流动力量

[43] 为了简化, 包括内部部队在内的力量以同样的参考形式表达。(x, y) 飞机 指数 1 是指进势力, 指数 2 是指出势力。e 到外部力量。

[44] 内部力量 $\mathbf{X}$ 在区块之间的界面上行动 i 和 $i+1$ 在两个附近的区块中的每一个方向进行反向行动。在区块上行动的力量 i 被称为 $\mathbf{X}_1^{i+1}$ 与 $\mathbf{X}_2^i = -\mathbf{X}_1^{i+1}$.

[45] 平衡对一个区块的方程式是简单的。

$$F_{1x} - F_{2x} + F_{ex} = 0 \tag{31.7}$$

$$F_{1y} - F_{2y} + F_{ey} = 0 \tag{31.8}$$

$$F_{1x}y_{1r} - F_{1y}x_{1r} + M_1 - F_{2x}y2r + F_{2y}x_{2r} - M_2 + F_{ex}y_{er} - F_{ey}x_{er} + M_e = 0 \tag{31.9}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

基于参考点的相对协调 r

$$x_{1r} = x_1 - x_r \tag{31.10}$$

可以写在 矩阵 格式

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \hline M_1 + F_{1x}y_{1r} - F_{1y}x_{1r} \\ \hline F_{ex} \\ F_{ey} \\ \hline M_e + F_{ex}y_{er} - F_{ey}x_{er} \\ \hline F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 + F_{2x}y_{2r} - F_{2y}x_{2r} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \tag{31.11}$$

46 平衡的方程式可以通过以下定义简化:

$$\lfloor\, \mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad -\mathbf{I} \,\rfloor \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_e \\ \mathbf{X}_2 \end{array}\right\} = 0$$

$$\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{31.12}$$

$$\mathbf{X}_{\_} = \left\{\begin{array}{c} F_{\_x} \\ F_{\_x} \\ M_{\_} + F_{\_x}y_{\_r} - F_{\_y}x_{\_r} \end{array}\right\}$$

47 注意, 每个区块的强度必须在 平衡 ($X_2^i = X_1^{i+1}$), 一个区块序列的 平衡 可以写成

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & & \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & & & & I & \ddots & & \\ & & & & & & \mathbf{I} & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_e^1 \\ \hline \mathbf{X}_1^2 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_e^n \\ \hline \mathbf{X}_2^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array}\right\} \tag{31.13}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

48 如果外部力量是已知的, 它们可以移动到方程的右侧。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \\ \mathbf{X}_2^n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{Bmatrix} \tag{31.14}$$

49 为了确定内部力量, 我们必须知道三个参数的值。例如, 我们可以采取力量的组成部分。$\mathbf{X}_e^n$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1^1 \\ \mathbf{X}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & & \\ & & \mathbf{I} & & \\ & & & \ddots & -\mathbf{I} \\ & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ - \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n \end{Bmatrix} \right\} \tag{31.15}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_e^1 \\ \mathbf{X}_e^2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_e^n - \mathbf{X}_2^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_e^i \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=2}^n \mathbf{X}_e^i \\ \vdots \\ \mathbf{X}_2^n - \sum_{i=n}^n \mathbf{X}_e^i \end{Bmatrix} \tag{31.16}$$

$$\mathbf{X}_1^i = \mathbf{X}_2^i - \mathbf{X}_e^i \quad , \quad \mathbf{X}_2^i = \mathbf{X}_1^{i+1} \tag{31.17}$$

50 力量的 X^i 波拉角度 θ_i 每個 单元 i, 转向正常的内部力量是直接

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N^i \\ V^i \\ M^i \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1x}^i \\ F_{1y}^i \\ M_1^i \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos\theta_i & \sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{2x}^{i-1} \\ F_{2y}^{i-1} \\ M_2^{i-1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{31.18}$$

M 只有在抵抗线通过部分中心时才会是零。(即零以极度). 这个条件只能在三个部分中实施。

51 绝对和相对异常的定义 (ex, e) 与此相同, 以前所提供的

$$ex^i = \frac{M^i}{N^i} \quad , \quad e^i = -2\frac{ex}{d} = -2\frac{M^i}{N^i d} \tag{31.19}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52 相对的异常性决定了正常力量在哪里。N 要做一件事情, 就让一瞬间 M. 这一点被称为 **中心 压力** 连接它们的线条是 *thrust* 线. 要注意的是, 转型 $x_i' = a_{ij}x_j$) 弓形状和应用的力量导致同样的转变的鼓线。“抵抗线” 连接到内部力量进入部分的点。

53 如上所示, 拱的内部力量可以从三个初始边界条件中确定。因此, 对某一组内部力量, 相当于一行冲动。因此, 通过将这条线交叉的三个点分配, 我们可以确定整合的连续性, 图 31.17 哪里 $x_{a1} = x_a - x_1$, $x_{b1} = x_b - y_I$ 等等。

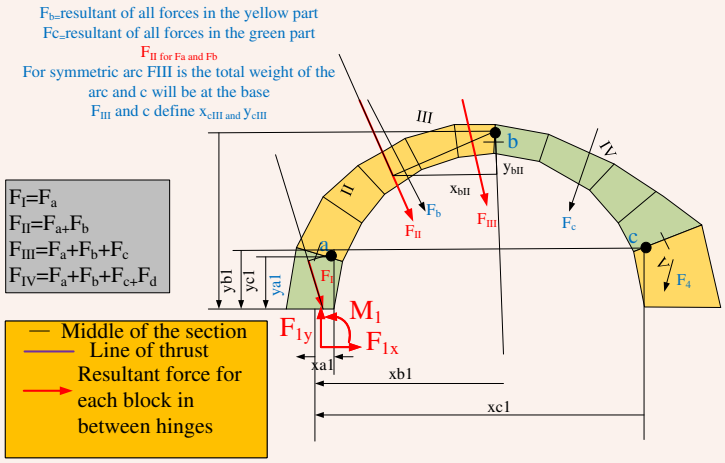


图 31.17: 定义起源的力量集

54 接下来, 我们将确定边界条件, 以便冲线在拱中通过三点。这意味着零时刻。(依赖于什么 M 和 N) 在这些地方

$$\begin{cases} M_a = (F_{1x}y_{a1} - F_{1y}x_{a1} + M_1) + (F_{xI}y_{aI} - F_{yI}x_{aI}) \\ M_b = (F_{1x}y_{b1} - F_{1y}x_{b1} + M_1) + (F_{xII}y_{bII} - F_{yII}x_{bII}) \\ M_c = (F_{1x}y_{c1} - F_{1y}x_{c1} + M_1) + (F_{xII}y_{cIII} - F_{yIII}x_{cIII}) \end{cases}$$

如果这些时刻是零的,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{a1} & -x_{a1} & 1 \\ y_{b1} & -x_{b1} & 1 \\ y_{c1} & -x_{c1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{yI}x_{aI} - F_{xI}y_{aI} \\ F_{yII}x_{bII} - F_{xII}y_{bII} \\ F_{yIII}x_{cIII} - F_{xIII}y_{cIII} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_I \\ M_{II} \\ M_{III} \end{Bmatrix} \tag{31.20}$$

解决, 我們決定集合的 “入口” 每个区块的力量。

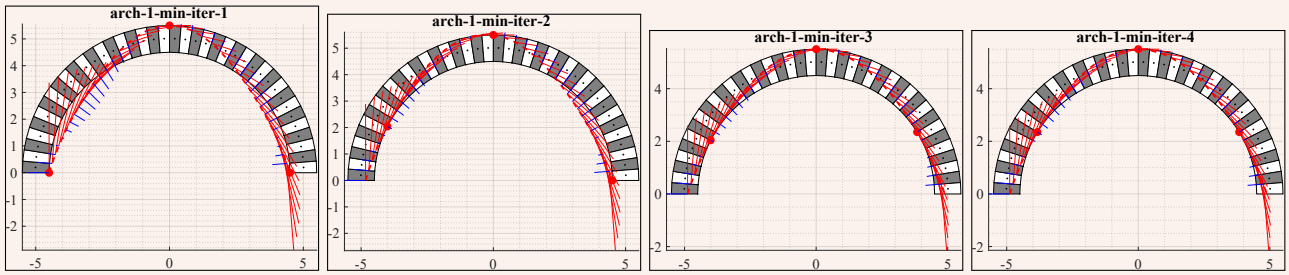
$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} x_{b1} - x_{c1} & x_{c1} - x_{a1} & x_{a1} - x_{b1} \\ y_{b1} - y_{c1} & y_{c1} - y_{a1} & y_{a1} - y_{b1} \\ x_{c1}y_{b1} - x_{b1}y_{c1} & x_{a1}y_{c1} - x_{c1}y_{a1} & x_{b1}y_{a1} - x_{a1}y_{b1} \end{bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

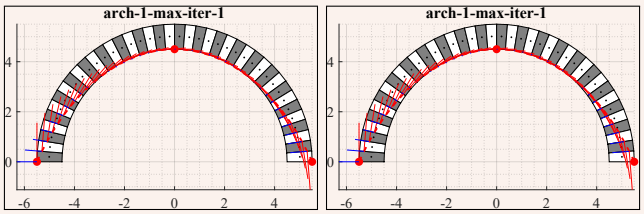
哪里

$$\Delta = -x_{a1}y_{b1} + x_{a1}y_{c1} + x_{b1}y_{a1} - x_{b1}y_{c1} - x_{c1}y_{a1} + x_{c1}y_{b1}$$

55 和 MATLAB® 所提供的代码 §I.1.4 产生以下相应的数字, 图 31.18.



(a) 最少的热情



(b) 最大热情

图 31.18: MATLAB® 生成一系列的相关术语子在一个胡子里

31.4 算法

56 这种方法不适用于某种特定类型的拱。(關於 Henges), 并与底线静态方法相似 (§57.2.2) 破坏分析。

57 相应的 MATLAB® 代码被授予 §I.1.4.

1: **procedure** 破裂分析 MASONRY 拱 (形象 31.17)
2: 初步化 $n, R, \gamma, g\ \alpha\ e_max, \varepsilon$
3: 假设 $n_1, n_2, n_3, e_1, e_2, e_3, iter_{max}$ ▷ 初步的常态
4: 最低限度_土耳其
5: 最大_土耳其
6: **end procedure**

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
procedure 最低限度_特斯拉 (定义最低推线给出 3 个尾巴)                ▷ 初步猜测
    e_1 ← −max_eccent; e_2 ← max_eccent; e_3 ← −max_eccent;
    n_1 ← 1; n_2 ← round(n/2) + 1; n_3 ← n + 1; iter ← 0
    while 等级 false & iter < iter_max do
        iter ← iter + 1                                          ▷ 面部拖动
        [N, V, ex] ← 面孔_努力 (n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3)] ▷ 查找最令人侮辱的部分, 以极度为准
        [m, r_0] ← max(abs(ex)                                   ▷ 重新定义地点
        if ex(r_0) < 0 then
            if abs(r_0 − n_1) < abs(r_0 − n_3) then
                n_1 = r_0
            else
                n_3 ← r_0
            end if
        else
            n_2 ← r_0
        end if
        if max(abs(ex)) − max_eccent < ε then
            等级 ← true
        else
            等级 ← false
        end if
    end while
end procedure
```

```
procedure 面孔_努力 (n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3)( 平等 31.18)   ▷ 第一面打算力量, 通过三点。
    [F_x1 F_y1 M_1] ← 三_点数 (n_1, e_1, n_2, e_2, n_3, e_3)      ▷ 第一面外部力量
    [F_x, F_y, M] ← 面孔_威尔士                                   ▷ 添加两个组件
    F_x ← F_x + F_x1, F_y ← F_y1; M ← M + M_1 + (x − x(1))F_y1 − (y − y(1))F_x1   ▷ 定义相应的内部力量
    N ← − cos(θ)F_x + sin(θ)F_y; V ← sin(θ)F_x + cos(θ)F_y; ex ← −2M/(Nt)
end procedure
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

procedure 三_点 (平等 31.20)
    计算厚度 $\mathbf{t}$ 放射 $\mathbf{r}$ 外出 $\mathbf{x}_e$ 入口 $\mathbf{x}_i$ 中央线 $\mathbf{x}$ ▷ 中心点第一部分
    $x_1 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1, y_1 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_1$
    $x_2 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2, y_2 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_2$
    $x_3 = \sin(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3, y_3 = \cos(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2)e_3$ ▷ 三个灵魂的协调
    $x_a = x_1(n_1); y_a = y_1(n_1)$
    $x_b = x_2(n_2); y_b = y_2(n_2)$
    $x_c = x_3(n_3); y_c = y_3(n_3)$ ▷ 设置 矩阵 与第一部分的力量相连, 在 3 个旋转时刻
    $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y_a - y_r & -(x_a - x_r) & -1. \\ y_b - y_r & -(x_b - x_r) & -1. \\ y_c - y_r & -(x_c - x_r) & -1. \end{bmatrix}$
    $[F_x, F_y, M] \leftarrow$ 面孔_威尔士 ▷ 区分中心的坐标 -> 过渡点
    $x_a = x_a - x_1(n_1); y_a = y_a - y_1(n_1)$
    $x_b = x_b - x_2(n_2); y_b = y_b - y_2(n_2)$
    $x_c = x_c - x_3(n_3); y_c = y_c - y_3(n_3)$ ▷ 更新时刻
    $M_a = M(n_1) - F_x(n_1)y_a + F_y(n_1)x_a$
    $M_b = M(n_2) - F_x(n_2)y_b + F_y(n_2)x_b$
    $M_c = M(n_3) - F_x(n_3)y_c + F_y(n_3)x_c$
    $\mathbf{M}_p = [M_a\ M_b\ M_c]$ ▷ 确定必要的力量, 以便线路通过 3 个强制点
    $W = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}_p; F_{x_1} = W(1); F_{y_1} = W(2); M_1 = W(3)$
end procedure

procedure 面孔_威尔士
    计算每个区块重量
    for i = 1n **do**
        $F_x = [F_x; 0. + F_x(i)]$
        $F_y = [F_y; -w(i) + F_y(i)]$
        $M = [M; w(i)x_g(i) + M(i)]$
    end for
    $eccent = 0, x = sind(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{r} + \mathbf{t}/2.\mathbf{eccent})$;y=cosd($\boldsymbol{\theta}$)(r+t/2.eccent); $\mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{F}_y x - \mathbf{F}_x y$;
end procedure

$\boldsymbol{\theta}$	每个关节的角落与垂直相应
n	区块数量
n_i	共识 ID 在哪里 Hinge 形状
e_i	动脉激情的线在合并中 $< 0 < i < 1$
R	广播 (每个区块可能有所不同
γ	质量 密度
g	加速度 或 重力

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

α	关闭角度 (90° 半循环)
e_{max}	最大精度 (≤ 1.)
ε	宽容
t	各式各样的相关术语。

31.5 最后评论

31.5.1 雅克 • 海曼,1925 年

58 雅克 • 海曼是关于大屠杀结构的作品和哥特式大教堂建筑的历史的人物。虽然在数学中非常精彩 (他的第一个田野 STDY) 和机械 (他是英国的学生。) 事实上, 他自己没有做任何技术贡献。然而, 他对历史文学如此适应, 以至于他不仅能总结它, 还能合成它。

59 他是第一个清楚地提到三种假设, 以确定 vous 的可接受性领域。(Heyman, 1997). 再一次, 这并不是什么新鲜事, 但他清楚地正式化了一些关于 18 世纪和 19 世纪的档案计算的基础材料的假设。他们是:

1. 马索尼亚 (或石头) 也不是强制性代理人 (如果有任何) 没有 抗拉强度
2. 马索尼里有无限的抗压强度
3. 滑雪失败不会发生

31.5.2 Thrust 线

60 推线代表着沿着 拱 的点路径, 由此产生的力量通过。如果所有的弓毛都具有相同的尺寸, 那么相关术语线几乎有转形的形状。

61 鼓线不必离开马索尼亚厚度: 到这一点, 有趣的是研究它的两个极端位置, 代表两个状态仍然在平衡。事实上, 当冲动线触摸弓的底部或顶部边界时, 马索尼亚发现自己处于允许国家区域的边界, 而兴奋性是促进相关术语的形成。特别是, 在两个极端条件下, 冲动线给出了三个开启的冲动的位置: 这样可以计算水平冲动冲动值, 如图所示。31.19. 在冲动线的两个极端位置, 垂直冲动将是:) 最小;B) 最大。重要的是要知道冲动线的两个极端位置, 因为拱的实际冲动无法计算, 但可以固定上方和下方边界。(Nobile and Bartolomeo, 2014 PDF).

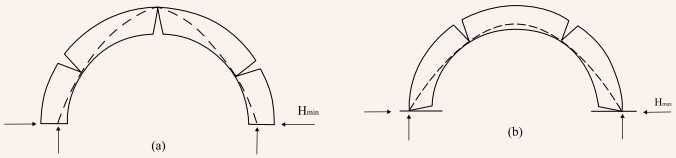
62 凯特纳里 (§30.3.3) 是拱的真实形状。不同形状的树木站起来, 因为它们的厚度中包含了相关术语。

63 冲动线形状是数学重量, 如果自我重量平等分布在拱周围。

64 有一个最低厚度的半循环弓, 只包含一个相关术语。边界弓正是这个最低厚度, 并且处于不稳定的平衡状态。

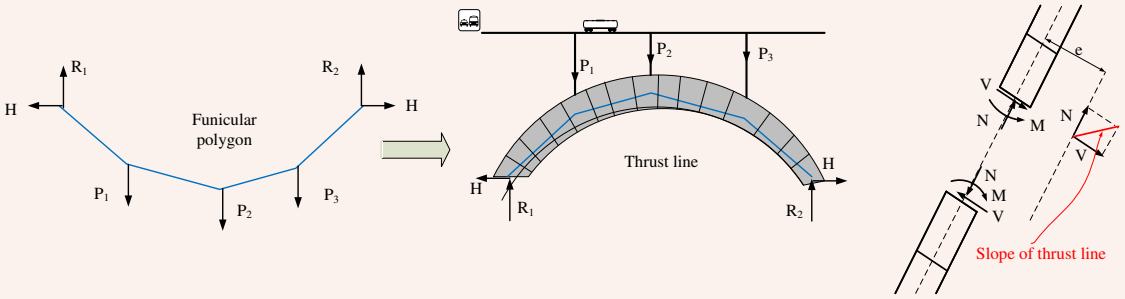
65 以图像方式, 图 31.20 展示 A (索) 阴道聚合物受点负载, 以及相应的冲动线。在这种情况下, 冲动线完全位于支撑桥盖的木头内, 因此安全。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 最低限度　　(b) 最大

图 31.19: 崩溃机制; abutment thrusts (Nobile and Bartolomeo, 2014)



(a) 相应的和函数性　　(b) 内部的兴奋性

图 31.20: 逆转的阴道聚合物和相应的振动线和兴奋性

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

[66] 冲动线可能位于中三核内, 在这种情况下部分处于完全压缩状态。如果它在这个核心之外, 而不是紧张 (共同开幕式) 发展, 如果在边缘, 那么我们有初步的不稳定。

[67] 鼓线试图确定位置和滑板。前者, 易于定义为理性 $e = M/N$, 和折叠是由结果的向量金额确定 N 和 V.

[68] 振动线可以通过弹性分析计算 (或线性编程). 然而, 通常的相关术语架并不静态确定, 平衡关系不够。

31.5.3 Thrust 线和 pippard

[69] 皮帕德的失败模式涉及形成一个机制, 这当然与塑料结构的塑料故障中的塑料粘贴的逐步形成相似。57.

[70] 这一点可以进一步由半循环拱在恒定的荷载中失败, 通过阴道的逐步形成, 图。31.21. 三 (在此情况下) 足以引发失败机制。(如例子 57.2.1.1). 下面将进一步讨论。

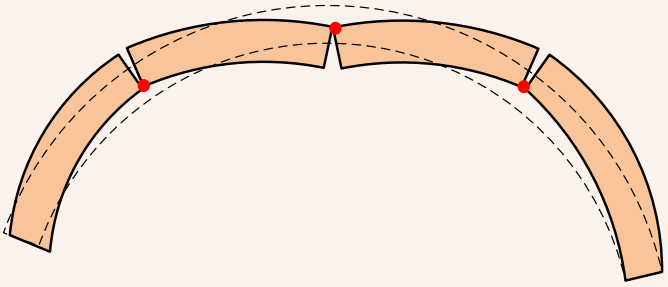


图 31.21: 失败模式三环半圆 拱

[71] 因此, 一个拱是安全的, 如果一个鼓线可以拖在它的厚度内。一个弓只会崩溃, 如果鼓线至少在四个点达到弓边缘, 将弓转化为机制。

[72] 形成足够的相关术语子实际上会导致一个机制。这种方法假设一个马索尼亚拱变成一个机制如果至少有三 (或四在某些情况下) 塑料手套开放。但是, 原来的位置是未知的。因此, 第一步是采取可能的三个位置。(在 图 31.22) hing。

[73] 跟随假设 (未显示) 的线路被拖动, 然后最糟糕的是 “犯罪分子” (超過 1 的 excentricity) 被识别。然後, 最接近假設的輪子被移除並由犯罪分子取代。这个过程重复, 直到形成一个由三根相关术语引起的机制, 以 1 的精度。在每个情况下, 我们都有静态平衡的道方程式和额外的零时刻。程序是算法上描述的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

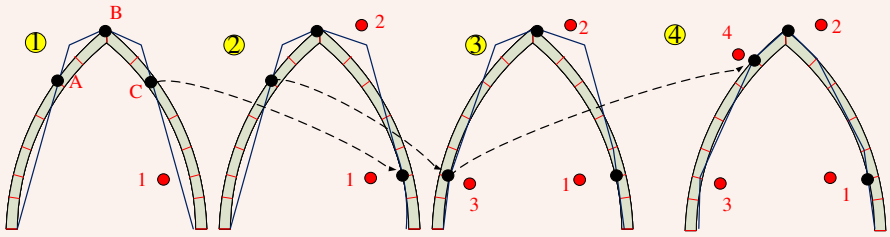


图 31.22: Hinge 地点的序列



哥尔多巴大清真寺, 八世纪至十世纪, 哥尔多的西班牙。
替代红色和白色相关术语形的石头确保负载分布和稳定在标志性的骑马弓。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

32 和曲线的 Be

摘要

这是关于结构的三章的最后一集, 其中主要抵抗由轴力提供。以前的章节覆盖了电缆和硬架 (婚礼). 本章节将融入两种弹性架子和曲折的斑点, 提供他们的行为和特征的全面分析。我们将从圆形弓的深入分析开始, 在各种负载条件下检查它们的结构性行为。这将包括对不同复杂性层面的讨论, 特别是在相关术语的数量和放置方面。接下来, 我们将继续转向模拟架子, 再次考虑到与相关术语有关的各种复杂性以及它们对结构性能的影响。经过仔细探索弓箭后, 我们将转向曲线的焦点。分析将涵盖平面曲线和空间直升结构。这些结构特别有趣, 因为它们显示了灵活与扭转之间的复杂相互作用。最后, 附件 *D* 将覆盖超越本章范围的更复杂的圆形架。

32.1 循环档案 999
32.1.1 四个圆形弓 1000
32.1.2 两张圆形弓 1006
32.1.3 无缝循环 拱 1006
32.1.4 通用解决方案 1014
32.1.5 基于数学的解决方案 1021
32.2 最佳形状的拱 1021
32.2.1 例题 32.5: 完美的拱 1022
32.3 帕拉布利亚 1022
32.3.1 例子 1022
32.3.2 固定 拱 与同步 荷载 1027
32.3.3 基础 调节和温度效应 1031
32.4 曲线 BAMS 1034
32.4.1 球旋转 1034
32.4.2 赫利科伊德 1037

---

1 Arches 已成为一个基本的建筑和工程 单元 数千年, 服务于功能和美学目的。从古罗马的水族馆到哥特式时代的大教堂, 树木在人类文明发展中发挥了关键作用。其独特的能力, 以高效的方式重量支座使他们成为各种建筑中的优先结构解决方案, 从桥梁和通道到窗户和天花板。

2 拱背后的原则在于它能够通过曲形形式传输负载, 其中灵活性减少, 轴力最大化。

3 本章节将专注于弓箭和曲线射击的分析。使用的概念与以前所看到的概念相同, 但大型 (只有) 差异是, 方程式将以圆形弓的极坐标写成。(和卡特西安为平凡的人).

4 像电缆一样, 可以使用弓箭来减少弯矩在长距离结构中。基本上, 一个拱可以被视为一个逆转的索, 并且通过轴压传递了荷载主要, 但也可以通过其灵活性抵抗灵活。

5 为了优化死荷载效率, 长距离结构可以他们的形状接近相应的时刻图, 因此, 一个弓, 悬挂的电缆, 或在前压的 configur 子配置混凝土 梁 所有都是特别的, 图 32.1.

6 此章节将讨论档案 (圆形而不是模拟), 曲折的泡沫, 最后是直升机结构。

32.1 循环档案

7 长距离结构可以使用平板建筑建造例如, 旋转或特鲁塞。但是, 对于超越的 100 英尺, 建造曲线结构往往更经济例如, 一个拱, 暂停的索或薄壳。

审阅稿

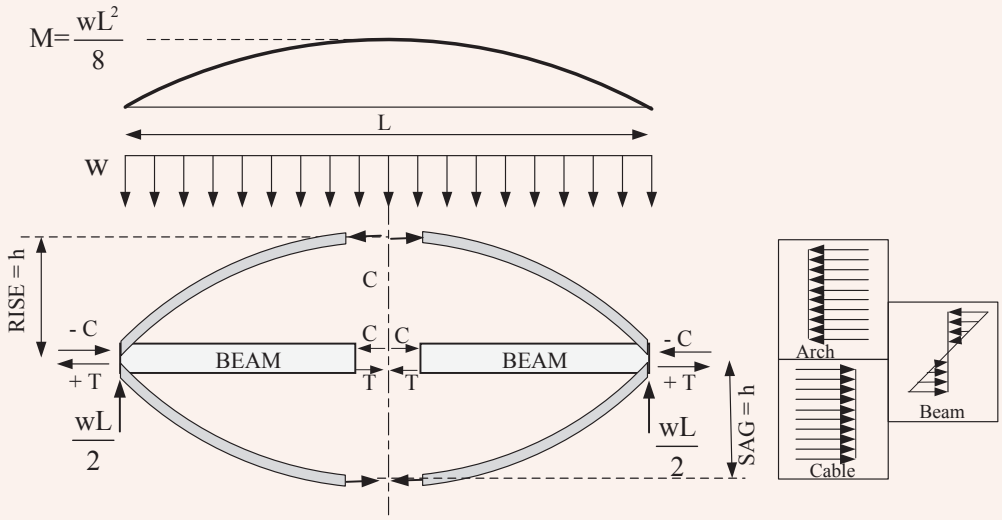


图 32.1: 瞬间抵抗在弓或悬挂系统中的力量, 与火箭相比, (Lin and Stotesbury, 1981)

8 自历史的起点以来, 人类一直试图延伸距离。使用 拱 建设。基本上是因为一个拱需要材料抵抗压缩 (如石头、马索尼等。布里克) 劳动不是一个问题。

9 弓形设计中的静态的基本问题在 Fig 中被描述。32.2 垂直 荷载 是每单位的水平投影 (如外部荷载但不是自我重量).

32.1.1 四个圆形弓

10 三角弓是静态定义结构哪个形状可以容纳支座定居点和温度扩展, 没有二次内部压力。它们也可以通过静态分析。

11 一般来说, 一个弓将通过轴力和灵活力量的组合携带垂直负载。精心尺寸拱将有一个小到不可忽视的时刻, 并且相对高正常压缩压力。

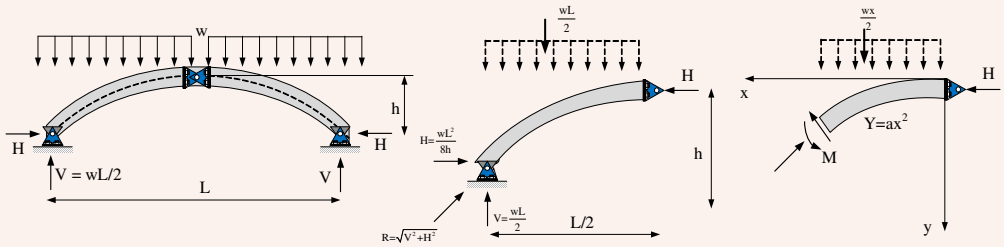


图 32.2: 三角形拱的静态

12 由于同步性, 垂直反力是简单的 $V = \frac{wL}{2}$, 并且在拱的中间板上没有线条 (没有一瞬间). 想起王冠的时刻,

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

13 解决为 H

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

14 我们记得类似的方程式是由电缆产生的。(Eq. 30.38), 和 H 相似的到 The $C-T$ 能量在一个梁 (图 32.1), 和 h 是 拱 的总高度, 因为 h 它比大得多 d, H 它将比 $C-T$ 在 梁 中。

15 因为平衡需要 H 要保持在架子上稳定的, 一个模拟曲线理论上不会导致任何时刻在架子的部分。

32.1.1.1 爱迪的理论

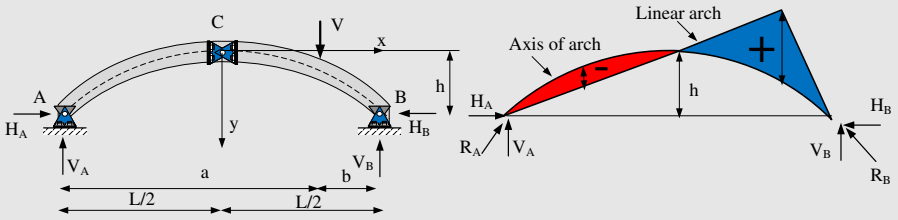
16 爱迪的理论在分析档案中是一个重要的概念。它提供了一个方法, 以确定一个拱结构中的时刻和力量。该理论特别有用于分析三角架, 在那里它简化了涉及的复杂计算。

定义 32.1: 爱迪的理论

弓轴上的任何点的旋转时刻均为理论弓和实际弓轴之间的垂直交叉。(Eddy, 1878).

32.1.1.2 例子

32.1.1.2.1 例题 32.1: 三根相关术语弓; 点负载; 分析



下一篇: 重复 Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

关于直射射线

$$V_A = \frac{Wb}{L} \text{ and } \quad V_B = \frac{Wa}{L} \tag{32.1}$$

关于点的瞬间 C 王冠被授予

$$V_B \frac{L}{2} - H_B h - W\left(\frac{L}{2} - b\right) = 0$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

替换为 V_B 来自 EQ。32.1

$$\begin{aligned}
&\frac{Wa}{2} - H_B h - \frac{WL}{2} + Wb = 0; \quad W\left(\frac{a}{2} - \frac{L}{2} + b\right) - H_B h = 0 \\
&\frac{W}{2}(a - L + 2b) - H_B h = 0; \quad \frac{W}{2}(a - L + b + b) - Hh = 0 \\
&\frac{Wb}{2} - H_B h = 0; \quad H_B = \frac{Wb}{2h}
\end{aligned} \tag{32.2}$$

从平衡的水平力量 $H_A = H_B = H$

$$H = H_A = \frac{Wb}{2h} \tag{32.3}$$

同样, 如果荷载是 A 和 C 然后,

$$H_A = \frac{Wa}{2h} \tag{32.4}$$

從 平衡方程

$$H = H_B = \frac{Wa}{2h}$$

在任何部分的时刻 X_1 荷载 点与 支座 点之间 B 在距离的 x 王冠, 由

$$M_{x1} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.5}$$

取代 EQ。32.1 和 32.2 进入 32.5

$$\begin{aligned}
M_{x1} &= \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y) \\
&= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h} = \frac{WL}{2} - W\left(\frac{ax}{L} - \frac{by}{2h}\right)
\end{aligned}$$

在任何部分的时刻 X_2 点 荷载 和冠冕在 dstance 中 x 从王冠

$$M_{x2} = V_B\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - H_B(h - y) \tag{32.6}$$

取代 EQ。32.1 和 32.3 进入 32.6

$$\begin{aligned}
M_{x2} &= \frac{Wa}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - W\left(\frac{L}{2} - b - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h - y) \\
&= \frac{Wa}{2} - \frac{Wax}{2} - \frac{WL}{2} + Wb + Wx - \frac{Wb}{2} + \frac{Wby}{2h} \\
&= Wx\left(1 - \frac{a}{L}\right) + \frac{Wby}{2h} = \frac{Wbx}{L} + \frac{Wby}{2h} \\
M_{x2} &= Wb\left(\frac{x}{L} + \frac{y}{2h}\right)
\end{aligned}$$

在任何部分的时刻 X_2 之间 A 而且在远程 x 从 C 向左

$$M_{x3} = V_A\left(\frac{L}{2} - x\right) - H_A(h - y) \tag{32.7}$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

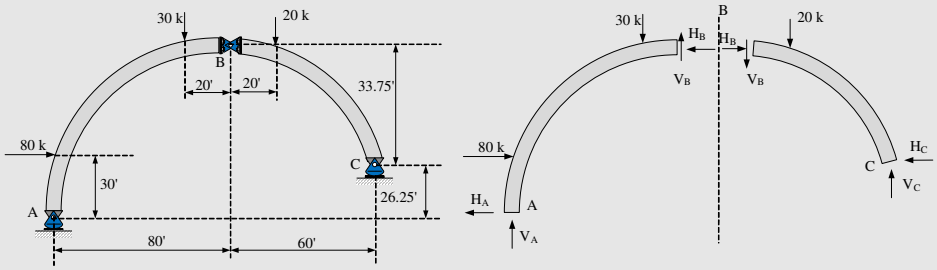
取代 EQ。32.1 和 32.4 进入 32.7

$$M_{x3} = \frac{Wb}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) - \frac{Wb}{2h}(h-y) = \frac{Wb}{2} - \frac{Wbx}{L} - \frac{Wb}{2} + \frac{Wbx}{2h}$$
$$= -Wb\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{2h}\right) \tag{32.8}$$

三角形的时刻图表显示在上面。Snce 没有 荷载 在 AC 从那时起, 在 C 是零的, 热情在 A 必须通过 C 满足行动线 W 生产在 D. 现在, R_A, R_B 和 W 在 平衡 中, 行动线 R_B 在 B 必须见面 W 在 D. 三角形 ADB 代表某些规模的时刻图为一个简单的梁, 是积极的信号。曲线 $ACBA$ 以相同的尺寸代表时刻图为 $H(h—y)$ 它有负面意义。某种规模的阴影图表显示了结果时刻图。对于负载的一半, 结果图表是积极的, 而对不负载一半则是负面的。因此, 在任何部分的结果时刻是由线性拱形成的图表的常规和拱轴所代表。荷载的常规时刻可以通过从一个简单的 梁在荷载时刻取代冲动时刻来获得。

32.1.1.2.2 例题 32.2: 四分之三的拱; 点荷载

确定下面的三角拱的反应



四个未知, 三个平衡的方程式, 一个条件方程 ⇒ 静态定义。

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^C = 0$$
$$\Rightarrow (R_{Ay})(140) + (80)(3.75) - (30)(80) - (20)(40) + R_{Ax}(26.25) = 0$$
$$\Rightarrow 140R_{Ay} + 26.25R_{Ax} = 2.900$$
$$(+\rightarrow)\,\Sigma F_x = 0; \Rightarrow 80 - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$
$$(+\uparrow)\,\Sigma F_y = 0; \Rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} - 30 - 20 = 0$$
$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = 0; \Rightarrow (R_{ax})(60) - (80)(30) - (30)(20) + (R_{Ay})(80) = 0$$
$$\Rightarrow 80R_{Ay} + 60R_{Ax} = 3,000$$

解决這四個方程式:

$$\begin{bmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,900 \\ 80 \\ 50 \\ 3,000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.1\ \text{k} \\ 29.8\ \text{k} \\ 34.9\ \text{k} \\ 50.2\ \text{k} \end{Bmatrix}$$

我们可以通过考虑对 b 的总结来检查我们的结果:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_z^B = 0; -(20)(20) - (50.2)(33.75) + (34.9)(60) = 0 \checkmark$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

17 由于对象, 在图中显示的弓的垂直反应 32.2 只是 $V = \frac{wL}{2}$, 并且在拱的中间板上没有线条 (没有一瞬间). 想起王冠的时刻,

$$M = Hh - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$$

18 解决为 H

$$H = \frac{wL^2}{8h}$$

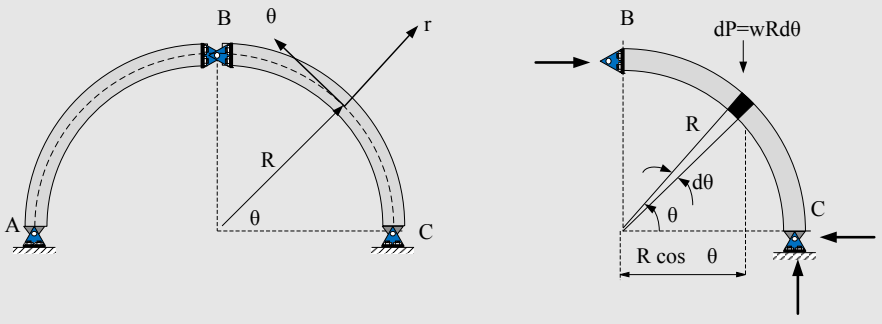
19 相似的评论与 $M = wL^2/8$ 对于 BAM 和 $H = wL^2/8h$ 对于电缆。一般来说, 一个弓将通过轴力和灵活力量的组合携带垂直负载。拱 将有一个小到不可忽视的时刻, 相对较高的正常压缩压力。和 “完美” 一个简单支持的三角形拱的模拟形式

- 在任何部分都不能有任何点或时刻。
- 时刻在 x: $M = Hy - wx^2/2 = Hax^2 - wx^2/2 = 0$,
- 解决为 a: $a = w/(2H)$
- 替换为 H 并得出结论, a 必须平等 $4h/L^2$.
- 对于任何斯宾 L 只有一个高度 h 它会给出一个与零时刻和点亮的平凡。

20 三角架是静态定义的结构, 其形状可以容纳支座定居点和热扩展, 而无需次要内部压力。它们也可以通过静态分析。拱 比 梁 更高效, 可能比 桁架 在长途运输负载方面更经济和美观。

32.1.1.2.3 例题 32.3: 三根相关术语弓; 单一负载

确定三位静态定义半循环拱的反应在其自己的死体重下 w (单元弓长度 s, 在哪里 $ds = rd\theta$).



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这些反应可以通过整合整个结构的荷载来确定。垂直 反力:

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0; (C_y)(2R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \underbrace{wRd\theta}_{\mathrm{d}P}\ \underbrace{R(1+\cos\theta)}_{\text{moment arm}} = 0$$

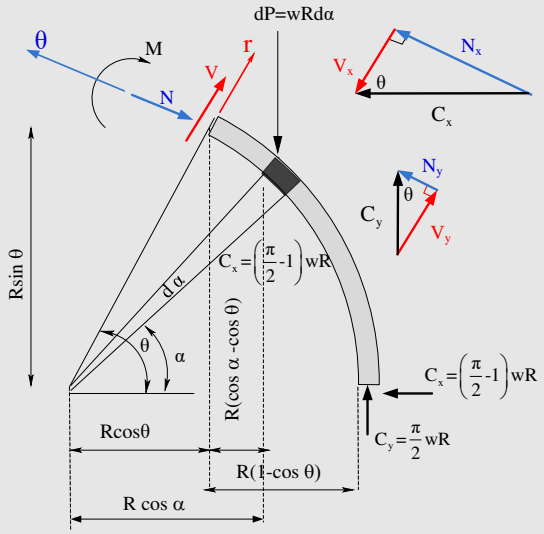
$$\Rightarrow C_y = \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos\theta)d\theta = \frac{wR}{2}[\theta+\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$
$$= \frac{wR}{2}[(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)]$$
$$= \frac{\pi}{2}wR$$

水平反应

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M_B = 0; -(C_x)(R) + (C_y)(R) - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \underbrace{wRd\theta}_{\mathrm{d}P}\ \underbrace{R\cos\theta}_{\text{moment arm}} = 0$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{\pi}{2}wR - \frac{wR}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}wR - wR[\sin\theta]\,|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}wR - wR(1-0)$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}-1\right)wR \tag{32.9}$$

通过对抗的反应 A 与那些在 C. 现在可以确定内部力量。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Shear Forces: 考虑到拱的自由体图表, 并总结在辐射方向的力量 ($\Sigma F_R = 0$):

$$-\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\cos\theta}_{V_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\sin\theta}_{V_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta}wR\mathrm{d}\alpha\sin\theta+V=0$$

$$\Rightarrow V(\theta)=wR\left[(\frac{\pi}{2}-1)\cos\theta+(\theta-\frac{\pi}{2})\sin\theta\right] \tag{32.10}$$

轴力: 同样, 如果我们考虑到在轴方向的力量集合 ($\Sigma F_\theta = 0$):

$$\underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR\sin\theta}_{N_x}+\underbrace{\frac{\pi}{2}wR\cos\theta}_{N_y}-\int_{\alpha=0}^{\theta}wR\mathrm{d}\alpha\cos\theta+N=0$$

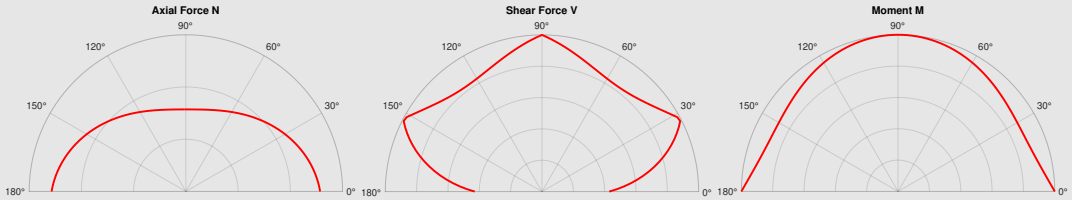
$$\Rightarrow N(\theta)=wR\left[(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta-(\frac{\pi}{2}-1)\sin\theta\right] \tag{32.11}$$

现在我们可以考虑平衡的第三方程式。($\Sigma M_z = 0$):

$$(+\circlearrowleft)\,\Sigma M\ \underbrace{(\frac{\pi}{2}-1)wR}_{C_x}\cdot R\sin\theta-\underbrace{\frac{\pi}{2}wR}_{C_y}R(1-\cos\theta)$$

$$+\int_{\alpha=0}^{\theta}wR\mathrm{d}\alpha\cdot R(\cos\alpha-\cos\theta)+M=0$$

$$\Rightarrow M(\theta)=wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+(\theta-\frac{\pi}{2})\cos\theta\right] \tag{32.12}$$



注意, 基于数学的一般化解决方案在 §I.1.3

32.1.2 两张圆形弓

21 如果 拱 只有 2 个尾巴, 则 图 32.3, 或者如果它没有弯曲, 那么旋转的时刻可能存在于冠冕或支持台或两个地方。

22 因为 H 相反的变化与上涨 h, 很明显, 一个人应该尽可能高的上升。对于美学和实用考虑的结合, 常常使用 5 到 8 或 12 的范围/上涨比例。但是, 随着比例的上升, 我们可能有屈曲问题, 部分将有一个更高的部分深度, 而拱优势下降。

32.1.3 无缝循环 拱

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

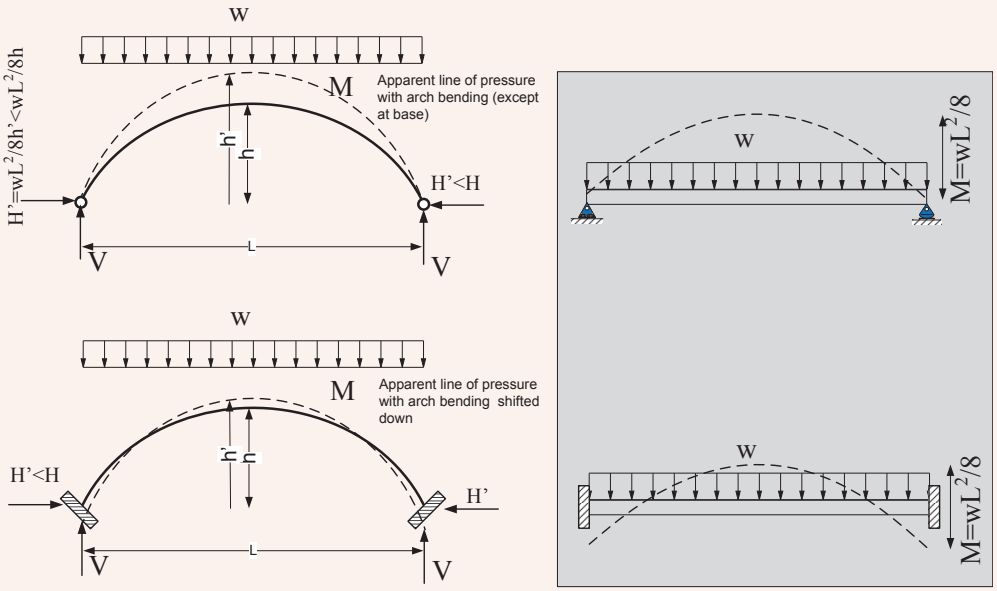
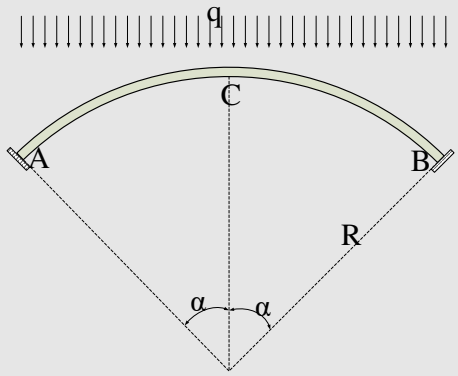


图 32.3: 兩個折叠 拱, 與固定結末的類似性 梁 (Lin and Stotesbury, 1981)

32.1.3.1 例题 32.4: 无缝循环 拱



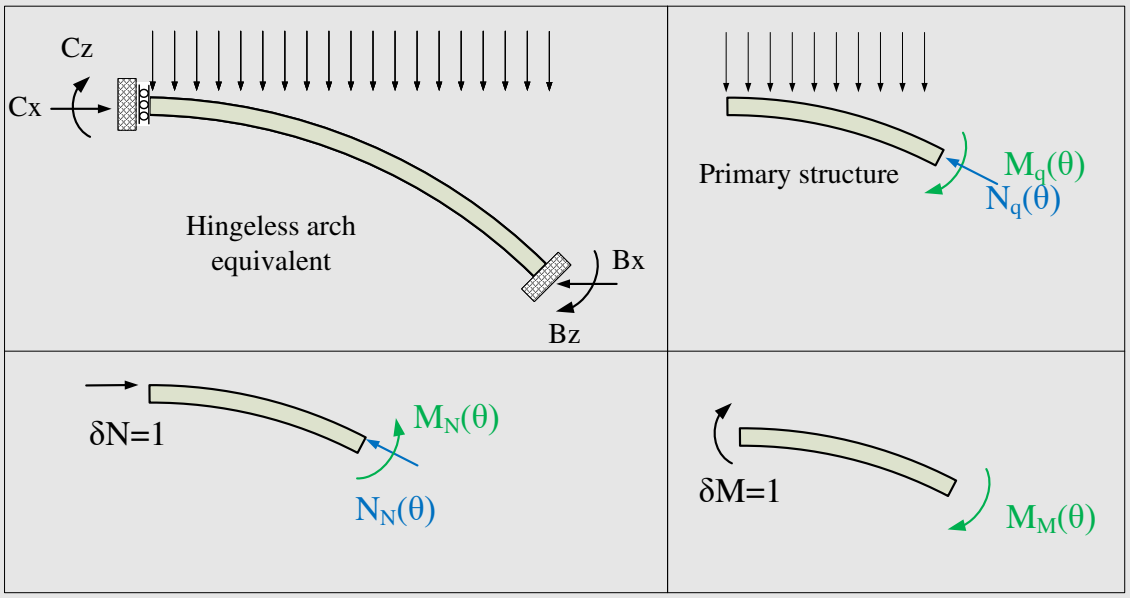
这个无缝的拱将有三个放弃力量。首先, 我们会被诱惑释放所有的力量在一个支持, 然后我们将以 3 比 3 的灵活性矩阵结束。

接近

由于拱的同步性 (冠冕上不能有剪力) 在冠冕上释放拱是更正当的, 在那里相似的荷载将导致只有两个强大的力量: 轴和瞬间。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



我們將使用補充 虛功 的原則來解決這個問題。(二、灵活性) 方法。柔度矩阵 是由

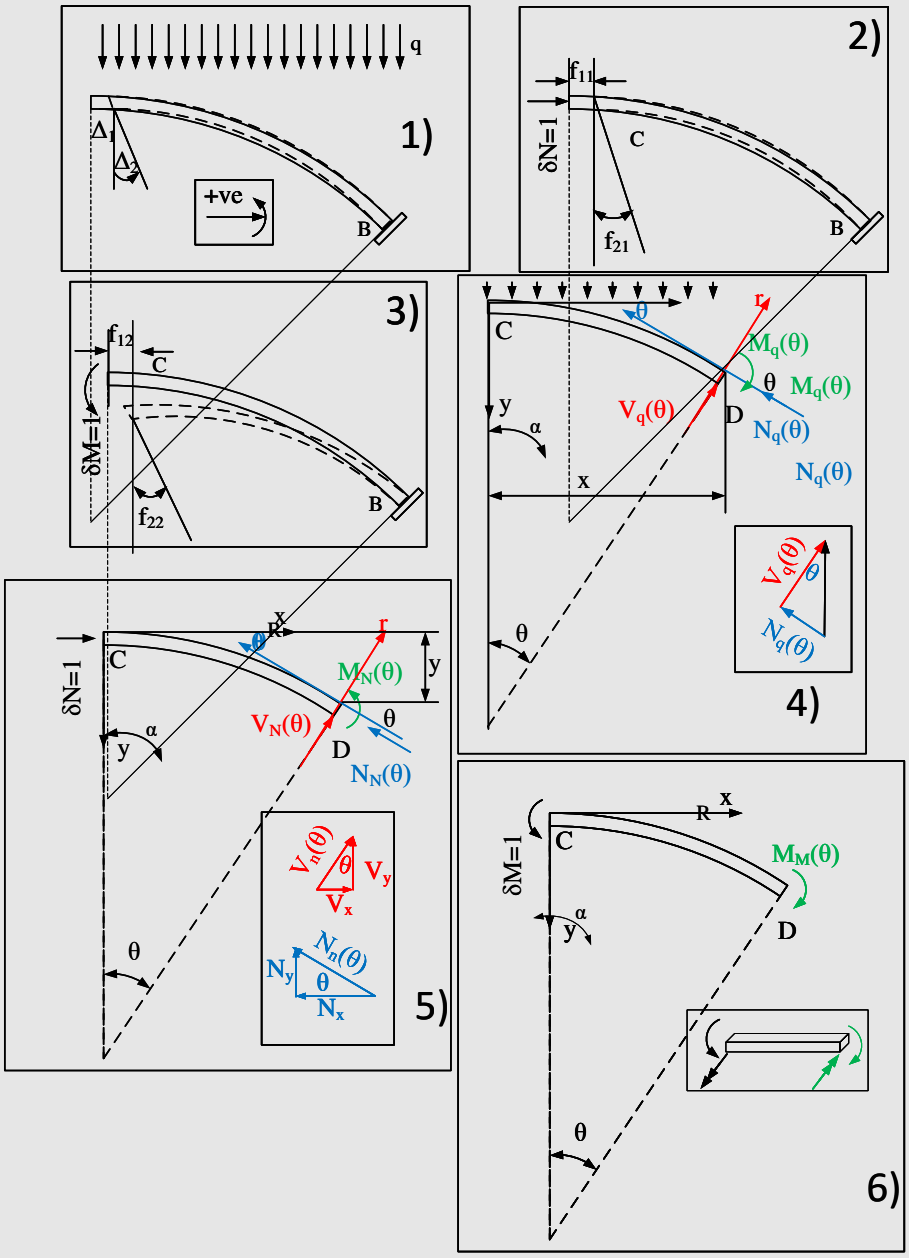
$$\begin{bmatrix} f_{nn} & f_{nm} \\ f_{mn} & f_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_n \\ \Delta_m \end{Bmatrix}$$

和

$$\text{Solve} \begin{Bmatrix} \Delta_N,\ \Delta_M \\ f_{NN},\ f_{NM} \\ f_{MM} \end{Bmatrix} \text{ in terms of } \begin{Bmatrix} N_q(\theta),\ M_q(\theta) \\ N_n(\theta),\ M_n(\theta); \\ N_m(\theta),\ M_m(\theta); \end{Bmatrix} \text{ due to } \begin{Bmatrix} q \\ \delta\overline{N} = 1 \\ \delta\overline{M} = 1 \end{Bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

内在的正常力量和时刻



從 图 1 和 4 由于外部 荷载 的正常力量和时刻是由

$$V_q(\theta) = qx\cos\theta = qR\sin\theta\cos\theta$$
$$N_q(\theta) = qx\sin\theta = qR\sin^2\theta$$
$$M_q(\theta) = -q\frac{x^2}{2} = -q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

和 (单位) 虚拟水平力量将导致下列内部力量 (图 2/5)

$$M_n(\theta) = (1)(y) = R(1-\cos\theta)$$

從 图 5 ($\delta N = 1$), 平衡 的力量 (请注意, 我们只有一组力量在 x 方向, 而没有一个在 y) 收益

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_x - N_x + \delta N &=& 0 \\ V_y + N_y &=& 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{cc} \sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n(\theta) \\ N_n(\theta) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

解决和插入 $M_n(\theta)$

$$\lfloor\ V_n(\theta),\quad N_n(\theta), M_n(\theta)\ \rfloor = \lfloor\ -\sin(\theta),\quad \cos(\theta),\quad R(1-\cos\theta)\ \rfloor$$

对于单元的外部时刻在 C, 我们没有任何引发的内部力量, 但内部时点是 (图 3/6)

$$\lfloor\ N_m,\quad M_m\ \rfloor = \lfloor\ 0,\quad -1\ \rfloor$$

我们注意到, 从前图中, 在垂直负载下, 弓将向支持推进, 因为它会向左移动。然而, 我们在这里采取了一个位移向右的方向 $\delta N = 1$.

首要结构的转移

我们现在确定了与真实的荷载相关的两个转移

$$\underbrace{\delta\overline{N}}_{1}\Delta_n = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_n(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q\frac{\delta\overline{N}_n(\theta)}{EA}Rd\theta$$

$$\underbrace{\delta\overline{M}}_{1}\Delta_m = \int_0^\alpha M_q(\theta)\frac{\delta\overline{M}_m(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_q(\theta)\frac{\delta\overline{N}_m(\theta)}{EA}Rd\theta$$

从上面取代内部力量。这一结果在

$$\Delta_n = \frac{qR^2\left(4\sin^3(\alpha)\left(2\kappa+R^2\right)+3R^2(\sin(2\alpha)-2\alpha)\right)}{24EI}$$

$$\Delta_m = \frac{qR^3(\alpha-\sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI}$$

哪里 $\kappa = I/A$ 因此, 如果我们忽略了轴性变形 $\kappa = 0$. 我们注意到, 轴硬度不会影响转角 Δ_2.

柔度矩阵

柔度矩阵 是下一个从

$$f_{ij} = \int_0^\alpha M_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta + \int_0^\alpha N_i(\theta)\frac{N_j(\theta)}{EA}Rd\theta$$

哪里 i, j 地图入口 n, m. 取代,

$$f_{nn} = \frac{R\left(2\alpha\left(\kappa+3R^2\right)+\sin(2\alpha)\left(\kappa+R^2\right)-8R^2\sin(\alpha)\right)}{4EI}$$

$$f_{nm} = f_{mn} = \frac{R^2(\sin(\alpha)-\alpha)}{EI}$$

$$f_{mm} = \frac{\alpha R}{EI}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

逆转 柔度矩阵 产生减少的 刚度矩阵 K_{ij} 由此授予的

$$K_{11} = \frac{4\alpha EI}{\alpha R(2\alpha + \sin(2\alpha))\,(\kappa + R^2) - 4R^3\sin^2(\alpha)}$$
$$K_{12} = \frac{4EI(\alpha - \sin(\alpha))}{\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha))\,(\kappa + R^2) - 4R^2\sin^2(\alpha)}$$
$$K_{22} = \frac{EI\left(2\alpha\left(\kappa + 3R^2\right) + \sin(2\alpha)\left(\kappa + R^2\right) - 8R^2\sin(\alpha)\right)}{\alpha R(2\alpha + \sin(2\alpha))\,(\kappa + R^2) - 4R^3\sin^2(\alpha)}$$

刚度矩阵 加倍 Δ_n 和 Δ_m 这是由数学进行的, 但是答案太复杂了, 以至于分析上值得欣赏。

简化; 忽略轴形变形

管理方程式

正確的解決方案可以以數字為基礎, 我們將通過無視軸形變化來簡化問題, 因此設定。$\kappa = 0$, 这将产生

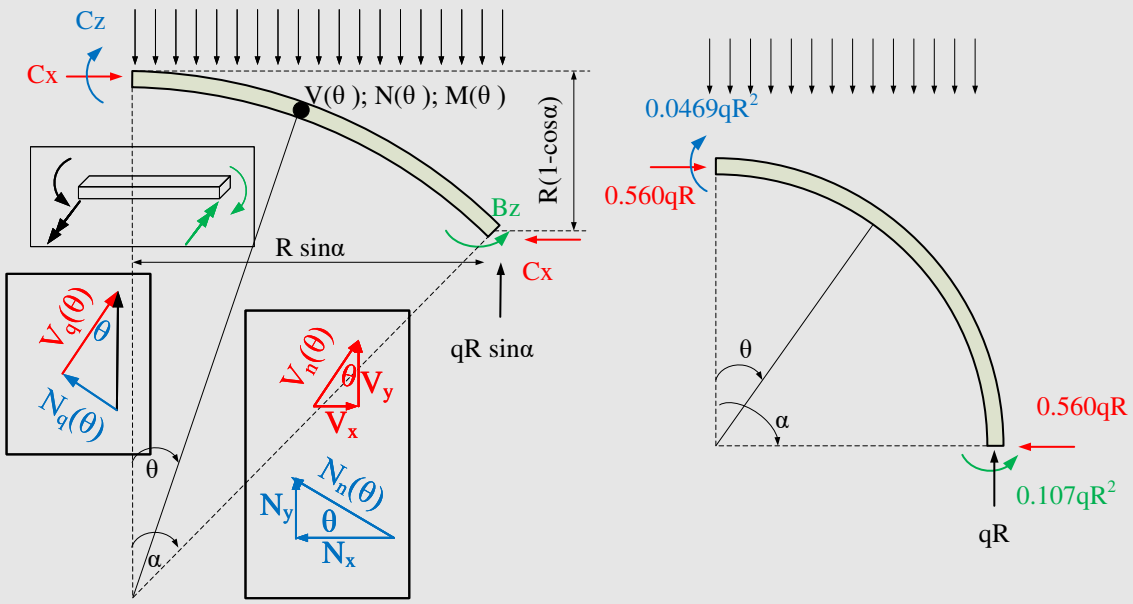
$$\Delta_n = \frac{qR^4\left(-6\alpha + 4\sin^3(\alpha) + 3\sin(2\alpha)\right)}{24EI}$$
$$\Delta_m = \frac{qR^3(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha))}{4EI}$$
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{R^3(6\alpha - 8\sin(\alpha) + \sin(2\alpha))}{4EI} & \frac{R^2(\sin(\alpha) - \alpha)}{EI} \\ \frac{R^2(\sin(\alpha) - \alpha)}{EI} & \frac{\alpha R}{EI} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4\alpha EI}{R^3(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} & \frac{4EI(\alpha - \sin(\alpha))}{R^2(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} \\ \frac{4EI(\alpha - \sin(\alpha))}{R^2(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} & \frac{EI(6\alpha - 8\sin(\alpha) + \sin(2\alpha))}{R(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha))} \end{bmatrix}$$

这将导致下列力量

$$C_x = \frac{qR\sin(\alpha)(2\alpha(\cos(2\alpha) + 2) - 3\sin(2\alpha))}{24\sin^2(\alpha) - 6\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha))}$$
$$C_z = -\frac{qR^2}{48\left(\alpha(2\alpha + \sin(2\alpha)) - 4\sin^2(\alpha)\right)}\left[24\alpha^2 + 8\sin(\alpha)\right.$$
$$\left.\left(-6\alpha + 4(\alpha - \sin(\alpha))\sin^2(\alpha) + 3\sin(2\alpha)\right) + 3\cos(4\alpha) - 3\right]$$

根据下面的数字, 内部力量将由

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



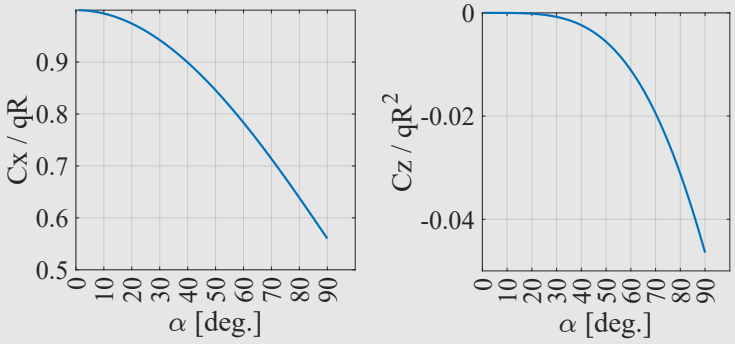
$$N(\theta) = C_x \underbrace{\cos\theta}_{N_n} + \underbrace{qR\sin^2\theta}_{N_q} \qquad \text{+ve Compression}$$

$$V(\theta) = -C_x \underbrace{\sin\theta}_{V_n} + \underbrace{qR\sin\theta\cos\theta}_{V_q} \qquad \text{+ve CW}$$

$$M(\theta) = C_z \underbrace{1}_{M_m} + C_x \underbrace{R(1-\cos\theta)}_{M_n} - \underbrace{q\frac{R^2\sin^2\theta}{2}}_{M_q} \qquad \text{+ve CCW}$$

结果视觉化

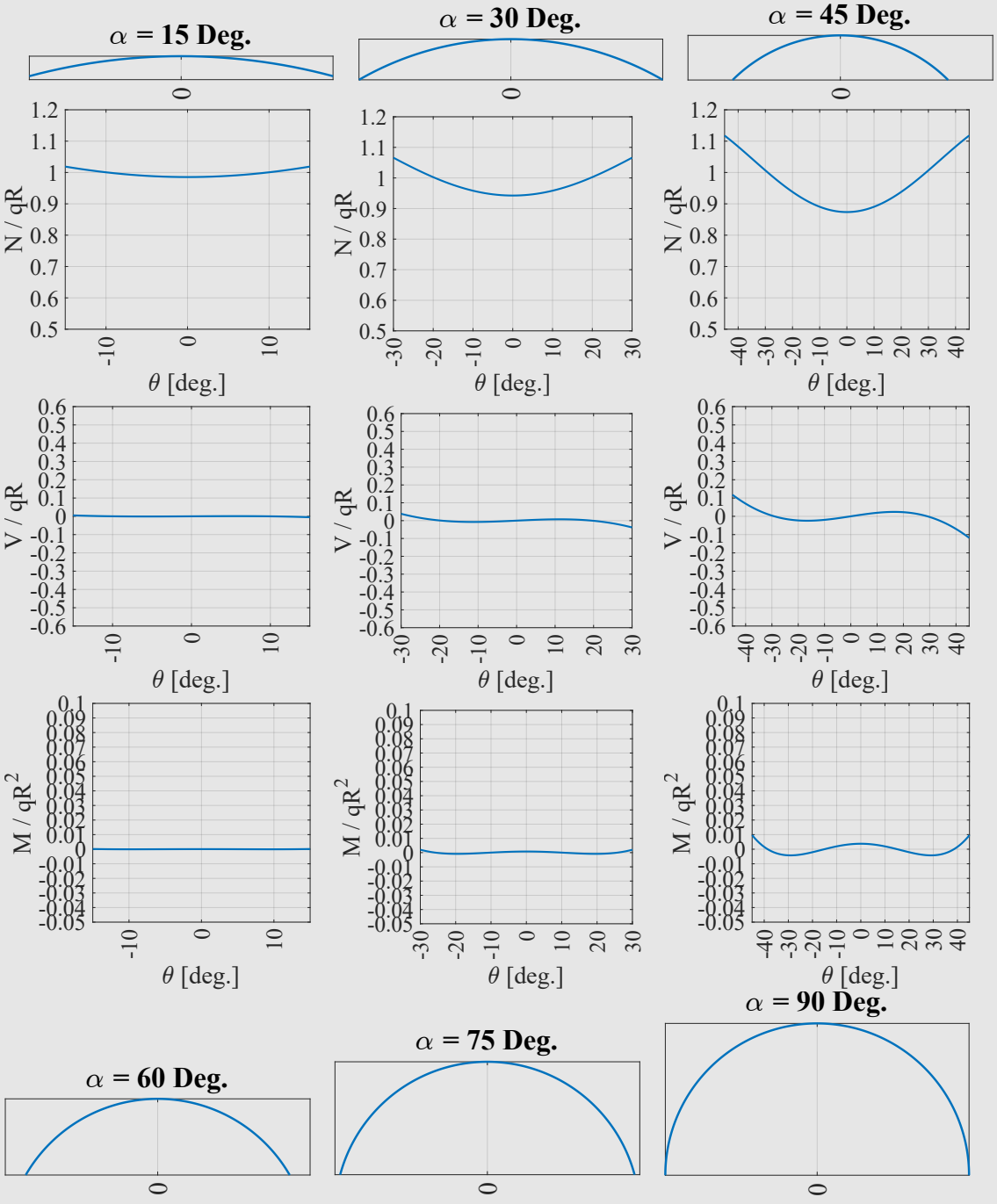
考虑到多样性 C_x 和 C_z 前者是最大的 “平板档案” 它在拱变成一个半循环。另一方面, C_z 对于这个问题, 几乎是零。“平板 拱” 它是半循环的最大。



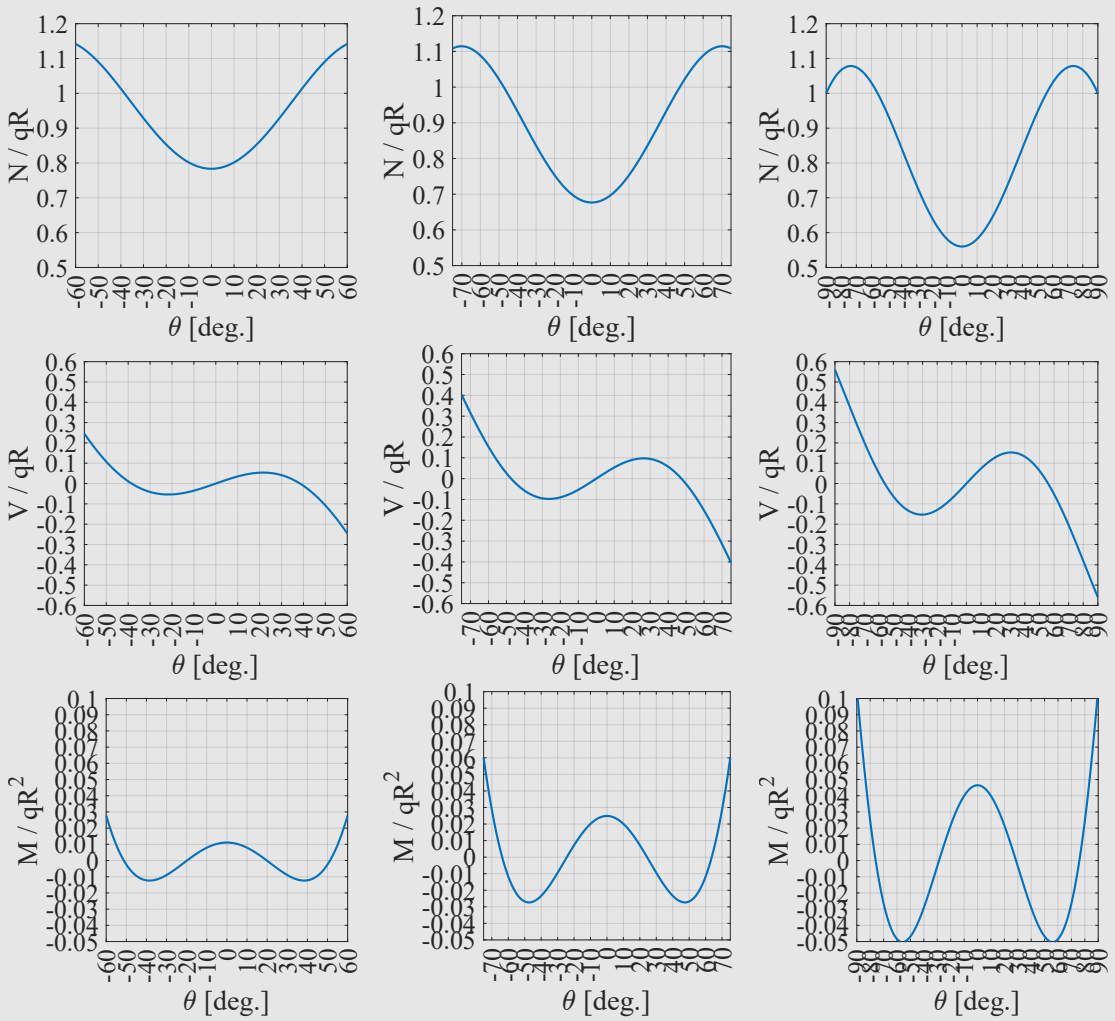
下面我们来看看正常化轴 (N) 饰 Shear (V) 和瞬间 (M) 沿着城堡, 在 θ. 为了便于比较, 所有插件都有相同的 min 和 max 值。正常的力量是特别稳定的小 α 但是 N 在冠冕下降, 最终导致两点的冲击。虽

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

然绝对值的叶子可能已经被定位, 我们注意到它是几乎零的一个 “平板 拱” 渐进地, 它就如 α 最终, 随着预期的增长 (由于同义) 王冠上总是零。最后, 这一刻, 几乎是零的 flat 平架, 并逐渐增加, 顶峰总是在支持下, 并且被其特点所特征。W 形状。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



最后, 这个问题的解决方案不会完全没有扭曲的形状。这是作为一个练习留下, 解决方案的提示可以在章节中找到。D.

32.1.4 通用解决方案

32.1.4.1 衍生品

适应从 Smars, 2000 *"Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes"*.

32.1.4.1.1 中心 重力

23 此分類上一篇: 首次發表 Milankovitch, 1907 *"Theorie der druckkurven"*.

24 首先, 取出重力的熊猫中心的位置 (不是一个显而易见的任务!). 与图的参考 32.4

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

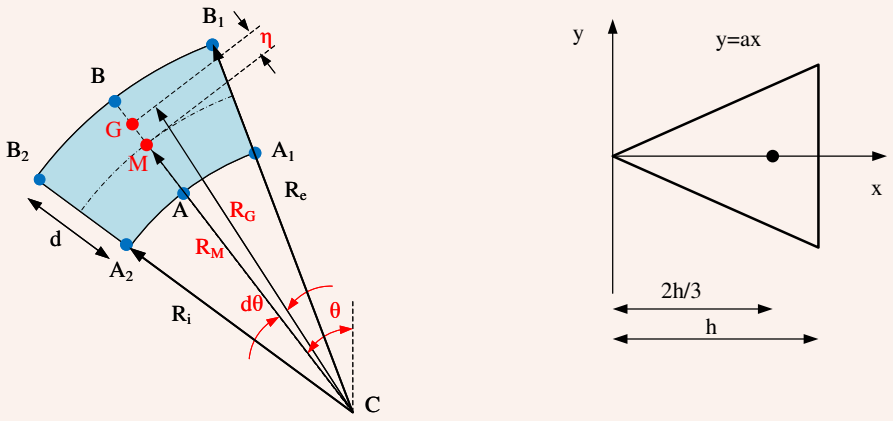


图 32.4: 重力的中心

25 首先, 我们注意到中心和重力 (CG 的) 毛皮的位置不同于中间点。M 截面的 AB ($A_1B_1B_2A_2$).

26 我们决定了立场 G 考虑到他无限三角形区域的第一瞬间之间的差异 CB_1B_2 和 CA_1A2 关于经过的轴 C 直至曲率的射线。首先, 该地区的第一 S_1 由 CB_1B_2 由该地区提供 $A_{CB_1B_2}$ 因距离增加 $R_{CB_1B_2}$ 其中心的 质量 从 C.

27 同样, 区域的第一刻 S_2 由 CA_1A_2 由该地区提供 $A_{CA_1A_2}$ 因距离增加 $R_{CA_1A_2}$ 其中心的 质量 从 C.

$$S_2 = A_{CA_1A_2} R_{CA_1A_2} = A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right)$$

28 无限的阴影的第一瞬间 $A_1B_1A_2B_2$ 是

$$(A_{CB_1B_2} - A_{CA_1A_2}) R_G = A_{CB_1B_2} \frac{2}{3}\left(R_M + \frac{d}{2}\right) - A_{CA_1A_2} \frac{2}{3}\left(R_M - \frac{d}{2}\right) \tag{32.13}$$

29 三角形区域与高度之间的关系是由中心区的定义决定。

$$\overline{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h x(\overbrace{ax}^{y})\, dx}{\int_0^h (ax) dx} = \underbrace{\frac{\frac{ah^3}{3}}{\frac{ah^2}{2}}}_{A} = \frac{2h}{3} \Rightarrow A = \frac{ah^2}{2} \Rightarrow A \propto h^2$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30 与之之间的关系 $A_{CB_1B_2}$ 和 $A_{CA_1A_2}$ 因此, 与距离的四分之一之间的比例相比例。$\left(R_M+\frac{d}{2}\right)^2$ 和 $\left(R_M-\frac{d}{2}\right)^2$ 因此

$$A_{CB_1B_2}=A_{CA_1A_2}\frac{\left(R_M+\frac{d}{2}\right)^2}{\left(R_M-\frac{d}{2}\right)^2} \tag{32.14}$$

31 取代 EQ。32.14 到 eq。32.13 解决为 R_G

$$R_G=R_M+\frac{d^2}{12R_M}\Rightarrow\eta=\frac{d^2}{12R_M}$$

32.1.4.1.2 衍生品

32 单位厚度弓的地质是由其极角度定义的。θ, 其射线为曲率 r(θ), 它是厚度 D(θ) (形象 32.5). 为了得出平衡的差异方程式, 我们研究一个无限的阴道的平衡。(或一个拱的部分). 请注意, 没有厚度或曲率 r 弓的必然是小。

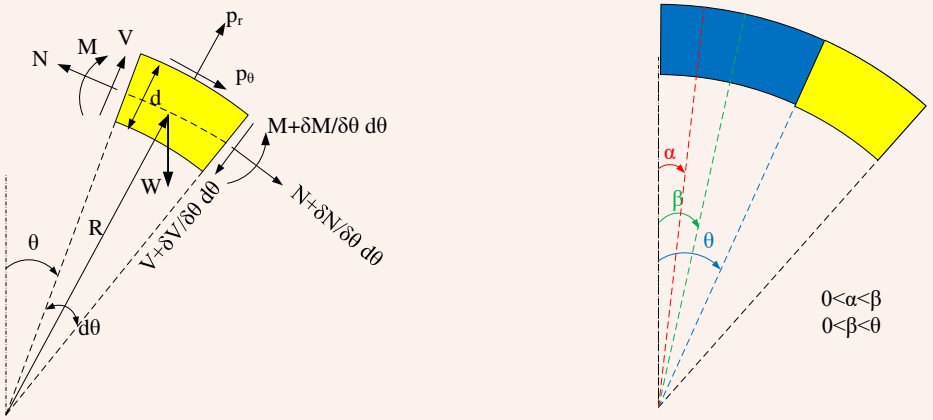


图 32.5: 平衡 无限的阴影

33 毛巾有重量,W, 由:

$$W=\gamma r d\ d\theta$$

哪里 γ 是 拱 的具体重量 $[N/m^3]$. 它适用于重力的中心, 在距离 r_G 从曲率的中心。

$$R_G=R\left[1+\frac{1}{12}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right]=R\left[1+\frac{\eta^2}{12}\right]$$

34 内部力量是正常的力量。N (积极的紧张), 剪力 V (积极的, 如果它倾向于引起时钟视 转角) 而这一瞬间 M (积极的, 如果它延伸底部纤维). 该部分没有关于应力分布的假设。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35 弓被表面力量在其排泄物上施加, p_θ 在坦克的方向和 p_r 在放射方向。放射性平衡是由

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta - Nd\theta - \gamma R d\cos(\theta)d\theta + p_r\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

请注意, 由于面孔不平行, 正常的力量具有放射性组成部分。$-Nd\theta$.

36 面部的长度有长度。$\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta$.

37 平衡的阴道是写的:

$$-\frac{\partial N}{\partial \theta}d\theta - Vd\theta + \gamma R d\sin(\theta)d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)d\theta = 0$$

再一次, 由于面孔不平行, 剪力有一个坦格组成部分。

38 最后, 在中心点的旋转平衡写下:

$$-\frac{\partial M}{\partial \theta}d\theta + VRd\theta + \frac{d^2}{12R}\sin(\theta)\gamma R d d\theta + p_\theta\left(R+\frac{d}{2}\right)\frac{d}{2}d\theta = 0$$

39 如果因果与 θ 被称为首席 (') 如果非尺寸参数 η 描述弓的滑动性 $n = d/r$ 引入, 平衡的方程式可以重写:

$$N' - V + \gamma R^2\eta\sin(\theta) + p_\theta R(1+\eta/2) = 0 \tag{32.15}$$

$$-V' - N - \gamma R^2\eta\cos(\theta) + p_r R\left(1+\frac{\eta}{2}\right) = 0 \tag{32.16}$$

$$-M' + VR + \gamma R^3(\eta^3/12)\sin(\theta) + p_\theta R^2\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\frac{\eta}{2} = 0 \tag{32.17}$$

40 取代衍生品 V' 由 V, (Eq. 32.16) 以 EQ 的衍生品。32.15, V 可以被消除。

$$N'' + V' + (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta) + \gamma R^2\eta\cos(\theta) + (p_\theta R(1+\frac{\eta}{2}))' = 0$$

然后我们得到了:

$$N'' + N = q(\theta) \tag{32.18}$$

哪里是变量 (常见的知) 条款已集成到第二期

$$q(\theta) = \underbrace{R(p_r - p'_\theta)\left(1+\frac{\eta}{2}\right) - p_\theta\left[R\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\right]}_{\text{External load}} - 2\gamma R^2\eta\cos(\theta) - (\gamma R^2\eta)'\sin(\theta)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

41 相连的均匀差异方程式的总体解决方案是线性组合。$\sin(\theta)$ 和 $\cos(\theta)$. 可以展示 (忽略外部 荷载) 这

$$N(\theta) = a_1 \cos(\theta) + \left(a_2 + \underbrace{\int_0^\theta \frac{\overbrace{\int_0^\beta q(\alpha) \sin\alpha d\alpha}^{F_1(\beta)}}{\sin^2\beta} d\beta}_{F_2(\theta)} \right) \sin(\theta) \tag{32.19}$$

这是一个解决方案。

42 我们检查

$$\begin{aligned}
F_1(\beta) &= \int_0^\beta q(\alpha)\sin(\alpha)d\alpha = \frac{1}{4}\gamma\eta R^2\left[-2\beta - 4\sin^2(\beta) + \sin(2\beta)\right] \\
F_2(\theta) &= \frac{\int_0^\theta F_1(\beta)}{\sin^2(\beta)} = \frac{1}{2}R^2\gamma\eta\left[(-1+\theta(-2+\cot(\theta))\right] \\
F_3(\theta) &= \frac{d^2}{d\theta}N(\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta)\left[2\mathrm{a1} + \gamma\eta(\theta+4)R^2\right] - \frac{1}{2}\sin(\theta)\left[2a_2 + \gamma\eta(1-2\theta)R^2\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(\theta) &= a_1\cos(\theta) + (a_2 + F_2(\theta))\sin(\theta) \\
\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) &= -\frac{1}{2}(2a_1 + R^2\gamma\eta(4+\theta))\cos(\theta) - \frac{1}{2}\left[2a_2 + R^2\gamma\eta(1-2\theta)\right]\sin(\theta)
\end{aligned}$$

替代 EQ。32.18 可以很容易地证明, 事实上

$$\frac{d^2}{d\theta}N(\theta) + N(\theta) - q(\theta) = 0$$

43 剪力 可以从 Eq 确定。32.16

$$V(\theta) = \cos(\theta)\left(a_2 - \gamma\eta\theta R^2\right) - \tfrac{1}{2}\sin(\theta)\left(2a_1\gamma\eta\theta R^2\right)$$

44 此时此刻是从 Eq 获得的。32.17

$$\begin{aligned}
M(\theta) = a_3 - a_1 R + R^3\gamma\eta + \frac{1}{2}R\left[2a_1 + R^2\gamma\eta(-2+\theta)\right]\cos(\theta) + a_2 R\sin(\theta) \\
+ \frac{1}{12}R^3\gamma\eta\left[-6 + (-12+\eta^2)\theta\right]\sin(\theta)
\end{aligned}$$

注意, 第三个集成连续性 (a_3) 被引入了。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

45 寻找整合的三个连续性 a_1, a_2, 和 a_3 需要三个额外的方程式。价值的 N, V, 和 V 可以通过设置找到 $\theta = 0$.

46 内部努力可以以不同的方式代表。定义绝对的偏见, ex 相對的興奮性, e:

$$ex = -\frac{M}{N}, \; e = \frac{2ex}{d}$$

47 时刻是根据部分的中间点进行测量。系统相当于系统。(N、V、前) 或 (N*, V, e) 哪里 $N*$ 它是同等强度的力量。N 使用在远程 ex 从计算部分的中间产生一个时刻 M. 价值的 e 低于 1 的, 当强度 $N*$ 延伸超越入口部分的终端,0 当 $N*$ 它通过中心, 并且超过 1 当它通过 extrados。

48 作为一个例子, 考虑一个圆形的圆形厚度, 仅限于自己的重量。平衡 方程式 (伊克斯。32.15-32.17) 可以重写为:

$$\begin{aligned} N'(\theta) - V(\theta) + \gamma R^2 \eta \sin(\theta) &= 0 \\ V'(\theta) + N(\theta) + \gamma R^2 \eta \cos(\theta) &= 0 \\ -M'(\theta) + V(\theta)R + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

和差异方程式 32.18 变成

$$N''(\theta) + N(\theta) = -2\gamma R^2 \eta \cos(\theta)$$

49 解决 EQ。32.19 在这种情况下, 我们获得

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0 \cos(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0 \sin(\theta) + (a_2 - \gamma R^2 \eta \theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

哪里 N_0 这是正常的力量 $\theta = 0$. 至于时刻,Eq。32.17 变成

$$M'(\theta) = VR + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \sin(\theta)$$

取代表达式 V

$$M'(\theta) = -N_0 R \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta \theta) R \cos(\theta) + \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

集成成果

$$M(\theta) = a_3 + N_0 R \cos(\theta) + V_0 R \sin(\theta) - \gamma R^3 \eta (\theta \sin(\theta) + cos(\theta) - \gamma R^3 \frac{\eta^3}{12} \cos(\theta)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

50 最终, 内部部队将由

$$N(\theta) = N_0 \cos(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta\theta)\sin(\theta) \tag{32.20}$$
$$V(\theta) = -N_0 \sin(\theta) + (V_0 - \gamma R^2 \eta\theta)\cos(\theta) \tag{32.21}$$
$$M(\theta) = M_0 - N_0 R(1-\cos(\theta)) + V_0 R\sin(\theta) - \gamma R^3 \eta\left[\theta\sin(\theta) - (1-\cos(\theta))\left(1+\frac{\eta^2}{12}\right)\right] \tag{32.22}$$

32.1.4.1.3 验证

51 我们可以检查一下,Eqs。32.20-32.22 与 Eqs 相比。32.10, 32.11, 和 32.12 為三個中心的軸、相关术语和瞬間 (Smars, 2022).

52 在此衍生中, 角落是从基斯测量的。($\theta = 0$) 在那里, 两点和每一刻都是零的。($V = M = 0$). 我们还假设厚度是不可忽视的。(相比之下 R) 这样 $\eta = 0$. 另一方面, 自我重量可以表达为 $w = \gamma R\eta$. 取代,EQ。32.20-32.22 成为

$$\begin{aligned} N(\theta) &= N_0\cos(\theta) - wR\theta\sin(\theta) \\ V(\theta) &= -N_0\sin(\theta) - wR\theta\cos(\theta) \\ M(\theta) &= -N_0 R(1-\cos(\theta)) - wR^2[\theta\sin(\theta) - 1 + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

N_0, 在轴上的轴力应该等于水平的反力 (Eq. 32.9), $N_0 = C_x = (\pi/2-1)wR$

$$\begin{aligned} N(\theta) &= wR\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos(\theta) + \theta\sin(\theta)\right] \\ V(\theta) &= wR\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin(\theta) - \theta\cos(\theta)\right] \\ M(\theta) &= wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos(\theta)) - \theta\sin(\theta)\right] \end{aligned}$$

53 最后, 我们将为角度做出替代。θ 以此为主, 以此為主。θ' 测量从 x 三中心的拱解决方案中的轴

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

出生

$$\begin{aligned} N(\theta') &= -wR\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin(\theta) + \left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)\cos(\theta')\right] \\ V(\theta') &= wR\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos(\theta') - \left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)\sin(\theta')\right] \\ M(\theta') &= wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin(\theta')) - \left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)\cos(\theta')\right] \end{aligned}$$

因此, 我们恢复了以前所产生的相同方程式。伊克斯。32.10, 32.11, 和 32.12.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

32.1.5 基于数学的解决方案

54 圆形拱的广泛解决方案集与各种负载和支持组合在附件中提供 D. 这是 MS 的论文。Sonavane, 2014, 并包含免费的身体图表和相应的数学代码。

32.2 最佳形状的拱

55 虽然无限数量的平板可以保持在两个点之间, 我们试图找到一个最佳的单一荷载, 图。32.6. 從 平衡 的左數字, 我們有

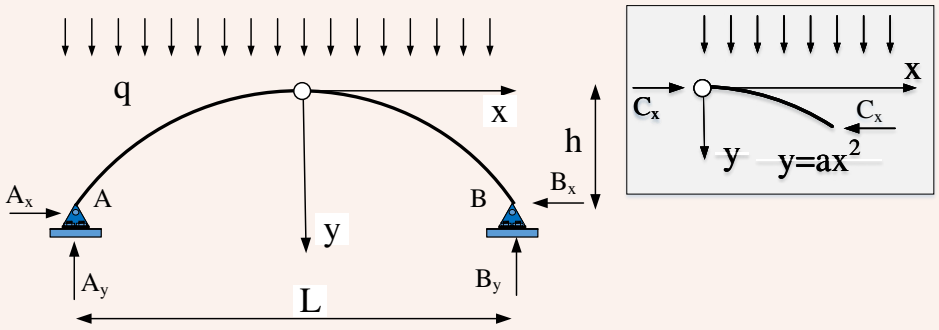


图 32.6: 最佳的 Parabolic 拱 为一个单一的 荷载

$$\begin{cases} (+\circlearrowleft)\,\Sigma M_A = 0 \Rightarrow B_y L - \dfrac{qL^2}{2} == 0 \\ (+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \dfrac{qL}{2}\dfrac{L}{4} + B_x \dfrac{L}{2} - C_x h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_x = \dfrac{qL^2}{8h} \\ B_y = \dfrac{qL}{2} \end{cases}$$

我们要确定 a 这样的那 $M(x) = 0$ 整個 拱. 考虑到平衡在正确的自由体图表, 并采取 $y = ax^2$ 我们试图确定 a

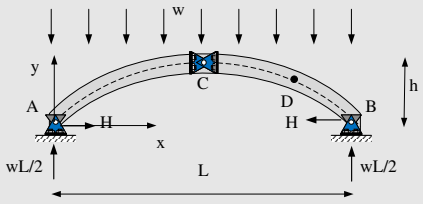
$$(+\circlearrowright)\,\Sigma M_C = 0 \Rightarrow C_x \underbrace{(ax^2)}_{y} - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{L^2}$$

56 对于这种模拟, 将不会有统一荷载的内部时刻。

57 至于电缆, 拱的最大总功率是支座。($F_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}$) 而在王冠中, 我们只有一 H 王冠 将需要比 支座 小部分。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

32.2.1 例题 32.5: 完美的拱



三角形的拱与间隔 L 和上升 h 被制服的 荷载 w on 其全域。我们将显示, 在范围内的任何点的弯矩是零。

地平线风格 H 以切王冠的瞬间来定义 C

$$Hh = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{wL}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{wL^2}{8} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{wL^2}{8h}$$

弯矩 在任何部分在一个距离 x 是

$$M_x = \frac{wL}{2} \times x - \frac{wx^2}{2} - Hy$$

这里 y 是距离点的高度 x 从结局 A 它是由与起源在 A 这个平衡的意思是

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$

取代其价值 H 和 y 在上述表达中,

$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8h} \times \frac{4hx(L-x)}{L^2}$$
$$M_x = \frac{wxL}{2} - \frac{wx^2}{2} - \frac{wxL}{2} + \frac{wx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad M_x = 0$$

注明与支持单一 荷载 的 索 类似, 其形状是平板, 并且没有任何时刻。

32.3 帕拉布利亚

58 模拟架的分析与圆形架相同, 显而易见的差异是形状。毫无疑问, 我选择了转到这个部分的例子涉及到帕拉博利。

59 因为非常有信心的文本书处理神话论文, 我选择在这里插入这个部分。

此分類上一篇: Parabolic Arches Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis

32.3.1 例子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

32.3.1.1 例题 32.6: 三角形 模拟 拱

下一篇: 重复 Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

平衡的拱 $y—4hx^2/L^2$ 与王冠的起源, 与 x 右边的轴和 y 轴向下有 80 米的宽度, 上升 6 米。简单的集中荷载 20 kN 以 60 米的距离从左侧起动。我们试图确定支持时的反应和负载时的结果时刻。来自 EQ。32.1

$$V_A = \frac{20 \times 20}{80} = 5\text{kN and } V_B = \frac{20 \times 60}{80} = 15\text{kN}$$

来自 EQ。32.3

$$H = \frac{20 \times 20}{2 \times 6} = 33.33\text{kN}$$

一个精心支持的泡沫集中负载的旋转时刻是

$$M_o = \frac{Wab}{L} = \frac{20 \times 60 \times 20}{80} = 300\text{kNm}$$

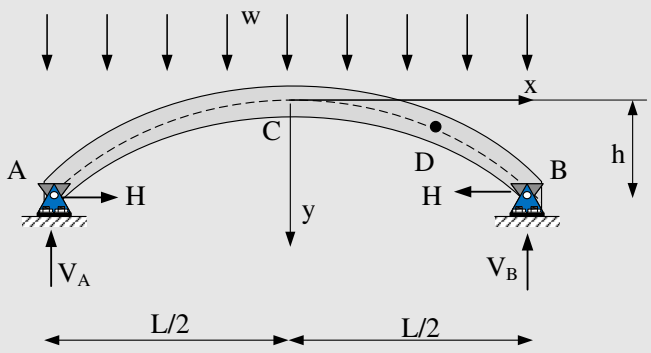
顺便说一句, 拱轴的高度在荷载上方是 $(h-y)$. 为 $x = 20$ m,

$$y = \frac{4 \times 6 \times 20^2}{80^2} = 1.5 \text{ m} \quad \therefore (h-y) = (6-1.5) = 4.5 \text{ m}$$

由于震动的时刻是 $H(h-y) = 33.33 \times 4.5 = 149.985$kNm. 结果时刻在荷载是 $(300 - 149.985) = 150.015$kNm

查看王冠时刻 $(5 \times 40 + 20 \times 20 - 1.5 \times 40) = (200 + 400 - 600) = 0$.

32.3.1.2 例题 32.7: 兩個垂直的平凡變量交叉部分 拱



同步的双环拱受垂直加载。由于拱的同位性, 支持者的水平反应是平等和相反。它也被称为火柴, 并被称为 H.

下一篇: 重复 Thandavamoothy, 2011 Structural Analysis.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

理论

放下鼓 H 被视为需要评估的折扣。卡斯蒂格利亚诺的理论 (Eq. 48.36).

$$U^* = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{AE}ds = 0 \tag{32.23}$$

和

$$\Delta = \frac{\partial U^*}{\partial H} = 0 \tag{32.24}$$

弯矩 源于此简单支持的状态被称为 M_0 相应的轴力 N_0. 在这种放松的条件下, 在一个部分的旋转时刻和轴力 D 在 拱 中可以表达为

$$M - M_0 - H(h-y) \quad \text{and} \quad N = N_0 + H\cos\theta \tag{32.25}$$

哪里 h 是拱的上升和 θ 是坦根的角度到拱的中心线, 在 D 与 X 轴。取代 EQ。32.25 其衍生品与 H 在 32.24,

$$-\int_0^l \frac{M_0 - H(h-y)}{EI}(h-y)ds + \int_0^l \frac{N_0 + H\cos\theta}{AE}\cos\theta ds = 0 \tag{32.26}$$

解决方案的 H 因此, 由

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds - \int_0^l \left(\frac{N_0}{AE}\right)\cos\theta ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

此方程式适用于任何形状和任何负载条件的所有交互式双环架。对于 拱 的常规比例, 编号器中的第二个术语与第一个数字相比非常小。(轴形变形比灵活性较小) 因此, 可以被忽略。因此, 对特斯拉的表达是作为

$$H = \frac{\int_0^l \left(\frac{M_0}{EI}\right)(h-y)ds}{\int_0^l \left[\frac{(h-y)^2}{EI}\right]ds + \int_0^l \left[\frac{(\cos^2\theta)}{AE}\right]ds}$$

震撼的 H 只有在关系中才能进行评估。h 和 y 已知。对于一个特定的例子, 一个类似的拱, 与拱轴相匹配 y 和 h 被授予

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \tag{32.27}$$

和

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (8hx/L^2)^2}}$$

此外, 假设横截面积和时刻的内心因下表达而有所不同。

$$A = \frac{A_c}{\cos\theta} \quad \text{and} \quad I = \frac{I_c}{\cos\theta}$$

哪里 A_c 和 I_c 在冠冕上标记 横截面积 和 惯性矩 C.

要了解其价值 M_0, 我们注意到, 我们有一个统一的分布荷载强度 w 垂直应用于拱, 并且在一个简单支持的梁中, 弯矩图表是一个与最大瞬间的尺寸相似。($wL^2/8$) 中间西班牙。因此, 弯矩在一个部分 D 远离王冠 C 远程的 x 将是

$$M_o = \frac{wL^2}{8}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

取代,

$$H=\frac{\int_0^l \frac{\frac{wL^2}{8}\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)}{[EI_C]/\left[\sqrt{\left\{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right\}}\right]}\left(h-\frac{4hx^2}{L^2}\right)ds}{\int_0^l\left[\left(\frac{h-\frac{4hx^2}{L^2}}{EI_C}\right)^2\sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}\right]ds+\int_0^l\left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right)}}{EA_C}\right]ds}$$
$$=\frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^1\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2ds}{\left[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^l\left[\left(1-\frac{4x^2}{L^2}\right)^2\right]ds+\frac{1}{EA_c}\int_0^l\left[1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\right]ds\right]} \tag{32.28}$$

对于拱轴的无限长度, 从计算

$$ds=dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}$$

区分 EQ。32.27

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx$$

替换为 Eq。32.28

$$H=\frac{\frac{wL^2h}{8EI_C}\int_0^{L/2}(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx}{[\frac{h^2}{EI_c}\int_0^{L/2}[(1-\frac{4x^2}{L^2})^2\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx]+\frac{1}{EA_c}\int_0^{L/2}[1+(\frac{8hx}{L^2})^2]\sqrt{1+(\frac{8hx}{L^2})^2}dx]}$$

或

$$H=\frac{\alpha_1\left[-\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{384h^2}+\frac{L^5}{819h^2}\right)\right]+\alpha_2\left[\frac{wh^2}{I_C}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}+\frac{L^8}{26{,}244h^6}\right)\right]}{\begin{aligned}&\alpha_1\left[-\frac{8h^2}{I_CL^2}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L^3}{256}+\frac{19L^3}{3{,}844h^2}+\frac{L^5}{8{,}192h^2}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\right.\\&\left.\left(L+\frac{Lh^2}{3}+\frac{L^3}{192}-\frac{L^5}{2{,}048h^2}\right)\right]+\alpha_2\left[\frac{8h^3}{I_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^6}{4{,}096h^4}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{L^8}{262{,}144h^6}\right)+\frac{8h}{A_CL^2}\left(\frac{L^4}{128h^2}+\frac{L^{15}}{41{,}943h^6}\right)\right]\end{aligned}} \tag{32.29}$$

被

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{L^2}{4}+\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2},\quad \alpha_2=\ln\left(\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+\left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right) \tag{32.30}$$

应用

现在, 拿起上升到 10 米和范围 60 米受约到 w 25kN/m 的。惯性矩在冠军部分是 1.14×10^{-3} m^4 截面的区域是 6.75×10^{-2} m^2.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

来自 EQ。32.30

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{60^2}{4} + \left(\frac{60^2}{8\times 10}\right)^2} = 54.08; \alpha_2 = \ln\left(\frac{60}{2} + 54.08\right) = 4.43$$

来自 EQ。32.29

$$\begin{aligned}
H &= \frac{A}{B} \\
A &= 54.08\left[-\frac{25\times 10^3}{1.14\times 10^{-3}}\left(\frac{2\times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19\times 60^3}{384\times 10^2} + \frac{60^5}{8,192\times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{60\times 10^2}{1.14\times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128\times 10^2} + \frac{60^6}{4,096\times 10^4} + \frac{60^8}{262,144\times 10^6}\right)\right] \\
B &= 54.08\left[-\frac{8\times 10^3}{1.14\times 10^{-3}\times 60^2}\left(\frac{2\times 60}{3} + \frac{60^3}{256} + \frac{19\times 60^3}{384\times 10^2} + \frac{60^5}{8,192\times 10^2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8\times 10}{6.75\times 10^{-2}}\left(60 + \frac{60\times 10^2}{3} + \frac{60^3}{192} - \frac{60^5}{2,048\times 10^2}\right)\right] \\
&\quad + 4.43\left[\frac{8\times 10^3}{1.14\times 10^{-3}}\left(\frac{60^4}{128\times 10^2} + \frac{60^6}{4,069\times 10^4} + \frac{60^8}{262,144\times 10^6}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{8\times 10}{6.75\times 10^2}\left(\frac{60^4}{128\times 10^2} + \frac{60^{15}}{419,430\times 10^6}\right)\right] \\
\Rightarrow H &= -13.18\text{kN}
\end{aligned}$$

一部分 D 一个距离 x 从王冠 C 被考虑。旋转时刻的表达是通过考虑在正确的分区上的力量平衡获得的。DB 以 拱 的。當時的時間在部分中被採取 D 平凡的力量和正常的力量不要在一瞬间起床。

$$M_x = \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + H(h - y)$$

取代其价值 y 来自 EQ。32.27,

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + H\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) \\
&= -\frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right) + Hh\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \\
&= -\frac{2w}{L^2}\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) + Hh\left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{4x^2}{L^2}\right) \times \left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right)
\end{aligned}$$

因此, 这个时刻也是模糊的。在冠冕上, 瞬间是通过简单的设置找到的。$x = 0$

$$M_C = \left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) = \left(-13.18\times 10 - \frac{2\times 25}{60^2}\right) = -131.81\text{kNm}$$

当时 $x = L/2$, 支座 时刻以 0 获得。当时 $x = L/4$ 四分之一的时刻从前方程中获得

$$M_{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(Hh - \frac{2w}{L^2}\right) = -98.86\text{kNm}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

很明显, 对弯矩的冲动贡献比这更为普遍。w

32.3.2 固定 拱 与同步 荷载

60 旋转时刻、轴力和在弓的任何部分的正常力量, 可以被视为逆转。然而, 冠冕上的截面是有益的, 如果拱是相同的, 就必须考虑。此外, 如果充电是同步的, 分布, 冠冕上的剪力消失, 最终只剩下两倍。他们是弯矩 M_C 王冠部分的正常力量, 如图中所示。32.7.

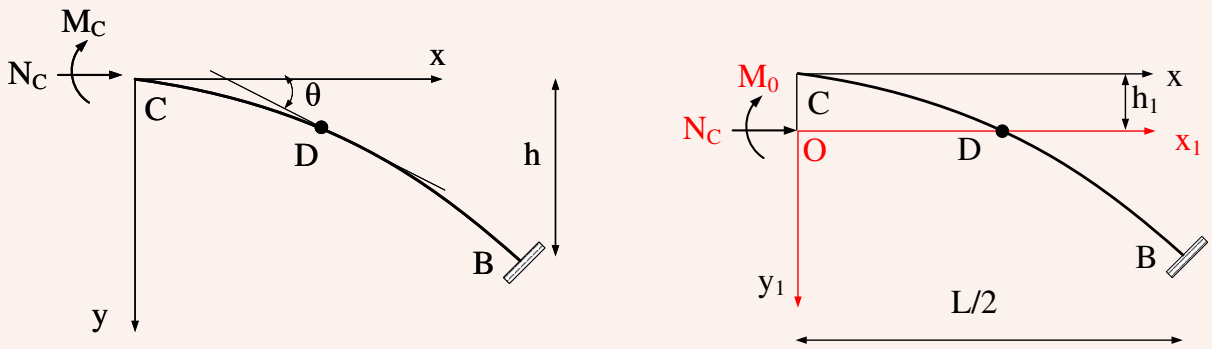


图 32.7: 无缝的模拟拱; 自由体图

61 再次使用卡斯蒂格利亚诺的理论 (Eq. 48.36), 翻译和转角在 C 因同情心而为零。因此, 我们可以评估两种救援力量。

$$\theta_C = \frac{\partial U^*}{\partial M_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}ds = 0 \tag{32.31}$$

$$\Delta_C = \frac{\partial U^*}{\partial N_C} = 2\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial N_C}ds + 2\int_0^l \frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial N_C}ds \tag{32.32}$$

哪里 l 是拱的长度 CB, 即半个轴的长度, 是整个拱。请注意, 右手的侧面是零, 因为相应的位移/转角因同步性而为零。

62 让 M_o 和 N_o 相应, 在任何由应用负载引发的 拱 的部分时刻和正常强度。然后, 总时刻和轴力在一个典型的截面 D 可以被表达为

$$M = M_C + N_C y + M_o \tag{32.33}$$

$$N = N_C \cos\theta + N_o \tag{32.34}$$

区分 EQ。32.33 至于 M_C:

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

二是区分 EQ。32.33 和 32.34

$$\frac{\partial M}{\partial N_C} = y \tag{32.35}$$

$$\frac{\partial N}{\partial N_C} = \cos\theta \tag{32.36}$$

替代 Eqs。32.31 和 32.32

$$\int_0^l \frac{1}{EI}(M_C + N_C y + M_o)ds = 0 \Rightarrow M_C \int_0^l \frac{ds}{EI} + N_C \int_0^l \frac{yds}{EI} = \int_0^l \frac{M_o}{EI}ds \tag{32.37}$$

$$\int_0^l \frac{M_C + N_c y + M_o}{EI} yds = \int_0^l \frac{N_C \cos\theta + N_o}{AE} \cos\theta ds = 0$$

$$\Rightarrow M_C \int_0^l \frac{y}{EI}ds + N_C \int_0^l \frac{y^2}{EI}ds + N_C \int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE}ds = -\int_0^l \frac{M_o y}{EI}ds - \int_0^l \frac{N_o \cos\theta}{AE}ds \tag{32.38}$$

[63] 平等 32.37 和 32.38 他们有点难以处理。可以进一步简化，如果王冠的起源 C 被转移到一个点 C 在距离的 h_1 从王冠 C 其次，新规则与参考点 O 现在变成，$y_1 = (y - h_1)$.

[64] 距离以满足下列条件的方式选择

$$\int_0^l \frac{y_1}{EI}ds = \int_0^l \frac{y - h_1}{EI}ds = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{\int_0^l \frac{y_1}{EI}ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}}$$

该点 O 这就是所谓的定义。**拱的弹性中心**.

[65] 如果点 O 它被用作坐标的起源，然后 y 在 Eqs。32.37 和 32.38，$(y1 - h_1)$ 被取代了。在这样的情况下 $\int_0^l (y_1/EI)ds$ 变成零。随后，瞬间和正常力量的结果表达可以通过

$$M_{oo} = M_C + H_{oo}h_1 = \frac{\int_0^l \frac{M_o}{EI}ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.39}$$

$$H_{00} = N_C = \frac{\int_0^l \frac{M_o y_1}{EI}ds + \int_0^l \frac{N_o \cos\theta}{AE}ds}{\int_0^l \frac{y_1^2}{EI}ds + \int_0^l \frac{\cos^2\theta}{AE}ds} \tag{32.40}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

32.3.2.1 例题 32.8: 无情的模拟 拱

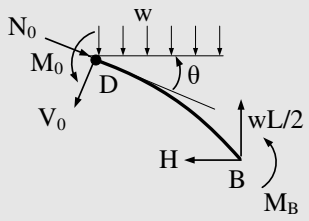
我们试图确定弯矩和轴力在一个交互式的平凡的拱的冠冕, 宽度为 40 米, 并被统一的分布荷载所约束。w 20kN/m 沿着它的全域。拱的升高为 8 米。$E = 2{\times}10^5$ N / mm^2, $I = 1,5{\times}10^{-4}$ m^4, 和 $A = 7.5{\times}10^{-2}$ m^2. 弹性中心位于冠冕下方 1 米。平衡的拱是

$$y = \frac{4hx^2}{L^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{L^2} \tag{32.41}$$

和

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}\, dx \tag{32.42}$$

固定 拱 与应用的 荷载 在图中显示。由于对比, 在尺寸和负载, 固定端时刻在支持者是平等的。相反的, 也是垂直潮流。



首先, 对不同力量的总体表达是形成的, 然后具体值被取代以评估不同力量的大小。现在, $M_A = M_B = M^F$ (哪里 M^F 是支持的固定终点) • 同样 $H_A = H_B = H$. 一瞬间的力量 $C, \sum M = 0$

$$\begin{aligned} -M_B - \frac{wL}{2}\frac{L}{2} + \frac{wL}{2}\frac{L}{4} + Hh = 0 \quad \text{or} \quad -M_B - \frac{wL^2}{8} + Hh = 0 \\ Hh = M_B + \frac{wL^2}{8} \quad \text{or} \quad H = \frac{1}{h}\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) \end{aligned} \tag{32.43}$$

弯矩的 M_0 在任何部分

$$\begin{aligned} M_0 &= -M_B - \frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + w\frac{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4} - Lx + x^2\right) + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{4} + \frac{wLx}{2} + \frac{wL^2}{8} - \frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \\ &= -M_B - \frac{wL^2}{8} + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) = -\left(M_B + \frac{wL^2}{8}\right) + \frac{wx^2}{2} + H_B(h - y) \end{aligned}$$

使用 EQ。32.43 和 32.41, M_0 可以重写为

$$\begin{aligned} M_0 &= -Hh + \frac{wx^2}{2} + H_B\left(h - \frac{4hx^2}{L^2}\right) \\ &= \frac{wx^2}{2} - \frac{4Hh}{L^2}x^2 \,(\because H_B = H) = x^2\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right) \end{aligned} \tag{32.44}$$

在自由的身体上行动的力量 DB 在 截面 D

$$N_O = w\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\theta$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

替代 M_0 在 EQ。32.39

$$M_{OO} = \frac{\int_0^l \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2 ds}{\int_0^l \frac{ds}{EI}} \tag{32.45}$$

替代为 ds 来自 EQ。32.42

$$\begin{aligned} M_{oo} &= -\frac{\int_0^{L/2}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L/2}\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \\ &= \frac{\left(4whL - \frac{32Hh^2}{L}\right)\left\{\alpha_1\left(\frac{1}{32} + \frac{L^2}{1024h^2}\right) - \frac{\alpha_2 L^5}{32{,}768h^4}\right\}}{\frac{2h}{L}\alpha_1 + \left(h + \frac{L^2}{16h}\right)\alpha_2} \end{aligned} \tag{32.46}$$

取代价值观 M_o 来自 EQ。32.44, $y_1 = (y - h_1)$, 和 ds 来自 EQ。32.42 到 eq。32.40

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/2}\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2(y-h_1)\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{w\left(\frac{L}{2}-x\right)\cos^2\theta}{AE}\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L/2}\frac{(y-h_1)^2}{EI}\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{\cos^2\theta}{AE}\sqrt{\left(1+\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \tag{32.47}$$

现在为无限的微小的长度拱.

$$\cos\theta = \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \left[1+\left(\frac{8hx^2}{L^2}\right)^2\right] \tag{32.48}$$

取代其价值 $\cos^2\theta$ 在 EQ。32.47 我们得到

$$H_{oo} = \frac{\int_0^{L/}\frac{1}{EI}\left(\frac{w}{2} - \frac{4Hh}{L^2}\right)x^2(y-h_1)\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{w\left(\frac{L}{2}-x\right)}{AE}1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx}{\int_0^{L2}\frac{1}{EI}\left(\frac{4hx^2}{L^2} - h_1\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx + \int_0^{L/2}\frac{1}{AE}1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}dx} \tag{32.49}$$

$$\begin{aligned} H_{oo} = -\frac{\frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left[\left(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2}\right)\left\{\frac{4h}{L^2}\left(\frac{L^5}{192} + \frac{L^7}{12{,}288h^2} - \frac{L^9}{65{,}536h^2} + \frac{L^9}{131072h^4}\right)\right.\right.\right.} \\ \left.\left.\left. -h_1\left(\frac{L^3}{32} + \frac{L^5}{1{,}024h^2}\right)\right\} - \frac{wL^2I}{8Ah}\right] + \alpha_2\left\{\left(\frac{4wh}{L^2} - \frac{8h^2h_1}{L^2}\right)\right. \\ \left.\left(\frac{L^{10}}{1{,}033{,}576h^5} + \frac{L^8h_1}{32{,}768h^4}\right)\right\}\right\} + \alpha_3\frac{wL^3}{16Ah} \\ \hline \frac{1}{I}\left\{\alpha_1\left\{\frac{8h^3}{3L^3}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) - \frac{1}{8Lh^2}\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64h^2}\right) + \frac{L^3}{1{,}024h^4} + \frac{2hh_1}{L}\right\}\right. \\ \left. +\alpha_2\left\{\frac{L^{12}}{4{,}134{,}034h^6} + \frac{L^4}{64h^2}\right\}\right\} + \frac{L^2}{8Ah}\alpha_3 \end{aligned} \tag{32.50}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}$$
$$\alpha_2 = \ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}\right)$$
$$\alpha_3 = \ln\left\{\frac{8h}{L^2}\left(\frac{L}{2} + \alpha_1\right)\right\}$$

平等 32.50 为 H_{oo} 取决于拱的尺寸和地质特性，它的延伸，以及充电。取代在 Eq 中提供的值。32.47，H_{oo} 可以评估。一次 H_{oo} 可以确定，然后使用它在 Eq。32.46 上面是指定的价值。M_{oo} 时刻在弹性中心。与所有所提供的价值观，表达为 H_{oo} 在 EQ 中提供。32.50 是

$$\begin{aligned}
H_{oo}\frac{1}{1.5\times10^{-4}}&\left\{32.02\left[(\frac{4\times20\times8}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2})\left\{\frac{4\times8}{40}\left(\frac{40^5}{192}+\frac{40^7}{12288h^2}\right.\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.\left.-\frac{40^9}{65536\times8^2}+\frac{40^5}{131072\times8^4}\right)-1\left(\frac{40^3}{32}+\frac{4}{1024\times8^2}\right)\right\}\right.\\
&\left.-\frac{20\times40^2\times1.5\times10^{-4}}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\right]+3.95\left\{\left(\frac{4\times20\times3}{40^2}-\frac{8\times8^2\times1}{40^2}\right)\right.\\
&\left.\left(\frac{40^{10}}{1033576\times8^5}+\frac{40^8\times1}{32768\times8^4}\right)\right\}\Big\}+\frac{0.733\times20\times40^3}{16\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
&=-\frac{}{\frac{1}{1.5\times10^{-4}}\left\{32,02\left\{\frac{8\times8^3}{3\times40^3}\left(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}-\frac{1}{8\times40\times8^2}\left(\frac{40^2}{4}+\frac{40^4}{64\times8^2}\right)\right.\right.\right.}\\
&\left.\left.\left.+\frac{40^3}{1024\times8^4}+\frac{2\times8\times1}{40}\right\}+3.95\left\{\frac{40^{12}}{4134034\times8^6}+\frac{40^4}{64\times8^2}\right\}\right\}+\frac{40^2\times0.733}{8\times8\times7.5\times10^{-2}}\\
&=32.08\text{kN}
\end{aligned}\tag{32.51}$$

最后，将 H_{oo} 的值代入式 32.46，弯矩为

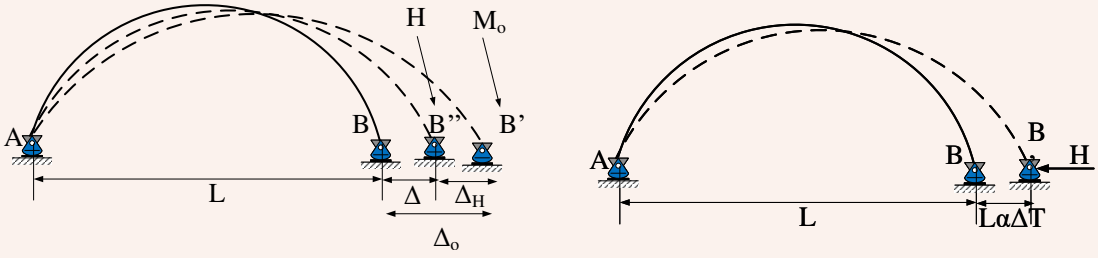
$$M_{oo} = -\frac{\left(4\times20\times8\times40-\frac{32\times32.08\times8^2}{40}\right)\left\{32.02\left(\frac{1}{32}+\frac{40^2}{1024\times8^2}\right)-\frac{3.95\times40^5}{32768\times8^4}\right\}}{\frac{2\times8}{40}\times32.02+\left(8+\frac{40^2}{16\times8}\right)3.95}$$
$$= 314.98\text{kNm}$$

32.3.3 基础 调节和温度效应

雅利

66 现在，让我们来考虑安排或移动或提供支持对价值的影响。*H*. 在 图 32.8a，一个双环的拱 *AB* 被展示。结局 *B* 支持在滚动。它被称为初级拱. 在外部负载下，支持 *B* 首先，主要结构转向 *B*’ 让 M_0 是由于某些外部荷载的主要结构中的时刻。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 初始 位移 (b) 温度效应

图 32.8: 初始调整和温度变化的影响

67 应用一个虚拟水平力量单位 [1] 在虚拟时刻的结果 $\delta\overline{M} = 1 \times y$ 哪里 y 是拱在计算时刻的部分上涨。然后, 在拱中的位移

$$\begin{aligned}(1)BB' = (1)\Delta_o &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds\end{aligned}$$

68 如果适用于拱的水平强度是 H 此时此刻, 这个力量引发了一瞬间。$M = Hy$. 位移 因 H

$$\begin{aligned}B'B'' = \Delta_H &= \int \delta\overline{M}\frac{M}{EI}ds \\ &= \int y\frac{Hy}{EI}ds = H\int \frac{y^2}{EI}ds\end{aligned}$$

69 假设 支座 以某种数量产生 Δ 即, 支座从 B 到 B'. 然后

$$\begin{aligned}\Delta_H = H\int y^2\frac{ds}{EI} &= \Delta_0 - \Delta \\ &= \int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y\frac{M_o}{EI}ds - \Delta}{\int \frac{y^2}{EI}ds}\end{aligned}$$

[1] 在此部分中, 我们将使用虚拟力量方法而不是卡斯蒂格利亚诺迄今为止用于模仿的弓箭。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

70 如果 支座 是弹性, 并且产生 k 由于单位水平强度在支座级, 然后 $\Delta = k_s H$. 在这种情况下,

$$\begin{aligned} \Delta_H &= H \int y^2 \frac{ds}{EI} = \Delta_0 - \Delta \\ &= H \int y^2 \frac{ds}{EI} = \int y \frac{M_o}{EI} ds - k_s H \\ \Rightarrow H &= \frac{\int y \frac{M_o}{EI} ds}{\int \frac{y^2}{EI} ds + k_s} \end{aligned} \tag{32.52}$$

温度

71 现在, 让我们讨论温度变化对图表中显示的双环弓的水平力量的影响。32.8b, 让拱的温度上升 ΔT. 端口的旋转将在拱上进行垂直振动, 以防止端子在温度上升时移动。

72 由于这个水平冲动, 将有旋转时刻在弓的所有部分。我們在 支座 上取代針 B 用一个角色。然后 B 转向位置 B'. 然后

$$BB' = L\alpha\Delta T$$

哪里 L 是拱的范围和 α 是热扩张的比例。

73 让 H 是由于温度上涨而引发的水平冲动 ΔT. 这个水平力量 H 允许拱恢复其原始位置, 即有助于恢复结局 B' 到 B 从卡斯蒂格利亚诺的理论

$$\frac{dU^*}{dH} = L\alpha\Delta T$$

哪里 U^* 是 应变能

$$U^* = \int \frac{M^2}{2EI} ds$$

在这种情况下, 这一时刻是由 $M = -Hy$ 这样

$$\begin{aligned} M &= -Hy \\ \Rightarrow \quad L\alpha\Delta T &= \frac{dU}{dH} = \int \frac{d}{dH}\left(\frac{M^2}{2EI}\right) ds = \int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dH} ds \\ &= \int (-Hy)(-y)\frac{ds}{EI} = H \int y^2 \frac{ds}{EI} \\ \Rightarrow H &= \frac{L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI}} \end{aligned} \tag{32.53}$$

这个方程式表达了由于温度变化在拱的水平冲动。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

74 如果我们结合了基础产量和温度变化的影响, 可从 Eqs 获取的垂直振动 32.52 和 32.53

$$H = \frac{\int M_o y \frac{ds}{EI} + L\alpha\Delta T}{\int y^2 \frac{ds}{EI} + k_s} \tag{32.54}$$

32.3.3.1 例题 32.9: 热 荷载 在 Parabolic 拱 上

一个双环的参见拱面积为 50 米, 升高为 5 米, 在冠冕上携带了 50kN 的集中荷载。弓的弹性支持为 0,0002 m/kN。由于这 $E = 200$ 千米 / mm^2, $I = 8^9$ mm^4, 和 $\alpha = 20xlO^{-6}/°C$, 我们试图评估水平冲动, 如果温度上升 20°C 把左侧支持作为起源的方程式是

$$y = \frac{4hx(L-x)}{L^2} = \frac{4\times 5\times x\times(L-x)}{50^2} = \frac{x(50-x)}{125}$$

$$\int_0^{50} y^2 ds = \int_0^{50} \frac{x^2(50-x)^2}{125^2} = \frac{1}{125^2}\int_0^{50} \left(2500x^2 - 100x^3 + x^4\right) dx$$

$$= \frac{1}{125^2}\left[2500\frac{x^3}{3} - 100\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{50} = 666.67$$

梁 时刻 $M_o = 25x$

$$\int_0^L M_o y \frac{dx}{EI} = 2\int_0^{25} 25x\frac{x}{125}(50-x)\frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{2}{5EI}\int_0^{25}\left(50x^2 - x^3\right)dx = \frac{2}{5EI}\left[50\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{25} = \frac{65,104.17}{EI}$$

现在, $EI = 200\times 10^6 \times 8\times 10^9 \times 10^{-12} = 1,600,000\text{kNm}^2$. 替代 EQ。32.54 我们得到

$$H = \frac{\frac{65,104.17}{1,600,000} + 25\times 20\times 10^{-6}\times 20}{\frac{666.67}{1,600,000} + 0.0002} = 92.43\text{kN}$$

32.4 曲线 BAMS

75 此分類上的問題是由那些發現在 Gerstle, 1974 Basic Structural Analysis.

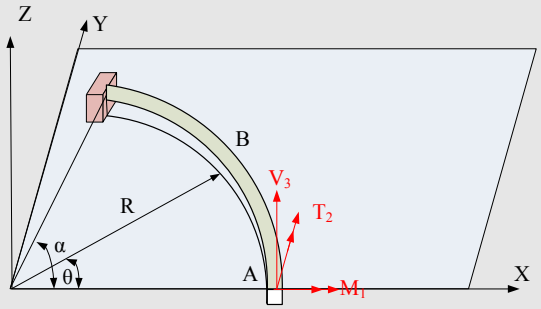
32.4.1 球旋转

76 球旋转器只是在飞机上垂直负载的曲线梁。它将受 剪力、弯矩, 和 扭转 的约束。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

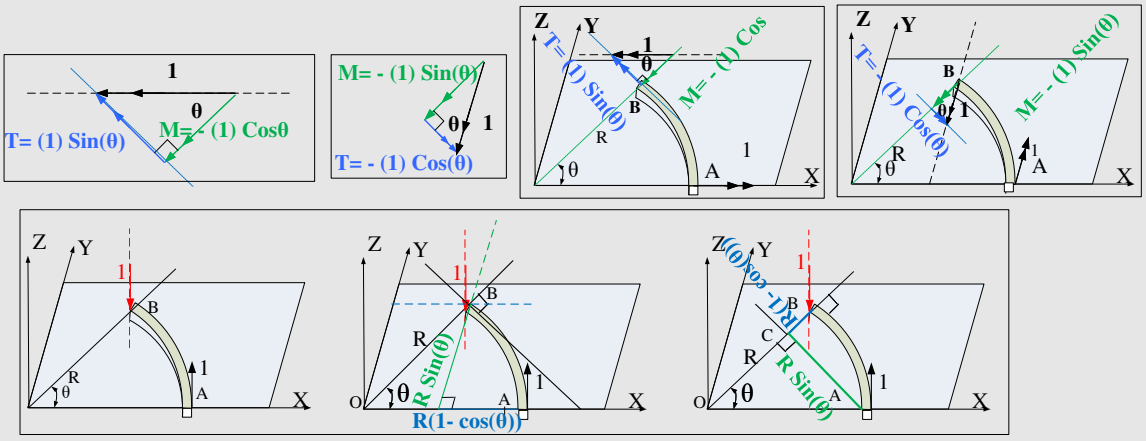
32.4.1.1 例题 32.10: 球旋转

我们正在寻求从圆形射线盒子中产生的柔度矩阵 R 和角度 α. 拱在一端粘贴, 另一端自由。(注意与以前的问题相似之处).



由于单元外部时刻或适用于 A 的扭转而引起的时刻和旋转可以从地质学中轻松获得。因此, 对于单位外部应用的力量在 A, 需要从地质学确定两个时刻的手臂。要小心, 使用正确的数字, 左侧是错误的, 尽管它带来了正确的结果。

$$
\begin{aligned}
AC &= R\sin(\theta) \\
M &= (1)R\sin(\theta) \\
BC &= R(1-\cos(\theta)) \\
T &= (1)R\,(1-\cos(\theta))
\end{aligned}
$$



杜克:	$i=1$	$i=2$	$i=3$
	M_A=1	$T_A=1$	$V_A=1$
$V_i(\theta)$	0	0	-1
$M_i(\theta)$	-cos θ	$-\sin\theta$	-Rsin(θ)
$T_i(\theta)$	sin θ	$-\cos\theta$	$R(1-\cos(\theta))$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们将使用

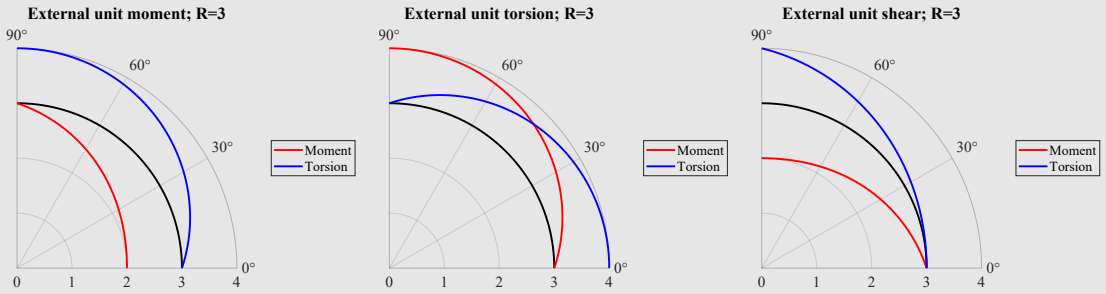
$$d_{ij}=\int_0^\alpha \delta\overline{M}_i(\theta)\frac{M_j(\theta)}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \delta\overline{T}_i(\theta)\frac{T_j(\theta)}{EI}Rd\theta$$

哪里 $1\le i,j\le 3$, 即我们在线 2 或 4 上运行。这样 (迹象的 d_{x3} 改變的統合結果可能錯誤:

$$\begin{aligned}
d_{11}&=\int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_1}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \delta T_1\frac{T_1}{GJ}Rd\theta\\
&=\int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \sin\theta\frac{\sin\theta}{GJ}Rd\theta\\
&=\frac{R}{EI}\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)+\frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)\\
d_{12}&=\int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_2}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_2}{GJ}Rd\theta\\
&=\int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \sin\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta\\
&=\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2}-\frac{R}{GJ}\frac{\sin^2\alpha}{2}\\
d_{13}&=\int_0^\alpha \delta\overline{M}_1\frac{M_3}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \delta\overline{T}_1\frac{T_3}{GJ}Rd\theta\\
&=\int_0^\alpha \cos\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \sin\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta\\
&=-\frac{R}{EI}\frac{\sin^2\alpha}{2}-\frac{R}{GJ}\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)\\
d_{22}&=\int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_2}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_2}{GJ}Rd\theta\\
&=\int_0^\alpha -\sin\theta\frac{-\sin\theta}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha -\cos\theta\frac{-\cos\theta}{GJ}Rd\theta\\
&=\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)+\frac{R}{GJ}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)\\
d_{23}&=\int_0^\alpha \delta\overline{M}_2\frac{M_3}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \delta\overline{T}_2\frac{T_3}{GJ}Rd\theta\\
&=\int_0^\alpha \sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha -\cos\theta\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta\\
&=-\frac{R}{EI}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)+\frac{R}{GJ}\left(-\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)\\
d_{33}&=\int_0^\alpha \delta\overline{M}_3\frac{M_3}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha \delta\overline{T}_3\frac{T_3}{GJ}Rd\theta\\
&=\int_0^\alpha R\sin\theta\frac{R\sin\theta}{EI}Rd\theta+\int_0^\alpha R(1-\cos\theta)\frac{R(1-\cos\theta)}{GJ}Rd\theta\\
&=\frac{R^2}{EI}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)+\frac{R^2}{GJ}\left(\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)
\end{aligned}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



观察下列事项

	外部单位					
	瞬间		扭转		力量	
英特。力量	开始	结局	开始	结局	开始	结局
瞬间	1	0	0	1	0	1
扭转	0	1	1	0	0	1

32.4.2 赫利科伊德

适应从 Gerstle, 1974 Basic Structural Analysis.

32.4.2.1 地质学

77 因为空间结构 (数字 32.9) 可能有复杂的地质学, 我们必须使用向量分析 [2] 要确定内部力量。

78 总体而言, 我们有六个内部力量。(力量和时刻) 在任何部分工作。



图 32.9: 卢浮宫博物馆的螺旋楼梯 (巴黎) 圣家大教堂 (Sagrada Familia) (巴塞罗那)

[2] 到此, 你已经在早期被曝光了, 但是很少用到目前为止在机械学!

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

$$x = f_1(\theta); \qquad y = f_2(\theta); \qquad z = f_3(\theta) \tag{32.55}$$

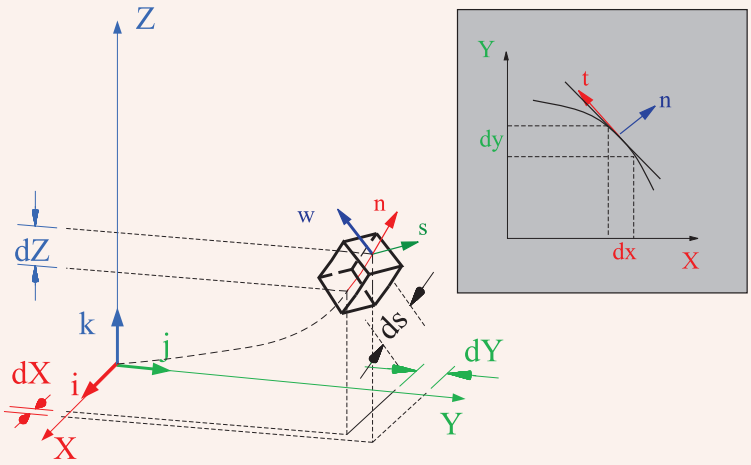


图 32.10: 空间中的曲线结构的地质学

79 总体坐标系 被称为 $X-Y-Z$, 其单位 vectors 被标记为 [3] $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. 所需要的内部力量的部分被切断, 而 **主要** 轴被定义为 $N-S-W$ 相应于正常的力量, 以及曲折轴与 **强大** 和 **弱点** 轴。相应单位 vectors $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{w}$ (数字 32.10).

80 標準單位 向量 (谁是 tang 的曲线) 在任何部分都被授予

$$\mathbf{n} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{ds} = \frac{dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}} \tag{32.56}$$

81 主要弯曲轴必须定义, 即如果强的弯曲軸与 XY 飞机或水平 (一般情况下, 重力负载) 因此, 这个轴是正常的两者。N 和 Z 轴, 其单位 向量 是

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{k} \tag{32.57}$$

82 弱的弯曲轴是正常的两者 N 和 S 因此, 其单位 向量 已确定为

$$\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{s} \tag{32.58}$$

请注意, 到目前为止, 两者 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{s}$ 已经正常化了。

32.4.2.2 平衡

83 对于平衡方程式, 我们考虑了自由体图表 (数字 32.11).

[3] 所有 vectorial 数量都被一个勇敢的面孔字符所描述。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

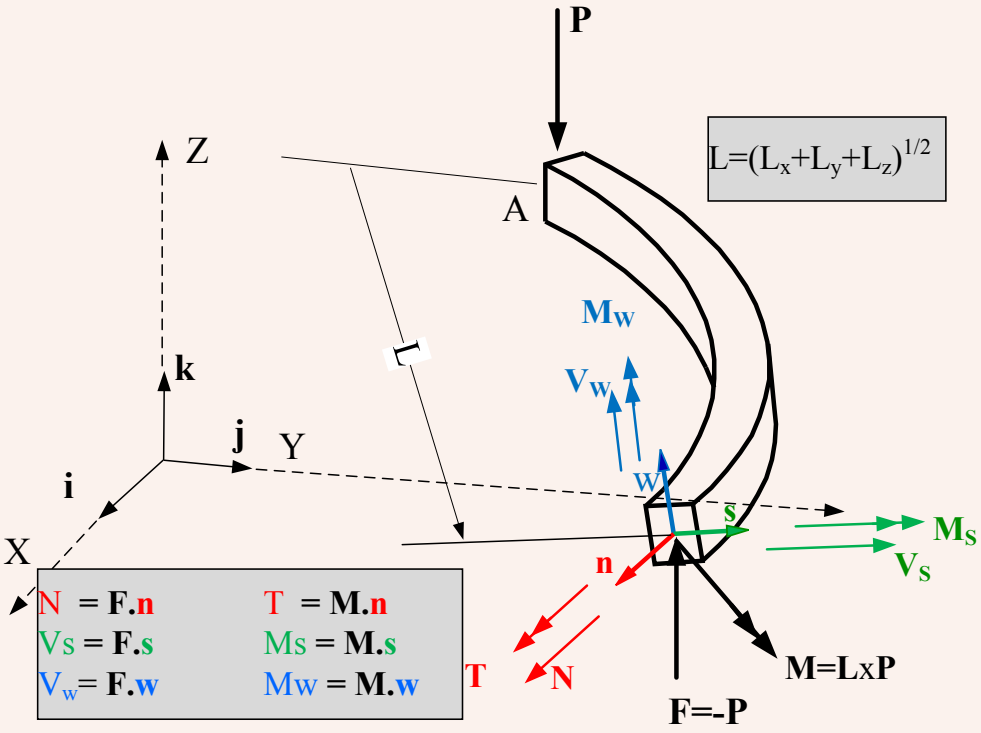


图 32.11: 空间中的曲线结构的自由体图

84 使用 荷载 **P** 目前正在行动 A. 结果力量 向量 **F** 和结果时刻 向量 **M** 關於切割部分的活動 B 由 平衡 定义

$$\Sigma \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{F} = -\mathbf{P} \tag{32.59}$$

$$\Sigma \mathbf{M}^B = 0; \quad \mathbf{L}\times\mathbf{P} + \mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\mathbf{L}\times\mathbf{P} \tag{32.60}$$

哪里 **L** 是 lever arm 向量 从 B 到 A. 轴和沙尔力量 N, V_s 和 V_w 是三组成部分的力量向量 **F** 沿着 $N, S,$ 和 W 轴和可以通过 dot 产品与适当的单位 vectors 找到:

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \\ V_s &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} \\ V_w &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} \end{aligned}$$

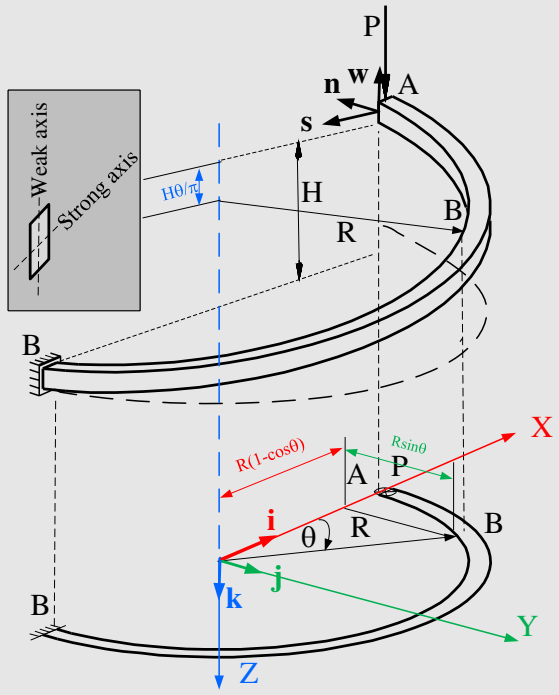
85 相同的旋转和旋转时刻 T, M_s 和 M_w 此分類上一篇: 向量 **M** 他们是由

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{n} \\ M_s &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{s} \\ M_w &= \mathbf{M}\cdot\mathbf{w} \end{aligned}$$

86 因此, 我们有一个目标来确定内部力量。在应用的负载情况下, 我们会计算, 而对于分布荷载则我们将集成。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

32.4.2.2.1 例题 32.11: 拱; 点 荷载



我们要确定内部力量。N, V_s, 和 V_w 与内部时刻 T, M_s 和 M_w 沿着直角曲线旋转, 由于垂直荷载 P 在自由的结局。首先, 我们要从角度来确定地质学。θ

$$x = R\cos\theta; \qquad y = R\sin\theta; \qquad z = \frac{H}{\pi}\theta \tag{32.61}$$

要确定单位 向量 $\mathbf{n}$ 在任何时候, 我们都需要衍生品:

$$dx = -R\sin\theta d\theta; \qquad dy = R\cos\theta d\theta; \qquad dz = \frac{H}{\pi}d\theta \tag{32.62}$$

然后将其插入 EQ。32.56

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{-R\sin\theta\mathbf{i} + R\cos\theta\mathbf{j} + H/\pi\mathbf{k}}{\left[R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta + (H/\pi)^2\right]^{1/2}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\left[1 + (H/\pi R)^2\right]^{1/2}}}_{K}[-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} + (H/\pi R)\mathbf{k}]\end{aligned}$$

因为名称仅依赖于地质, 它将被指定为 K.

坚固的弯曲轴位于水平层, 其单位向量可以从 Eq 中确定。32.57:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{32.63}$$

$$= \frac{1}{K}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \tag{32.64}$$

和这个向量的绝对大小 $|\mathbf{k}\times\mathbf{n}| = \frac{1}{K}$, 因此

$$\mathbf{s} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} \tag{32.65}$$

沿着弱轴的向量单位由 Eq 确定。32.58

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{s}\times\mathbf{n} &= \frac{1}{K}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi R} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{K}\left(\frac{H}{\pi R}\sin\theta\mathbf{i} - \frac{H}{\pi R}\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)\end{aligned}$$

随着地质定义完成, 我们现在正在审查平衡方程式。以克。32.59 和 32.60.

$$\begin{aligned}\Sigma F = 0; \quad \mathbf{F} &= -\mathbf{P} \\ \Sigma M_b = 0; \quad \mathbf{M} &= -\mathbf{L}\times\mathbf{P}\end{aligned}$$

哪里

$$\mathbf{L} = (R - R\cos\theta)\mathbf{i} + (0 - R\sin\theta)\mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi}H\right)\mathbf{k} \tag{32.66}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

和

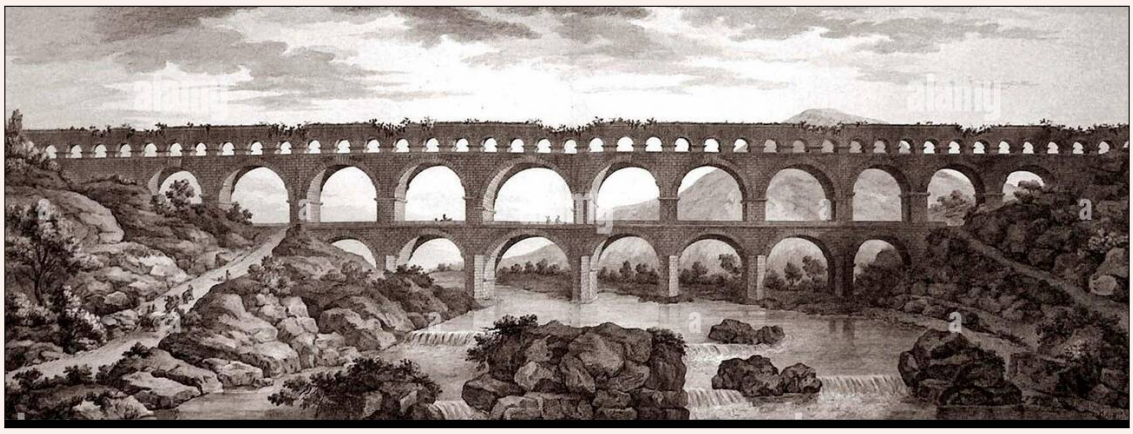
$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\times\mathbf{P} = R\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (1-\cos\theta) & -\sin\theta & -\frac{\theta}{\pi}\frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix}$$
$$= PR[-\sin\theta\mathbf{i} - (1-\cos\theta)\mathbf{j}]$$

和

$$\mathbf{M} = PR[\sin\theta\mathbf{i} + (1-\cos\theta)\mathbf{j}] \tag{32.67}$$

力量的组成部分 $\mathbf{F} = -P\mathbf{k}$ 而这一瞬间 $\mathbf{M}$ 由合适的点产品与单位 vectors 获得

$$N = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{K}P\frac{H}{\pi R}$$
$$V_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = 0$$
$$V_w = \mathbf{F}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{K}P$$
$$T = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n} = -\frac{PR}{K}(1-\cos\theta)$$
$$M_s = \mathbf{M}\cdot\mathbf{s} = PR\sin\theta$$
$$M_w = \mathbf{M}\cdot\mathbf{w} = \frac{PH}{\pi K}(1-\cos\theta)$$



Pont du Gard, 第一世纪 *CE*, 尼姆斯, 法国。

拱 建筑的例子, 在那里的精确安排的毛巾有效地传输负载, 确保稳定和冲动分布在其多层结构。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

33 静态不定义拱的设计

摘要

本章介绍了对现实结构应用的复杂结构分析的两个详细例子, 清楚地描述分析和设计如何通过一项异常过程互相了解。钢材 拱 用于飞机连接器的焊接式轴承和双环连接式 拱 桥梁进行分析, 证明了 变形协调 方法对静态不确定的架构的应用。

33.1 例题 33.1: 设计静态不定义的拱 . . . 1042 33.2 例题 33.2: 温度变化在一个 拱 1048

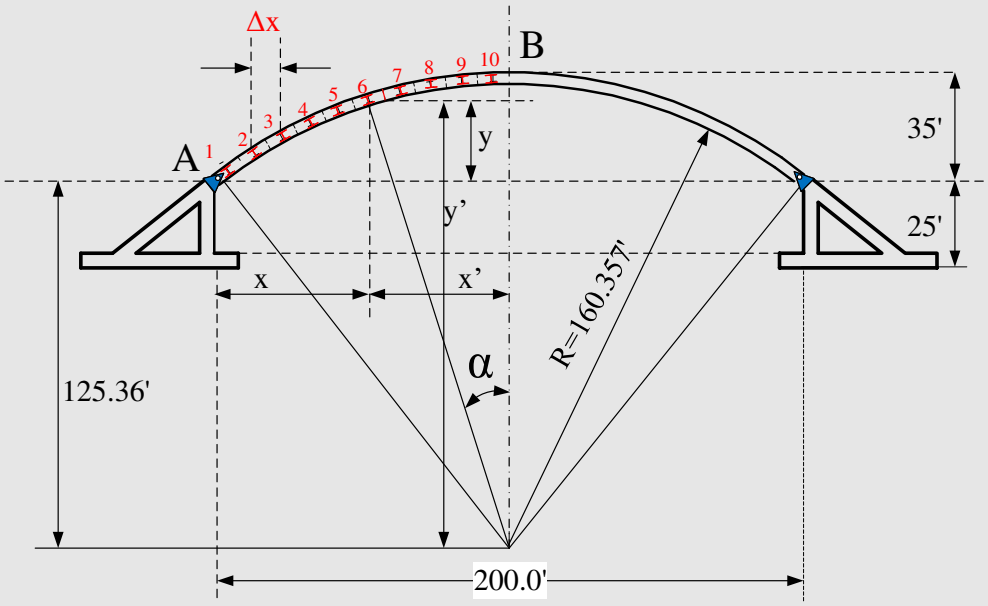
以下两种例子是对现实结构应用的复杂分析的最佳图像之一, 清楚地揭示了分析和设计如何通过异常过程互相了解。

33.1 例题 33.1: 设计静态不定义的拱

下一篇: 重复 Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

我们正在寻求为一根相关术语子设计一个双环, 坚固的焊接钢弓绳。惯性矩的尾巴必须根据需要有所不同。长度, 从中间到直角的中心, 是 200 英尺。绳子要放在 35 英尺的中心到中心, 高度为 35 英寸。天花板、毛巾和绳子将被认为重 25lb/ft。^{2} 在天花板上, 雪将被认为是 40lb/ft^{2} 这个表面。二十个子将平等地围绕着尾巴。

审阅稿



1. 绳子的中心线将被视为一个圆圈的部分。根据计算, 这个循环的直径为 160357 英尺, 而长度为其它 *arc AB* 是 107984 英尺
2. 分析中, 弓 *AB* 将被视为分为十个部分, 每個有 10798 英尺的長度 因此, 一个集中荷载被应用到绳子各个部分的中间, 在每个部分的中心。(数字的分数在图中显示。
3. 因为死和雪的总值荷载为 65lb/ft^2 天花板的表面, 价值每个集中力量都将

$$P = 10.798 \times 35 \times 65 = 24.565 \text{ k} \tag{33.1}$$

4. 计算所需的评估, 以评估中心的坐标各式各樣的分支, 提到 Hinge 在 *A* 他们被展示在桌子 1。也表明了价值观的 Δx, 距离的水平预测在各个部分的中心之间。

塞格 - 想念	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
王冠					160.36	100.000	35.00	5.399

桌子 1

5. 如果缺乏经验, 因此设计工程师处于损失之中。至于初步假设, 关于沿线的分区变异, 它是建议第一次分析是基于假设一个连续的时刻。以内心为主。即使是经验丰富的工程师也会经常发现这是最好的。程序。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

6. 价值的 H 以此定义, 时刻和轴性冲动是整个里布的计算。各个区域的跨部分区域, 则为这些时刻而设计, 以及轴心冲动。新的价值为 H 又是修订的瞬间和轴振动的值在整个绳子上, 为新绳子确定与不同 截面 的不同。压力在绳子里被检查, 整个过程如果需要的话, 重复。在本案中, 将遵循此程序。
7. 一般方法, 假设这一结局 A 在轮子上,

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0 \tag{33.2}$$

8. 缺陷将由 虚功 计算, 因此这种表达式将成为

$$\sum \delta\overline{M} \frac{M}{EI} \Delta S + H_A \sum \delta\overline{M} \frac{\overline{M}}{EI} \Delta S = 0 \tag{33.3}$$

9. 因为 E 和 ΔS 它是常见的, 并且在第一次分析时, 惯性矩 是恒定的, 最终表达为 H_A 是

$$H_A = -\frac{\sum M \delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}} \tag{33.4}$$

所有计算所需的第一次评估 H_A 在图 2 中显示。

分区	(2) x (ft)	(3) $y = \delta\overline{M}$ (ft · k)	(4) 谢尔 到 正确的 (k)	(5) Δx (ft)	(6) M 增加 (ft · k)	(7) M 简单的 梁 (ft· k)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{M}\overline{M}$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
王冠	100.00	35.00	___	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

桌子 2

出生

$$H_A = -\frac{2\sum M \delta\overline{M}}{2\delta\overline{M}\overline{M}} = -\frac{2 \times 2,158,100}{2 \times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{33.5}$$

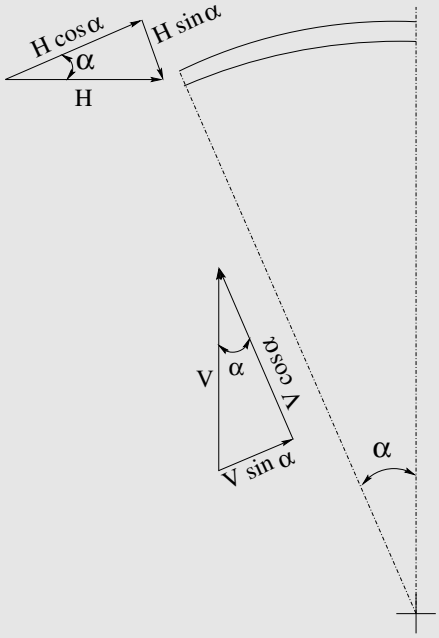
10. 时刻在各个部分的中心, 使用所定义的约值 H_A, 在图 3 中计算, 如果一个时刻被认为是积极的要引起压缩在尾巴的顶部表面。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分区	y (ft)	M 简单的梁 (ft · k)	$H_A y$ (ft · k)	全集 M 分区 (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	–1,100	–50
2	9.44	3,010	–3,150	–140
3	14.98	4,830	–5,000	–170
4	19.88	6,490	–6,640	–150
5	24.13	7,950	–8,060	–110
6	27.69	9,200	–9,250	–50
7	30.57	10,220	–10,210	+10
8	32.73	11,000	–10,930	+70
9	34.18	11,530	–11,420	+110
10	34.19	11,790	–11,660	+130
王冠	35.00	11,790	–11,690	+100

桌子 3

11. 震撼的 N, 正常到每个分区的中心的截面, 必须在部分要求可以确定之前计算。以色列的不同价值观为主 S 十字架上的全片部分, 也将计算为每个分区的中心。
12. N 和 S 由组成部分组合来实现 H 而垂直的谢尔 V 在每个部分的中心, 一个组合显示在下面



从这个数字看来,

$$S = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$N = V\sin\alpha + G\cos\alpha$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

13. 价值观 S 和 N 接下来的计算,图4。价值观由 S 已被列入 支座 的声明之前发出效力它在常见的 拱 条线上是小的。

分区	V (k)	$V\cos\alpha$	$-H\sin\alpha$	$=S$ (k)	$V\sin\alpha$	$+H\cos\alpha$	$=N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
王冠						+334	= 334

桌子 4

14. 目前的价值观检查 M 图 3 和为了鼓 N 在图 4 中,我们将显示第 3 部分是关键在负时区和区域 10 的区域积极的时刻。所需的部分,在这两者的中心部分,必须根据美国的规格确定钢材建筑研究所在表 5 之前可以完成。
15. 花瓶有 12 个。× 1 英寸,并且允许的 应力 为弯曲是 F_B=20 k/in^2. 网页厚度是 $\frac{3}{4}$ 在,和可用的应力[a] 是 F_A=17,000-0.485 L/r.

分区	(2) 全集深度 (in.)	(3) 区域 (在 ^{2})	(4) I (在 ^{4})	(5) M (ft · k)	(6) 轴心特斯拉 N (k)	(7) $f_a=\frac{N}{A}$ (K / 内 ^{2})	(8) $f_b=\frac{Mc}{I}$ (K / 内 ^{2})	(9) 允许 F_a (K / 内 ^{2})	(10) $\frac{f_a}{F_a}$ +	(11) $\frac{f_b}{F_b}$ =	(12) 十数由能力
A	23.00	39.75	3483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
王冠	16.00	34.50	1527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

桌面 5

16. 网板和网板的厚度以及网板宽度是判决。对于第三部分的中心所定义的总深度,从这个部分的中心到尾部的边缘。定为中心的深度部分 10 是故意用于冠冕的绳深。从三部分的中心到冠冕的尾巴的总深度变为线性。以此为准确的分区适当性,以确定其中心在图 5 中查看了几个部分。
17. 需要重新计算其价值。H_A 因为现在的里布有一个不同 惯性矩。平等 33.4 必须修改,包括其它 I 每一部分,现在写的就是

$$H_A = -\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} \tag{33.6}$$

18. 改进的价值为 H_A 易于确定,如所示表 6。请注意,在 柱 的值 (2) 通过分裂发现价值观的 $M\delta\overline{M}$ 对于相应的分区在 柱 (8) 由第 2 章 总的 I 每个部分,如下所示桌子 5。值在 柱 (3) 桌子 6 以相似的方式从 柱 的值中找到 (9) 由桌子 2。列中的简单闪电时刻 (5) 桌子 6 直接从 柱 获取 (7) 桌子 2。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(1) 分区	(2) $\frac{Mn}{I}$	(3) $\frac{m^2}{I}$	(4) 修订 $H_A y$ (ft · k)	(5) M 简单的梁 (ft · k)	(6) 修订瞬间 (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
王冠			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

桌子 6

19. 因此, 改造的 H_A 是

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{M}\overline{M}/I} = -frac2 \times 1,010.852 \times 3.0192 = -334.81k \qquad (33.7)$$

20. 对轴振动的修订值 N 在各个部分的中心计算在表 7。

分区	$V \sin \alpha$	$+$	$H \cos \alpha$	$=$	修订 N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
王冠			335		335

桌子 7

21. 以前在分区中心设计的部分正在检查图 8 中的适当性。从这张桌子上看, 所有边缘的部分是满意的。然而, 这一点不能完全得出结论。直到被检查为止, 由挠度的脊椎引起的次要压力。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分区	$\frac{N}{A}$ (K / 内 ^{2})	$\frac{M_c}{I}$ (K / 内 ^{2})	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	十数由能力
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
王冠	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

桌子 8

[a]在这个方程式中, 它的价值 L 7787 年, 从绳子在 Purlin 框点上侧面包装。

33.2 例题 33.2: 温度变化在一个 拱

下一篇: 重复 Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

确定前例的拱带中线缩短和温度变化的影响。考虑温度下降 100°F.

1. 要确定尾巴缩短的效果, 首先需要找到水平 位移 的结尾 A 它会导致, 如果弹性轴承的压力, 发生在实际负载的 拱 中, 将被引入尾巴时 A 是轮子上的。因此, 需要找到垂直位移的结尾。A, 由 1 k 的垂直力量引起的作用 A 考虑到灵活性和尾巴里面的轴心。垂直 位移 的 A 由 RIB 引起的因实际负载而造成的缩短, 由

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L \tag{33.8}$$

   哪里 N 是从表 7 中提取的轴振动。$\delta\overline{N}$ 是由 1k 幻想的水平力量引起的轴振动。A 等同于 $\cos\ \alpha$ 在表 1 中, ΔL 是长度的每个部分, 以及 A 这是正确的分区。
2. 垂直 位移 的 A, 由于由 1 k 水平力量引起的绳子缩短而产生的 A, 被授予

$$\sum \frac{\delta\overline{N}}{AE}\overline{N}\Delta L \tag{33.9}$$

3. 需要计算来评估这两种缺陷 A 在图 9 中显示。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分区	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (在 ^{2})	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

桌子 9

4. 垂直 位移 的 A 因其原因, 由于由真正的荷载是

$$\sum \delta\overline{N}\frac{N}{AE}\Delta L = \frac{2\times 87.88\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in} \tag{33.10}$$

5. 由 1 k 水平 荷载 引起的绳子缩短而产生的 A 是

$$\sum \delta\overline{N}\frac{\overline{N}}{AE}\Delta L = \frac{2\times 0.2300\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in} \tag{33.11}$$

6. 水平 位移 的相对值 A 因此, 由 The 应变 由 1 k 水平强度引起的 A 此前已确定 在 柱 (3) 表 6。这个 位移 的绝对值是

$$\frac{2\times 3.019\times 10.798\times 1728\times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} \ . \tag{33.12}$$

7. 对 位移 的总值 A 由于灵活和轴性由 1 k 水平强度产生的压力 A 因此是

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in} \tag{33.13}$$

8. 减少在 H_A 由于 RIB 的缩短, 由

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k} \tag{33.14}$$

9. 进一步减少在 H_A 将导致任何温度下降的结果带在拱升高的温度下。当然, 这一点发生了。因为会导致一些额外的绳子的缩短。长度的下降由于温度下跌而产生的垂直线的表面 of 100°F 将是

$$\delta L = 0.0000065\times 100\times 200\times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{33.15}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10. 结果的下降在 H_A 将是
$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k} \tag{33.16}$$
11. 总体下降在 H_A 由于两条线的缩短和温度下降,
$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k} \tag{33.17}$$
这将有增加时刻的效果, 靠近间隔的中心。
12. 柱的检查 (6) 在桌子上 (8) 表明该部分 10 应检查由于这种增加而可能出现过度压力。目前, 在第 10 区的增加将由
$$\Delta M = \Delta H_A(y\text{for segment}10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{33.18}$$
13. 时刻 100 英尺 ·k、如前所述, 为 10 个部分, 只有在前两位的准确, 因此修订的总时刻第 10 章 会是
$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k} \tag{33.19}$$
14. 335 k 的冲动, 此前为 10 个部分确定, 是准确的 3 地方 改變在 H_A 由于绳子缩短和温度变化必须因此, 将其圆为 1k, 以确定在第 10 部分的修正冲动。这个修正的风格将是
$$335 - 1 = 334 \text{ k} \tag{33.20}$$
15. 极端纤维 应力
$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2 \tag{33.21}$$
16. 第 10 章 被检查, 如表中所示 (8), 由
$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96 \tag{33.22}$$
显然, 第 10 部分的部分是合适的。
17. 没有考虑到温度上升的影响, 因为升降只能发生在夏季, 当没有雪负载是可能的。因此, 这个问题的阶段没有实际意义。
18. 目前已被证明的分析方法将同样适用于强化混凝土 或木材双环的 拱。但是, 正如前面提到的那样, 很少有人增强的混凝土架是用两根相关术语子建造的。
19. 特别注意的是, 除了应变和温度下降, 混凝土在钢筋混凝土中缩小雷布也会导致雷布缩短。缩小率应确定为将混合物用于分析并以相同的通用方式应用以温度为准的比例。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

34 板块

摘要

本章将本书的重点从单维单元转移到盘子，并产生相应的差异方程式。通过专注于理论，我旨在帮助读者欣赏板块的地质复杂性以及它们统治的差异方程式的美丽和简单。本章是对任何人寻求使用有限元法模型板的必需阅读，因为它解释了复杂内部力量的相互作用。

34.1 厚板理论: 雷斯纳 • 明德林 1051
34.1.1 电影关系 1051
34.1.2 宪法关系 1053
34.1.3 平衡 1054
34.2 薄 板 理论:Kirchhoff 1056
34.2.1 基本关系 1057
34.2.2 差异方程式 1058
34.2.3 压力 1058
34.2.4 循环板 1061
34.2.5 变量 表述 1065
34.3 总结 1066

有关历史背景，请参见 §??

下一篇: 重复 Pilkey and Wunderlich, 1994 Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods. 援助的 Georg, R., 2014 已被认可。

34.1 厚板理论: 雷斯纳 • 明德林

1 让我们从一个厚板的总体解决方案开始，在那里有叶形变形。

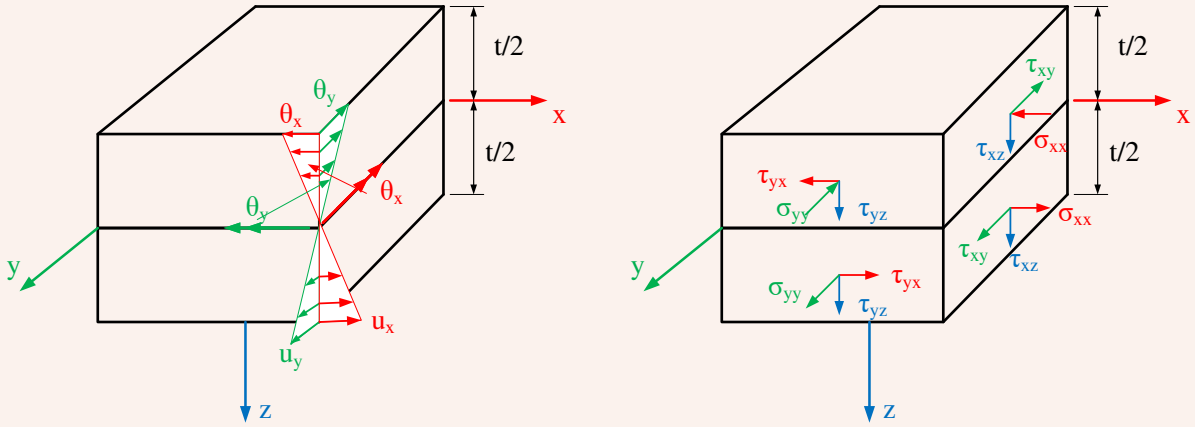
34.1.1 电影关系

2 從 图 34.1a 我们有五个转会 u, v, w, θ_{xx} 和 θ_{yy}. 但是，在三次流离失所中，u, v 可以表达在 θ_{xx} 和 θ_{yy} 是板中间表面的旋转，第三个位移是交叉一个。w.

3 我们采用板弯曲理论中的传统记号，而不是有限元中随坐标方向定义的记号。由于研究对象为薄板，假定中面不发生应变，且平截面变形后仍保持平面。根据平截面假定，有

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ w \end{array} \right\} \tag{34.1}$$

审阅稿



(a) 转移　　(b) 压力

图 34.1: 移动和压力在一个板

4 但是, 从材料的机械学中, 我们知道关系。$\varepsilon = Lu$ 或

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

5 由于 w 表示中面的横向挠度且不随 z 变化，因此 $\varepsilon_{zz} = 0$。代入式 34.1，得到

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\theta_{xx,x} \\ z\theta_{yy,y} \\ 0 \\ z(\theta_{xx,y} + \theta_{yy,x}) \\ \hline (\theta_{xx} + w_{,x}) \\ (\theta_{yy} + w_{,y}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} z\kappa_{xx} \\ z\kappa_{yy} \\ 0 \\ 2z\kappa_{xy} \\ \hline \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right\} \tag{34.2}$$

请注意, 这个方程式假设位移的 w 与板的厚度相比小, 旋转较小。因为转角是小, 其方位在统一方面是不可忽视的, 因此曲率

$$\kappa = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{(1+\theta^2)^{3/2}} \approx \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

等于转角的变化率。

6 因此,The 对于一个板块的过渡转移的电影关系是

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\\ \hline \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}\frac{\partial}{\partial x}&0&0&\\ 0&\frac{\partial}{\partial y}&0&\\ \frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial x}&0&\\ \hline 1&0&\frac{\partial}{\partial x}&\\ 0&1&\frac{\partial}{\partial y}&\end{array}\right]}_{\mathbf{L}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\theta_{xx}\\ \theta_{yy}\\ \hline w\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$$

34.1.2 宪法关系

7 对于三维连续性, 应变-应力的关系是

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \hline \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}=\frac{1}{E}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-\nu&-\nu&&&\\ -\nu&1&-\nu&&\mathbf{0}&\\ -\nu&-\nu&1&&&\\ \hline &&&2(1+\nu)&0&0\\ &\mathbf{0}&&0&2(1+\nu)&0\\ &&&0&0&2(1+\nu)\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \hline \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}$$

8 但是, 从 eq。34.2, $\varepsilon_{zz}=0$. 因此, 我们可以忽略 σ_{zz} 比其他压力要少得多。逆转前方程的收益

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\\ \hline \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}}=\underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&\nu&0&&\\ \nu&1&0&&\mathbf{0}\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}&&\\ \hline &&&\frac{1-\nu}{2}&0\\ &\mathbf{0}&&0&\frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \hline \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\tag{34.3}$$

请注意, 剪切模量是 $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$.

9 我们现在试图写下曲线的时刻, 图 34.2.

10 引入 Eq 的压力。34.3 到 eq。34.5 使用 Eq。34.2 我们衍生第一期

$$\begin{aligned}M_{xx}&=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\sigma_{xx}z\mathrm{d}z=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{yy})z\mathrm{d}z=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\frac{E}{1-\nu^2}(z\kappa_{xx}+\nu z\kappa_{yy})z\mathrm{d}z\\&=\frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_{xx}+\nu\kappa_{yy})\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}z^2\mathrm{d}z=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_{xx}+\nu\kappa_{yy})\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

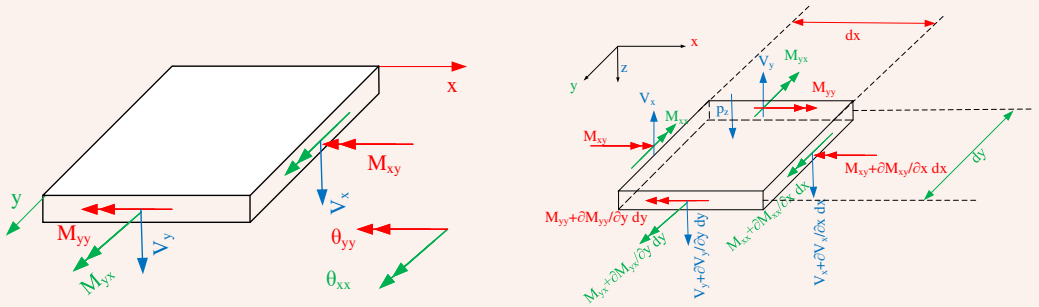
对其余两项采用相同步骤，可得下列弯矩—曲率关系

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{34.4}$$

和 $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 这个术语被称为 **灵活性硬度** 与灵活性相似。EI 由 梁 (如果 板 具有单位宽, 并且 $\nu = 0$ 然后, $EI = Et^3/12$).

34.1.3 平衡

11 积极的 应力 结果显示在 图 34.2a, 而一个无限的单元的自由体图表显示在图中 34.4



(a) 积极的时刻和旋转　　(b) 免费的身体图表一个薄 板

图 34.2: 内部力量

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

12 结果, 按单位宽度, 由

$$\begin{aligned}
\text{Membrane Force} \quad \mathbf{N} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}z \quad \begin{cases} N_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} \mathrm{d}z \\ N_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} \mathrm{d}z \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} \mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{Bending Moments} \quad \mathbf{M} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z \mathrm{d}z \quad \begin{cases} M_{xx} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z \mathrm{d}z \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{yy} z \mathrm{d}z \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xy} z \mathrm{d}z \end{cases} \\
\text{Transverse Shear Forces} \quad \mathbf{V} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}z \quad \begin{cases} V_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} \mathrm{d}z \\ V_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} \mathrm{d}z \end{cases}
\end{aligned} \tag{34.5}$$

13 请注意, 在板理论中, 我们忽略了 **膜力量**. 其次, 他们将被列入相关术语子中。

14 平衡的方程式是由考虑到一个无限元素而产生的。$t dx dy$ 被应用转换 荷载 p_z. 我们必须考虑三个平衡方程式,Fig。34.4:

武力集合在 z 方向

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial V_y}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + p_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p_z = 0$$

关于时刻的集合 x 轴

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - V_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

or

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - V_y = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

关于时刻的集合 y 轴

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}-V_x=0$$

15 因为 $M_{xy}=M_{yx}$, 这些方程式可以以 矩阵 形式表达为

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc}\frac{\partial}{\partial x}&0&\frac{\partial}{\partial y}&-1&0\\0&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial x}&0&-1\\0&0&0&\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\M_{yy}\\M_{xy}\\\hline V_x\\V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}}+\left\{\begin{array}{c}0\\0\\p_z\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}\right\}\tag{34.6}$$

请注意, 左 矩阵相应的 L^T 哪里是 1 这个词被替换为 -1

34.2 薄 板 理论:Kirchhoff

16 在下一节中, 我们基本关系的衍生方程将适用于板理论。**吉尔吉斯**.

17 这个理论忽略了转向的叶形变形 (因此, 在 截面 中保存的右角). 这种表达类似于传统的 Euler-Bernoulli 泡沫理论。[1].

34.2.0.1 例题 34.1: 薄相反厚 板 理想化

两個平方 混凝土 板有相同的侧面長度 $a=1.0$ m、杨氏模量 $E=25$ GPa 和 泊松比 $\nu=0.20$. 第一個 板 有厚度 $t=20$ mm, 而第二个具有厚度 $t=150$ 毫米。确定一个 Kirchhoff 薄 板 模型是否在每个情况下都可能适当。

一个有用的第一诊断是范围到厚度的比例

$$\lambda=\frac{a}{t}.$$

第一個 板,

$$\lambda_1=\frac{1.0}{0.020}=50.$$

二是板。

$$\lambda_2=\frac{1.0}{0.150}=6.67.$$

因此,

$$\lambda_1=50,\qquad \boxed{\lambda_2=6.67}.$$

[1]甲状腺变形被考虑到在 **心灵** 表述.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

第一個 板 是 slender, 而 Kirchhoff 的假設, 過渡葉形變化是不可忽略的一般適合。第二张板是相对厚的; 转形板变形可能有助于整体脱落, 而 Reissner-Mindlin 板模型更适合。

这个例子不会取代一个详细的对立或验证研究, 但它表明为什么基尔霍夫和雷斯纳-米德林板理论之间的区别不只是正式。它主要由板的地质滑动性控制。

34.2.1 基本关系

电影关系 因为甲状腺变形被忽视, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 因此, 最后两种关系的 Eq。34.2 减少到

$$\theta_{xx} = -w_{,x} \quad \text{and} \quad \theta_{yy} = -w_{,y}$$

且前三个应变分量变为

$$\varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \qquad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{34.7}$$

或

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{ w \right\}}_{\mathbf{u}} \tag{34.8}$$

[18] 上一方的最后一词相当于 **旋转** 至于其 x 和 y 中间表面的轴。

本构关系: 式 34.4 的本构关系仍然适用

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} \tag{34.9}$$

平衡 : 以 Eq 表达的 平衡方程。34.6 它也是有效的。如果我们将第二和第三的关系替换为第一, 我们将获得以下平衡关系。

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + p_z = 0 \tag{34.10}$$

(Note the similarity with the corresponding equations for beam flexure $\frac{d^2M}{\mathrm{d}x^2} - V_x = 0$)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

34.2.2 差异方程式

18 如果我们将电影和本构关系方程式结合起来, 34.8 和 34.9 我们得到了

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{array} \right\} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \{ \ w \ \} \tag{34.11}$$

19 最后, 我们将取代平衡方程, 34.10 在前一个中,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

或

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}}$$

Note the 相似之处与匹配的平衡为射击

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_z \ \text{ or } \ \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{p_z}{EI}$$

34.2.3 压力

20 结合 Eq 的压力和压力关系。34.3 与 EQ。34.7, 和 34.11 压力可以表达在时刻

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{xx}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \sigma_{yy} = \frac{M_{yy}}{\frac{t^3}{12}} z; \qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{\frac{t^3}{12}} z$$

再一次, 我们注意到与应力的灵活表达类似 $\sigma = \frac{My}{I}$. 使用三维 平衡方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

对第一式积分可得

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\int_{t/2}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z = \int_{z}^{t/2} \frac{12z}{t^3} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \mathrm{d}z \\ &= \frac{12}{t^3} \int_{z}^{t/2} z V_x \mathrm{d}z \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

21 Finally

$$\tau_{xz} = \frac{3V_x}{2t}\left[1-\left(\frac{2z}{t}\right)^2\right] \text{ and } \tau_{yz} = \frac{3V_y}{2t}\left[1-\left(\frac{2z}{t}\right)^2\right]$$

22 因此, 剪应力分布超过 板 的厚度是平凡的 (虽然它们往往与 τ_{xy}) 而顶峰的压力发生在中间表面上 ($z=0$) 哪里

$$\tau_{xz}|_{max} = \frac{3}{2}\frac{V_x}{t} \text{ and } \tau_{yz}|_{max} = \frac{3}{2}\frac{V_y}{t}$$

23 我们注意到, 灵活的压力与中间表面线性不同; 光压 τ_{xy} 由弯曲产生的也从中间表面线上变化; 叶子压力 τ_{yz} 和 τxz 它们是存在的, 并且需要平衡, 但他们的相应线条被认为是不可忽视的; σ_{zz} 不同量子, 图 34.3.

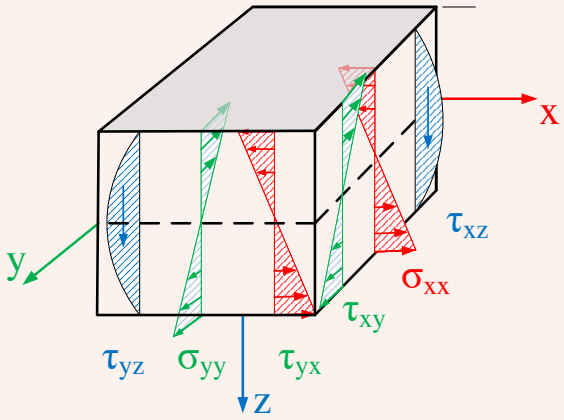


图 34.3: 应力 分布

34.2.3.1 例题 34.2: 恢复 板 瞬间结果的压力

在板的某个时刻, 旋转和旋转时刻的结果是

$$M_{xx} = 1.20\ \text{kN m/m}, \qquad M_{yy} = 0.80\ \text{kN m/m}, \qquad M_{xy} = 0.30\ \text{kN m/m}.$$

板的厚度是 $t = 25$ 毫米。估计与这些结果相关的极端纤维压力。

对于通过厚度的线性应力分布, 极纤维正常压力与 M_{xx} 和 M_{yy} 是

$$\sigma_{xx} = \frac{6M_{xx}}{t^2}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{6M_{yy}}{t^2}.$$

同样, 转动时刻结果给出了相应的极纤维剪应力

$$\tau_{xy} = \frac{6M_{xy}}{t^2}.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使用 $t = 0.025$ m,

$$\sigma_{xx} = \frac{6(1200)}{(0.025)^2} = 11.52 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 11.5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{6(800)}{(0.025)^2} = 7.68 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 7.68 \text{ MPa},$$

和

$$\tau_{xy} = \frac{6(300)}{(0.025)^2} = 2.88 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 2.88 \text{ MPa}.$$

因此,

$$\sigma_{xx} = 11.5 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{yy} = 7.68 \text{ MPa}, \qquad \tau_{xy} = 2.88 \text{ MPa}.$$

这个例子强调, 板解决方案提供了应力结果。实际的压力仅在使用假设过密度应力分布后恢复。

34.2.3.2 例题 34.3: 简单支持的平方 板 在统一的 压力

一个简单支持的方形 钢材 板 有侧长度 $a = 2.0$ m 和厚度 $t = 20$ 毫米。板 受均匀转换的 压力 的约束 $q = 5$ KPA。让

$$E = 200 \text{ GPa}, \qquad \nu = 0.30.$$

估计最大 挠度 和大小顺序的最大旋转 应力。

首先, 板的硬度是

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(200 \times 10^9)(0.020)^3}{12(1-0.30^2)} = 1.465 \times 10^5 \text{ N m}.$$

仅支持的平方 板 在单一的 荷载 下, 标准表格定量 (為 $\nu = 0.30$) 给予

$$w_{\max} = 0.00406 \frac{qa^4}{K}.$$

与 $q = 5000$ N/m^2 和 $a = 2.0$ m,

$$w_{\max} = 0.00406 \frac{(5000)(2.0)^4}{1.465 \times 10^5} = 2.22 \times 10^{-3} \text{ m}. substituting$$

因此,

$$w_{\max} = 2.22 \text{ mm}.$$

作为单位宽度最高时刻的估计, 使用相应的表格指数 (為 $\nu = 0.30$)

$$M_{\max} \simeq 0.0479 qa^2.$$

因此,

$$M_{\max} \simeq 0.0479(5000)(2.0)^2 = 958 \text{ N m/m}.$$

相应的极纤维曲线 应力 约为

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{6M_{\max}}{t^2} = \frac{6(958)}{(0.020)^2} = 14.4 \times 10^6 \text{ N/m}^2.$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

因此,

$$\sigma_{\max} \simeq 14.4 \text{ MPa}.$$

示例描述了一个 板 解决方案的两个主要输出: 一个 位移 字段, 这里由 $w_{\max}$, 以及瞬间结果, 从那里可以恢复旋转的压力。

34.2.3.3 例题 34.4: 板 挠度 对厚度的敏感性

重新考虑侧长的仅支持的方形 板 $a = 2.0$ m 受 压力 制服 $q = 5$ KPA。假设厚度增加了 $t_1 = 20$ mm 到 $t_2 = 30$ mm, 而材料和充电仍然不变。估计减少为最大 挠度.

对于一个薄的以色列 板,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

因此, 如果 E 和 ν 是不可改变的,

$$K \propto t^3.$$

因为 挠度 与 板 硬度相反,

$$w \propto \frac{1}{K} \propto \frac{1}{t^3}.$$

因此,

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^3 = \left(\frac{20}{30}\right)^3 = 0.296.$$

如果 20 毫米 板 有最大 挠度

$$w_1 = 2.22 \text{ mm},$$

接下来,30mm 板 具有最大 挠度

$$w_2 = 0.296(2.22) = 0.657 \text{ mm}.$$

因此,

$$w_2 \simeq 0.66 \text{ mm}.$$

厚度增加 50

34.2.4 循环板

24 Kirchhoff 板 理论的一个特别重要案例是 **圆形 板**. 循环板发生在坦克覆盖器, 直径, 围绕圆形开关的板块, 基础, 毛巾覆盖和压力船组件。它们在教学上也很有价值: 在轴交计负载和边界条件下, 二维比尔蒙方程式由 Eq 产生的。34.10 崩溃到一 **普通** 单一射线坐标中的差异方程, 所以解决方案可以以封闭的形式获得。

25 考虑一个坚固的圆形板射线 a 不断的厚度 t. 我们采用极协调, 与 r 放射性协调和 θ 周围的一个。对于一个轴同步问题, 转 挠度 取决于 r 独自一人,

$$w = w(r),$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因为没有什么不同于 θ 所有衍生品与 θ 迷失。因为 w 现在只有一个变量的功能, 我们使用总衍生品在 r. 灵活的硬度从直角案例中不变,

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

26 **电影学。**一个轴同步的 Kirchhoff 板的两个非零曲线是辐射和周围。(希望) 曲线

$$\kappa_{rr} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}, \qquad \kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

这些是极端对手。κ_{xx} 和 κ_{yy} 在 EQ。34.8 他们携带相同的负面标志。放射性曲率测量一个放射纤维的弯曲, 正如 $-\mathrm{d}^2 w/\mathrm{d}x^2$ 它在一个维度。希望 曲率 是纯粹的地质: 即使是一个孔式挠度 $\mathrm{d}^2 w/\mathrm{d}r^2 = 0$ 延伸周围纤维, 因为它们的射线变化。$-\frac{1}{r}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}r$ 正是这个效果。旋转的曲率消失,

$$\kappa_{r\theta} = 0,$$

因为没有什么变化, θ.

27 **本构关系.** 专注于时刻 - 曲率 Eq 的法则。34.9 向极曲线, 放射和旋转的弯矩结果为边缘单位长度,

$$M_{rr} = K(\kappa_{rr} + \nu\kappa_{\theta\theta}), \qquad M_{\theta\theta} = K(\kappa_{\theta\theta} + \nu\kappa_{rr}),$$

或, 在挠度的意义上,

$$M_{rr} = -K\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right], \qquad M_{\theta\theta} = -K\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} + \nu\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\right]. \tag{34.12}$$

这里 M_{rr} 是弯矩和 $M_{\theta\theta}$ 周围, 或希望, 瞬间; 他们是极协调的对手。M_{xx} 和 M_{yy} (各单位宽度的结果 §34.1.3). 请注意, 这两个时刻通常是不零的, 尽管 w 只依赖于 r 因为这两个曲线都存在。

28 **平衡.** 需要 2 平衡 声明。瞬间平衡的废除单元由放射线连接 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 和火焰 θ 和 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 相应于放射性转向线的结果 V_r 到目前为止, 图 34.4

$$V_r = \frac{\mathrm{d}M_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r}. \tag{34.13}$$

第一個詞是直接類似的 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = V$ 在梁理论中。第二期, $(M_{rr} - M_{\theta\theta})/r$, 没有一个维度对手: 它出现, 因为单元的两个辐射面孔不平行, 而是转向中心, 所以希望时刻 $M_{\theta\theta}$ 它们的作用在放射时平衡中具有净组成部分。取代 EQ。34.12 到 eq。34.13 和简化给了微妙的形式

$$V_r = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right] = -K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\nabla^2 w\right).$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

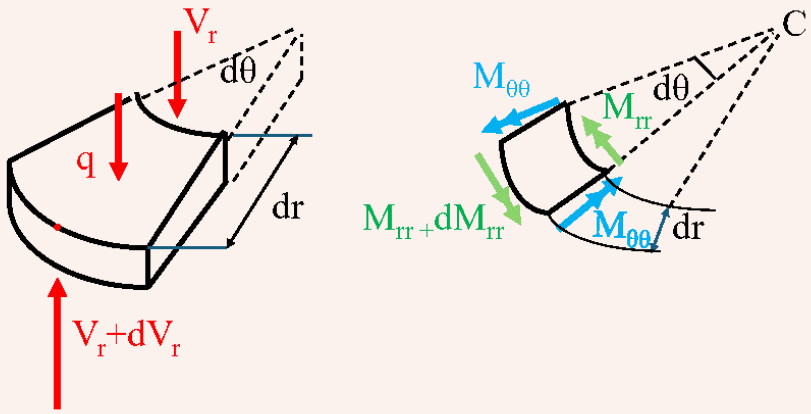


图 34.4: 圆板无限元素的平衡

相同 单元 的垂直 平衡 需要净转板, 以平衡应用的 压力。叶子在长度的内部弓上起作用 $r\,\mathrm{d}\theta$ 和外部长度的弓 $(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta$ 他们的差异是 $\mathrm{d}(rV_r)\,\mathrm{d}\theta$, 而荷载的贡献 $p_z\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$. 通过分布 $r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rV_r)+p_z=0.$$

29 **管理方程式。** 合并 EQ。34.2.4 和 34.2.4 以 Kirchhoff 板 等式为准

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right]\right\}=\frac{p_z}{K},$$

这是一个简单的比哈蒙方程式。$\nabla^4 w=p_z/K$ 以 Q。34.10 写在一个轴同步领域, 在那里

$$\nabla^2 w=\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}.$$

30 **边界条件。** 在坚固的板中间, 定期性提供两种条件。

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0}=0,\qquad V_r(0)=0.$$

第一是轴同位素挠度的对称; 第二个说, 没有集中力量在中心应用。在边缘 $r=a$ 理想化的条件反映了梁的条件:

加密边缘: 移动和旋转都被阻止,

$$w(a)=0,\qquad \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a}=0.$$

支持的边缘: 位移 禁止, 转角 免费,

$$w(a)=0,\qquad M_{rr}(a)=0.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

自由边缘: 没有瞬间, 也没有转折的叶子。

$$M_{rr}(a) = 0, \qquad V_r(a) = 0.$$

31 **统一的压力。** 对于一个单一转型 压力 的重要案例 $p_z = q = \text{const.}$, Eq. 34.2.4 可以直接融入。一般解决方案是均匀解决方案的总和。$\nabla^4 w = 0$ 和一个特定的解决方案; 为单一的荷载,

$$w(r) = \underbrace{C_1 + C_2 r^2}_{\text{regular}} + \underbrace{C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r}_{=0 \text{ by regularity at } r=0} + \frac{q\, r^4}{64K}.$$

两种逻辑术语产生无限的分裂、折叠或折叠。$r = 0$ 和一个集中中心 反力; 为 **坚固的** 板 因此, 他们被排除, 离开 $w = C_1 + C_2 r^2 + q r^4/64K$. (对于一个废弃的板, 在中心有一个洞, 这些条款是保留和固定的内层条件。) 兩個生存的永久性取決於邊緣條件。

32 **可用 板。** 施加 $w'(a) = 0$ on $w' = 2C_2 r + q r^3/16K$ 给予 $C_2 = -qa^2/32K$, 然后 $w(a) = 0$ 给予 $C_1 = qa^4/64K$. 因此

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left(a^2 - r^2\right)^2,$$

最多 挠度 在中心发生,

$$w_{\max} = w(0) = \frac{qa^4}{64K}.$$

相应的瞬间结果跟随 Eq。34.12,

$$M_{rr} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\right], \qquad M_{\theta\theta} = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right].$$

在中间, 两个时刻都是平等的。$q(1+\nu)a^2/16$ 當時, 在被打破的邊緣

$$M_{rr}(a) = -\frac{qa^2}{8}.$$

信号变更反映了从板中间的旋转向狭窄边界旋转的过渡, 在那里最大的时刻发生。

33 **支持 板。** 應用 $M_{rr}(a) = 0$ 和 $w(a) = 0$ 相同的常规解决方案

$$C_2 = -\frac{qa^2}{32K}\frac{3+\nu}{1+\nu}, \qquad C_1 = \frac{qa^4}{64K}\frac{5+\nu}{1+\nu},$$

因此, 这

$$w(r) = \frac{q}{64K}\left[r^4 - 2a^2\frac{3+\nu}{1+\nu}r^2 + a^4\frac{5+\nu}{1+\nu}\right],$$

和

$$w_{\max} = w(0) = \frac{qa^4}{64K}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right).$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这个 挠度 比 Eq 的粘贴值大。34.2.4 因因素 $(5+\nu)/(1+\nu)$ 大约四个为典型 ν 如预期, 因为简单支持的边缘不提供旋转限制。

34 这些关闭形式的结果是有用的, 如 **基准标志** 对于验证 数值 解决方案, 包括后来讨论的最终 单元 板 公式。他们还加剧了两个主要时刻结果的物理解释: 在直角板 M_{xx} 和 M_{yy} 描述了关于卡特西亚轴的旋转, 而在一个轴式循环板中, 相似的数量是辐射时刻。M_{rr} 希望的时刻 $M_{\theta\theta}$, 其中两者都存在, 即使挠度依赖于 r 独自一人

34.2.4.1 例题 34.5: 圆形 板 模型 压力

圆形铝 板 有射线 $a = 0.75$ m 和厚度 $t = 12$ 毫米。它沿着它的边缘粘贴, 并受统一的转压力的约束。$q = 2$ KPA。让

$$E = 70 \text{ GPa}, \qquad \nu = 0.33.$$

估计最高 挠度。

灵活性硬度, 从 Eq。34.2.4, is

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{(70\times 10^9)(0.012)^3}{12(1-0.33^2)} = 1.131\times 10^4 \text{ N m}.$$

在单一压力下粘贴的圆板中, 中心分解由 Eq 提供。34.2.4,

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64K}.$$

与 $q = 2000$ N/m^2 和 $a = 0.75$ m,

$$w_{\max} = \frac{(2000)(0.75)^4}{64(1.131\times 10^4)} = 8.74\times 10^{-4} \text{ m}.$$

因此,

$$w_{\max} = 0.874 \text{ mm}.$$

这个小值与薄-板一致 (小型挠度) 假设, 因为 挠度 的厚度远低于 板 的深度,

$$\frac{w_{\max}}{t} = \frac{0.874}{12} = 0.073.$$

34.2.5 变量 表述

35 在最终的单元评分之前, 我们试图从以前产生的关系中获得问题的变量表述。

36 内部 虚功 是由

$$\delta W_i = -\int_A \delta\varepsilon^T \sigma \mathrm{d}A = -\int_A \delta\kappa^T M \mathrm{d}A$$

哪里 $M = D\kappa$ 被从 Eq. 34.9, 和 $\kappa = Lu$ 它是从 Eq 获得的。34.8.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

37 外部 虚功 的会计, 我们获得

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = \underbrace{-\int_A \delta u^T (L^T D L) u \mathrm{d}A}_{} + \underbrace{\int_A \delta u^T p_v \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} u^T p \mathrm{d}\Gamma}_{} = 0$$

哪里 p_v 包含所应用的转载 p_z, 和 p 边缘负载 p_s.

38 代入 $L^T D L$ 各项（式 34.8），得到

$$\begin{aligned} K^e = L^T D L &= \lfloor\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\ \rfloor \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ &= K \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \right] \end{aligned}$$

39 最后, 注意到这一点 $u = w$, 虚功 变成

$$\delta W_e = -K \int_A \delta w \left(L w p_z \right) \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s \mathrm{d}\Gamma = 0$$

哪里 $K = Et^3/12(1-\nu^2)$.

34.3 总结

桌子 34.1 总结了一些主要的方程式, 统治板旋转, 并与相同的弹性对比。现在, 我们已经彻底审查了梁和板的衍生品, 可以增加困难一步, 并开始讨论薄壳。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 34.1: 弹性 和 板 旋转的统治方程的比较 (Pilkey and Wunderlich, 1994)

弹性	板 理论 (吉尔吉斯)
电影	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \hline \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \hline \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}u_x\\ u_y\\ u_z\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\{\ w\ \}}_{\mathbf{u}}$
	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_f} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\theta}}; \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\gamma}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathbf{L}_s} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}w\\ \theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}}$
平衡	
$\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underbrace{\left\{\begin{array}{c}b_x\\ b_y\\ b_z\end{array}\right\}}_{\rho\mathbf{b}} = 0$	$\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$
	$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc\|cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}^T=\lfloor\ \mathbf{L}_f^T\quad \mathbf{L}_s^T\ \rfloor} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ p_z\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$
宪法	
$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc}1 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & 1 & \beta & 0 & 0 & 0\\ \beta & \beta & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{K\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
	$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\\ \hline V_x\\ V_y\end{array}\right\}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\left[\begin{array}{c\|c}K\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right] & \mathbf{0}\\ \hline \mathbf{0} & \zeta\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]\end{array}\right]}_{\mathbf{D}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\kappa}}$
$\alpha = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \beta = \frac{\nu}{1-\nu}; \gamma = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$	$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}; \qquad \zeta = \frac{5}{6}\mu t$
虚功	
$\delta\Pi = \int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma = 0$	$\delta W = -\int_A \delta w \left(KL w p_z\right) \mathrm{d}A + \int_{\Gamma_p} \delta w p_s \mathrm{d}\Gamma = 0$
	$\delta W = -K\left[\int_A \delta\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{K}_f^e \boldsymbol{\theta} \mathrm{d}A + \frac{6k_s(1-\nu)}{t^2}\int_A \delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}_s^e \mathbf{u} \mathrm{d}A\right] + \int_A \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p}_V \mathrm{d}A + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{p} \mathrm{d}\Gamma = 0$

审阅稿

Victor E. Saouma

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；译文可能存在错误。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0



Neue Nationalgalerie, Ludwig Mies van der Rohe, 1968 年, 柏林, 德国

表面结构的典型示范, 在那里大平板天花板作为一个结构板作用, 覆盖着宽敞的开放室内, 具有最小的支持。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

35 沙特

摘要

这个章节分为两个主要部分。第一开始是通过差异化地质来由一个自愿的支柱元素统治平衡和兼容性方程式产生的。然后, 它专门将这些方程式转化为深层, 并最终引入膜理论的简化。

这些方程式随后适用于圆形硅 壳 或只是在终端直径上支持, 或由边缘射线支持。

不幸的是, 壳分析目前非常罕见。(如果有时) 在研究生课程中教授。相反, 学生被曝光于平板和壳牌的压缩课程, 最有可能使用有限元法的重覆。

我会说, 一个结构工程师将设计一个壳 (与现有的计算机) 首先, 她应该认识自己与基础机制, 开发足够的理解, 以便正确解释最终的单元结果。

最后, 在本书的所有章节中, 这可能是最 优雅 一是因为它结合了差异数学、计算、机械和 (半) 先进的数学导致真正令人惊叹的结构, 如 *Nervi* 和 *Torroja* 的理解 (章节 *15*).

35.1 一般理论 1069
35.1.1 定义 1069
35.1.2 假设 1072
35.1.3 强度 位移 关系 1073
35.1.4 简化 1087
35.2 单桶的分析 (圆形圆形 壳) 1095
35.2.1 引入 1095
35.2.2 膜理论 1098
35.2.3 Shallow Shell 理论 1106
35.3 静态不定义的 1119
35.3.1 艾德 • 贝姆 1119
35.3.2 首頁 〉 外文書 梁 1123
35.3.3 MATLAB® 代码和数值例子 1136

下一篇: 重复 *Thin Shell Concrete Structures*[a] 由 Billington, 1965 我的讲座笔记来自教授。理查德 • 加拉格在康奈尔的课程。
援助的 Georg, R., 2014 已被认可

[a] 虽然本书没有引入任何新的解析方法, 但它是一个非常优雅和可读的覆盖方法开始于 Love, 1927 随后, 延伸了 “德国学校” (最好总结的 Flügge, 1973) 同时提供广泛的澄清, 数字和适应评分为 “现代一”. 覆盖由 Timoshenko, Woinowsky-Krieger, et al., 1959 它是虚假的有限。

35.1 一般理论

35.1.1 定义

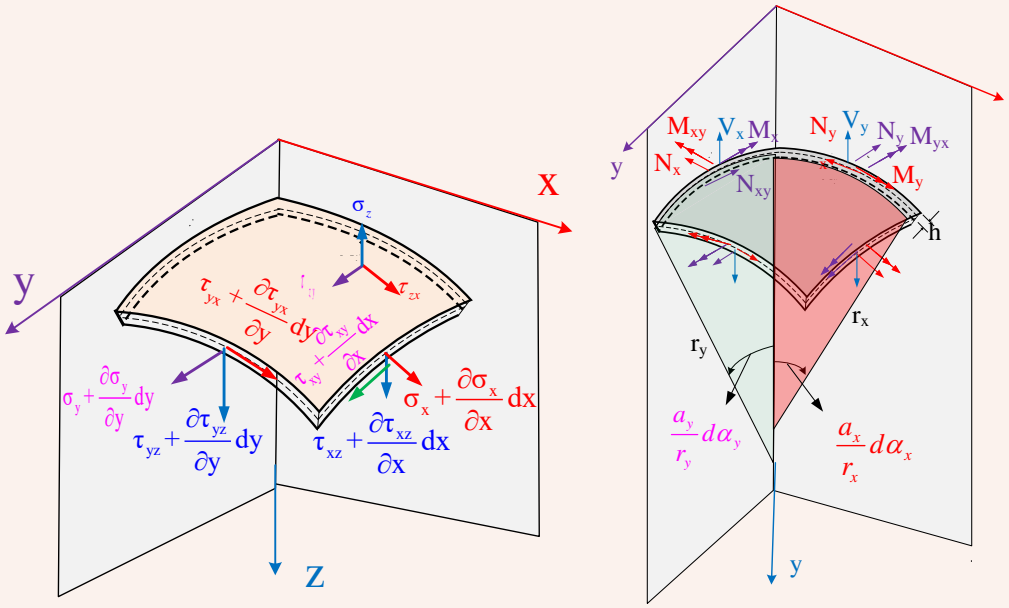
1 薄 壳 是曲线表面或 板 的厚度 h 与 曲率 的尺寸和射线相比, 它很小。r_x 和 r_y 是的, 在布局的结构。

2 壳厚度的表面被称为 **中间表面**, 并通过确定这个表面的形状和厚度每个点, 我们完全定义了壳的地质。

审阅稿

3 和 **应力 结果** 和 **应力 夫妻** 集成在 壳 厚度上, 并被定义为在中间表面每单位长度行动的总力量和时刻。(面部由细微的壳厚度切割创建).

4 压力显示在 图 35.1a, 和应力的结果和对在图 35.1b 更有趣的是, 沿着 y 轴。



(a) 内部压力　　(b) 地质和内部力量

图 35.1: 差异性 壳 单元, 地质学, 压力和其结果

5 从平衡我们有

$$\underbrace{N_x r_y d\alpha_y}_{\text{Resultant force on neutral axis}} = \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x (r_y - z) d\alpha_y dz}_{\text{internal force}} \tag{35.1}$$

6 双方分为 $r_y d\alpha_y$ 我们得到了沿着行动的膜力量。x 轴

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \tag{35.2}$$

7 图 35.2 顯示您的 单元 的歪曲, 我們可以查看條款 a_x 和 a_y 作为曲率的放射线, 以及 $d\alpha_x$, 和 $d\alpha_y$ 作为小角度, 但严格说话, 后者术语是定义基本侧面和 a_x, 和 a_y 是 **因子** 将参数转换为长度。

8 应力 结果和 应力 夫妇, 图 35.1a 被授予的

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

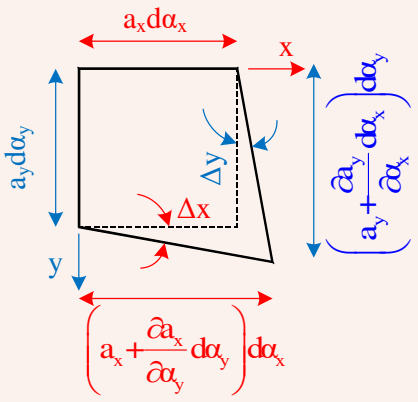


图 35.2: 区别单元的电影

Membrane Force

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz \qquad \begin{cases} N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\ N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \end{cases}$$

Bending Moments

$$\mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz \qquad \begin{cases} M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \\ M_{xy} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \end{cases} \tag{35.3}$$

Transverse Shear Forces

$$\mathbf{V} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \boldsymbol{\tau} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz \qquad \begin{cases} \cancel{V_x}^{0} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \\ \cancel{V_y}^{0} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \end{cases}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

9 压力结果和压力夫妇的 vectors 相反, 在 Fig 中显示。35.3

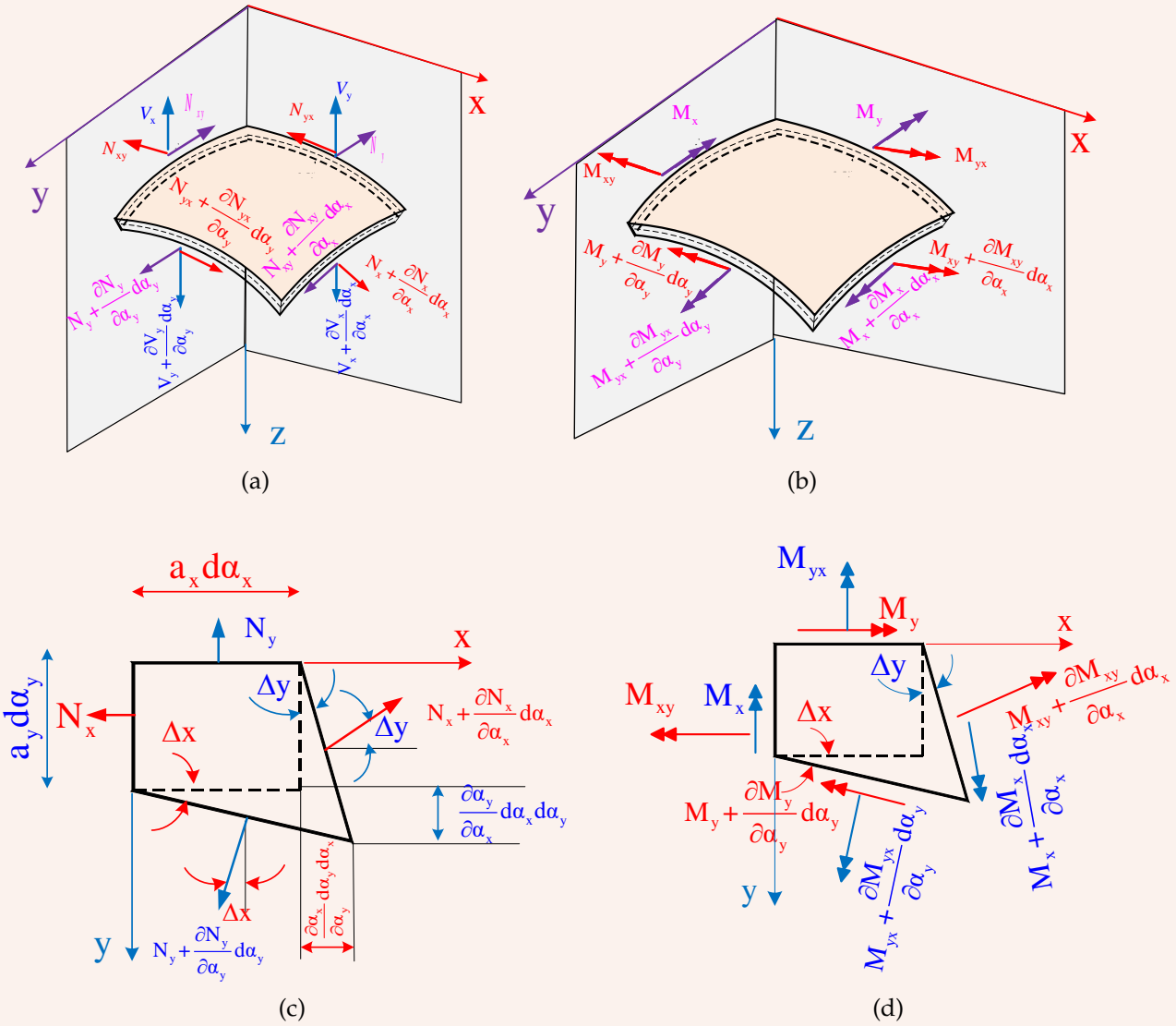


图 35.3: 平衡的差异性 壳 单元

10 压力结果的衍生和压力夫妇遵循与膜强度相同的公式 N_{xx} 来自 EQ。35.2.

35.1.2 假设

11 为了简化, 考虑到几个假设:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

壳: 如果条款 z/r_x 和 z/r_y 被忽视, 当他们以团结为主, 与 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 然后

$$N_{xy} = N_{yx}$$
$$M_{xy} = -M_{yx}$$

此外, σ_z 被忽视, 因为它会对 ε_x 和 ε_y 紧张。

小挠度: 地质学的变化不会影响静态 平衡.

线性弹性行为: 应力和应变 (或瞬间和曲率).

保守制度: 在变形之前的中间表面正常线上的点在变形后保持正常线上。[1].

忽视叶片变形: 放射线 V_x 和 V_y 不会被考虑 [2].

35.1.3 强度 位移 关系

12 所有 结构力学 解决方案必须满足三项基本要求:

平衡 通用力量

变形协调 stra 和流浪

应力-应变 关系 [3]

这些要求与初步定义/假设相结合, 将使我们能够通过以下后续步骤来产生一个一般的壳理论。35.1:

1. 确定的 **平衡** 与不同 单元 的力量和时刻 (5 个方程式,8 个未知).

   在壳理论中, 我们通常会忽略 M_z 因为 τ_{xz} 和 τ_{yz} 被忽视。因此, 我们必须满足 5 个方程式。平衡, Eq。35.3 以 8 个通用力量为准。
2. 设立的 **变形协调** (应变-位移) 关系 (6 方程式, 3 不明).
3. 设立 A **压力关系** 以一组为主灵活性属性 (3 个方程式,6 个未知).
4. 将强力应变关系转化为 **强度位移**方程式 (6 方程式 3 未知).
5. 获取 A **完整 表述** 将强度位移方程式与平衡方程 (11 个方程与 11 个未知的方程).

35.1.3.1 平衡

13 与图的参考 35.3, 我们试图确定平衡的五个方程式 $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$. 每一个将被单独考虑。

14 再一次, 我们将考虑每个术语的贡献, 单独, 表 35.2 然后将所有组件结合起来, 形成完成的平衡方程.

[1]就像在爆炸中一样, 飞机部分仍然是飞机。(Euler-Bernoulli 的假设).
[2]就像我们忽略了泡沫中的相关术语形。
[3]要记住, 压力的整合会带来力量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 35.1: 平衡和未知的总结在薄壳中

平等	(未知) 变量
1) 平衡 (§35.1.3.1)	
5 方程式 平衡	8 内部部队
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$	$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$
2) 变形协调 (§35.1.3.3)	
六条线路	3 移居
$\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$	u, v, w
3) 应力-应变 (§35.1.3.5)	
3 压力	六条线路
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	$\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$
4) 功率 位移 (§35.1.3.6)	
5 力量	3 移居
$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$	u, v, w
5) 最终	
5 平衡, 6 条线	8 力量, 3 位移
$\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$ $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$	$N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, M_{xy}, u, v, w$

表 35.2: 平衡方程式的个人贡献在薄壳

力量	$N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y, p_{ext}$
时刻	$M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, V_y$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

15 应力 夫妇在 x 方向上没有强度组成部分。每個組件都會由 应力 的結果, 图 加倍决定。35.1a 以其作用的 单元 侧的长度。

1/5 $\Sigma F_x = 0$

16 從 图 35.3c, 可以注意到区别单元的地质差异。单元的侧面交叉起源有曲线长度 $a_x d\alpha_x$ 和 $a_y d\alpha_y$ 而相反的边缘, 长度增加了 $(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y})d\alpha_x$ 和 $(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x})d\alpha_y$.

捐款从 N_x**:**

$$\begin{aligned}\Sigma F_x^{N_x} &= -N_x a_y d\alpha_y + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x}d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial \alpha_y}{d\alpha_x}d\alpha_x\right)d\alpha_y \\ &= N_x \frac{\partial \alpha_y}{\partial \alpha_x}d\alpha_x d\alpha_y + a_y \frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x}d\alpha_x d\alpha_y + \underbrace{\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x}d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}d\alpha_x d\alpha_y}_{2^{nd}\text{ order effect}}\end{aligned}$$

合并前两项，并因二阶效应而略去第三项，

$$\Sigma F_x^{N_x} = \frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x}d\alpha_x d\alpha_y \tag{35.4}$$

捐款从 N_y**:** 首先, 我们要注意的是一般 N_y 它不依赖于 x 轴, 但在某种角度

$$\Delta_x = \frac{(\partial a_y/\partial \alpha_x)d\alpha_x d\alpha_y}{a_x d\alpha_x} = \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\frac{d\alpha_y}{a_x}$$

因此, 在 x 方向, 整体力量的组成部分 $N_y a_x d\alpha_x$ 是

$$\Sigma F_x^{N_y} = -N_y a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\frac{d\alpha_y}{a_x} = -N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}d\alpha_x d\alpha_y$$

捐款从 N_{xy}**:** 关于 $N_x y$, 这个力量也有一个非偏向组成部分, 并在角度沿着定义。Δ_y:

$$\Delta_y = \frac{(\partial a_x/\partial \alpha_y)d\alpha_y d\alpha_x}{a_y d\alpha_y} = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} \tag{35.5}$$

和整体力量的组成部分 $N_{xy} a_y d\alpha_y$ 是

$$\Sigma F_x^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y} = N_{xy}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}d\alpha_y d\alpha_x \tag{35.6}$$

捐款从 N_{yx}**:** 相似于一个 N_x, Eq. 35.4

$$\Sigma F_x^{N_{yx}} = -N_{yx} a_x d\alpha_x + \left(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y}d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}d\alpha_y\right)d\alpha_x \quad = \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y}d\alpha_x d\alpha_y \tag{35.7}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

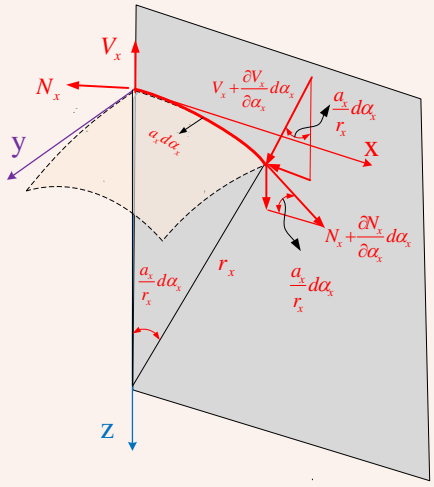


图 35.4: 差异性 壳 单元, V_x 应力 结果

捐款从 V_x**:** 地平线的组成部分全力在滑板侧, 图 35.4, is

$$\Sigma F_x^{V_x} = -\left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x$$

哪里 $d\alpha_x \simeq \sin d\alpha_x$. 我们注意到这 V_x 没有 x 组件在负面方面。忽略更高的订单条款, 这减少了

$$\Sigma F_x^{V_x} = -V_x a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x \tag{35.8}$$

捐款从 V_y**:** 结果的压力将有助于平衡 x 方向只有当 a_x 和 a_y 不是曲率的原理射线。在 图 35.5 单元与曲线的差异性, 结果是从一个完整的距离 $z_x + z_y + z_{xy}$ 相反的角落原来是可以证明的。z_x 和 z_y 是因为 sl 的。$\partial z/\partial \alpha_x$ 和 $\partial z/\partial \alpha_y$. 变革的结果在

$$z_{xy} = \frac{1}{a_x a_y} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} a_x a_y d\alpha_x d\alpha_y = \frac{a_x a_y}{r_{xy}} d\alpha_x d\alpha_y$$

哪里

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{1}{a_x a_y} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}$$

与表面旋转相匹配, 与 x 和 y 轴。因此, 斯洛普的 V_y 是

$$\frac{z_{xy}}{a_x d\alpha_x} = \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

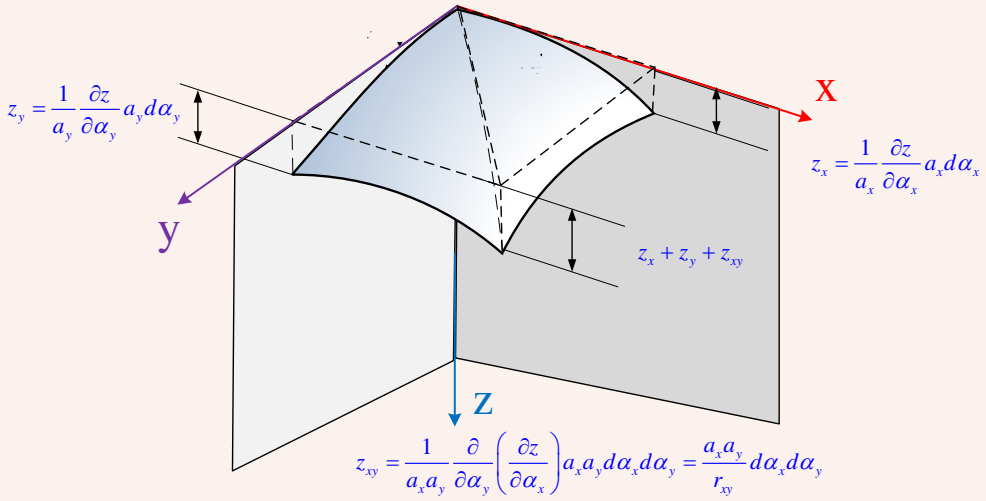


图 35.5: 差异性 壳 单元, 主要曲线

其整体组成部分 V_y 在 x 方向是

$$\begin{aligned} \Sigma F_x^{V_y} &= \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \\ &= V_y a_x d\alpha_x \frac{a_y d\alpha_y}{r_{xy}} \end{aligned} \tag{35.9}$$

这个表达式消失了, 在单元是由主要线路连接的。曲率 r_x 和 r_y, $z_{xy} = 0$ 那条旋转 $r_{xy} = \infty$.

来自外部荷载的贡献: 假设是压力与组件 p_x, p_y 和 p_z 以差异为作用单元 一个区域 $a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y$:

$$\Sigma F_x^p = p_x a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{35.10}$$

最后, 我们现在可以结合 x 组成部分 N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y 和荷载从伊克斯。35.4, 35.1.3.1, 35.6, 35.7, 35.8, 35.9, 和 35.10. 取消通用多元器后 $d\alpha_x d\alpha_y$ 我们得到了

$$\frac{\partial (N_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial (N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \tag{35.11}$$

2/5 $\Sigma F_y = 0$

17 第二个方程式与相同的方程 $\Sigma F_x = 0$ 除非我们更换了 x 和 y 条款 发行

$$\frac{\partial (N_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial (N_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \tag{35.12}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3/5 $\Sigma F_z = 0$

[18] 和 z 方向总是定义为对中间表面的偏差; 因此, 它始终是曲线的主要射线, 图。35.4. 因此, 对于小角度的假设可以做到 $\sin\theta \simeq \theta$.

类似于 $\Sigma F_x = 0$, 来自应力结果的贡献, N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{yx} 二种放射性光线, V_x, V_y 将考虑到外部压力。应力夫妇在 z 方向上没有强度组成部分。每個組件都會由 应力 的結果, 图加倍决定。35.1a, 或放射性剪力, 图 35.4 以其作用的 单元 侧的长度。

捐款从 N_x**:**

$$\Sigma F_z^{N_x} = N_x a_y d\alpha_y \underbrace{\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x}_{\sin\theta \simeq \theta} + 2^{nd} \text{ order terms} \tag{35.13}$$

[19] 下列所有表达式都将与下列的布局相似。N_x 表述 通过更改 x 和 y 变量。

捐款从 N_y**:**

$$\Sigma F_z^{N_y} = N_y a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_y} d\alpha_y \tag{35.14}$$

捐款从 N_{xy}**:**

$$\Sigma F_z^{N_{xy}} = N_{xy} a_y d\alpha_y \frac{a_x}{r_{xy}} d\alpha_x \tag{35.15}$$

捐款从 N_{yx}**:**

$$\Sigma F_z^{N_{yx}} = N_{yx} a_x d\alpha_x \frac{a_y}{r_{xy}} d\alpha_y \tag{35.16}$$

捐款从 V_x**:**

$$\begin{aligned}\Sigma F_z^{V_x} &= -V_x a_y d\alpha_y + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \underbrace{\cos\left(\frac{a_x}{r_x} d\alpha_x\right)}_{\simeq 1} \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y \\ &= \frac{\partial (V_x a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \end{aligned} \tag{35.17}$$

捐款从 V_y**:** 相似之处为 V_x

$$\Sigma F_z^{V_y} = \frac{\partial (V_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \tag{35.18}$$

来自外部荷载的贡献: 来自 EQ。35.10

$$\Sigma F_z^{p} = p_z a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \tag{35.19}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[19] 最后, 我们现在可以结合 z 组成部分 N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, V_x, V_y 和荷载从 Eq. 35.13, 35.14, 35.15, 35.16, 35.17, 35.18, 和 35.19 相应。再次, 在取消常见的多元化 $d\alpha_x d\alpha_y$ 我们得到了

$$\frac{\partial(V_x a_y)}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(V_y a_x)}{\partial \alpha_y} + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy} \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx} \frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0 \quad (35.20)$$

4/5 $\Sigma M_x = 0$

[20] 瞬间的解决方案具有与上面的力量相似的组成部分, 主要与参与者的差异。没有贡献来自压力结果, 只有一个放射线的力量。V_y 被考虑。但是, 现在的应力夫妇, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} 将力量组成部分归功于 x, y, 和 z 方向。每个组成部分将通过增加压力夫妇,Fig 来确定。35.3d, 或放射性剪力, 图 35.4 以其作用的 单元 侧的长度。

捐款从 M_x**:** 有一个组成部分关于 x 相似之处的轴, 与 N_x 在 y 方向 (Eq. 35.4 与 x 和 y 逆转)

$$\Sigma M_x^{M_x} = M_x a_y d\alpha_y \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} = M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \quad (35.21)$$

捐款从 M_y**:** 如同 EQ。35.4, 和与图的参考 35.3d

$$\begin{aligned} \Sigma M_x^{M_y} &= M_y a_x d\alpha_x - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y} d\alpha_y\right)\left(a_x + \frac{\partial a_x}{d\alpha_y} d\alpha_y\right) d\alpha_x \\ &= -\frac{\partial(M_y a_x)}{\partial \alpha_y} d\alpha_y d\alpha_x \end{aligned} \quad (35.22)$$

捐款从 M_{xy}**:** 与 Eq 相似。35.22

$$\Sigma M_x^{M_{xy}} = -M_{xy} a_y d\alpha_y + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right)\left(a_y + \frac{\partial a_y}{d\alpha_x} d\alpha_x\right) d\alpha_y = \frac{\partial(M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \quad (35.23)$$

捐款从 M_{yx}**:**

$$\Sigma M_x^{M_{yx}} = -M_{yx} a_x d\alpha_x \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \frac{d\alpha_y}{a_x} = -M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} d\alpha_x d\alpha_y \quad (35.24)$$

捐款从 V_y**:**

$$\Sigma M_x^{V_y} = V_y a_x d\alpha_x a_y d\alpha_y \quad (35.25)$$

最后, 我们现在可以结合所有的效果。组件 M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, 和 V_y Eq. 35.21, 35.22, 35.23, 35.24 和 35.25 相应。取消通用多元器后 $d\alpha_x d\alpha_y$ 我们得到了

$$-\frac{\partial(M_y a_x)}{\partial \alpha_y} + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(M_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + V_y a_x a_y = 0 \quad (35.26)$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5/5 $\Sigma M_y = 0$

關於的瞬間 y 轴与 Eq 相同的表达。35.26 除此之外, x 和 y 订阅会流动, 而旋转应力夫妇的信号被逆转。

$$-\frac{\partial(M_x a_y)}{\partial \alpha_x} + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial(M_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + V_x a_x a_y = 0 \tag{35.27}$$

35.1.3.2 平衡 方程式的完整集

21 5 平衡 方程式, Eq. 35.11, 35.12, 35.20, 35.26 和 35.27 下面总结了

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(N_x a_y) - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(N_{yx} a_x) - V_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} - V_x a_y \frac{a_x}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_y &= \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(N_y a_x) - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(N_{xy} a_y) - V_x \frac{a_y a_x}{r_{yx}} - V_y a_x \frac{a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_z &= \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(V_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(V_y a_x) + N_x \frac{a_x}{r_x} a_y + N_{xy} \frac{a_x}{r_{xy}} a_y + N_{yx} \frac{a_y}{r_{xy}} a_x + N_y \frac{a_y}{r_y} a_x + p_z a_x a_y = 0 \\
\Sigma M_x &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_y}(M_y a_x) + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x}(M_{xy} a_y) + V_y a_x a_y = 0 \\
\Sigma M_y &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_x}(M_x a_y) + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(M_{yx} a_x) + V_x a_x a_y = 0
\end{aligned} \tag{35.28}$$

35.1.3.3 变形协调

22 接下来, 我们将考虑变形协调方程式。他们将流动的转移与线条相关联。

1/4 ε_{x0}

接下来的分离关系将以参考为图 35.6. 线性 单元 的长度 $a_x d\alpha_x$ 经过三次长度变化:

轴延伸 x 轴的 $\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x$

侧面延伸 y**:** 原始不形成的差异形状单元 不是直角 (由于结果 $d\alpha_x$ 和 $d\alpha_y$) 与积极的角度相处 y 侧面和垂直是 (Eq. 35.5) $\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}$ (而不是 0) 因此, 在翻译中 y 轴, 将导致一个翻译 沿着 x 轴等于 $v\Delta_y$.

曲率的射线下降: $-w \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x$

收集所有这些条款, 并根据原始长度分割 $a_x d\alpha_x$ 收益

$$\varepsilon_{x0} = \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \tag{35.29}$$

哪里是 0 字幕表明, 中间表面正在考虑。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

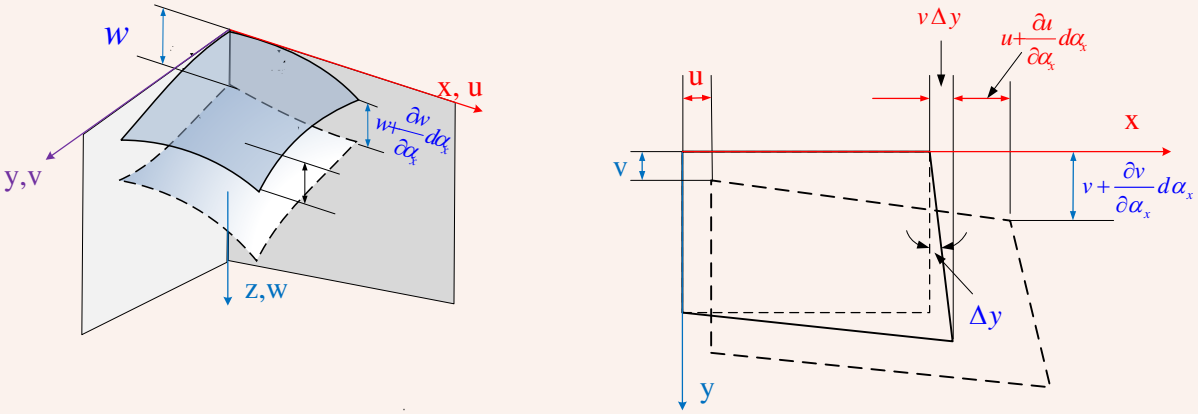


图 35.6: 差异性 壳 单元, 初始和扭曲状态

2/4 ε_{y0}

23 应变的中间表面沿着 y 轴, 通过类似性, 是通过逆转 x 和 y 与变量相结合 v 和 u 在以前的方程式中。

$$\varepsilon_{y0} = \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \tag{35.30}$$

3/4 γ_{xy0}

24 应变 表示整体角形变化 $a_y d\alpha_y$ 和 $a_x d\alpha_x$, 也有点复杂, 其三个组成部分将分开衍生。

移居区别: 对于 v 字, 图 35.6 我们有 $(v + \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} d\alpha_x) - v$. 如果我们分为基本长度, $a_x d\alpha_x$, 重复相同的操作。u 位移, 我们获得:

$$\gamma^I_{xy0} = \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} \tag{35.31}$$

长度的积极方面: 首先, 我们决定 Δs, 图 35.7.

$$\Delta s = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \Delta_y$$

哪里 Δ_y 它是由 eq。35.5 如

$$\Delta_y = \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\frac{d\alpha_x}{a_y}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

因此,

$$\begin{aligned}\Delta s &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x\right) \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} \\ &= u \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \frac{d\alpha_x}{a_y}}_{\text{Higher order term}}\end{aligned}$$

通过分裂 Δs 以 单元 的长度, $a_x d\alpha_x$ 重复相同的操作, 另一方面, 我们得到了

$$\gamma^{II}_{xy0} = -\frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \tag{35.32}$$

否定的信号反映了角度之间的事实。$x = 0$ 和 $y = 0$ 面孔下降了 (原来是正确的角度。).

表面的双重: 与图的参考 35.7, 我们有

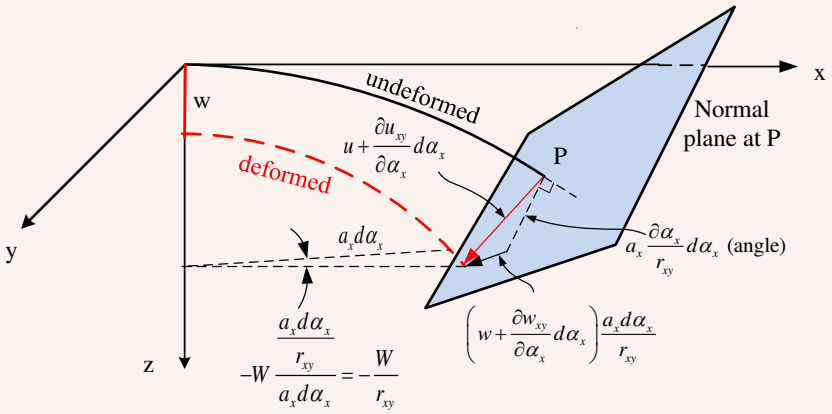


图 35.7: 差异性 壳 单元, 初始和变形状态; 由于积极侧长增加而引起的 应变 表

$$w^* = -w \frac{a_x d\alpha_x}{r_{xy}}$$

以原始长度分割 $a_x d\alpha_x$ 承认我们对飞机有类似的术语 $x = 0$ 我们得到了

$$\gamma^{III}_{xy0} = -2\frac{w}{r_{xy}} \tag{35.33}$$

因此, 总结所有三个组件,Eq。35.31, 35.32 和 35.33, 我们获得

$$\gamma_{xy0} = \underbrace{\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}}_{} \underbrace{- \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}}_{} \underbrace{- 2\frac{w}{r_{xy}}}_{} \tag{35.34}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4/4 $\chi_x, \chi_y, 2\chi_{xy}$

25 考虑到 $x-z$ 飞机, 图 35.8, 并承认 $w=0$, 正常的差异性单元在正面前和后变形形成一个

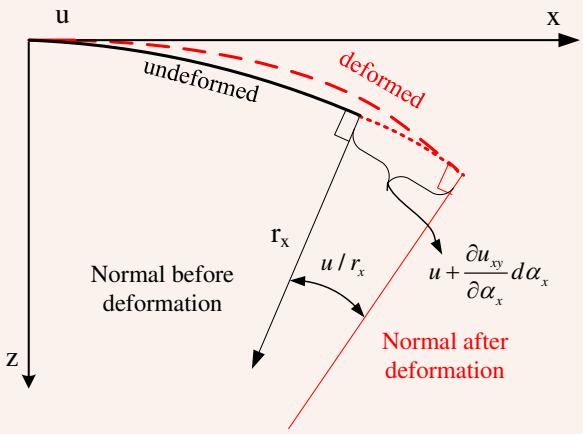


图 35.8: 差异性 壳 单元, 初始和变形状态; 转角

角度 $\frac{u}{r_x}$.

26 由于转换 位移 的传统术语是 $\frac{\partial w}{\partial s_{\alpha_x}} = \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x}$. 最后还会考虑我们所获得的转换期限。

$$\phi_x = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}} \tag{35.35}$$

27 同样, 我们得到了

$$\phi_y = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}$$

28 因此, 曲率的变化将与转角的变化相同。$\partial \phi_x$ 以 arc 长度 $a_x \partial \alpha_x$

$$\chi_x = \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}$$

此外, 由于单元的非平行侧面, 因为关于变化的价值观 a_x 和 a_y, 转角 ϕ_y 在 y 方向将产生一个组成部分在 x 方向。

$$\frac{\phi_y \Delta_y}{a_x \partial \alpha_x} = \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

29 因此, 在 曲率 中完成的变更表达

$$\begin{aligned}\chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\\ \chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\\ 2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + +\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\end{aligned}$$

35.1.3.4 总结

30 我们现在总结了六个应变表达式, 从三个角度来看。不知不觉的转移,Q。35.29, 35.30, 35.34 上一篇: 我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x}\\ \varepsilon_{y0} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y}\\ \gamma_{xy0} &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - 2\frac{w}{r_{xy}}\\ \chi_x &= \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\\ \chi_y &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\\ 2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\end{aligned} \tag{35.36}$$

哪里

$$\begin{aligned}\phi_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x} + \frac{v}{r_{xy}}\\ \phi_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y} + \frac{u}{r_{xy}}\end{aligned}$$

35.1.3.5 压力压力

35.1.3.5.1 应力-应变

31 应变的评论 ε_x 远程的 z 从中间的地面, 图 35.9, 由一个轴元组成。ε_{x0} 由于延长中间的表

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

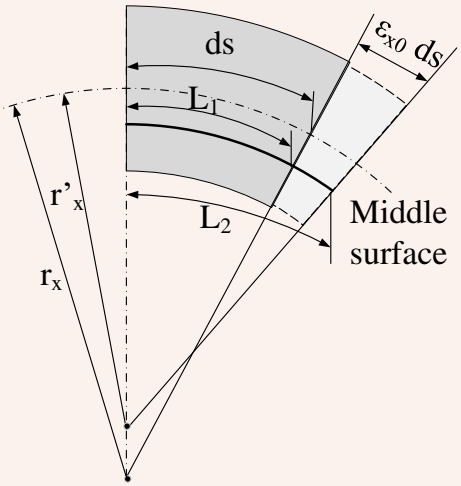


图 35.9: 差异性单元的中间表面

面, 另一个由弯曲引起。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{L_2 - L_1}{L1} \\ L_1 &= ds\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \\ L_2 &= ds(1+\varepsilon_{x0})\left(1 - \frac{z}{r'_x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{(1+\varepsilon_{x0})(1 - z/r'_x) - (1 - z/r_x)}{1 - z/r_x} \\ &= \frac{1 - z/r'_x + \varepsilon_{x0}(1 - z/r'_x) - 1 + z/r_x}{1 - z/r_x} \end{aligned}$$

32 我们可以放下短期。z/r'_x 和 z/r_x 當他們與統一相現時,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x}\right)$$

33 又一次 χ, 引用曲率的变化, 我们发现

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\chi_x \tag{35.37}$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z\chi_y \tag{35.38}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy} \tag{35.39}$$

34 在这一点上, 我们将不再忽略系统的物质特性。为了产生压力和流动关系, 我们将假设我

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

们有一个线性弹性、以色列和均匀的材料。因为我们已经承认了 $\sigma_z = 0$, 我们有一个飞机应力 状态和从 材料力学:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}$$

在那里, 硬度的模块 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

35 取代真正的表达式为线条,Eqs。35.37, 35.38, 和 35.39 我们得到了

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0} - z(\chi_x + \nu\chi_y)]\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0} - z(\chi_y + \nu\chi_x)]\\ \tau_{xy} &= G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy})\end{aligned}$$

35.1.3.5.2 Sress 力量

36 取代前一组方程式, 以表达强度应力关系,Eq。35.3 整合超越 h 忽略了 z/r_x 和 z/r_y 当他们出现在团结的旁边时, 我们得到了

$$\begin{aligned}N_x &= K(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}) \qquad (35.40)\\ N_y &= K(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0})\\ N_{xy} &= N_{yx0} = Gh\gamma_{xy0}\\ M_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_y)\\ M_y &= -D(\chi_y + \nu\chi_x)\\ M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{Gh^3}{6}\chi_{xy} = D(1-\nu)\chi_{xy} \qquad (35.41)\end{aligned}$$

哪里

$$\begin{aligned}K &= \frac{Eh}{1-\nu^2}\\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\end{aligned}$$

K 是轴性硬度和 D 灵活性, 相应于 EA 和 EI 对同等一维问题。

37 我们注意到这 K 和 D 比相应的单维恒数大于因子 $1-\nu^2$ 它代表了由于侧线的限制引起的硬度增加。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35.1.3.6 最终表达 (武力在转移方面)

38 现在, 我们将取代由 Eq 提供的轴和灵活线条。35.36 到 EQ。35.40 通过 35.41 要得到

$$
\begin{aligned}
N_x &= K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}+\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_x}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}+\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_y}\right)\right]\\
N_y &= K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}+\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_y}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}+\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_x}\right)\right]\\
N_{xy} &= N_{yx} = Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}-\frac{u}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{v}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}-\frac{2w}{r_{xy}}\right)\\
M_x &= -D\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}+\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y}+\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)\right]\\
M_y &= -D\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y}+\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x}+\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}\right)\right]\\
M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y}+\frac{1}{a_x}\frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x}-\frac{\phi_x}{a_x a_y}\frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y}-\frac{\phi_y}{a_x a_y}\frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}\right)
\end{aligned}
\tag{35.42}
$$

我們從哪裡提到這一點。35.35

$$
\begin{aligned}
\phi_x &= \frac{u}{r_x}+\frac{\partial w}{a_x \partial \alpha_x}+\frac{v}{r_{xy}}\\
\phi_y &= \frac{v}{r_y}+\frac{\partial w}{a_y \partial \alpha_y}+\frac{u}{r_{xy}}
\end{aligned}
$$

39 这些六个方程式包含三个 应力 结果 (N_x, N_y, 和 N_{xy}), 三個应力夫婦 (M_x, M_y, 和 M_{xy}) 和三移居 (u, v 和 w).

40 五个方程式的平衡,Eq。35.28, 反过来包含八个未知: 五个应力结果 (N_x, N_y, N_{xy}, V_x 和 V_y), 和三个应力夫妇 (M_x, M_y, 和 M_{xy}).

41 當這兩個方程式集合在一起時, 我們共有 11 個方針和 11 個未知的方程。(N_x, N_y, N_{xy}, V_x, V_y, M_x, M_y, 和 M_{xy}, u, v 和 w). 因此, 问题是正确的定义, 一个完整的解决方案是可能的。

42 桌子 35.3 总结一些统治薄壳的主要方程式。

35.1.4 简化

43 分析结果在上一部分讨论的结果 (11 个方程式 - 11 个未知) 可以用来解决任何类型的薄弹性壳的压力和转移。然而, 即使是这种分析也可以 **非常复杂** 即使是最薄的壳系统。因此, 壳设计经常使用两种类型的简化来方便分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 35.3: 细壳中的主要治理方程的概述

电影

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y}\begin{bmatrix} a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_x}\\ \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y} & -\frac{a_x a_y}{r_y}\\ a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y}-\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x}-\frac{\partial a_y}{\partial\alpha)_x} & -\frac{2a_x a_y}{r_{xy}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}}\underbrace{\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\chi_{xx}\\ \chi_{yy}\\ 2\chi_{xy}\end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}} = \underbrace{\frac{1}{a_x a_y}\begin{bmatrix} a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y}\\ \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y}\\ a_x\frac{\partial}{\partial\alpha_y}-\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & a_y\frac{\partial}{\partial\alpha_x}-\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x}\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}}\underbrace{\begin{Bmatrix}\theta_{xx}\\ \theta_{yy}\end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

平衡

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & -\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_x}+\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x}+\frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & 0 & 0 & 0\\ \frac{a_x}{r_x}a_y & \frac{a_y}{r_y}a_x & \frac{a_x}{r_{xy}}a_y+\frac{a_y}{r_{xy}}a_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y} & -\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x) & \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y)-\frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & \frac{\partial a_y}{\partial\alpha_x} & \frac{\partial a_x}{\partial\alpha_y}-\frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x)\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T}\underbrace{\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\\ M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}}_{\mathbf{M}} + a_x a_y\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_x} & -\frac{1}{r_{xy}}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{r_{xy}} & -\frac{1}{r_y}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial\alpha_x}(a_y) & \frac{\partial}{\partial\alpha_y}(a_x)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}_{\mathbf{b}}\underbrace{\begin{Bmatrix}P_{xx}\\ P_{yy}\\ P_{zz}\\ V_{xx}\\ V_{yy}\end{Bmatrix}}_{\rho}}_{} = 0$$

宪法

$$\underbrace{\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\beta\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & -z & -z\nu & 0\\ \nu & 1 & 0 & -z\nu & -z & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{-2z}{\beta}\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}\underbrace{\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx0}\\ \varepsilon_{yy0}\\ \gamma_{xy0}\\ \chi_{xx}\\ \chi_{yy}\\ \chi_{xy}\end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\kappa}}$$

$$\beta = \tfrac{E}{1-\nu^2}$$

Victor E. Saouma
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；译文可能存在错误。
审阅稿

数学格式 我们经常承认或证明某些相对无意义的条款，并从利息平衡中删除这些条款。这一点已经在 §35.1.3 忽略条款 z/r 当它们与单位出现时，以及飞机应力的假设，$\sigma_z = 0$. 这种简化的目的是减少术语数量，同时获得合理的数学解决方案。

物理形式 再次，我们可以采取具体的结构性行动来简化分析。这个假设可以用来替代壳系统与相当简单的结构。这个新的，更简单的结构，然后用于分析复杂的一个。

44 这些简化对于钢筋混凝土设计是可取的，因为缺乏建筑准确性而不正确分析。然而，对于设计师来说，理解真正的结构性行动仅通过系统的物理特征和相应的数学表述取得至关重要。

45 这里考虑两种简化分析理论：浅壳理论和膜理论，以下各节将分别介绍。

35.1.4.1 Shallow Shells 饰

46 Shallow shells 是两个简化 壳 理论中的第一个。(其次是膜理论。) 我们将审查。下面将使用数学和物理系统的格式的简化。

35.1.4.1.1 假设

47 Shallow 壳 理论将利用以下假设:

1. 壳的折叠小于某些参考板 (常见地平线天花板).
2. 曲率的表面很小。
3. 盾牌边界是这样，表面负载是由计划压力结果所带来的。(N_x, N_y 和 N_{xy}). 因此，过渡差距将比计划中的差距要大得多。
4. 曲率的表面变化很小。

35.1.4.1.2 假设的应用

48 现在我们将这些假设适用于 Eqs。35.28 和 35.42.

- 假设 1 允许忽略荷载的径向分量。
- 根据假设 2，式 35.28 前两式中含 V 的项以及式 35.28 第三式中含 N 的项均很小。这也适用于式 35.42 前三式中含 w 的项，以及式 35.42 后三式中含 u 和 v 的项。但在考虑第三个假设之前，不能直接舍弃这些项。
- 假设 3 将壳体等效为扁拱；在均布荷载作用下，其行为由轴向应力和竖向位移控制。意思是，在计划中的应力的小转组成部分在 Eq 的第三部分中产生。35.28，不被忽视在比较转折表中的变化结果。
- 假设 4 允许我们 a_x 和 a_y 如常。

49 结合 2 和 3 的假设，我们可以下跌 V 第一兩個字母的 Eq。35.28 但不 N 从第三个。来自 EQ。35.42 我们被允许放弃在计划中的迁移的影响 (u 和 v 条款) 压力对夫妇，但不移居的影响 (w 条款) 在计划中的 应力 结果。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

50 伊克斯。35.28 和 35.42 可以重写为:

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial N_x}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial N_{yx}}{\partial \alpha_y}+p_x=0 \tag{35.43a}$$

$$\frac{1}{a_y}\frac{\partial N_y}{\partial \alpha_y}+\frac{1}{a_x}\frac{\partial N_{xy}}{\partial \alpha_x}+p_y=0 \tag{35.43b}$$

$$\frac{1}{a_x}\frac{\partial V_x}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial V_y}{\partial \alpha_y}+\frac{N_x}{r_x}+\frac{2N_{xy}}{r_{xy}}+\frac{N_y}{r_y}+p_z=0 \tag{35.43c}$$

$$-\frac{1}{a_y}\frac{\partial M_y}{\partial \alpha_y}+\frac{1}{a_x}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \alpha_x}+V_y=0 \tag{35.43d}$$

$$-\frac{1}{a_x}\frac{\partial M_x}{\partial \alpha_x}-\frac{1}{a_y}\frac{\partial M_{yx}}{\partial \alpha_y}+V_x=0 \tag{35.43e}$$

和

$$N_x=K\left[\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_x}+\nu\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_y}\right)\right] \tag{35.44a}$$

$$N_y=K\left[\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y}-\frac{w}{r_y}+\nu\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x}-\frac{w}{r_x}\right)\right] \tag{35.44b}$$

$$N_{xy}=N_{yx}=Gh\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x}+\frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y}-\frac{2w}{r_{xy}}\right) \tag{35.44c}$$

$$M_x=-D\left(\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2}+\nu\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2}\right) \tag{35.44d}$$

$$M_y=-D\left(\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_y^2}+\nu\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x^2}\right) \tag{35.44e}$$

$$M_{xy}=-M_{yx}=D(1-\nu)\left(\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\right) \tag{35.44f}$$

51 我们观察到,我们有分开的深梁和弱方程式。N 以 Eq 为准。35.43c 和 The w 条款在 35.44a 通过 35.44c.

- 伊克斯。35.43a 和 35.43b 是飞机上载的板的表达式 (**深度梁方程式**).
- 伊克斯。35.44a 通过 35.44c 除此之外,还有深梁方程式。w 条款 伊克斯。35.44d 通过 35.44f 是后载的板的表达式 (**弱点**).
- 伊克斯。35.43c 通过 35.43e 也是 弱方程式 除此之外,除了 N 条款在 35.43c.

35.1.4.1.3 深度梁方程式

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52 我们现在将上述表达式结合成一个单一的深度壳表达式。但首先，我们必须从深 梁 和弱方程中得出。来自 EQ。35.44a, 35.44b 和 35.44c

$$N_x - \nu N_y = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x}\right)$$
$$N_y - \nu N_x = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_y}\frac{\partial v}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_y}\right)$$
$$2(1+\nu)N_{xy} = K(1-\nu^2)\left(\frac{1}{a_x}\frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y}\frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{2w}{r_{xy}}\right)$$

53 二次和相结合，我们得到了

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2(N_x-\nu N_y)}{\partial \alpha_y^2} - \frac{2(1+\nu)}{a_x a_y}\frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2(N_y-\nu N_x)}{\partial \alpha_x^2}\\ &= -K(1-\nu^2)\left[\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x^2}\left(\frac{w}{r_y}\right) - \frac{2}{a_x a_y}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y}\left(\frac{w}{r_{xy}}\right) + \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_y^2}\left(\frac{w}{r_x}\right)\right]\end{aligned} \tag{35.45}$$

54 当时 r_x, r_y 和 r_{xy} 是常见的，我们设定

$$\nabla_R^2 w = \left(\frac{1}{r_y a_x^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x^2} - \frac{2}{r_{xy} a_x a_y}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{r_x a_y^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_y^2}\right) w$$

55 取代 应力 结果与下列 应力 功能

$$N_x = \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_y^2} - \int p_x a_x d\alpha_x \tag{35.46}$$
$$N_y = \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_x^2} - \int p_y a_y d\alpha_y \tag{35.47}$$
$$N_{xy} = -\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} \tag{35.48}$$

将其替换为 EQ。35.45，我们到达我们的差异方程式为深点

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = \int \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 p_x}{\partial \alpha_y^2} a_x d\alpha_x + \int \frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 p_y}{\partial \alpha_x^2} a_y d\alpha_y - \nu\frac{1}{a_x}\frac{\partial p_x}{\partial \alpha_x} - \nu\frac{1}{a_y}\frac{\partial p_y}{\partial \alpha_y} \tag{35.49}$$

哪里

$$\nabla^4 F = \left(\frac{1}{a_x^4}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_x^4} + \frac{2}{a_x^2 a_y^2}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_x^2 \partial \alpha_y^2} + \frac{1}{a_y^4}\frac{\partial^4}{\partial \alpha_y^4}\right) F$$

56 If $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, $a_x d\alpha_x = dx$, 和 $a_y d\alpha_y = dy$, 和 $p_x = p_y = 0$, Eq. 35.49 减少到

$$\nabla^4 F = 0$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

35.1.4.1.4 Slab 方程式

57 以平衡为基础, 我们首先将取代其价值。V_x 和 V_y 来自 EQ。35.43d 和 35.43e 到 eq。35.43c 创造合并方程式

$$\frac{1}{a_x^2}\frac{\partial^2 M_x}{\partial \alpha_x^2} - 2\frac{1}{a_x a_y}\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial \alpha_x \partial \alpha_y} + \frac{1}{a_y^2}\frac{\partial^2 M_y}{\partial \alpha_y^2} + \frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \tag{35.50}$$

58 取代 EQ。35.44d, 35.44e 和 35.44f 进入 35.50 要得到

$$-\nabla^4 w + \frac{1}{D}\left(\frac{N_x}{r_x} + \frac{2N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y}\right) = -\frac{p_z}{D}$$

59 再次, 我们将输入 Eqs 的 应力 功能。35.46, 35.47 和 35.48 在我们的差异方程式中 35.1.4.1.4 要生成基板差异方程式

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\left(\frac{1}{r_x}\int p_x a_x d\alpha_x + \frac{1}{r_y}\int p_y a_y d\alpha_y\right) \tag{35.51}$$

If $r_x = r_y = r_{xy} = \infty$, Eq. 35.51 减少到

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{D}$$

35.1.4.1.5 浅壳方程

60 深 梁 的差异方程式 (35.49) 和你弱点 (35.51) 需要解决这个问题 **沙特阿拉伯**. 同步差异方程式可以以

$$\nabla^4 F + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 w = f(p) \tag{35.52}$$

$$\nabla^4 w - \frac{1}{D}\nabla_R^2 F = f'(p) \tag{35.53}$$

哪里 $f(p)$ 和 $f'(p)$ 是 Eqs 的右侧。35.49 和 35.51. 如果我们在 Eq 上运行。35.52 由 ∇^4 和 EQ。35.53 由 $K(1-\nu^2)\nabla_R^2$, 和

61 结合我们获得的

$$\nabla^8 F + \frac{12(1-\nu^2}{h^2}\nabla_R^4 F = \nabla^4 f(p) + K(1-\nu^2)\nabla_R^2 f' p \tag{35.54}$$

62 但是, 如果我们在 Eq 上运行。35.52 由 $(1/D)\nabla_R^2$ 和 EQ。35.53 由 ∇^4 和结合, 我们获得宽松的解决方案

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35.1.4.2 膜理论

膜理论是我们将审查的第二个简化方法。但是，我们将更加专注于假设和理论，而不是方法论。

35.1.4.2.1 假设

63 膜理论将使用以下假设:

1. 壳中的所有曲线都被忽略了。因此,eq。35.28 变成

$$\begin{aligned}
\Sigma F_x &= \frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_y &= \frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0 \\
\Sigma F_z &= \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0
\end{aligned} \tag{35.55}$$

2. 既然我们承认 $N_{xy} = N_{yx}$ 上面的三种方程式只有三个未知的方程 N'_x, N'_y 和 $N'_{xy} = N'_{yx}$. 主要标志表明值是近的。
3. 所有膜压力都在壳的飞机中发挥作用。

35.1.4.2.2 理论

64 膜理论可以提供合理的设计基础，如果满足以下条件:

1. 位移 由于膜 应力 的结果，不会显著增加 壳 旋转。以前的假设表明，在壳中所有的旋转都被忽略了。
2. 必须在整个 壳 表面上看到一个统一的 荷载 分布。
3. 边界可以提供力量，并允许由膜 应力 结果所需的转移。

65 通常，膜理论是不够的，但它可以被认为是有用的半球天花板或缸坦克。

35.1.4.2.3 分类

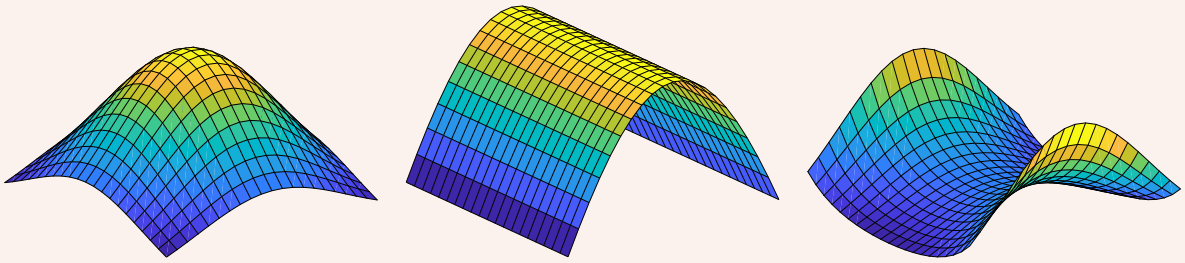
66 薄壳可以分为三个主要类别。这个分类的基础是从 **加西亚 曲率**，图 35.10.

合成 阴影是积极的 Gausian 曲率的，由两家曲线相同方向形成。

单曲 阴影是零气体曲率的阴影，由一个曲线家族形成。

反古典 阴影是负 曲率 的阴影，由相反方向曲线的两个家庭组成。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 合成 (杜布)　(b) 单曲 (巴里尔瓦尔)　(c) 反古典 (超波洛伊德 - Paraboloid)

图 35.10: 壳牌的分类

67 这三类壳体的主要差别在于边缘效应向壳体内部传播的程度。在合成裂缝中, 边缘效应往往会迅速蒸发, 并仅限于附近边缘区域的狭窄。此属性允许在整个 壳 中有效使用膜理论, 除了边界。

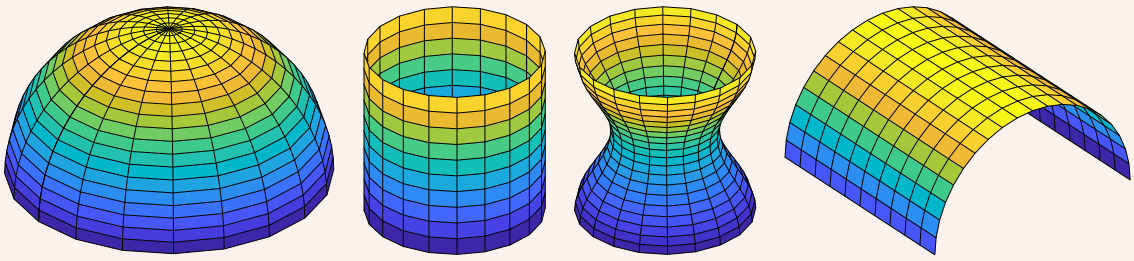
68 在单曲的阴影中, 边缘效果类似于合成阴影, 但更远地传播到阴影远离边缘。在反曲壳中，衰减比另外两类小得多，因此边界效应会控制壳体的大部分区域。

69 另一种类型的分类定义了壳系统, 无论是旋转还是翻译。多姆和坦克经常被列为旋转系统, 而硅桶、精密 paraboloids 和 hyperbolic paraboloides 则被认为是翻译的。

70 最后, 并不是所有的壳都被分析定义。(让自己 “机械” 分析). 这样的 (实验定义的形式) 沙子由 Isler 设计 (§15.5.2.2) 和穆斯林 (§15.5.2.3).

35.1.4.2.4 专业化

71 膜假设可用于分析多种壳体，见图 35.11.



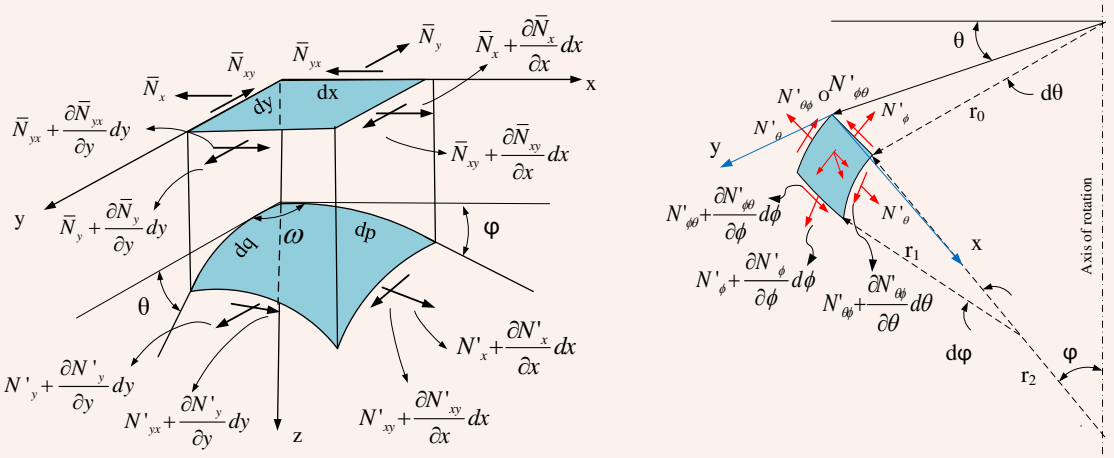
(a) 房间　(b) 壳 墙壁　(c) 混合物　(d) 酒吧

图 35.11: 例子在膜假设的阴道 (大多数) 有效

72 但是, 你可能想定位。“寄生虫” 基地时刻。

73 对于每一种壳体，均作出一组假设，并建立相应的控制平衡方程 (Eq. 35.55), 更简化, 桌子 35.4, 和衍生方程式 图 35.12.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 混合物　　(b) 房间

图 35.12: 自由体图表的超波利德和多姆无限性单元

74 下面, 我们只会考虑与桶相关的方程式的衍生性, 其他可以找到在 (Billington, 1965 PDF).

35.2 单桶的分析 (圆形圆形 壳)

35.2.1 引入

75 本节采用浅壳理论和膜理论分析圆柱壳，并将讨论限定于由两根边梁简支的壳体。首先用膜理论推导应力合力、应力矩和位移，随后再用浅壳理论重复推导。

76 本节还将讨论曲折理论, 我们将引发统治的第八个顺序差异方程式, 并讨论整合的八个自愿恒定的定义。这些恒数将被替换为应力结果, 夫妇和转移的方程式。

77 圆柱壳或筒拱通常 “被定义为曲线板..... 从一个完整的缸中切割”. 板只曲向一个方向, 因此可以被分类为单曲的壳如上部分所讨论。

78 圆柱壳通常按横向半径之比分为长壳、中长壳或短壳 r 长度的长度 L. An (任意) 分类:

1. 漫长的花园在哪里 $r/L < 0.4$
2. 中间分子在哪里 $0.4 < r/L < 2.0$
3. 短片在哪里 $r/L > 2.0$

79 在长片中, 线负载通常在壳的整个表面上产生相当大的内部力量。这些内部力量通常是如此之大, 以至于膜值通过比较变得不可忽视。因此, 原始系统并不与实际系统密切相匹配。事实上, 作为 r/L 减少, 而真正的系统接近曲线十字段 Fig 的箭头行为。饰 Figcircshell-roverL.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 35.4: 对膜结构的假设和管理方程式

一般方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y &= 0 \\ \frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y &= 0 \\ \Sigma \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z &= 0\end{aligned}$$

房间

$$\begin{aligned}&\alpha_x = \theta \quad a_x = r_0 \quad r_x = r_1 \quad r_0 = r_2 \sin\phi \quad N'_{xy} = N'_{\theta\phi} \\ &\alpha_y = \phi \quad a_y = r_1 \quad r_y = r_1 \quad N'_x = N'\theta \quad N'_y = N'_\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dN'_\phi r_0}{d\phi} - N'_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + p_\phi r_0 r_1 &= 0 \\ \frac{N'_\theta}{r_2} + \frac{N'_\phi}{r_1} + p_z &= 0\end{aligned}$$

壳 墙壁

$$\begin{aligned}&\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad N'_x = N'_\theta \\ &\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty \quad N'_{xy} = N'_{\theta y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N'_\theta &= -p_z r \\ N'_{y\theta} &= -\int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N'_\theta}{\partial \theta} + p_\theta\right) dy + f_1(\theta) \\ N'_y &= -\int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N'_{\theta y}}{\partial \theta} + p_y\right) dy + f_2(\theta)\end{aligned}$$

甲状腺 壳

$$\begin{aligned}&\alpha_x = \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad r_{xy} = \infty \\ &\alpha_y = y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dB_y}{dy} r + p_r &= 0 \\ \frac{dV_y}{dy} r + N_\theta + p_z r &= 0 \\ -\frac{dM_y}{dy} r + V_y r &= 0\end{aligned}$$

圆形圆形 壳

$$\begin{aligned}&\alpha_x = x \quad a_x = 1 \quad r_x = \infty \quad N'_{xy} = N'_{x\phi} \\ &\alpha_y = \phi \quad a_y = r \quad r_y = r \quad N'_y = N'_\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N'_\phi &= -p_z r \\ N'_{x\phi} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} dx - \int p_\phi dx + f_1(\phi) \\ N'_x &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi)\end{aligned}$$

翻译 壳 双重 曲率

$$\begin{aligned}&a_x = r_x \quad a_y = r_y \quad r_{xy} = \infty \quad \frac{\partial r_y}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N'_x}{\partial \alpha_x} r_y + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \alpha_y} r_x + p_x r_x r_y &= 0 \\ \frac{\partial N'_y}{\partial \alpha_y} r_x + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial \alpha_x} r_y + p_y r_x r_y &= 0 \\ \frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z &= 0\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

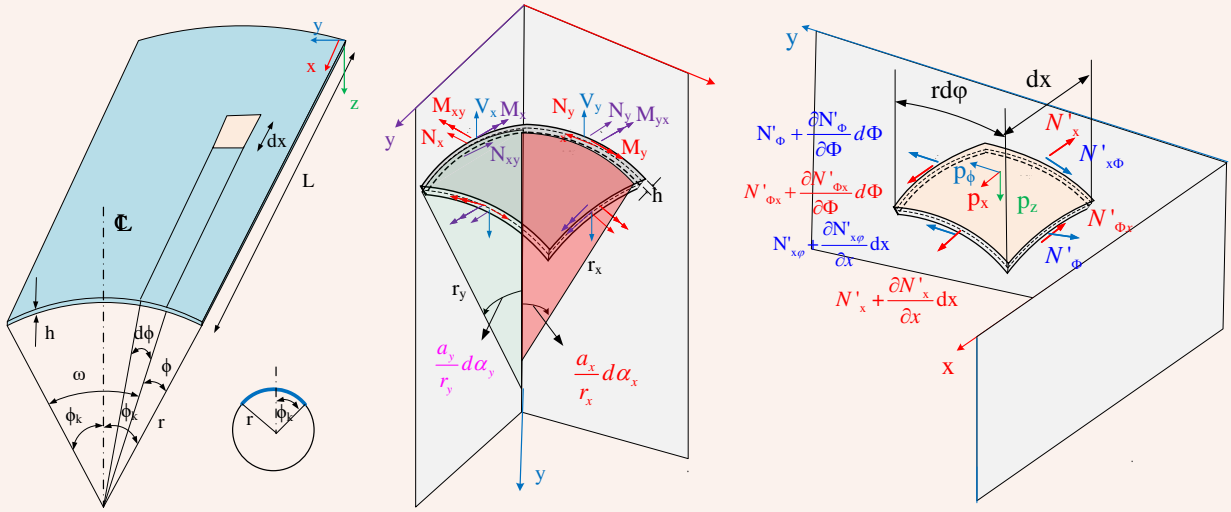
80 在短片中, 线负载在壳中产生内部力量通常限于长度边缘附近的区域。事实上, 作为 r/L 增加, 壳的大部分行为如原始系统所假设的, 即只有膜值。在这种情况下，短壳类似于薄筒拱，并由纵向边缘附近略微弯曲的横隔板支承。这些幻灯片将拱的冲动带到跨框架, 由深射线类似的内层压力。

81 引用在 Fig 中的任意壳元素的地质定义。35.13a, 一个圆形拱将有

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \theta \quad a_x = r \quad r_x = r \quad N'_{xy} = N'_{\theta y} \\ \alpha_y &= y \quad a_y = 1 \quad r_y = \infty \quad N'_x = N'_\theta \end{aligned} \tag{35.56}$$

哪里 r 它是恒定的和 ϕ 从长度边缘测量。

82 阴影无限元素的相应自由体图表显示在图中。35.13c, 并将在衍生品中提到下面。



(a) 壳

(b) 算法 壳 单元 (图 35.1b 为参考)

(c) 单元

图 35.13: 一个无限的圆形阴影元素的自由体图

83 由于膜理论只是一个接近, 程序如下:

初级系统: 这一点是通过将一般理论减少到膜理论。通过膜理论, 表面负载仅由应力结果抵抗。

错误: 这些相应于不兼容的边缘效果, 或由膜理论要求的力量在自由边缘。

修正: 线路负载 (单位边缘效应) 它们在自由边缘上使用。

变形协调: 平衡 可以通过确定所需的纠正数量来解决膜理论错误。在我们的例子中, 我们将设置线负担相当于应力膜的结果在自由边缘。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35.2.2 膜理论

84 在进行完整的浅壳理论分析之前，先考察膜理论。但是, 我们将专注于应力结果和转移的衍生品。

35.2.2.1 应力 结果

初级系统

85 与 Eq 所提供的假设相同。35.56, Eq. 35.55 如今, 它已减少到:

$$\begin{aligned} N'_{\phi} &= -p_z r \\ N'_{x\phi} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi}}{\partial \phi} dx - \int p_{\phi} dx + f_1(\phi) \\ N'_{x} &= -\frac{1}{r}\int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{35.57}$$

86 我们注意到, 使用的订阅是这样的 x 是垂直轴, y 垂直或坦根轴, 以及 z 放射轴。p 从长度边缘测量。

87 应力的结果表达现在以三个方程式的形式写成, 有三个未知力量。N'_{ϕ}, N'_{x} 和 $N'_{x\phi} = N'_{\phi x}$ 因此, 建立了一个基本制度。

88 因此, 这些 应力 结果可以轻松地计算为分配的负载。作为示例，下面推导壳体恒载产生的应力合力。对于某些其他充电条件的结果在表中总结 35.5

89 单身 壳 恒载 P_d 充电组件是:

$$\begin{aligned} p_z &= p_d \cos(\phi_k - \phi) \\ p_{\phi} &= -p_d \sin(\phi_k = \phi) \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

和 N'_{ϕ} 可以直接从第一方程式中获取 35.57

$$N'_{\phi} = -p_d r \cos(\phi_k - \phi) \tag{35.58}$$

90 当这种表达 N'_{ϕ} 被替换为第二个 Eqs。35.57

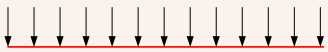
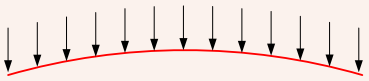
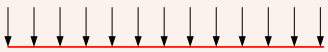
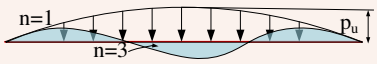
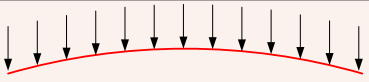
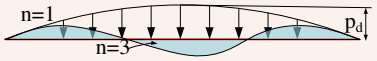
$$N'_{x\phi} = \frac{1}{r}\int \frac{\partial \left[p_d r \cos\left(\phi_k - \phi\right)\right]}{\partial \phi} dx + \int p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) dx + f_1(\phi)$$

要多样化和整合, 我们得到了

$$N'_{x\phi} = p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) x + f_1(\phi)$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 35.5: 应力 膜分布在不同负载下进行比较

膜 应力 结果 Kips/ft	荷载 ksf	壳 常数 ft	转型分布	长度分布
				
N'_{ϕ} $N'_{\phi x}$ N'_{x}	p_u p_u p_u	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	1 $(3/2)(1-2x/L)$ $(3x/2L)(1-x/L)$
				
N'_{ϕ} $N_{\phi x}$ N'_{z}	p_d p_d p_d	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$ $\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)$	1 $1-2x/L$ $(x/L)(1-x/L)$
				
N'_{ϕ} $N'_{\phi\pi}$ N''_{π}	p_u p_u p_u	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos^2(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos^2(\phi_k-\phi)-\sin^2(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$ $(3/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$ $(3/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$
				
N'_{ϕ} $N'_{\phi x}$ N'_{x}	p_d p_d p_d	r $r(L/r)$ $r(L/r)^2$	$\cos(\phi_k-\phi)$ $\sin(\phi_k-\phi)$ $\cos(\phi_k-\phi)$	$(1/n)\sin(n\pi x/L)$ $(2/n^2\pi)\cos(n\pi x/L)$ $(2/n^3\pi^2)\sin(n\pi x/L)$

(所有 应力 结果都有负面信号)

91 在一个简单的梁, $N'_{z\phi}=0$ 在 $x=L/2$, 从哪个

$$f_1(\phi)=-p_d\sin(\phi_k-\phi)\,L$$

因此, 这

$$N'_{x\phi}=2p_d\sin(\phi_k-\phi)\,x-p_d\sin(\phi_k-\phi)\,L$$

或

$$N'_{x\phi}=-p_d\sin(\phi_k-\phi)\,L\left(1-\frac{2x}{L}\right) \tag{35.59}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

92 取代这个价值 $N'_{x\phi}$ 第三个 EQ。35.57 我们有

$$N'_x = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial\left[-p_d \sin\left(\phi_k-\phi\right) L(1-2x/L)\right]}{\partial\phi}dx + f_2(\phi)$$

从哪个

$$N'_x = -p_d\frac{L}{r}\cos\left(\phi_k-\phi\right)\int\left(1-\frac{2x}{L}\right)dx + f_2(\phi)$$

给予的

$$N'_x = -p_d\frac{L}{r}\cos\left(\phi_k-\phi\right)x\left(1-\frac{x}{L}\right) + f_2(\phi)$$

93 在一个简单的梁中, 长度力量 N'_x 必须是零 $x=0$ 和 $x=L$ 因此, 这 $f_2(\phi)=0$ 和

$$N'_x = -p_d\frac{L}{r}\cos\left(\phi_k-\phi\right)x\left(1-\frac{x}{L}\right) \tag{35.60}$$

94 在桌子上 35.5 这些方程式分为三个部分, 以强调膜压力在圆形阴道中产生的分布。每个方程式的第一部分包含单词, 仅取决于负载大小和盾牌的尺寸。每个方程式的第二和第三部分分别提供应力结果的逆转和长度分布。转向和长度分布不相互关联, 因此在两个表面负载类型具有相同的转向分布但不同长度 分布时, 应力结果的转换分布将是相同。

95 Eqs 的结果。35.58 到 35.60 已在 图 中插入 35.14 用一个圆形圆缸, 简单地支持。

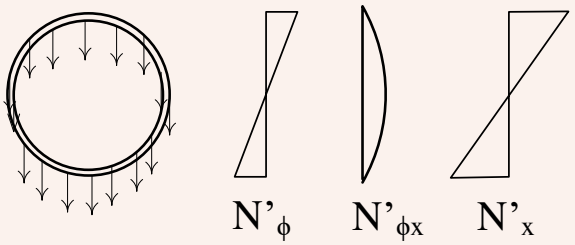


图 35.14: 压力导致的分布在一个完整的圆形阴影只是支持

96 同样的力量分配也可以通过将盾牌视为圆形泡沫, 延伸到旋转轴的方向。

97 事实上,EQ。35.58 到 35.60 给出价值 $N'_\phi, N'_{x\phi}$, 和 N'_x 可以直接从常见的梁公式中获取, 其中

$$\begin{aligned} f_\phi &= \frac{N'_\phi}{h} = -\frac{p_z T}{h} \\ v &= \frac{N'_{x\phi}}{h} = -\frac{VQ}{2Ih} \\ f_x &= \frac{N'_z}{h} = -\frac{My}{I} \end{aligned} \tag{35.61}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里, 对于一个圆环截面,

$$\begin{aligned} M &= p_d 2\pi r \left(\frac{Lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \\ y &= r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ I &= \pi h r^3 \\ V &= p_d 2\pi r \left(\frac{L}{2} - x\right) \\ Q &= 2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right) \end{aligned} \tag{35.62}$$

因此, 这些方程式可以重新编写为

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -p_d r\cos\left(\phi_k - \phi\right) \\ \frac{N'_{x\phi}}{h} &= -\frac{p_d 2\pi r[(L/2) - x]2hr^2 \sin\left(\phi_k - \phi\right)}{\pi h r^3 (2h)} \end{aligned} \tag{35.63}$$

给予的

$$N'_{z\phi} = -p_d \sin\left(\phi_k - \phi\right) L\left(1 - \frac{2x}{L}\right) \tag{35.64}$$

和

$$\frac{N'_z}{h} = -\frac{p_d 2\pi r\left[(Lx/2) - x^2/2\right] r\cos\left(\phi_i - \phi\right)}{\pi h r^3}$$

给予的

$$N'_x = -p_d \frac{L}{r}\cos\left(\phi_k - \phi\right) x\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{35.65}$$

我们注意到这一点。35.64 和 35.65 是相同的 35.59 和 35.60.

35.2.2.1.1 错误

98 长度边缘反应必须相当于膜值 N'_ϕ 和 $N'_{x\phi}$ 为了让膜理论产生正确的内部应力结果。然而, 在壳的自由边缘, 这些反应是零。

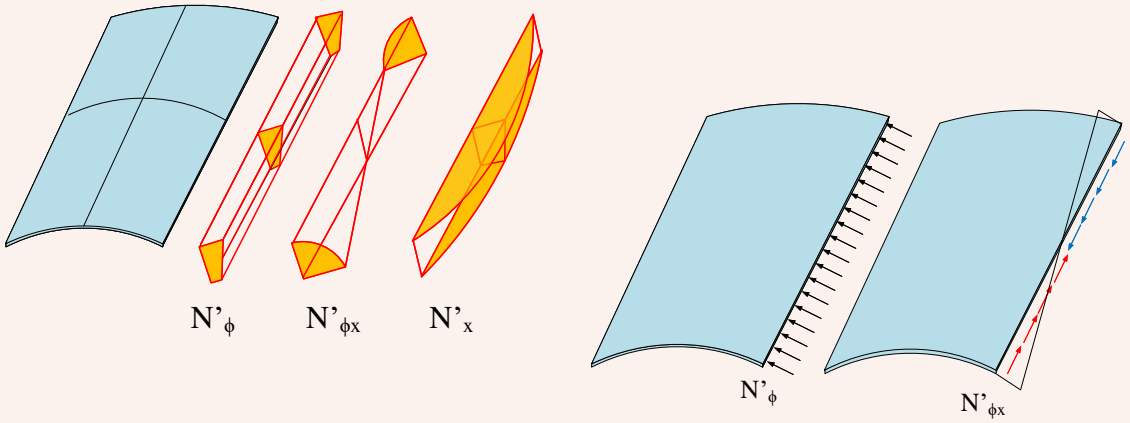
99 为了让膜理论给出内部应力结果的正确图像, 必须在长度边缘与膜值相同的反应。N'_ϕ, 和 $N'_{z\phi}$.

100 膜值分布在圆形壳中显示在图中 35.15a 在 图 中所需的边缘反应 35.15b.

35.2.2.1.2 修正

101 在壳有自由边缘的情况下, 这些反应是零。为了应对缺乏自由边缘反力力量, 我们必须执行纠正或线载。$T_L = -N'_\phi$ 和 $S_L = -N'_{\phi x}$ 它必须用来提供真正的结果反应。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 膜力量　　(b) 需要 Edge 反应

图 35.15: Edge 效果

102 Bending 理论 (§35.2.3) 应考虑在分析的纠正阶段确定从线负载产生的移动和内部力量。为了简单, 均匀分布的线负载可以作为部分负载的总和, 由一个 Fourier 系列代表。因此, 一个单一的线 荷载 T_L, 图 35.16 它可以由一个 Fourier 系列代表。

$$(T_L)_x = \frac{4}{\pi} T_L \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{35.66}$$

表面负载也必须由 Fourier 系列表达, 以便在自由边缘长度上提供兼容的力量和变形。例如,Fourier 系列为壳 恒载的单一

$$(p_d)_x = \frac{4}{\pi} p_d \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

系列的前三个术语是插入并可在图中看到 35.17. 三波相结合, 密切地吸收一个统一的荷载. 对于长壳，通常认为第一项已经足够。然而, 短壳往往需要添加第二期。这个方法将详细讨论在 §35.2.3.

35.2.2.2 转移

103 位移方程式的衍生从膜理论需要提醒中间表面线 §35.1.3.3 (伊克斯。35.29, 35.30 和 35.31). 使用循环圆形壳定义 (Eq.35.36) 字符可以重写为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_\phi = \frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r} \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi} \end{aligned} \tag{35.67}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

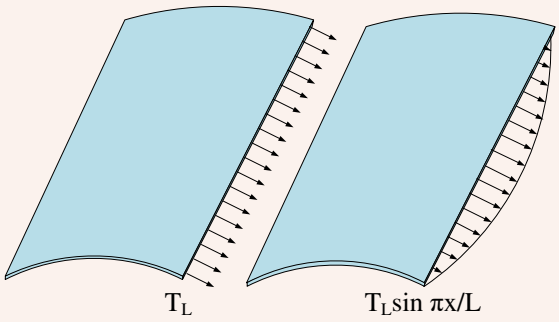


图 35.16: 修正应用线 荷载 在圆形 壳

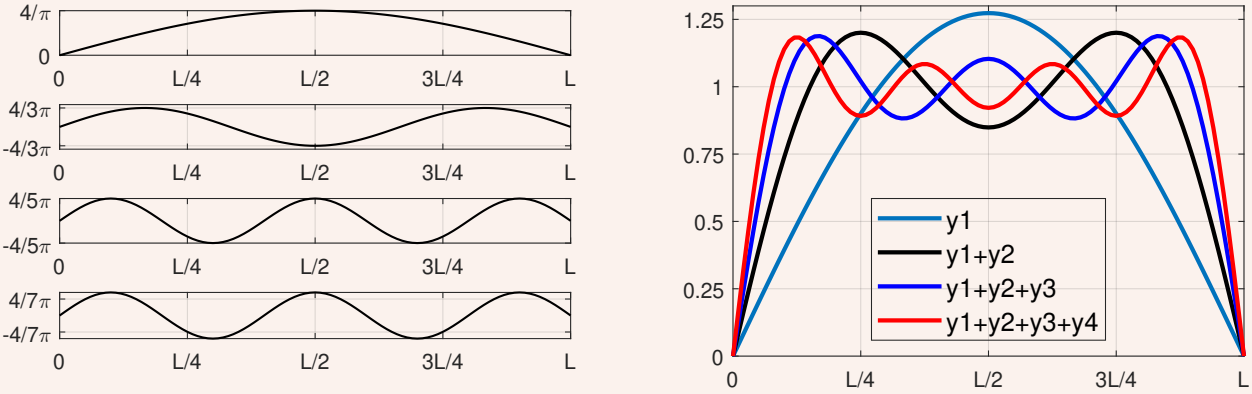


图 35.17: 他的系列演讲

104 线条可以重新编写一次, 以适应膜 应力 结果 (§35.1.3.5.1)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}\left(N'_x - \nu N'_\phi\right)\\ \varepsilon_y = \varepsilon_\phi &= \frac{\partial v}{r\partial\phi} - \frac{w}{r} = \frac{1}{Eh}\left(N'_\phi - \nu N'_x\right)\\ \gamma_{x\phi} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial\phi} = \frac{2(1+\nu)}{Eh}N'_{x\phi}\end{aligned} \tag{35.68}$$

105 因为 ν 对变形产生最小的影响, 它被忽略以简化位移方程式。第一個字母的 Eq。35.68 可用于长度 位移 的解决方案

$$u = \frac{1}{Eh}\int N'_x dx + f_3(\phi) \tag{35.69}$$

第三个术语为位移等式解决

$$v = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial u}{\partial\phi}dx + \frac{2}{Eh}\int N'_{x\phi}dx + f_4(\phi) \tag{35.70}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

106 放射性位移从第二个

$$w = \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{rN'_\phi}{Eh} \tag{35.71}$$

107 这些转移可以评估任何类型的荷载. 作为一个例子, 我们将考虑到壳的情况下在一个平等地分布在壳表面上。统一长度分布是由一系列 Fourier 的第一术语接近的, 其中 $k = n\pi/L, p = (4/\pi)p_d$, 和 $n = 1$

$$\begin{aligned} p_x &= p\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ p_\phi &= -p\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ p_x &= 0 \end{aligned}$$

应力的结果来自 Eq。35.57 成为:

$$\begin{aligned} N'_\phi &= -pr\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \\ N'_{x\phi} &= -\frac{2p}{k}\sin\left(\phi_k - \phi\right)\cos kx + f_1(\phi) \\ N'_x &= -\frac{2p}{rk^2}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx - \frac{x}{r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial \phi} + f_2(\phi) \end{aligned} \tag{35.72}$$

108 當 EQ。35.72 被引入到 Eqs。35.69 到 35.71,

$$u = \frac{1}{Eh}\left[\frac{2p}{rk^8}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\cos kx - \frac{x^2}{2r}\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial \phi} + x f_2(\phi)\right] \tag{35.73}$$

$$\begin{aligned} v = &-\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^8}\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx - \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^2 f_1(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial f_2(\phi)}{\partial \phi}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial f_3(\phi)}{\partial \phi} - \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx - x f_1(\phi)\right] + f_4(\phi) \end{aligned} \tag{35.74}$$

$$\begin{aligned} w = &\frac{1}{Ehr}\left[\frac{2p}{rk^4}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin lx + \frac{x^3}{6r}\frac{\partial^3 f_1(\phi)}{\partial \phi^3} - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f_2(\phi)}{\partial \phi^2}\right] \\ &- \frac{x}{r}\frac{\partial^2 f_3(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{2}{Eh}\left[\frac{2p}{k^2}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx + x\frac{\partial f_1(\phi)}{\partial \phi}\right] + \frac{\partial f_4(\phi)}{\partial \phi} \\ &+ \frac{pr^2}{Eh}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \end{aligned} \tag{35.75}$$

109 在一个简单支持的壳的情况下,

$$f_1(\phi) = f_2(\phi) = f_3(\phi) = f_4(\phi) = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

和 Eqs。35.72 到 35.75 减少到:

$$u = \frac{2p}{Ehr}\frac{1}{k^3}\cos\left(\phi_k - \phi\right)\cos kx \tag{35.76}$$

$$v = -\frac{2p}{Eh}\left(\frac{1}{r^2}\frac{1}{k^4} + 2\frac{1}{k^2}\right)\sin\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \tag{35.77}$$

$$w = \frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left(1 + 2r^2k^2 + \frac{r^4k^4}{2}\right)\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx \tag{35.78}$$

110 它是有用的, 有垂直和水平的转移, 这些很容易从 Eq 获得。35.77 和 35.78 如下:

$$\begin{aligned}
\Delta_V =& -v\sin\left(\phi_k - \phi\right) + w\cos\left(\phi_k - \phi\right)\\
=& \frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[\left(1 + 2r^2k^2\right)\sin^2\left(\phi_k - \phi\right) + \left(1 + 2r^2k^2 + \frac{r^4}{2}k^4\right)\cos^2\left(\phi_k - \phi\right)\right]\sin kx\\
=& \frac{2p}{Ehr^2}\frac{1}{k^4}\left[1 + 2r^2k^2 + \frac{r^4}{2}k^4\cos^2\left(\phi_k - \phi\right)\right]\sin kx
\end{aligned} \tag{35.79}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_H =& v\cos\left(\phi_k - \phi\right) + w\sin\left(\phi_k - \phi\right)\\
=& \frac{2p}{Ehr^2}\left(-\frac{1}{k^4} - 2r^2\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + 2r^2\frac{1}{k^2} + \frac{r^4}{2}\right)\sin\left(\phi_k - \phi\right)\\
=& \frac{pr^2}{Eh}\sin\left(\phi_k - \phi\right)\cos\left(\phi_k - \phi\right)\sin kx
\end{aligned} \tag{35.80}$$

哪里 Δ_V 对下方 位移 的积极性, 以及 Δ_H 對內部 位移 有好處。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35.2.3 Shallow Shell 理论

35.2.3.1 平衡的方程式

111 在采用浅壳理论分析之前，必须先重新推导应力合力、应力矩及平衡方程，使其适用于圆柱壳的特性。平衡的方程式 (35.28) 此前由深度壳理论衍生 §35.1.4.1. 使用一个圆形 壳 的定义 (§35.2.2.1), 平衡的方程式变成

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x}r + \frac{\partial_{\phi x}}{\partial \phi} + p_x r = 0 \\
\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x}r - V_\phi + p_\phi r = 0 \\
\frac{\partial V_x}{\partial x}r + \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + N_\phi + p_x r = 0 \\
-\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x}r + V_\phi r = 0 \\
-\frac{\partial M_x}{\partial x}r - \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} + V_x r = 0
\end{aligned} \tag{35.81}$$

112 请注意, 相同的结果来自 Eq。35.43a-35.43e 除此之外, 在《古兰经》中, 除了 Q_ϕ 二、在 EQ 中。35.81 被忽视为薄毛。压力结果和压力夫妇是从 Eq 获得的。35.42 在哪个

$$\phi_x = \tfrac{\partial w}{\partial x} \quad \phi_y = \tfrac{v}{r} + \tfrac{\partial w}{r\partial \phi} \quad \nu = 0$$

113 压力结果和压力夫妇,Eq。35.42 此前也被引入了 §35.1.4.1. 再次, 方程式被修改以计算为圆形壳属性。

$$\begin{aligned}
N_x &= Eh\frac{\partial u}{\partial x} \\
N_\phi &= Eh\left(\frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r}\right) \\
N_{x\phi} = N_{\phi x} &= \frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{r\partial \phi}\right) \\
M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{r^2\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial \phi^2}\right) \\
M_{x\phi} = -M_{\phi x} &= \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial v}{2r\partial x} + \frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial \phi}\right)
\end{aligned} \tag{35.82}$$

这些结果可能来自 eq。35.44a-35.44f 以 shall 的理论, 除此之外, 与 v 最后两天,EQ。35.82 被忽视为薄毛。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35.2.3.2 表述

114 重新推导全部 11 个方程后，即可利用浅壳理论推导一个八阶偏微分方程。最终, 我们将把 11 个方程减少到一个与一个未知的方程式。解决方案通过以下步骤进行:

1. 记住在中提交的薄壳的假设 §35.1.4.1.1. 所有 应力 夫妇都必须以 位移 的语法表达。这一点是通过忽略与 v 在 EQ。35.82

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{Eh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\phi^2}\right) \\ M_{x\phi} &= -M_{\phi x} = \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial x\partial\phi}\right) \end{aligned} \tag{35.83}$$

2. 放射性剪应力的结果是写在 w 来自 EQ。35.81

$$\begin{aligned} V_\phi &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{r^3\partial\phi^3} + \frac{\partial^3 w}{r\partial x^2\partial\phi}\right) \\ V_x &= -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{r^2\partial x\partial\phi^2}\right) \end{aligned} \tag{35.84}$$

   哪里 h 和 r 是永恒的。
3. 其他 应力 的结果现在可以写在 w 使用 Eq 的前三个。35.81. 取代 EQ。35.84 到第三个 35.81 我们获得

$$N_\phi = \frac{Eh^3}{12}\left(r\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\phi^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\phi^4}\right) - p_z r \tag{35.85}$$

   换句话说, 我们替代 N_ϕ 二、第二个方程式 35.81. 如果我们下跌 V_ϕ 根据第 2 条, 我们得到了

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = -\frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^5 w}{\partial x^2\partial\phi^3} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\phi^5}\right) + \frac{\partial p_z}{\partial\phi} - p_\phi \tag{35.86}$$

   最后一句话是下一个区分与 ϕ 要得到

$$\frac{\partial^2 N_{x\phi}}{\partial x\partial\phi}$$

   最后, 第一种方程式 35.81 与此相反的区别 x 和衍生品

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 N_{\phi x}}{\partial\phi\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{35.87}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2}=\frac{Eh^3}{12}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^6 w}{\partial x^4\partial\phi^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial^6 w}{\partial x^2\partial\phi^4}+\frac{1}{r^5}\frac{\partial^6 w}{\partial\phi^6}\right]-\frac{\partial^2 p_z}{r\partial\phi^2}+\frac{\partial p_\phi}{r\partial\phi}-\frac{\partial p_x}{\partial x} \tag{35.88}$$

4. 协调方程 源于 Eq 的前三个。35.82 通过消除条款的 u 和 v:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{Eh}N_x\\ \frac{\partial v}{\partial\phi}&=\frac{r}{Eh}N_\phi+w\\ N_{x\phi}&=\frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

不同, 我们得到了

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial\phi^2}&=\frac{1}{Eh}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2\partial\phi^2}\\ \frac{\partial^5 v}{\partial x^4\partial\phi}&=\frac{r}{Eh}\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\ \frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3\partial\phi}&=\frac{Eh}{2}\left(\frac{\partial^5 v}{\partial x^4\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^5 u}{\partial x^3\partial\phi^2}\right)\\ \frac{\partial^4 N_{x\phi}}{\partial x^3\partial\phi}&=\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial^4 N_\phi}{\partial x^4}+\frac{1}{r}\frac{\partial^4 N_x}{\partial x^2\partial\phi^2}\right)+\frac{Eh}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\end{aligned} \tag{35.89}$$

5. 应力的结果衍生于 Eqs。35.85, 35.86 和 35.89 完成一般 表述

$$\begin{aligned}&\frac{r^2}{2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^8}+\frac{\partial^8 w}{\partial x^6\partial\phi^2}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\partial\phi^4}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\partial\phi^4}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2\partial\phi^6}+\frac{1}{2r^6}\frac{\partial^8 w}{\partial\phi^8}\\ &\qquad+\frac{\partial^8 w}{\partial x^6\partial\phi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\partial\phi^4}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^8 w}{\partial x^2\partial\phi^6}+\frac{6}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\ &=\frac{12}{Eh^3}\left(\frac{r^2}{2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial x^4}+\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^4 p_z}{\partial\phi^4}-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial\phi^3}+\frac{1}{2r}\frac{\partial^3 p_x}{\partial x\partial\phi^2}+\frac{\partial^4 p_z}{\partial x^2\partial\phi^2}-\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2\partial\phi}\right)\end{aligned} \tag{35.90}$$

收集我们获得的条款

$$\begin{aligned}r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 w+\frac{12}{h^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{12}{Eh^3}\Bigg[&r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^2 p_z\\ &-2\frac{\partial^3 p_\phi}{\partial x^2\partial\phi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^8 p_\phi}{\partial\phi^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3 p_z}{\partial x\partial\phi^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{35.91}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使用笔记 §35.1.4.1 我们发现了这个 EQ。35.91 真相是相同的。35.54 与 $\nu = 0$:
回顾前面推导的浅壳方程，即式 35.91 我们的新方程式是相同的形式, 当 ν 等于零。

$$\nabla^8 w + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2}\nabla_R^4 w = \frac{1}{D}\nabla_R^2 f(p) + \nabla^4 f'(p) \quad \text{(Eq. 35.54)} \tag{35.92}$$

循环式圆形螺旋,

$$\begin{aligned}
\nabla_R^4 w &= \frac{\partial^4 w}{r^2 \partial x^4} \\
\nabla^8 w &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2}\right)^4 w \\
f(p) &= \frac{1}{r^2}\int \frac{\partial^2 p_x}{\partial \phi^2} dx + r\int \frac{\partial^2 p_\phi}{\partial x^2} d\phi \\
f'(p) &= \frac{p_z}{D} - \frac{1}{D}\int p_\phi d\phi
\end{aligned}$$

35.2.3.2.1 独特的单一 荷载 解决方案

115 如果我们考虑到一个荷载的情况 p 均匀分布在壳的表面上, 即 $p = 4/pip_d$ 然后,

$$\begin{aligned}
p_z &= p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \\
p_\phi &= p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx \\
p_x &= 0
\end{aligned} \tag{35.93}$$

116 使用 偏微分方程 的右侧 (Eq. 35.92) 我们决定了具体的解决方案。

$$\begin{aligned}
&\frac{12}{Eh^3}\Big[\text{四分之二的}\cos(\phi_k - \phi)\sin x + 2p(-\cos(\phi_k - \phi))(-\sin kx)k^2 \\
&+ \frac{1}{r^2}p\sin kx\cos(\phi_k - \phi)2K2P\cos\phi_k(-\sin kx) - \frac{1}{r^2}p\sin kx(-\cos(\phi_k - \phi))\Big] \\
&= \frac{12}{Eh^3}\left(r^2k^4 + 4k^2 + \frac{2}{r^2}\right)p\cos(\phi_k - \phi)\sin kx
\end{aligned} \tag{35.94}$$

117 具体的解决方案是由

$$w = Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx \tag{35.95}$$

当被替换为 Eq 的左侧时。35.91 收益

$$\begin{aligned}
&r^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + \frac{12}{h^2}\frac{\partial^4[Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial x^4} \\
&= r^2\left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right)^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + \frac{12}{h^2}k^4 Cp\cos(\phi_k - \phi)\sin kx
\end{aligned} \tag{35.96}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

118 平衡方程的左手和右手侧, 我们为常态解决。C 我們的特殊解決方案

$$C = \frac{1}{Eh}\left[\frac{r^2k^4 + 4k^2 + 2/r^2}{(r^2h^2/12)(k^2 + 1/r^2)^4 + k^4}\right] \tag{35.97}$$

替换为 Eq。35.95 我们计算 w 在任何点上, 在壳的负载和尺寸方面。

119 压力夫妇、压力结果和迁移是通过替代 w 到 eq。35.83 到 eq。35.89.

35.2.3.2.2 标签: membrane 五 S Shallow 壳

120 它是有用的比较膜理论的结果与深壳的结果。结果在表中呈现 35.6.

121 请注意, 忽略曲折的效果是常见的实践, 并使用膜理论而不是更严格的具体整体。条款 P 和 B 测量这种方法的准确性。

122 具体的解决方案, 取代 Eq。35.93 到 eq。35.57 我們獲得 应力 的結果

$$N'_{\phi} = -pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

123 当我们替代 N'_{ϕ} 二、第二期 EQ。35.57 我们获得

$$N'_{x\phi} = -\frac{1}{r}\int \frac{\partial[-pr\cos(\phi_k - \phi)\sin kx]}{\partial\phi}dx + \int p\sin(\phi_k - \phi)\sin kx dx + f_1(\phi)$$

经过分离和整合, $N'_{x\phi}$ 变成

$$N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx + f_1(\phi)$$

在哪里一个简单支持的壳 $f_1(\phi) = 0$.

124 接下来, 我们将新衍生术语替换为 Eq 的第三期。35.57. 再一次, 通过差异化和整合, 我们得到了

$$N'_x = -2\frac{p}{k^2r}\cos(\phi_k - \phi)\sin kx + f_2(\phi)$$

在哪里一个简单支持的梁 $N'_x = 0$ 在 $x = 0$ 和 $x = L$. $f_2(\phi)$ 可以计算为零, 并从上面的方程中下降。

125 接下来, 我们将使用上述衍生应力结果和 Eqs 从膜理论中提取移植。35.69, 35.70, 和 35.71.

交换后, 我们发现

$$u = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^3r}\cos(\phi_k - \phi)\cos kx$$
$$v = \frac{2}{Eh}\frac{p}{k^4r^2}\left(1 + 2k^2r^2\right)\sin(\phi_k - \phi)\sin kx$$
$$w = \frac{2}{Eh}\frac{pk^4}{r^2}\left(1 + 2k^2r^2 + \frac{r^4k^4}{2}\right)\cos(\phi_k - \phi)\sin kx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

126 请注意, 通过特定解决方案计算的 位移 可以重写为

$$u = u'(1 - P)$$
$$v = v'(1 - P)$$
$$w = w' \frac{1}{B + 1}$$

哪里

$$P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1 + 2k^2r^2 + k^4r^4)C$$
$$B = \frac{h^2}{12r^6k^4}(k^2r^2 + 1)^4$$

与此相比较, $\phi_k = (\phi_k - \phi)$. P 和 B 用来测量膜方法的准确性, 与深 壳 方法相比。

127 雖然膜理論可能看起來是避免嚴格的八條順序差別方程式的簡單選擇, 但它只能提供合理的結果, 如果它符合某些標準。首先, 移植结果不应该大大增加阴道弯曲, 因为方法论忽略了所有的阴道旋转。接下来, 壳上的加载必须在整个表面上均匀。最后, 边界必须提供力量, 并允许理论所要求的迁移。常见的膜理论不允许用于设计使用, 但在圆形硅的情况下, 它似乎有用加快设计过程。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 35.6: 膜和底部 壳 解决方案对单一 荷载 的比较

膜理论	Shallow 壳 理论
应力 夫妻	
$M'_{\phi} = 0$ $M'_{x\phi} = 0$ 饰饰$X = 0$	$M_{\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r^2} pC \cos(\phi_k) \sin kx$ $M_{x\phi^p} = \frac{Eh^3}{12r} KPC \sin(\phi_k) \cos kx$ $M_{xp} = \frac{Eh^3}{12} 2pc \cos(\phi_k) \sin kx$
应力 结果	
$N'_{\phi} = -pr \cos(\phi_k) \sin kx$ $N'_{x\phi} = 2\frac{p}{k} \sin(\phi_k) \cos kx$ $N'_{x} = -\frac{2p}{K2R} \cos(\phi_k) \sin kx$	$N_{\phi^p} = -pr(1-2P) \cos(\phi_k) \sin kx$ $N_{x\phi^p} = 2\frac{p}{k}(1-P) \sin(\phi_k) \cos kx$ $N_{xp} = -\frac{2p}{K2R}(1-P) \cos(\phi_k) \sin kx$
转移	
$u' = \frac{2}{Eh} \frac{p}{3r等} \cos(\phi_k) \cos kx$ $v' = \frac{2}{Eh} \frac{p}{四R2}(1+2k^2r^2) \sin(\phi_k) \sin kx$ $w' = \frac{2}{Eh} \frac{p}{四R2} \left(1 + 2k^2r^2 + \frac{四K四}{2}\right)$ $\cos(\phi_k) \sin kx$	$P = \frac{2}{Eh} \frac{p}{3r等}(1-P) \cos(\phi_k) \cos kx$ $= u'(1-P)$ $P = v - (1-P)$ $P = w' \frac{1}{B+1}$ $P = \frac{Eh^3}{24r^4}(1 + 2k^2r^2 + k^4r^4)C$ $B = \frac{h^2}{12r^6k^4}(二、二、一 + 1)^4$ C 来自 EQ。35.97

128 在回顾浅壳理论和膜理论的分析方法之后，下面简要讨论两种方法及其结果的差异。

129 膜理论是一种近似方法，常用于避免更为严格的浅壳理论分析。膜理论允许计算 应力 的结果和转移, 而无需使用旋转, 因为在 壳 中所有的旋转都被忽略。理论还假设所有膜压力都在壳的平板上发挥作用。这一点与浅壳理论相似，后者要求表面荷载由面内应力承担。然而，与膜理论不同，浅壳理论考虑壳体内的弯曲作用。理论认为, 壳的表面曲线, 以及曲线的变化, 是小但仍然需要分析目的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

130 下面通过两个算例比较两种方法的结果：第一个采用膜理论，第二个采用浅壳理论。

35.2.3.2.3 例题 35.1: 膜的比较 & 壳

长 壳: 给予

$$\begin{array}{ll} h = 3\text{ in} = 0.25\text{ ft} & r = 26.6\text{ ft} \\ L = 66.5\text{ ft} & \frac{h}{r} = \frac{1}{106} \\ \frac{r}{L} = 0.4 & k = \frac{\pi}{L} \\ E = 4.32 \times 10^5 \text{ksf} & \phi_k = 45^\circ \end{array}$$

长壳示例允许使用膜理论与深壳理论相比, 基于以下值:

$$\begin{aligned} C &= 0.0284\text{ ft}^3/\text{kip} \\ P &= 0.00011 \\ B &= 0.000131 \end{aligned}$$

显然, 在这种情况下, 膜理论可以用而不是具体的整体。

短 壳: 给予

$$\begin{array}{ll} h = 4\text{ in} = 0.33\text{ ft} & L = 30\text{ ft} \\ r = 140\text{ ft} & \frac{h}{r} = \frac{1}{420} \\ \frac{r}{L} = 4.67 & E = 4.32\text{x}10^5\text{ ksf} \\ \phi_k = 45^\circ & \end{array}$$

短 壳 案例的结果仍然合理, 并将允许使用膜理论。

$$\begin{aligned} C &= 0.135\text{ ft}^3/\text{kip} \\ P &= 0.011 \\ B &= 0.024 \end{aligned}$$

35.2.3.3 一般解决方案

131 基本系统和结果错误可以直接获得无论是膜理论还是细节整体。确定纠正并不那么容易, 因为解决 Eq 的一部分的困难问题。35.91 必须处理。由于圆形硅 壳 是少数 壳 系统之一, 其中一个解决方案已被精心开发, 这里提供了一个完整的衍生。

132 可以写出同等方程式:

$$r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \phi^2} \right)^4 w + \frac{12}{h^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{35.98}$$

35.2.3.3.1 位移 w

解决方案有形式的

$$w = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} A_m e^{M\phi} \sin kx \tag{35.99}$$

哪里 A_m 和 M 代表八个自愿的恒定和八个根。常态是基于长度边界条件, 而根则仅基于壳的尺寸。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

根源 M 它是由 Eq 取代的。35.99 到 eq。35.98

$$r^2\left(-k^2+\frac{M^2}{r^2}\right)^4+\frac{12}{h^2}k^4=0$$

替代

$$Q^8=3(kr)^4\left(\frac{r}{h}\right)^2$$

我们获得

$$\left(M^2-(kr)^2\right)^4A_me^{M\phi}\sin kx+4Q^8A_me^{M\phi}\sin kx=0$$

可以重写的, 如

$$\left[\frac{M^2-(kr)^2}{\sqrt{2}Q^2}\right]^4+1=0 \tag{35.100}$$

133 另外一个替代品,

$$\gamma=\left(\frac{kr}{Q}\right)^2$$

Eq. 35.100 变成

$$\frac{M^2}{Q^2}-\gamma=\sqrt[4]{-1}\sqrt{2} \tag{35.101}$$

134 现在我们已经离开了想象的术语。$\sqrt[4]{-1}$ 它被重写为

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\pm i}$$

哪里 $i=\sqrt{-1}$. 一个复杂的数字写作如

$$z=x+iy=\mathrm{Re}^{i\theta}$$

当时 $x=0, y=1$, 和 $r=\sqrt{x^2+y^2}=1$ 复杂的数字变成

$$i=e^{i\theta}$$

在哪裡, 從 Euler 的方程式,

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

和 $\theta=\pi/2$ 形成复杂的关系

$$i=e^{i\pi/2}$$

135 现在我们已经从复杂的关系中得出结论, 我们计算了

$$\begin{aligned}\sqrt{i}=(i)^{\frac{1}{2}}&=e^{i\pi/4}\\ e^{i\pi/4}&=\cos\pi/4+i\sin\pi/4\\ e^{i\pi/4}&=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{35.102}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果我们取代 EQ。35.102 到 eq。35.101

$$M^2 = Q^2\left[\gamma \pm (1 \pm i)\right] \tag{35.103}$$

结果的八根是复杂和合并的。

$$M_1 = \pm(\alpha_1 \pm i\beta_1) \tag{35.104}$$
$$M_2 = \pm(\alpha_1' \pm i\beta_1') \tag{35.105}$$

哪里

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = Qm_1 \\
\beta_1 &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = Qn_1 \\
\alpha_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = Qm_2 \\
\beta_1' &= Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = Qn_2
\end{aligned} \tag{35.106}$$

136 接下来, 我们将确定八个自愿的连续性。A_m 通过扩展 Eq。35.99.

$$w = \begin{bmatrix} A_1 e^{(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_2 e^{(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_3 e^{(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_4 e^{(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \\ A_5 e^{-(\alpha_1+i\beta_1)\phi} + A_6 e^{-(\alpha_1-i\beta_1)\phi} \\ A_7 e^{-(\alpha_1'+i\beta_1')\phi} + A_8 e^{-(\alpha_1'-i\beta_1')\phi} \end{bmatrix} \sin kx \tag{35.107}$$

137 如前所述, 从 Euler 的方程式

$$e^{\pm i\beta_1\phi} = \cos\beta_1\phi \pm i\sin\beta_1\phi$$

允许我们 矩阵 的第一行重新编写为

$$\left[(A_1+A_2)\cos\beta_1\phi + i(A_1-A_2)\sin\beta_1\phi\right] e^{\alpha_1\phi} \tag{35.108}$$

138 为 w 是真实的, 永恒的 A_1 和 A_2 必须有复杂的合并恒例。

$$A_1 + A_2 = 2a; \quad A_1 - A_2 = i2b \tag{35.109}$$

以重写的形式

$$A_1 = a + ib; \quad A_2 = a - ib \tag{35.110}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, A_1 和 A_2 它们是复杂的结合恒定, 就像其他夫妇一样。平等 35.108 可以通过替代 35.109 我们获得

$$2(a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \tag{35.111}$$

139 当我们比较上述表达式时, 与 Eq 的第一个术语。35.107

$$\begin{aligned} A_1e^{(\alpha_1+i\beta_1)\phi} &= (a+ib)(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi)e^{\alpha_1\phi} \\ &= [a\cos\beta_1\phi - b\sin\beta_1\phi + i(b\cos\beta_1\phi + a\sin\beta_1\phi)]e^{\alpha_1\phi} \end{aligned} \tag{35.112}$$

显然是 Q。35.111 这是真正的两倍。35.112 或 $2\mathrm{Re}\left(A_1e^{M_1\phi}\right)$ 因此

$$w = 2\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l} A_1e^{M_1\phi} + A_3e^{M_2\phi} \\ A_5e^{-M_1\phi} + A_7e^{-M_2\phi} \end{array}\right]\sin kx \tag{35.113}$$

35.2.3.3.2 M_ϕ

140 以色列的目的, 让我们解决 M_ϕ 来自 EQ 35.83

$$\begin{aligned} M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\phi^2} \\ &= -\frac{Eh^3}{12r^2}2\mathrm{Re}\left(\begin{array}{l} A_1M_1^2e^{M_1\phi} + A_3M_2^2e^{M_3\phi} \\ A_5M_1^2e^{-M_1\phi} + A_7M_2^2e^{-M_3\phi} \end{array}\right)\sin kx \end{aligned}$$

141 部分衍生品 w 易于获得的, 如

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial\phi} &= 2\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l} A_1M_1e^{MM_\phi\phi} + A_3M_2e^{M_\phi\phi} \\ A_5\left(-M_1\right)e^{-M_1\phi} + A_7\left(-M_2\right)e^{-M_\phi\phi} \end{array}\right]\sin kx \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\mathrm{Re}(k)\left[\begin{array}{l} A_1e^{M_1\phi} + A_3e^{M_{1\phi}} \\ A_se^{-M_1\phi} + A_2e^{-M_2\phi} \end{array}\right]\cos kx \\ etc. \end{aligned} \tag{35.114}$$

随后使用 EQ。35.114 到 35.113 任何部分差异的 w 可以被收取和替换为 35.83, 35.84, or 35.85 和 35.86 以获得 应力 结果或 应力 对。

142 来自 EQ。35.103

$$\begin{aligned} M_1^2 &= Q^2(\gamma+1+i) \\ M_2^2 &= Q^2(\gamma-1+i) \end{aligned}$$

和 A_1 和 A_2 由 EQ 提供。35.110. 因此,

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{6r^2}\mathrm{Re}\left[\begin{array}{l} +(a+ib)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi + i\sin\beta_1\phi\right)e^{\alpha_1\phi} \\ +(c+id)M_2^2\left(\cos\beta_1'\phi + i\sin\beta_1'\phi\right)e^{\alpha_1'\phi} \\ +(e+if)M_1^2\left(\cos\beta_1\phi - i\sin\beta_1\phi\right)e^{-a_1\phi} \\ +(g+ih)M_2^2\left(\cos\beta_1' - i\sin\beta_1'\phi\right)e^{-\alpha_1'\phi} \end{array}\right]\sin kx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或者在扩展的形式下, 放弃所产生的想象术语后, 我们发现

$$M_\phi = -\frac{Eh^2}{6r^2}Q^2 \left[\begin{array}{l} +\left\{[a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\} e^{\alpha_1\phi} \\ +\left\{[c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\} e^{\alpha_1'\phi} \\ +\left\{[e(1+\gamma)-f]\cos\beta_1\phi + [e+f(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\right\} e^{-\alpha_1\phi} \\ +\left\{[g(\gamma-1)-h]\cos\beta_1'\phi + [g+h(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\right\} e^{-\alpha_1'\phi} \end{array} \right]$$

143 很方便测量 ϕ 从壳的长度中心线或上方, 而不是从图中显示的边缘 35.13. 然后我们寻找对象地质和加载它 $a=e, b=f, c=g$, 和 $d=h$. 对于对同步轴上的非同步负载, 我们可以将同步案例与一个反同步的相结合。$a=-e$ 等等。现在我们重写 M_ϕ 对象案例, 并以其同等的超波形状取代异常术语。

$$e^{\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi + \sinh\alpha\phi$$
$$e^{-\alpha\phi} = \cosh\alpha\phi - \sinh\alpha\phi$$

并获得 (与 ϕ 从王冠中获取):

$$M_\phi = -\frac{Eh^3}{3r^2}Q^2 \left[\begin{array}{l} [a(1+\gamma)-b]\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - [a+b(1+\gamma)]\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ [c(\gamma-1)-d]\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - [c+d(\gamma-1)]\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi \end{array} \right] \sin kx \tag{35.115}$$

35.2.3.3.3 其他条款; 程序

144 所有 11 个功能都以相似的方式表达, 并在表中总结 35.7 和 35.7.

145 问题现在是获得纠正, 即由于边缘负载而导致的边缘效应。(线路负载). 一般而言, 这些效果是通过设置三个边界条件等于零和第四等于一个; 结果的四个同时方程为四个自愿恒定的解决。a, b, c, 和 d. 任何表的功能 35.7 可以作为单位线荷载的直接功能解决。

146 例如, 考虑到线 荷载 $N_\phi = (4/\pi)(1)\sin kx$ 它在每个长度边缘的单纯支持的壳上进行交响应用。四个方程式写

$$N_{\phi_k} = T_L = 8Dr\left(\frac{k^4}{\gamma^2}\right)\sin kx[\ \ ] = \frac{4}{\pi}\sin kx$$
$$M_\phi = -\frac{4D}{r^2}\sin kx[\ \ ] = 0$$
$$Q_\phi' = -\frac{4Dk^3}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^3}\sin kx[\ \ ] = 0$$
$$N_{\phi_{kx}} = \frac{8Drk^4}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^5}\cos kx[\ \ ] = 0$$

以随意的常态为主。如果有 位移 v 对于单元线 荷载 的情况是可取的。$N_{\phi_k} = T_L$ 结果的价值观 a, b, c, 和 d 被替换为

$$v = \frac{8Drk^3}{\left(\sqrt{\gamma}\right)^7}\sin kx[\ \ ]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 35.7: 壳 比例 (ϕ 从冠冕中测量)

$$F = 2R\begin{bmatrix}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi\end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
M_ϕ	$-\frac{2D}{T^2}\sin kx$	$Q^2(1+\gamma)$	Q^2	$Q^2(\gamma-1)$	Q^2
M_z	$2Dk^2\sin kx$	1	0	1	0
Q	$-\frac{2Dk^3}{\gamma}\cos kx$	1	1	-1	1
N_ϕ	$\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	0	1	0	-1
N_x	$-\frac{4Drk^4}{\gamma^2}\sin kx$	-1	$1+\gamma$	1	$1-\gamma$
Q_x'	$-\frac{2Dk^2}{\gamma}\cos kx$	$\gamma+2$	2	$\gamma-2$	2
u	$\frac{4Drk^2}{hE\gamma^2}\cos kx$	-1	$1+r$	1	$1-\gamma$
w	$2\sin kx$	1	0	1	0

$$F = 2R\begin{bmatrix}(aB_1 - bB_2)\cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi - (aB_2 + bB_1)\sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi \\ (cB_3 - dB_4)\cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi - (cB_4 + dB_3)\sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi\end{bmatrix}$$

F	R	B_1	B_2	B_3	B_4
Q_ϕ	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1 - n_1$	$m_1 + n_1$	$-(m_2 + n_2)$	$m_2 - n_2$
Q_ϕ'	$-\frac{2Dk^3}{(\sqrt{\gamma})^3}\sin kx$	$m_1(1-\gamma) - n_1$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$-m_2(1+\gamma) - n_2$	$m_2 - n_2(1+\gamma)$
$N_{x\phi}$	$\frac{4Drk^4}{(\sqrt{\gamma})^5}\cos kx$	$-n_1$	m_1	n_2	$-m_2$
ν	$\frac{4Drk^3}{(\sqrt{\gamma})^7}\sin kx$	$m_1 + n_1(1-\gamma)$	$n_1 - m_1(1-\gamma)$	$-m_2 + n_2(1+\gamma)$	$-n_2 - m_2(1+\gamma)$
$\theta*$	$\sin kx$	$\frac{2\alpha_1}{r} + \frac{(R.B_1)_\mu}{r}$	$\frac{2\beta_1}{r} + \frac{(R.B_2)_\nu}{r}$	$\frac{2\alpha_1'}{r} + \frac{(R.B_3)_\nu}{r}$	$\frac{2\beta_1'}{r} + \frac{(R.B_4)_\nu}{r}$
$M_{x\phi}$	$\frac{2Dk}{r}\cos kx$	α_1	β_1	α_1'	β_1'

$\nu = 0$ 这样 $D = Eh^3/12$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

147 图 2 和 3 的 (Whitney et al., 1952) 已准备 [4]. 在没有表值的情况下, 往往比单独计算线负载效应更方便地直接对实际负载和完整边缘条件进行自定义的计数。

148 虽然统治的部分差异性 Eq。35.91 这是从已经详细的假设中产生的。§35.1.1, 35.1.2 和 35.2.3 答案是由 EQ 提供的。35.99 具有额外的数学限制, 所有功能包含 $\sin kx$ 沿着边界消失 $x = 0$ 和 $x = L$. 因此, 包含的价值观 $\sin kx$ 在 R 桌子 35.7 它在壳的两端都是零。

149 主要的物理限制, 因此施加了弓, 以便转向框架, 完全为支座的壳在 $x = 0$ 和 $x = L$, 提供: 1) 它们的垂直飞行器的完整硬度, 即 $v_0 = W_0 = v_L = w_L = O$; 和 2) 飞机的完整灵活性与壳中间表面平行, 以, $M_{x_0} = N_{x_0} = M_{x_L} = N_{x_L} = 0$. 理想情况下, 壳被认为是由一个墙壁支持的, 既如此深, 以至于没有在地板上发生的位移也可能出现, 而且如此薄, 以免有外表或弯曲可以发展。雖然實際的 壳 支持與這個理想非常偏離, 但在設計許多成功建造的天花板結構中, 這裡提出的理論已被廣泛使用。

150 Eq. 35.99 它主要用于分离变量, 因此处理解决方案类似于常微分方程的解决方案, 同样是 Levy 类型解决方案。四个边界中的两个限制是为这个数学方便付出的价格。

151 有关程序的详细信息, 读者应咨询 (Gibson, 1968) 和 (Portland Cement Association, 1954) 包含 数值 例子。在一个单独的记录中, (Baker, Kovalevsky, and Rish, 1972) 是 A “手册” 各种出版物中发表的解决方案 (特别是 NASA) 它专注于航空空间结构的设计。它也适用于民事人。

152 请注意, 对房间和墙壁的表格 (轴同位数地理) 它被简化, 只需要处理普通差异方程式, 并避免部分差異方程。

35.3 静态不定义的

153 壳 可能會放鬆 (或支持) 以不同硬度的弹性支座。在这种情况下, 我们将有两者之间的位移和强制间隔, 图 35.18a. 这实际上非常相似于图中显示的泡沫安排。35.18b 在梁上由另一个以不同的坚定性支持。

35.3.1 艾德 • 贝姆

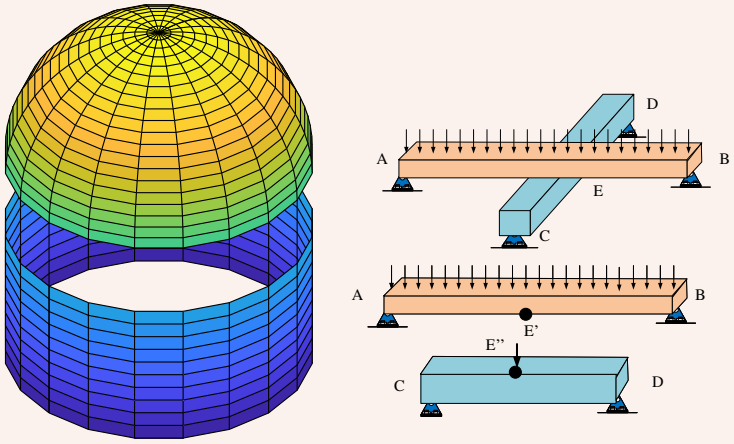
154 梁 边缘的目的在于固定 壳 边界, 并与 壳 一起携带灵活压力。将审查两种边缘线, 在壳的分析中, 垂直和水平边缘線,Figs。35.19b 和 35.19a. 垂直曲线通常用于长尾, 其中主要结构作用是长尾曲。垂直线通常用于短尾, 其中主要的结构作用是转向轴承。

155 对两种斑点的分析, 如下四个典型的步骤:

初级系统: 表面负载由包含自由边缘的 壳 支持。此外, 在自由边缘的边缘成员, 由简单的弹带自己的死体重组成。

[4] 其次, 他们是基于工作。(Finsterwalder, 1933) 在表中, 以下条款 T_s, S, T_ϕ, t, l, I 相应的 N_z, $N_{zy} = N_{yz}$, N_ϕ, h, L, $h^3/12$ 在这本书中。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 一个桶的 (圆形 壳)　　(b) 梁支承于梁

图 35.18: 静态不定义的壳和梁类似

错误: 两个错误由壳和边缘成员的主要系统呈现。首先, 壳自由边和梁垂直偏差的区别, $D^S_{10} + D^B_{10}$. 接下来, 在壳边缘和梁边缘的长度压力差异, $f^S_{20} + f^B_{20}$.

修正: 垂直的力量, V_b 以武力为主, S_b 适用于 梁 边缘, 如在 图 中所见 35.19c. V_b 行动向上在阴道和向下在斑点, 减少垂直分裂和长度压力在阴茎。它被认为是积极的, 当行动向下在壳和上到梁。S_b 作用在阴道内外, 减少阴道的垂直分裂和长度压力。规定其作用方向为壳体向外、梁向内时取正。

变形协调: 使用两个变形协调方程式。垂直 位移 和长度压力恢复如下:

$$X_1\left(D^S_{11} + D^B_{11}\right) + X_2\left(D^S_{12} + D^B_{12}\right) + D^S_{10} + D^B_{10} = 0 \tag{35.116}$$

$$X_1\left(f^S_{21} + f^B_{21}\right) + X_2\left(f^S_{22} + f^B_{22}\right) + f^S_{20} + f^B_{20} = 0 \tag{35.117}$$

156 垂直转向是积极的方向 V_b. 对于压力, 紧张在壳中被视为积极的, 压缩在梁中被认为是积极的。

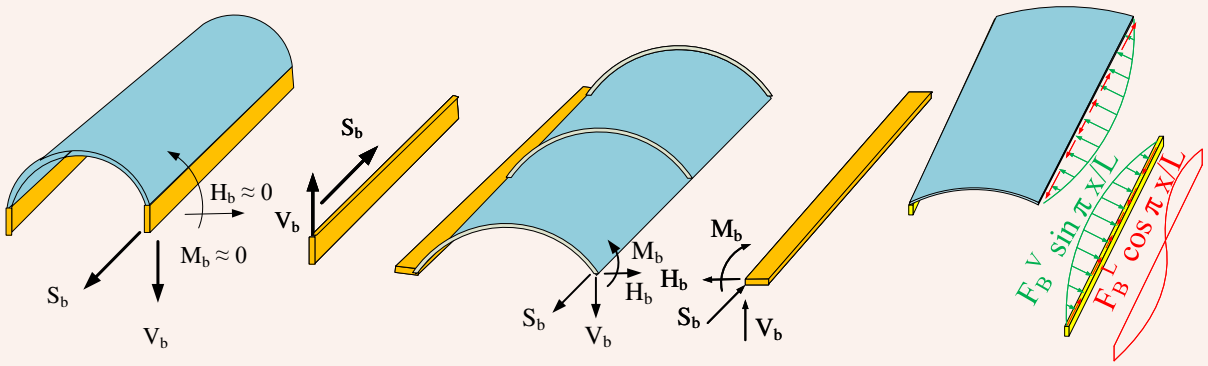
157 壳的转移和压力值已被提前讨论 §35.2.3.2.2 和 (Whitney et al., 1952) 通过膜理论和深壳理论。边缘梁转移和压力的值将由下面的常规灵活性计算。

35.3.1.1 垂直边缘线

158 用于垂直边缘射线, 图 35.19a 线路负载 T_L 和 S_L 它们被应用, 以便自由边界的力量相当于零。垂直边 梁 的目的是抵抗垂直运动 (Δ_v) 和长度边缘 应变 (N_x/Eh).

159 如果 梁 是缓慢的, 则假设对 转角 和水平翻译提供不可忽视的抵抗力。这意味着边缘势力不再是零和未知的边缘力量。V_b 和 S_b 必须应用。这些值的确定取决于边缘线的特性, 以及它能够抵抗垂直分裂和长度边缘绳索的能力。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 垂直边缘 梁　(b) 地平线 梁　(c) 垂直和滑板力量的纠正

图 35.19: 弹性支承上的圆柱壳

160 由于 Shell 线负载由 Fourier 系列代表, 因此必须对边缘板负载进行相同的代表性, 以便在长度范围内实现与 Shell 兼容性。

161 常见的灵活理论使用以下关系:

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4y}{dx^4} &= w_x = \text{loading} \\ EI\frac{d^3y}{dx^3} &= -S_x = \text{shear} \\ EI\frac{d^2y}{dx^2} &= -M_x = \text{moment} \\ \frac{dy}{dx} &= -\int_0^L \frac{M_x}{EI}dx + f_1(x) = \theta = \text{slope} \\ y &= -\int_0^L \int \frac{M_x}{EI}dx + \int_0^L f_1(x)dx + f_2(x) = \text{deflection} \end{aligned} \tag{35.118}$$

162 标志、瞬间、折叠和挠度都是由已知的负载案例和基本集成解决的。因为在泡沫上的负载被认为是 $V_b \sin \frac{n\pi x}{L}$ 负载方程式采取形式

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_s = Vb \sin kx$$

$(k = n\pi/L)$ 然后从上面

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -M = -Vb \sin kx$$

$$y = \frac{V_b}{EIk^4} \sin kx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

163 长度压力在泡沫顶部被计算为

$$f_t = \frac{M}{Z_t} = \frac{V_b}{Z_t}\frac{1}{k^2}\sin kx$$

164 以已知的力量, $S_b \cos kx$, 在梁的边缘产生一个产生的冲动, 在任何距离 x 從 梁 支座.

$$T = -\int_0^x S_b \cos\frac{n\pi x}{L}dx = -S_b\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

165 此振動給予一個 弯矩 Te 和正常的荷载 T. 垂直 挠度 从 Eq 计算。35.118, 与 $f_1(x) = f_2(x) = 0$ 长度应力在梁的顶部被重新计算为

$$y = -\left[\frac{S_b}{EI}\frac{1}{k^3}\sin kx\right]e \tag{35.119}$$

长度应力在梁的顶部是

$$f_t = \frac{T}{A} + \frac{Te}{Z_t} \tag{35.120}$$

166 对于一个直角截面, 之前讨论的方程式可以写在矩阵格式。当时 $I = bd^3/12$, $Z = bd^2/6$ 和 $e = d/2$, 方程式如下所示总结。 為 $V_b = S_b = 1$:

$$D^B_{11} = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{12}{\pi^4 n^4}\sin kx = \frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{35.121}$$

$$f^B_{21} = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{6}{\pi^2 n^2}\sin kx = -\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx D^B_{12} \quad = -\frac{L^3}{Ebd^2}\frac{6}{\pi^3 n^3}\sin kx \tag{35.122}$$

$$f^B_{22} = \frac{L}{bd}\frac{4}{\pi n}\sin kx \tag{35.123}$$

167 梁 位移 和 应力 由于在 梁 上充电, 只能从 Eqs 中找到。35.123. 使用 Fourier 系列代表性为垂直单元 荷载

$$(w_{B+L})_x = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin kx$$

我们衍生

$$D^B_{10} = -\frac{4}{\pi}w_{B+L}\frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx \tag{35.124}$$

$$f^B_{20} = \frac{4}{\pi}w_{B+L}\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx \tag{35.125}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35.3.1.2 垂直边缘

168 对于水平 梁, 图 35.19a, 这个过程与垂直梁的过程相同; 但是 H_b 替代 V_b 在 EQ。35.118 同样, d 和 b (关于 Eqs 的条款 35.123) 被逆转以代表梁的宽度和深度。类似于垂直梁, 它被认为具有不可忽视的旋转和过渡密度。

169 主要差异在垂直荷载的添加中发现 V_{B+L} 和一个弯矩 M_{B+L} 在 壳 边缘。

$$V_{B+L} = w_{B+L} d$$
$$M_{B+L} = w_{B+L} \frac{d^2}{2}$$

170 因此, 垂直边 梁 被认为将携带自己的 荷载 作为间隔的分数。d, 不像一个梁的 span L. 深度比例 b 到 Span L 对于所有边缘射击通常不会超过 1/3 因此, 一般的灵活理论可以应用。

35.3.2 首頁 〉 外文書 梁

171 梁 边界内预压的目的在于允许减少 梁 的尺寸。我们将再次遵循我们的四步分析程序, 并如下:

初级系统: 主要系统由两个单独的元素组成。第一個是壳不帶有免費邊緣的荷载。第二个是梁的边缘, 分析为一个简单的梁, 受过前压的荷载。

错误: 壳和边缘成员的主要系统提出了两个错误: 1) 壳自由边的垂直偏差差异; 2) 长度压力差异在壳边缘和梁边缘的顶部。对于这两种情况, 零 挠度 在 壳 边缘出现, 因为 壳结构被解载。

修正: 垂直的力量, V_b 以武力为主, S_b 被应用在 梁 边缘, 如下所示 §35.3.1. V_b 行动向上在阴道和向下在斑点, 减少垂直分裂和长度压力在阴茎。它被认为是积极的, 当行动向下在壳和上到梁。S_b 作用在阴道内外, 减少阴道的垂直分裂和长度压力。规定其作用方向为壳体向外、梁向内时取正。

变形协调: 变形协调的方程式是相同的。§35.3.1 除此之外, 错误术语在 Eq 中产生的。35.125.

172 新错误条款源于 Eqs。35.123. 如果边缘喷雾被视为一个简单的喷雾, 则一个模拟强化配置会导致垂直向上脱落和长度压力在边缘的顶部。

$$D_{10}^B = -\int_0^L \int \frac{M_F}{EI} dx dx + \int_0^L f_1(x) dx + f_2(x) \tag{35.126}$$
$$f_{20}^B = \frac{F}{A} - \frac{M_F}{Z_t} \tag{35.127}$$

哪里 M_F 是 弯矩 由于 tendon 配置的精度。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

173 由此 弯矩 引起的缺陷和压力在整个会员中计算, 除非支持者认为 弯矩 是零。相同的单一 荷载 然后用于计算缺陷和压力。

$$w_e = \frac{8Fe_c}{L^2}$$

可以再次由 Fourier 系列代表:

$$(w_e)_x = \frac{4}{\pi} w_e \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

174 如果边缘线是直角交叉部分,Eq。35.126 以重写的形式

$$D_{10}^B = \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^4}{Ebd^3} \frac{0.12319}{n^4} \sin kx \tag{35.128}$$

二、第二个字, 是 Q。35.127 如同 EQ 的第二个。35.125

$$\frac{M_F}{Z_t} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{bd} \sin kx - \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^2}{bd^2} (0.60793) \sin kx \tag{35.129}$$

175 第一個字的 Eq。35.127 单一压缩由 Fourier 系列提供:

$$\left(\frac{F}{A}\right)_x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kx$$

将最后两个方程式替换为 Eq。35.127 只使用第一四季系列的期限, 我们得到了

$$f_{20}^B = \frac{4}{\pi} \frac{F}{bd} \sin kx - \frac{4}{\pi} \frac{8Fe_c}{L^2} \frac{L^2}{bd^2} (0.60793) \sin kx \tag{35.130}$$

176 V_b^F 和 S_b^F 它是通过插入 Eq 来确定的。35.128 和 35.130 在 35.116-35.117.

35.3.2.1 例题 35.2: 圆形设计 壳

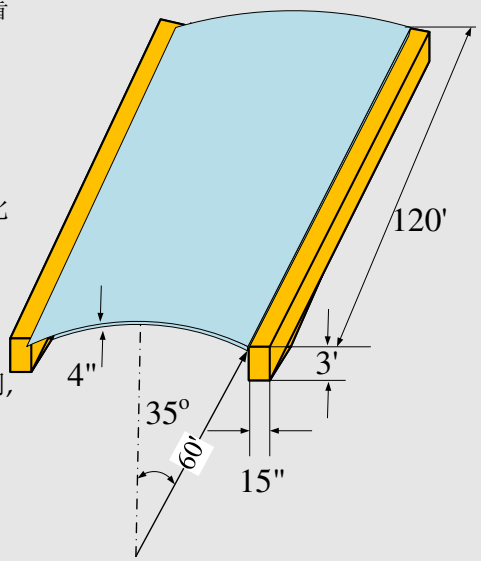
个人笔记: 这是一个解决方案, 为 CE-720 的家务任务, 一个课程 *Shells* 分析与设计 这是 Richard Gallagher 教授在 1976 年春天教导的。回到那时, 这是我在康奈尔的第一学期, 教授 Gallagher[a] 这是我毕业期间最有影响力的教授之一。47 年后, 我在今年年底退休, 很高兴将我的解决方案纳入本书中。

[a] 与我一起使用 Finite 单元, 以及结构优化。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

要分析一个圆形 壳 为 80 lb/ft 的 恒载 [2]. 假设每端都存在着粘膜, 它们在自己的飞机上是硬的。$E = 3 \times 10^7$ 狗, $\nu = 0$.
我们将按照以下方式行事:

1. 分析 壳 没有边缘线, 但仅使用终端直径支持
   (a) 膜溶液使用表 2A (附件 E) • 图表和结论结果
   (b) 正確的解決方案基於深度壳理論。与膜溶液比较。
2. 考虑在边缘线上休息的阴影。
   (a) 壳 和 梁 垂直分布和压力
   (b) 写一个方程式的兼容性转移在阴影和泡沫之间, 并解决
3. 确定最终力量在边缘射线上行动。



壳 在 Diaphragm 支座 只有

膜溶液

首先, 我们将使用膜接近来分析 壳 注意到 $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x}$ 由于接近, 将不等于零。

初级系统 应力 结果将根据表中总结的膜理论确定 35.5.

错误 因为初级系统没有考虑到边缘梁的存在, 我们将有错误 N'_ϕ 和 $N''_{\phi x}$ 由于膜理论。因此, 取代 p 由 $\frac{4}{\pi}p$ (来自 EQ。35.66), $k = \frac{\pi}{L}$ Eq. 35.72 成为

$$\begin{aligned}
N'_\phi &= -\frac{4}{\pi} pr \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \\
&= \frac{4}{\pi}(0.080)(60)\cos(35-0)\sin\frac{(1)\pi L}{L^2} \\
&= -5.006 \text{ k/ft}, \text{ 在圆柱边缘 } L/2 \text{ 处} \\
N'_{\phi x} &= -\frac{8pL}{\pi^2}\sin(\phi_k - \phi)\cos kx \\
&= -\frac{(8)(0.08)(120)}{\pi^2}(0.5736)(0.9997) \\
&= -4.463 \text{ k/ft}
\end{aligned}$$

与此同时, 在圆圈的边缘 $x = 0$ 或 L.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

修正 到 “限制” 应力由膜理论沿着边缘产生的, N'_{ϕ} 和 $N'_{\phi x}$ 應用並從表 2 A 計算結果的壓力 (附件 E) 定义为

$$\begin{aligned}\frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} \quad \simeq 200\\ \frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6\\ \phi_k &= 35^\circ < 45^\circ\end{aligned}$$

因此, 我们的 壳 是可以使用表 2A 分析的中间桶。(附件 E).

变形协调

$$\begin{aligned}V_L &= -N'_{\phi} \sin\phi_k = -(5.006)\sin 35^\circ = +2.871\\ H_L &= -N'_{\phi} \cos\phi_k = -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101\\ S_L &= -N'_{\phi k} = -4.463\end{aligned}$$

查看表 2A 的可用性:

$$\begin{aligned}\frac{r}{h} &= \frac{60}{3.5/12} = 180 \simeq 200 \quad \text{so we can use table 2A}\\ \frac{r}{L} &= \frac{60}{120} = 0.5 < 0.6\\ \phi_k &= 35^\circ < 45^\circ\end{aligned}$$

因此, 我们的 壳 是可以使用表 2A 分析的中间桶。(附件 E).

充电	多元化	角度 ϕ 从 Edge 测量

继续在下一页

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

充电	多元化	角度 ϕ 从 Edge 测量		
		35°	20°	0°
		35°	20°	0°
$N_x = T_x;\ x = L/2$ K / FT				
荷载 ‡	$C = \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L}\cos(\phi_k - \phi)$	-2.026	-0.1957	-0.1660
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.953	-4.784	-4.058
$V_L^\dagger$	共效 C (科尔 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+148.4	-100.6	+599.6
$H_L^\dagger$	共效 C (科尔 5)	-7.760	+3.367	-22.16
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-127.3	+55.23	-363.5
$S_L^\dagger$	共效 C (9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.048	-3.367	+43.97
总体		+17.19	53.52	+276.0
$N_{\phi x} = S;\ x = 0$				
荷载 ‡	$C = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L}\sin(\phi_k - \phi)$	0.0	-0.1648	-0.3651
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right) C$	0.0	-2.014	-4.463
$V_L^\dagger$	共效 C (科尔 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+23.09	0.0
$H_L^\dagger$	共效 C (科尔 6)	0.0	-3.036	0.0
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-24.90	0.0
$S_L^\dagger$	共效 C (科尔 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-0.8945	+4.630
总体		0.0	-4.718	+0.10
$N_\phi = T_\phi;\ x = L/2$				
荷载 ‡	$C = -\sin\frac{\pi x}{L}\cos(\phi_k - \phi)$	-1.0	-0.9659	-0.8192
	$\frac{4}{\pi}(p)(r)\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-6.112	-5.903	-5.007
$V_L^\dagger$	共效 C (科尔 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.493	-6.962	+1.648
$H_L^\dagger$	共效 C (卡 7)	0.6687	+1.253	+0.8192
	$H_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-2.742	+5.138	+3.360
$S_L^\dagger$	共效 C (科尔 11)	-0.0528	-0.0204	0.0
	$S_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.2445	-0.0945	0.0
总体		-7.605	-7.821	+0.001
$M_\phi;\ x = L/2$				
$V_L^\dagger$	共效 C (科尔 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	$V_L\left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.05	-21.81	0.0
$H_L^\dagger$	共效 C (科尔 8)	+0.0486	+0.0670	0.0

继续在下一页

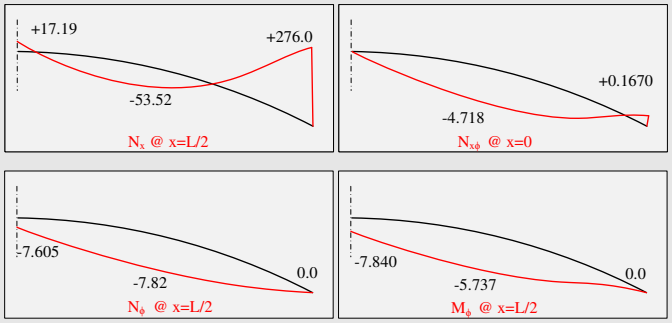
 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

充电	多元化	角度 ϕ 从 Edge 测量		
		35°	20°	0°
	$H_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	+1.96	+16.49	0.0
$S_L^\dagger$	共效 C (科尔 12)	-0.0027	-0.0015	0.0
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-0.7501	-0.4167	0.0
总体		-7.840	-5.737	0.0

‡ 桌子 35.5; † 图 2A-L (E)



让我们再次注意到, $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} \neq 0$ 由于膜的假设。

Shallow 壳 解决方案

这里采用浅壳解析解求取精确解 (§35.2.3).

1. 尺寸和负载: $L = 120'$, $r = 60'$, $h = 4"$, $\phi_k = 35°$, $p = 0.0$ Ksf
2. 壳 常数

$$k = \frac{n\pi}{L} = 0.02618; \qquad n = 1$$

$$\gamma = \frac{rk}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{h}{r}} = 0.08322$$

$$Q = \sqrt[8]{3}\sqrt[4]{\frac{r}{h}}\sqrt{rk} = 5.445$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 根 (Eq 35.106)

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}+(1+\gamma)}{2}} = 1.1308$$
$$n_1 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2+1}-(1+\gamma)}{2}} = 0.4422$$
$$m_2 = Q\sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}-(1-\gamma)}{2}} = 0.469$$
$$n_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2+1}+(1-\gamma)}{2}} = 1.0662$$

4. 因子效应 M_1 & M_2

$$\alpha_1 = Qm_1 = 6.1572$$
$$\beta_1 = Qn_1 = 2.407$$
$$\alpha_1' = Qm_2 = 2.5537$$
$$\beta_1' = Qn_1 = 5.8055$$

5. 三角形和超波利多元化 $\phi = -35° = 0.6108$ 从王冠

$$\begin{array}{llll}
\cos\beta_1\phi & = +0.09929 & \cos\beta_1'\phi & = -0.919 \\
\sin\beta_1\phi & = -0.9950 & \sin\beta_1'\phi & = +0.39382 \\
\cosh\alpha_1\phi & = +21.5116 & \cosh\alpha_1'\phi & = +2.4844 \\
\sinh\alpha_1\phi & = +0.214884 & \sinh\alpha_1'\phi & = -2.2742 \\
\cos\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = +2.1466 & \cos\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = -2.1443 \\
\sin\beta_1\phi\sinh\alpha_1\phi & = +21.3812 & \sin\beta_1\phi\cosh\alpha_1\phi & = -21.4043 \\
\cos\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = -2.2836 & \cos\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = +2.0904 \\
\sin\beta_1'\phi\sinh\alpha_1'\phi & = -0.8956 & \sin\beta_1'\phi\cosh\alpha_1'\phi & = +0.9784
\end{array} \tag{35.131}$$

6. 壳 边缘条件 (注意这些不符合膜理论的执行)

$$M_\phi = 0$$
$$N_\phi = 0 = N_\phi' + T_L$$
$$Q_\phi' = Q_\phi + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial x} = 0 \quad \text{neglect the } n \text{ variation of } M_{\phi x}$$
$$N_{\phi x} = 0 = N_{\phi x}' + S_L$$

7. 等式为 M_ϕ 从桌子 35.7

$$\begin{array}{llllll}
B_1 & = Q^2(1+\gamma) & = +32.1153 & B_3 & = Q^2(1-\gamma) & = -27.1807 \\
B_2 & = Q^2 & = +29.6480 & B_4 & = Q^2 & = 29.6480
\end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在表中的相应方程式中取代, 并以零为等。

$$2R\Big[(32.1153Q-29.6480b)(2.1466)-(29.6480a+32.1153b)(21.3812)+(-27.1807c+29.6480d)(2.2836) + (29.6480c - 27.1807d)(0.8956)\Big] = 0 \quad (35.132)$$

简化

$$-546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.3612d = 0$$

8. 平衡为 N_ϕ 从桌子 35.7

$$B_1 = 0; \quad B_2 = 1; \quad B_3 = 0; \quad B_4 = -1$$

替代

$$\frac{4D(60)(0.02618)^4}{0.08322^2}\left[(-b)(2.1466) - (a)(21.3812) + d(-2.2836) - (-c)(-0.8956)\right] - \frac{5.006}{2} = 0.0$$

$$\Rightarrow 0.348070a + 0.034945b + 0.014580c + 0.037125d = -\frac{2.503}{D} \quad (35.133)$$

9. 平衡为 Q'_ϕ 从桌子 35.7

$$\begin{array}{ll} B_1 = m_1(1-\gamma) - n_1 = 0.59450 & B_3 = -m_2(1+\gamma) - n + 2 = -1.5742 \\ B_2 = m_1 + n_1(1-\gamma) = 1.5362 & B_4 = m_2 - n_2(1+\gamma) = 0.68593 \end{array}$$

替代

$$-\frac{-20(0.02618)^3}{(\sqrt{.08322})^3}\Big[(0.5945a - 1.53626b)(-2.1443) - (1.5362a + 0.5945b)(-21.4043) + (-1.5742c + 0.68593d)(2.0944) - (-0.68593c - 1.5747d)(0.9784)\Big] = 0.0 \quad (35.134)$$

或

$$31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.97410d = 0.0$$

10. 平衡为 $N_{\phi x}$ 从桌子 35.7

$$\begin{array}{ll} B_1 = -n_1 = -0.4422 & B_3 = +n_2 = 1.0662 \\ B_2 = +m_1 = +1.1308 & B_4 = m_2 = -0.4690 \end{array}$$

替代

$$\frac{8D(60)(0.02618)^4}{(\sqrt{0.08322})^5}\Big[(-0.4422a - 1.1308b)(-2.443) - (1.1308a - 0.4422b)(-21.4043) + (1.0662c + 0.4690d)(2.0904) - (-0.4690c + 1.0662d)(0.9784)\Big] - 4.463 = 0.0 \quad (35.135)$$

或

$$2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d = \frac{4.463}{D}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

11. 解决自愿的常态

$$\begin{aligned} -546.97a - 750.31b + 88.623c + 43.361d &= 0 \\ 0.34807a + 034945b + 0.14580c + .037175d &= -\frac{2.505}{D} \\ 31.6065a + 16.01893b - 2.6196c + 2.9741d &= 0.0 \\ 2.8369a - 0.794561b + 0.30333c - 0.007045d &= \frac{4.463}{D} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8.6097}{D}; \quad b = -\frac{26.4349}{D}; \quad c = \frac{-136.668}{D}; \quad d = \frac{-69.4923}{D};$$

12. 从桌子 35.7

$$D = \frac{Eh^3}{12} = \frac{(3\times 10^4)(4/12)^3}{12}(144) = 1.33\times 10^4$$

或

$$a = 6.4573\times 10^{-4}; \quad b = -0.0020; \quad c = -0.0103; \quad d = -0.0052;$$

13. 然后我们取代这些因子, 以及表中的因子。Eq. 35.131 到 eq。35.115 并获得

$$N_x = 281.285 \text{ k/ft}$$

14. 因为我们计算了方程式 $\phi = 35°$ 王冠在哪里 $M_\phi = N_\phi = N_{\phi x} = 0$ 因此, 唯一可能的比较是 $N_x = 281.285$ K / FT 相比之下 276.0 k/ft 从膜接近。很近!

壳-梁

初级系统

前部分的最终结果将构成初级系统, 并将使用所产生的压力来确定附件 2A 和 2B 表中的转移。E

错误

这些人是因为

1. 垂直差异
2. 长度压力

在壳边缘。因此, 我们将有停滞在火箭上。

梁的旋转硬度将被认为是不可忽视的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

壳 膜垂直 位移 垂直 位移 Δv 由膜结果引起 (Eq. 35.79) 和边缘负载从表 2A (附件 E).

$$\begin{aligned}\Delta v^s &= \frac{L^4}{r^3 hE}\left\{\underbrace{pr\left[\left(\frac{2r}{\pi L}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+0.50\left(\frac{r}{L}\right)^4\right]}_{\text{Membrane deflection}}+\underbrace{\text{第 1 列}V_L+\text{第 4 列}H_L+\text{第 7 列}S_L}_{\text{边缘荷载对挠度的影响，表 2B}}\right\}\sin kx\\ &= \frac{(120)^4L^2}{(60)^3(4/12)E}\left\{(0.08)(60)\left[\left(\frac{2(60)}{120\pi}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+0.50\left(\frac{60}{120}\right)^4\right]\right.\\ &\quad \left.+(486.24)(2.871)-(244.3)(4.101)+(8.309)(4.63)\right\}\sin kx\\ &= \frac{L^2}{E}(86.76)\sin kx = D_{10}^S \end{aligned}\tag{35.136}$$

在 1 字符符合垂直挠度,0 与应用的恒载相匹配。

膜 Edge 应力 另一个不一致性是压力。$N_x = T_x = 2.76$ K/ft 到 $L/2$

$$\frac{N_x}{h} = \frac{2.76}{4/12} = 8.28 \text{ ksf} = f_{20}^S \quad \text{at } x = L/2$$

在哪里 f_{20}^S 附件 2 和 0 相应于压力, 并适用荷载分别。

梁 垂直 位移 至于梁, 有相似之处 D_{10}^B 和 f_{20}^b. 来自 EQ。35.125, 在哪里的重量是梁

$$w = \frac{15}{12}(3)(0.15)\text{ k/ft}^3 = 0.5625\text{ k/ft}$$

$$\begin{aligned}D_{10}^B &= -\frac{4}{\pi}w\frac{L^4}{Ebd^3}\frac{0.12319}{n^4}\sin kx\\ &= -\frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2L^2}{E\left(\frac{15}{12}\right)(3)^3}(0.123)\sin kx\\ &= -37.586\frac{L^2}{E}\sin kx\\ f_{20}^B &= \frac{4}{\pi}w\frac{L^2}{bd^2}\frac{0.60793}{n^2}\sin kx\\ &= \frac{4}{\pi}(0.5625)\frac{(120)^2}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)^2}(0.60793)\sin kx\\ &= 557.37\sin kx\end{aligned}$$

不兼容性

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

壳 移行 V_b 和 S_b 它也适用于壳。如上

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{L^4}{r^3 hE}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\frac{(120)^2}{(60)^3(4/12)}\left((486.24)V_b + (8.309)S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{97.28}_{D^s_{11}}V_b + \underbrace{1.662}_{D^s_{12}}S_L\right)\sin kx\end{aligned}$$

壳 应力

$$\begin{aligned}f^s &= \left(\frac{L}{r}\right)^2\frac{1}{h}\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\frac{120}{60}\right)^2\left(\frac{12}{4}\right)\left(52.21V_b + 2.374S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{626.52}_{f^s_{21}}V_b + \underbrace{28.488}_{f^s_{22}}S_b\right)\sin k_x\end{aligned}$$

梁 移行 (Eq. 35.123)

$$\begin{aligned}\Delta v^b &= \frac{L^4}{bd^3E}\left[(0.123)V_b - \frac{d}{L}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2(120)^3}{(15/12)(3)^3E}\left[(0.123V_b - \frac{3}{120}(0.1935)S_b\right]\sin kx \\ &= \frac{L^2}{E}\left(\underbrace{52.48}_{D^b_{11}}V_b\underbrace{-2.064}_{D^b_{12}}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

梁 应力

$$\begin{aligned}f^b_t &= \frac{L}{bd}\left(-0.608\frac{L}{d}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \frac{120}{\left(\frac{15}{12}\right)(3)}\left(-0.608\frac{120}{3}V_b + 1.273S_b\right)\sin kx \\ &= \left(\underbrace{-778.24}_{f^b_{21}}V_b + \underbrace{40.736}_{f^b_{22}}S_b\right)\sin kx\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

变形协调

$$\begin{cases} \dfrac{L^2}{E}\left[(\underbrace{97.28}_{D_{11}^{s}}+\underbrace{52.48}_{D_{11}^{b}})V_b+(\underbrace{1.662}_{D_{12}^{s}}-\underbrace{2.064}_{D_{12}^{b}})S_b+(\underbrace{86.76}_{D_{10}^{s}}-\underbrace{37.586}_{D_{10}^{b}})\right]=0 \\ (\underbrace{626.52}_{f_{21}^{s}}-\underbrace{778.24}_{f_{21}^{b}})V_b+(\underbrace{28.488}_{f_{22}^{s}}+\underbrace{40.736}_{f_{22}^{b}})S_b+(\underbrace{828.0}_{f_{20}^{s}}+\underbrace{557.37}_{f_{20}^{b}})=0 \end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix} 149.76 & -0.402 \\ -151.72 & 69.224 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -49.174 \\ -1,385.37 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} V_b \\ S_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -0.3839 \\ -20.85 \end{Bmatrix}$$

梁 最终值

从上面, 我们有 $N'_{\phi}=-5.006$ 和 $N'_{\phi x}=-4.463$

$$\begin{aligned} V_L &= -(-5.006)\sin 35^\circ = +2.871 \\ H_L &= -(-5.006)\cos 35^\circ = +4.101 \\ S_L &= -4.463 \end{aligned}$$

充电	多元化	角度 ϕ 从 Edge 测量
		继续…

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

充电	多元化	角度 ϕ 从 Edge 测量		
		35°	20°	0°
		35°	20°	0°
$N_x = T_x;\ x = L/2$ K / FT				
簡單 壳		+17.19	-53.52	+276.0
V_L	共效 C (科尔 1)	+12.92	-8.763	+52.21
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-19.84	+13.46	-80.17
S_B	共效 C (9)	+0.0566	-0.1818	+2.374
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	-4.72	+15.16	-198.0
总体		-7.37	-24.9	-2.17
$N_{\phi x} = S;\ x = 0$				
簡單 壳		0.00	-4.718	+0.167
V_B	共效 C (科尔 2)	0.0	+4.022	0.0
	$V_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	-3.088	0.0
S_B	共效 C (科尔 10)	0.0	-0.0966	+0.50
	$S_L \left(\frac{L}{r}\right)^2 C$	0.0	+4.028	-20.85
总体		0.0	-3.778	-20.68
$N_\phi = T_\phi;\ x = L/2$				
簡單 壳		-7.605	-7.821	0.0
V_B	共效 C (科尔 3)	+0.520	-2.425	+0.574
	$V_B C$	-0.199	+0.931	-0.220
S_B	共效 C (科尔 11)	-0.0528	-0.0204	0.0
	$S_B C$	+1.10	+0.425	0.0
总体		-6.70	-6.46	-0.22
$M_\phi;\ x = L/2$				
簡單 壳		-7.84	-5.737	0.0
V_B	共效 C(科尔 4)	-0.1106	-0.1266	0.0
	$V_B rC$	2.55	+2.92	0.0
S_B	共效 C (科尔 12)	-0.0027	-0.0015	0.0
	$S_B rC$	+3.38	+1.88	0.0
总体		-1.91	-0.937	0.0

审阅稿

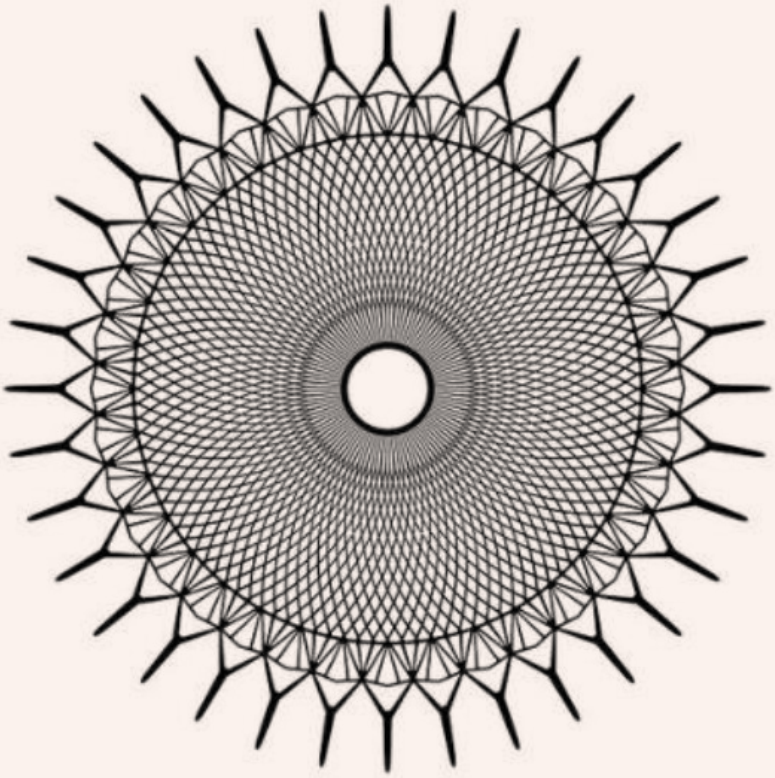
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

35.3.3 MATLAB® 代码和数值例子

177 一个初步 MATLAB® 圆形壳的设计代码在附件中提供 I.2.1.

178 圆柱壳的另一种数值解见附录 F. 它是由 (Portland Cement Association, 1954) 哪个解决方案是基于 (Whitney et al., 1952) 哪个解决方案与提供的解决方案相同 Billington, 1965.

179 更多信息可在本书中找到 Gibson, 1968.



Palazzetto dello Sport, Pier Luigi Nervi,1957 年, 罗马, 意大利。
该建筑体现了壳体结构的特点：薄而弯曲的钢筋混凝土壳通过膜作用高效承载，从而尽量减小弯曲应力。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

36 动态 I

摘要

本章节开发了结构动力学的基础, 需要一个介绍课程。從 运动方程 開始, 並以無情和蒸發的意義, 它在深度處理單度自由振動器: 自由振动。(被打破、被打倒), 和谐的兴奋和响应, 以及过渡反应步骤, 冲动和自愿负载 (杜哈梅尔综合). 该章节将讨论扩展到概念和解析级的多级自由系统, 强调模式形状、模型分解以及通过响应光谱对地震反应进行工程解释。整个过程中, 重点是物理理解和手导分析, 为毕业级别章节中提到的计算方法做好准备。

36.1 哲学基础 1137
36.2 什么时候 动力分析 被警告 1138
36.3 基本原则 1139
36.3.1 d'Alembert 的 原 理 和 动 态 平衡 1139
36.3.2 自由的单一学位奥斯基拉特 . 1139
36.3.3 固有频率和期限 1140
36.3.4 Damping 和 阻尼比 1141
36.4 自由振动 1142
36.4.1 无缝自由振动 1142
36.4.2 蒸发自由振动 1143
36.4.3 逻辑衰退 1143
36.5 强迫振动: 和谐的兴奋 1145
36.5.1 无情的和谐反应 1145
36.5.2 和谐的反应 1146
36.6 对仲裁负载的回应 1147
36.6.1 冲动反应与单位冲动 1147
36.6.2 杜哈梅尔综合 1149
36.6.3 四级分析与频率反应 1152
36.7 支座 兴奋和 地震 回复 1154
36.7.1 运动方程 为基础兴奋 1154
36.7.2 回复 光景 1155
36.8 多级自由制度 1157
36.8.1 动作方程式 1157
36.8.2 免费振动: 自然模式 1157
36.8.3 模型分析 1158
36.8.4 地震 回复中的代码参与 . . . 1159
36.9 连续系统 1161
36.9.1 波的轴振动 1161
36.9.2 转向的振动 Beams 1162
36.10 非线性动态 1163
36.10.1 非线性来源 1164
36.10.2 催眠和能源分散 1164
36.10.3 Ductility 和 Capacity Design 1166
36.11 实用考虑 1167
36.11.1 沉浸在现实结构中 1167
36.11.2 土-结构相互作用 1168
36.11.3 质量 Dampers 混凝土 1168
36.11.4 例题 36.13: 设计一台突发的 质量蒸汽机, 用于高楼 1168
36.11.5 基础隔震 1169
36.11.6 例题 36.14: 建造一座孤立的 医院建筑 1170
36.12 关闭评论 1171
36.12.1 实践者对反应谱方法的警告 . 1171
36.12.2 下一篇: 线性理论的限制 . . . 1171



这个章节是由克劳德通过约 60 次总写的。

36.1 哲学基础

[1] 在过去的章节中, 我们处理了结构, 就好像它们存在于一个无时的平衡 - 力量立即应用并持久, 移动发生没有动作, 压力出现没有历史。这种理想化, 虽然能够理解荷载和反应之间的基本关系, 但只是结构性行为的限制案例。现实世界是动态的: 负载随着时间的推移而异, 大

审阅稿

众拥有无情, 能量通过蒸发分散。结构动力学 它是结构如何应对时间变化的兴奋的研究, 形成了我们开发的静力分析与风下的结构实际行为之间的基本桥梁, 地震, 冲击, 机械振动和无数其他时间依赖现象。

2 从静态到动态的过渡不仅仅是时间依赖的术语添加到熟悉的方程式。这是一个基本的视野转变。在静态中, 我们问: "什么是 应力 的状态和在某个 荷载 中出现的变形?" 在动态中, 我们问: "结构如何随着时间的推移而发展, 以应对时间变化的兴奋?" 答案不僅取決於結構的堅固性 (如静态) 但也关于它的质量分布和能源分散特性。这些三种特性　密度、质量和蒸发　形成了结构动力学的基本三角形。

3 结构动力学的历史发展与古典机械本身的发展密切平行。纽顿的动作法则, 发表在 **原则** (1687), 提供基础。线条和膜的振动占据了 Euler,d'Alembert 和 Bernoullis 在十八世纪。雷利的 **声音理论** (1877) 总结了今天仍然使用的大部分数学框架。20 世纪引发了地震工程的挑战, 从 1906 年旧金山大地震开始, 以及反应频谱方法、数字时间集成和性能设计的发展。今天, 结构动力学是每个结构工程师的工具库中必不可少的组成部分。

36.2 什么时候 动力分析 被警告

4 工程师惊讶地经常争取明确回答的一个问题是令人误导的简单: 什么时候真正需要动力分析? 答案, 在其核心, 是简单的 - 一 动力分析 需要当应用加载频率与结构的 固有频率 的大小顺序相同时。当这两种频率相互接近时, 可以出现响应现象, 潜在增加结构反应远远超出了静力分析预测的东西, 有时是灾难性的。

5 许多实际后果跟随了这个原则。一个灵活的结构 - 一个低 固有频率 - 本质上更容易受到动态兴奋, 而不是紧张的结构, 因为它的 固有频率 更有可能落入常见的负载频率范围内, 无论是从风、机械、地震或人类活动。相比之下, 坚固的结构具有高 固有频率 , 并将对大多数负载进行几乎静态响应, 这意味着传统的 静力分析 完全适当。

6 更具体地说, 可以识别四种情况, 动力分析是保证的: 当结构受到快速变化的负载, 如爆炸或冲击; 当它支持旋转机, 其操作频率可能与结构模式相匹配; 当它必须抵抗地震兴奋, 因为地震刺激一个广泛的频率带; 当它是一个滑板或灵活的结构暴露于风时, 在那里相关术语落或浮动可能引发响应。

7 一个有用的规则是, 如果应用 荷载 的主流频率超过结构的基本 固有频率 的约三分之一, 那么动态效应将成为不可忽视的, 应该被评估。在这个边界之下, 一个具有适当的增强因素的静力分析通常足够。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

36.3 基本原则

36.3.1 d'Alembert 的原理和动态平衡

有关历史背景，请参见 §??

8 结构动力学的角石是 d'Alembert 的原则发表在他的 **动态?动态** (d'Alembert, 1743) 德 • 阿伦伯特承认, 纽顿的第二法则可以作为动态平衡的原则重复, 通过引入一个概念。**无情的力量**. 如果一个质量的身体 m 體驗一個 加速度 $\ddot{u}$ 我们可以考虑产品。$-m\ddot{u}$ 作为一个虚构的力量, 在身体上行动, 以便所有力量的总和 (包括这种无情的力量。) 等于零。这种显然简单的改革化将动态问题转化为平衡问题, 使静态的强大方法可应用。

9 对于质量的粒子 m 受外部力量的侵犯 $F(t)$ 牛顿的第二法则如下:

$$F(t) = m\ddot{u}(t)$$

哪里 $\ddot{u}(t) = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$ 是 加速度。重新安排:

$$F(t) - m\ddot{u}(t) = 0$$

这是德 • 阿伦伯特的原则: 应用力量 $F(t)$ 由无情的力量平衡。$F_I = -m\ddot{u}(t)$, 提供动态平衡在任何时刻。

10 阿伦伯特原则的深度实用性在于它的延伸到连续系统和虚功的公式。通过在同一脚踏上对待无情的力量, 我们可以应用虚功原理, 汉密尔顿的原则和拉格兰奇的方程式来产生的动作方程为自愿复杂结构。我们付出的代价是我们的 "平衡" 方程式随着时间的推移变成差异方程, 需要初始条件和整合才能获得答案。

36.3.2 自由的单一学位奥斯基拉特

11 自由的单级 (SDOF) 系统 对于结构动力学而言, 仅仅支持的梁对结构分析是什么: 通过它的基本概念被引入和理解的可行例子。考虑一个质量 m 被限制在一个方向上移动, 连接到一个固定支座通过一个坚固的春天 k 和一片威斯科蒸汽机与比例 c. 當 质量 轉移為 $u(t)$ 从其 平衡 位置, 并受外部力量的约束 $F(t)$ 三個內部力量出現:

- 和 **弹性恢复力量**: $F_S = ku(t)$ 与 位移 相比例, 向 平衡 方向。
- 和 **Damping 力量**: $F_D = c\dot{u}(t)$ 与 速度 和相反的动作比例。
- 和 **无情的力量**: $F_I = m\ddot{u}(t)$ 与 加速度 相比例。

12 理想化的质量 - 春天 - 蒸汽模型的图表显示在图中 36.1.

13 應用 d'Alembert 的原则 - 所有力量的總數為零 - 表明基本 运动方程:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \tag{36.1}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

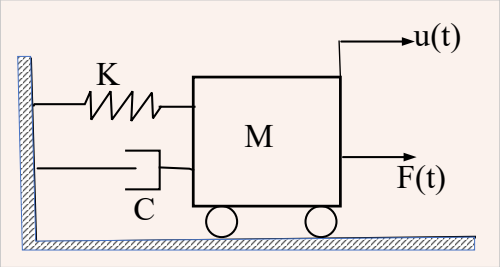


图 36.1: 理想化的单级自由奥斯卡

此二命令线性常微分方程控制 SDOF 系统对任何激动的反应 $F(t)$. 它的解决方案需要两个初始条件: 初始 位移 $u(0) = u_0$ 和初始 速度 $\dot{u}(0) = v_0$.

14 SDOF 方程式 (36.1) 它在外观上很简单, 但却包含了振动系统的基本物理。左侧的三个术语代表一个结构抵抗动态负载的三种基本机制: 无缝。(加速度 依赖),Damping (速度 依赖) 和坚定 (位移 依赖). 这些术语的相对大小以及它们与频率如何变化, 决定了动态反应的性质。

36.3.3 固有频率和期限

15 每个结构都有内在的动态特性, 仅依赖于其质量和坚固度, 而不是应用的加载。其中最基本的是 **固有频率**对于一个不受压缩的 SDOF 系统, 定义为:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(rad/s)}$$

这个循环频率 ω_n 代表不受冲击的系统在从 平衡 移动并释放时波动的速度。相应的自然时期和周期频率是:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(s)}$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(Hz)}$$

36.3.3.1 例题 36.1: 计算机 ω_n, T_n, 和 f_n 为 SDOF 系统

考虑一个地板 质量 $m = 2000$ kg 后面支持相同的坚固性 $k = 800$ kN/m.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800 \times 10^3}{2000}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ s}, \qquad f_n = \frac{1}{T_n} \approx 3.18 \text{ Hz}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

16 固有频率 可能是 结构动力学 中最重要的参数。它决定了响应发生的频率, 对冲动负载的反应以及激情与反应之间的阶段关系。物理上, 高 固有频率 的含义是高强度或低 质量 (或两者) 这些系统迅速, 并在适用的负载中进行小型转移。低 固有频率 意味着灵活性或大 质量; 这些系统反应缓慢, 可能经历重大转移。

17 对于初步设计, 工程师经常使用实验式公式来估计自然时期。对于建筑结构, 一个常见的接近是:

$$T_n \approx 0.1N \quad \text{(s)}$$

哪里 N 这就是故事的数量。这种粗糙的规则, 而原料, 捕获了基本的规模: 更高的建筑物更灵活, 有较长的时间。更精致的估计计算结构系统类型、材料和配置。

36.3.4 Damping 和 阻尼比

18 所有真正的结构在振动期间分散能量。此分類上一篇: 集體名稱 **跳舞**它源于多种机制: 材料内部的内振, 连接和支持时的振动, 空气动力阻力, 以及向周围媒体发射能量。虽然蒸汽的物理是复杂和多样化的, 但结构动力学通常采用一个简化模型: **黏性阻尼**, 在其中蒸汽力是相当于速度.

19 蒸汽率 c 有功率单位 速度 (N·s/m 在 SI 单位) 但它的绝对价值比它与关键值的比例更少。和 **关键蒸汽率** 被定义为:

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

与此准确的蒸汽率系统在最短的时间内返回平衡而不波动。和 **阻尼比** ζ 以实际的分裂为批判性的部分:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

20 阻尼比是无尺寸的, 通常对于结构来说很小: $\zeta \approx 0.01$ 到 0.05 (1% to 5% 关键的) 大多数建筑和桥梁。尽管其小尺寸, 但深度影响反应, 特别是在接近响应时, 它限制了另一种无限的增强。

21 蒸发行为的三种制度:

被打破 ($\zeta < 1$): 该系统随着宽度逐渐减少而旋转。几乎所有结构都是如此。

批判性蒸发 ($\zeta = 1$): 系统在最短的时间内返回 平衡 无波动。在某些机械设备中使用 (门关闭) 但在结构中很少。

过度蒸发 ($\zeta > 1$): 系统返回平衡没有振动, 但比关键更慢。结构不常见。

22 蒸汽 固有频率 用于蒸汽系统是:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

对于典型的结构蒸发比例 ($\zeta < 0.1$), $\omega_d \approx \omega_n$ 少于 1% 差异。区别仅在严重蒸发的系统中变得重要。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

初始条件作为国家变量

在动态中，初始移动和初始速度不仅仅是存储；它们定义了系统的初始状态。它们决定了整体能量如何分裂于动态和潜在形状之间。$t = 0$ 他们可以掌握早期反应，即使没有外部强迫。使用 解析解 时，整合的连续性根据这些初始条件确定；使用 数值 时间整合时，与初始状态向量 相同的信息输入。

模型笔记在 Damping 上

与硬度和质量不同，从初步原则中很少知道蒸发。黏性阻尼 主要被引入为一个有效的模型，以方便的数学形式捕获观察到的能量分散。因此，它的参数通常从实验、田野测量或工程判断中进行定义，并且应始终记住预期的对假设的蒸汽模型的反应敏感性。

36.4 自由振动

23 自由振动发生时，一个系统没有外部强迫，仅由初始条件驱动。这种看似简单的案例揭示了系统的基本动态性质，并构成了强迫振动理解的基础。

36.4.1 无缝自由振动

24 对于未经审判的案件 ($c = 0$)，运动方程 减少到：

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

由分配 m 引入 $\omega_n^2 = k/m$：

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

这就是简单的和谐运动的方程式。总体解决方案是：

$$u(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

哪里 A 和 B 是由初始条件定义的常态。与 $u(0) = u_0$ 和 $\dot{u}(0) = v_0$：

$$u(t) = u_0\cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

25 解决方案可以以宽度阶段形式相同地写成：

$$u(t) = \rho\cos(\omega_n t - \phi)$$

哪里是宽度 ρ 和阶段角度 ϕ 是：

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \tan\phi = \frac{v_0}{\omega_n u_0}$$

无缝系统永恒以稳定的宽度旋转 ρ 完成一个周期的时间 $T_n = 2\pi/\omega_n$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

36.4.2 蒸发自由振动

26 隨著 Damping 包含, 运动方程 變成:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

由分配 m 引入 ζ 和 ω_n:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$$

27 我们正在寻找形式的解决方案。$u(t) = Ce^{st}$. 替代的结果是特征方程式:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

根源:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

28 对于被压迫的案件 ($\zeta < 1$) 根是复杂的结合物:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

哪里 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 是蒸汽 固有频率。总体解决方案是:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

初步条件下 $u(0) = u_0$ 和 $\dot{u}(0) = v_0$:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

29 解决方案代表频率波动 ω_d 与宽度在速度上异常下降 $\zeta\omega_n$. 奥斯卡的转折点是 $\pm\rho e^{-\zeta\omega_n t}$, 在哪里 ρ 它是由初步条件决定的。系统最终会休息, 但对平衡的态度是可振的。

36.4.3 逻辑衰退

30 逻辑衰退 提供一个实用的方法, 以确定从测量的自由振动反应中 阻尼比。考慮兩次連續的反應頂峰, 發生時刻 t_1 和 $t_2 = t_1 + T_d$, 在哪里 $T_d = 2\pi/\omega_d$ 这是蒸发期。宽度的比例是:

$$\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+T_d)}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

逻辑衰退 δ 它被定义为这个比例的自然逻辑:

$$\delta = \ln\frac{u(t_1)}{u(t_2)} = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

31 对于小型冲浪 ($\zeta \ll 1$) 这就简化了:

$$\delta \approx 2\pi\zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \tag{36.2}$$

在实践中, 测量 n 循环提高准确性:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u_1}{u_{n+1}} \tag{36.3}$$

36.4.3.1 例题 36.2: 从 Logarithmic Decreement 中估计

假设一个轻微蒸发的系统从休息中释放出来, 峰值宽度被测量为 $u_1 = 10$ mm 和 $u_6 = 6$ mm 也就是说, 超越 $n = 5$ 循环。使用 EQ。(36.3):

$$\delta = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{10}{6}\right) = \frac{1}{5}(0.5108) = 0.1022$$

对于小小的冲浪,Eq。(36.2) 给了:

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.1022}{6.283} = 0.0163 \approx 1.6\%$$

标签: 自由振动 (从前附件中吸收)

32 自由的统治方程式 (无情) 一个结构的振动是

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

假设动作是免费的, 因为没有应用负载。

33 采取和谐的动作

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \sin \omega t$$

自然频率, ω, 以及相应的模式形状, $\boldsymbol{\phi}$, 可以从一般化 特征值 问题中确定

$$\omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}$$

或

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0$$

34 因为 $\boldsymbol{\phi}$ 它是不可侵犯的,

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$

或与 $\omega^2 = \lambda$

$$|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

什么是特征方程式; λ 它被称为方程式的特征值, 并且结构被说是以符合特定频率的方式响应。

35 对于计算目的, 如果我们先前方的每侧都以 $\mathbf{M}^{-1}$ 然后,

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\phi} = 0$$

36 值得注意的是, 为任何可能的硬体运动而获得零 特征值 不完全支持的结构。(§45.1.1). 取决于什么 质量矩阵 被采用, 获得略有不同的结果。一般情况下, 折叠的 质量 矩阵接近准确值 (一致的 质量矩阵) 从下面。

37 时尚的形状, $\boldsymbol{\phi}$, 是 "形状", 并给出相对大小的 DOF, 而不是绝对值 (因为它们是对一系列均匀方程的解决方案。). 自然频率和模式形状都提供了振动结构的基本描述。

36.5 强迫振动: 和谐的兴奋

38 当一个结构受到定期强度的约束时, 它最终在强迫频率上稳定状态转变。这种和谐的反应揭示了响应的基本现象, 并建立了基础以理解对更复杂的兴奋的反应。

36.5.1 无情的和谐反应

39 考慮不受同義勢力的無情系統 $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, 在哪里 ω 是兴奋频率 (不一定是同等的 ω_n):

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

完整的解决方案包括补充 (同性恋) 解决方案, 加上一个特定的解决方案。為 $\omega \neq \omega_n$ 具体的解决方案是:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t)$$

40 静态 位移 在强力下 F_0 会是 $u_{st} = F_0/k$. 动态与静态 位移 的比例是 **动态增强因素**:

$$D = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

哪里 $\beta = \omega/\omega_n$ 是频率比例。这种增强因素是理解动态反应的关键:

- 為 $\beta \ll 1$ (激情比 固有频率 慢得多): $D \approx 1$. 答案是 quasi-static; inertia 力量不可忽视。
- 為 $\beta \gg 1$ (激情比固有频率快得多): $D \approx 0$. 质量不能跟随快速强迫; 它仍然非常稳定。
- 為 $\beta \to 1$ (固有频率附近的景点): $|D| \to \infty$. 這是 **共识**.

41 反射现象　当兴奋频率等于固有频率时, 反应的无限增长　可能是结构动力学中最重要的概念。此分類上一篇: Tacoma Narrows Bridge (1940), 机械的故障支持, 以及无数其他工程灾难。每个动态设计都必须确保运营频率与自然频率相应分开。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36.5.2 和谐的反应

42 与蒸发, 在和谐强迫下的运动方程是:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

过渡者 (同性恋) 解决方案是异常消失的, 只留下稳定的国家特定解决方案:

$$u_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

在哪个阶段的角度 ϕ is:

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \tag{36.4}$$

43 蒸汽系统的动态增强因素是:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \tag{36.5}$$

Damping 限制响应增强到最终值:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{at} \quad \beta = \sqrt{1-2\zeta^2} \approx 1$$

为 $\zeta = 0.02$ (2% 跳舞), $D_{\max} = 25$ 为 $\zeta = 0.05$ (5% 跳舞), $D_{\max} = 10$. 即使是微小的蒸汽也显著减少了响应反应。

44 形象 36.2 描绘动态增强因素 D 作为频率比例的功能 $\beta = \omega/\omega_n$ 多种蒸发比例。

45 阶段角度 ϕ 它代表了强迫与反应之间的差距。低频率 ($\beta \ll 1$), $\phi \approx 0$ 答案与力量一致。以色列语音 ($\beta = 1$), $\phi = 90$? 答案减少了四分之一周期的力量。高频 ($\beta \gg 1$), $\phi \to 180$? 答案与力量相反。

36.5.2.1 例题 36.3: 和谐反应: 增强和阶段

让一个蒸发的 SDOF 系统有坚固性 $k = 200$ kN/m 和谐的力量与宽度充满兴奋 $F_0 = 10$ kN. 静态 位移 宽度是 $u_{st} = F_0/k = 10/200 = 0.05$ m.

以频率为比例 $\beta = \omega/\omega_n = 0.9$ 和 阻尼比 $\zeta = 0.05$. 来自 EQ。(36.5):

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0.81)^2 + (2\cdot 0.05\cdot 0.9)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.19^2 + 0.09^2}} \approx 4.76$$

因此, 固定状态 位移 宽度是 $u_0 = D\, u_{st} \approx 4.76(0.05) = 0.238$ m.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

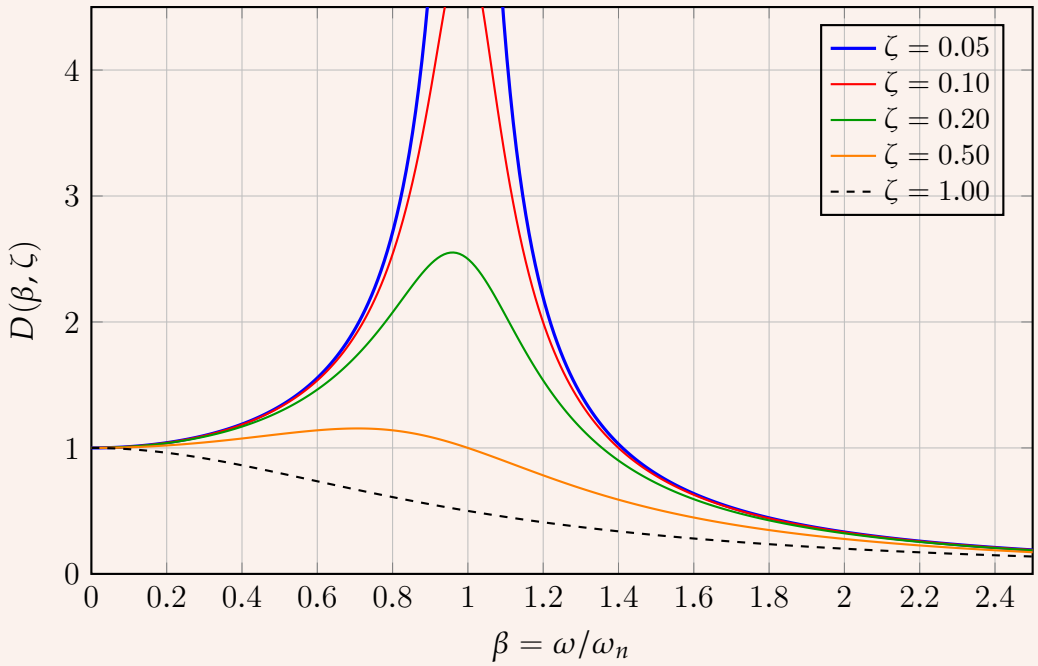


图 36.2: 概念动态强化曲线, 用于在和谐强制下蒸发的 SDOF 振动器

来自 EQ。(36.4):

$$\tan\phi = \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} = \frac{0.09}{0.19} = 0.474 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 25.4^\circ$$

36.6 对仲裁负载的回应

[46] 真正的动态负载　风味、地震地面运动、影响力　很少是和谐的。我们需要方法来确定对任意时间变势的反应。有两种补充方法:Duhamel integral。(时间域) Fourier 分析 (频率域名).

36.6.1 冲动反应与单位冲动

[47] 对理想化单位冲动的反应, 为建筑区块提供分析自愿的兴奋。一个冲动是一种非常强大的力量。很短的时间, 如产品 (力量 × 时间) 有 A 最终值称为 **冲动**. 迪拉克德拉特功能 $\delta(t-\tau)$ 以时间为单位的冲动。τ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t = 1, \qquad \delta(t-\tau) = 0 \text{ for } t \neq \tau$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[48] 当一个单元的冲动在系统上处于休息状态时，冲动时刻神经体在冲动后立即给出初始 速度:

$$m\Delta v = 1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{m}$$

随后的自由振动，与 $u(0) = 0$ 和 $\dot{u}(0) = 1/m$，是的，**单元冲动响应功能** $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t > 0 \tag{36.6}$$

对于未经提交的案件:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t), \quad t > 0 \tag{36.7}$$

36.6.1.1 例题 36.4: 蒸发 SDOF 系统的单元冲动反应

作为 SDOF 系统模拟的水库具有 质量 $m = 500$ kg，侧面硬度 $k = 200$ kN/m，和 阻尼比 $\zeta = 5\%$. 一条管爆炸，并提供一个可以理想化的冲动性喷气力量。作为一个单一的冲动 ($\hat{F} = 1$ N·s) 在 $t = 0$. 定义: (a) 动态特性; (b) 冲动反应功能; (c) 位移 在 $t = 0.10$ s; (d) 峰值 位移以及它发生的时间。

解决方案。

(a) 动态特性。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,000}{500}} = 20.00 \text{ rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.314 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20.00\sqrt{1-0.0025} = 19.975 \text{ rad/s}$$

(b) 冲动反应功能。

来自 EQ。(36.6)，与 $m = 500$ kg 和 $\omega_d = 19.975$ rad/s:

$$h(t) = \frac{1}{500 \times 19.975} e^{-0.05\times 20\, t} \sin(19.975\, t) = 1.0025 \times 10^{-4}\, e^{-t} \sin(19.975\, t) \quad \text{m/(N·s)}$$

一个单位的冲动 $\hat{F} = 1$ N·s 答案是简单 $u(t) = \hat{F}\, h(t) = h(t)$.

(c) 位移 在 $t = 0.10$ s.

$$u(0.10) = 1.0025 \times 10^{-4}\, e^{-1\times 0.10} \sin(19.975 \times 0.10)$$

$$= 1.0025 \times 10^{-4} \times 0.9048 \times \sin(1.9975 \text{ rad}) = 1.0025 \times 10^{-4} \times 0.9048 \times 0.9128 = 8.28 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$u(0.10) \approx 0.083 \text{ mm}$$

(d) 首位 位移。

顶峰的 $h(t)$ 發生時 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$ 哪个为微小，大约在 $\omega_d\, t_{\text{peak}} = \pi/2$:

$$t_{\text{peak}} = \frac{\pi/2}{\omega_d} = \frac{\pi/2}{19.975} = 0.0786 \text{ s}$$

$$h_{\text{peak}} = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t_{\text{peak}}} = 1.0025{\times}10^{-4}\, e^{-0.05\times 20\times 0.0786} = 1.0025{\times}10^{-4}{\times}e^{-0.0786} = 9.26 \times 10^{-5} \text{ m/(N·s)}$$

位移因单位冲动而最高 0.0926 mm/(N·s). 真正的冲动 $\hat{F}$，峰值是线性的: $u_{\text{peak}} = \hat{F}\, h_{\text{peak}}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36.6.2 杜哈梅尔综合

[49] 饰 Jean-Marie Duhamel (1797–1872) 發展了整體的轉型他的名字是用来解决热方程式, 但它也适用于结构动力学. 关键观点是, 一个自愿的力量 $F(t)$ 可以它被视为无限冲动的序列。时间的 τ, an 冲动 $F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 对系统的行动。对此的回应随后的冲动 t 是 $F(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. 超越所有此类贡献:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau)\,h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{36.8}$$

这就是杜哈梅尔的整体 (也称为综合转型). 它给出任何强迫的回应 $F(t)$, 假设系统从休息开始。如果初步条件不零, 必须添加自由振动反应。

[50] 杜哈梅尔综合理论上强大, 但往往很难分析的评估。简单的强迫功能 (步行, 拉姆, 直角脉冲) 关闭形式的解决方案存在。对于复杂或测量的兴奋, 数值积分 需要。

36.6.2.1 例题 36.5: 突然步 荷载: 动态增强因素的 2

相同的 SDOF 系统如例子 36.6.1.1 ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m) 受 A 的约束突然使用不断的力量 $F_0 = 10$ kN 在 $t = 0$ (一步 荷载) 保持不久。系统从休息开始。定义: (a) 使用 Duhamel integral 为未被吸收的答案案例; (b) 最大 位移 和动态增强因素; (c) 5 的效果% 跳在顶峰。

解决方案。

（a）阶跃荷载下的杜哈梅尔积分，无阻尼情况。

与 $F(\tau) = F_0 = \text{const}$ 和 $\zeta = 0$ ($\omega_d = \omega_n$), Eq. (36.8) 减少到:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin[\omega_n(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

评估整体与替代 $s = t - \tau$:

$$u(t) = \frac{F_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n s)\,\mathrm{d}s = \frac{F_0}{m\omega_n}\left[-\frac{\cos(\omega_n s)}{\omega_n}\right]_0^t = \frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[1-\cos(\omega_n t)\right]$$

因为 $m\omega_n^2 = k$ 这就简化了:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1-\cos(\omega_n t)\right] \tag{36.9}$$

(b) 最大 位移 和动态增强因素。

静态 位移 下 F_0 是 $u_{\text{st}} = F_0/k$. 数字化:

$$u_{\text{st}} = \frac{10\,000}{200\,000} = 0.050\ \text{m} = 50\ \text{mm}$$

来自 EQ。(36.9), $u(t)$ 最多是当 $\cos(\omega_n t) = -1$ 是的。在 $t = \pi/\omega_n = T_n/2$:

$$u_{\max} = \frac{F_0}{k}\times 2 = 2\,u_{\text{st}} = 2\times 50 = 100\ \text{mm}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{20} = 0.157 \text{ s} = \frac{T_n}{2}$$

动态增强因素是 2。这是基本的荷载在一个不受压缩的系统上的一步结果: 突然应用的力量生产 **二次** 静态 位移, 无论多么慢或快速使用 荷载 只要它立即应用。

(c) 5 的效应% 蒸发。
以 Damping 的关闭形式对步骤 荷载 的回应是:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right]$$

评估在 $t = 0.157$ s (靠近无奈的山峰):

$$u(0.157) \approx 50\left[1 - e^{-0.05\times 20\times 0.157}\left(\cos(19.975\times 0.157) + 0.0501\sin(19.975\times 0.157)\right)\right] \approx 92.7 \text{ mm}$$

Damping 将第一周峰从 100 下降 到 93mm 微小: 一个谦虚的 7% 减少为 $\zeta = 5\%$. 随后的周期, 波动衰退和反应调整到静态值 $u_{\text{st}} = 50$ mm.

36.6.2.2 例题 36.6: 直角脉冲 荷载 和冲击频谱

SDOF 系统 ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m, $\omega_n = 20$ rad/s, $T_n = 0.314$ s) 被主张直角脉搏:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 = 10 \text{ kN} & 0 \le t \le t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$

对于一个不受压缩的系统, 确定: (a) 关闭形式回应期间和脉冲后; (b) 最大动态 位移 为 3 脉冲长度 $t_d/T_n = 0.25,\ 0.50,\ 1.00$; (c) 工程师以冲动的意义解释 VS。stat 静态充电。

解决方案。
(a) 关闭形式的回应。
在脉冲中 ($0 \le t \le t_d$): Step-荷载 结果以 Q。(36.9) 直接适用:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[1 - \cos(\omega_n t)] \tag{36.10}$$

脉冲之后 ($t > t_d$)• 系统可以自由由国家的振动 $t = t_d$. 结果, 由二步答案 (一个开始于 $t = 0$ 一个相反的标志开始于 $t = t_d$), is:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}[\cos\omega_n(t - t_d) - \cos\omega_n t] \tag{36.11}$$

脉冲后自由振动的宽度是:

$$A = \frac{F_0}{k}\,2\left|\sin\frac{\omega_n t_d}{2}\right| = 2\,u_{\text{st}}\left|\sin\frac{\pi t_d}{T_n}\right|$$

(b) 最大 位移 为 3 脉冲时间。
动态增强因素 $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$ 依赖只有比例 t_d/T_n:

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

t_d/T_n	t_d (s)	$A/u_{\text{st}} = 2\lvert\sin(\pi t_d/T_n)\rvert$	$D = u_{\max}/u_{\text{st}}$
0.25	0.0785	$2\lvert\sin(\pi/4)\rvert = \sqrt{2} = 1.414$	1.41
0.50	0.1571	$2\lvert\sin(\pi/2)\rvert = 2.000$	2.00
1.00	0.3142	$2\lvert\sin(\pi)\rvert = 0.000$	1.00

为 $t_d/T_n = 0.25$: $u_{\max} = 1.414 \times 50 = 70.7$ mm.
为 $t_d/T_n = 0.50$: $u_{\max} = 2.000 \times 50 = 100$ mm (等于步骤荷载结果 —脉冲足够长才能达到第一峰在结束之前).
为 $t_d/T_n = 1.00$: $u_{\max} = 1.000 \times 50 = 50$ mm (脉冲后宽度为零 - 系统正确返回其初始状态在 $t = T_n$ 没有剩余的自由振动。).

(c) 工程解释。
比例 t_d/T_n 控制答案的性质:

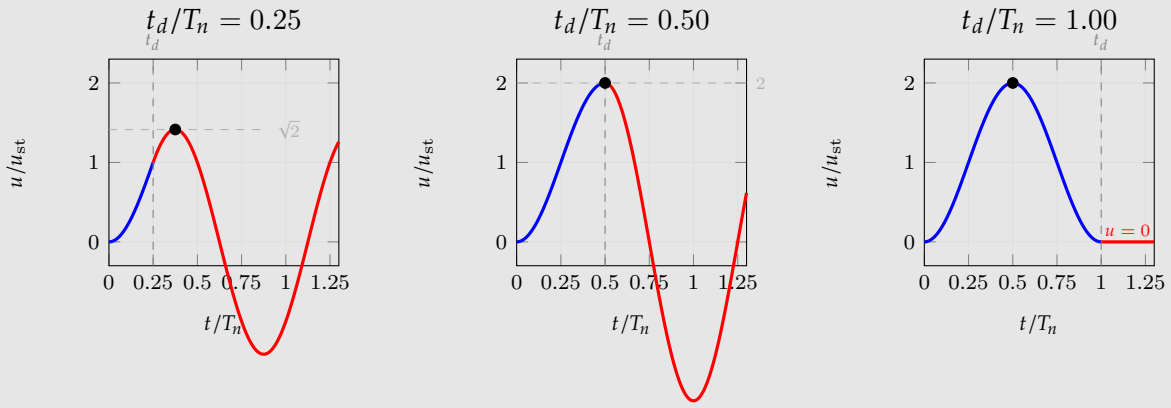
冲动制度 ($t_d/T_n \ll 1$): 脉搏很短结构在充电期间几乎没有移动; 冲动 $\hat{F} = F_0\, t_d$ 决定答案。最多位移 是 $u_{\max} \approx \hat{F}/(m\omega_n) = F_0\, t_d/(m\omega_n)$, which grows linearly with 饰D.

几乎静态制度 ($t_d/T_n \gg 1$): 脉搏持久许多时期; 结构几乎静态地响应 $D \to 1$ 平均 (0 和 2 之间的波动, 而荷载 即将到来, 然后自由).

反思制度 ($t_d/T_n \approx 0.5$): 脉搏长度相当于自然期的一半, 产生最高的可能的增强 $D = 2$, 与步骤荷载结果相同。

完整的故事 D vs. t_d/T_n 的 **震惊光谱** 或 **反应谱 为冲动负载** —是时间域的和谐相似之处增强曲线, 用于爆炸、冲击和设备设计。

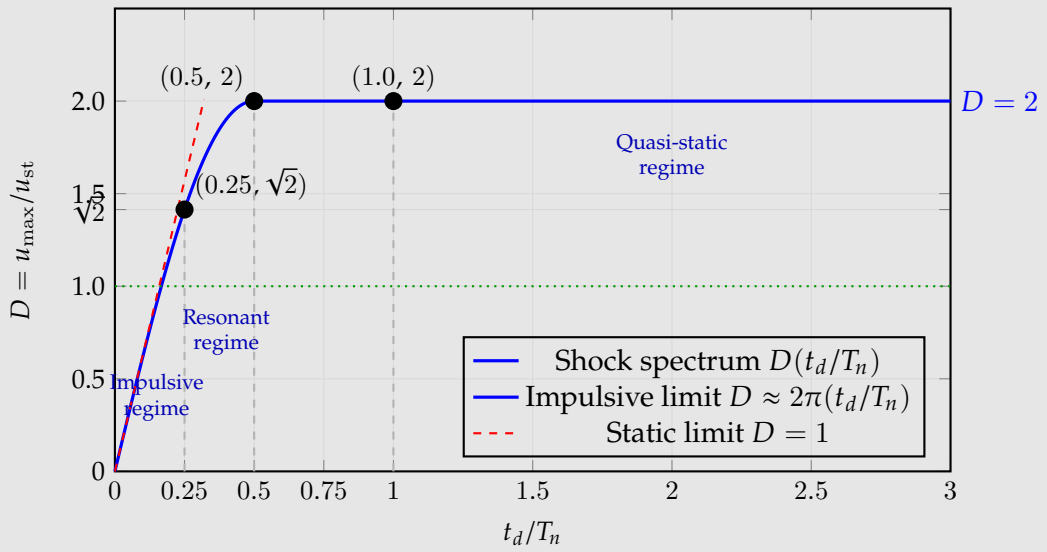
直角脉冲反应。



正常化 位移 时间历史 u/u_{st} 三脉冲长度 (蓝色 = 脉冲时, 红色 = 在脉冲后).

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



冲击频谱 $D = u_{\max}/u_{\text{st}}$ 如 A 函数的 t_d/T_n. 三个圆圈相匹配例子中计算的案例。红线是冲动的。同情 $D \approx 2\pi(t_d/T_n)$ 绿色线是静态参考 $D = 1$.

36.6.3 四级分析与频率反应

51 一个替代方法使用 Fourier 分析来解散强制性在和谐组件中, 确定对每个组件的反应, 使用和谐的转移功能, 并超越。定期强迫与期限 T_p:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

哪里 $\omega_0 = 2\pi/T_p$ 这是基本频率。答案是:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[a_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega_0 t - \phi_n)\right]/k$$

哪里 D_n 和 ϕ_n 是增强因素和阶段频率 $n\omega_0$.

52 对于非定期强迫,Fourier 系列变成了 Fourie。转型:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

和 **复杂的频率响应功能** $H(\omega)$ 关系输入到频率域的输出:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{(1-\beta^2) + i(2\zeta\beta)} \tag{36.12}$$

反应谱 是 $U(\omega) = H(\omega)F(\omega)$, 以及时间域反应是通过逆转 Fourier 转换获得的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36.6.3.1 例题 36.7: 频率回应定期机器两個和諧的力量

一台机器 基础 ($m = 500$ kg, $k = 200$ kN/m, $\zeta = 5\%$, $\omega_n = 20$ rad/s) 被旋转感动机器产生一个定期的力量, 基本频率 $f_0 = 2$ Hz ($\omega_0 = 4\pi$ rad/s, $T_p = 0.5$ s):

$$F(t) = F_1 \sin(\omega_0 t) + F_2 \sin(2\omega_0 t) = 2\,000 \sin(4\pi t) + 800 \sin(8\pi t) \quad [\text{N}]$$

定义: (a) 每一个和谐的频率比例; (b) 其它每个模式反应的稳定状态宽度使用 $H(\omega)$; (c) 总体稳定的国家反应。

解决方案。

(a) 频率比例。

$$\beta_1 = \frac{\omega_0}{\omega_n} = \frac{4\pi}{20} = \frac{12.566}{20} = 0.628 \qquad \beta_2 = \frac{2\omega_0}{\omega_n} = \frac{8\pi}{20} = \frac{25.133}{20} = 1.257$$

第一個調和 ($\beta_1 = 0.628$) 是 低于响应二、第二和谐 ($\beta_2 = 1.257$) 它超越了响应。

(b) 常态状态宽度。

每個調和的静态 位移 寬度為 $u_{\text{st},n} = F_n/k$. 动态增强和阶段跟踪来自 EQ。(36.5) 和 EQ。(36.4):

$$D(\beta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \qquad \phi = \arctan \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

第一個調和 ($F_1 = 2\,000$ N, $\beta_1 = 0.628$):

$$u_{\text{st},1} = \frac{2\,000}{200\,000} = 0.010 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-0.628^2)^2 + (2\times 0.05 \times 0.628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(0.606)^2 + (0.0628)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3672 + 0.00394}} = \frac{1}{0.608} = 1.644$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{0.0628}{0.606} = \arctan(0.1036) = 5.9^\circ$$

$$u_1(t) = D_1\, u_{\text{st},1} \sin(\omega_0 t - \phi_1) = 1.644 \times 10 \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ) = 16.4 \text{ mm} \times \sin(4\pi t - 5.9^\circ)$$

第二个和谐 ($F_2 = 800$ N, $\beta_2 = 1.257$):

$$u_{\text{st},2} = \frac{800}{200\,000} = 0.004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-1.257^2)^2 + (2\times 0.05 \times 1.257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(-0.580)^2 + (0.1257)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.3364 + 0.0158}} = \frac{1}{0.593} = 1.686$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{0.1257}{1-1.580} = \arctan \frac{0.1257}{-0.580} = 180^\circ - 12.2^\circ = 167.8^\circ$$

(阶段超越 90° 因为 $\beta_2 > 1$ 答案: 答案延迟强度超过四分之一的周期, 超越响应。)

$$u_2(t) = 1.686 \times 4 \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ) = 6.74 \text{ mm} \times \sin(8\pi t - 167.8^\circ)$$

(c) 总体稳定状态反应。

超越的:

$$u(t) = 16.4 \sin(4\pi t - 5.9^\circ) + 6.74 \sin(8\pi t - 167.8^\circ) \quad [\text{mm}]$$

这个合并信号的峰值可以由总数限制宽度: $u_{\max} \le 16.4 + 6.74 = 23.1$ mm. 在实践中, 两种和谐的顶峰并不相匹配。实际最高值略低; 数值 的评估 $u(t)$ 超越一段时间给了 $u_{\max} \approx 18.5$ mm.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

评论。 两个观点值得强调。

1. 尽管第二个和谐只有四十% 第一和谐强度范围 (800/2000 = 0.4) 它有助于 6.74/16.4 = 41% 关于 The 位移 amplitude 由于其频率比例 $\beta_2 = 1.257$ 更接近响应。小型高频强力组件附近反射能占主导地位。
2. 转变阶段的 167.8° 二、和谐的意思是**反对** 第一個調和在頂部附近, 這是為什麼真正的最大 (18.5 mm) 比宽度的总额要少得多 (23.1 mm). 频率域方法使这些阶段关系以一种时间域直觉不行的方式明确和可追踪。

36.7 支座 兴奋和 地震 回复

53 在许多实用情况下 最重要的是地震地面运动 兴奋不是应用的力量, 而是支座的规定的运动。这需要在相对迁移方面改革动作方程式。

36.7.1 运动方程 为基础兴奋

54 让 $u_g(t)$ 标记地面的位移 (支座) 和 $u_t(t)$ 总体的 (绝对) 群体的转移。相對的 位移 是:

$$u(t) = u_t(t) - u_g(t)$$

春季和蒸汽力量依赖于相对的位移和速度:

$$F_S = ku, \qquad F_D = c\dot{u}$$

然而, 牛顿的法律涉及绝对加速度:

$$m\ddot{u}_t = -F_S - F_D = -ku - c\dot{u}$$

替代 $\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g$:

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$$

重新安排:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

55 这是对地震反应分析的基本方程式。相對的 位移 u 由一 **有效的地震力量** $F_{\text{eff}} = -m\ddot{u}_g(t)$ 它是重量和地面加速的产物。结构如同固定在其基础上, 并受到这种有效的力量。

56 对于计算无动力力量和地板加速所需的质量的绝对加速是:

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g = -\frac{c}{m}\dot{u} - \frac{k}{m}u = -2\zeta\omega_n\dot{u} - \omega_n^2 u$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36.7.2 回复 光景

57 反应谱的 该概念主要由毛里斯 • 比奥特和乔治 • 休斯纳在 1930 年代和 1940 年代开发, 通过提供一个实用的方式来描述地面运动, 并确定最大的结构反应而没有进行时间历史分析, 革命了地震工程。

58 反应谱 是 SDOF 振动器系列的最大反应, 所有具有相同的 阻尼比 但不同自然期限, 都受特定地面运动的影响。对于每个振动器, 运动方程是解决的, 答复量的最大绝对值 (移动、速度或加速) 被记录了。

59 一个典型的 (平滑) 反应谱 格式在图中绘制 36.3, 显示加速响应频谱 S_a 作为一个自然时期的功能 T_n 各式各样的蒸汽比例。三个区域　短期、中期和长期　相应于加速度控制、速度控制和位移控制的行为。

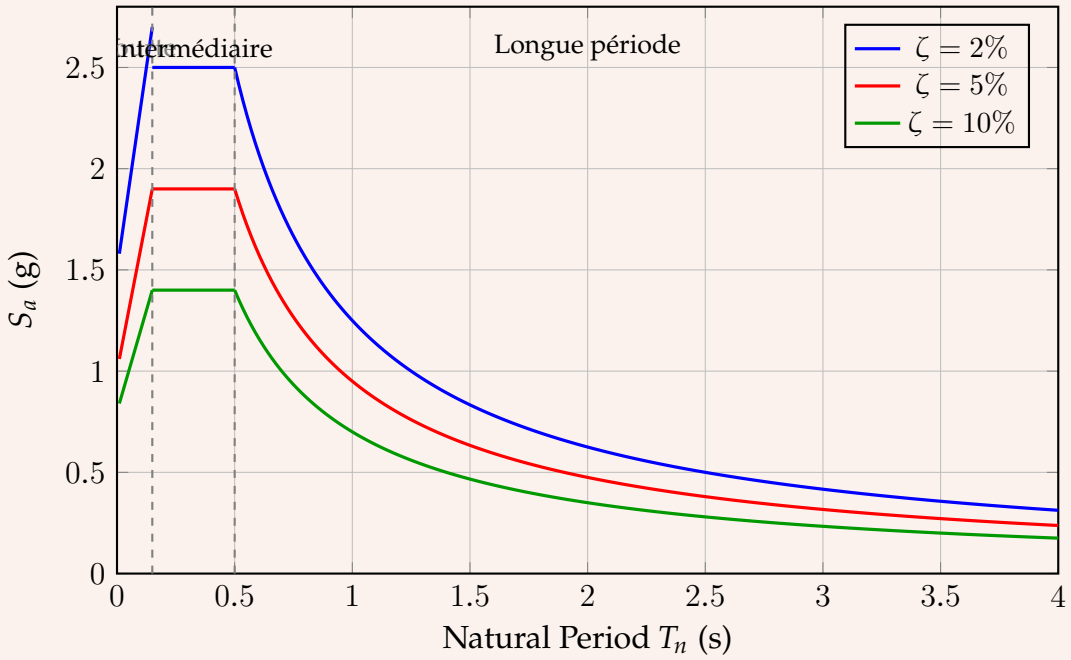


图 36.3: 加速度 反应谱 S_a 作为一个自然时期的功能 T_n 各式各样的蒸汽比例。

60 和 **光谱 位移** S_d, **光谱 速度** S_v, 和 **光谱 加速度** S_a 被定义为:

$$S_d(T_n,\zeta) = \max_t |u(t)| S_v(T_n,\zeta) \qquad = \max_t |\dot{u}(t)| S_a(T_n,\zeta) = \max_t |\ddot{u}_t(t)| \tag{36.13}$$

哪里 $u(t)$ 是对指定的地面运动的相对 位移 反应。

61 对于轻微蒸发的系统, 以下接近关系持有:

$$S_v \approx \omega_n S_d, \qquad S_a \approx \omega_n S_v \approx \omega_n^2 S_d$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这些是 **幻觉光谱** 关系。原名: 加速度 S_a 它特别有用, 因为最大基板是简单的:

$$V_{\max} = mS_a = \frac{W}{g}S_a \tag{36.14}$$

哪里 W 是重量和 g 重力 加速度。

36.7.2.1 例题 36.8: 使用响应频谱的单层框架的地震设计

单型 钢筋混凝土 框架 有以下特性:

- 地震重量 (质量 次 g): $W = 4\,500$ kN
- 故事的侧面密度: $k = 180\,000$ kN/m
- 黏性阻尼 比例: $\zeta = 5\%$

設計 加速度 反应谱 (5% 跳舞) 被定义为

$$S_a(T_n) = \begin{cases} 0.40g\left(1 + \dfrac{T_n}{0.10}\right) & 0 \le T_n < 0.10\ \text{s} \\ 0.80g & 0.10\ \text{s} \le T_n \le 0.60\ \text{s} \\ \dfrac{0.48g}{T_n} & T_n > 0.60\ \text{s} \end{cases}$$

定义: (a) 基本期限; (b) 光谱 加速度; (c) 最大基板; (d) 最大侧 位移。

解决方案。

(a) 自然时期。质量 是 $m = W/g = 4\,500/9.81 = 458.7$ t.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{180\,000}{458.7}} = 19.81\ \text{rad/s} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.81} = 0.317\ \text{s}$$

(b) 光谱 加速度。因为 $0.10\ \text{s} \le T_n = 0.317\ \text{s} \le 0.60\ \text{s}$, 期落在平板加速度板:

$$S_a = 0.80g = 0.80 \times 9.81 = 7.85\ \text{m/s}^2$$

(c) 最大基板。来自 EQ。(36.14):

$$V_{\max} = m\,S_a = 458.7 \times 7.85 = 3{,}601\ \text{kN} \quad \text{or equivalently} \quad V_{\max} = W\frac{S_a}{g} = 4{,}500 \times 0.80 = 3{,}600\ \text{kN}$$

(d) 最多侧 位移。使用 pseudo-spectral 关系 $S_d \approx S_a/\omega_n^2$:

$$S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{7.85}{(19.81)^2} = 0.020\ \text{m} = 20\ \text{mm}$$

这可以通过 $u_{\max} = V_{\max}/k = 3{,}600/180{,}000 = 0.020$ m✓.

评论。 计算是完全算法, 一旦自然期已知。反应谱编码了地面运动的效果; 结构工程师只需要阅读 S_a 在 T_n 以 质量 加倍。侧 位移 估计有用于在代码中检查故事流动限制 (典型 $u/h \le 1/500$ 到 $1/200$ 根据性能目标). 这里, 为一个故事的高度 $h = 4$ m 流动比例是 $20/4000 = 1/200$ 它坐在典型的代码限制的自由极端。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

62 设计响应光谱, 如建筑代码所规定的, 是来自多个记录地震的光谱平滑封面, 规模以代表目标危险水平。这些代码光谱构成了常规地震设计中使用的相同侧面力量程序的基础。

提前参考。这里开发的定义量为后期性能基础框架提供了动态基础; 参见章节 72 关于概率的解释

36.8 多级自由制度

63 真正的结构分布了质量和坚固性, 导致无限数量的自由度. 对于分析, 我们将分辨到具有最终数量的 DOF 系统。结果的运动方程式是相结合的普通差异方程, 可以以矩阵形式表达。

36.8.1 动作方程式

64 为一 NDOF 系统, 运动方程式是:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{36.15}$$

在哪里:

- $\mathbf{u}(t)$ 是的, $N \times 1$ 位移 向量
- $\mathbf{M}$ 是的, $N \times N$ 质量矩阵 (相同, 积极定义)
- $\mathbf{C}$ 是的, $N \times N$ 阻尼矩阵 (相同性, 积极半定义)
- $\mathbf{K}$ 是的, $N \times N$ 刚度矩阵 (相同性, 积极半定义)
- $\mathbf{F}(t)$ 是的, $N \times 1$ 强度 向量

65 质量矩阵的 $\mathbf{M}$ 可能是 **被打破** (diagonal, 与集成在节点的质量) 或 **一致** (完整的 矩阵 由相同的形状功能所产生的, 用于硬度). 刚度矩阵的 $\mathbf{K}$ 与 静力分析 相同, 由 单元 硬度矩阵组成。阻尼矩阵的 $\mathbf{C}$ 最有问题的　它的物理基础是不确定的, 它往往是数学构建而不是从第一原则。

36.8.2 免费振动: 自然模式

66 设置 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ 我们正在寻找形式的解决方案。$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

这是一般化的特征值问题。非争议的解决方案需要:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

这个收益 N 自我价值 $\omega_1^2 \le \omega_2^2 \le \cdots \le \omega_N^2$ 相应的自助者 $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\phi}_N$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

67 自我值提供自然频率: $\omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$. 主持人, 称之为 **模式形状** 或 **自然模式**, 描述每个频率的变形模式。模式形状具有正直特性:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

这些正直性条件是解开运动方程的关键。

68 模式形状的概念简单的描述在图中显示 36.4 展示 $\phi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ 為 $n = 1, 2, 3$. 时尚 1 没有内部节点; 模式 2 在中间有一个节点; 模式 3 有两个节点 $L/3$ 和 $2L/3$. 自然频率满足 $\omega_n \propto n^2$.

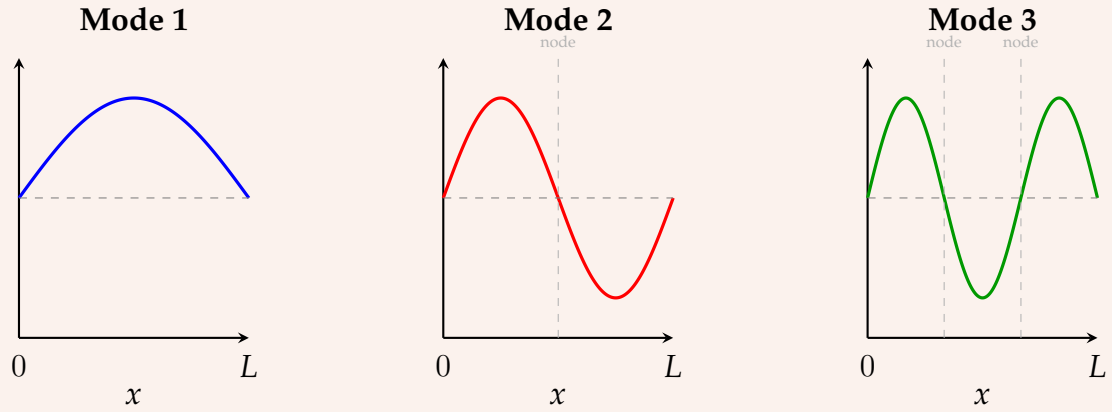


图 36.4: 第一個三種模式形式的簡單支持 梁

36.8.3 模型分析

69 模式形状为位移空间构成基础; 这种方法被称为 **模型分析**. 任何 位移 可以表达为:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t)$$

哪里 $q_n(t)$ 是的, **模型协调** (通用协调) 和 $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \, \boldsymbol{\phi}_2 \, \cdots \, \boldsymbol{\phi}_N]$ 是 矩阵 的模型。

70 取代到 运动方程 并以 $\boldsymbol{\Phi}^T$:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}$$

根據正義, $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}$ 是 diagonal。如果 $\mathbf{C}$ 有特殊的形状 (瑞利阻尼):

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$$

然后 $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}$ 它是直径的, 等式分裂到 N 独立的 SDOF 方程式:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = F_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 $M_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n$ 是的, **模型 质量**, $K_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n$ 是的, **模型硬度**, 和 $F_n(t) = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{F}(t)$ 是的, **模型力量**.

71 每个模型方程式都是一个 SDOF 方程, 可以通过任何 SDOF 方法解决。物理反應以超越的方式重建:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_n q_n(t)$$

36.8.4 地震 回复中的代码参与

72 地震的兴奋, $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t)$, 在哪里 $\mathbf{r}$ 是影响 向量 (通常, 一个向量的水平地面运动影响所有 DOF 均等。). 模型力量变成:

$$F_n(t) = -\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) = -L_n \ddot{u}_g(t)$$

哪里 $L_n = \boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r}$ 是的, **模式参与因素**.

73 和 **有效的模型 质量** is:

$$M_n^* = \frac{L_n^2}{M_n} = \frac{(\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}\mathbf{r})^2}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n}$$

有效的 modal 重量总值相当于 质量 的总值:

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \mathbf{r}^T \mathbf{M}\mathbf{r}$$

此属性允许工程师确定需要包含多少模式来捕获一个特定的分裂 (常见 90%) 全力地震反应。

36.8.4.1 例题 36.9: 3DOF 板建筑在地震负载下的模块分析

一个三层的叶子建筑有浮动的地板大小和统一的故事硬度:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m = 100\ \text{t}, \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k = 40\,000\ \text{kN/m}$$

硬度和质量矩阵 (仅侧 DOF, 轴形变异被忽视) 是:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{kN/m}, \qquad \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{t}$$

使用 反应谱 的例子 36.7.2.1 (5% 跳舞) 确定: (a) 自然频率和模式形式; (b) 模式参与因素; (c) 顶级模型基板和其 SRSS 组合。

解决方案。

(a) 自然频率和模式形状。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

特征值问题 $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}$ 与 $\lambda=m\omega^2/k$ 减少到:

$$\det\begin{bmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{bmatrix}=0$$

扩展: $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda-1=0$ 与根:

$$\lambda_1=0.198,\quad \lambda_2=1.555,\quad \lambda_3=3.247$$

循环频率是 $\omega_n=\sqrt{\lambda_n k/m}=\sqrt{\lambda_n\times 400}$:

时尚	λ_n	ω_n (雷 / S)	T_n (s)
1	0.198	8.90	0.706
2	1.555	24.93	0.252
3	3.247	36.01	0.174

解决模式形状 (质量正常化, 以便 $\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n=m$) 给了:

$$\boldsymbol{\phi}_1=\begin{Bmatrix}0.328\\0.591\\0.737\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\phi}_2=\begin{Bmatrix}0.737\\0.328\\-0.591\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\phi}_3=\begin{Bmatrix}0.591\\-0.737\\0.328\end{Bmatrix}$$

(输入正常化, 以便大组件等于大约 1 次。$1/\sqrt{m}$ 值是无尺寸的).

(b) 模式参与因素。
对于水平地面运动, 向量的影响是 $\mathbf{r}=\{1,1,1\}^T$. 模式参与因素 n is:

$$\Gamma_n=\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\,\mathbf{r}}{\boldsymbol{\phi}_n^T\mathbf{M}\,\boldsymbol{\phi}_n}$$

$$\Gamma_1=\frac{m(0.328+0.591+0.737)}{m(0.328^2+0.591^2+0.737^2)}=\frac{1.656}{0.974}=1.700$$

$$\Gamma_2=\frac{m(0.737+0.328-0.591)}{m(0.737^2+0.328^2+0.591^2)}=\frac{0.474}{0.974}=0.487$$

$$\Gamma_3=\frac{m(0.591-0.737+0.328)}{m(0.591^2+0.737^2+0.328^2)}=\frac{0.182}{0.974}=0.187$$

有效的模型大小 $M_n^*=\Gamma_n^2 M_n=\Gamma_n^2 m\times$ (normalization factor) 以 质量 的分数表达 $3m$ 大约是 87%, 11%, 和 2% 相应的 1、2 和 3 模式。模式 1 单身捕捉 87% 地震的质量; 包括模式 2 将总值提升到 98%超越 90% 通常是由代码所要求的限制。

(c) 顶级模型基板和 SRSS 组合。
对于每个模式, 加速度的光谱从设计光谱中阅读到 T_n:

时尚	T_n (s)	S_a	首页 > 基板 > Peak modal base shear V_n^*	Γ_n
1	0.706	$0.48g/0.706=0.680g$	$\Gamma_1\,\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{M}\mathbf{r}\,S_{a,1}$	1.700
2	0.252	$0.80g$ (板块)	—	0.487
3	0.174	$0.80g$ (板块)	—	0.187

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

顶级基板在模式下 n 是 $V_n = M_n^* S_{a,n}$. 与 $M_n^* \approx \{261, 33, 5\}$ t 和 $S_{a,n} = \{0.680g, 0.80g, 0.80g\}$:

$$V_1 = 261 \times 0.680 \times 9.81 = 1\,741 \text{ kN}, \quad V_2 = 33 \times 0.80 \times 9.81 = 259 \text{ kN}, \quad V_3 = 5 \times 0.80 \times 9.81 = 39 \text{ kN}$$

既然模型顶峰不同时发生, 它们是用 **四方根的平方数** (SRSS) 规则:

$$V_{\text{SRSS}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{1741^2 + 259^2 + 39^2} = \sqrt{3{,}031{,}081 + 67{,}081 + 1{,}521} \approx 1{,}761 \text{ kN}$$

评论。 值得一提的是几个观点。

1. 时尚 1 完全主宰: $V_1/V_{\text{SRSS}} \approx 99\%$. 这是常规低楼建筑的典型, 基本模式占据了大部分地震能量。
2. SRSS 组合只会产生极大的结果。V_1 单独, 确认这里更高的模式是不可忽视的。
3. 地面力量可以从 $\mathbf{f}_n = \Gamma_n \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n S_{a,n}$ 对于每个模式, 随后由 SRSS 结合 - 一个程序直接嵌入到现代代码相当的侧面力量方法。
4. 对于不规则的结构、更高的建筑或具有近缺效的场所, 更高的模式变得更加重要。(CQC) 规则, 负责 modal 相互关系, 应取代 SRSS。

36.9 连续系统

74 配有分布的质量和坚固性 - 板块, 盘子, 支柱 - 由部分差异方程式统治。雖然数值方法最終會分辨這些系統, 但理解解析解的理解也會提供模式形狀和自然頻率的洞察力。

36.9.1 波的轴振动

75 考虑一个单一的长度栏 L, 横截面积 A 模块 E, 和 密度 ρ. 位移 轴 $u(x,t)$ 满足:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或, 定义波速 $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{36.16}$$

这就是一个维度波方程式。

76 为了自由振动, 我们正在寻找形状的解决方案。$u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$. 替代给了:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

与解决方案 $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$. 限制条件决定允许的频率和模式形式。对于两端固定的条纹:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36.9.2 转向的振动 Beams

77 Euler-Bernoulli 梁 对转振的方程式是:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

哪里 $v(x,t)$ 是转换 位移, EI 是灵活的硬度, 以及 $q(x,t)$ 是 分布荷载。

78 自由振动 ($q = 0$) 寻找 $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

总体解决方案是:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

兩端的邊界條件為四個連續提供四個方程式, 造成特征值問題。β.

79 只需支持的 梁 的长度 L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

自然频率增加如 n^2, 快速分离较高的模式和较低的模式。基本频率 ($n = 1$) is:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

80 其他边界条件 (固定、固定、cantilever 等。) 超越频率方程应以数为准。频率指数表在标准参考中可用。

36.9.2.1 例题 36.10: 固有频率 的 钢材 脚桥和步行者反射检查

一个简单支持的钢材脚桥有以下特性:

- 西班牙: $L = 20\ \mathrm{m}$
- 钢材 I 部分: $I = 6.0\times10^{-4}\ \mathrm{m}^4$, $A = 1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}^2$
- 弹性的模块: $E = 210\ \mathrm{GPa}$
- 钢材 密度: $\rho = 7\,850\ \mathrm{kg/m}^3$
- 附加 恒载 (地板、铁路、表面): $m' = 600\ \mathrm{kg/m}$

定义: (a) 基本 固有频率; (b) 是否脚步引发的响应是一种担忧; (c) 二重效应延伸到 $L = 40\ \mathrm{m}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

解决方案。

(a) 基本 固有频率。

每单位长度的 质量 的总值结合了 钢材 部分和 恒载:

$$\bar{m} = \rho A + m' = 7\,850 \times 1.0 \times 10^{-2} + 600 = 78.5 + 600 = 678.5 \text{ kg/m}$$

灵活性硬度是 $EI = 210 \times 10^9 \times 6.0 \times 10^{-4} = 1.26 \times 10^8$ N·m^2. 使用简单支持的 梁 公式 $n = 1$:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \frac{\pi}{2 \times 20^2}\sqrt{\frac{1.26 \times 10^8}{678.5}} = \frac{\pi}{800}\sqrt{185\,700} = \frac{\pi}{800} \times 430.9 = 1.69 \text{ Hz}$$

相应的自然时期是 $T_1 = 1/f_1 = 0.59$ s.

(b) 步行者反射检查。

人力流动产生了特别定期的力量。相关频率等级是:

活动	主流频率 (Hz)
慢步行	1.4–1.7
正常走路	1.7–2.3
步行 / 跑步	2.3–3.5
外部身体 Sway	0.7–1.2

与 $f_1 = 1.69$ Hz 桥梁倒在顶端。慢行带和正常行带的下端。与步行脚下相反, 是真正的服务性担忧。顶级 加速度 检查是必需的: EN 1990 (European Committee for Standardization (CEN), 2010) 垂直限制加速度 到 0.7 m/s^2 外部脚踏板。伦敦千年大桥 (2000) 开幕后两天关闭由于其侧频率 0.97 Hz 相匹配的步行者, 证明 即使是小动态力量也能产生不可接受的响应在响应.

(c) 延伸时间的两倍。

因为 $f_1 \propto 1/L^2$ (在常规部分和恒载):

$$f_1(40 \text{ m}) = f_1(20 \text{ m}) \times \left(\frac{20}{40}\right)^2 = 1.69 \times 0.25 = 0.42 \text{ Hz}$$

四十 m 桥 低于所有步行频率如此垂直跟脚交通的响应不再是担忧。然而, 该侧滑频率现在可能落近 0.42 Hz, 在其内部的集群侧载量。和 $1/L^2$ 加速是最重要结果在结构动力学: 翻倍的范围四分之一频率, 甚至是间隔的温和增加可以改变结构安全到反射, 或者相反。

36.10 非线性动态

81 前部分采取了线性行为: 与移动和速度相对的力量。真正的结构, 特别是在强大的地震冲击或极端负载下, 显示非线性反应。非线性源于物质产量、地质效应 (大型迁移), 接触/错误行为, 和震动。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36.10.1 非线性来源

82 **材料非线性** 发生时, 压力和压力关系是非线性的。对于钢材而言, 初始的弹性行为在应力超越屈服强度时会产生成果。对于混凝土, 切割甚至在服务负载中也引入非线性。宪法关系必须适当模型 (骨折, 损伤等。).

83 **几何非线性** 出现时, 转移是足够大的, 以便平衡方程式必须写在扭曲的配置上。和 P-Δ 列中的效应 由于通过侧移行动的轴力而引起的瞬间增强 是常见的例子。

84 **联系非线性** 它发生在组件可以分开或接触的界面上。基础隔震 携带、扩张关节和切割部分都显示这种行为。

36.10.2 催眠和能源分散

85 在循环充电中, 非线性材料跟踪一个荷载-位移路径, 在充电和脱载之间有所不同。被这种歇斯底里的区域封闭 它代表循环分散的能量。这种歇斯底里的蒸发是地震期间产物结构的主要能源分散来源。

86 一个有序的歇斯底里旋转和相关分散能量在图中显示 36.5 蓝色火箭: 充电和重新充电分支; 红色火柴: 解载分支。阴影区域相当于每周分散的能量。$W_D = \oint F \, \mathrm{d}u$. 初步坚定性 k_0 控制弹性绳子; 后叶的硬度减少。Yield 力量 $\pm F_y$ 和峰值 位移 $\pm u_{\max}$ 被指示。

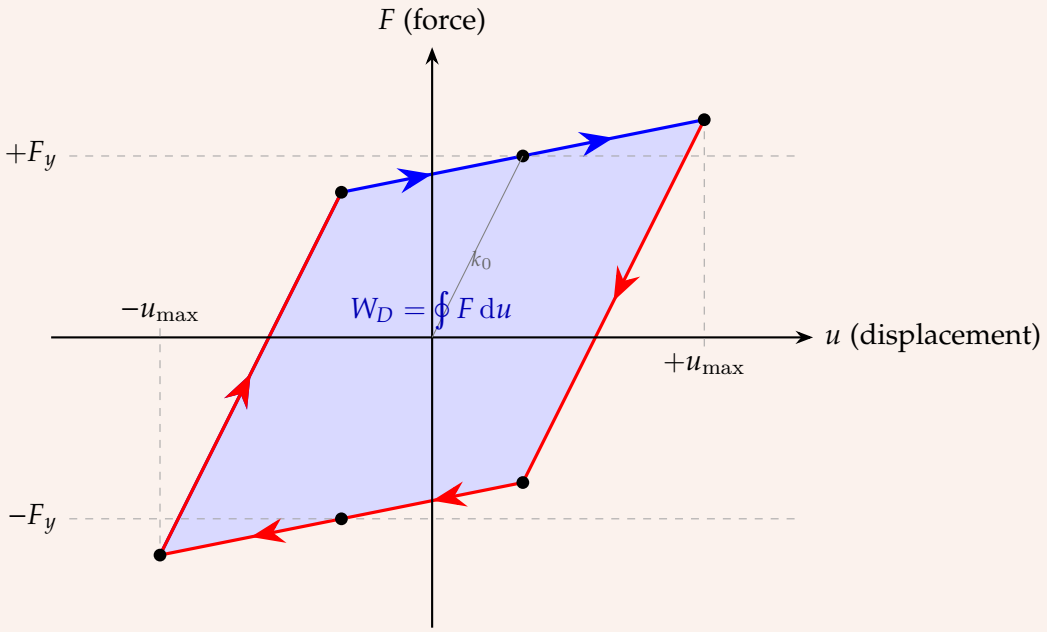


图 36.5: 双线 elastoplastic hysteresis loop 在同步循环充电下。

87 常见的催眠模型包括:

- **弹性**: 灵活到发射, 然后不断的力量与增加位移. 排放与初始弹性滑板平行。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **双重**: 灵活到产量, 然后减少 (积极或消极) 后叶的坚定性
- **衰弱的坚固性**: 脱负硬度随着积累的损害而减少。模型 混凝土 和大麻行为。
- **布克文**柔软、可区分的模型, 能够代表各种歇斯底里的行为。

36.10.2.1 例题 36.11: 相当于 黏性阻尼 从双重催眠路径

结构性 钢材 带有 框架 显示双线 elastoplastic 催眠路径 (如在图中 36.5) 与 The 下面是从循环测试中测量的参数:

- 初步 (弹性) 坚定性: $k_0 = 50\ \text{kN/mm}$
- 以利力: $F_y = 400\ \text{kN}$
- 测试周期最大 位移: $u_{\max} = 20\ \text{mm}$
- 后叶利的稳定性比例: $\alpha = k_1/k_0 = 0.05$ (5% 动画硬化)

定义: (a) 转移和转移的功率; (b) 每周分散的能量; (c) 应变能 最多位移; (d) 相同的 黏性阻尼 比率由 Jacobsen 公式; (e) 工程的解释。

解决方案。

(a) 位移 和 Ductility。

$$u_y = \frac{F_y}{k_0} = \frac{400}{50} = 8\ \text{mm} \qquad \mu = \frac{u_{\max}}{u_y} = \frac{20}{8} = 2.5$$

(b) 能量分散周期。

对于一个同步双向旋转, 分散的能量每周期是封闭的平行图的区域。用于 ElastoPlastic (限制案件 $\alpha \to 0$) 准确的结果是:

$$W_D = 4\,F_y\,(u_{\max} - u_y)$$

用双向旋转, 有动态硬化 ($\alpha > 0$) 其它后游行添加区域, 但为同步周期与平等积极和负面宽度, 硬化贡献取消相同的公式也适用。因此:

$$W_D = 4 \times 400 \times (20 - 8) = 4 \times 400 \times 12 = 19\,200\ \text{kN·mm} = 19.2\ \text{kN·m}$$

(c) 应变能 至最大 位移。

灵活的应变能在 $u_{\max}$ (使用计算的初步的强度作为参考) is:

$$W_s = \frac{1}{2}\,k_0\,u_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 20^2 = 10\,000\ \text{kN·mm} = 10.0\ \text{kN·m}$$

(d) 相同的 黏性阻尼 比例 (雅各布森公式).

雅各布森 (1960) 公式相当于每周分散的能量与非线性曲线相同的线性振动器相同宽度的系统:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{W_D}{4\pi\,W_s} = \frac{19.2}{4\pi \times 10.0} = \frac{19.2}{125.7} = 0.153 \quad (15.3\%)$$

(e) 工程解释。

单独的催眠曲线有助于 15.3% 相同的 黏性阻尼二元性 $\mu = 2.5$. 与内在的结构冲浪相结合 ($\zeta_s \approx$ 2–5% 為 钢材) 全效的蒸汽超過 17%, 这就是为什么生长结构远离地震它的弹性能力比它更大。另外三点值得注意。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. **杜克利特驱动蒸发。**重新编写公式:

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{4F_y(u_{\max} - u_y)}{4\pi \cdot \frac{1}{2}k_0 u_{\max}^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - 1/\mu}{\mu} \times \frac{F_y/u_y}{F_y/u_y} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} \cdot \mu$$

   更简单: ζ_{eq} 二元性需求增加到一个板块, 解释为什么高杜克特系统是如此能吸收地震能量。
2. **连接到代码 R 因素。**物理基础强度减少因素 $R = \mu$ 正是这歇斯底里蒸发: 支持的框架 $\mu = 4$ 分散能量如此之多, 以至于它可以抵抗地面运动四次。比其 屈服强度 更大, 否则会允许。
3. **限制。**雅各布森的公式是一种接近。它采取稳定的状态反应, 最准确的适度二元性 ($\mu \le 4$). 对于非线性或破坏性系统, 直接非线性时间历史分析更可靠。

36.10.3 Ductility 和 Capacity Design

88 和 **位移 双重性** μ 定义为最大转移与产生的转移的比例:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

结构设计以无缝地产生和扭曲, 可以比其弹性能力可能更强大地生存地震。这就是基本原则 **能力设计**: 接受在仔细详细的区域进行输出, 同时保护闪光 单元.

89 强度减少和双重需求之间的关系被捕获 R-μ-T 关系。对于在 速度 敏感范围内的时期结构:

$$R \approx \mu$$

这个 “平等 位移” 规则规定, 产量结构的最大 位移 相当于具有相同期限的弹性结构的最高值 - 发射减少了强度需求, 而不会增加 位移.

36.10.3.1 例题 36.12: 二元性需求和强力减少为一钢筋混凝土 框架

一个单个故事增强的具体时刻框将被设计为一个地震区, 其设计频谱跟随三方形状的例子 36.7.2.1 ($S_a = 0.80g$ 为 $T \le 0.60$ s). 框架的特点是:

- 地震 质量: $m = 300$ t
- 基本期: $T_n = 0.40$ s (在板上)
- 故事高度: $h = 3.5$ m
- 可用的 位移 二元性: $\mu = 4$ (精心详细的杜克蒂尔 RC 根据现代代码)

使用平等位移规则, 确定: (a) 弹性基板需求; (b) 减少设计基板; (c) 收益和最大移居; (d) 故事 drift 比例和性能检查。

解决方案。

(a) 弹性基板 (无关节性减少).

$$V_{\text{el}} = m\, S_a = 300 \times 0.80 \times 9.81 = 2\,354 \text{ kN}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(b) 设计基板低。
对于速度敏感范围的时期, 相当于位移规则给予 $R \approx \mu$ 因此, 强度减少因素 $R = 4$:

$$V_y = \frac{V_{\text{el}}}{R} = \frac{2\,354}{4} = 589 \text{ kN}$$

框架必须设计以达到这种强度水平。设计为 V_y 而不是 V_{el} 减少所需的结构性功率 - 因此成本 - 以四个因素。

(c) 折扣 位移 和最大 位移.
侧面硬度从期和质量跟随:

$$k = \omega_n^2\, m = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 m = \left(\frac{2\pi}{0.40}\right)^2 \times 300 = 246.7 \times 300 = 74\,022 \text{ kN/m}$$

利息 位移:

$$u_y = \frac{V_y}{k} = \frac{589}{74\,022} = 7.95 \text{ mm}$$

根据平等分配规则, 无线最大分配相同于位移的弹性光谱:

$$u_{\max} = S_d = \frac{S_a}{\omega_n^2} = \frac{0.80 \times 9.81}{246.7} = 31.8 \text{ mm}$$

验证: $\mu = u_{\max}/u_y = 31.8/7.95 = 4.0$. ✓
需要的塑料 位移 超越产量:

$$u_p = u_{\max} - u_y = 31.8 - 8.0 = 23.8 \text{ mm}$$

(d) 史蒂夫 • 德里特比率和性能检查。

$$\frac{u_{\max}}{h} = \frac{31.8}{3\,500} = 0.91\%$$

大多数代码允许一个最大的故事驱动比例为 2% 生命安全和 0.5% 即时占领。第 091 章% 流动 可接受的生命安全性能目标, 但不满足即时占领要求。数字将基本的地震工程的交易: 通过接受 24 mm 塑料设计强度的歪曲, 减少了四个因素。和结构将支持修复性损坏的设计地震但它不会崩溃　这正是现代代码的意图。如果相同的 框架 是弹性设计 ($\mu = 1, R = 1$), 它需要四倍的力量, 但不会遭受结构性损害。

36.11 实用考虑

36.11.1 沉浸在现实结构中

90 结构的测量蒸发率取决于材料、振动宽度和建筑类型。典型的值包括:

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

结构类型	阻尼比 ζ
钢材、合金, 预加油	0.01–0.02
钢材, 折叠, 预交	0.02–0.03
钢筋混凝土 未分手	0.01–0.02
钢筋混凝土 被打破	0.03–0.05
预应力混凝土	0.01–0.02
马赛, 无情	0.02–0.03
木材结构	0.05–0.10

这些是顺序大小值; 实际的蒸发取决于细节, 并应在可能时测量。

36.11.2 土-结构相互作用

91 结构的动态反应不仅取决于结构本身, 而且还取决於支持土壤。**土-结构相互作用** (SSI) 它可以显著影响输入运动和系统频率。灵活的土壤增加了系统的有效期, 并通过辐射能量进入土壤来引入额外的蒸发。对于软土上的坚固结构,SSI 效应可以显著; 对于岩石上的灵活结构, 它们是不可忽视的。

36.11.3 质量 Dampers 混凝土

92 质量 Damper 直播 (TMD) 是附属 质量 - 春蒸汽系统, 粘贴到主结构并调向特定的频率。当初级结构在其固有频率时振动时,TMD 在对立中旋转, 减少了初级反应。TMD 在高楼使用 (台湾 101) 长寿的桥梁, 以减少风引发和地震振动。

93 TMD 的最佳突变为一个不受压缩的初始结构是:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

哪里 $\mu_m = m_d/m$ 是 质量 比例 (通常是 0.01 到 0.05), ω_d 是 TMD 频率, 以及 ζ_d 是 TMD 阻尼比。

36.11.4 例题 36.13: 设计一台突发的质量蒸汽机, 用于高楼

滑板 钢材 塔在其基本模式下具有以下动态特性:

- 共 质量: $M = 800$ t
- 固有频率: $\omega_n = 2.094$ rad/s ($T_n = 3.0$ s, $f_n = 0.333$ Hz)
- 结构性冲浪: $\zeta = 1\%$ (轻松蒸发 钢材)

一个 TMD 必须安装在塔顶上与质量比例 $\mu_m = m_d/M = 0.02$ (2%). 定义: (a) TMD 质量; (b) 最佳的 TMD 频率和春季硬度; (c) 最佳 TMD 阻尼比和加密率; (d) 固定状态响应宽度的减少。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

解决方案。
(a) TMD 质量。

$$m_d = \mu_m\, M = 0.02 \times 800 = 16 \text{ t}$$

(b) 最佳的 TMD 频率和春季硬度。
从 Den Hartog 最佳调节公式:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m} = \frac{1}{1.02} = 0.9804$$

$$\omega_d = 0.9804 \times 2.094 = 2.053 \text{ rad/s} \qquad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 0.327 \text{ Hz}$$

TMD 春季的强度是:

$$k_d = m_d\, \omega_d^2 = 16 \times (2.053)^2 = 67.5 \text{ kN/m}$$

(c) 最佳 TMD 阻尼比和蒸汽率。

$$\zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.02}{8 \times (1.02)^3}} = \sqrt{\frac{0.060}{8.489}} = \sqrt{0.00707} = 0.0841 \quad (8.4\%)$$

维斯科蒸汽率:

$$c_d = 2\,\zeta_d\, m_d\, \omega_d = 2 \times 0.0841 \times 16 \times 2.053 = 5.53 \text{ kN·s/m}$$

(d) 放射性宽度的减少。
一个不可分割的初级结构 ($\zeta = 0$)TMD 减少了从无限值到无限价值的动态强化因素大约:

$$D_{\text{TMD}} \approx \sqrt{\frac{2+\mu_m}{\mu_m}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2.02}{0.02}} = \frac{1}{2}\sqrt{101} = 5.02$$

相比之下 $D = 1/(2\zeta_{\text{struct}})$ 没有 TMD。对于实际的结构性冲浪 $\zeta = 1\%$ 不受控制的激光增强是 $D_0 = 1/(2 \times 0.01) = 50$. 因此,TMD 减少了峰值反应的约一个因素。$50/5 = 10$ 或大约 90%.

评论。 质量 比例 $\mu_m = 2\%$ 代表实体设施: 台湾 101 使用 A 660 t TMD 反对建筑 质量周围的 30,000 t ($\mu_m \approx 2.2\%$). 最佳 阻尼比 的 8.4% 它比结构性高得多。蒸汽, 这就是为什么在 TMD 内需要一个专门的威斯科蒸汽机。值得一提的三个实用点:

1. 丹 • 哈托格的公式采用了无缝的初始结构; 小型结构性冲浪 ($\zeta \le 2\%$) 它对其具有不可思议的影响。最佳参数
2. 解散 - 一变成 ω_n 由于硬度的变化, 添加质量, 或温度 — 显著降低 TMD 效率。可调整的春天或蒸汽机制有时包括在重新安装在服务中。
3. TMDs 只有靠近突发频率有效。他们不会减少其他模式中的反应, 这就是为什么多种 TMD 或宽带设备使用时, 多种模式为反应做出贡献。

36.11.5 基础隔震

94 基础隔震 引入灵活的层 (通常是弹性带或滑板系统) 结构与基础之间。隔离结构有更长的时间, 将其远离典型的地震地面动作的高能量内容。隔离层还提供额外的蒸发。基础隔震 对于固态、短期结构特别有效, 广泛用于医院、紧急设施和历史建筑。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

36.11.6 例题 36.14: 建造一座孤立的医院建筑

两层医院建筑将以领带橡胶重新装备承载 (LRB) 隔离系统。固定基结构如下: 属性:

- 地震重量: $W = 12\,000$ kN (质量 $M = W/g = 1\,223$ t)
- 固定基本期: $T_{\text{fb}} = 0.30$ s
- 固定基的侧面硬度: $K_{\text{fb}} = 537\,000$ kN/m
- 结构性冲浪: $\zeta_s = 5\%$

设计 加速度 频谱 (5% 跳舞) 跟随三方形状例子 36.7.2.1:

$$S_a(T) = \begin{cases} 0.80g & T \le 0.60 \text{ s} \\ \dfrac{0.48g}{T} & T > 0.60 \text{ s} \end{cases}$$

隔离系统旨在实现目标隔离期 $T_{\text{iso}} = 2.50$ s 以有效的蒸汽 $\zeta_{\text{iso}} = 15\%$. 定义: (a) 需要的隔离密度; (b) 设计的位移的隔离器; (c) 基板与和没有孤立; (d) 加速度 减少因素。

解决方案。

(a) 需要隔离的强度。

隔离期由隔离层密度控制 K_{iso} 独自一人 (超级结构被认为是与隔离器相对严格的。):

$$T_{\text{iso}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_{\text{iso}}}} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{iso}} = M\left(\frac{2\pi}{T_{\text{iso}}}\right)^2 = 1\,223 \times \left(\frac{2\pi}{2.50}\right)^2 = 1\,223 \times 6.317 = 7\,726 \text{ kN/m}$$

这是大约 1.4% 固定基准的坚定性, 确认隔离层对超结构非常灵活。

(b) 设计 位移 的隔离器。

光谱 位移 在 $T_{\text{iso}} = 2.50$ s 得到的与假观的关系。首先, 阅读加速度的光谱在 T_{iso} (在长期分支中所处的):

$$S_a(2.50) = \frac{0.48g}{2.50} = 0.192g = 1.883 \text{ m/s}^2$$

加密纠正因素 η 以更高的隔离蒸发为代价 ($\zeta_{\text{iso}} = 15\%$) 关于参考 5%:

$$\eta = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + \zeta_{\text{iso}}}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.05 + 0.15}} = \sqrt{\frac{0.10}{0.20}} = 0.707$$

加速度 和 位移 是:

$$S_a^* = \eta\, S_a = 0.707 \times 1.883 = 1.332 \text{ m/s}^2$$

$$S_d = \frac{S_a^*}{\omega_{\text{iso}}^2} = \frac{S_a^*}{(2\pi/T_{\text{iso}})^2} = \frac{1.332}{(2\pi/2.50)^2} = \frac{1.332}{6.317} = 0.211 \text{ m} \approx 211 \text{ mm}$$

这是每个隔离器单位必须容纳的位移设计。典型的 LRB 隔离器可容忍 200〜400 侧面 位移 的 mm, 因此, 设计是可行的。

(c) 基板与和没有隔离。

固定基 (没有孤立, $T_{\text{fb}} = 0.30$ s, 5% Damping, plateau 区):

$$V_{\text{fb}} = M\, S_a(0.30) = 1\,223 \times 0.80 \times 9.81 = 9\,597 \text{ kN} \approx 0.80\, W$$

基地隔离 ($T_{\text{iso}} = 2.50$ s, 15% , 修正):

$$V_{\text{iso}} = M\, S_a^* = 1\,223 \times 1.332 = 1\,629 \text{ kN} \approx 0.136\, W$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(d) 加速度 减少因素。

$$\mathcal{R} = \frac{V_{\text{fb}}}{V_{\text{iso}}} = \frac{9\,597}{1\,629} = 5.89 \approx 6$$

基础隔震 减少了大约一个因素的地震基板 6、从 80% 建筑重量为 14%.

评论。 这个结果的几个特点值得注意。

1. **时间转变是主要机制。** 从移动 $T = 0.30$ s 到 $T = 2.50$ s 交换高能量加速度板块的结构和深度在长期, 低加速度的频谱尾。和额外 Damping ($\eta = 0.707$) 另一个因素是: $\sqrt{2}$ 减少, 但时间的变化大部分工作。
2. **超结构的加速率非常均匀。** 因为隔离层集中了几乎所有的变形。基地, 超结构基本上作为一个固体的身体移动。地板加速率在所有层面上大约是相同的, 并且到 $S_a^*/g \approx 0.136g$ ● 对于医院的关键优势设备、天花板和非结构组件必须留在哪里功能性在地震之后。
3. **隔离 位移 必须容纳。** 第 211 章 毫米设计 位移 需要一片 (地震差距) 到 A 至少在整个建筑周围的宽度, 以及所有穿越隔离飞机的设施必须配备灵活连接。
4. **可用性。** 基础隔震 对于坚固、短期结构最有效在坚固的地面上。灵活的结构 (长久 T_{fb}) 季节变量较小, 软土壤长时间地动能量可以完全否认好处。

36.12 关闭评论

36.12.1 实践者对反应谱方法的警告

Edward L. Wilson 教授论反应谱法

“雷 · 克拉夫和我都很遗憾，我们在 *1962* 年创立了结构抗震分析的近似反应谱法… 当时，许多专业人员把各振型响应的绝对值相加，以估计构件的最大内力。雷建议采用平方和开方（*SRSS*）法组合振型响应。然而，是我把这种近似方法编入了许多动力分析程序，使工程师能够得到毫无意义、价值很小甚至没有价值的正数。… 在使用反应谱法五十多年后，我建议不要将其用于抗震分析。”

[95] 该方法的创作者之一的这种温柔反映是健康的提醒, 舒适和严格并不总是相同。反应谱方法仍然在代码和实践中广泛使用, 但它的限制 模型组合接近、无法捕捉非线性行为以及依赖于光谱形状假设 必须理解。对于关键结构或强烈非线性反应, 非线性的时间历史分析是适当的工具, 如在章节中开发 53.

36.12.2 下一篇: 线性理论的限制

本章中的几乎所有 解析 结果都依赖于线性假设: 线性弹性恢复力量, 小转动和 (当使用) 线性 黏性阻尼。这些假设使超级和封闭形式的解决方案成为可能。当被侵犯时 (材料输出, 大位移 kinematics, 接触, 或强烈非线性蒸发), 答案通常必须按步骤时间集成计算。这些计算和先进的主题在研究生级别的章节中开发 53.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

37 单元 结构设计

摘要

结构分析从来不是一个终点。它是对新或现有结构进行风险和安全评估的必需工具, 无论是建筑物、飞机还是骨骼。

因此, 重要的是结构分析师在本全面书的背景下有一个简短的 (虽然表面) 了解设计过程及其与分析的关系。本章节将突出结构分析程序的一些关键考虑和范式。

我将简要覆盖允许的应力设计 *(ASD)* 荷载和抵抗因子设计 *(LRFD)* 加上几个模拟例子。此外, 基于性能的工程 *(PBE)* 它将简要突出, 尽管它将在以后的章节中详细覆盖。

本章特别适用于后续引入非线性分区结构分析。(章节 *56*) 分析和设计必须密切相互结合。

37.1 引入 1172
37.1.1 分析与设计; 一项异常过程 . 1172
37.1.2 安全 1172
37.2 可用的应力设计 (ASD) 1174
37.2.1 例题 37.1: ASD; 灵活性 . . . 1175
37.3 荷载 和抵抗因素设计 (LRFD) 1175
37.4 lrfd 基于设计代码的例子 1178
37.4.1 应用: R/C 梁 分区的塑料强度 1179
37.4.2 应用:R/C 列的塑料强度 . . . 1187
37.4.3 预应力混凝土 1196
37.5 性能基工程 (PBE) 1200

37.1 引入

37.1.1 分析与设计; 一项异常过程

1 分析本身从来不是终点, 其最终目的在于设计一个新的结构。(主要依据主权 **设计代码**) 或者要考虑一个结构的安全性。(通常在代码的真实外面).

2 分析旨在为设计工程师提供位移, 压力, 力量 (反应) 对于设计本身。

3 因为我们无法分析虚拟或参数化结构, 所以我们必须从初步设计、分析、检查开始, 然后尽可能多地完善, 直到接近实现。这个过程是由图描述的 37.1 这个过程作为两个运营商的概念化: 分析和设计。

37.1.2 安全

4 在结构设计中, 我们指出一个结构能够抵抗某个 荷载 的能力。C 和外部 荷载 的需求 D. 他们将有单位在 F, FL, or F/L^2 (力量, 瞬间, 应力).

5 例如, 在 梁 中, 需求是根据时刻图定义的, 而容量是基于可以移动的内部时刻。(函数的跨部分属性, 和应力-应变曲线), 图 37.2.

6 当然, 容量应该超过需求, 但关键问题是多少, 以及谁的计算。WIth 引用到 图 37.3 我们确定了四个区域。其中没有一个是明确定义的, 除了第一的底线。

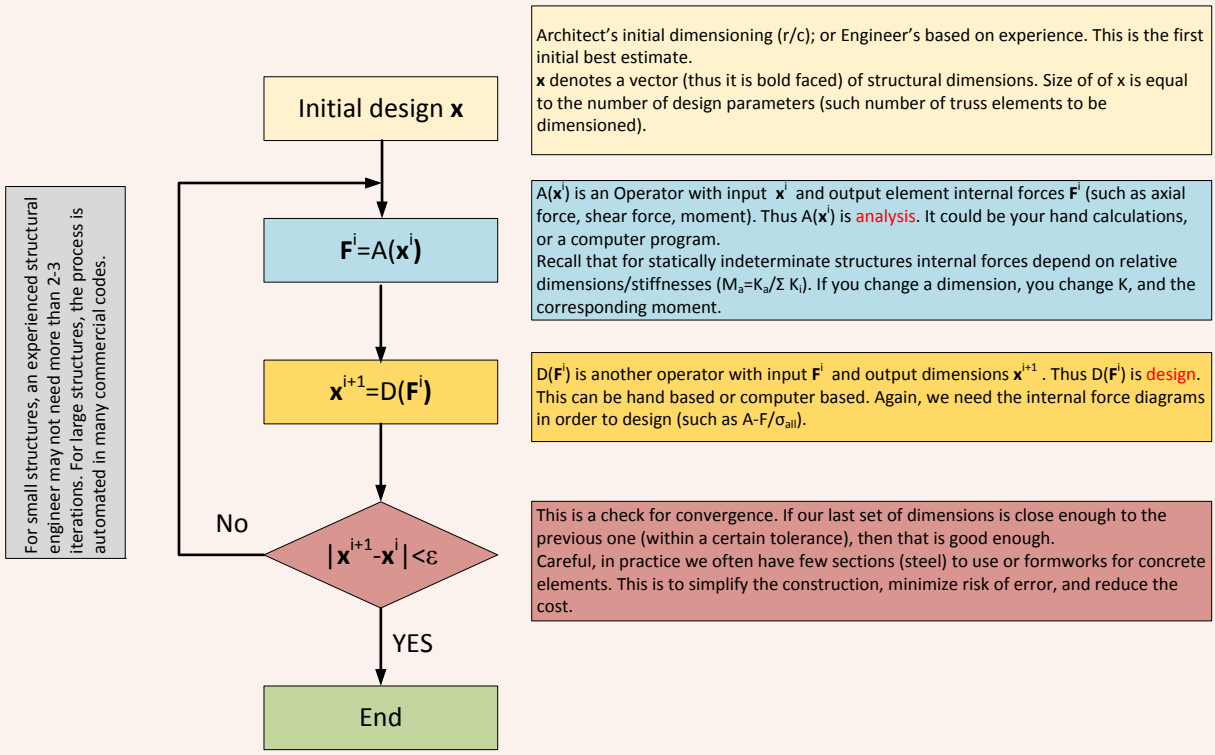


图 37.1: 建筑工程师 - 结构工程师 二进制互动

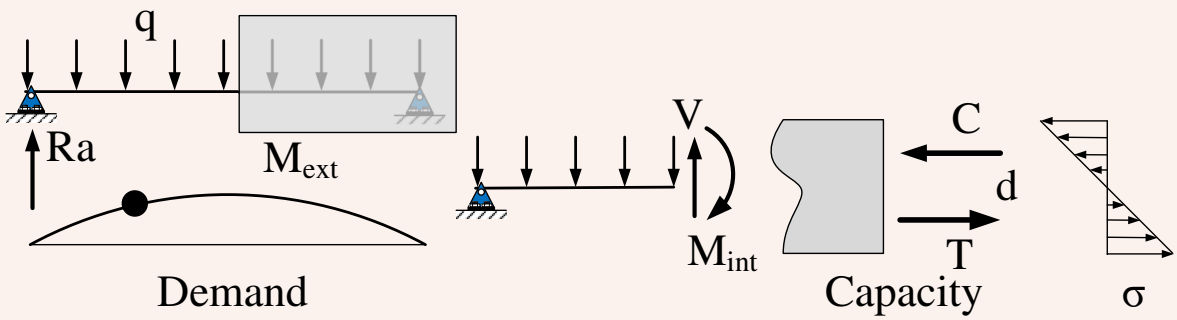


图 37.2: 需要和能力在一个梁

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

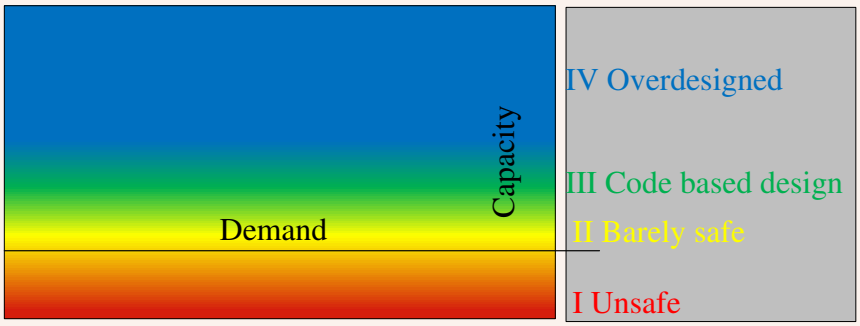


图 37.3: 安全

我不安全 这些结构可以站起来很有限的时间, 崩溃甚至可能发生在完成之前。

二、不安全 這些是結構, 安全系数幾乎不超過一個。他们是现代代码的建筑代表 (我们真的不知道他们的真实安全系数). 相同的结构可以保持勃起, 直到遭受一个罕见的荷载事件 (通常, 但不僅是地震). 帕特伦被奥斯曼人存储的枪支摧毁。亚历山大、罗德、里斯本和巴塞尔的灯塔都被地震摧毁。我们应该注意到, 即使在现代时代, 一些不好的结构也被地震摧毁。(1989 年, 旧金山洛马普里塔地震摧毁了许多桥梁和维亚杜克。). 可能是完美设计的 **垂直负载** 但不是为了 **侧重负载**. 因此, 图 37.3 可以精化, 以区分垂直和侧负载。

3、安全的现代代码 这些是由现代设计的结构 (1960 年, 邮政) 设计代码。

4、过度设计 这些是超越设计的结构。它可能是非工程师在现代时代不太设计的结构, 或者工程师早期结构分析尚未成熟。例如, 帝国国家大楼, 胡弗板是过度设计的结构的例子。

7 现代代码一直致力于为安全提供严格的基础。三个主要方法出现了

1. 可用的应力设计
2. 荷载 和抵抗因子设计
3. 性能基工程

每个人都将简要单独讨论。

37.2 可用的应力设计 (ASD)

8 在允许的应力设计 (ASD) 方法, 我们简单地要求

$$D < \frac{C}{SF}$$

SF 是 安全系数 (~ 1.5 – 2)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

[9] 在这种情况下, 只有能力才会减少。(由于不确定性) 另一方面, 我们暗示地假设需求是纯粹的决定性。

[10] 历史上, 这是设计策略提出的, 但它在 1970 年代被下一个替换。

37.2.1 例题 37.1: ASD; 灵活性

一个 15 英尺的宽度简单支持的泡沫受每脚 400 公斤的均匀负载的影响。梁 是由 钢材 制成的, 其产量为 36000 psi 的 应力。我们需要确定是否有梁部分与惯性矩 $I = 80\,\text{in}^4$ 一部分模块 $S = 16\,\text{in}^3$ 考虑到安全系数 的 1.75.

可用的应力 σ_{allow} 考虑到 安全系数 是由:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{\text{Safety Factor}}$$

在哪里: $\sigma_{\text{yield}} = 36,000\,\text{psi}$ 和 安全系数 = 1.75 取代值:

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{36,000\,\text{psi}}{1.75} = 20,571.43\,\text{psi}$$

对于一个单纯支持的梁与统一的荷载的情况下, 最大弯矩发生在中间点, 并由:

$$M_{\text{max}} = \frac{wL^2}{8}$$

在哪里: w 足元 400 英镑, $L = 15$ 英尺现在, 计算最大 弯矩:

$$M_{\text{max}} = \frac{400\,\text{lb/ft} \times (15 \times 12)^2\,\text{in}^2}{8 \times 12} = \frac{400 \times 32400}{96} = 135,000\,\text{lb-in}$$

需要抵抗旋转时刻而不超过允许的压力的部分模块是由:

$$S_{\text{required}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{allow}}}$$

在哪里: $\sigma_{\text{allow}} = 20,571.43\,\text{psi}$
替代

$$S_{\text{required}} = \frac{135,000\,\text{lb-in}}{20,571.43\,\text{psi}} \approx 6.56\,\text{in}^3$$

分区模块 $S = 16\,\text{in}^3$ 因为 $S_{\text{provided}} = 16\,\text{in}^3$ 更大于 $S_{\text{required}} = 6.56\,\text{in}^3$，该 部分适当.

37.3 荷载 和抵抗因素设计 (LRFD)

[11] 在 LRFD 中, 容量和需求都被认为是随机变量, 具有自己的概率分布功能。因此, 总会有失败的可能性。

[12] 负载本身在死负载之间混合 (DL), 活载 (LL), 风荷载 (WL) 等等。其次, 将由一个因素加

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

倍。$\alpha > 1$ 根据与 (ASCE7) (ASCE/SEI 7-16, 2017) 我们将考虑到最终的名义。(塑料) 抵抗 (减少的 Φ)

13 α 和 Φ 要确定, 以免失败的可能性超过一定值。因此,LRFD 一般表达为

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i$$

例如, 在 ACI-318 设计代码中, 我们将 $D = 1.4DL + 1.7LL$ 和 $\phi = 0.9$ 为了灵活。

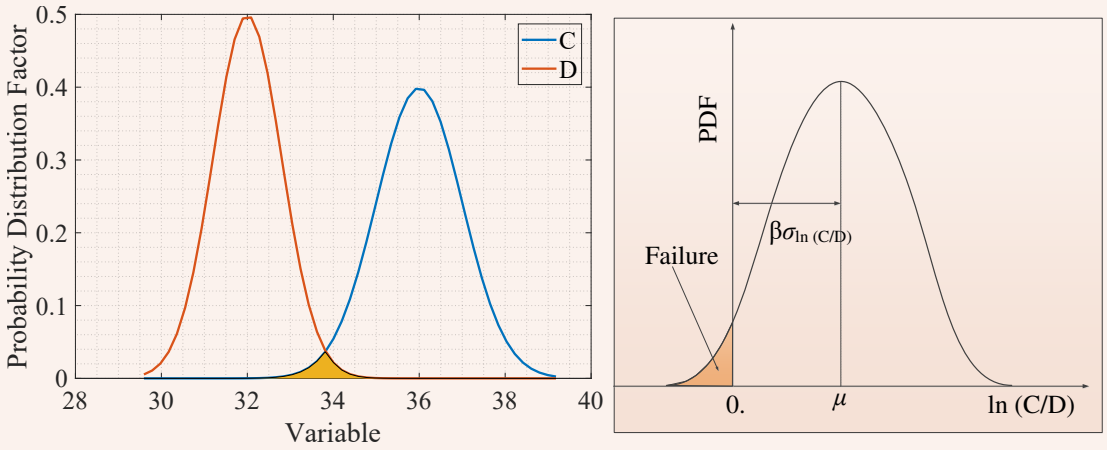
14 极限状态 一般由塑料容量决定 **决定的没有** 非线性分析, 只是一个假设, 线性弹性一个是适用的。

15 LRFD 希望有 可靠指标。§N 这样的那 $\beta >\sim 3.5$.

16 LRFD 设计范式的限制正在讨论中 §66.1 以性能为基础的介绍方式 地震工程 (chapter 72).

可靠指标 是 “普遍” 指示一个结构的适当性, 可以用作测量到 1) 评估一个结构的健康, 和 2) 比较不同的结构, 以便进行可能的修复。

17 由于两者正常分配的结果, C 和 D, 总会有失败的可能性, 图 37.4a.



(a) 能力与需求的概率分布　　(b) 定义 可靠指标

图 37.4: 概率分布 功能 C 和 D

18 我们可以正常化容量与需求, 图 37.4b, 并定义一个所谓的 **可靠指标** 通过两个方法之一:

批准 I

$$\begin{aligned} M &= C - D \\ \mu_M &= \mu_C - \mu_D \\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\ \beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

批准 II

$$
\begin{aligned}
M &= \ln C - \ln D \\
\mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\
\sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\
\beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} = \frac{\ln \mu_C/\mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}}
\end{aligned}
$$

19 β 选择以反映失败后果, 表 37.1.

表 37.1: 可靠指标 目标值

类型 荷载 / 会员	β
艾斯克*	
DL + LL; 会员	3.0
DL + LL; 连接	4.5
DL + LL + WL; 会员	3.5
DL + LL + EL; 会员	1.75
这里	
双重失败	3-3.5
英雄失败	3.5-4

美国钢材建设研究所

20 失败的可能性 P_f 相当于阴影区域与曲线下的总区域的比例。(菲格 37.4b) 被授予的 $\Phi(-\beta)$ 哪里 Φ 是正常累积概率功能的标准

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]
$$

21 最后, 可靠指标可以直接与失败的可能性有关, 图 37.5

22 LRFD 的一些主要限制包括:

1. 不一致: 线性分析, 但塑料设计。
2. 忽略荷载重新分配近失败 (ACI 因某些负担而因减少负面时刻而承担责任。).
3. 只应对一个危险级别: 一个结构组件的失败 (而不是整个系统。) 但是, 关于由于更频繁的事件造成的损害量化怎么办?

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

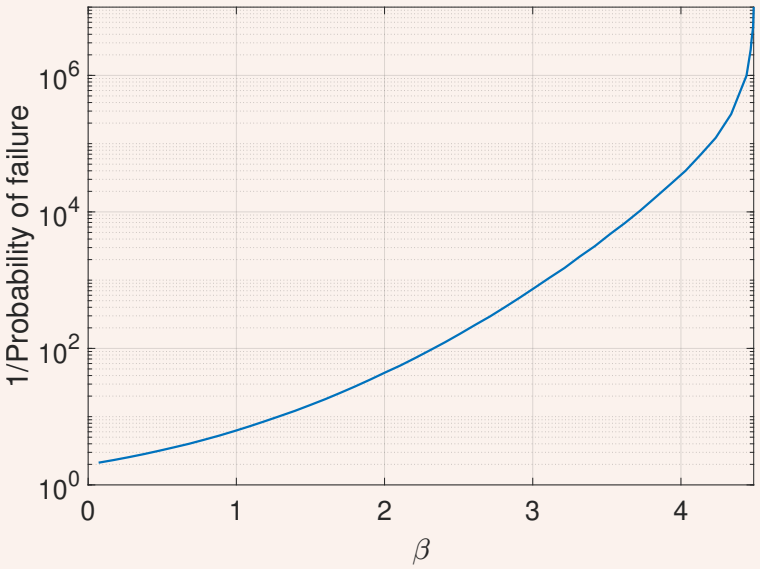


图 37.5: 失败的可能性在 β

37.4 lrfd 基于设计代码的例子

[23] 一次内部力量 (如瞬间和雪)，该 **部分组件** 可以根据本地统治的规则进行设计。**设计代码**. 大多数城市 / 州接受国家发展, 如美国混凝土研究所 **构建代码要求为结构 混凝土** (ACI 318.2-14, 2014) 或美国设计研究所钢材 (American Institute of Steel Construction, 2016).

[24] 这些代码每隔几年进行定期更新, 以反映基于最新研究的一致修改决策。

[25] 美国混凝土研究所的例子 **构建代码要求为结构 混凝土** (ACI 318.2-14, 2014).

9.5.1.1 对于每个适用的 荷载 因素组合, 设计强度在所有部分应满足 $\phi S_n \geq U$ 包括...
22.2.2 混凝土的设计假设
22.2.2.1 极端 混凝土 压缩时最大 应变纤维应被认为等于 0.003 。
22.2.2.2 抗拉强度 的 混凝土 将被忽略在灵活和轴强度计算。
22.2.2.3 混凝土 压缩剂之间的关系应力 和 应变 应由直角, 拖拉波的代表; 平凡, 或其他形状导致预测与全面的结果相一致的强度测试。
22.2.2.4.1 混凝土 应力 $0.85f'_c$ 将被假设均匀分布在同等压缩区由 截面 的边缘和平行线的边缘限制到 中性轴 位于距离 A 的纤维最大压缩 应变, 根据计算: $a = \beta_1 c$ (22.2.2.4.1)
22.2.2.4.2 最大压缩物的纤维距离应变 到 中性轴 c 要被测量为偏差性到 中性轴。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

37.4.1 应用: R/C 梁 分区的塑料强度

26 作为塑料分区分析/设计的例子, 我们考虑一个钢筋混凝土部分, 图 37.6. 由于混凝土 抗拉强度 比其 抗压强度 低得多, 该部分一直被切断到它的 中性轴 。混凝土 重新压缩, 并且 (只有) 钢材 抵抗压力。

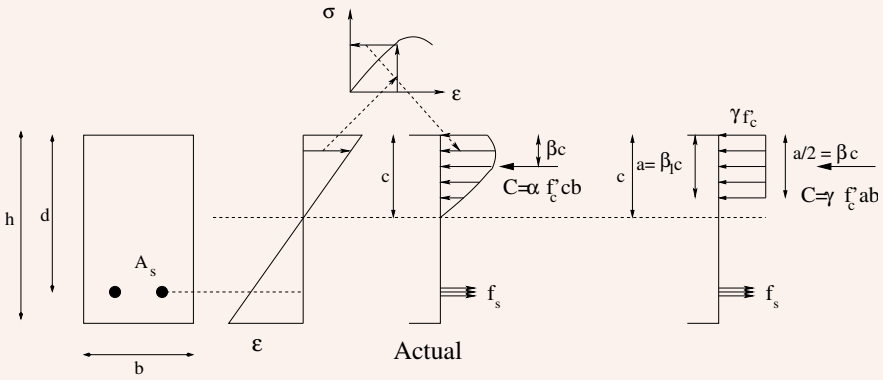


图 37.6: 限制一个破碎的强化具体部分的状态分析

27 失败时 (极限状态) 我们有一个线性交叉应变分布 (伯诺利的假设), (ACI 10.2.2 等) 而且, 自从混凝土的压力紧张曲线是非线性的, 我们将有一个非线性压力分布。

28 因此, 对于分析, 我们有两种选择:

1. 解析 表达式 $\sigma \Longrightarrow$ 准确的整合
2. 更换准确的 应力 图表, 用一个更简单和相当于一个, (ACI 10.2.6 等)

第二种方法是由大多数代码采用的。第一個方法將在例子中顯示 37.4.1.4.

29 相同的 应力 分布, 所有我们需要知道的是 C & 其位置, 因此 α 和 β.

30 我们采用一个直角应力, 与深度 $a = \beta_1 c$, 和 应力 等于 $\gamma f_c'$ (ACI 10.2.7.1 等式). 这个直角应力分布被称为 **威特尼应力区块**.

$$C = \alpha f_c' bc = \gamma f_c' ab$$
$$\alpha = \frac{f_{av}}{f_c'}$$
$$a = \beta_1 c$$

这样

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta_1}$$

但是, 由此产生的力量的位置必须是相同的, 因此

$$\beta_1 = 2\beta$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

31 从实验:

f_c' (psi)	<4,000	5,000	6,000	7,000	8,000
α	.72	.68	.64	.60	.56
β	.425	.400	.375	.350	.325
$\beta_1 = 2\beta$	.85	.80	.75	.70	.65
$\gamma = \alpha/\beta_1$	0.85	0.85	0.85	0.86	0.86

32 我們有這樣的, (ACI-318 10.2.7.3 等式):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= .85 && \text{if } f_c' \le 4,000 \\ &= .85 - (.05)(f_c' - 4,000)\frac{1}{1,000} && \text{if } 4,000 < f_c' < 8,000 \end{aligned}$$

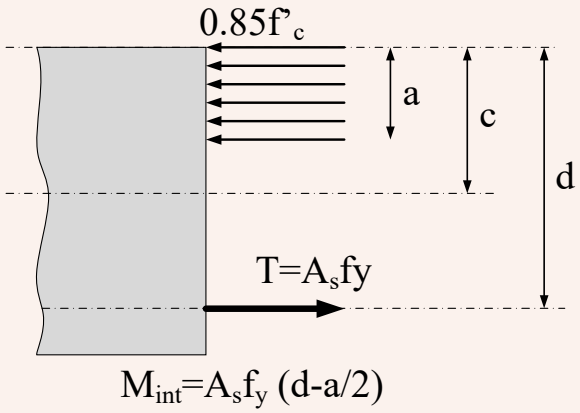


图 37.7: 威特尼应力区块

33 因此, 失败也可能发生。

- 钢材的折扣: $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ • 进步
- 混凝土的崩溃: $\varepsilon_c = .003$ 突然的; **(ACI 10.3.2 等)**.

理想情况下, 两种失败模式应该同时发生。这种情况会发生, 当强化理性 $\rho = A_s/bd = \rho_b$ 在 A 平衡设计.

失败模式 我们确定了两种可能的失败模式:

压力失败:

$$\left.\begin{aligned} f_s &= f_y \\ A_s f_s &= .85 f_c' ab = .85 f_c' b \beta_1 c \\ \rho &= \frac{A_s}{bd} \end{aligned}\right\} c = \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

压缩失败:

$$\varepsilon_c = .003$$
$$\varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s}$$
$$\frac{c}{d} = \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \Rightarrow c = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d$$

平衡设计: 如果我们有钢材的同时输出和混凝土的崩溃。因此, 我们简单地平衡前两种方程式。

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\rho f_y}{.85 f_c' \beta_1} d = \frac{.003}{\frac{f_s}{E_s} + .003} d \\ \rho = \rho_b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} \frac{\rho b f 2d}{.85 f_c' \beta_1} = \frac{.003}{\frac{f_s}{E-s} + .003} d \\ E_s = 29,000 \text{ ksi} \end{array}\right\} \rho_b = .85 \beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87{,}000}{87{,}000 + f_y}$$
(ACI 8.4.3)

强迫退款失败 是渐进的 (反对突然压缩失败)

$$\rho < .75 \rho_b$$

ACI 强度要求

$$U = 1.4D + 1.7L \quad \textbf{(ACI 9.2.1)}$$
$$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W) \quad \textbf{(ACI 9.2.2)}$$
$$M_d = M_u = \phi M_n \quad \textbf{(ACI 9.1.1)}$$
$$\phi = .90 \quad \textbf{(ACI 9.3.2.2)}$$

现有设计的评论: 被授予, b, d, A_s, f_c', f_y 我们要确定时刻的能力。M.

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd}$$
$$\rho_b = (.85)\beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87}{87 + f_y}$$

- $\rho_{act} < \rho_b$● 失败 由 出生和

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f_c' b} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$M_d = \phi A_s f_y (d - \frac{a}{2}) \quad \Sigma M = 0$$

- $\rho_{act} > \rho_b$ 它不允许通过代码, 在这种情况下我们有另一个未知的 f_s.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

34 现在, 我们还有一位未知的 f_s 我们将需要一个额外方程式 (从 应变 图表).

$$c = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b \beta_1} \qquad \Sigma F_x = 0$$
$$\frac{c}{d} = \frac{.003}{.003 + \varepsilon_s} \qquad \text{From strain diagram}$$
$$M_d = \phi A_s f_s (d - \frac{\beta_1 c}{2}) \qquad \Sigma M = 0$$

我们可以通过 iteration, 或替代和解决一个四方式平等。

设计

35 在设计情况下, 我们也必须确定 b, d 和 A_s 抵抗外部设计时刻 (要求) 或者我们被授予 b, d, 并试图确定 A_s.

I b d 和 A_s 未知的; M_d 因设计故障而引发的 $f_s = f_y$

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0 a = \dfrac{A_s f_y}{0.85 f_c' b} & a = \dfrac{\rho f_y}{0.85 f_c'} d \\ \rho = \dfrac{A_s}{bd} & M_d = A_s f_y \left(d - \dfrac{a}{2}\right) \end{array}\right\} M_d = \Phi \underbrace{\rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)}_{R} b d^2$$

哪里 ρ 由设计师指定; 或

$$R = \rho f_y \left(1 - .59 \rho \frac{f_y}{f_c'}\right)$$

不依赖于未知数量。然后解决为 bd^2:

$$bd^2 = \frac{M_d}{\Phi R}$$

解决为 b 和 d (这将需要一个假设在其中一个, 或他们的比例。), 然后

$$A_s = \rho b d$$

II b, d & M_d 已知, 我们试图确定 A_s. 但是, 没有任何保证我们可以有一个设计与 ρ_b 如果部分太小, 那么它将需要太多钢材导致一个过度增强的部分。

36 在这种情况下, 我们将需要遵循一项异端方法。

(a) 既然我们不知道钢材是否会产生, 使用 f_s.
(b) 以初始值为 a (一个好的开始是 $a = \frac{d}{5}$)
(c) 首先, 假设 $f_s = f_y$
(d) 查看 平衡 的瞬间 ($\Sigma M = 0$)

$$A_s = \frac{M_d}{\Phi f_s \left(d - \frac{a}{2}\right)}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(e) 查看 平衡 的力量在 x 方向 ($\Sigma F_x = 0$)

$$a = \frac{A_s f_s}{.85 f_c' b}$$

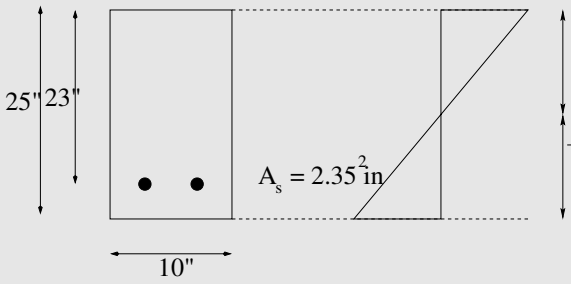
(f) 检查假设 f_s 或比较 ρ 与 ρ_b, 或从 应变 图表

$$\frac{\varepsilon_s}{d-c} = \frac{.003}{c} \Rightarrow f_s = E_s \frac{d-c}{c} .003 < f_y$$

哪里 $c = \frac{a}{\beta_1}$.

(g) 直到接近为止。

37.4.1.1 例题 37.2: 极限强度; 评论



我们试图确定下一个截面的最终时刻容量 $f_c' =$ 4,000 psi; $f_t' = 475$ psi; $f_y = 60{,}000$ psi; $A_s = 2.35$ in^2

$$\rho_{act} = \frac{A_s}{bd} = \frac{2.35}{(10)(23)} = .0102$$

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87}{87+f_y} = (.85)(.85)\frac{4}{60}\frac{87}{87+60} = .0285 > \rho_{act} \checkmark$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f_c' b} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(4)(10)} = 4.15 \text{ in}$$

$$M_n = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (2.35)(60)\left(23 - \frac{4.15}{2}\right) = 2{,}950 \text{ k.in}$$

$$M_d = \phi M_n = 0.9(2{,}950) = 2{,}660 \text{ k.in}$$

注:

1. 從 平衡 , $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow c = \frac{A_s F_Y 和}{.85\beta_1 b f_c' 和} = \frac{(2.35)(60)}{(.85)(.85)(4)(10)} = 4.87$ in

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 替代方案:

$$\begin{aligned} M_n &= \rho_{act} f_y b d^2 (1 - .59\rho_{act} \frac{f_y}{f_c'}) \\ &= A_s f_y d(1 - 59\rho_{act} \frac{f_y}{f_c'}) \\ &= (2.35)(60)(23)[1 - (.59)\frac{60}{4}(.0102)] = 2,950 \text{ k.in} = 245 \text{ k.ft} \\ M_d &= \phi M_n = (.9)(2,950) = 2,660 \text{ k.in} \end{aligned}$$

37.4.1.2 例题 37.3: 极限强度; 设计 I

设计 R/C 梁 与 $L = 15$ ft; DL = 1.27 k/ft; LL = 2.44 k/ft; f_c' 是 3000 psi。f_y = 40 ksi; 忽略 梁 自己的重量; 选择 $\rho = 0.75\rho_b$

$$\begin{aligned} w_u &= 1.4(1.27) + 1.7(2.44) = 5.92 \text{ k/ft} \quad \text{Factored load} \\ M_d &= \frac{w_u L^2}{8} = \frac{(5.92)(15)^2}{8} = 166.5 \text{ k.ft}(12) \text{ in/ft} = 1,998 \text{ k.in} \\ \rho &= 0.75\rho_b = (0.75)(0.85)\beta_1 \frac{f_c'}{f_y} \frac{87}{87 + f_y} \\ &= (0.75)(.85)^2 \frac{3}{40} \frac{87}{87 + 40} = .0278 \\ R &= \rho f_y \left(1 - .59\rho \frac{f_y}{f_c'}\right) \\ &= (.0278)(40)\left(1 - (0.59)(.0278)\frac{40}{3}\right) = 0.869 \text{ psi} \\ bd^2 &= \frac{M_d}{\phi R} = \frac{1,998}{(0.9)(0.869)} = 2,555 \text{ in}^3 \end{aligned}$$

带 $b = 10$ in, $d = 16$ in $\Rightarrow A_s = (.0278)(10)(16) = 4.45$ in^2 $\Rightarrow$ use 3 # 11

37.4.1.3 例题 37.4: 极限强度; 设计 II

设计一个 R/C 梁 为 $b = 11.5$ in; $d = 20$ in; $f_c' = 3$ ksi; $f_y = 40$ ksi; $M_d = 1,600$ k.in

假设 $a = \frac{d}{5} = \frac{20}{5} = 4$ in

$$A_s = \frac{M_d}{\phi f_y (d - \frac{a}{2})} = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{4}{2})} = 2.47 \text{ in}^2$$

检查假设,

$$a = \frac{A_s f_y}{(.85) f_c' b} = \frac{(2.47)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.38 \text{ in}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

以此为 $a = 3.3$ in.

$$A_s = \frac{(1,600)}{(.9)(40)(20 - \frac{3.3}{2})} = 2.42 \text{ in}^2$$
$$\Rightarrow a = \frac{(2.42)(40)}{(.85)(3)(11.5)} = 3.3 \text{ in} \checkmark$$
$$\rho_{act} = \frac{2.42}{(11.5)(20)} = .011$$
$$\rho_b = (.85)(.85)\frac{3}{40}\frac{87}{87+40} = .037$$
$$\rho_{max} = .75\rho_b = .0278 > \rho_{act} \checkmark$$

37.4.1.4 例题 37.5: 精确分析

作为工程师质疑最终灵活能力的 ACI 方程式的有效性在 R/C 射线中, 您实验地确定了以下压力压力曲线:

$$\sigma = \frac{2\frac{f'_c}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

哪里 f'_c 相应的 ε_{max}.

我们正在寻找

1. 确定 R/C 梁 的准确平衡的 钢材 比例 $b = 10"$, $d = 23"$, $f'_c = 4,000$ 狗, $f_y = 60$ 李, $\varepsilon_{max} = 0.003$.
2. 对该部分的准确应力分布的方程式。
3. 确定压力的总强度 C, 以及其位置, 在中性轴的位置方面 c.
4. 与 ACI 318 相比。

解决方案如下:

1. 应力-应变:
$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667 \times 10^6 \varepsilon}{1 + 1.11 \times 10^5 \varepsilon^2}$$
2. 假设在失败时崩溃, 因此应变分配将由
$$\varepsilon = \frac{0.003}{c} y$$
3. 将这两个方程式结合起来:
$$\sigma = \frac{8,000\frac{y}{c}}{1 + \left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

4. 总压力的强度是由

$$\begin{aligned} F &= \int_0^c dF = b\int_0^c \sigma dy = b\int_0^c \frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy = b\frac{8,000}{c}\int_0^c \frac{y}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2}dy \\ &= 8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c = 8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c \\ &= 4,000bc\ln(2) = 2,773bc \end{aligned}$$

5. 平衡 需要 $T = C$

$$2,773bc = A_s f_y$$

从 应变 图表:

$$\frac{.003}{c} = \frac{\varepsilon_y + .003}{d} \Rightarrow c = \frac{(.003)d}{\varepsilon_y + .003}$$

$$c = \frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29,000} + .003} = 13.6 \text{ in}$$

6. 结合过去两种方程式

$$A_s = \frac{(2,773)(10)(13.6)}{60,000} = 6.28 \text{ in}^2$$

7. 要确定时刻, 我们首先必须确定压缩力量的中心。從 中性轴 中测量

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{\int ydA}{A} = \frac{b\int y\sigma dy}{2,773bc} = \frac{b\int_0^c \frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}dy}{2,773bc} = \frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy \\ &= \frac{2.885}{c^2}\int_0^c \frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}dy = \frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c \frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2 y^2}\right] \\ &= .01557\left[yc^2 - c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1} y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Big|_0^c \\ &= .01557\left[c^3 - c^3\tan^{-1}(1)\right] = (.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1)) = 8.43 \text{ in} \end{aligned}$$

8. 下一篇: 我们现在解决了

$$M = A_s f_y(d - c + \overline{y}) = (6.28)(60)(23 - 13.61 - 8.43) = 6,713 \text{ k.in}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9. 使用 ACI 代码

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285$$

$$A_s = \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55 \text{ in}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f' cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57 \text{ in}$$

$$M = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6,765 \text{ k.in}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61$$

10. 我们总结

	准确	这里
A_s	6.28	6.55
c	13.6	13.6
$\overline{y}'$	5.18	5.78
M	6,713	6,765

37.4.2 应用:R/C 列的塑料强度

34 列或更准确的 **梁 列** 它们是与轴力和灵活性, 由应用力量的强度引起。

35 取决于轴力的精度, 我们将有三种可能的失败模式, 图 37.8a

1. 荷载的强度 ⇒ 因 钢材 的输出而失败 (基本上是梁).
2. 微小的荷载 ⇒ 故障 因破坏 混凝土
3. 平衡的状态, 我们同时失败的混凝土破裂和钢材产量。

36 由于故障是由 flexure 和 轴力 的组合引起的, 我们将有一个故障包装或 “出生条件” (相似于讨论的 §55.2) 在此情况下, 被称为 **互动图表**.

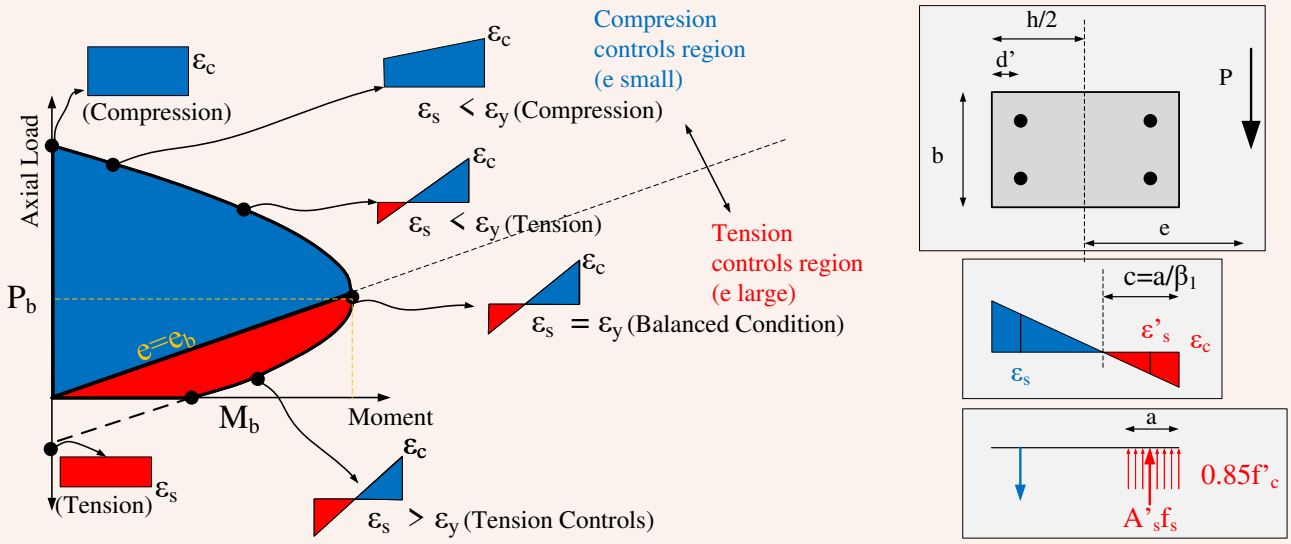
37 相互作用图表显示在 图 37.8a 而且, 一旦我们通过三个失败模式的细节, 就会更好地理解。

38 假设 $A'_s = A_s; \rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A'_s}{bd}; f'_s = f_y$

平衡条件

39 有一个特定的精度。$e_b = \frac{M}{P}$ 这样的失败将由钢材的同时输出和混凝土的破裂引发。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 互动图表　　(b) 自由体图

图 37.8: 柱 免费体和互动图表

40 从 应变 图表 (和变形协调的混凝土和钢材线), 图 37.8b

$$\varepsilon_c = .003$$
$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$
$$c = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d$$

导致的

$$\frac{\varepsilon'_s}{c - d'} = \frac{\varepsilon_c}{c}$$
$$\Rightarrow \varepsilon'_s = \frac{c - d'}{c} \varepsilon_c$$

因此, 压缩 钢材 将产生 (伊。$\varepsilon'_s = \varepsilon_y$) 為 $\varepsilon_c = .003$

41 從 平衡

$$\left.\begin{array}{ll} P_n & = .85 f'_c a b + A'_s f'_y - A_s f_s \\ f_s & = f_y \\ A_s & = A'_s \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ll} a & = \frac{P_n}{.85 f'_c b} \\ a & = \beta_1 c_b \\ c_b & = \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d \end{array}\right\} P_{n,b} = .85 \beta_1 f'_c b d \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$P_{nb} = .85\beta_1 f_c' bd \frac{87,000}{f_y + 87,000}$$

42 要得到 M_{nb} 我們採取一瞬間關於壓力中心 钢材 A_s 内部力量, 这必须是平等的, 与外部力量相反。應用時刻, 图 37.9.

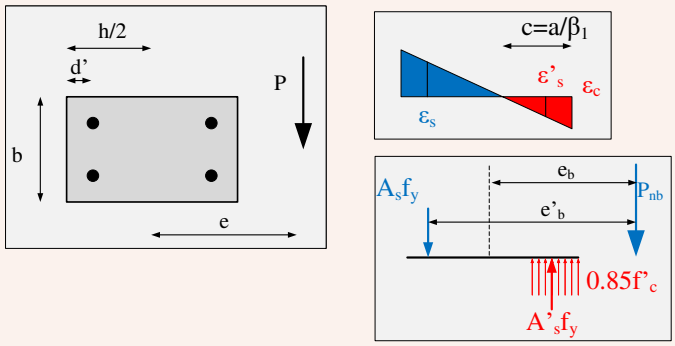


图 37.9: 柱 自由體, 平衡状態

$$M_{nb} = \underbrace{P_{nb} e_b}_{M_{ext}} = \underbrace{.85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d')}_{M_{int}}$$

43 注意: 因内部时刻 $A_s f_y$ 和 $A_s' f_y$ 互相取消对象列。

紧张失败

44 我们应该考虑两个场景。

案例 I , e 已知和 $e > e_b$

在此情况下 a 和 P_n 不知不觉, 为未能被引发的 f_y 在 A_s 我们必须有 $e > e_b$.

可以假设 $A_s f_y = A_s' f_y$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P_n = .85 f_c' ab \Rightarrow a = \frac{P_n}{.85 f_c' b}$$
$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n e' = P_n (d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y' (d - d')$$

再一次, 两种方法

1. 互动解决这两个方程式

   (a) 假设 a $(a < \frac{h}{2})$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(b) 從 应变 变形协调 解决 f_{sc}, 中心如果适用, 钢压。
(c) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$ 解决為 P_n
(d) $\Sigma M = 0$ 对于紧张强化,$\Rightarrow$ 解决為 P_n
(e) 如果两者之间没有相容 P_n 以便通过解决 a 从 $\Sigma F_y = 0$

2. 将它们结合在一个四方方程式中 P_n

$$P_n = .85 f_c' b d \left\{ -\rho - (\frac{e'}{d} - 1) + \sqrt{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + 2\rho \left[\mu\left(1 - \frac{d'}{d}\right) + \frac{e'}{d}\right]} \right\}$$

哪里

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{A_s'}{bd}$$
$$\mu = \frac{f_y}{.85 f_c'}$$

案例 II c 已知和 $c < c_b$; P_n 未知的
在这个情况下, 我们只有两个未知的, P_n 和 f_s'.

$$\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &\stackrel{\text{def}}{=} f_y \\
f_s' &= \varepsilon_u E_s \frac{c - d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f_c' a b \\
P_n &= C + A_s' f_s' - A_s f_y \\
M_n &= C\frac{h - a}{2} + A_s' f_s' \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2}\right) \\
e &= \frac{M_n}{P_n}
\end{aligned}$$

注意, 在确定相互作用图表时, 这种方法受益。

压缩失败

45 再次, 我们考虑了两个不同的案例:

案例 I e 已知和 $e < e_b$; P_n, a 和 f_s 未知的
压缩失败发生时 $e' < e_b' \Rightarrow \varepsilon_u = .003$, 假设 $f_s' = f_y$, 和 $f_s < f_y$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

从地质学

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\varepsilon_u}{\frac{f_s}{E_s} + \varepsilon_u} d \\
\Rightarrow f_s &= E_s \varepsilon_u \frac{d-c}{c} \\
&= E_s \varepsilon_u \frac{d - \frac{a}{\beta_1}}{\frac{a}{\beta_1}} \\
P_n &= .85 f_c' ab + A_s' f_y - A_s f_s \\
P_n e' &= .85 f_c' ab (d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d')
\end{aligned}
$$

这将带来一个圆形方程式。P_n 可以解决的分析或以 iteration。

1. 假设 a ($a \simeq h$)
2. 解决为 $\Sigma M = 0$ 关于紧张强化 & 解决为 P_n
3. 從 应变 变形协调 解决 f_s
4. 查看此 $\Sigma F_y = 0$ & 解决为 a
5. If $a^{i+1} \neq a^i$ 走到步骤 2

案例二: c 已知和 $c > c_b$; f_s, f_s', 和 P_n 未知的
在此情况下

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \quad \leq f_y \\
f_s' &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \quad \leq f_y \\
C &= 0.85 f_c' ab \\
P_n &= C + A_s f_s + A_s' f_s' \\
M_n &= C \frac{h-a}{2} + A_s' f_s' \left(\frac{h}{2} - d' \right) + A_s f_s \left(d - \frac{h}{2} \right)
\end{aligned}
$$

37.4.2.1 例题 37.6: R/C 柱 等。c 已知

一根 12×20 英寸的柱，采用一根编号为 4 条区域 1.0 in^2 在每个角落。$f_c' = 3.5$ ksi, $f_y = 50$ ksi, $d' = 2.5$ in. 定义: 1) P_b 和 M_b; 2) 荷载和时刻为 $c = 5$ in; 3) 荷载和时刻为 $c = 18$ in; 4) 交互图表

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

平衡条件 因此, 重定向了基本的等式, 而不是只是替代以前的衍生平等。

$$
\begin{aligned}
d &= h - d' = 20 - 2.5 = 17.5 \text{ in} \\
c_b &= \frac{.003}{\frac{f_y}{E_s} + .003} d = \frac{.003}{\frac{50}{29{,}000} + .003} 17.5 = 11.1 \text{ in} \\
a &= \beta_1 c_b = (0.85)(11.1) = 9.44 \text{ in} \\
f_s &\overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi} \\
f_s' &= E_s \frac{c - d'}{c} \varepsilon_c = (29{,}000)(\frac{11.1 - 2.5}{11.1}(0.003) = 67.4 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_s' = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f_c' a b = (0.85)(3.5)(9.44)(12) = 337 \text{ k} \\
P_{nb} &= C + A_s f_s - A_s' f_s = 337 + (2.0)(50) + (2.0)(-50) = 337 \text{ k} \\
M_{nb} &= .85 f_c' a b (d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d') \\
&= 337 \left(17.5 - \frac{9.44}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 5{,}807 \text{ k.in} = 484 \text{ k.ft} \\
e_b &= \frac{5{,}807}{337} = 17.23 \text{ in}
\end{aligned}
$$

压力失败, $c = 5$ **in**

$$
\begin{aligned}
f_s &\overset{\text{def}}{=} f_y = 50 \text{ ksi} \\
f_s' &= \varepsilon_c E_s \frac{c - d'}{c} \quad \leq f_y \\
&= (0.003)(29{,}000)\frac{5.0 - 2.5}{5.0} = 43.5 \text{ ksi} \\
a &= \beta_1 c = 0.85(5.0) = 4.25 \text{ in} \\
C &= 0.85 f_c' a b \\
&= (0.85)(3.5)(4.25)(12) = 152 \text{ k} \\
P_n &= C + A_s' f_s' - A_s f_y \\
&= 152 + (2.0)(43.5) - (2.0)(50) = 139 \text{ k} \\
M_n &= .85 f_c' a b (d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d') \\
&= 152 \left(17.5 - \frac{4.25}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5 - 2.5) = 3{,}638 \text{ k.in} = 303 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{3{,}638}{139} = 26.3 \text{ in}
\end{aligned}
$$

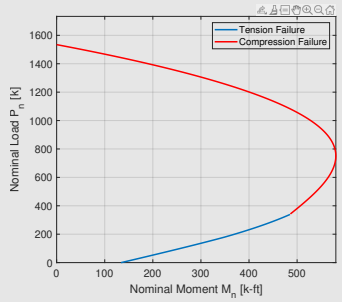
审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

压缩失败, $c = 18$ **in**

$$
\begin{aligned}
a &= \beta_1 c = 0.85(18) = 15.3 \text{ in} \\
f_s &= \varepsilon_c E_s \frac{d-c}{c} \qquad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{17.5-18.0}{18.0} = -2.42 \text{ ksi} \quad A_s \text{ is under compression} \\
f'_s &= \varepsilon_c E_s \frac{c-d'}{c} \qquad \leq f_y \\
&= (0.003)(29,000)\frac{18.0-2.5}{18.0} = 75 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f'_s = 50 \text{ ksi} \\
C &= 0.85 f'_c ab = (0.85)(3.5)(15.3)(12) = 546 \text{ k} \\
P_n &= C + A'_s f'_s - A_s f_s \\
&= 546 + (2.0)(50) - (-2.42)(2) = 650 \text{ k} \\
M_n &= .85 f'_c ab(d - \frac{a}{2}) + A'_s f_y (d - d') \\
&= 546\left(17.5 - \frac{15.3}{2}\right) + (2.0)(50)(17.5-2.5) = 6,880 \text{ k.in} = 573 \text{ k.ft} \\
e &= \frac{5,809}{650} = 17.2 \text{ in}
\end{aligned}
$$

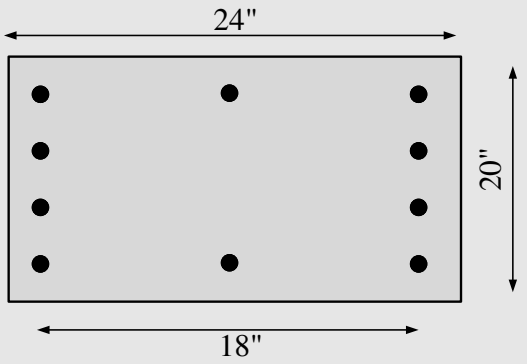
互动图表 MATLAB® 列表在附件中 I.2.13.



37.4.2.2 例题 37.7: R/C 柱 等。e 已知

对于下一个 柱, 确定 e_b, P_b, M_b; P_n 和 M_n 为 $e = 0.1h$ 和 $e = h$. $f'_c = 3,000$ psi 和 $f_y = 40,000$ psi. 每个酒吧的区域是 1.56 in^2.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



平衡条件:

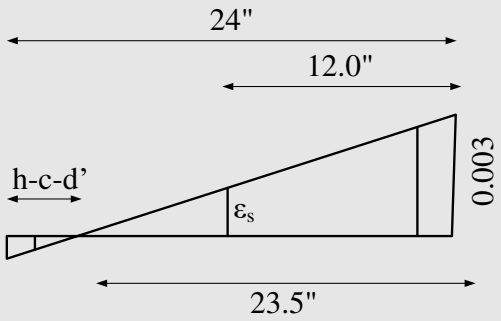
$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{40}{29,000} = .001379$$
$$c_b = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_y} d = \frac{.003}{.003 + .001379}.003 = 14.4 \text{ in}$$
$$a = \beta_1 c_b = (.85)(14.4) = 12.2 \text{ in}$$
$$C_c = .85 f'_c ab = (.85)(3)(12.2)(20) = 624 \text{ k}$$
$$\varepsilon_{sc} = \frac{c - h/2}{c}\varepsilon_u = \frac{14.4 - 12}{14.4}.003 = .0005$$
$$f_{sc} = (29,000)(.0005) = 15 \text{ ksi} \quad \text{center bars}$$
$$C_s = (.0005)(29,000)(2)(1.56) = 46.8 \text{ k}$$
$$P_{nb} = 624 + 46.8 = 670.8 \text{ k}$$

请注意, 压缩 钢材 是由于 $d' > 2"$ 和 $c > 6"$ (如前所示)
關於中心部的瞬間

$$\begin{aligned} M_{nb} &= P_{nb} e \\ &= .85 f'_c ab \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) + A_s f_y \left(\frac{h}{2} - d'\right) + A'_s f_y \left(\frac{h}{2} - d'\right) \\ &= (.85)(3)(12.2)(20)\left(12 - \frac{12.2}{2}\right) + 4(1.56)(9)(40) + 4(1.56)(40 - .85 \times 3)(12 - 3) \\ &= 3,671 + 2,246 + 2,246 \\ &= 8,164 \text{ k.in}; 680 \text{ k.ft} \end{aligned}$$
$$e_b = \frac{8,164}{670.8} = 12.2 \text{ in}$$

e= .1 h $e = (.1)(24) = 2.4 \text{ in} < e_b \Rightarrow$ 压缩失败。P_n, a 和 f_s 是未知的。可用的方程式:1) $\Sigma F = 0$; 2) $\Sigma M = 0$; 和 3) 应变 图表; 以 iterations 解决。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



1. 假设 $a = 20$ in

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{20}{.85} = 23.5 \text{ in}$$

2. 為中心 钢材 (从地质学)

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_{sc}}{c - \frac{h}{2}} &= \frac{.003}{c} \\
\Rightarrow \varepsilon_{sc} &= \frac{c - \frac{h}{2}}{c}.003 \\
f_{sc} &= E_s \varepsilon_{sc} \\
&= E_s \frac{c - \frac{h}{2}}{c}.003 \\
&= 29,000 \frac{23.5 - 12}{23.5}.003 = 42.5 \text{ ksi} > f_y \Rightarrow f_{sc} = f_y
\end{aligned}$$

3. 關於緊張 钢材 bar 的中心

$$\begin{aligned}
P_n e' &= 0.85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (h - 2d') + A_{sc} f_y (\frac{h}{2} - d') \\
P_n(9 + 2.4) &= (.85)(3)(20)(20)(21 - \frac{20}{2}) + 4(1.56)(40)(24 - 6) + 2(1.56)(40)(9) \\
&= 11,220 + 4,493 + 259.7 \\
\Rightarrow P_n &= 1,476 \text{ k}
\end{aligned}$$

4. 获取 ε_s 紧张酒吧 (从 应变 图表)

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_s}{h - d' - 23.5} &= \frac{.003}{c} \\
\Rightarrow \varepsilon_s &= \frac{.003}{23.5}(24 - 3 - 23.5) \\
&= -.000319 \\
f_s &= E\varepsilon_s = (29,000)(0.000319) = 9.25 \text{ ksi}
\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 带 $\Sigma F = 0$ 要检查假设 a

$$\begin{aligned} P_n &= 0.85 f_c' ab + A_s' f_y + A_{sc} f_{sc} + A_s f_y \\ 1,476 \text{ k} &= (.85)(3)(a)(20) + (4)(1.56)(40) + (2)(1.56)(40) + (4)(1.56)(9.25) \\ 1,476 &= 51a + 432.1 \\ \Rightarrow a &= 20.4 \text{ in} \checkmark \\ P_n &= 1,476 \text{ k} \\ M_n &= (1,476)(2.4) = 3,542 \text{ k.in} = 295 \text{ k.ft} \end{aligned}$$

e=h

1. 在此情况下 $e = 24 \text{ in} > e_b \Rightarrow$ 因紧张而失败。P_n 和 a 是未知的。我们有两个方程式:1) $\Sigma F = 0$, 和 2) $\Sigma M = 0$.
2. 假设 $a = 7.9 \text{ in} \Rightarrow c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{7.9}{.85} = 9.3 \text{ in}$
3. 钢材 应力 在中心

$$\begin{aligned} \frac{c}{.003} &= \frac{12 - c}{\varepsilon_{sc}} \\ \Rightarrow \varepsilon_{sc} &= \frac{12 - 9.3}{9.3}.003 = .00087 \\ \Rightarrow f_{sc} &= (29,000)(0.00087) = 25.3 \text{ ksi} \end{aligned}$$

4. 伊特拉特

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 \Rightarrow P_n &= (.85) f_c' ab + A_{sc} f_{sc} \\ &= (.85)(3)(7.9)(20) - 2(1.56)(25.3) \\ &= 403 - 79 = 324 \text{ k} \end{aligned}$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow P_n(e + h/2 - d') = .85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_y (d - d') - A_{sc} f_{sc} (\frac{d - d'}{2})$$

$$\begin{aligned} P_n(24 + 9) &= (.85)(3)(7.9)(20)(21 - \frac{7.9}{2}) + 4(1.56)(40)(21 - 3) \\ &\quad + 2(1.56)(25.3)(9) \\ P_n(33) &= 6,870 + 4,493 - 710 = 10,653 \text{ k.in} \\ \Rightarrow P_n &= 323 \text{ k} \checkmark \end{aligned}$$

5. 定义 M_n

$$M_n = P_n e = (323)(24) = 7,752 \text{ k.in} = 646 \text{ k.ft}$$

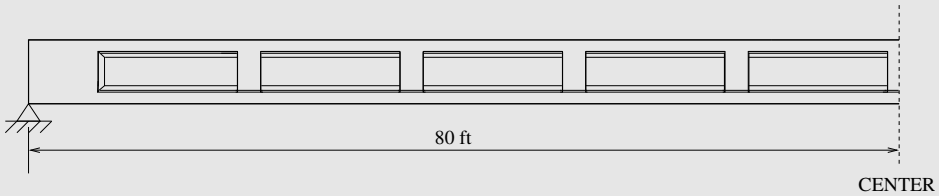
37.4.3 预应力混凝土

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

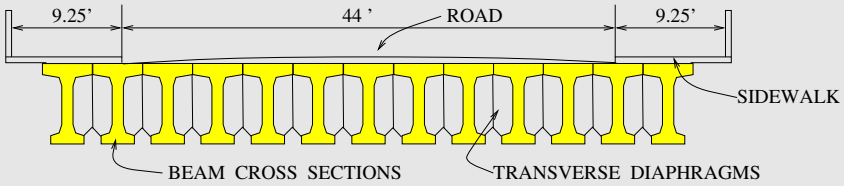
37.4.3.1 例题 37.8: 案例研究:Walnut Lane Bridge

下一篇: 重复 Billington, 1983 Structural Studies.

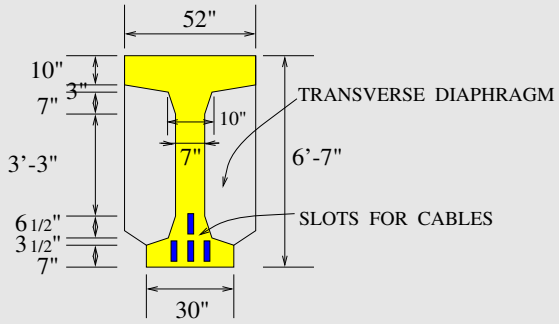
历史悠久的 Walnut Lane Bridge (第一大 预应力混凝土 桥在美国) 由三条螺旋, 两侧长 74 英尺和中间一长度为 160 英尺。十三个预压的可克雷特泡沫被放置一边一边, 形成 44 条路线和 2 条路径的总宽度。9.25 英尺的侧路。之間, 與他們同行, 並且與他們相處。转向的粘贴器, 连接侧线的粘膜。



ELEVATION OF BEAM HALF



CROSS - SECTION OF BRIDGE

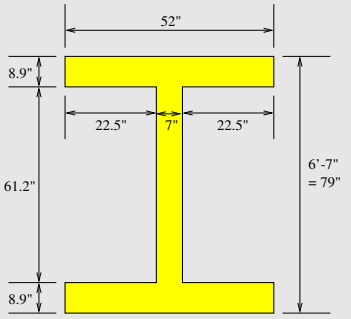


CROSS - SECTION OF BEAM

跨部分属性

此分類上一篇: 梁 截面 顯示下方, 並且簡化

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



SIMPLIFIED CROSS - SECTION OF BEAM

$$A_c = 2(8.9)(52) + (7)(61.2) = 1,354 \text{ in}^2$$

$$I = 2\left[\frac{(52)(8.9)^3}{12} + (52)(8.9)\left(\frac{79}{2} - \frac{8.9}{2}\right)^2\right] + \frac{(7)(61.2)^3}{12}$$

$$== 1,277 \times 10^3 \text{ in}^4$$

$$c_1 = c_2 = \frac{h}{2} = \frac{79}{2} = 39.5 \text{ in}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{I}{c} = \frac{1,277 \times 10^3}{39.5} = 32,329 \text{ in}^3$$

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{1,277 \times 10^3}{1,354} = 943. \text{ in}^2$$

预告片

每個 梁 都由兩個中間的平面電缆和兩個外部的垂直電線接近。旗帜的。所有四个都具有大约相同的精度, 在中间范围为 2.65 英尺或 31.8 英寸。

每個 索 接口由 64 條線組成, 各式各樣的直径 0.27 英寸 因此, 钢材的前压的总面积由:

$$A_{wire} = \pi(d/2)^2 = 3.14(\frac{0.276 \text{ in}}{2})^2 = 0.0598 \text{ in}^2$$

$$A_{cable} = 64(0.0598) \text{ in}^2 = 3.83 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = 4(3.83) \text{ in}^2 = 15.32 \text{ in}^2$$

虽然使用的 钢材 的最终 抗拉强度 是 247 ksi, 但电缆已经只有 131 ksi, 因此初步的前压力 P_i 等同于

$$P_i = (131) \text{ ksi}(15.32) \text{ in}^2 = 2,000 \text{ k}$$

失败率为 13%因此, 有效的力量是

$$P_e = (1 - 0.13)(2,000) \text{ k} = 1,740 \text{ k}$$

负载

梁的自我重量是 $q_0 = 1.72$ k/ft. 混凝土的 (密度=.15 k/ ft^3) 道路有 0.45 英尺厚。因此, 对于 44 英尺的宽度, 总 荷载 超过一个单一的 梁 是

$$q_{r,tot} = \frac{1}{13}(44) \text{ ft}(0.45) \text{ ft}(0.15) \text{ k/ ft}^3 = 0.23 \text{ k/ft}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

同样, 对于 9.25 英尺宽和 0.6 英寸厚的侧行:

$$q_{s,tot} = \frac{1}{13}(2)(9.25)\ \text{ft}(0.60)\ \text{ft}(0.15)\ \text{k/ ft}^3 = 0.13\ \text{k/ft}$$

我们注意到, 重量可以平等地传播在侧面 13 个射线上。幻灯片

总值 恒载 是

$$q_{DL} = 0.23 + 0.13 = 0.36\ \text{k/ft}$$

活载 是由流量创建的, 并估计 94 psf, 因此在 62.5 英尺的宽度上, 这给了一个统一的 活载

$$w_{LL} = \frac{1}{13}(0.094)\ \text{k/}ft^2(62.5)\ \text{ft} = 0.45\ \text{k/ft}$$

最后, 相结合的死和活载为梁是

$$w_{DL+LL} = 0.36 + 0.45 = 0.81\ \text{k/ft}$$

灵活的压力

1. 施加力量, P_i 只有

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 - \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = 490.\ \text{psi} \\ f_2 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) \\ &= -\frac{(2\times 10^6)}{1,354}\left(1 + \frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right) = -3,445.\ \text{psi} \end{aligned}$$

2. P_i 和梁的自我重量 M_0 (目前要注意的是, 该梁 因预压而加速)

$$M_0 = \frac{(1.72)(160)^2}{8} = 5,504\ \text{k.ft}$$

因此, 灵活压力将相当于:

$$f_{1,2}^{w_0} = \mp\frac{M_0}{S_{1,2}} = \mp\frac{(5,50.4)(12,000)}{943.} = \mp 2,043\ \text{psi}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{P_i}{A_c}\left(1 - \frac{ec_1}{r^2}\right) - \frac{M_0}{S_1} \\ &= 490 - 2,043 = -1,553\ \text{psi} \\ f_{ti} &= 3\sqrt{f_c'} = +190\checkmark \\ f_2 &= \frac{P_i}{A_c}\left(1 + \frac{ec_2}{r^2}\right) + \frac{M_0}{S_2} \\ &= -3,445 + 2,043 = -1,402.\ \text{psi} \\ f_{ci} &= .6f_c' = -2,400\checkmark \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. P_e 和 M_0. 如果有 13% 失败, 然后有效的力量 P_e 等同于 $(1-0.13)(2\times10^6)=1.74\times10^6$ lbs

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right)-\frac{M_0}{S_1}\\
&= -\frac{1.74\times10^6}{1,354}\left(1-\frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right)-2,043. = -1,616 \text{ psi}\\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right)+\frac{M_0}{S_2}\\
&= -\frac{1.74\times10^6}{1,354}\left(1+\frac{(31.8)(39.5)}{943.}\right)+2,043. = -954. \text{ psi}
\end{aligned}$$

4. P_e 和 $M_0+M_{DL}+M_{LL}$

$$M_{DL}+M_{LL}=\frac{(0.81)(160)^2}{8}=2,592 \text{ k.ft}$$

相应的压力

$$f_{1,2}=\mp\frac{(2,592)(12,000)}{32,329}=\mp962. \text{ psi}$$

因此,

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{P_e}{A_c}\left(1-\frac{ec_1}{r^2}\right)-\frac{M_0+M_{DL}+M_{LL}}{S_1}\\
&= -1,616-962. = -2,578. \text{ psi}\\
f_{cs} &= .45f'_c = -2,700\checkmark\\
f_2 &= \frac{P_e}{A_c}\left(1+\frac{ec_2}{r^2}\right)+\frac{M_0+M_{DL}+M_{LL}}{S_2}\\
&= -954+962. = +8. \text{ psi}\\
f_{ts} &= 6\sqrt{f'_c} = +380\checkmark
\end{aligned}$$

37.5 性能基工程 (PBE)

46 PBE 定义为由设计标准的选择、适当的结构系统、布局、比例和细节组成, 以及结构及其非结构组件和内容的确定和控制, 以及建筑质量和长期维护。以便在特定的激情水平和确定的可靠性水平下, 结构或设施不会超过一定的限制状态受到损害。PBE 是一种过程, 从项目的初始概念开始, 并在整个结构的生命中持续。(Bertero and Bertero, 2002).

47 以性能为基础的地震设计明确评估建筑物可能如何表现, 考虑到潜在危险可能会出现, 并考虑到对潜在风险的定量化中内在的不确定性以及对实际建筑反应的评估中的不确定性。

48 与 LRFD 不同, 它不限于一个危险水平, 而是多元化。

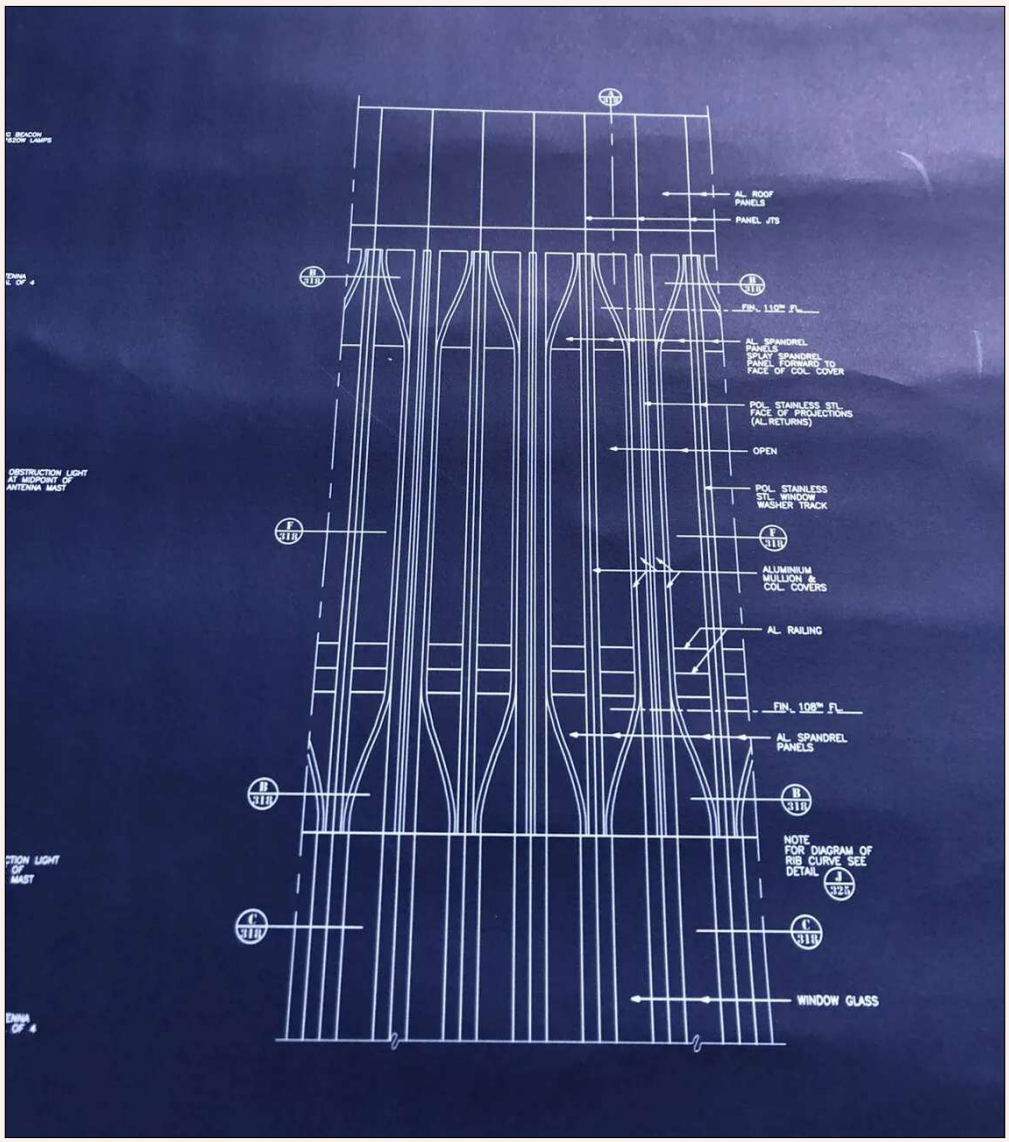
49 性能是根据事故发生的可能性、维修和更换成本、维改时间以及不安全的放置而测量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

50 性能可以根据特定 地震 场景或强度进行评估, 或者考虑到可能发生的所有地震以及每个地震的概率, 在一定时间内。

51 表现表达在一系列的差异性性能水平, 被定义为操作、即时占用、生命安全和崩溃预防。

52 PBEE 超越设计和分析, 并将在章节中详细介绍 72



世界贸易中心蓝印

一张图表代表设计理论, 通过将概念思想的翻译成准确的技术表达。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

38 Fermi 解决方案 (接近分析)

摘要

工程师和熟练的建筑师经常面临快速、近距离执行的挑战。“背后的包装”计算。通过熟练地结合机械和静态的基本方程式与精确绘制的分裂形状图表，它们可以将一个静态不确定结构转化为一个特定的结构来解决内部力量。同样，建筑物可以简化以确定基础反应和顶侧转移。章节开始于对近分析和所谓的 *Fermi* 问题进行模拟。然后，它探讨了对垂直和水平负载的简单射线和框架的接近反应分析，以确定其他非常不确定的结构中的内部力量。接下来是对墙和切割系统的近距离结构反应进行审查，确定基础反应和顶部转移。(流动).

38.1 内部力量 1202
38.1.1 破碎的形状 & 影响点 1202
38.1.2 梁 时刻在 支座 的强度方面 . 1206
38.1.3 分析方法 1207
38.2 结构性反应 1227
38.2.1 Shaft 子系统 1227
38.2.2 墙 1229
38.2.3 威胁的墙壁 1231
38.2.4 侧面缺陷 1232

[1] A **农场** 问题，是基于一个背面包的解决方案对一个复杂的问题的估计。它涉及到关于数量的猜测，并且不寻找准确的解决方案。(尺寸的顺序往往足够).

[2] 据报道，当他见证了第一枚原子弹爆炸时，费尔米提出了一种简单的方法来猜测炸弹的强度。他在爆炸期间只掉了一块纸，然后测量了旅行的距离。他在接受值 21 千吨的大小顺序内得到了 10 千吨。

[3] 这就是所谓的 Fermi 问题的发起，需要合理的假设和对一个情况的估计，以便找到一个接近的答案。

[4] 这就是本章的目的。我们可以做出合理和接近的假设，以估计结构中的内部力量的大小。这种做法总是有望的，在我们进行复杂的分析之前，至少要抓住解决方案。

[5] 這實際上是一個完美的 **法尔米问题**.

38.1 内部力量

[6] 首先，我们将研究一个静态不定义的框架转化为一个确定的过程，简单地估计在变形形式中的通胀点的位置。

38.1.1 破碎的形状 & 影响点

[7] 回忆 (§22.3) 这

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

哪里 ρ 是曲率的射线。因此，零时刻会发生在一个 **影响点**，而曲率的射线越短，时刻就越大。

审阅稿

8 因此, 我们需要找到零时刻的点, 这些将转变一个静态不确定的问题为一个静的, 只是添加条件方程式。(§19.1.3).

9 但是, 首先我们需要在某个 荷载 下正确地绘制结构的分裂形状。

10 为了正确地绘制扭曲的形状, 我们将遵循一些基本规则:

1. 忽略与灵活性相比不可忽视的轴形变 (§53.2.1)
2. 如果我们有一个侧 荷载 , 请应用一个小侧 位移.
3. 应该有角旋转的变形协调 (伊。90 度曲线保持在 90 度; 固定端仍然固定).
4. 变形要顺利 (除外, 在内心).

11 结构的歪曲可以分解到

角落节点 图 38.1 我们区分三种方式:A) 开幕式,B) 关闭,C) 混合。

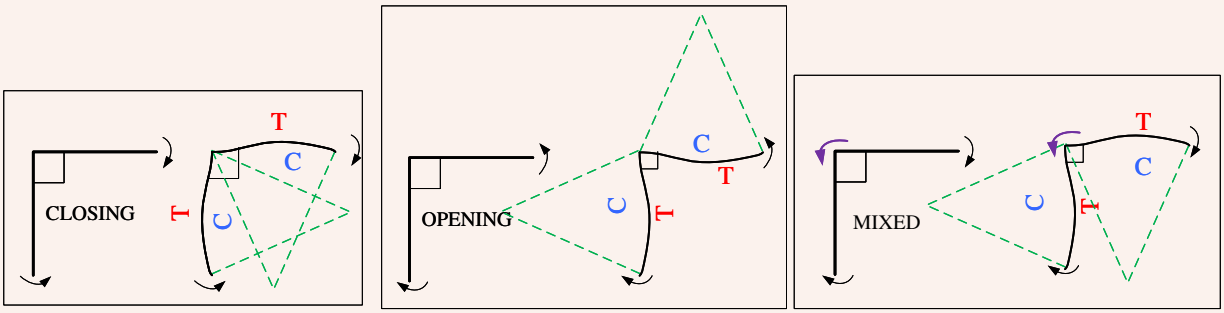


图 38.1: 相容的角旋转

贝姆 如在图中描述 38.2.

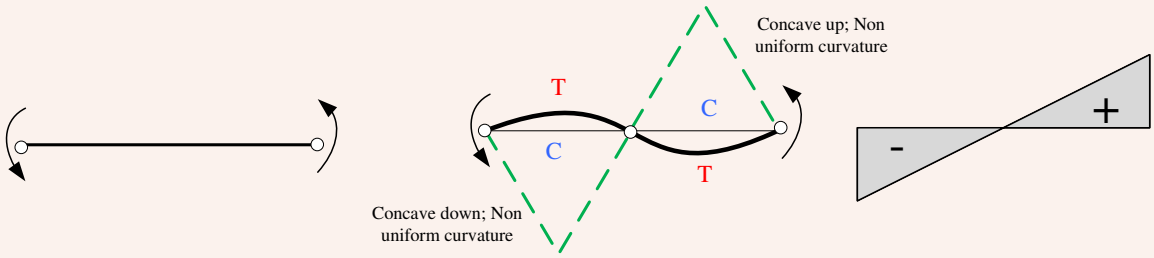


图 38.2: 挠度 一个简单的 梁

框架 我们将区分两组负载:

垂直 荷载 需要特别注意, 因为脱落的形状将很大程度上取决于列和箭头的相对紧密度。(§27.3.1). 因此, 我们将考虑

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 硬列, 图 38.3. 注意越短的射线, 时刻越大。

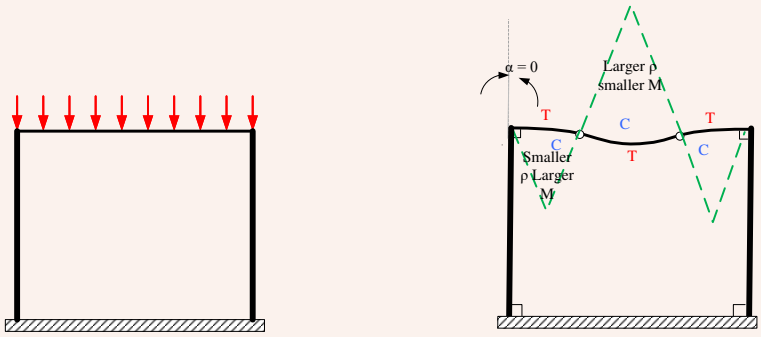


图 38.3: 挠度 端口 框架 与垂直下方的硬列 荷载

- 坚固的泡沫: 我们将在泡沫中有小振动和柱子中的大轴力。
- 中间情况 图 38.4

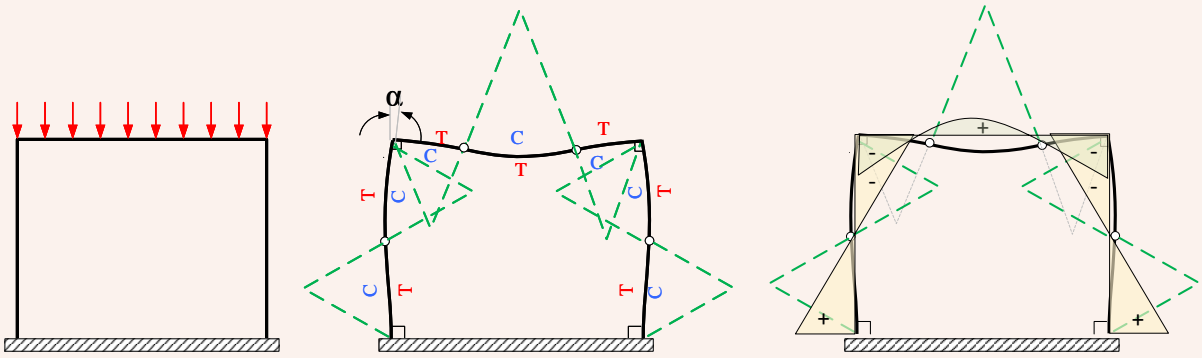


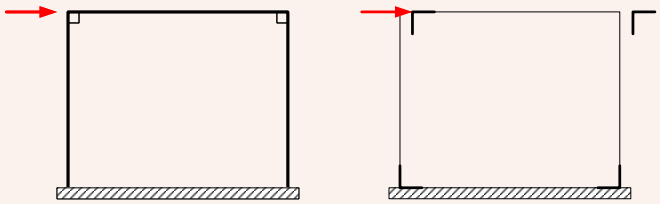
图 38.4: 端口框架在垂直负载下消失

端口 荷载 如在 图 中所示 38.5a. 注意顶角的侧面移动, 图 38.5b.

我们将左侧柱的分散形状绘制, 记住:

- 底部坦克是 90 ^{o}.
- 紧张必须在外面 (以此为内心).
- 柱在顶部被限制。如果十字架 梁 是
  - Infinity 硬: 到 柱 的顶部的坦根也将是 90°. (将会有冲击点。)
  - 非常灵活: 将不会有冲击点, 并将完全内在的混乱。
  - 终端硬度: 不零 转角 在顶部, 和一个冲击点。

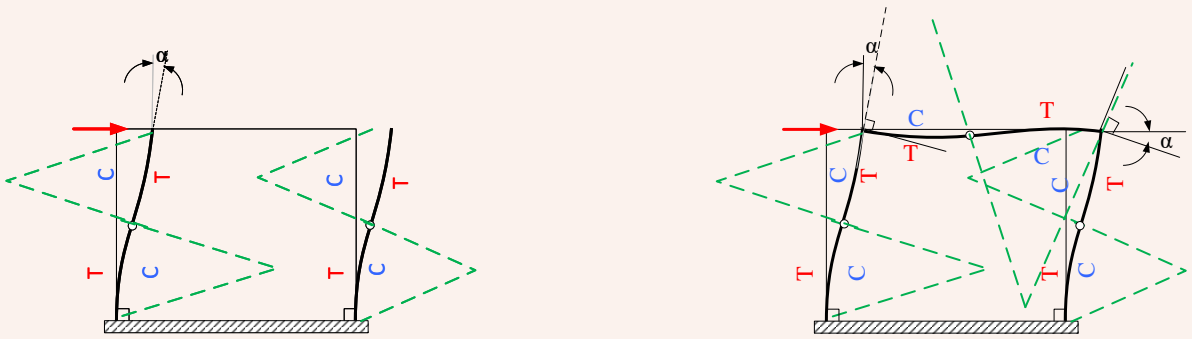
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



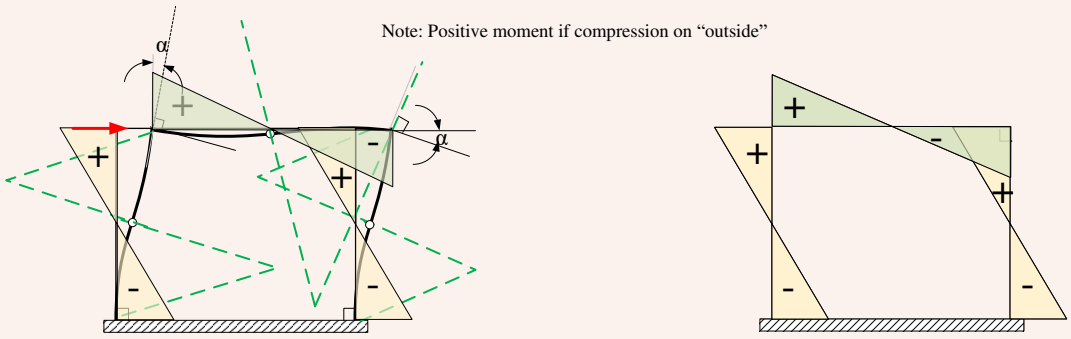
(a) 框架 受侧 荷载 的约束　　(b) 移动角节点

图 38.5: 端口 框架 的例子, 受侧 荷载 的约束

右边的 柱 将具有相同的形状, 并在 图 中显示分裂形状。38.6a.



(a) 破碎的形状



(b) 瞬间图表

图 38.6: 破碎的形状和时刻图; 门户框与侧负载

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

38.1.2 梁 时刻在 支座 的强度方面

12 虽然我们常常认为火箭是完全固定或在其端口自由, 但往往情况更复杂, 并保证特别注意。[1]

13 如果事实上泡沫连接到一个非常硬的列, 而不是为了所有实用目的, 我们可以假设它是紧密连接在结尾。同样, 如果 梁 连接到相对灵活的列, 那么 梁 可以假设有免费支持。

14 这在图中图形显示 38.7. 支座 是灵活的。(红色) 要坚固 (蓝色), 通货膨胀点移动到大约

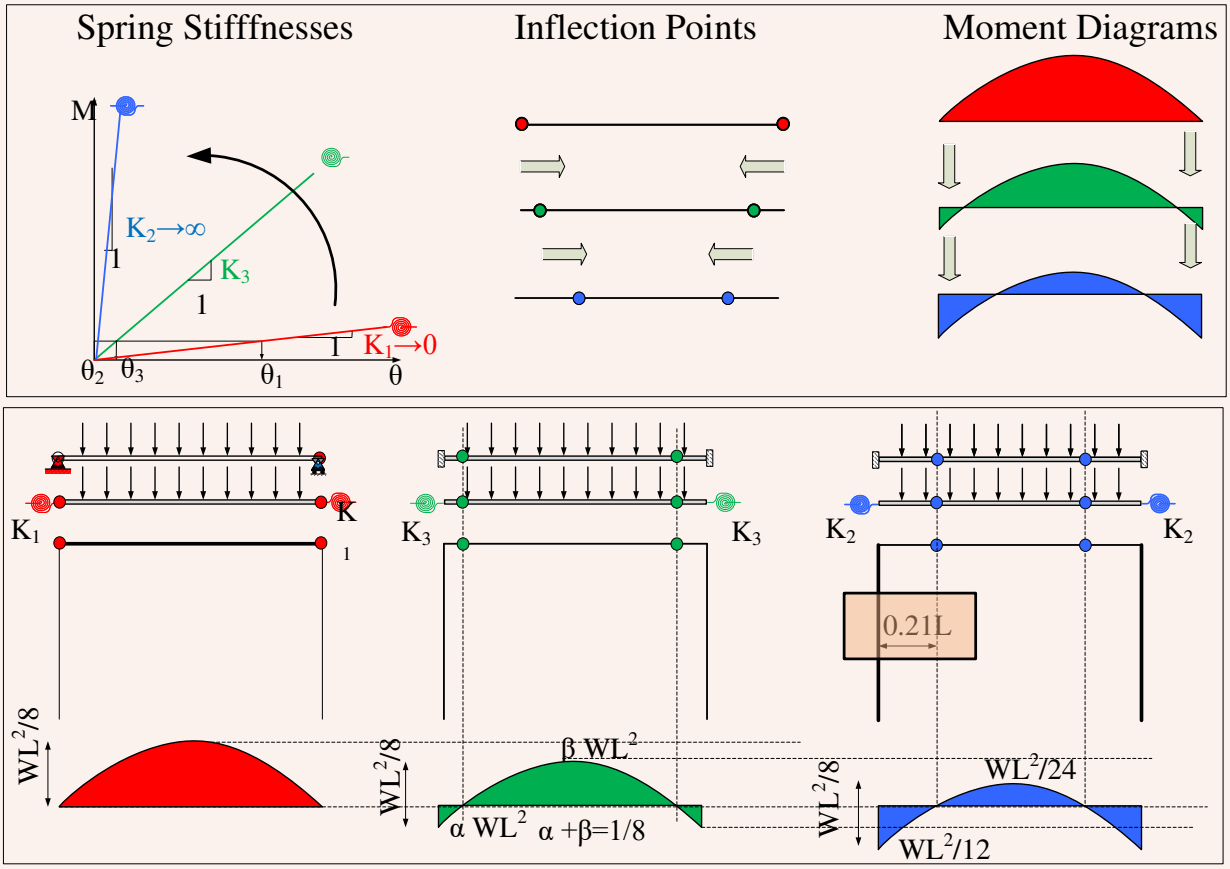


图 38.7: 梁 缺陷在 支座 固定性方面

0.21L, 而瞬间图表被拖到最低的 $wL^2/12$ 在 支座 中。中间值显示在绿色。

15 因此, 考虑到通胀点的位置, 我们可以将梁分为三个部分: 每一个不超过 0.21 的最大长度 2 个端。L 一个中央。每一个是静态定义的基础结构, 可以作为这样分析。

[1]数值 连接到弹性喷泉的泡沫模型分开覆盖 §46.6.2.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

38.1.3 分析方法

16 直角建筑的初步尺寸化, 或者计算机分析的封面背部验证可以通过近距离建筑分析轻松进行。

17 垂直和水平负载必须单独处理。对于水平负载, 有两种方法:

门户方法 对于低高度建筑物, 其高度至少小于水平尺寸的建筑物中, 分裂形状因叶形变异而特征。

Cantilever 方法 对于高高度建筑, 其高度几倍大于其最小水平尺寸的建筑物, 分裂形状由整体灵活性变形占主导地位。

18 建筑系统有三种主要类型:

壁子: 在那里, 非常硬的墙壁由固体木材、面板或布拉格的木材, 或者钢材 木材构成一个严格的子系统。这只适用于小型建筑。

垂直滑板: 由四个固体或固定的墙壁组成一个管道空间结构。管道结构可以是内部 (楼梯, 楼梯) 或外部。最有效的非常高的建筑。

框架: 由线性垂直组件组成 (列) 紧密连接到坚固的水平 (和旋转). 这不是一个非常有效的结构形式抵抗侧面 (风 / 地震) 负载。

38.1.3.1 垂直负载

19 对于一个多层/多层框架, 转机被认为是连续的射击, 而列被认为抵抗由转机所产生的不平衡时刻。我们进一步假设

1. 每个楼层的旋转器作为支持统一荷载的连续射击。
2. 影响点 (图 38.8) 被认为是在
   (a) 每個旋轉器的兩端的十分之一。
   (b) 列的中等高度。

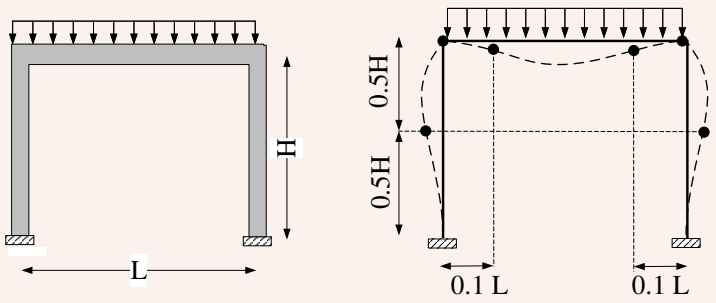


图 38.8: 框架 垂直低于 荷载; 近距离点的位置

3. 忽略了轴效应。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 每个关节的旋转器的不平衡结束时刻分布在上和下列列。

20 然后, 所有的泡沫都是静态定义的, 并且有间隔。L_s 相当于 0.8 的旋转器的原始长度, L. 因此, 假设通胀点是 $0.1L$ 其中有哪些 0 仅支持 梁 , 以及 $0.21L$ 紧密连接的泡沫 (数字 38.9).

21 计算序列 (非常重要)

1. 正好时刻
2. 消极时刻
3. 吉尔德 • 谢尔
4. 柱 轴力
5. 柱 时刻
6. 柱 Shears 标签
7. 旋转轴力

22 程序如下所述, 不需要记住任何方程式, 只需使用平衡和免费的身体图表的方程, 在那里所有终端会员板和时刻都被认为是积极的。

1. 正好时刻

23 以 图 相似之处 38.7, 并承认, 影响点在于 $0.1L$ 从支持, 我们考虑到 FIG。38.9 把旋转器分

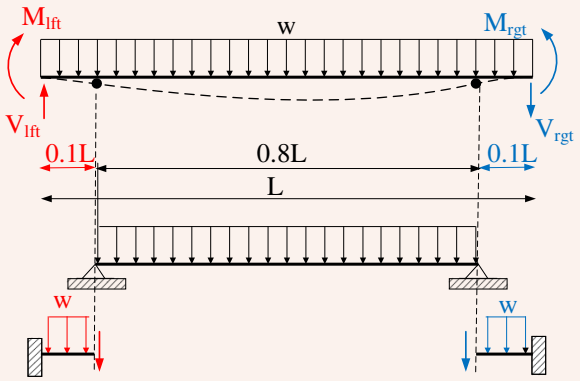


图 38.9: 对垂直负载的框架进行近距离分析; 旋转时刻

成三部分。

24 最积极的时刻将是

$$M^+ = \frac{1}{8}wL_s^2 = w\frac{1}{8}(0.8)^2L^2 = 0.08wL^2$$

25 请注意, 在完全 固定支座 的 cse 中, 并在 $0.21L$ 最长的时刻是 $wL^2/24 = 0.041667$.

2. 消极时刻

26 旋转时的最大负面时刻结束, 再次从图开始 38.9 将是

$$M^{left} = M^{rgt} = -\frac{w}{2}(0.1L)^2 - \frac{w}{2}(0.8L)(0.1L) = -0.045wL^2$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 吉尔德 • 谢尔

再一次, 从 图 38.9 是从中获取的。

$$V^{lft} = \frac{wL}{2} \qquad V^{rgt} = -\frac{wL}{2}$$

要注意, 指向的线路。图形上, 他们总是会表现出积极的。

4. 柱 轴力

列的轴力只是通过总结连接到列,Fig 的所有旋转板来获得。38.10.

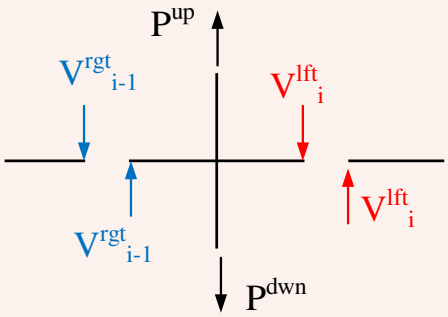


图 38.10: 对垂直负载的框架的近距离分析; 柱轴力

$$P^{dwn} = P^{up} + V^{rgt}_{i-1} - V^{lft}_{i}$$

5. 柱 时刻

列时刻由关节的自由身体图表,Fig 确定。38.11). 从同义, 左边和右边的时刻是平等和相反的。

$$M^{bot} = -M^{top}$$

6. 柱 Shear 标签

既然我们假设冲击点在中高, 除第一层的列被挂在基地时外, 我们可以

$$V = \frac{M^{top}}{\frac{h}{2}}$$

7. 旋转轴力

旋转轴力是不可忽视的, 将被忽略。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

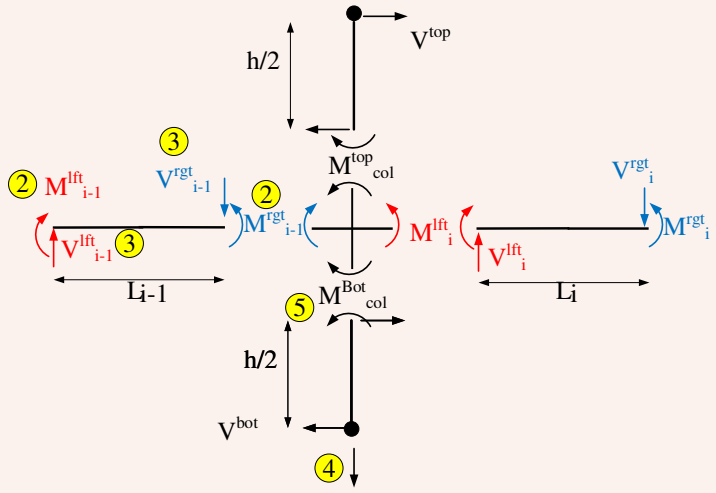


图 38.11: 对垂直负载的框架进行近距离分析

38.1.3.2 水平负载

38.1.3.2.1 门户方法

33 在侧负载下低上升的建筑物主要遭受相关术语形变形。因此, 他们的近距离分析可以通过以下假设轻松进行:

1. 從 图 38.6b, 我们可以假设影响点在, 图 38.12:
   (a) 所有列的中等高度在二楼以上。
   (b) 如果硬 支座 或在底部, 如果粘着的中等高度的地板列。
   (c) 在每个旋转的中心。
2. 全方位 谢尔 在任何地板层的所有列的中高将分布在这些列之间, 以便每两个外部列都携带一半比每个内部列的框架.

34 因此, 计算的序列将是

1. 柱 Shear 标签
2. 柱 时刻
3. 加勒比时刻
4. 吉尔德 • 谢尔斯
5. 柱 轴力
6. 直升机 轴力

请注意, 它是 **逆命令** 垂直 荷载 案例。

1. 柱 Shear 标签

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35 叶子通过每个层的列中间高度通过一个水平部分，并写下侧势力的平衡方程式。

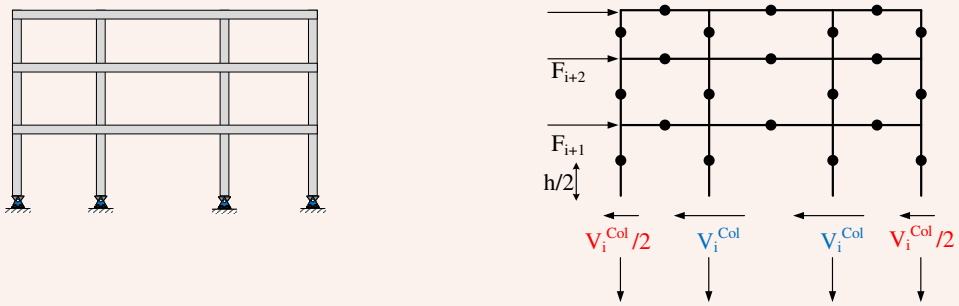


图 38.12: 接近对侧负载的框架分析; 柱 页面

$$V_{ext}^{col} = \frac{\sum F^{lateral}}{2 \text{ No. of bays}}; \qquad V_{int}^{col} = 2V_{ext}^{col}$$

2. 柱 时刻

36 每个列的结尾时刻相当于列时间中的一半与相应列，图表的高度。38.13.

$$M_{col}^{top} = V^{col}\frac{h}{2} \qquad M^{bot} = -M^{top}$$

仔细的外部列，时刻是内部的一半。

3. 加勒比时刻

37 旋转时刻只是从连接的自由体图中确定，图 38.13.

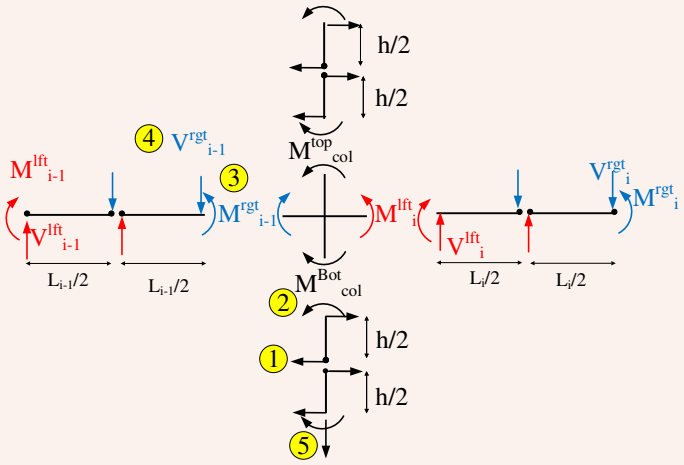


图 38.13: 对侧负载的框架进行近距离分析; 旋转时刻

$$M_i^{lft} = M_{col}^{Top} - M_{col}^{Bot} + M_{i-1}^{rgt}; \qquad M_i^{rgt} = -M_i^{lft}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 吉尔德 Shears

38 由于在旋转器的中心有一个冲击点, 所以旋转板是通过考虑到这一点时刻的总数获得的。

$$V^{lft} = -\frac{2M}{L} \qquad V^{rgt} = V^{lft}$$

5. 柱 轴力

39 列轴力是通过从上面的列合并旋转板和轴力获得的。

$$P = P^{above} - P^{rgt} + P^{lft}$$

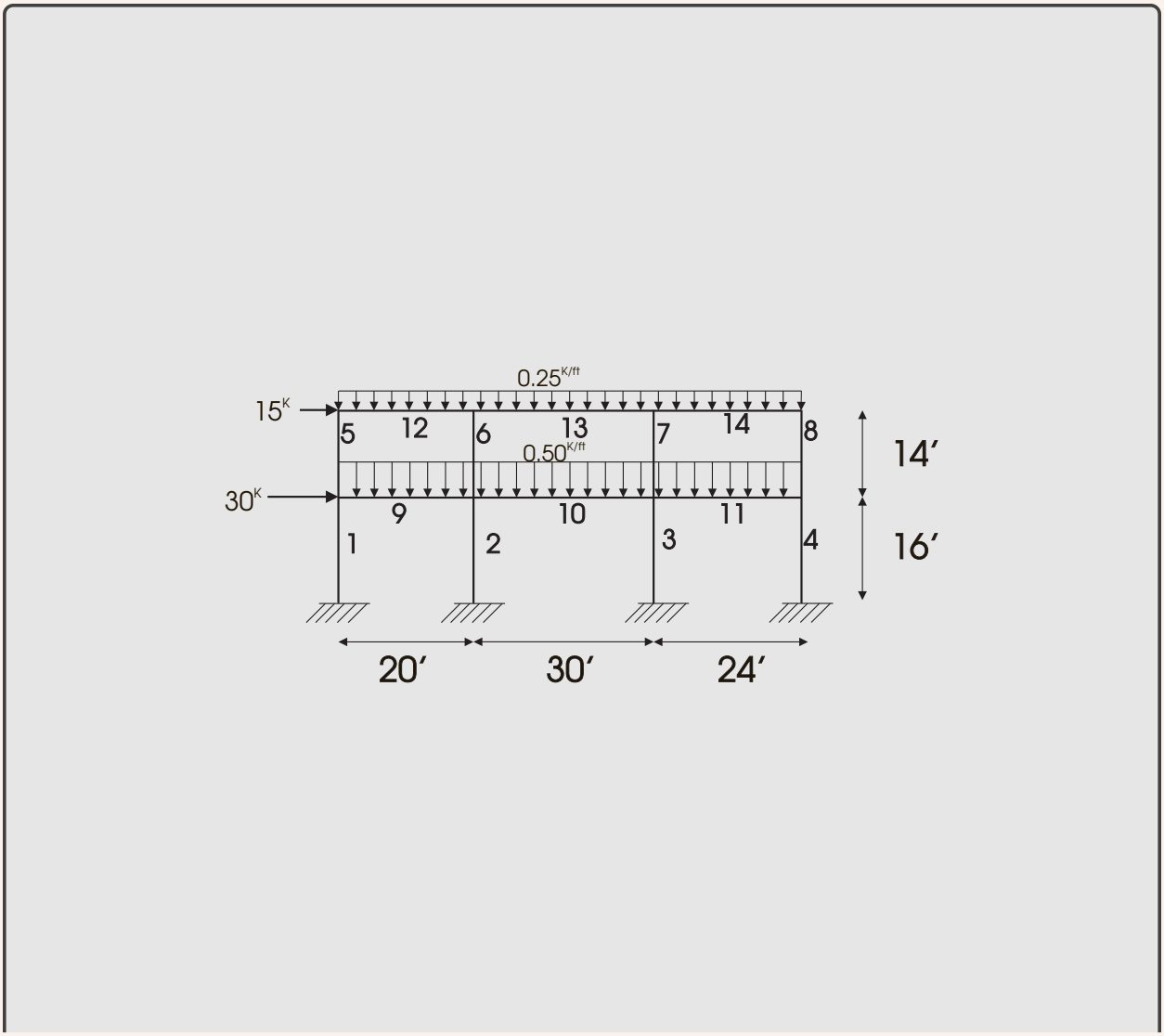
6. 直升机 轴力

40 被认为是不可忽视的旋转轴力。

38.1.3.2.1.1 例题 38.1: 门户方法; 低升楼

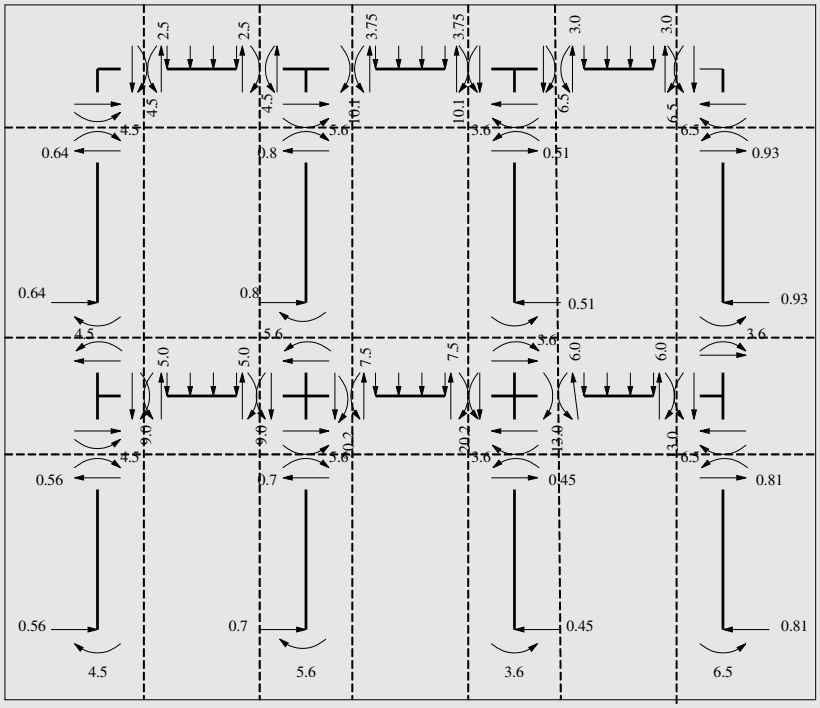
审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。



垂直 荷载

上一篇:Girder Moments

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.25)(20)^2 &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.25)(20)^2 &&= 8.0 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= M_{12}^{lft} &&= -4.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= -0.045 w_{13} L_{13}^2 = -(0.045)(0.25)(30)^2 &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{cnt} &= 0.08 w_{13} L_{13}^2 = (0.08)(0.25)(30)^2 &&= 18.0 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= M_{13}^{lft} &&= -10.1 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= -0.045 w_{14} L_{14}^2 = -(0.045)(0.25)(24)^2 &&= -6.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{cnt} &= 0.08 w_{14} L_{14}^2 = (0.08)(0.25)(24)^2 &&= 11.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= M_{14}^{lft} &&= -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

底部的瞬间

$$
\begin{aligned}
M_9^{lft} &= -0.045 w_9 L_9^2 = -(0.045)(0.5)(20)^2 && = -9.0 \text{ k.ft} \\
M_9^{cnt} &= 0.08 w_9 L_9^2 = (0.08)(0.5)(20)^2 && = 16.0 \text{ k.ft} \\
M_9^{rgt} &= M_9^{lft} && = -9.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= -0.045 w_{10} L_{10}^2 = -(0.045)(0.5)(30)^2 && = -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{cnt} &= 0.08 w_{10} L_{10}^2 = (0.08)(0.5)(30)^2 && = 36.0 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= M_{11}^{lft} && = -20.3 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= -0.045 w_{12} L_{12}^2 = -(0.045)(0.5)(24)^2 && = -13.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{cnt} &= 0.08 w_{12} L_{12}^2 = (0.08)(0.5)(24)^2 && = 23.0 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= M_{12}^{lft} && = -13.0 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

首頁 柱 時刻

$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= +M_{12}^{lft} && = -4.5 \text{ k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = 4.5 \text{ k.ft} \\
M_6^{top} &= -M_{12}^{rgt} + M_{13}^{lft} = -(-4.5) + (-10.1) && = -5.6 \text{ k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = 5.6 \text{ k.ft} \\
M_7^{top} &= -M_{13}^{rgt} + M_{14}^{lft} = -(-10.1) + (-6.5) && = -3.6 \text{ k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = 3.6 \text{ k.ft} \\
M_8^{top} &= -M_{14}^{rgt} = -(-6.5) && = 6.5 \text{ k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

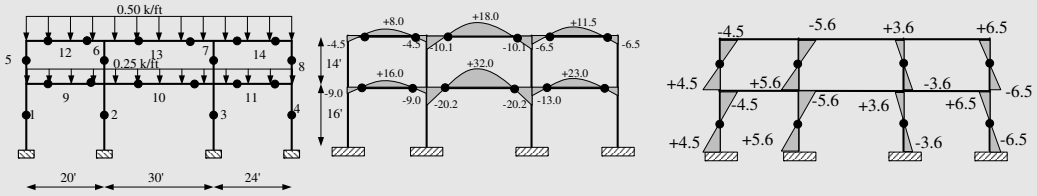
底部 柱 时刻

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= +M_5^{bot} + M_9^{lft} = 4.5 - 9.0 && = -4.5 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &- M_1^{top} && = 4.5 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= +M_6^{bot} - M_9^{rgt} + M_{10}^{lft} = 5.6 - (-9.0) + (-20.3) && = -5.6 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = 5.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= +M_7^{bot} - M_{10}^{rgt} + M_{11}^{lft} = -3.6 - (-20.3) + (-13.0) && = 3.6 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -3.6 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= +M_8^{bot} - M_{11}^{rgt} = -6.5 - (-13.0) && = 6.5 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -6.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

瞬间图表

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。



首页 > Girder Shear

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= \frac{w_{12}L_{12}}{2} = \frac{(0.25)(20)}{2} &&= 2.5 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= -V_{12}^{lft} &&= -2.5 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= \frac{w_{13}L_{13}}{2} = \frac{(0.25)(30)}{2} &&= 3.75 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= -V_{13}^{lft} &&= -3.75 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= \frac{w_{14}L_{14}}{2} = \frac{(0.25)(24)}{2} &&= 3.0 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= -V_{14}^{lft} &&= -3.0 \text{ k}
\end{aligned}
$$

底部 Girder Shear

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= \frac{w_{9}L_{9}}{2} = \frac{(0.5)(20)}{2} &&= 5.00 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= -V_{9}^{lft} &&= -5.00 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= \frac{w_{10}L_{10}}{2} = \frac{(0.5)(30)}{2} &&= 7.50 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= -V_{10}^{lft} &&= -7.50 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= \frac{w_{11}L_{11}}{2} = \frac{(0.5)(24)}{2} &&= 6.00 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= -V_{11}^{lft} &&= -6.00 \text{ k}
\end{aligned}
$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

柱 Shears

$$V_5 = \frac{M_5^{top}}{\frac{H_5}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{14}{2}} = -0.64 \text{ k}$$

$$V_6 = \frac{M_6^{top}}{\frac{H_6}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{14}{2}} = -0.80 \text{ k}$$

$$V_7 = \frac{M_7^{top}}{\frac{H_7}{2}} = \frac{3.6}{\frac{14}{2}} = 0.52 \text{ k}$$

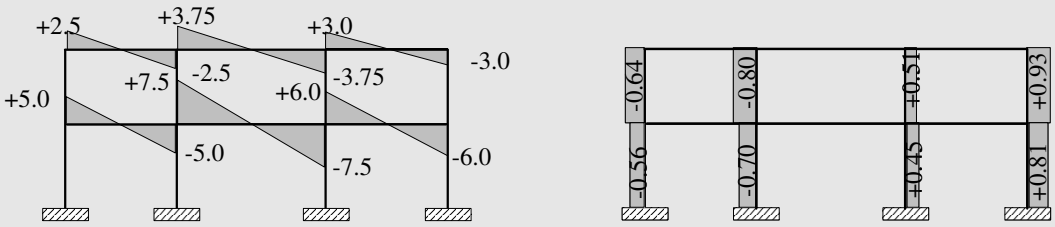
$$V_8 = \frac{M_8^{top}}{\frac{H_8}{2}} = \frac{6.5}{\frac{14}{2}} = 0.93 \text{ k}$$

$$V_1 = \frac{M_1^{top}}{\frac{H_1}{2}} = \frac{-4.5}{\frac{16}{2}} = -0.56 \text{ k}$$

$$V_2 = \frac{M_2^{top}}{\frac{H_2}{2}} = \frac{-5.6}{\frac{16}{2}} = -0.70 \text{ k}$$

$$V_3 = \frac{M_3^{top}}{\frac{H_3}{2}} = \frac{3.6}{\frac{16}{2}} = 0.46 \text{ k}$$

$$V_4 = \frac{M_4^{top}}{\frac{H_4}{2}} = \frac{6.5}{\frac{16}{2}} = 0.81 \text{ k}$$



首頁 柱 Axial Forces

$$P_5 = V_{12}^{lft} = 2.50 \text{ k}$$

$$P_6 = -V_{12}^{rgt} + V_{13}^{lft} = -(-2.50) + 3.75 = 6.25 \text{ k}$$

$$P_7 = -V_{13}^{rgt} + V_{14}^{lft} = -(-3.75) + 3.00 = 6.75 \text{ k}$$

$$P_8 = -V_{14}^{rgt} = 3.00 \text{ k}$$

底部 柱 轴力

$$P_1 = P_5 + V_9^{lft} = 2.50 + 5.0 = 7.5 \text{ k}$$

$$P_2 = P_6 - V_{10}^{rgt} + V_9^{lft} = 6.25 - (-5.00) + 7.50 = 18.75 \text{ k}$$

$$P_3 = P_7 - V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 6.75 - (-7.50) + 6.0 = 20.25 \text{ k}$$

$$P_4 = P_8 - V_{11}^{rgt} = 3.00 - (-6.00) = 9.00 \text{ k}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

VERTICAL LOADS

Height	Span	L1	L2	L3
		20	30	24
14	Load	0.25	0.25	0.25
16	Load	0.5	0.5	0.5

MOMENTS

Bay 1				Bay 2				Bay 3				
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft	Cnt	Rgt		Lft	Cnr	Rgt		Lft	Cnt	Rgt	
	-4.5	8.0	-4.5		-10.1	18.0	-10.1		-6.5	11.5	-6.5	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5
	-9.0	16.0	-9.0		-20.3	36.0	-20.3		-13.0	23.0	-13.0	
-4.5				-5.6				3.6				6.5
4.5				5.6				-3.6				-6.5

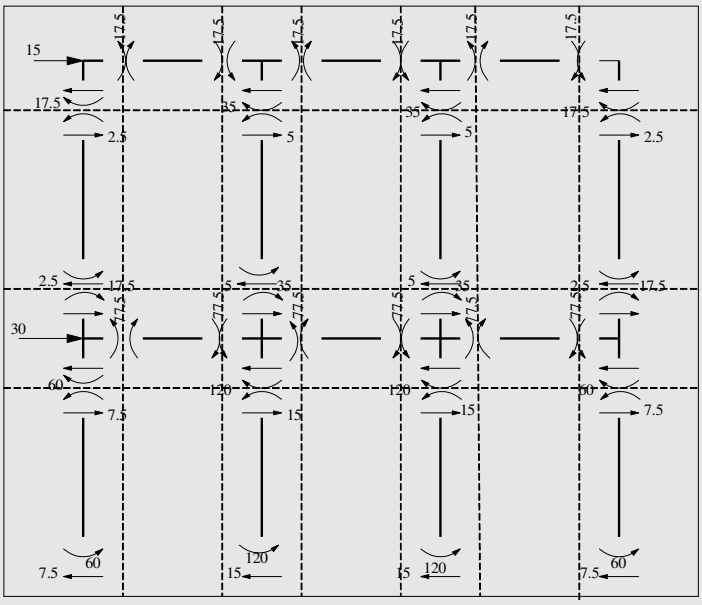
SHEAR

Bay 1				Bay 2				Bay 3				
Col	Beam			Column	Beam			Column	Beam			Col
	Lft		Rgt		Lft		Rgt		Lft		Rgt	
	2.50		-2.50		3.75		-3.75		3.00		-3.00	
-0.64				-0.80				0.52				0.93
	5.00		-5.00		7.50		-7.50		6.00		-6.00	
-0.56				-0.70				0.46				0.81

AXIAL FORCE

Bay 1			Bay 2		Bay 3	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
2.50		6.25		6.75		3.00
	0.00		0.00		0.00	
7.50		18.75		20.25		9.00

水平负载



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

柱 Shears

$$
\begin{aligned}
V_5 &= \frac{15}{(2)(3)} && = 2.5 \text{ k} \\
V_6 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_7 &= 2(V_5) = (2)(2.5) && = 5 \text{ k} \\
V_8 &= V_5 && = 2.5 \text{ k} \\
V_1 &= \frac{15+30}{(2)(3)} && = 7.5 \text{ k} \\
V_2 &= 2(V_1) = (2)(7.5) && = 15 \text{ k} \\
V_3 &= 2(V_1) = (2)(2.5) && = 15 \text{ k} \\
V_4 &= V_1 && = 7.5 \text{ k}
\end{aligned}
$$

首頁 柱 時刻

$$
\begin{aligned}
M_5^{top} &= \frac{V_1 H_5}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_5^{bot} &= -M_5^{top} && = -17.5 \text{ k.ft} \\
M_6^{top} &= \frac{V_6 H_6}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_6^{bot} &= -M_6^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{top} &= \frac{V_7^{up} H_7}{2} = \frac{(5)(14)}{2} && = 35.0 \text{ k.ft} \\
M_7^{bot} &= -M_7^{top} && = -35.0 \text{ k.ft} \\
M_8^{top} &= \frac{V_8^{up} H_8}{2} = \frac{(2.5)(14)}{2} && = 17.5 \text{ k.ft} \\
M_8^{bot} &= -M_8^{top} && = -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

底部 柱 时刻

$$
\begin{aligned}
M_1^{top} &= \frac{V_1^{dwn} H_1}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_1^{bot} &= -M_1^{top} && = -60 \text{ k.ft} \\
M_2^{top} &= \frac{V_2^{dwn} H_2}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_2^{bot} &= -M_2^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_3^{top} &= \frac{V_3^{dwn} H_3}{2} = \frac{(15)(16)}{2} && = 120 \text{ k.ft} \\
M_3^{bot} &= -M_3^{top} && = -120 \text{ k.ft} \\
M_4^{top} &= \frac{V_4^{dwn} H_4}{2} = \frac{(7.5)(16)}{2} && = 60 \text{ k.ft} \\
M_4^{bot} &= -M_4^{top} && = -60 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

审阅稿

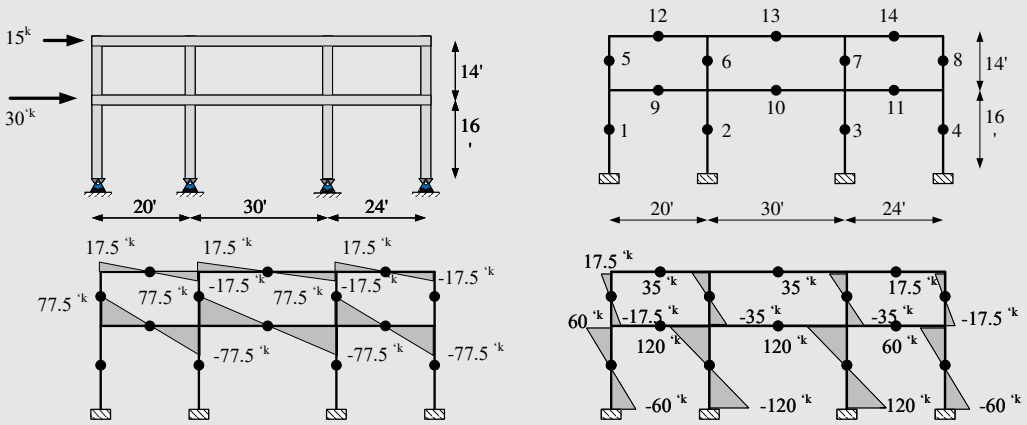
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

上一篇:Girder Moments

$$
\begin{aligned}
M_{12}^{lft} &= M_{5}^{top} &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{12}^{rgt} &= -M_{12}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{lft} &= M_{12}^{rgt} + M_{6}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{13}^{rgt} &= -M_{13}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{lft} &= M_{13}^{rgt} + M_{7}^{top} = -17.5 + 35 &&= 17.5 \text{ k.ft} \\
M_{14}^{rgt} &= -M_{14}^{lft} &&= -17.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$

底部的瞬间

$$
\begin{aligned}
M_{9}^{lft} &= M_{1}^{top} - M_{5}^{bot} = 60 - (-17.5) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{9}^{rgt} &= -M_{9}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{lft} &= M_{9}^{rgt} + M_{2}^{top} - M_{6}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{10}^{rgt} &= -M_{10}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{lft} &= M_{10}^{rgt} + M_{3}^{top} - M_{7}^{bot} = -77.5 + 120 - (-35) &&= 77.5 \text{ k.ft} \\
M_{11}^{rgt} &= -M_{11}^{lft} &&= -77.5 \text{ k.ft}
\end{aligned}
$$



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

首页 > Girder Shear

$$
\begin{aligned}
V_{12}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{12}} = -\frac{(2)(17.5)}{20} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{12}^{rgt} &= +V_{12}^{lft} &&= -1.75 \text{ k} \\
V_{13}^{lft} &= -\frac{2M_{13}^{lft}}{L_{13}} = -\frac{(2)(17.5)}{30} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{13}^{rgt} &= +V_{13}^{lft} &&= -1.17 \text{ k} \\
V_{14}^{lft} &= -\frac{2M_{14}^{lft}}{L_{14}} = -\frac{(2)(17.5)}{24} &&= -1.46 \text{ k} \\
V_{14}^{rgt} &= +V_{14}^{lft} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

底部 Girder Shear

$$
\begin{aligned}
V_{9}^{lft} &= -\frac{2M_{12}^{lft}}{L_{9}} = -\frac{(2)(77.5)}{20} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{9}^{rgt} &= +V_{9}^{lft} &&= -7.75 \text{ k} \\
V_{10}^{lft} &= -\frac{2M_{10}^{lft}}{L_{10}} = -\frac{(2)(77.5)}{30} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{10}^{rgt} &= +V_{10}^{lft} &&= -5.17 \text{ k} \\
V_{11}^{lft} &= -\frac{2M_{11}^{lft}}{L_{11}} = -\frac{(2)(77.5)}{24} &&= -6.46 \text{ k} \\
V_{11}^{rgt} &= +V_{11}^{lft} &&= -6.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

首頁 柱 Axial Forces (+V 紧张, -V 压缩)

$$
\begin{aligned}
P_5 &= -V_{12}^{lft} &&= -(-1.75) \text{ k} \\
P_6 &= +V_{12}^{rgt} - V_{13}^{lft} = -1.75 - (-1.17) &&= -0.58 \text{ k} \\
P_7 &= +V_{13}^{rgt} - V_{14}^{lft} = -1.17 - (-1.46) &&= 0.29 \text{ k} \\
P_8 &= V_{14}^{rgt} &&= -1.46 \text{ k}
\end{aligned}
$$

底部 柱 轴力 (+V 紧张, -V 压缩)

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_5 + V_{9}^{lft} = 1.75 - (-7.75) &&= 9.5 \text{ k} \\
P_2 &= P_6 + V_{10}^{rgt} + V_{9}^{lft} = -0.58 - 7.75 - (-5.17) &&= -3.16 \text{ k} \\
P_3 &= P_7 + V_{11}^{rgt} + V_{10}^{lft} = 0.29 - 5.17 - (-6.46) &&= 1.58 \text{ k} \\
P_4 &= P_8 + V_{11}^{rgt} = -1.46 - 6.46 &&= -7.66 \text{ k}
\end{aligned}
$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

# of Bays	3

# of Storeys					2
		Force		Shear	
	H	Lat.	Tot	Ext	Int
H1	14	15	15	2.5	5
H2	16	30	45	7.5	15

HORIZONTAL LOAD

	L1		L2		L3		
	20		30		24		
MOMENTS							
	Bay 1		**Bay 2**		**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	17.5	-17.5		17.5	-17.5		17.5	-17.5	
17.5			35.0			35.0			17.5
-17.5			-35.0			-35.0			-17.5
	77.5	-77.5		77.5	-77.5		77.5	-77.5	
60.0			120.0			120.0			60.0
-60.0			-120.0			-120.0			-60.0

SHEAR							
	Bay 1		**Bay 2**		**Bay 3**		
Col	Beam		Column	Beam		Column	Beam		Col
	Lft	Rgt		Lft	Rgt		Lft	Rgt	
	-1.75	-1.75		-1.17	-1.17		-1.46	-1.46	
2.50			5.00			5.00			2.50
2.50			5.00			5.00			2.50
	-7.75	-7.75		-5.17	-5.17		-6.46	-6.46	
7.50			15.00			15.00			7.50
7.50			15.00			15.00			7.50

AXIAL FORCE						
	Bay 1		**Bay 2**		**Bay 3**	
Col	Beam	Column	Beam	Column	Beam	Col
	0.00		0.00		0.00	
1.75		-0.58		0.29		-1.46
	0.00		0.00		0.00	
9.50		-3.17		1.58		-7.92

混合 荷载

设计参数 基于两项大约分析, 垂直和侧负载, 我们现在正在寻找框架的设计参标。

列

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

		列		
梅姆		绿色	霍尔	设计價值
1	瞬间	4.50	60.00	64.50
	轴心	7.50	9.50	17.00
	谢尔	0.56	7.50	8.06
2	瞬间	5.60	120.00	125.60
	轴心	18.75	15.83	34.58
	谢尔	0.70	15.00	15.70
3	瞬间	3.60	120.00	123.60
	轴心	20.25	14.25	34.50
	谢尔	0.45	15.00	15.45
4	瞬间	6.50	60.00	66.50
	轴心	9.00	7.92	16.92
	谢尔	0.81	7.50	8.31
5	瞬间	4.50	17.50	22.00
	轴心	2.50	1.75	4.25
	谢尔	0.64	2.50	3.14
6	瞬间	5.60	35.00	40.60
	轴心	6.25	2.92	9.17
	谢尔	0.80	5.00	5.80
7	瞬间	3.60	35.00	38.60
	轴心	6.75	2.63	9.38
	谢尔	0.51	5.00	5.51
8	瞬间	6.50	17.50	24.00
	轴心	3.00	1.46	4.46
	谢尔	0.93	2.50	3.43

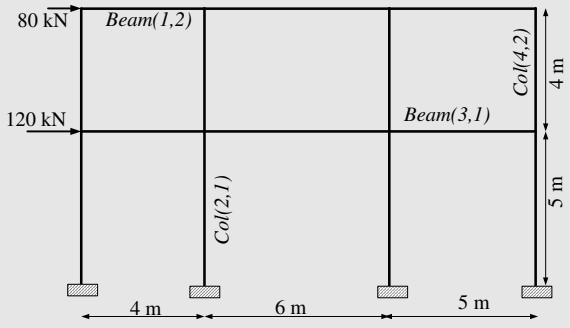
贝姆

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

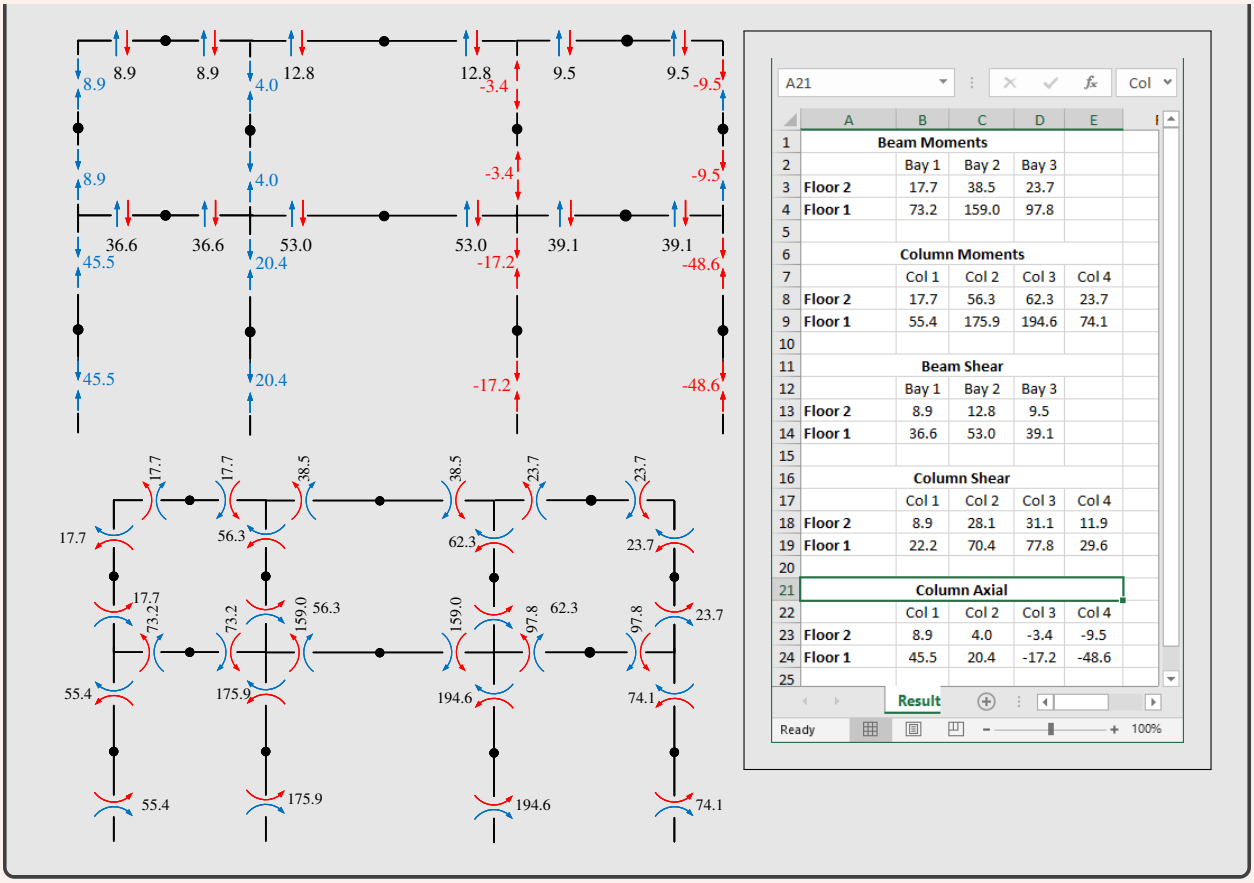
梅姆		贝姆斯 绿色	霍尔	设计 價值
9	在瞬间	9.00	77.50	86.50
	+ 一瞬间	16.00	0.00	16.00
	谢尔	5.00	7.75	12.75
10	在瞬间	20.20	77.50	97.70
	+ 一瞬间	36.00	0.00	36.00
	谢尔	7.50	5.17	12.67
11	在瞬间	13.0	77.50	90.50
	+ 一瞬间	23.00	0.00	23.00
	谢尔	6.00	6.46	12.46
12	在瞬间	4.50	17.50	22.00
	+ 一瞬间	8.00	0.00	8.00
	谢尔	2.50	1.75	4.25
13	在瞬间	10.10	17.50	27.60
	+ 一瞬间	18.00	0.00	18.00
	谢尔	3.75	1.17	4.92
14	在瞬间	6.50	17.50	24.00
	+ 一瞬间	11.50	0.00	11.50
	谢尔	3.00	1.46	4.46

38.1.3.2.1.2 例题 38.2: 马特拉布解决方案



和 MATLAB® 列入的代码 §I.2.2 已被用来分析附属 框架. 读者被鼓励手动解决这个问题, 并与这些数字进行比较。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



38.1.3.2.2 Cantilever 方法

41 该方法是基于假设框架作为一个梁的分数值。柱 交叉部分区域, 如在 梁 中的纤维。更具体地说:

1. 影响点位于每个仓库的柱的中高处, 并在每个梁的中点。
2. 每个列的轴力均为其从该级别的列组区域重力中心的距离。

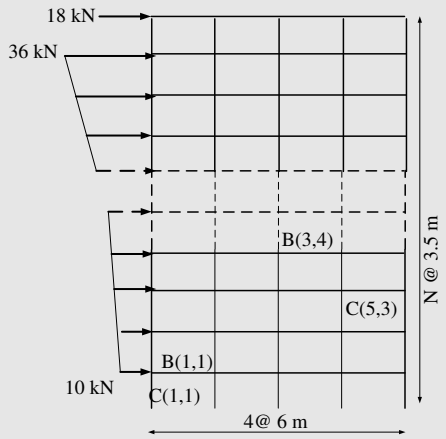
42 分析程序

1. 从列区域中确定 重力 的 柱 组的中心 (柱 区域可能被认为是单位)
2. 考虑到在列中的通胀点的特定存储区的 平衡。列轴力在一个未知的列轴力的意义上表达, 因为它们被认为是与重力中心的距离相对的。因此, 采取外部负载和轴的瞬间列中的力量在任何点的部分, 未知的力量在列被评估。
3. 梁 表是用条件计算的, $\sum F_y = 0$ 每一个单独的共同点。柱 轴力 是从前一步所知道的。
4. 梁的结尾时刻是梁叶, 倍增为梁, 因为被认为是通胀点在梁的中心。
5. 柱的时刻是由考虑状态来确定 $\sum M_z = 0$ 在每个人都分开。火箭的尽头时刻是从前一步所知道的。
6. 查看 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 在支持中。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

43 A MATLAB® 使用 cantilever 方法的 框架 的约定分析代码在 §I.2.2.

38.1.3.2.2.1 例题 38.3: Cantilever 方法; 高升建筑



再次使用 MATLAB® 代码 (§I.2.2) 我们分析了附近的高升楼, 由 4 个井和 50 个仓库组成。这个例子表明了灵活性。MATLAB® 附件中的代码。

我们使用的 MATLAB® 代码

```
nBays=4;BaySpac=[6 6 6 6];CArea=[1 1 1 1 1];
nFloors=40;HeightCol=3.5*ones(40,1);
idf=0:39;HorLoad=10+26*idf/39;
```

柱 1 和 Bay 1 的结果如下表。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

		Column Ext				Beam, Bay 1	
		Moment	Shear	Axial		Moment	Shear
3	Floor 40	6.3	3.6	2.1		6.3	2.1
4	Floor 39	12.5	7.1	8.4		18.8	6.3
5	Floor 38	18.6	10.6	18.7		31.0	10.3
6	Floor 37	24.5	14.0	33.1		**43.1**	14.4
7	Floor 36	30.3	17.3	51.3		54.8	18.3
8	Floor 35	36.1	20.6	73.5		66.4	22.1
9	Floor 34	41.7	23.8	99.4		77.7	25.9
10	Floor 33	47.1	26.9	129.0		88.8	29.6
11	Floor 32	52.5	30.0	162.2		**99.6**	33.2
12	Floor 31	57.8	33.0	198.9		110.3	36.8
13	Floor 30	62.9	35.9	239.1		120.6	40.2
14	Floor 29	67.9	38.8	282.7		130.8	43.6
15	Floor 28	72.8	41.6	329.6		140.7	46.9
16	Floor 27	77.6	44.3	379.8		**150.4**	50.1
17	Floor 26	82.2	47.0	433.0		159.8	53.3
18	Floor 25	86.8	49.6	489.4		169.1	56.4
19	Floor 24	91.2	52.1	548.7		178.0	59.3
20	Floor 23	95.6	54.6	611.0		186.8	62.3
21	Floor 22	99.7	57.0	676.1		**195.3**	65.1
22	Floor 21	103.8	59.3	743.9		203.6	67.9
23	Floor 20	107.8	61.6	814.5		211.6	70.5
24	Floor 19	111.6	63.8	887.6		219.5	73.1
25	Floor 18	115.4	65.9	963.3		227.0	75.7
26	Floor 17	119.0	68.0	1041.4		234.4	78.1
27	Floor 16	122.5	70.0	1121.9		241.5	80.5
28	Floor 15	125.9	71.9	1204.7		248.4	82.8
29	Floor 14	129.1	73.8	1289.8		255.0	85.0
30	Floor 13	132.3	75.6	1376.9		261.5	87.1
31	Floor 12	135.3	77.3	1466.1		267.6	89.2
32	Floor 11	138.2	79.0	1557.3		273.6	91.2
33	Floor 10	141.1	80.6	1650.4		279.3	93.1
34	Floor 9	143.7	82.1	1745.3		284.8	94.9
35	Floor 8	146.3	83.6	1842.0		290.0	96.7
36	Floor 7	148.8	85.0	1940.4		295.1	98.3
37	Floor 6	151.1	86.3	2040.3		299.8	99.9
38	Floor 5	153.3	87.6	2141.8		304.4	101.5
39	Floor 4	155.4	88.8	2244.7		308.7	102.9
40	Floor 3	157.4	89.9	2348.9		312.8	104.3
41	Floor 2	159.3	91.0	2454.5		316.6	105.5
42	Floor 1	161.0	92.0	2561.2		320.3	106.8

38.2 结构性反应

44 首先, 研究侧负下的建筑物的结构反应, 专注于三种不同的结构设计类型: 架子子子系统、架子墙和架子壁。对于每个人, 我们将讨论他们的功能、优点和缺点。38.1.

38.2.1 Shaft 子系统

45 这种集中结构通过地板直径传输侧负载, 作为垂直直直径抵抗滑动和弯曲时刻。它还为其中央位置提供优质抵抗性, 其高强度在侧负下显著减少挠度的建设。

46 在功能方面, 它居住垂直循环 (电梯、楼梯) 至关重要的服务。中核通常位于中心, 增强稳定性, 并提供中央荷载抵抗系统。

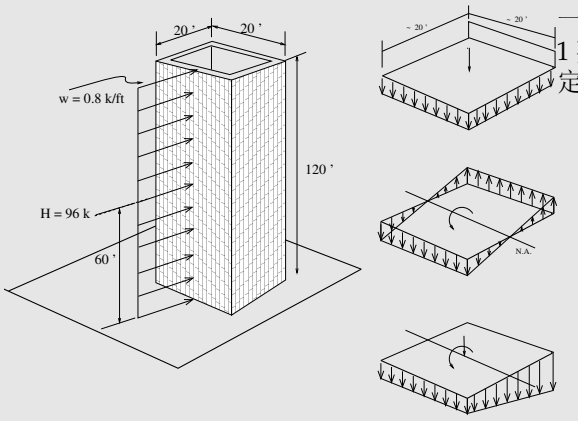
47 主要优点包括高固度, 减少侧 挠度, 强大的旋转抵抗力, 以及结构和功能作用的结合能力。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

然而, 主要缺点是设计复杂性, 因为整合服务和结构的单元可以是有趣的, 有意义的空间利用, 这可能会影响建筑布局。

38.2.1.1 例题 38.4: Shaft 子系统

适应从 Lin and Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.



一个钢筋混凝土沙夫是 20 平方英尺,120 英尺高, 有 1 英尺厚的墙壁。它受到了 0.8 k/ft 的侧面强度。确定压力。

1. 比较这个结构与在 Sect 中分析的结构。38.2.2.1 目前, 基于基地的垂直荷载总量已增加到
$$V = 4(400) = 1,600 \text{ k}$$
2. 如前所述, 最高的时刻和光线是 5,760 k.ft 和 96 k 相应。
3. 惯性矩 为一个管部分是
$$I = \Sigma \frac{bd^3}{12} = \frac{(20)(20)^3}{12} - \frac{(18)(18)^3}{12} = 4,600 \text{ ft}^4$$
4. 最大灵活压力:
$$\sigma_{fl} = \pm \frac{MC}{I} = \pm \frac{(5,760) \text{ k.ft}(20/2) \text{ ft}}{(4,600) \text{ ft}^4} = \pm 12.5 \text{ ksf} = \pm 87 \text{ psi}$$
5. 平均值 剪应力
$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96) \text{ k}}{2(20)(1) \text{ ft}^2} = 2.4 \text{ ksf} = 17 \text{ psi}$$
6. 垂直 荷载 的 1600 k 产生一个轴的 应力
$$\sigma_{ax} = \frac{P}{A} = \frac{-(1,600) \text{ k}}{(4)(20)(1) \text{ ft}^2} = -20 \text{ ksf} = -140 \text{ psi}$$
7. 总体压力就是这样。
$$\sigma = \sigma_{ax} + \sigma_{fl}$$
$$\sigma_1 = -140 + 87 = -53 \text{ psi}$$
$$\sigma_2 = -140 - 87 = -227 \text{ psi}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, 我们没有任何紧张的压力, 而这些压力比它是从一个单一的墙壁中获取的。

38.2.2 墙

48 侧重负载通过地板直径转移到垂直墙元素, 有效抵抗相关术语力和弯曲时刻。这种设计还提供了对侧偏差的控制的显著坚固性。

49 墙壁主要作为结构性单元功能, 但可能包含小型功能, 如分区。放置灵活性允许墙在建筑物的周边或内部定位。

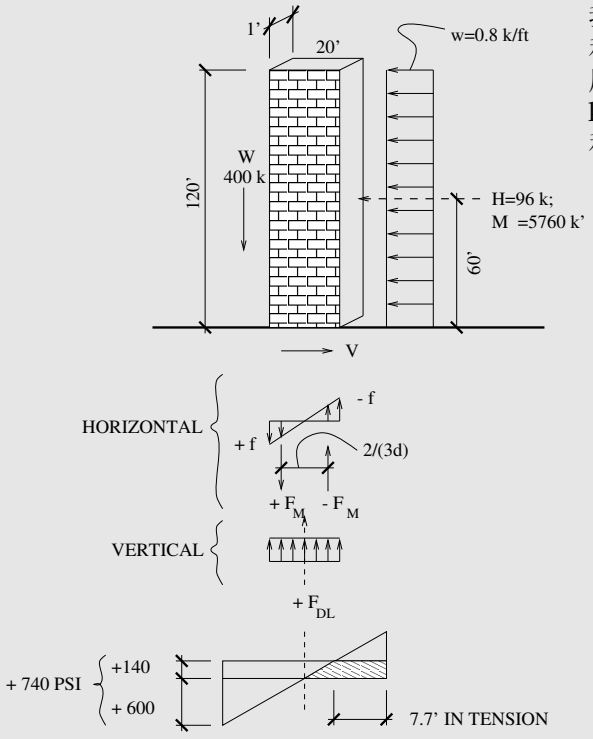
50 其优点包括对侧面力量的有效抵抗力、设计和建设的简单性, 与更复杂的系统相比, 以及具有战略性的灵活性, 以优化荷载抵抗性和空间利用。然而, 缺点包括窗户和门场的潜在限制, 除非中心位置, 否则有限的旋转抵抗。

38.2.2.1 例题 38.5: 混凝土 Shear 墙壁

适应从 Lin and Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



我们认为一个钢筋混凝土墙宽 20 英尺, 厚 1 英尺和高 120 英尺与垂直的荷载 400k 在基地上发挥作用。由于风, 我们承认在墙上运作的垂直高度为 0.8 kip/ft 的统一水平力量。需要计算墙上的灵活压力和分裂压力以抵抗风荷载。

1. 最多 剪力 和 弯矩 在基

$$V_{max} = wL = (0.8)\ \text{k.ft}(120)\ \text{ft} = 96\ \text{k}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{2} = \frac{(0.8)\ \text{k.ft}(120)^2\ \text{ft}^2}{2} = 5,760\ \text{k.ft} \tag{38.1}$$

2. 结果的精度是

$$e_{\text{Actual}} = \frac{M}{P} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(400)\ \text{k}} = 14.4\ \text{ft}$$

3. 批判性异常是

$$e_{cr} = \frac{L}{6} = \frac{(20)\ \text{ft}}{6} = 3.3\ \text{ft} < e_{\text{Actual}} N.G.$$

因此, 基地将有紧张。

4. 惯性矩的墙是

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)\ \text{ft}(20)\ \text{ft}^3}{12} = 667\ \text{ft}^4$$

5. 最大灵活压力将是

$$\sigma_{max} = \pm\frac{Mc}{I} = \frac{(5,760)\ \text{k.ft}(10)\ \text{ft}}{(667)\ \text{ft}^4} = \pm(86.5)\ \text{ksf} = \pm(600)\ \text{psi}$$

6. 应力的平均分数是

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{(96)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = 4.8\ \text{ksf} = 33.3\ \text{psi}$$

混凝土 具有名称叶强化, 可以携带至少 100 psi 在叶中, 这些计算叶压力是允许的。

7. 在墙壁的底部, 轴压力将是

$$\sigma = \frac{-(400)\ \text{k}}{(1)(20)\ \text{ft}^2} = (20)\ \text{ksf} = \approx -140\ \text{psi}$$

8. 最大压力将是:

$$\sigma_1 = -140 + 600 = 460\ \text{psi}\ \ (\text{Tension})$$
$$\sigma_2 = -140 - 600 = -740\ \text{psi}\ \ (\text{Compression})$$

9. 压缩 应力 740 psi 可以轻松地通过 混凝土 保持, 而紧张的 应力 的 460 psi, 它必须抵抗一些钢材强化。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10. 因为这些压力是 **服务** 压力和不因果的, 我们采用 WSD 方法, 并使用允许的应力 20 其次, 由此将增加。4/3 地震和风荷载,

$$\sigma_{all} = \frac{4}{3}(20) = 26.7 \text{ ksi}$$

11. 应力分布是线性, 压缩在一个端, 另一方面, 紧张。紧张区域的长度是由 (相似的三角形)

$$\frac{x}{460} = \frac{20}{460+740} \Rightarrow x = \frac{460}{460+740}(20) = 7.7 \text{ ft}$$

12. 这个三角形应力区块内的总紧张力是

$$T = \frac{1}{2}(460) \text{ ksi}(7.7 \times 12) \text{ in} \underbrace{(12) \text{ in}}_{\text{width}} = 250 \text{ k}$$

13. 需要的 钢材 增強的總量是

$$A_s = \frac{(250) \text{ k}}{(26.7) \text{ ksi}} = 9.4 \text{ in}^2$$

这种增強金額應該在牆的兩端提供, 因為风或地震可以在任何方向行动。除此之外, 基础还应该是以抵抗紧张升高力量的设计 (可能使用电池).

38.2.3 威胁的墙壁

51 侧重负载通过地板直径转移到轴承单元, 将轴墙的强度与轴承在抵抗轴力方面的效率相结合。这种配置提供高固度, 有效减少缺陷。

52 它通过直径手臂优化荷载路径, 创造多种有效的力量分配路径。

53 tr 墙结合了墙和墙的好处, 提高了荷载分布效率, 并通过其双重性和能量分散能力提供更好的地震性能。但是, 设计可能复杂, 需要仔细规划和详细说明。除此之外, 单元可以实施建筑限制, 限制空间使用和建筑设计灵活性。

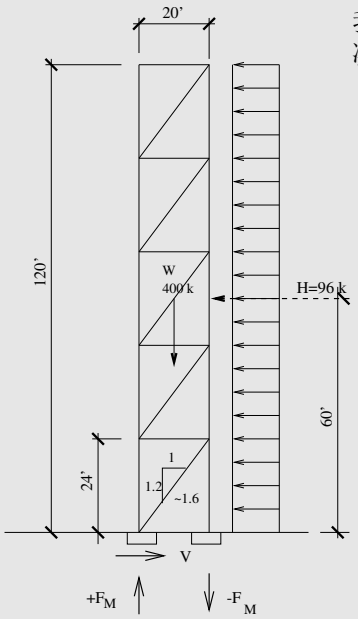
表 38.1: 相似的沙夫子系统, 沙墙, 和压缩沙墙

特色	**Shaft 子系统**	**墙**	**威胁的墙壁**
结构性反应	高强度, 优秀的旋转抵抗性, 中央传输荷载	高强度、有效的粘贴和时刻抵抗	高强度、高效的荷载路径、增强的板和时刻抵抗力
功能性	多功能 (结构 + 服务)	主要是结构性, 部分分裂	主要是结构性, 增强荷载分布
优点	高旋转抵抗、多用途、集中稳定性	有效的荷载抵抗性, 简单性, 放置灵活性	增强强度和强度, 有效的荷载分配, 改善地震性能
缺点	设计复杂性, 空间使用	建筑限制, 较少的旋转抵抗	复杂的设计和建设, 建筑限制

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

38.2.3.1 例题 38.6: 威胁的墙壁

适应从 Lin and Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.



我们认为同样的问题以前分析, 但使用一个打破的 she 墙而不是一个混凝土一个。

1. 利用最长的时刻 5,760 吉普赛 (Eq. 38.1), 我们可以计算列的压缩和紧张, 以便在 20 英尺的手臂。

$$F = \pm \frac{(5,760)\ \text{k.ft}}{(20)\ \text{ft}} = \pm 288\ \text{k}$$

2. 如果我们现在添加了 400 kip 垂直 荷载 的效果, 那么 be

$$C = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} - 288 = -488\ \text{k}$$
$$T = -\frac{(400)\ \text{k}}{2} + 288 = 88\ \text{k}$$

3. 直径中的力量必须抵抗一个基板的第 96 章 是 (相似的三角形)

$$\frac{F}{96} = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20} \Rightarrow F = \frac{\sqrt{(20)^2 + (24)^2}}{20}(96) = 154\ \text{k}$$

4. 设计可以改变, 以免在列中有紧张力量, 通过增加基地的宽度 (目前在 20 英尺).

38.2.4 侧面缺陷

定制的部分 Lin and Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.

54 即使在设计的计划或初步阶段, 重要的是要估计高楼的侧面偏差, 因为以下原因:

1. 侧面缺陷往往受到代码要求的限制, 例如 $\Delta < h/500$ 哪里 h 这是故事或建筑的高度。这个重要的是, 因为居民不应该经历不舒服的水平运动。
2. 一座在侧面力量下严重破裂的建筑可能有损坏问题与振动相关 (与垂直差异相同比亚姆).
3. 通过评估脱落, 也可能有一个想法的相对水平负载由不同的垂直子系统在一个建筑

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

物。(i. 是多少由沙发携带, 与框架相比). 既然所有系统都连接, 所以它们必须在密切的范围内相互移动。(单位变形 荷载) 我们可以确定每个子系统的贡献。

38.2.4.1 短墙

55 在短篇结构中 (如同短片), Shear deflections, 图 38.14 主持。為一個 集中荷载 (来自 EQ。

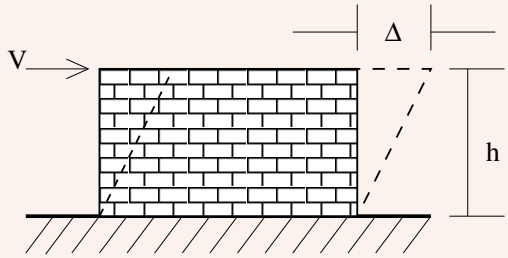


图 38.14: 在短型建筑中出现变形,(Lin and Stotesbury, 1981)

23.7)

$$\Delta \approx \frac{1.2Vh}{GA}$$

混凝土 和 钢材 的位置 $G \approx \frac{2}{5}E$.

38.2.4.2 高墙

56 相反, 在高度建筑的灵活变形中, 图 38.15 他们是主导的。

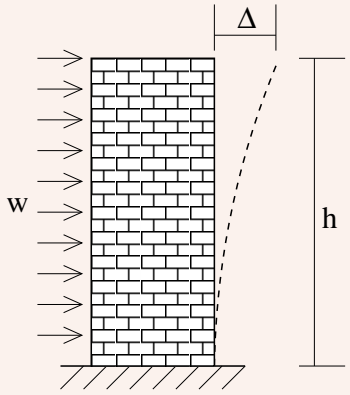


图 38.15: 在高楼的灵活变形, (Lin and Stotesbury, 1981)

$$\Delta \approx \frac{wh^4}{8EI}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

和 惯性矩 $I = \frac{bh^3}{12}$ 直角部分。这只是一个单一的负载所遭受的水晶喷雾的顶部的转移。

38.2.4.3 墙壁和线条

57 当两个滑板墙连接时 (重) 线条, 整个子系统可以作为一个由基础支持的支柱和缺陷将是小行动。但是, 如果我们有光线, 它们的变形比墙壁更大, 图 38.16.

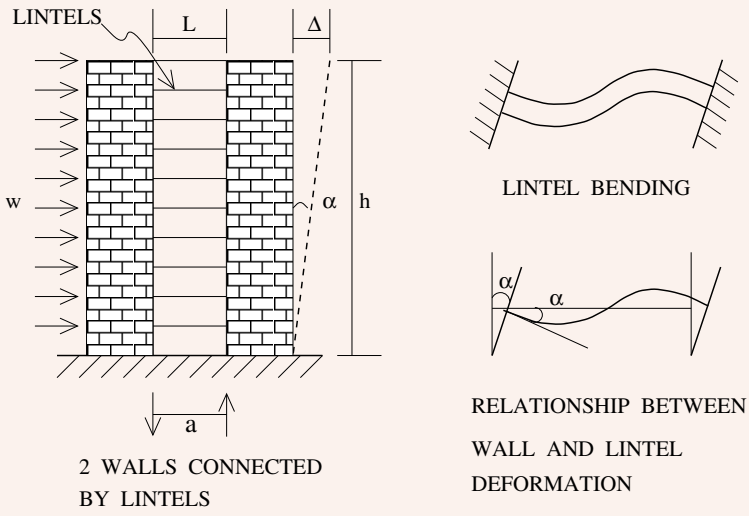


图 38.16: 挠度在由两个滑板墙和绳子组成的建筑结构中, (Lin and Stotesbury, 1981)

58 在这种情况下, 缺陷可以从:

$$M_{max} = \frac{wh^2}{2}$$
$$T = C = \frac{M}{a}$$
$$V/\text{Lintel} \approx \frac{T}{\#\text{ of Lintels}}$$
$$\alpha_{\text{wall}} = \alpha_{\text{lintel}} \approx \frac{VL^2}{12EI}$$

和

$$\delta \approx \alpha h$$

38.2.4.4 框架

59 硬 框架 的 挠度 主要是由故事之间的裂缝引起的, 这在旋转器中产生垂直裂缝。从门户方法我们可以估计这些变形, 图 38.17.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

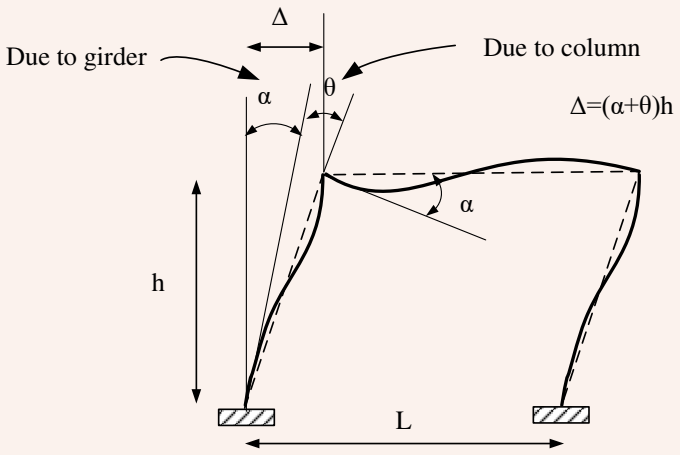


图 38.17: 一本相关术语的歪曲 (Lin and Stotesbury, 1981)

60 第一個故事在外部結合的歪曲可以接近

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_E} h^3}{12 E I_{col_E}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_E} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_E} = \Delta_{col_E} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_E} h^2}{12 E} \left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr} \right]$$

61 对于内部组合:

$$\Delta_{col} = \frac{V_{col_I} h^3}{12 E I_{col_I}}$$

$$\Delta_{gdr} = \frac{V_{gdr} L^2 h}{12 E I_{gdr}} = \frac{2 V_{col_I} L h^2}{12 E I_{gdr}}$$

$$\Delta_{tot_I} = \Delta_{col_I} + \Delta_{gdr} = \frac{V_{col_I} h^2}{12 E} \left[\frac{h}{I_{col_I}} + \frac{L}{I_g dr} \right]$$

哪里签名 E 和 I 是外部和内部列。总值 位移 将是

$$\Delta_{tot} = n \frac{\Delta_{tot}}{2}$$

哪里 n 这是故事的数量, 以及 Δ_{tot} 它适用于内部或外部关节。

62 挠度的两个主要来源是横向柱 抵抗垂直板和旋转在抵抗水平板, 图 38.18.

63 垂直无形负载会导致侧面分裂四方, 图 38.19.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

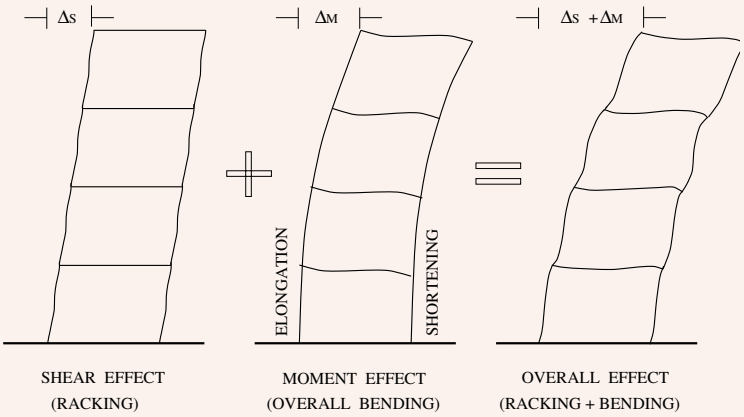


图 38.18: 硬 框架 子系统的横向和灵活的 挠度 , (Lin and Stotesbury, 1981)

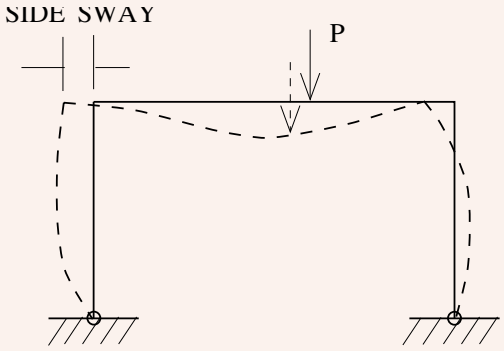
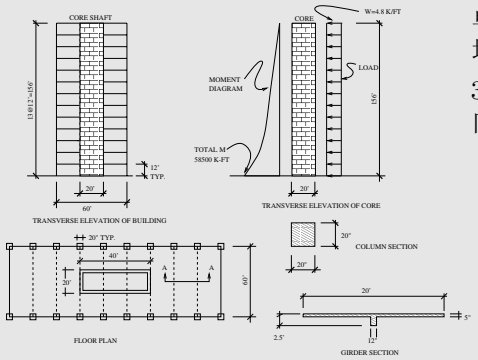


图 38.19: 侧路 挠度 从不交响的垂直 荷载 , (Lin and Stotesbury, 1981)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

38.2.4.4.1 例题 38.7: 建造大约转 挠度

适应从 Lin and Stotesbury, 1981 Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers.



单元是混凝土中央轴 (20ft×40ft 分区, 由四个 12 的墙组成) 和增强的预应力混凝土框架 (由 12in 组成 × 四十个 T 点, $I_{gdr} = 3.64\ \text{ft}^4$, 和 20 英寸平方 钢筋混凝土 列). 我們考慮在轉向方向上進行 4.8 k/ft 的 风荷载 , 並提出以下假設:

1. 列具有统一的分区属性和所有故事的高度。
2. 沙夫特墙对所有故事均匀厚。我们忽略了墙壁的开放。
3. 风荷载在建筑物的高度上均匀。

解决方案如下:

1. 确定头部的灵活变形 (我们可能会忽略胡萝卜变形, 因为胡椒是缓慢的):

$$\Delta = \frac{wh^4}{8EI}$$

$$I = \frac{b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3}{12}$$

$$= \frac{(41)(21)^3 - (39)(19)^3}{12} = 9,400\ \text{ft}^4$$

$$E = 3 \times 10^6\ \text{psi} = 432,000\ \text{ksf}$$

$$\Delta = \frac{(4.8)\ \text{k.ft}(156)^4\ \text{ft}^4}{8(432,000)\ \text{ksf}(9,400)\ \text{ft}^4} = 0.087\ \text{ft}$$

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{0.087}{156} = \frac{1}{1,800} \checkmark$$

和 $\frac{\Delta}{h}$ 比率在大多数建筑代码中允许的 1/500 以下, 并且在 混凝土 建筑物的常见指数范围内, 从 1/1000 到 1/2,500 之间。

如果墙厚度减少, 如果门开关考虑, 则挠度将相应较小。

挠度 由于瞬间, 在顶部迅速增加, 值其中 11800 分, 仅指的是 **平均** 整个建筑物的流动指数, 而 **故事** 流动指数可能更高, 尤其是顶层。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 接下来, 我们将考虑框架顶部的脱落。假设每 框架 占总 风荷载 和 Shear 的 1/9 , 并且忽略了 柱缩短, 然后:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{V_{col_E} h^2}{12E}\left[\frac{h}{I_{col_E}} + \frac{2L}{I_g dr}\right] \\
I_{col} &= \frac{bh^3}{12} = \frac{(20/12)(20/12)^3}{12} = 0.64\ \text{ft}^4 \\
I_{gdr} &= 3.64\ \text{ft}^4 \\
V_{col_I}^{\text{ground}} &= \frac{(4.8)\ \text{k.ft}(156)\ \text{ft}}{(2)(9)} = 41.7\ \text{k/col} \\
\Delta &= \frac{(41.7)\ \text{k}(12)^2}{12(432,000)\ \text{ksf}}\left[\frac{(12)\ \text{ft}}{(0.64)\ \text{ft}^4} + \frac{2(60)\ \text{ft}}{(3.46)\ \text{ft}^4}\right] \\
&= 0.00116(18.8 + 34.7) = 0.062\ \text{ft}
\end{aligned}$$

3. 因为故事的冲动与故事中的头条不同, 这将线性下降到顶部, 平均冲动将是 $0.062/2 = 0.31$ ft 根据故事和建筑顶部的挠度是大约

$$\Delta = (13)(0.031) = 0.40\text{ft}$$

指示一个流动的比例

$$\text{Drift Ratio for Building} = \frac{(0.4)\ \text{ft}}{(156)\ \text{ft}} = \frac{1}{400}$$

$$\text{Drift Ratio for Ground Floor} = \frac{(0.062)\ \text{ft}}{(12)\ \text{ft}} = \frac{1}{194}$$

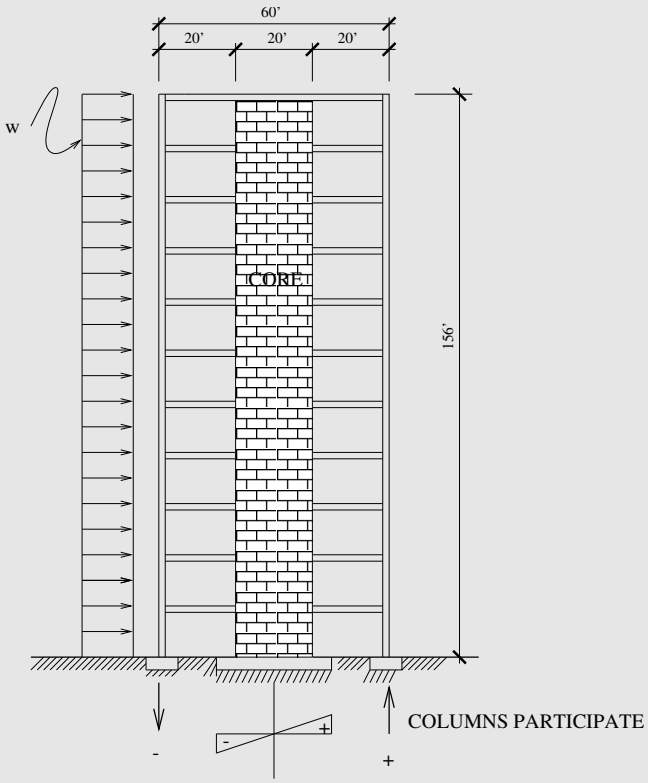
4. 比较框架的分解 0.40 ft 以 挠度 的 0.087 ft, 可以看到, 框架大约是五倍的灵活性比相关术语。此外, 框架不会足够坚固地携带整个侧负载。相比侧 荷载 与相对硬度, 框架 将携带约 1/6 的 荷载, 剩下的 5/6 将由轴承携带。

   增加柱的尺寸将加强框架, 但为了真正有效, 旋转器的坚定性也需要增加, 因为旋转剂占挠度的约 2/3。然后, 可以制作的框架或携带更大的比例荷载. 请注意, 相关术语和框架的分裂形状是相当不同的, 所以上面的简单比较顶部分裂并不是一个准确的评估。

   最后, 我们还没有研究过由外部列, 它们紧密连接到相关术语墙, 并将与 相关术语作为一个单位。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



这将是非常有效的, 因为水平地板的直径会保持并迫使它们一起分裂。

5. 总之, 这似乎是一个相当有效的布局, 进一步分析将改进和优化它。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



阿尔布雷赫特·杜勒的 *Melencolia I* 又一次 *(1514)*

Melencolia I 作为对近距离分析的转形, 在直觉、估计和地质合理化中发挥关键作用。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

39 初步设计

摘要

通过这个章节, 我们采取断裂并应用一些 (很简单的时刻) 此前提到的概念, 以进行某些标志性结构的初步部分分析/设计。

每个案例研究都从可用的文学中获取, 并适应了 (通过调整笔记) 为了本书的需要。

39.1 例题 39.1: 杜勒斯机场 1241
39.2 例题 39.2: 艾菲尔塔 1247
39.3 例题 39.3: 杂志一般 1254
39.4 例题 39.4: 乔治华盛顿桥 1258
39.5 例题 39.5: 设计双环拱 1264
39.6 例题 39.6: 温度变化在一个 拱 1273
39.7 例题 39.7: 平凡的拱与分裂变异 *I* . . 1275

39.1 例题 39.1: 杜勒斯机场

适应从 Howard, 1966 Structure: An Architect's Approach 和 Whitehead, 2020 *"Sarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction"*.

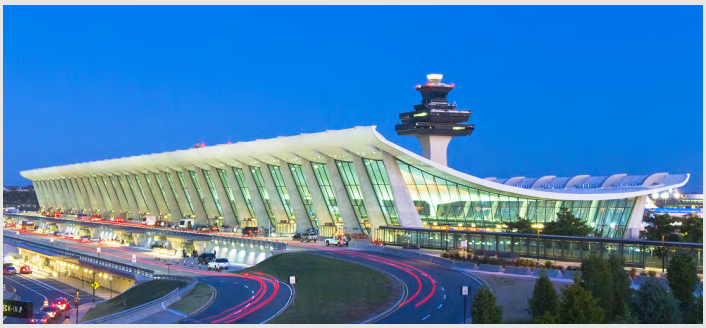
这个标志性的美国结构, 由 Eero Saarinen 设计 (谁也设计了圣路易斯通道拱同时), 结合了美学与结构功能。初步

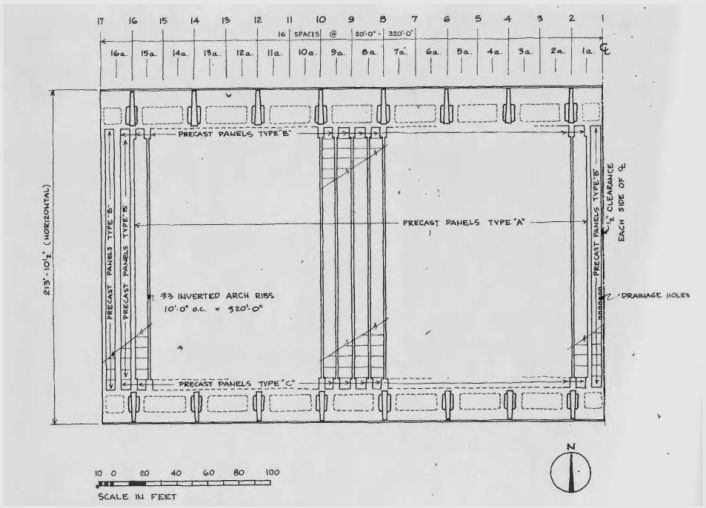
描述

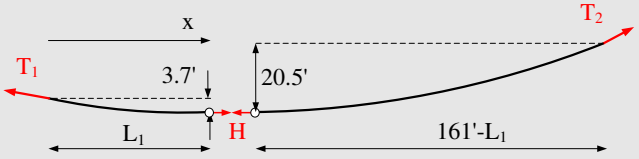
结构有 16 个柱子在开放室的每个侧面, 宽 40 英尺 (12 m) 隔离, 用大基地向外倾斜, 以帮助抵抗 thr 和天花板。不同 柱 高度创造了一个旋转的弯曲天花板, 覆盖了整个 90,000 平方英尺面积 (8,361 m^2), 具有由均匀充电的吊电缆的催眠曲线定义的地质。

挂天花板电缆被悬挂在两条向上弯曲的, 放置到位置的混凝土边缘板之间, 连接到列。每 10 英尺 (3 m) 长度沿着边缘板的周围, 两对 1 英寸 (2.54 cm) 钢材电缆被暂停 160 英尺 (48.8 m) 穿越间隔到另一边 梁. 接下来,1800 个轻重的金属小板在侧面上放置了电缆。电缆被预压到准确的光学地质, 然后天花板被沙袋重下, 直到两台电缆 (在面板之间的差距) 板上的顶板可以被包装在轻重的喷射 混凝土。天花板底下没有需要的形状 - 无知地说, 面板是顶层板的结构和形状。

审阅稿







天花板的部分计划

紧张

但是, 由于小小的细节, 我们可以 **假设** 我们有一个模拟的形状。至于最高的 SAG (但是要确定), 在 索中的压力只是相当于 h. 考虑左和右自由体图表, 并采取与支持有关的时刻:

$$3.7H = w\frac{L_1^2}{2}$$

$$20.5H = w\frac{(161 - L_1)^2}{20.5}$$

平等, 我们得到了 $L_1 = 48.0'$ 和 $H = 311w$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

支持的角落是

$$\alpha = \arctan \frac{V}{H} = \arctan \frac{48w}{311w} = 8.77^\circ$$
$$\beta = \arctan \frac{V}{H} = \arctan \frac{(161-48)w}{311w} = 19.97^\circ$$

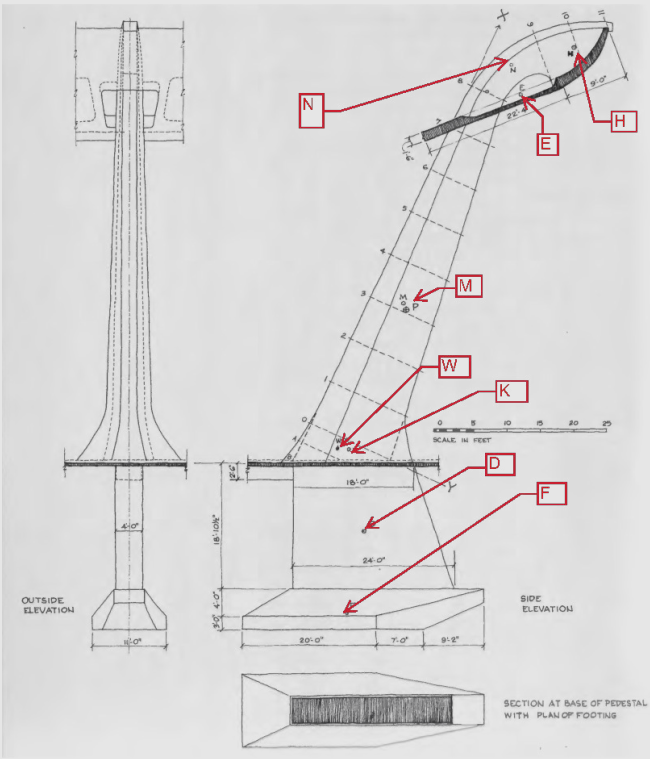
左边和右边的紧张局势, 就是这样。

$$T_1 = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{311w}{\cos 8.77^\circ} = 315w$$
$$T_2 = \frac{H}{\cos\beta} = \frac{311w}{\cos 19.97^\circ} = 331w$$

重量 w 是 0.33 kip/ft 的跨度。因此, 最大压力将是 $T_{max} = (331)(0.33) = 109$ 吉普赛 在建造过程中, 这将是大约由两条 1 英寸直径的桥梁线所携带的荷载, 这些桥梁对每个 122 芯片都很好, 提供安全因素。244/109，即 2.25.

重量和中心

这里不计算边缘梁的弯矩和剪力，因为它们不影响所分析主框架的整体受力图像。北侧边缘梁跨度为 40 英尺、梁深为 32 英尺（沿主力方向量取），按比例可视为**深梁**。
悬挂屋面的水平与竖向分力已经确定；由于主框架间距为 40 英尺，而肋间距仅为 10 英尺，这些分力需乘以 4。为了完成受力分析，还需确定边缘梁和框架的重量及形心。[a]



[a]这里保留 20 世纪 60 年代结构工程师所作的计算。如今可用 CAD 程序轻松完成，但逐步计算仍是复习数值积分与基本静力学的好方法。

所用石质混凝土的容重为 0.15 kip/ft^3。主要尺寸见上图。梁的边缘:

$$(22.3)(1.5) + (9.0)(1.3) = 45.1 \text{ ft}^2 \times 37 \text{ ft} = 1,670 \text{ ft}^3$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

主条目:

$$\begin{aligned} \text{柱周孔洞} \quad (15)(5)(1.5) \quad &= -112 \\ \text{凹槽} \quad (28)(14)(1.0) \quad &= -392 \\ \text{合计} \quad &= -504 \end{aligned}$$

总体重

$$1,670 - 504 = 1,166 \text{ ft}^3 \times 0.15 \text{ kip/ft}^3 = 175 \text{ kip}$$

其中心性估计在点 E. 框架或列, 更无聊。它可分为五个部分：近似截棱锥形的主体杆身、底部楔体、颈部下端的裙部或扩展部，以及顶部。主要轴的体积可以通过 prismoidal 公式非常准确地找到。

$$\frac{1}{4}h(A_0 + 4A_4 + A_8)$$

在此情况下, 它提供 220 英尺 ^{3}. 但我们也需要中心的位置。

使用辛普森的第一条规则。辛普森的规则是数值方法, 用四角形函数来接近定义整合的值。

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

因此, 我们将长度分为八个平等的部分, 由九个节点 7 英尺等。部分 0、4 和 8 的区域被计算, 其余区域被交换。中心位位于 X 和 Y 轴的参考。由于部分的中心线大约位于直线上, 因此不需要计算 Y 距离。

部分 (1)	区域 ft^2 (2)	辛普森多元化 (3)	$f(Vol)$ (2)(3) (4)	瞬间手臂 (5)	$f(M)_y$ (4)(5) (6)
0	68.7	1	68.7	0	0
1	60.6	4	242.4	1	242.4
2	52.7	2	105.4	2	210.8
3	45.2	4	180.8	3	542.4
4	38.3	2	76.6	4	306.4
5	32.1	4	128.4	5	642.0
6	26.5	2	53.0	6	318.0
7	21.3	4	85.2	7	596.4
8	16.4	1	16.4	8	131.2
Σ			956.2		2,989.6

为了一个空间 s 7 英尺, 体积是

$$\text{Volume} = f(vol) \times \frac{s}{3} = 956.9 \text{ ft}^2 \times \frac{7}{3} \text{ ft} = 2,210 \text{ ft}^3$$

因此, 中心将是

$$\overline{X} = \frac{(s^2/3)\Sigma f(M)_y}{(s)\Sigma f(vol)} = 7.0 \times \frac{2,989.6}{956.9} = 21.9 \text{ ft}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

底部楔体的体积可通过计算下列截面面积求得 A 使用 Prismoidal 公式。

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_A + A_B) = \frac{6.0}{6}(68.7 + 4(42.0) + 0) = 237 \text{ ft}^3$$

中央正处于 W.

体积的滑板大约是通过增加一个三角高 8,5 英尺, 基为 2.5 英尺的区域, 以 48.0 英尺周围。体积是 510 英尺 ^{3} 和中东在 K

到那时, 脖子的体积大约是第 8 部分的区域, 加倍了 107 英尺的弓长度 176 英尺。^{3} 和一个中心的 N. 头部被计算从部分区域 $A_9 = 22.8$; $A_{10} = 18.7$; $A_{11} = 3.2$ 和 prismoidal 公式将提供

$$\frac{10.8}{6}(22.8 + 4(18.7) + 3.2) = 182 \text{ ft}^3$$

中心值估计为 H

将这些容量结合起来, 以便找到 框架 的总值到主楼层,

		飞机 ft^3	$\overline{X}$	飞机 $\times\overline{X}$ ft^4	$\overline{Y}$	飞机 $\times\overline{Y}$ ft^4
滑雪	K	510	-1.0	-510	6.8	3,470
梅格	W	237	-1.8	-427	5.2	1,234
主 Shaft	M	2,210	21.9	48,400	4.8	10,670
鼻子	N	176	61.2	10,800	4.3	760
头部	H	182	67.5	12,280	11.5	2,090
		3,315		70,543		18,224

因此,

$$\begin{aligned} \text{Total weight} &= 3,315 \times 0.5 = 497 \text{ k} \\ \overline{X}\text{for whole frame} &= \frac{70,543}{3,315} = 21.3 \text{ ft} \\ \overline{Y}\text{for whole frame} &= \frac{18,224}{3,315} = 5.51 \text{ ft} \end{aligned}$$

中央是 P. 脚踏板的重量是

$$\frac{18+24}{2}(19.0)(4.0) = 1,600 \text{ ft}^3 \times (0.15) \text{ k/ ft}^3 = 240 \text{ k}$$

中央是在 D.

最后, 脚踏体重约为 225 千克, 其中心性在 F.

力量的概述

他们的力量和位置在这里显示。因为 $\Sigma F_y = 0$, 垂直的反力从阴道必须是 1286 基普, 位于脚部区域的中心。假设阴道的水平反应在脚踏板的预定终端升高中间起作用, 可以测量瞬间手臂和从状态计算这个水平反应的大小。$\Sigma M_O = 0$ 与 O 中线的交叉点和垂直 反力 的行动线。(事实上, 垂直和水平反应的行动线可能不会通过我们所假设的点进行作用。如果垂直反应的结果向左移动, 则水平反应将较小, 因此在线上的力量。因此, 这个数字所表明的只是一个第一次接近。力量的方向和性质是正确的; 它们的行动线和大小可能有所不同。)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

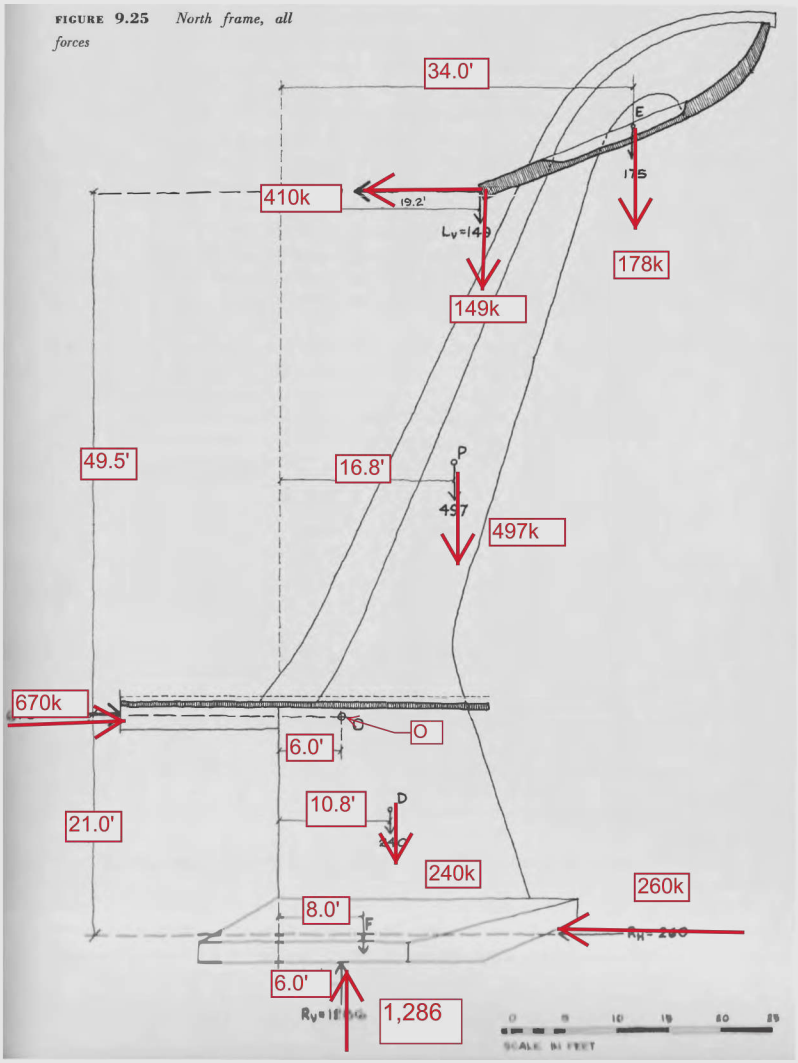
单元	力量 (吉普赛)	瞬间手臂 (ft)	M (K - 五)
脚 F	225	2.0	450
脚踏板 D	240	4.8	1,152
皮隆 P	497	10.8	5,362
艾德 • 贝姆 E	175	28.0	4,900
垂直天花板 L_V	149	13.2	1,966
集合	$R_V = 1,286$		13,830
地平线天花板 L_H	410	49.5	-19,295

地平线反力的时刻 R_H 必须平衡这一点

$$21R_H = 19,295 - 13,830 = 5,465 \Rightarrow R_H = 260 \text{ k}$$

自从 $\Sigma F_H = 0$ 必须提供水平强度。$260 + 410 =$ 第 670 章.

我们观察到, 尽管皮隆的倾斜 (不仅仅是美学原因。) 这不足以让皮隆的重量平衡电缆的拖动, 并消除它们基地的时刻。



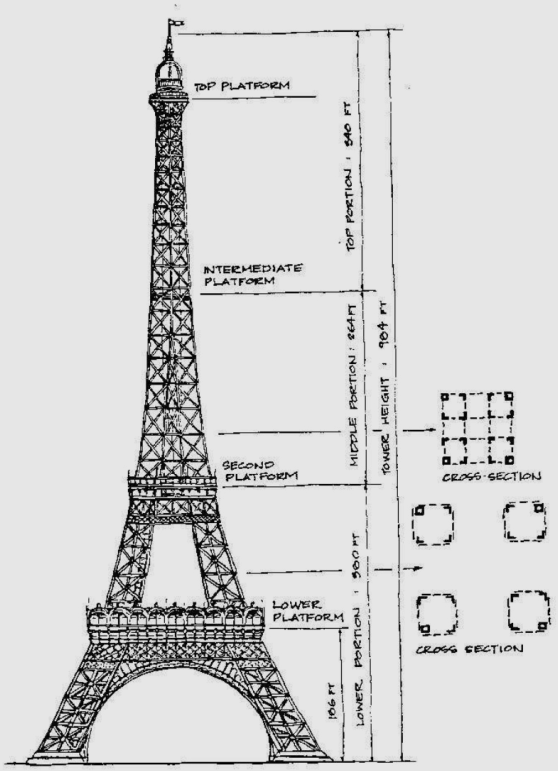
审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

39.2 例题 39.2: 艾菲尔塔

下一篇: 重复 Billington, 1983 Structural Studies.

材料 , & 地质学



塔是由泥铁制成的, 比钢材更便宜, 艾菲尔有更多的经验。该结构基本上是一个塔, 受重力和风荷载的约束。它是相对的 “光明” 结构, 所以 恒载 与 风荷载 相比小。避免过渡 $\frac{M^{\text{gravity}}}{M^{\text{wind}}}$ 它应该比 1 高得多。这也可以通过:

1. 增加自我重量 (就像华盛顿纪念碑一样。)
2. 增加基地的宽度
3. 设计 支座 以抵抗压力。
4. 接下来的压力是支座.

塔高 984 英尺, 基地宽 328 英尺。大基地是必不可少的提供适当的稳定性在风荷载的存在下。
我们可以假设这座塔的形状是模糊的。如果我们采取 x 轴要沿着垂直轴的同位素和 y 半宽, 然后我们知道 $x = 984$ 其它 (半) 宽度 $y = 0$ 而在 $x = 0$ 半宽是 $328/2 = 164$ 因此, 平衡的一半的宽度是由

$$y = \underbrace{164\left(\frac{984 - x}{984}\right)^2}_{av(x)^2}$$

我们从计算中提到, 为了 $y = v(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}ax^2 = 2ax$$

因此, 对于我们的问题

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{2(164)\frac{984 - x}{984}}_{\frac{dy}{dv}}\underbrace{\left(-\frac{1}{984}\right)}_{\frac{dv}{dx}}$$
$$= \frac{984 - x}{2,952}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

也

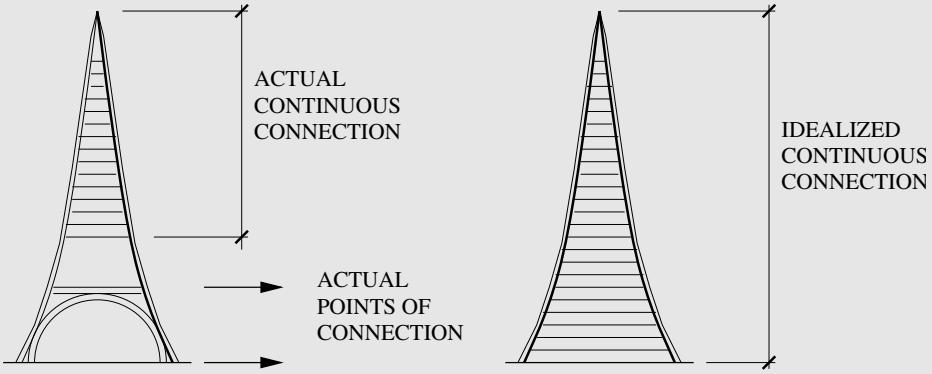
$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

哪里 β 是从中测量的角度 x 轴向坦根向曲线。

现在我们可以在不同高度的宽度和滑板表格

			宽度			
位置	高度	宽度/2	估计	目前	$\frac{dy}{dx}$	β
支座	0	164	328		.333	18.4^o
第一平台	186	108	216	240	.270	15.1^o
第二平台	380	62	123	110	.205	11.6^o
中间平台	644	20	40		.115	6.6^o
顶级平台	906	1	2		.0264	1.5^o
顶部	984	0	0		0.000	0°

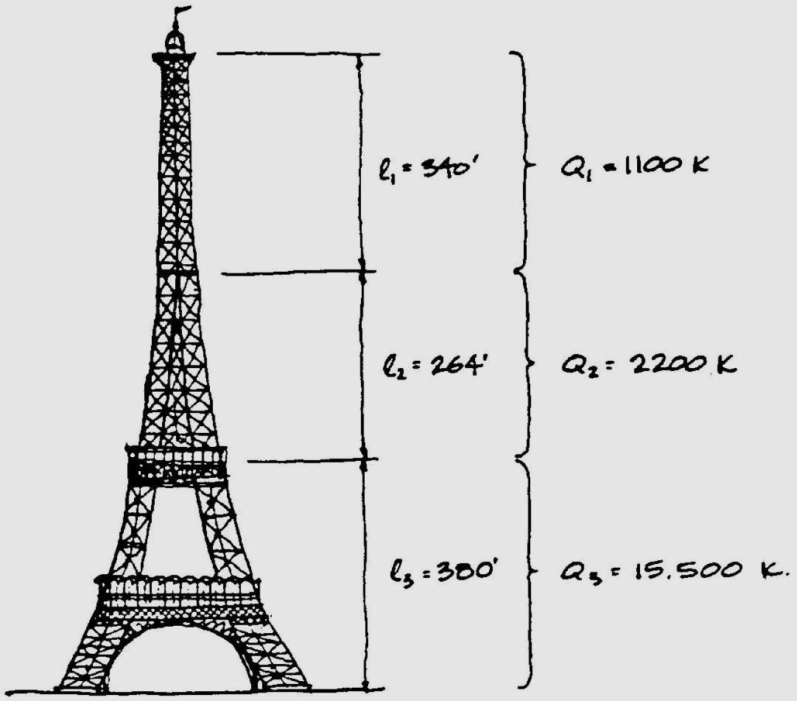
塔由四个倾向支持, 每一个具有截面的 800 in^2. 下面是塔的理想化。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

负载

塔的重量是 18,800 k. 恒载 不均匀分布, 并如下接近:



位置	高度	死体重
地板 - 第二平台	380 ft	15,500 k
第二个平台中间平台	264 ft	2,200 k
中间平台 - 顶	340 ft	1,100 k
全集	984 ft	18,800 k

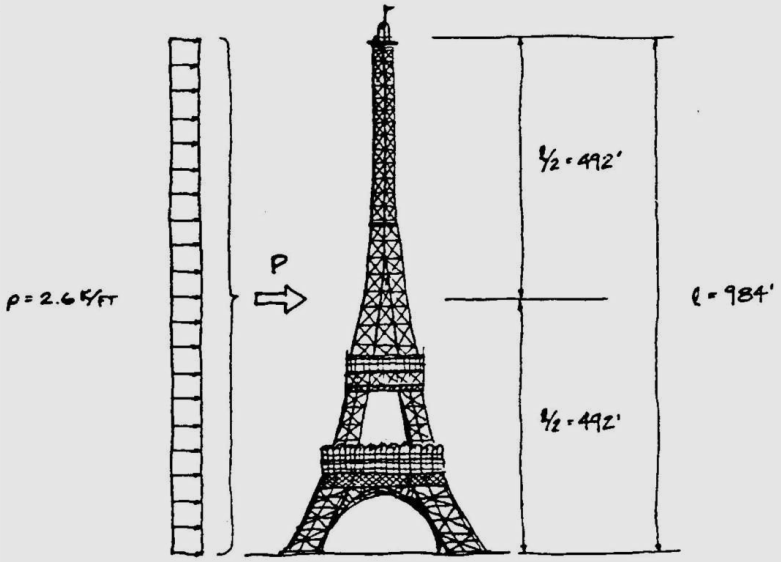
从底部两个平台的实际宽度, 我们可以估计现场负载 (其它中间和顶级平台将有不可忽视的 LL 在比较):

$$\begin{aligned}
&\text{第一平台:} && (50)\ \text{psf}(240)^2\ \text{ft}^2 \frac{kip}{(1{,}000)\ \text{lbs}} && 2{,}880\ \text{k}\\
&\text{第二平台:} && (50)\ \text{psf}(110)^2\ \text{ft}^2 \frac{\text{k}}{(1{,}000)\ \text{lbs}} && 600\ \text{k}\\
&\text{总共:} && && 3{,}480\ \text{k}
\end{aligned}$$

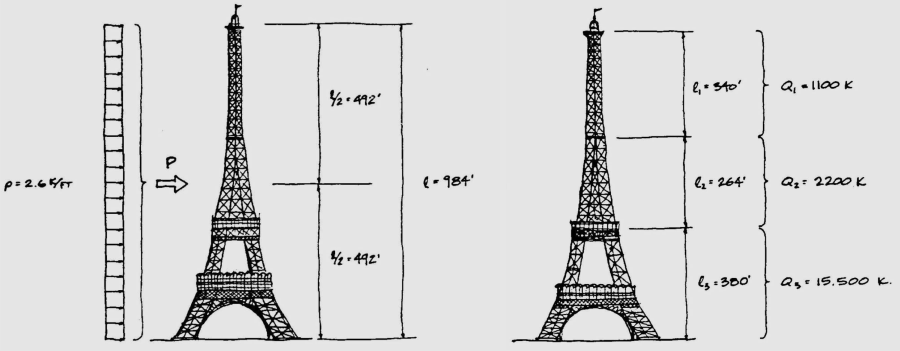
因此, 垂直荷载的总值是 $P_{\text{vert}} = DL + LL = 18{,}800 + 3{,}480 = 22{,}280$ k.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

风 压力 也被称为具有偏见分布 (最高的顶部)，该越过风吹动的分区区域也是模糊的。(基地最高).



因此, 我们将通过考虑到一个 **同等** 风力从 a **永久性** 风 压力 (强度/长度) 和 **永久性** **截面**压力 被认为是 2.6 k/ft, 因此侧风力为

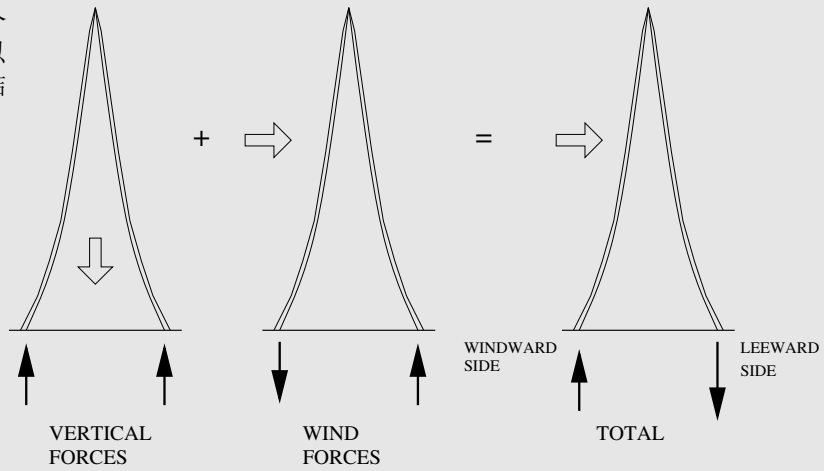


$$P_{\text{lat}} = (2.6)\ \text{k/ft}(984)\ \text{ft} = 2,560\ \text{k}\ \text{ acting at } \frac{984}{2} = 492\ \text{ft}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

反应

简化三维结构与 4 支持到一个两维一个与 2 支持, 反应可以很容易地确定这个静态定义结构。



重力 荷载

$$P_{\text{vert}} = 22,280 \downarrow$$
$$R_{\text{vert}}^{\text{grav}} = \frac{22,280}{2} = 11,140 \text{ k} \uparrow$$

侧面 荷载

侧面时刻 (我们基本上有一个可调的梁服用 荷载). 一瞬间在距离 x 從支座沿著 cantilevered 梁 受制服的压力 p 被授予

$$M_{\text{lat}} = \underbrace{p(L-x)}_{\text{Force}} \underbrace{\frac{L-x}{2}}_{\text{Moment arm}} = p\frac{(L-x)^2}{2}$$

因此, 由风引起的侧面时刻是模糊的。在基地 ($x = 0$) 最长的时刻等于

$$M_{\text{lat}} = p\frac{(L-x)^2}{2} = (2.6)\ \text{k/ft}\frac{(984-0)^2}{2}\ \text{ft}^2 = 1,260,000 \text{ k.ft}$$

我们观察到, 瞬间图表的形状也是模拟的, 就像塔本身一样。这不是偶然的, 因为几乎最优化的结构具有密切接近的形状瞬间图表 (如不断长距离桥梁的不同深度).

要确定由侧面引起的内部力量 (风) 瞬间, 因为我们有两种支持 (一个在压力下, 另一个在压缩下。) 我们使用

$$R_{\text{vert}}^{\text{wind}} = \pm\frac{M}{d} = \frac{1,260,000 \text{ k.ft}}{328 \text{ ft}} = \pm 3,850 \text{ k} \uparrow\downarrow$$

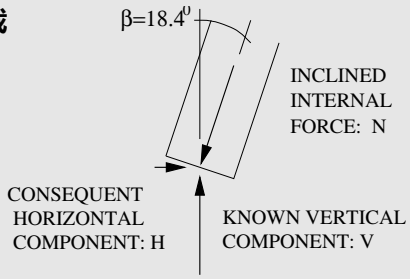
侧面力量 被两对夫妇抵抗。相似之处, 侧面武力将平等分为两对支持者之间, 并将是平等的。

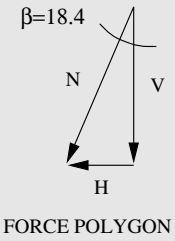
$$R_{\text{lat}}^{\text{wind}} = \frac{(2,560)\text{ k}}{2} = 1,280 \text{ k} \leftarrow$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

内部部队

内部力量首先在基地上确定。**重力 荷载** 首先考虑, 记住这些是由恒载和活载





FORCE POLYGON

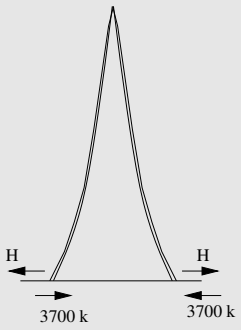
$$\cos\beta = \frac{V}{N} \Rightarrow \qquad N = \frac{V}{\cos\beta}$$

$$N = \frac{11,140\ \text{k}}{\cos 18.4^o} \qquad = 11,730\ \text{k}$$

$$\tan\beta = \frac{H}{V} \Rightarrow \qquad H = V\tan\beta$$

$$H = 11,140\ \text{k}(\tan 18.4^o) \qquad = 3,700\ \text{k}$$

地平线的力量, 必须由基础抵抗



因为垂直荷载随着高度下降, 所以轴力也会随着高度下跌。

在第二个平台上, 整体垂直荷载是 $Q = 1,100 + 2,200 = 3,300$ k 至此高度角度是 11.6^o 因此, 轴力 (一对列) 将是

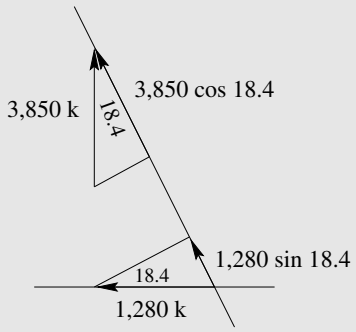
$$N_{\text{vert}} = \frac{\frac{3,300\ \text{k}}{2}}{\cos 11.6^o} = 1,685\ \text{k}$$

$$H_{\text{vert}} = \frac{3,300\ \text{k}}{2}(\tan 11.6^o) = 339\ \text{k}$$

请注意, 这大约比基层的轴力小 7 倍, 而对于一个特定的轴强度, 将导致设计师减少 (或 TAPER) 十字部分。

垂直力量将由第二平台本身的轴力抵抗。**风荷载:** 现在我们已经确定了支座的每对, 垂直和水平力量造成的。通过 风荷载, 下一步是确定它们的轴组成部分沿着弯曲的腿,

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



$$N_c = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta - R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = -(3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) - (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= -4,050\ \text{k Leeward}$$
$$N_t = -R_{\text{vert}}^{\text{wind}} \cos\beta + R_{\text{lat}}^{\text{wind}} \sin\beta = (3,850)\ \text{k}(\cos 18.4^o) + (1,280)\ \text{k}(\sin 18.4^0)$$
$$= 4,050\ \text{kip Winward}$$

内部压力

由侧面和重力力量造成的总力量现在可以确定:

$$N_L^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{-(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -15,780\text{kip Leeward side}$$
$$N_W^{\text{Total}} = \underbrace{-(11,730)\ \text{k}}_{\text{gravity}} \underbrace{+(4,050)\ \text{k}}_{\text{lateral}} = -7,630\text{kip Winward side}$$

我们注意到, 即使在风荷载下, 迎风面仍然处于压缩状态。在理想化塔的地质学中, 简化列的每个对组的区域是 $1,600\ \text{in}^2$ 因此, 最大的压力将由

$$\sigma_{comp} = \frac{N_L^T}{A} = \frac{-15,780\ \text{k}}{1,600\ \text{in}^2} = -9.9\ \text{ksi}$$

注铁的强度为 45 ksi, 因此安全系数是

$$\text{Safety Factor} = \frac{\text{ultimate stress}}{\text{actual stress}} = \frac{45\ \text{ksi}}{9.9\ \text{ksi}} = 4.5$$

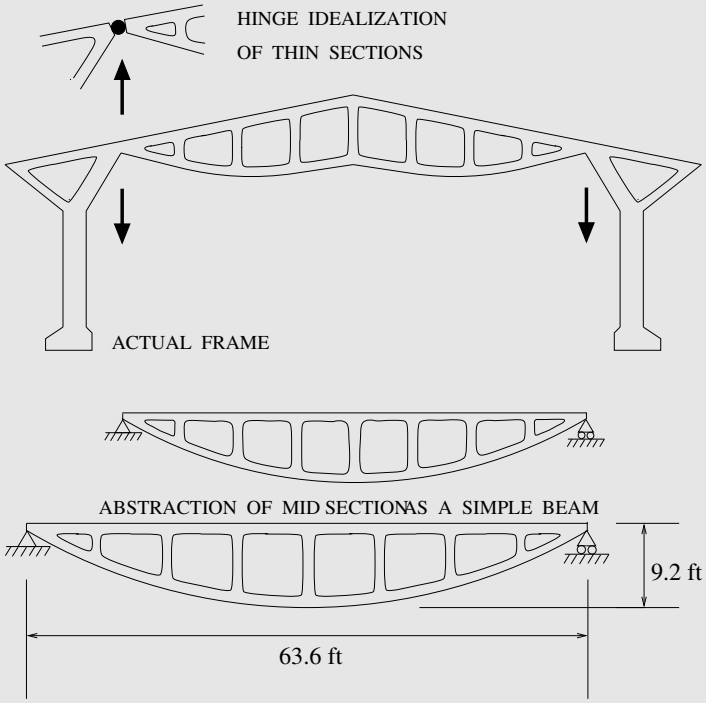
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

39.3 例题 39.3: 杂志一般

下一篇: 重复 Billington, 1983 Structural Studies.

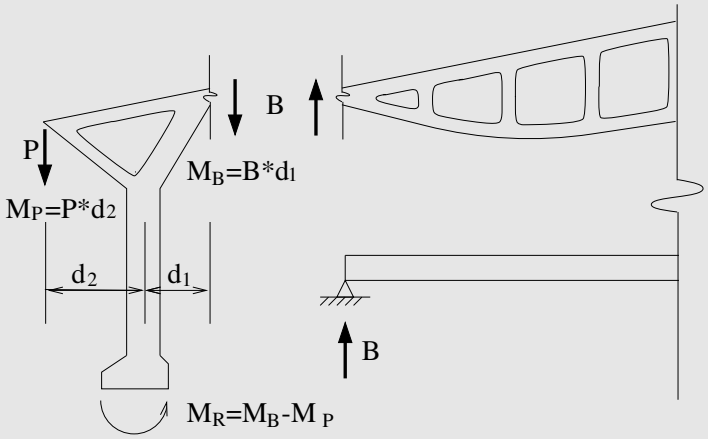
地质学

这座由 Maillart 在 Chiasso 建于 1924 年, 提供这是一个美学与工程之间的婚姻的好例子。杂志一般的最引人注目的特点不是结构本身, 但更像是它的内部支持框架的形状。



框架 可以作为一个单纯支持的 梁 从两个 cantilever 的插槽进行理想化柱 支持。虽然梁本身是一种简单的结构理想化, 但它是以一种方式设计的, 以尽量减少将网络时刻传递给支持 (基金会).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



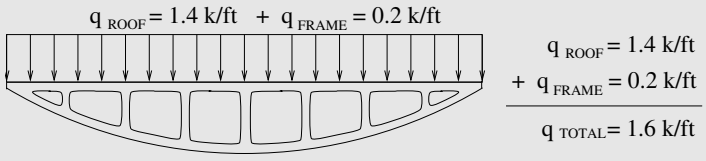
负载

适用于 框架 的 荷载 是从天花板的重量, 以及 框架 本身。考虑到附近框架之间的空间为 14.7 英尺, 而 天花板 荷载 是 98 psf, 并且总框体重为 13.6 千克, 总单一负载变成。

$$q_{roof} = (98)\ \text{psf}(14.7)\ \text{ft} = 1.4\ \text{k/ft}$$

$$q_{frame} = \frac{(13.6)\ \text{k}}{(63.6)\ \text{ft}} = 0.2\ \text{k/ft}$$

$$q_{total} = 1.4 + 0.2 = 1.6\ \text{k/ft}$$



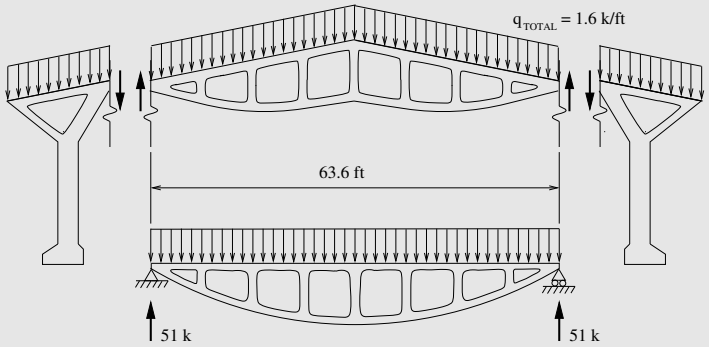
反应

梁的反应首先是利用同义词来确定。

$$W = (1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft} = 102\ \text{k}$$

$$R = \frac{W}{2} = \frac{102}{2} = 51\ \text{k}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

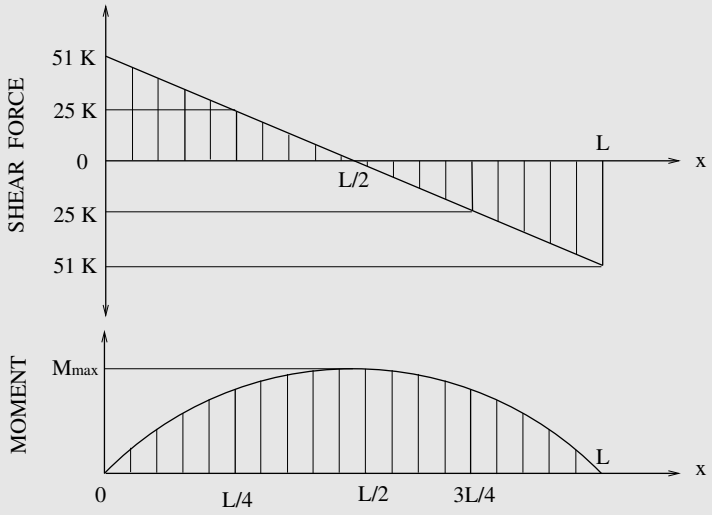


我们注意到, 这些反应是由内部海军力量提供的。

力量

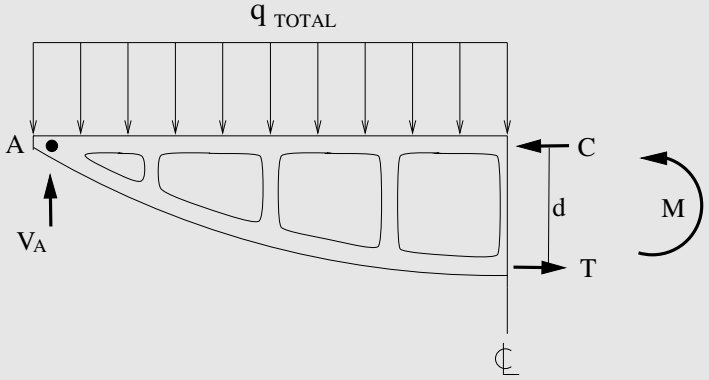
内心的力量, 是瞬间和时刻。这些可以很容易地确定为仅支持的单一充电 梁. 字符串线性不同于 51 kip 到 -51 kip 与零在中心, 而时刻图表与最快的时刻在中心 等同于:

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{(1.6)\ \text{k/ft}(63.6)\ \text{ft}^2}{8} = 808\ \text{k.ft}$$



外部引发的中间时刻必须由平等和相反的抵抗。内部时刻。这可以通过压缩力量的组合来实现。上方的纤维, 下方的压力。因此, 轴力的净值是零, 但是有这是一个网内夫妇。

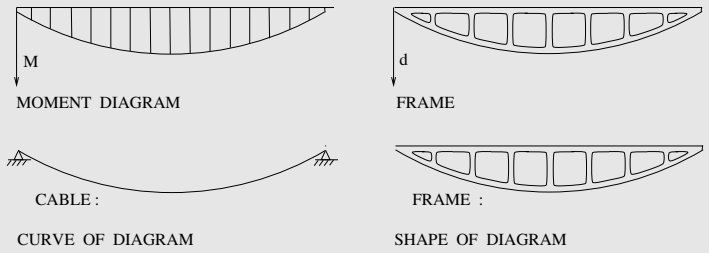
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



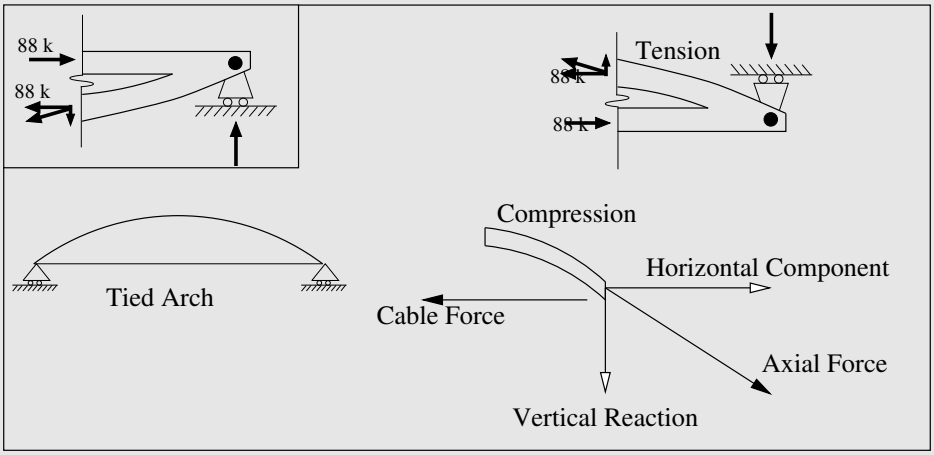
$$M_{ext} = Cd \Rightarrow C = \frac{M_{ext}}{d}$$

$$T = C = \frac{(808)\ \text{k.ft}}{(9.2)\ \text{ft}} = \pm 88\ \text{k}$$

因为框架的形状 (因此 $d(x)$) 它是大约模糊的, 现在也是随后, 轴力在整个框架中是恒定的。



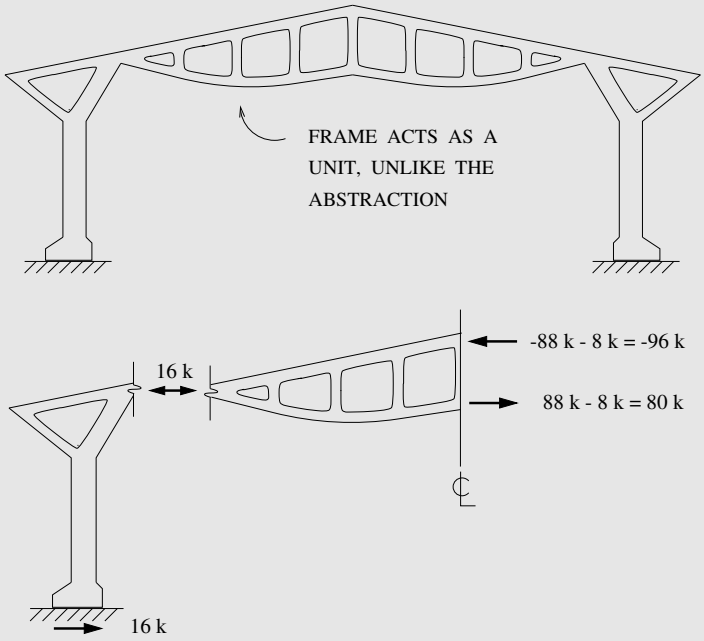
泡沫端的轴力不平衡,88 kip 压缩必须是转移到底部。



这与拱连接器传输到支座的力量相似。

值得一提的是, 当严格的计算机分析进行时, 被确定, 支持者正在为压缩力量做出贡献大约有 8 基普, 必须超越中央值。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



内部压力

净压缩 应力, 为顶端的轴承, 交叉分区面积为 75 in^2 等同于

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{(88)\ \text{k}}{(75)\ \text{in}^2} = 1.17\ \text{ksi}$$

这种压力远低于允许的混凝土压力的压力。约 1350 公元。如果 框架 与天花板一起投下 (摩纳哥建设), 比这 应力 更低。

39.4 例题 39.4: 乔治华盛顿桥

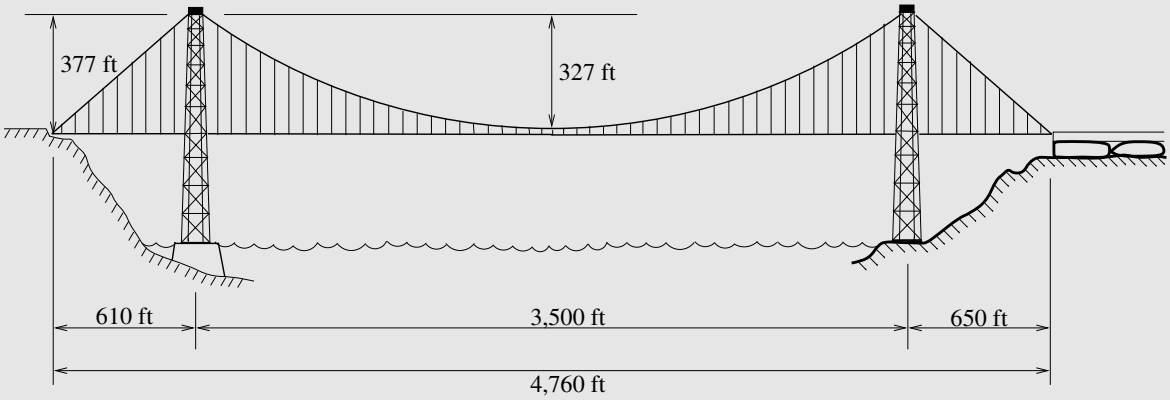
下一篇: 重复 Billington, 1983 Structural Studies.

乔治华盛顿大桥, 是悬挂桥的延伸哈德森河从纽约市到新泽西。已完成 1931 年, 中央宽度 3500 英尺 (當時, 世界的最长时间). 这座桥是由 OH 设计的。阿曼, 谁有从瑞士移民。1962 年, 该地板与添加一个低底盘。

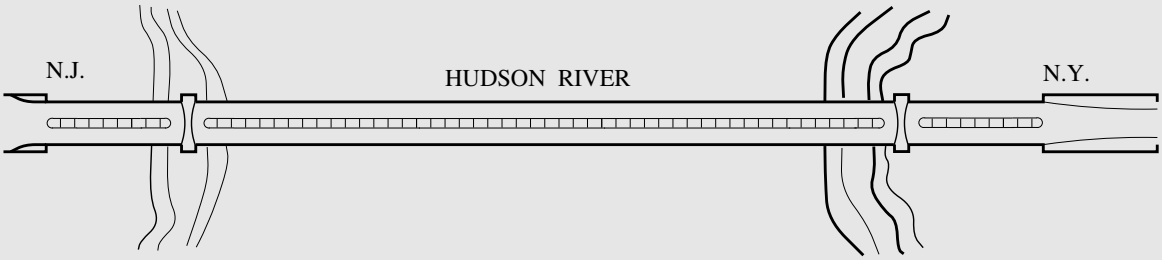
地质学

桥梁的长度和计划高度显示在下面

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



ELEVATION



PLAN

在分析中, 我们将认为两者接近的步伐相当于 650 英尺。

有两个三英尺直径的电缆在每个侧面桥梁 每对夫妇的中心分别为 9 英尺, 而对夫妻自己是 106 英尺。我们将采取 100 英尺的宽度。

电缆是理想化的, 由轮子在顶部的支持塔, 因此, 各部队的水平组成部分索的侧面必须是相同的 (其垂直组件将添加 up).

电缆 支座 由悬挂器挂着的道路盖连接到电缆。电缆由 26474 钢材电缆组成。每個 0.196 英寸的直径。他们在塔上不断地支持, 并在两家银行的巨型区块上坚定地被包围。混凝土 , 安克斯。

因为电缆长得比厚得多。(小小 $\frac{l}{L}$) 他们可以成为完美灵活的成员。没有粘贴抵抗, 但具有高轴力。

塔楼高 578 英尺, 在混凝土箱子上休息。河流 由于我们对 滚动支座 的假设电缆, 塔将仅受轴力的约束。

负载

恒载是由地板的重量和电缆和估计为 390 和 400 psf 分别为中央和侧面分别。以平均宽度为 100 英尺, 这相当于

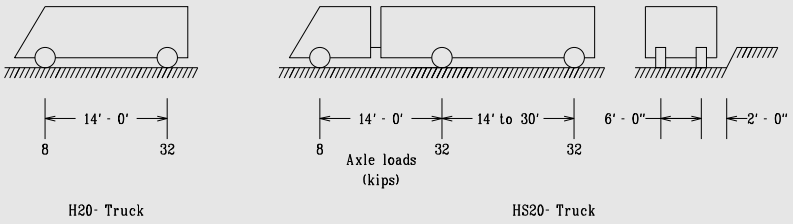
$$DL = (390)\ \text{psf}(100)\ \text{ft}\frac{\text{k}}{(1,000)\ \text{lbs}} = 39\ \text{k/ft}$$

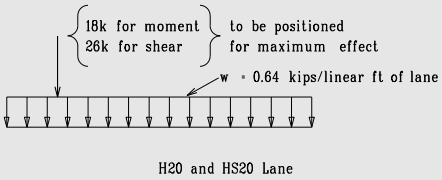
主条目和四十 k/ft 对于那些方面。

对于高速公路桥梁, 设计负载由 AASHTO 提供 (美国国家高速公路交通官员协会). HS-20 卡车经常

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

用于大桥设计。高速公路 要么配有指定的轴承负载和空间的设计卡车必须使用。**或** 其它相同的单一荷载 和 集中荷载. 这个负载必须是以便产生最大压力。



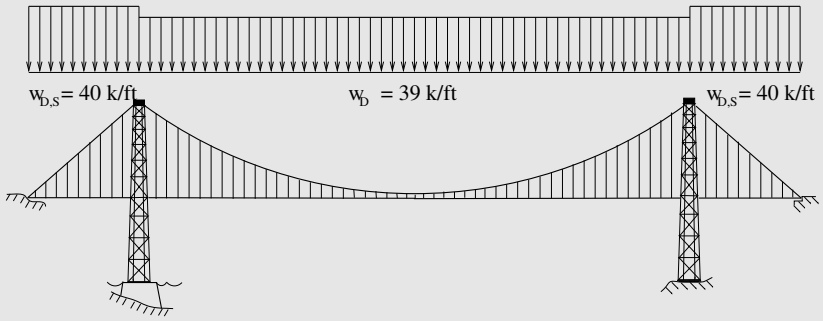


有了兩個天花板, 我們估計有 12 個線的總數或

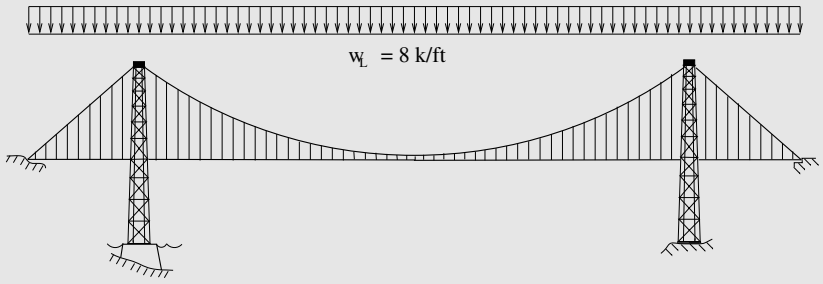
$$LL = (12)\text{Lanes}(.64)\ \text{k/ ft/Lane} = 7.68\ \text{k/ft} \approx 8\ \text{k/ft}$$

我们在分析中不考虑地震, 或风负载。

最后的 DL 和 LL 是 $TL = 39 + 8 = 47\ \text{k/ft}$



DEAD LOADS



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

索 力量

震撼的 H (哪个是索的水平组成部分力量) 它是由 eq 定义的。30.11

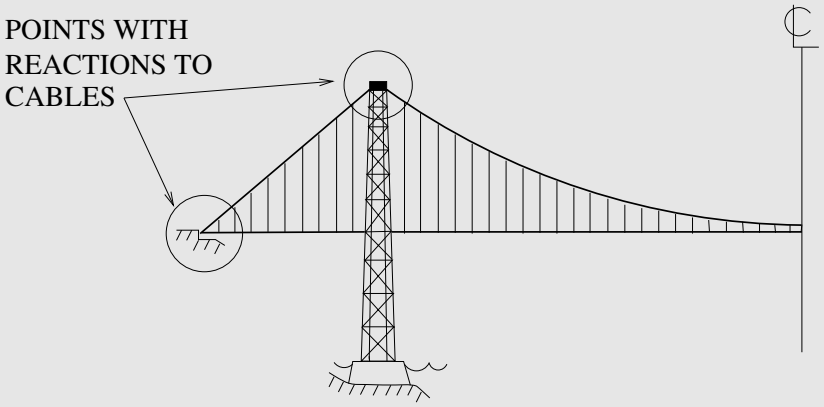
$$\begin{aligned} H &= \frac{wL_{cs}^2}{8h} \\ &= \frac{(47)\ \text{k/ft}(3,500)^2\ \text{ft}^2}{(8)(327)\ \text{ft}} \\ &= 220,000\ \text{k} \end{aligned}$$

来自 EQ。30.44 最大压力 is

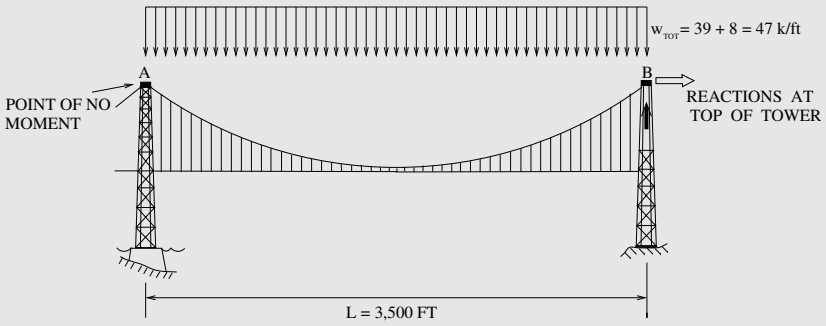
$$\begin{aligned} r &= \frac{h}{L_{cs}} = \frac{327}{3,500} = 0.0934 \\ T_{max} &= H\sqrt{1+16r^2} \\ &= (220,000)\ \text{k}\sqrt{1+(16)(0.0934)^2} \\ &= (220,000)\ \text{k}(1.0675) = 235,000\ \text{k} \end{aligned}$$

反应

索 反应显示在下面



列中的垂直力量由于中央范围 (cs) 只是支持反应。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$V_{cs} = \frac{1}{2} w L_{cs} = \frac{1}{2}(47)\ \text{k/ft}(3,500)\ \text{ft} = 82,250\ \text{k}$$

请注意, 我们可以通过确定向量的总数 H 和 V 应该是相同的 T_{max}:

$$\sqrt{V_{cs}^2 + H^2} = \sqrt{(82,250)^2 + (220,000)^2} = 235,000\ \text{k} \checkmark$$

沿着边缘的 (ss), 总值 荷载 是 $TL = 40 + 8 = 48\ \text{k/ft}$. 我们确定垂直 反力 V_{SS} 通过采取的关于左翼的时刻总结:

$$\Sigma M_D = 0; \circlearrowleft +; h_{ss} H + (w_{ss} L_{ss}) \frac{L_{ss}}{2} - V_{ss} L_{ss} = 0$$

$$= (377)\ \text{ft}(220,000)\ \text{k} + (48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft} \frac{(650)\ \text{ft}}{2} - 650 V_{ss} = 0$$

$$V_{ss} = 143,200\ \text{k}$$

注: 我们所拥有的使用 平衡 确定 索 的垂直组件力量。确定是错误的 V_{ss} 从 $V_{ss} = 220,000 \frac{377}{650}$ 正如我们在上面的例子中所做的那样, 因为索现在已充电并不再直。我们必须确定电缆的形状和支持中的坦根。开始与 Eq. 30.7:

$$-Hy = \frac{1}{2} w x^2 + C_1 x + C_2$$

$$-y = \frac{w}{H} \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{H} x + \frac{C_2}{H}$$

在 $x = 0, y = 0$ 这样 $C_2 = 0$; 和在 $x = 650, y = -377$; 与 $H = 220,000\ \text{k}$ and $w = 48$

$$y = -\frac{(48)\ \text{k}}{\text{ft}(220,000)\ \text{k}} x^2 - \frac{C_1}{(220,000)\ \text{k}} x$$

$$= -1.091 \times 10^{-4} x^2 - 4.545 \times 10^{-6} C_1 x$$

$$y|_{x=650} = -377 = -1.091 \times 10^{-4} (650)^2 - 4.545 \times 10^{-6} C_1 (650)$$

$$C_1 = 112,000$$

$$y = -1.091 \times 10^{-4} x^2 - 0.501 x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2.182 \times 10^{-4} x - 0.501$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=650} = -0.1418 - 0.501 = -0.6428 = \frac{V}{H}$$

$$V = (220,000)(0.6428) = 141,423\ \text{k}$$

只有 1 的% 不同。因此, 在列上应用的总轴力是

$$V = V_{cs} + V_{ss} = (82,250)\ \text{k} + (143,200)\ \text{k} = 225,450\ \text{k}$$

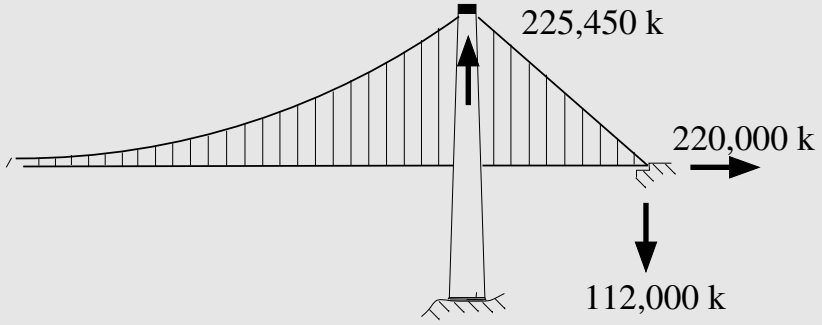
垂直 反力 在 anchor 上是通过总结其中的力量 y 方向

$$(+\uparrow) \Sigma F_y = 0; (w_{ss} L_{ss}) + V_{ss} + R_{anchor} = 0$$

$$-(48)\ \text{k/ft}(650)\ \text{ft} + (143,200)\ \text{k} + R_{anchor} = 0$$

$$R_{anchor} = 112,000\ \text{k} \downarrow$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



侧电缆中的轴力决定 vector sum 垂直和水平反应。

$$T^{ss}_{anchor} = \sqrt{R^2_{anchor} + H^2} = \sqrt{(112,000)^2 + (220,000)^2} = 247,000 \text{ k}$$

$$T^{ss}_{tower} = \sqrt{V^2_{ss} + H^2} = \sqrt{(143,200)^2 + (220,000)^2} = 262,500 \text{ k}$$

索的压力最终确定

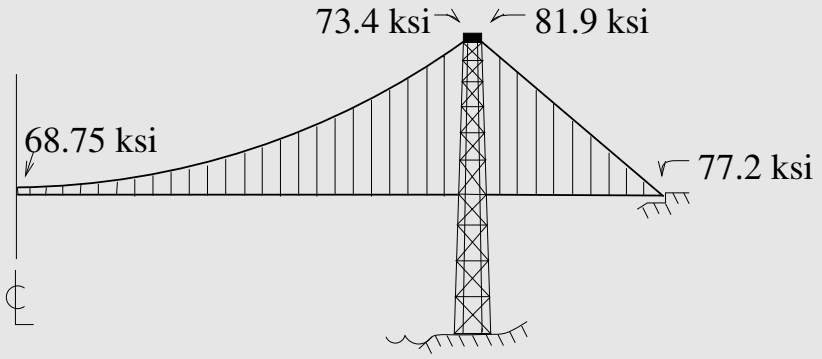
$$A_{wire} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{(3.14)(0.196)^2}{4} = 0.03017 \text{ in}^2$$

$$A_{total} = (4)\text{cables}(26,474)\text{wires/cable}(0.03017) \text{ in}^2\text{/wire} = 3,200 \text{ in}^2$$

$$\text{Central Span } \sigma = \frac{H}{A} = \frac{(220,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 68.75 \text{ ksi}$$

$$\text{Side Span Tower } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{tower}}{A} = \frac{(262,500) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 82 \text{ ksi}$$

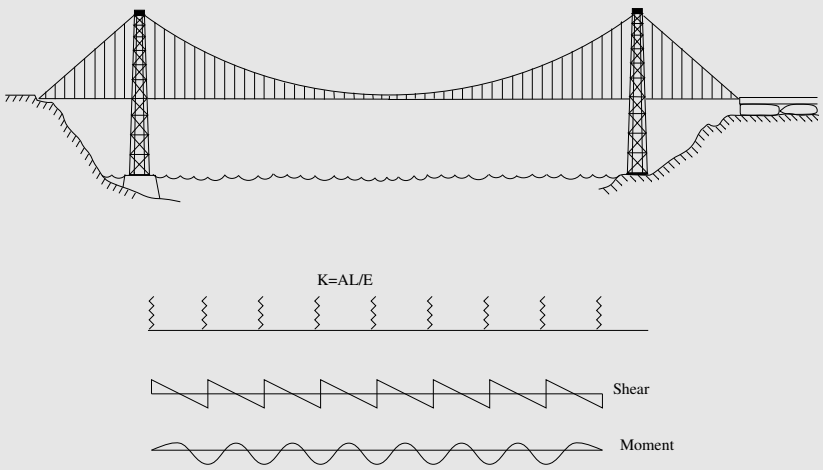
$$\text{Side Span Anchor } \sigma^{ss}_{tower} = \frac{T^{ss}_{anchor}}{A} = \frac{(247,000) \text{ k}}{(3,200) \text{ in}^2} = 77.2 \text{ ksi}$$



如果电缆要被安置在混凝土区块上, 则区块的体积应该至少等于 $V = \frac{(112,000) \text{ k}(1,000) \text{ lbs/ k}}{150 \text{ lbs/ft}^3} = 747,000 \text{ ft}^3$ or a cube of 大约 91 英尺

地板, 用于所有实用目的, 可以被视为持續的 梁 以堅固的柔軟滑板支持 $K = AL/E$ (哪里 L 是支持索 的长度). 这往往是理想化为梁在弹性基础上, 并产生此理想化的瞬间图表显示在下面。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



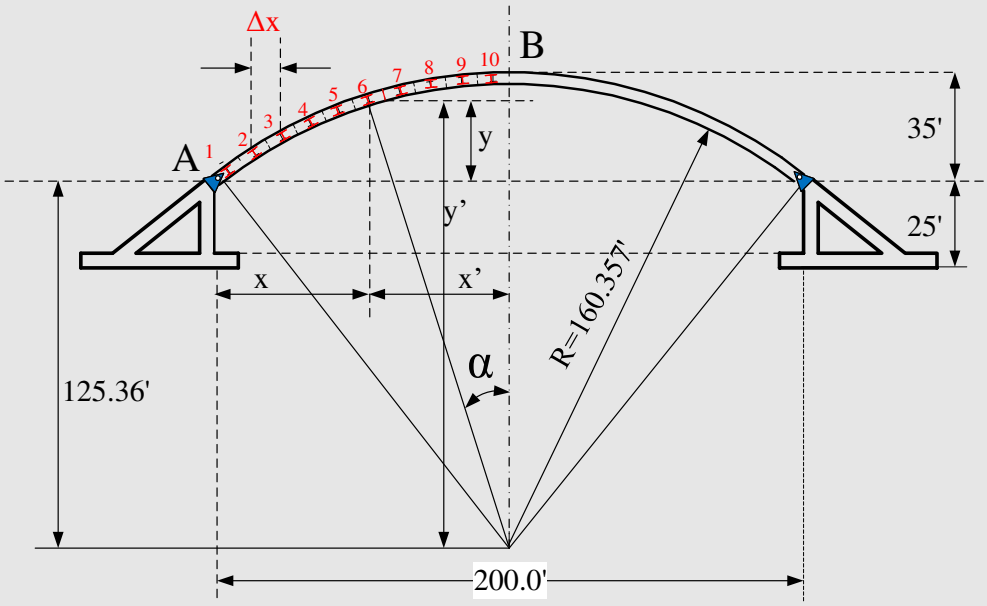
39.5 例题 39.5: 设计双环拱

下一篇: 重复 Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

我们正在寻求设计一个 **双手**, 固体焊接 - 钢材 拱 绳子, 用于一个粘贴器。假设 $F_y = 30$ 李克强 惯性矩的尾巴必须根据需要有所不同。长度, 从中间到直角的中心, 是 200 英尺。绳子要放在 35 英尺的中心到中心, 高度为 35 英寸。天花板、毛巾和绳子将被认为重 25lb/ft。^{2} 在天花板上, 雪将被认为是 40lb/ft^2 这个表面。二十个子将平等地围绕着尾巴。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



地质学

绳子的中心线将被视为一个圆圈的部分。这个循环的光线是

$$(R-35)^2+(100)^2=R^2 \Rightarrow R=160.357 \text{ ft}$$

弓的长度是

$$\theta=\arcsin\frac{100}{160.357}=38.580^\circ \Rightarrow S=160.357\times\frac{\pi}{180}38.580=107.98 \text{ ft}$$

分析中, 弓 AB 将被视为分为十个部分, 每一个与长度

$$\Delta S=\frac{S}{10}=\frac{107.980}{10}=10.798 \text{ ft}$$

因此, 集中荷载 被每个分区的中心框架的粉丝应用到尾巴上。

因为死和雪的总值荷载为 65lb/ft^2 天花板的表面, 每个集中力量的价值将是

$$\Delta P=10.798\times 35\times 65=24.565 \text{ k}$$

(35 相匹配于边缘的宽度)

计算所需, 以评估各个部分的中心坐标, 指向指环 A 下面是显示的。也表明了价值观的 Δx, 各个部分的中心之间的距离的水平预测。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

塞格 - 想念	α	$\sin\ \alpha$	$\cos\ \alpha$	$x' = R\sin\alpha$ (ft)	$y' = R\cos\alpha$ (ft)	$x = 100 - x'$ (ft)	$y = y' - 125.36$ (ft)	Δx (ft)
A	38°34′49″	0.62361	0.78173	100.000	125.36	0	0	
1	36°39′05″	0.59695	0.80229	95.725	128.65	4.275	3.29	4.275
2	32°47′36″	0.54161	0.84063	86.851	134.80	13.149	9.44	8.874
3	28°56′07″	0.48382	0.87516	77.584	140.34	22.416	14.98	9.267
4	25°04′38″	0.42384	0.90574	67.966	145.24	32.034	19.88	9.618
5	21°13′09″	0.36194	0.93220	58.040	149.48	41.960	24.13	9.926
6	17°21′40″	0.29840	0.95444	47.851	153.05	52.149	27.69	10.189
7	13°30′11″	0.23350	0.97236	37.443	155.92	62.557	30.57	10.408
8	09°38′42″	0.16754	0.98586	26.866	158.09	73.134	32.73	10.577
9	05°47′13″	0.10083	0.99490	16.169	159.54	83.831	34.18	10.697
10	01°55′44″	0.03367	0.99943	5.399	160.27	94.601	34.91	10.770
王冠					160.36	100.000	35.00	5.399

桌子 1

初始设计

如果缺乏经验, 因此设计工程师对沿线的分区变异的初始假设处于损失之中, 建议第一次分析基于一个恒定的惯性矩假设。即使是经验丰富的工程师也会经常发现这是最好的程序。

如果它的价值 H 确定的时刻和轴振动可以计算到整个尾巴。各个部分的跨分区区域, 然后为这些时刻和轴动而设计。新的价值为 H, 以及在整个绳子上进行时刻和轴振动的修订值, 为新绳子与不同截面确定。压力在尾巴上进行检查, 如果需要的话, 整个过程都会重复。在本案中, 将遵循此程序。

地平线 Thrust

應用 柔度法, 我們放出水平的 反力 在 A

$$\Delta_{Ah} + H_A \delta_{AhAh} = 0$$

缺陷是由 虚功 计算的。对于这个曲线部分, 我们将取代:

$$\int \delta\overline{M} \frac{M}{EI} dx \quad \text{by} \quad \sum \delta\overline{M} \frac{M}{EI} \Delta S$$

因此, 这种表达式变成了

$$\sum \delta\overline{M} \frac{M}{EI} \Delta s + H_A \sum \delta\overline{M} \frac{\overline{M}}{EI} \Delta S = 0$$

因为 E 和 ΔS 它是常见的, 并且在第一次分析时, 惯性矩 是恒定的, 最终表达为 H_A 是

$$H_A = -\frac{\sum M \delta\overline{M}}{\sum \delta\overline{M} M}$$

计算所需的第一次评估 H_A 下面显示

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分区	(2) x (ft)	(3) $y=\delta\overline{M}$ (ft · k)	(4) 谢尔到正确的 (k)	(5) Δx (ft)	(6) M 增加 (ft · k)	(7) M 简单的梁 (ft· k)	(8) $M\delta\overline{M}$	(9) $\delta\overline{MM}$
A	0.0	0.0	245.650					
1	4.275	3.29	221.085	4.275	1,050	1,050	3,500	10.9
2	13.149	9.44	196.520	8.874	1,962	3,010	28,400	89.2
3	22.416	14.98	171.955	9.267	1,821	4,830	72,400	224.4
4	32.034	19.88	147.390	9.618	1,654	6,490	129,100	395.4
5	41.960	24.13	122.825	9.926	1,463	7,950	191,800	582.2
6	52.149	27.69	98.260	10.189	1,251	9,200	254,800	767.0
7	62.557	30.57	73.695	10.408	1,023	10,220	312,400	934.4
8	73.134	32.73	49.130	10.577	779	11,000	360,000	1,071.4
9	83.831	34.18	24.565	10.697	526	11,530	394,100	1,168.4
10	94.601	34.91	0.000	10.770	265	11,790	411,600	1,218.6
王冠	100.00	35.00	___	5.399	0	11,790		
Σ							2,158,100	6,461.9

桌子 2

哪里

$$R_A = 100\Delta P = (100)(24.565) = 245.650$$
$$\delta\overline{M} = (1)(y) = 3.29$$
$$245.65 - 24.565 = 221.085$$
$$(245.65)(4.275) = 1,050$$
$$1,050 + 1,962 \simeq 3,010$$

出生

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}}{2\delta\overline{MM}} = -\frac{2\times 2,158,100}{2\times 6461.9} = -333.97\text{k} \tag{39.1}$$

时刻

各个角落的中心时刻, 使用约定值仅确定为 H_A, 在下方计算, 当一个时刻被认为是积极的, 如果它倾向于导致压缩的顶部表面的尾巴。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分区	y (ft)	M 简单的梁 (ft · k)	$H_A \cdot y$ (ft · k)	全集 M 分区 (ft · k)
A	0			
1	3.29	1,050	-1,100	-50
2	9.44	3,010	-3,150	-140
3	14.98	4,830	-5,000	-170
4	19.88	6,490	-6,640	-150
5	24.13	7,950	-8,060	-110
6	27.69	9,200	-9,250	-50
7	30.57	10,220	-10,210	+10
8	32.73	11,000	-10,930	+70
9	34.18	11,530	-11,420	+110
10	34.19	11,790	-11,660	+130
王冠	35.00	11,790	-11,690	+100

桌子 3

哪里

$$-333.97(9.44) \simeq -3,150$$
$$3,010 - 3,150 = -140$$

审阅稿

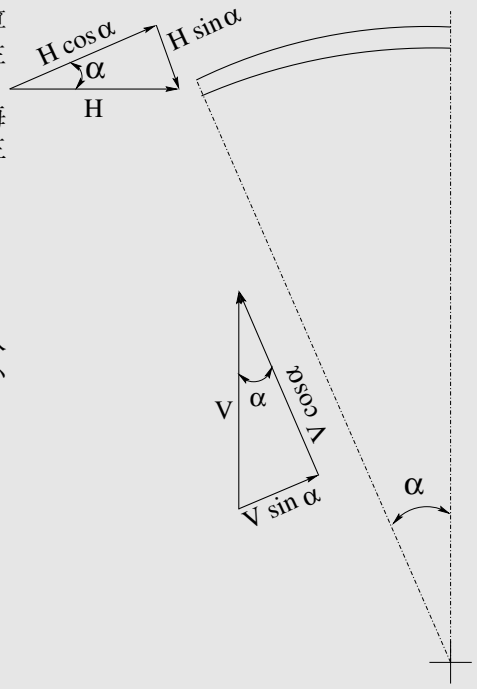
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

正常和共享力量

震撼的 N 每个部分的中心, 正常到 截面 , 必须计算之前可以确定部分要求。以色列的不同价值观为主 S, 在截面的总表, 也将计算为每个部分的中心。 N 和 S 由组成部分组合来实现 H 和垂直板 V 在每个部分的中心, 一个组合显示在下面。从简单的三角形我们有

$$S = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$N = V\sin\alpha + G\cos\alpha$$

价值观 S 和 N 接下来的计算。价值观由 S 被列入前述的 支座 声明, 以证明在常规 拱 边缘中有较小的分裂力量。



分区	V (k)	$V\cos\alpha$	$H\sin\alpha$	$= S$(k)	$V\sin\alpha$	$+H\cos\alpha$	$= N$ (k)
A	245.6	192	-208	= -16	153	+ 261	= 414
1	221.1	177	-199	= -22	132	+268	= 400
2	196.5	165	-181	= -16	106	+281	= 387
3	172.0	150	-162	= -12	83	+292	= 375
4	147.4	133	-142	= -9	62	+303	= 365
5	122.8	114	-121	= -7	44	+311	= 355
6	98.3	94	-100	= -6	29	+319	= 348
7	73.7	72	-78	= -6	17	+325	= 342
8	49.1	48	-56	= -8	8	+329	= 337
9	24.6	244	-34	= -10	2	+332	= 334
10	0.0	0	-11	= -11	0	+334	= 334
王冠						+334	= 334

桌子 4

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里

$$(221.1)(0.80229) = 177$$
$$(333.97)(0.59695) = -199$$
$$177 - 199 = -22$$
$$(221.1)(0.59695) = 132$$
$$(333.97)(0.80229) = +268$$
$$132 + 268 = 400$$

第一设计

目前的价值观检查 M 为此, N 在前两张表中, 表 3 在负时区是关键的,10 在积极时区则是关键。在这两个部分的中心, 必须根据美国钢材建设研究所的规格确定对绳索所需的分区。(艾斯克) 在桌子完成之前。

花瓶有 12 个。× 1 英寸, 并且允许的 应力 为弯曲是 $F_B = 0.6F_y = (0.6)(30) = 20k/in^2$ (按 AISC 旋转). 网页厚度是 $\frac{3}{4}$ 在, 并且允许的轴应力是 F_A=17,000-0.485 L/r^2 (约翰逊的模拟 $L/r > 120$) 在 psi。注意 Kiney 的方程式下跌了广场 r 似乎不适用条件。L/r. 我们将采取 $L = \Delta S = 10.798$, 因为绳子在 Purlin 框点上侧面包装。

网板和网板的厚度以及网板宽度是判断问题。对于第三部分的中心所定义的总深度, 从该部分的中间到尾部使用。对 10 区的中心所定义的深度, 随意用于冠冕的边缘深度。从三部分的中心到冠冕的尾巴的总深度是线性变化。因此, 对多个部分的中心所确定的分区的适当性在下面进行检查。

	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
塞格。	全集深度 (in.)	区域 (在 ^{2})	I (在 ^{4})	M (FTK)	特斯拉 N 轴心 (k)	$f_a = \frac{N}{A}$ (基)	$f_b = \frac{M_c}{I}$ (基)	允许。 F_a (基)	$\frac{f_a}{F_a} +$	$\frac{f_b}{F_b} =$	十数由能力
A	23.00	39.75	3,483		414	10.4		15.88	0.66		0.66
1	23.00	39.75	3,483	50	400	10.1	2.0	15.88	0.63	0.10	0.73
2	23.00	39.75	3,483	140	387	9.7	5.9	15.88	0.61	0.28	0.89
3	23.00	39.75	3,483	170	375	9.4	6.8	15.88	0.60	0.34	0.94
4	22.07	39.05	3,172	150	365	9.3	6.3	15.90	0.59	0.32	0.91
5	21.13	38.35	2,865	110	355	9.2	4.9	15.92	0.58	0.24	0.82
6	20.20	37.65	2,585	50	348	9.2	2.3	15.94	0.58	0.11	0.70
7	19.27	36.95	2,329	10	342	9.3	0.5	15.96	0.58	0.02	0.61
8	18.32	36.24	2,071	70	337	9.3	3.7	15.97	0.58	0.19	0.77
9	17.40	35.55	1,838	110	334	9.4	6.3	15.99	0.59	0.31	0.90
10	16.47	34.85	1,631	130	334	9.6	7.9	16.01	0.60	0.40	1.00
王冠	16.00	34.50	1,527	100	334	9.7	6.3	16.03	0.60	0.32	0.92

桌面 5

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

哪里

$$23-(23-16.47)*(7-3)/(10-3)=19.27$$
$$2(12)(1)+0.75(19.27-2)=36.95$$
$$2(\underbrace{(12)(1)^3/12}_{bh^3/12}+\underbrace{(12)(1)(17.27/2+0.5)^2}_{Ad^2})+\underbrace{0.75(17.27/2)^3/12}_{bh^3/12}+\underbrace{0.75(17.27/2)(17.27/4)^2}_{Ad^2})=2,329$$

Flange Web

$$343/36.95=9.3$$
$$(120)(19.27)/(2)(2329)=0.5$$
$$(17,000-0.485\times 10.798\times 12/(2329/36.95))/1000=17.0\neq 15.96$$
$$9.3/15.96=0.58$$
$$0.5/20=0.02$$
$$0.58+0.02=0.61$$

地平线振动的更新值

现在我们有一个不同 惯性矩, 需要重新计算值的 H_A. 现在我们必须使用

$$H_A=-\frac{\sum M\delta\overline{M}/I}{\sum \delta\overline{M}M/I}$$

改进的价值为 H_A 如下所示, 易于确定。请注意, 在 柱 的值 (2) 它是通过分配价值的 $M\delta\overline{M}$ 对于相应的分区在 柱 (8) 第 2 章 总的 I 每个部分, 如图 5 所示。值在 柱 (3) 图 6 类似于 柱 的值。(9) 桌子 2。列中的简单闪电时刻 (5) 图 6 从 柱 直接获取 (7) 桌子 2。

(1) 分区	(2) $\frac{M\delta\overline{M}}{I}$	(3) $\frac{\delta\overline{M}^2}{I}$	(4) 修订 $H_A y$ (ft · k)	(5) M 简单的 梁 (ft · k)	(6) 修订 瞬间 (ft · k)
1	1.00	0.0031	1,100	1,050	-50
2	8.16	0.0256	3,160	3,010	-150
3	20.79	0.0644	5,020	4,830	-190
4	40.67	0.1247	6,660	6,490	-170
5	66.95	0.2032	8,080	7,950	-130
6	98.57	0.2967	9,270	9,200	-70
7	134.13	0.4012	10,240	10,220	-20
8	173.82	0.5174	10,960	11,000	+40
9	214.41	0.6357	11,450	11,530	+80
10	252.35	0.7472	11,690	11,790	+100
王冠			11,720	11,790	+70
$\sum$	1010.85	3.0192			

桌子 6

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, 改造的 H_A 是

$$H_A = -\frac{2\sum M\delta\overline{M}/I}{2\sum \delta\overline{MM}/I} = -\frac{2\times 1,010.85}{2\times 3.0192} = -334.81k$$

对轴振动的修订值 N 在各个部分的中心计算

分区	$V \sin \alpha$	+	$H \cos \alpha$	=	修订 N (k)
A	153		262		415
1	132		269		401
2	106		282		388
3	83		293		376
4	62		303		365
5	44		312		356
6	29		320		349
7	17		326		343
8	8		330		338
9	2		333		335
10	0		335		335
王冠			335		335

桌子 7

以前在分区的中心设计的部分进行适当性检查。从这张桌子上看, 尾巴的所有部分都满意。然而, 这一点不能完全得出结论, 直到由挠度背部引起的次要压力被调查。

分区	$\frac{N}{A}$ (K / 内 ^{2})	$\frac{M_c}{I}$ (K / 内 ^{2})	$\frac{N/A}{F_A}$	+	$\frac{M_c/I}{F_B}$	=	十数由能力
A	10.4		0.66				0.66
1	10.1	2.0	0.64		0.11		0.75
2	9.8	6.0	0.62		0.30		0.92
3	9.5	7.6	0.60		0.38		0.98
4	9.4	7.1	0.59		0.36		0.95
5	9.3	5.7	0.58		0.29		0.87
6	9,3	3.3	0.58		0.17		0.75
7	9.3	1.0	0.58		0.05		0.63
8	9.3	2.1	0.58		0.11		0.69
9	9.4	4.5	0.59		0.23		0.82
10	9.6	6.1	0.60		0.31		0.91
王冠	9.7	4.4	0.61		0.23		0.84

桌子 8

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

39.6 例题 39.6: 温度变化在一个 拱

下一篇: 重复 Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

确定前例的拱线中丝带缩短和温度变化的影响 (§39.5). 考虑温度下降 100°F.

地平线 位移

要确定绳子缩短的效果, 首先需要找到垂直位移的结尾。A 结果是, 如果在实际负载的拱中出现的弹性轴线被输入到尾部时。A 是轮子上的。

因此, 需要找到垂直位移的结尾。A, 由 1 k 的垂直力量引起的作用 A 考虑到边缘的灵活和轴性线条。垂直 位移 的 A, 由于由实际负载造成的绳子缩短, 则由

$$\sum \frac{N\delta\overline{N}}{AE}\Delta L$$

哪里 N 是从表 7 中提取的轴振动 (上一篇: 例子), $\delta\overline{N}$ 是由 1k 幻想的水平力量引起的轴振动。A 等同于 $\cos\ \alpha$ 在表 1 中, ΔL 是每个部分的长度, 以及 A 这是正确的分区。

垂直 位移 的 A, 由于由 1 k 水平力量引起的绳子缩短而产生的 A, 被授予

$$\sum \frac{\delta\overline{N}^2}{AE}\Delta L \tag{39.2}$$

需要计算来评估这两种缺陷 A 下面显示了。

分区	N (k)	$\delta\overline{N} = \cos\alpha$ (k)	A (在 ^{2})	$\frac{N\delta\overline{N}}{A}$	$\frac{\delta\overline{N}^2}{A}$
1	401	0.8023	39.75	8.07	0.0162
2	388	0.8406	39.75	8.21	0.0178
3	376	0.8752	39.75	8.30	0.0193
4	365	0.9057	39.05	8.49	0.0210
5	356	0.9322	38.35	8.68	0.0227
6	349	0.9544	37.65	8.86	0.0242
7	343	0.9724	36.95	9.04	0.0256
8	338	0.9859	36.24	9.22	0.0268
9	335	0.9949	35.55	9.41	0.0286
10	335	0.9994	34.85	9.60	0.0278
Σ				87.88	0.2300

桌子 9

因此, 垂直的位移 A, 由于由真实的荷载引起的绳子缩短, 是

$$\sum \delta\overline{N}\frac{N}{AE}\Delta L = \frac{2\times 87.88\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.760 \text{ in}$$

由 1 k 水平 荷载 引起的绳子缩短而产生的 A 是

$$\sum \delta\overline{N}\frac{\overline{N}}{AE}\Delta L = \frac{2\times 0.2300\times 10.798\times 12}{30,000} = 0.002 \text{ in}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

水平 位移 的相对值 A, 由于应变的灵活性, 由 1k 水平强度引起 A, 已在 柱 之前确定 (3) 表 6。这个 位移 的绝对值是

$$\frac{2 \times 3.019 \times 10.798 \times 1728 \times 1728}{30,000} = 3.755 \text{ in} .$$

对 位移 的总值 A 由于两种灵活和轴性线由 1k 水平强度产生的 A 因此是

$$3.755 + 0.002 = 3.757 \text{ in}$$

减少在 H_A

对于线性弹性系统, 减少 H_A 由于 RIB 的缩短将是

$$\frac{0.760}{3.757} = 0.20 \text{ k}$$

进一步减少在 H_A 将导致任何下跌的温度的绳子低于那个温度, 在那里拱是升起。当然, 这一点发生了, 因为会导致一些额外的尾巴缩短。由于温度下跌而导致绳子的水平投影长度下降为 100°F 将是

$$\delta L = \underbrace{0.0000065}_{\alpha} \times 100 \times 200 \times 12 = 1.56 \text{ in} \tag{39.3}$$

结果的下降在 H_A 将是

$$\frac{1.56}{3.757} = 0.42 \text{ k}$$

总体下跌的 H_A 由于两条线的缩短和温度下降,

$$0.20 + 0.42 = 0.62 \text{ k}$$

这将有增加时刻的效果, 靠近间隔的中心。

瞬间增加

柱的检查 (6) 在图 8 中, 表 10 应检查可能的过度压力, 因为这种增加。

目前, 在第 10 区的增加将由

$$\Delta M = \Delta H_A((y \text{ for segment } 10) = 0.62 \times 34.91 = 21.6 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

时刻 100 英尺 ·k, 如前定为第 10 部分, 仅在前两个位置是准确的, 因此对第 10 节进行修订的总点将是

$$100 + 20 = 120 \text{ ft} \cdot \text{k}$$

此前为第 10 部分确定的 335k 的冲动, 准确地分为三个位置。改變在 H_A 因此, 由于绳子缩短和温度变化, 必须转为 1k, 以确定在 10 区的纠正冲动。这个修正的风格将是

$$335 - 1 = 334 \text{ k}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

极端压力

极端纤维 应力

$$f = \frac{M_c}{I} = \frac{120 \times 8.23 \times 12}{1631} = 7.25 \text{ k/in}^2$$

根据表 8 所示, 第 10 区的部分进行检查。由

$$\frac{N/A}{F_A} + \frac{M_c/I}{F_B} = \frac{334/34.85}{16.01} + \frac{7.25}{20} = 0.60 + 0.36 = 0.96$$

当然, 在第 10 个部分中, 合适.

没有考虑到温度上涨的影响, 因为这种上升只能发生在夏季月份, 当没有雪负载是可能的。因此, 这个问题的阶段没有实际意义。

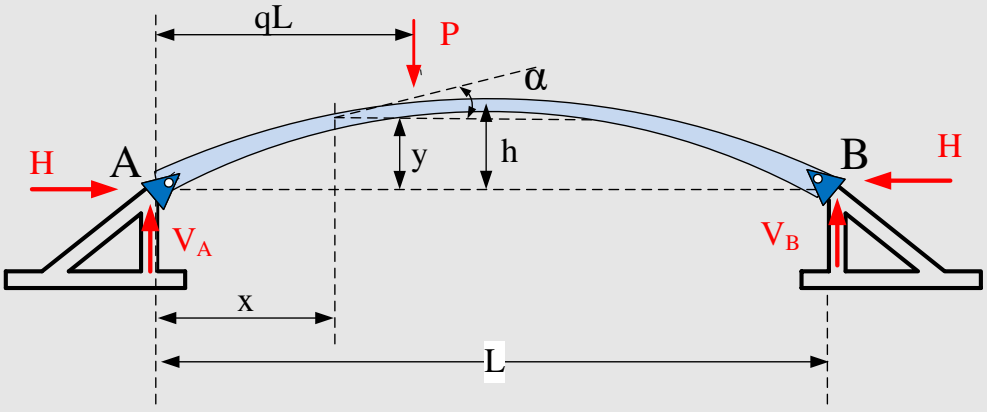
刚刚被证明的分析方法将同样适用于强化混凝土或木材两根弓。然而，如前所述，采用两铰形式建造的钢筋混凝土拱极少。

特别注意的是, 除了应变轴和温度下降之外, 混凝土在钢筋混凝土绳子中缩小也会导致绳子的缩短。要确定将混合物用于分析并以相同的通用方式确定缩小率, 如上所示为温度比例。

39.7 例题 39.7: 平凡的拱与分裂变异 *I*

下一篇: 重复 Kinney, 1957 Indeterminate Structural Analysis.

一个两个倾斜的模拟拱与干燥的变异的无菌。设计双环的拱绳的方法已被证明在 §39.5. 因此, 他提出了第一项分析, 即 H 可以非常好的基于假设一个恒定的惯性矩为尾巴。对问题的替代方法是因为可以为这个问题的价值提供一个相当简单的表达方式。H 如果有两项要求, 则对绳子的形状和比例提出。这两项要求, 首先是, 尾巴轴的曲线必须是模拟; 第二, 任何特定部分的绳子的 惯性矩 必须与角的分数增加的冠冕中的 惯性矩 相同。α, 在哪里 α 是该特定部分的拱轴的水平和坦根之间的角度。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

考虑到单一浓度负载的绳子 P. 我们可以假设,Rib 的惯性矩是不同的, 所以

$$I = I_c \sec \alpha$$

哪里 I_c 是惯性矩在冠冕和 I 惯性矩在任何部分。拱 轴是模拟的。关于参见的方程式 A, is

$$y = 4h\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

假设这个结局 A 是轮子上的。然后,

$$H = -\frac{\Delta_{Ah}}{\delta_{AhAh}} = -\frac{\int M\delta\overline{M}ds/EI}{\int \delta\overline{M}^2 ds/EI}$$

哪里 Δ_{Ah} 是水平 挠度 的 A 因而造成的 P, 和 δ_{aAhAh} 是水平 挠度 的 A 由 1 k 水平力量对左侧的作用产生 A. 在任何部分的尾巴中的时刻 (与终结 A 关于 rollers) 因而造成的 P 由代表 M, 和 $\delta\overline{M}$ 是由 1k 水平力量引起的时刻。A.

在上面的方程中, 以下关系适用:

$$m = y, \qquad ds = \sec \alpha dx, \qquad I = I_c \sec \alpha$$

当这些替代品进行时, 上述表达式为 H 减少到

$$H = -\frac{\int Mydx}{\int y^2 dx}$$

和

$$\begin{aligned}&\text{For } x < qL M = P(l-q)x\\ &\text{For } x > qL M = P(l-q)x - P(x-qL) = Pq(L-x)\end{aligned}$$

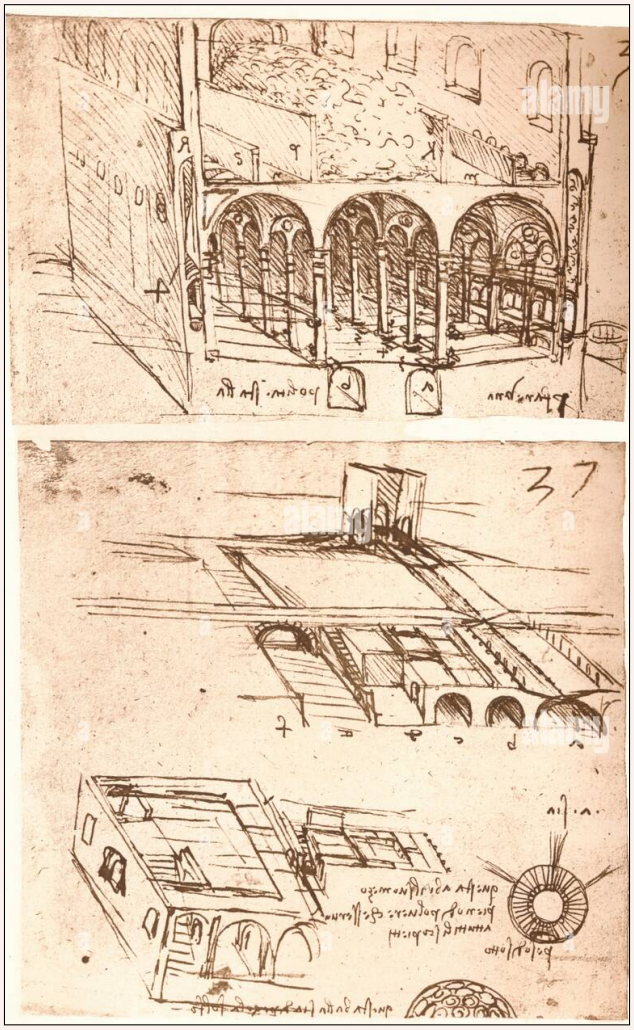
當價值為 M 和 y 在上面的方程式中取代了 H 所指定的整合完成, 结果是

$$H = \frac{5PL}{8h}(q - 2q^3 + q^4)$$

虽然上述方程式是由前所述的特定类型的绳子产生的, 但在初步分析中有某种价值的双环固体绳子具有非平面曲线和具有 I 不同于比例的差异 α. 结果的价值观 H 当然, 它将是接近的, 但可以用来比例一个第一次试验线。例如, 如果以前的方程式适用于负载的例子线 §39.5 计算的价值 H 将是 39914k。正确的值被发现为 334.81 k。

请注意, 如果一个 影响线 为 H 需要, 然后 P 被视为统一和价值观 q 被替换, 相应于影响线命令所需的各个部分。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



建筑雕像, 莱昂纳多 · 达芬奇,*15* 世纪末。

Epitomizes 的初始设计阶段, 在那里最初的想法通过自发和研究绘图被翻译成视觉概念。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

Part III

进阶：数值方法

与上一本专注于解析解的书不同, 这本书优先考虑到数值方法。可能被称为 “杆系结构有限元分析”.

本书以直接刚度法的介绍开始, 使用单元从位移-力关系在杆系结构中产生的。接下来, 变分法正式推出, 从欧拉方程开始, 导致有限元法的全面框架。

在本书中, 讨论了有关这些方法的各种考虑。(如 动力分析、等参单元表述).

该范围仅限于 线弹性结构.

审阅稿

40 引入 直接刚度法

摘要

第三章将为骨骼结构的数字分析奠定基础。它将重新审视一些以前定义但分散的概念。最重要的是, 最终部分将结构分析作为边值问题的背景。

40.1 为什麼 矩阵 结构分析? 1279
40.2 结构理想化 1280
40.3 签约 1282
40.4 协调系统 1282
40.5 灵活性 *vs.* 精力 1282
40.6 自由度 1283
40.7 静态 *vs.* 动画不确定性 1286
40.8 结构分析 / 机械; 一个 边值问题 . . . 1286

40.1 为什麼 矩阵 结构分析?

1 在大多数工學課程中, 學生必須在: 静态, 材料力学, 基本结构分析。这个最后一个课程是一个基本的, 引入基础结构分析 (定义反应、缺陷和内部力量) 二、静态定义和不定义结构。

2 能源方法也被引入, 如果不是所有例子是二次元的。因为重点是手中的解决方案, 非常很少有三维结构被分析。所涵盖的方法, 因为大多数人借给自己 “背后的包装” 解决方案和不一定是计算机执行。

3 那些希望在结构性领域进行专业化的学生工程/机械, 采取更先进的课程, 如矩阵结构分析 和/或 有限元分析.

4 矩阵 结构分析, 或先进的结构分析, 或引入 结构工程 Finite 单元 , 基于介绍分析课程, 重点是这些方法借给自己计算机实施。这样做, 我们将放置二、三维结构的平等重点, 并发展对计算机有助于结构分析的彻底理解。

5 这是必不可少的, 正如实际上大多数, 如果不是所有, 结构分析是由计算机制成的, 因此作为结构工程师必须你知道这些人里面有什么。“黑盒子” 开发足够自我保证能够打开它们, 并修改它们以实现某些特定的任务, 最重要的是要了解他们的限制。

6 与最近的重点放在有限元法在大多数毕业生, 许多学生被诱惑错过一个课程如此一, 快步到一个终端单元一。因此, 重要的是你知道这两门课程的联系和作用。有限元法 对 2 或 3 的分析进行处理次元的连续性。因此, 主要的未知是 $\mathbf{u}$ 节点流离失所和内部 “力量” 通常限于应力 $\boldsymbol{\sigma}$. 唯一相似的单维结构是桁架.

7 二、三维连续性在民间中至关重要工程到模型结构, 如板块, 壳牌和基础, 大多数民用工程结构由 “罗德” 一个维度的单元如插曲、旋转或列。对于那些单元, “移居” 和内部 “力量” 某种程度上是更多复杂比在连续终端单元中遇到的更为复杂。

8 因此, 相反的连续终端单元在那里位移主要是与翻译相同, 在一个尺寸的单元, 并根据结构类型, 通用转移可能包括翻译, 或灵活和/或旋转的转角. 同样, “内部力量” 它不是压力, 而

审阅稿

是轴和相关术语的力量, 以及/或灵活性或旋转时刻。这些概念在分析/设计大多数民用工程结构。

9 因此, 矩阵 结构分析, 是真正的桥梁之路介绍分析和完成单元课程。单元 硬度矩阵 [**k**] 首先, 将使用基本方法引入。结构分析, 以后使用基于能源的概念。此後这种方法是专门在有限元法中使用的。

10 这个课程的一个重要组成部分是计算机编程。一旦理论和算法被彻底解释, 你预计他们将在马特拉布进行编程。该计划将进行 2 和 3 次元 桁架 和 框架 的分析结构, 许多学生随后使用它在他们的专业活动。

11 将有一个计算机任务, 在那里你会以简单的象征性操纵为目的 **数学**.

40.2 结构理想化

12 在分析之前, 必须为合适的结构进行理想化。数学代表性。因为它几乎是不可能的。(而大多数经常不必要) 要模型每一个细节, 必须做出假设。因此, 结构理想化既是一种艺术, 也是一种科学。**某些** 分析师面临的问题包括:

1. 二次元与三次元; 我们应该模型一个单一一个建筑, 还是整个结构?
2. 框架 或 桁架, 我们能否忽略灵活的坚固性?
3. 固定或半固定连接 (最重要的是钢材结构)
4. 坚固的支持或弹性基础 (是基于坚固的岩石, 或超越粘贴, 可以随着时间的推移巩固)
5. 包括或不包括二级成员 (例如, 在三角形的手臂尺寸分析).
6. 动态分析?当应用负载的频率 (激情) 一个结构低于其最低的自然振动频率的三分之一, 然后我们可以忽略无情的影响, 并将问题视为一个 quasi-静态, 否则是动态。分析必须进行。对于非常灵活的结构, 即使是缓慢应用的荷载也可能需要一个动力分析.
7. 时间依赖的线条? 如 混凝土 creep, 图 40.1, 或放松前压电缆, 或其他时间依赖的效果 (如腐蚀或疲劳)
8. 温度效应: 例如, 建筑皮肤的温度可能需要考虑, 图 40.2 因为它会导致无形负载。
9. 包括或不包含轴性变形 (我们可以忽略的轴性一个梁在一个建筑物?)
10. 十字架分区属性 (什么是惯性矩的 A 钢筋混凝土 梁?), §46.6.3.
11. 忽略或不忽略 (通常在高层地区负面时刻)
12. 线性或非线性分析 (线性分析 无法预测峰值或失败 荷载, 并将低估变形).
13. 微小的歪曲 ($\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$) 或大变形 ($\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2$, P-$\Delta$ effects), chapter 29. Note that in the analysis of a high rise building subjected to wind load, the moments should be amplified by the product of the axial load times the lateral deformation, $P - \Delta$ effects).
14. 部分崩溃或本地收益 (一个单一的失败单元 引发整个结构的失败?).
15. 风荷载 (向上建造的高楼的侧驱动风荷载 通常是对更高的结构的主要限制).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

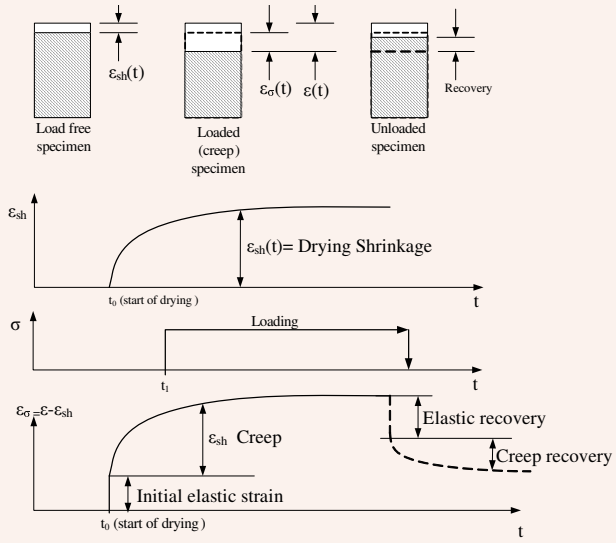


图 40.1: 時間依賴 应变; 切割和縮小

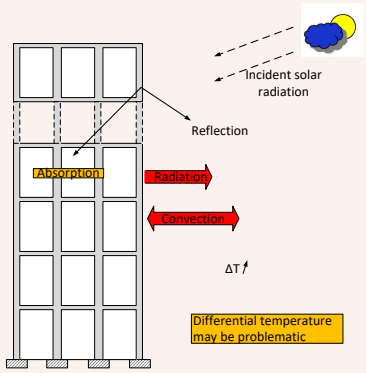


图 40.2: 建造热负载

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

16. 二级压力 (由焊接引起。目前最静态未定制结构).

40.3 签约

13 结构分析 中的标志协议是与以前采用的结构完全不同。分析/设计, 图 40.3 (我们主要专注于灵活性, 并将一个积极的时刻定义为因果 “下面的紧张”. 这是一个可怕的节目!).

14 在 矩阵 结构分析 中, 签署的标志公约它与主导的协调系统一致。因此, 我们定义一个积极的时刻是对手时钟的。

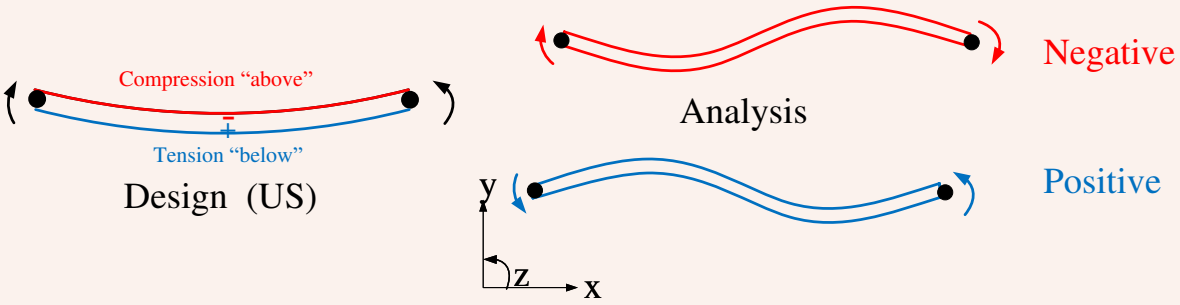


图 40.3: 签约、设计与分析 (图 26.1)

40.4 协调系统

15 我们应该区分两个协调系统:

全球性: 描述结构的节点坐标。这个系统可以自愿选择。如果是右手的一面 (RHS) 一, 我们将与它联系在一起。上层轴标签, X, Y, Z, 图 40.7 or 1,2,3 (在计算机程序中运行指数).

地方: 系统与每个 单元 相连, 并用于描述 单元 内部力量。我们将与它联系起来。低案例轴标签, x, y, z (or 1,2,3), 图 40.4.

16 和 x 轴被认为是沿着会员, 方向选择, 以便从第 1 节点到第 2 节点点。图 40.4.

40.5 灵活性 *vs.* 精力

17 在 §26.1 我们已经强调了灵活性之间的关键差异。(力量) 和坚固 (位移) 方法。这个部分补充了这一覆盖。

18 在柔度法中, 我们创建了一个结构 **静态定义** 分析整个结构。在硬度方法中, 我们将制作结构 (单元 或整个结构) **电影定义** 由

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

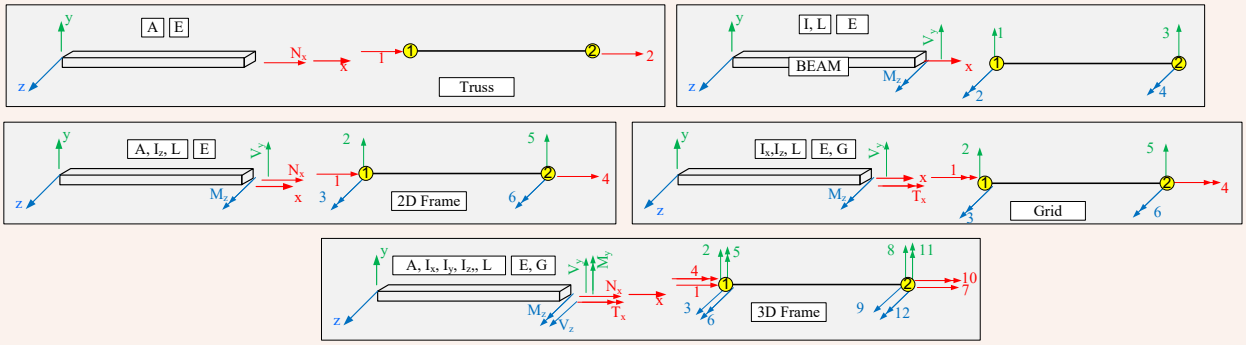


图 40.4: 单元 内部勢力及地點 Dof

1. 應用單位 位移 在每個 dof (§40.6) j (阻止所有其他人成为零)
2. 确定与所有其他 DOF 相关的反应 i:

因此, $k_i j$ 将符合 反力 在 dof i 由于单位变形 (翻译或 转角) 在 DOF j.

19 在柔度法中, 我们在外部应用的力量方面寻求转移。($\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{F})$). 由一个结构产生的; 另一方面, 在硬度方法中, 我们寻求内部力量的外部强制的转移。($\mathbf{F}(\boldsymbol{\Delta})$).

20 这些已经为单元衍生 (章节 26), 然后在 矩阵 格式中提取 (章节 41).

40.6 自由度

定义 40.1: 自由度

自由度 (多夫) 是独立的通用节点。位移 或在一个节点上强加。

21 移动必须是线性独立的, 因此不是相互关联的。例如, 在一个倾斜的滚动支座飞机将有三次转移 (转角 θ, 和两翻译 u 和 v) 但是, 由于这两种转移是电影制限, 我们只有两个独立的转移, 图 40.5.

22 一个 单元 dof 被定义为 wrt 自己的 局部坐标系. 一个结构性道夫被定义为全球协调系统,Fig。40.6.

23 我们注意到, 我们已经提到 **一般化** 移动, 因为我们希望这个术语包括翻译以及旋转。根据结构的类型, 可能没有一个或多个这样的位移。不幸的是, 在结构分析的大多数介绍课程中, 太多的重点放在两维结构上, 并且不够于三维结构或二维结构与扭转。

24 在大多数情况下, 在当地坐标中有相同数量的 d.o.f。在 总体坐标系 中。一个显著的例外是桁架单元. 在本地坐标中, 我们只能有一个轴形变。在全球协调中, 有两个或三个翻译。在 2D 和 3D 分别为每个节点。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

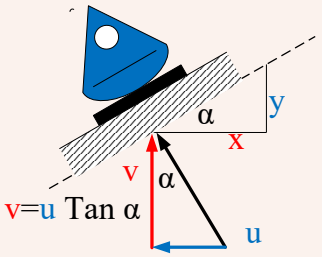


图 40.5: 独立迁移

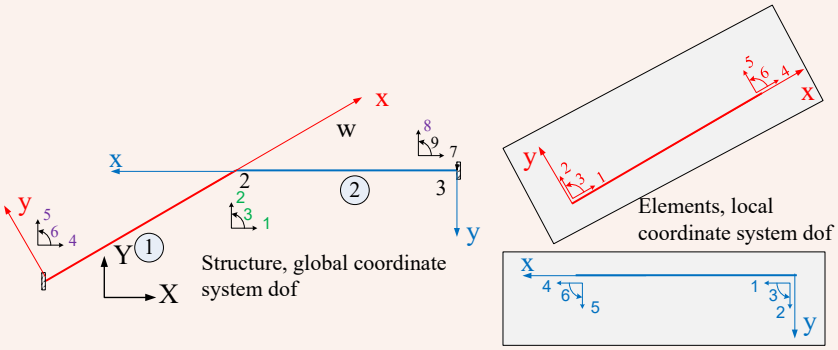


图 40.6: 當地及 总体坐标系/dof

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

25 因此, 重要的是我们了解自由度可以与不同类型的结构组成的单维序列单元相关联。

定义 40.2: 不同 单元 的 自由度

.

类型		诺德 1	诺德 2	$[\mathbf{k}^{(e)}]$ (地方)	$[\mathbf{K}^{(e)}]$ (全球)
		1 尺寸			
梁	$\{\mathbf{p}\}$	F_{y1}, M_{z2}	F_{y3}, M_{z4}	4×4	4×4
	$\{\delta\}$	v_1, θ_2	v_3, θ_4		
		2 尺寸			
桁架	$\{\mathbf{p}\}$	F_{x1}	F_{x2}	2×2	4×4
	$\{\delta\}$	u_1	u_2		
框架	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1}, F_{y2}, M_{z3},$	$F_{x4}, F_{y5}, M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\delta\}$	$u_1, v_2, \theta_3,$	$u_4, v_5, \theta_6,$		
网格	$\{\mathbf{p}\}$	T_{x1}, F_{y2}, M_{z3}	$T_{x4}, F_{y5}, M_{z6},$	6×6	6×6
	$\{\delta\}$	θ_1, v_2, θ_3	$\theta_4, v_5, \theta_6,$		
		3 尺寸			
桁架	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1},$	F_{x2}	2×2	6×6
	$\{\delta\}$	$u_1,$	u_2		
框架	$\{\mathbf{p}\}$	$F_{x1}, F_{y2}, F_{y3},$ $T_{x4}\ M_{y5}, M_{z6}$	$F_{x7}, F_{y8}, F_{y9},$ $T_{x10}\ M_{y11}, M_{z12}$	12×12	12×12
	$\{\delta\}$	$u_1, v_2, w_3,$ $\theta_4, \theta_5, \theta_6,$	$u_7, v_8, w_9,$ $\theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12},$		

26 我们应该区分当地和全球多夫的编号系统遵循以下简单规则:

地方: dof 为一个 单元 的数据: 以第一个节点开始, 按同序列数到本地 dof。相关 局部坐标系的订阅, 并重复第二节点, 图 40.4.

全球性: 对整个结构的 DOF: 从第一个节点开始, 数到所有无限的全球 DOF, 然后转到下一个, 直到整个全球 D.O.F 已被编号, 图 40.7.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

40.7 静态 *vs.* 动画不确定性

27 静态不确定程度早已定义, 无法从适当方程中确定的未知力量数量和平衡 (加上条件方程式).

28 相似之处, 该 **电影不确定性程度** 是的, **全集** 一个结构中的未知移动数量。这个概念是关键的正确理解位移方法, 将被覆盖在下一个章节。

29 与图的参考 40.7, 静态和动态不确定性等级显示在表中 40.1.

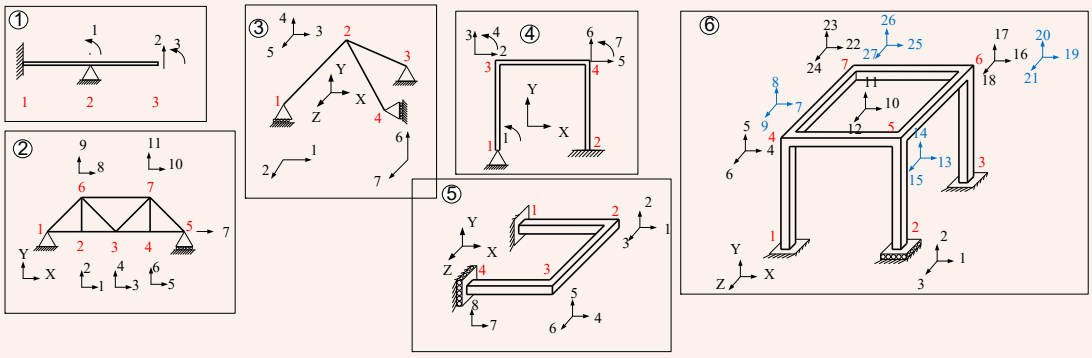


图 40.7: 静态和电影不确定性学位

表 40.1: 静态和电影不确定性学位

ID	静态 不确定性	电影 不确定性
1	1	3
2	0	11
3	0	7
4	2	7
5	2	6
6	9	27

40.8 结构分析 / 机械; 一个 边值问题

30 结构的分析基本上是 解决一個 边值问题 (由 体积 的差异方程式管理 Ω, 和 受空间/时间边界条件的约束 沿着边界 Γ).

31 在我們的情況下, 我們正在排斥我們的結構和統治差異方程式。(平衡) 被嵌入在 $\mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{P}$. 边界可以分解到 $\Gamma = \Gamma_t \bigcup \Gamma_u$ 桌子 40.2. 这将详细说明在 47.2.6 .

32 差异化边界值问题的例子在 Fig 中显示。40.8 对于 梁 和 DAM, 我们需要确定沿着 Γ_t 而

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 40.2: 基本和自然边界条件

Γ	拖拉机	迪斯普	数学。	结构。	多夫
Γ_t	$\mathbf{P}_t^{\surd}$	$\boldsymbol{\Delta}_t^{?}$	尼曼	重要	免费
Γ_u	$\mathbf{R}_u^{?}$	$\boldsymbol{\Delta}_u^{\surd}$	导演	自然	固定/限制

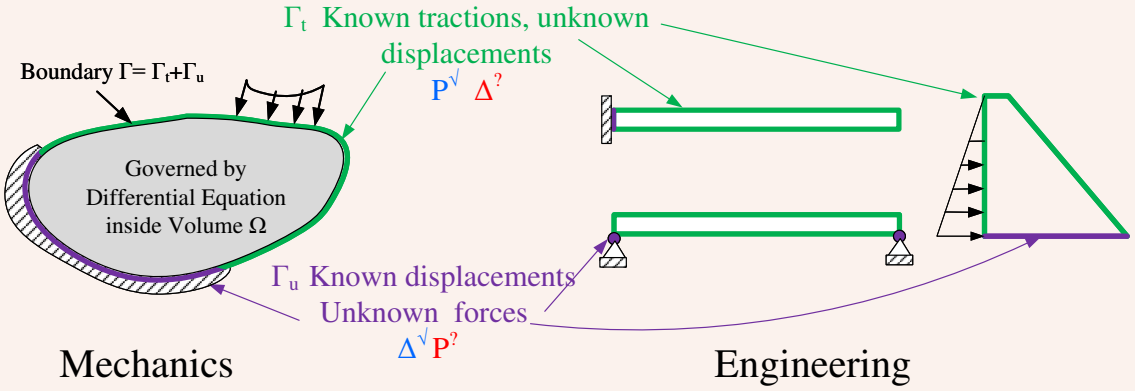
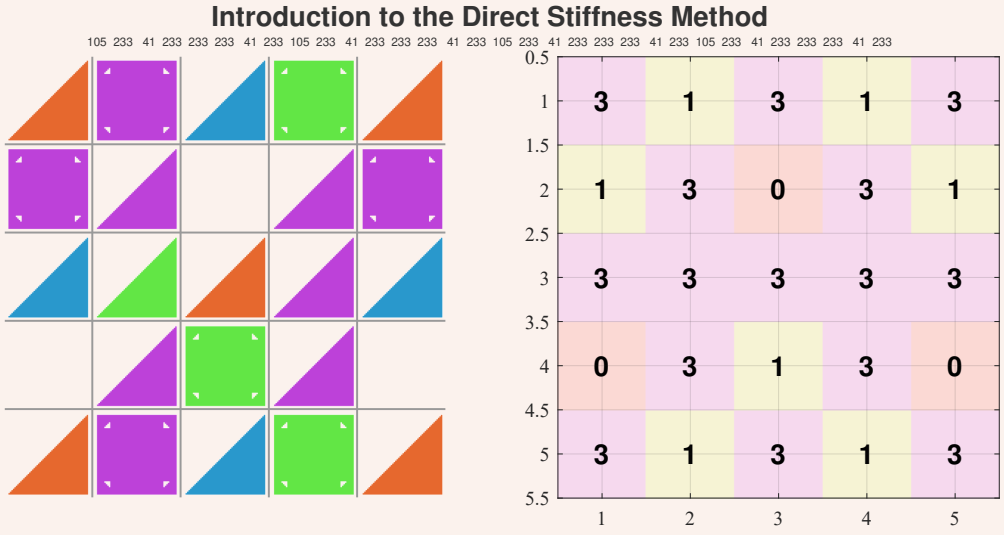


图 40.8: 边值问题

力量 (反应) 沿着 Γ_u.



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

41 单元 密度矩阵 $\mathbf{k}^{(e)}$

摘要

在章节 26 我们为力量发出表达 (在 平衡) 至于 (兼容) 移居。很多 (但不是所有) 这些表达式在下一章中被用来 (*slope*-挠度 和瞬间分配). 在为直接刚度法做好准备时, 我们将需要重新安排这些表达式在矩阵格式中, 更具体地说, 我们将在不同类型的单元的单元密度矩阵组合。这将扩展到包括圣维南特和弗拉索夫扭转, 以及蒂莫申科的火箭。

41.1 密度定义 1288
41.2 桁架 单元 1289
41.3 标签: Euler-Bernoulli 1290
41.4 2D 框架 单元 (a.k.a beam 列元素) . . 1290
41.5 網絡 单元 1291
41.6 3D Beam 列元素 1291
41.7 泰莫森科 梁 1292
41.7.1 额外的歪曲 1294
41.7.2 改變 单元 刚度矩阵 1295
41.8 布拉索夫 扭转 1296

41.1 密度定义

1 我们将重新审视各方对部队的不同表达, 以便在章节中所产生的已知转移。26, 并将其重写在矩阵格式。这将导致所谓的 **密度指数** k_{ij} 相应于自由度中的强度 i 由于一个单位 位移 在 自由度 j, 图 41.1

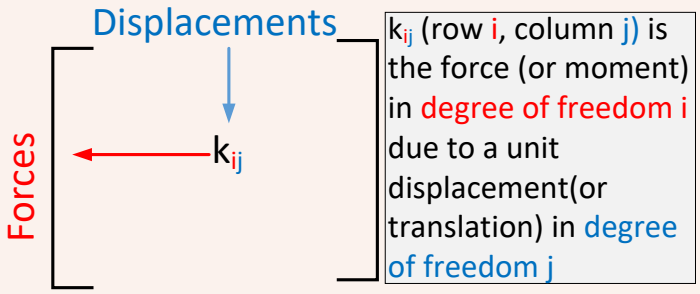


图 41.1: 定义固态术语 K_{ij}

2 不同类型的 单元 的比例显示在 图 中 41.2. 它与下面的力量相匹配。

审阅稿

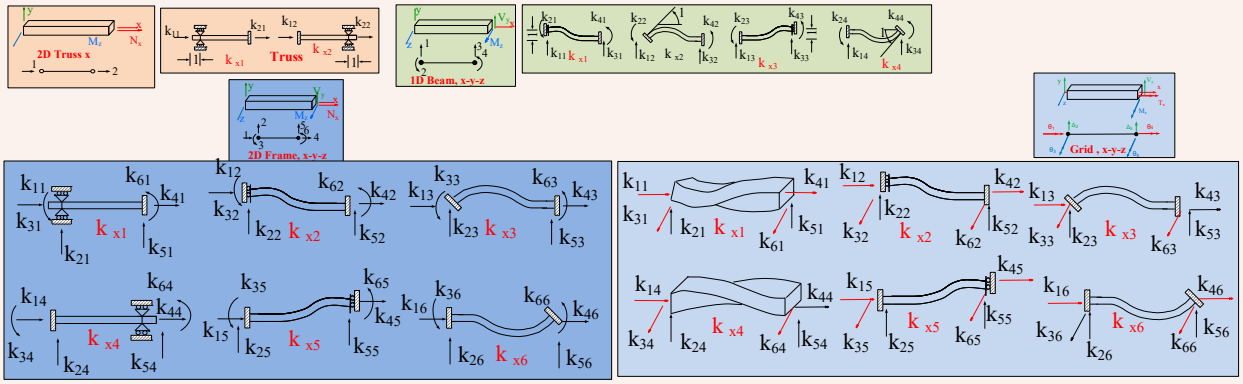


图 41.2: 不同类型的 单元 的粘度比例

定义 41.1: 不同 单元 类型的内部力量

	力量			时刻		
	x	y	z	x	y	z
梁		V_y				M_z
2D 框架	N_x	V_y				M_z
网格		V_y		T_x		M_z
3D 框架	N_x	V_y	V_z	T_x	M_y	M_z

3 因此, 本章节将从章节中收集单元的坚固率 26, 并将其存储在矩阵格式: 单元密度矩阵。

41.2 桁架 单元

4 桁架 单元 (无论是 2D 还是 3D) 只有一個 自由度 與每個節點相關。因此, 从 EQ。26.1 我们有

$$\mathbf{k}^{\mathrm{t}} = \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

41.3 标签: Euler-Bernoulli

使用方程式 26.4, 26.5, 26.8 和 26.9 我们可以确定与每个单位 位移 相关的力量。

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{Eq. 26.8}(v_1=1) & \text{Eq. 26.8}(\theta_1=1) & \text{Eq. 26.8}(v_2=1) & \text{Eq. 26.8}(\theta_2=1) \\ \text{Eq. 26.4}(v_1=1) & \text{Eq. 26.4}(\theta_1=1) & \text{Eq. 26.4}(v_2=1) & \text{Eq. 26.4}(\theta_2=1) \\ \text{Eq. 26.9}(v_1=1) & \text{Eq. 26.9}(\theta_1=1) & \text{Eq. 26.9}(v_2=1) & \text{Eq. 26.9}(\theta_2=1) \\ \text{Eq. 26.5}(v_1=1) & \text{Eq. 26.5}(\theta_1=1) & \text{Eq. 26.5}(v_2=1) & \text{Eq. 26.5}(\theta_2=1) \end{bmatrix} \end{array}$$

替代

$$\mathbf{k}^{\mathrm{b}} = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{41.1}$$

41.4 2D 框架 单元 (a.k.a beam 列元素)

2D 框架元素是具有轴密度相似于一个相关术语的射线元素。因此, $\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \mathbf{k}^{\mathrm{b}} \cup \mathbf{k}^{\mathrm{t}}$. 我们应该注意到, 没有轴力与点 / 时刻之间的联系。

$$\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\mathrm{t}}_{11} & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

替代

$$\mathbf{k}^{\mathrm{2dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_{1x} & v_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array} \tag{41.2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

41.5 網絡 单元

9 网元素的密度矩阵非常相似于 2D 框元素之一, 除非轴组件被旋转元素替换。

$$\mathbf{k}^{\mathrm{g}} = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \text{Eq. 23.13} & 0 & 0 & -\text{Eq. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ -\text{Eq. 23.13} & 0 & 0 & \text{Eq. 23.13} & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

10 替代

$$[\mathbf{k}^{\mathrm{g}}] = \begin{array}{c} \\ T_{1x} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ T_{2x} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

41.6 3D Beam 列元素

11 对于 3D 线列元素, 我们提醒自己 12 度的自由, 图。41.3

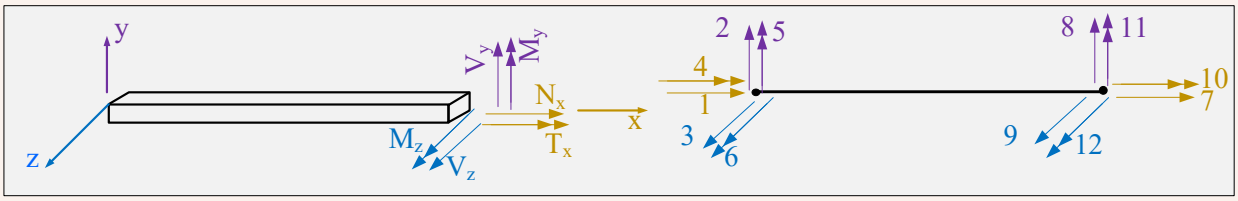


图 41.3: 3D 白色列元素的自由度

+

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

12 到目前为止, 我们可以从其他更简单的元素中已经引入的术语中重建元素密度矩阵。

$$\mathbf{k}^{3\text{dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{\mathrm{t}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{14} \\ 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{11} & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{13} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{12} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{24} & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{21} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{22} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{23} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{24} \\ k^{\mathrm{t}}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{t}}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{34} \\ 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{31} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{33} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{g}}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{41} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{32} & 0 & 0 & 0 & -k^{\mathrm{b}}_{43} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{44} & 0 \\ 0 & k^{\mathrm{b}}_{41} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{42} & 0 & k^{\mathrm{b}}_{43} & 0 & 0 & 0 & k^{\mathrm{b}}_{44} \end{bmatrix} \end{array}$$

13 取代, 我们得到了

$$\mathbf{k}^{3\text{dfr}} = \begin{array}{c} \\ N_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ N_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_{1x} & v_{1y} & w_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_{2x} & v_{2y} & w_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z & 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & \gamma_z \\ 0 & 0 & \beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 & 0 & 0 & -\beta_y & 0 & -\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z & 0 & \beta_z & 0 & 0 & 0 & -\gamma_z \\ 0 & 0 & -\beta_y & 0 & \gamma_y & 0 & 0 & 0 & \beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_y & 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 & \gamma_y & 0 & 2\delta_y & 0 \\ 0 & \gamma_z & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & -\gamma_z & 0 & 0 & 0 & 2\delta_z \end{bmatrix} \end{array}$$

哪里

$$\alpha = \frac{EA}{L}; \quad \beta_i = \frac{12EI_i}{L^3}; \quad \gamma_i = \frac{6EI_i}{L^2}; \quad \delta_i = \frac{2EI_i}{L}; \quad \varepsilon = \frac{GI_x}{L};$$

和 $i = [y|z]$

14 这些密度比例显示在 图 41.4

41.7 泰莫森科 梁

15 在 §23.1 我们为额外的表达 “寄生虫” 由 Shear Deformations 引入的歪曲。此部分将通过调整原始 (Euler - 伯诺利) 梁 表述.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

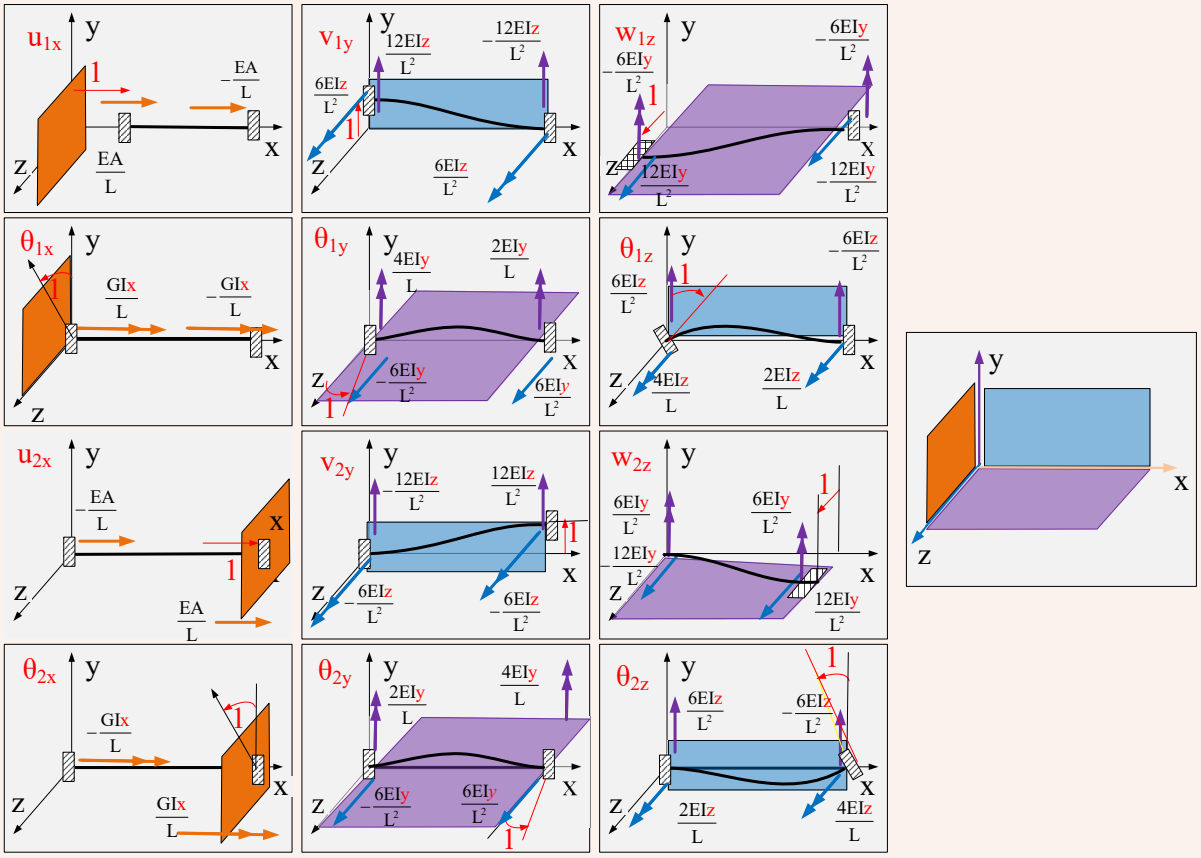


图 41.4: 個別的堅固性條件在 3D 棒列元素

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

41.7.1 额外的歪曲

16 在固态方法的精神下, 我们强加一个单位位移 (翻译或 转角) 在相应的 自由度 中, 所有其他都保持到零。但是, 当它是为了灵活的 (§26.3) 但是, 我们没有考虑到甲状腺变形。换句话说, 他会扔掉一些“寄生虫” 与获得的力量相应。我们将需要考虑它们的影响, 当我们试图强制单元翻译和单元转角.

翻译 对于一个单一的强制翻译, 我们开始 **任意** 定义 [1]

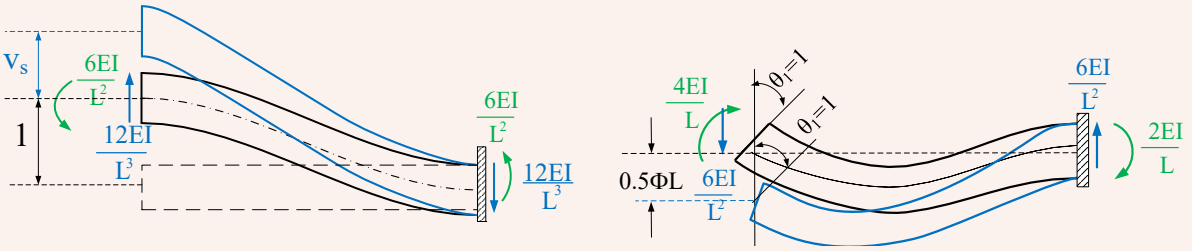
$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \frac{12EI}{GA_sL^2} = 24(1+\nu)\frac{A}{A_s}\left(\frac{r}{L}\right)^2$$

后来, 我们将证明 v_s (Eq. 23.11) 与此相关 Φ. 记住这 $A_s = A/\lambda_s$ (Eq. 23.4) 因此, 由于 A **单元垂直翻译**, 结局 剪力 从 Eq 获得。26.8 和设置 $v_1 = 1$ 和 $\theta_1 = \theta_2 = v_2 = 0$, or $V = \frac{12EI_z}{L^3}$. 在 $x = 0$ 我们有 (Eq. 23.11)

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{GA_s} \\ V &= \tfrac{12EI_z}{L^3} \end{aligned}\right\} v_s = \underbrace{\frac{12EI}{GA_sL^2}}_{\Phi}$$

因此, 叶形变异增加了总翻译从 1 到 $1+\Phi$.

转角 同样, 我们现在试图确定与强制单位转角相关的寄生虫变形。尽管施加了转角 θ_1,



(a) 单元翻译　　(b) 单位 转角

图 41.5: 因强制性变形而引起的寄生虫骨折

仍会产生寄生内剪力，并进一步引起必须消除的剪切变形（平移）。再次强调，我们只允许一个自由度发生变形；本例中为转动，其余自由度必须保持为零。剪力是从 Eq 获得的。26.8 和设置 $\theta_1 = 1$ 和 $\theta_2 = v_1 = v_2 = 0$，即 $V = \frac{6EI_z}{L^2}$。在 $x = 0$ 时我们将有

$$\left.\begin{aligned} v_s &= \tfrac{VL}{A_sG} \\ V &= \tfrac{6EI_z}{L^2} \\ \Phi &= \tfrac{12EI}{GA_sL^2} \end{aligned}\right\} v_s = 0.5\Phi L$$

因此, 甲状腺变形已经移动了梁的结局 (假设有零翻译) **下下** 由 $0.5\Phi L$.

[1] 记住这 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ 和 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

41.7.2 改變 单元 刚度矩阵

17 如果甲状腺变形存在, 我们需要改变硬度。矩阵 Eq. 41.1 对于这两种影响:

翻译: 分裂 (或正常化) 第一和第三的比例刚度矩阵的列由 $1+\Phi$ 因此, 网络翻译在两端是统一, 否则位移将是 $1+\Phi$ 而不是 of 1.

转角 和 Shear Deformation 的效果

1. 因在端口引发的力量, 因为一个单位转角在端 1 (二 柱) 忽视甲状腺变形, 是

$$V_1 = -V_2 = \frac{6EI}{L^2}; \quad M_1 = \frac{4EI}{L}; \quad M_2 = \frac{2EI}{L}$$

2. 有一个净积极的翻译 $0.5\Phi L$ 第 1 章 当我们应用一个单位 转角, 没有额外的力量引发。
3. 对于一个单位 转角, 所有其他转移都应该是零。$\Rightarrow$. 因此, 应以平等和相反的方形对抗这种寄生虫叶变形。$\Rightarrow$ 應用額外 Δ 垂直 位移。$-0.5\Phi L$ 其余的力量, 在最后的 (第一 柱) 被授予

$$\Delta V_1 = -\Delta V_2 \underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^b_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

$$\Delta M_1 = \Delta M_2 \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^b_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}$$

名人已被分为 $1+\Phi$ 在 k^b.

4. 把所有的力量聚集起来, 我们只有由于单位旋转而引发的力量才会被包含在弯曲和相关术语形变形的影响下。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

$$V_1 = -V_2 = \underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{12EI}{L^3}}_{k^t_{11}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = -\frac{6EI}{L^2}\frac{1}{1+\Phi}$$

$$M_1 = \underbrace{\frac{4EI}{L}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = \frac{4+\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

$$M_2 = \underbrace{\frac{2EI}{L}}_{\substack{\text{Due to a}\\ \text{unit rotation}}} + \underbrace{\underbrace{\frac{6EI}{L^2}}_{k^t_{21}} \frac{1}{1+\Phi} \underbrace{(-0.5\Phi L)}_{v_s}}_{\text{Parasitic shear}} = \frac{2-\Phi}{1+\Phi}\frac{EI}{L}$$

18 单元 以 Eq 中提供的 刚度矩阵。41.1 变成

$$\mathbf{k}^{\text{bv}} = \begin{matrix} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{(1+\Phi_y)L} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \\ -\frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(2-\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} & -\frac{6EI_z}{L^2(1+\Phi_y)} & \frac{(4+\Phi_y)EI_z}{L(1+\Phi_y)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

41.8 布拉索夫 扭转

19 Eq. 23.2.2 提供 扭转 和 bimoment 在终端节点旋转方面。

20 使用下列力量的边界条件, (Bhatt, 1986)

$$\begin{array}{llll} \text{End 1} & x = 0, & T = -T_1, & B = -B_1, \\ \text{End 2} & x = L, & T = T_2, & B = B_2, \end{array}$$

我们获得元素硬度矩阵, 以便用 Warping、Fig 的旋转元素。41.6

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ B_{y1} \\ T_{x2} \\ B_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} TW_{11} & TW_{12} & -TW_{11} & TW_{12} \\ & TW_{22} & -TW_{12} & TW_{24} \\ & & TW_{11} & -TW_{12} \\ & & & TW_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{\text{V}}} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta'_{y1} \\ \beta_{x2} \\ \beta'_{y2} \end{Bmatrix} \tag{41.3}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

和

$$
\begin{aligned}
TW_{11} &= SpLD \\
TW_{12} &= L(C-1)D \\
TW_{22} &= L^2\left(C - \frac{S}{pL}\right)D \\
TW_{24} &= L^2\left(\frac{S}{pL} - 1\right)D \\
D &= \frac{1.0}{\left[2(1-C) + SpL\right]}
\end{aligned}
$$

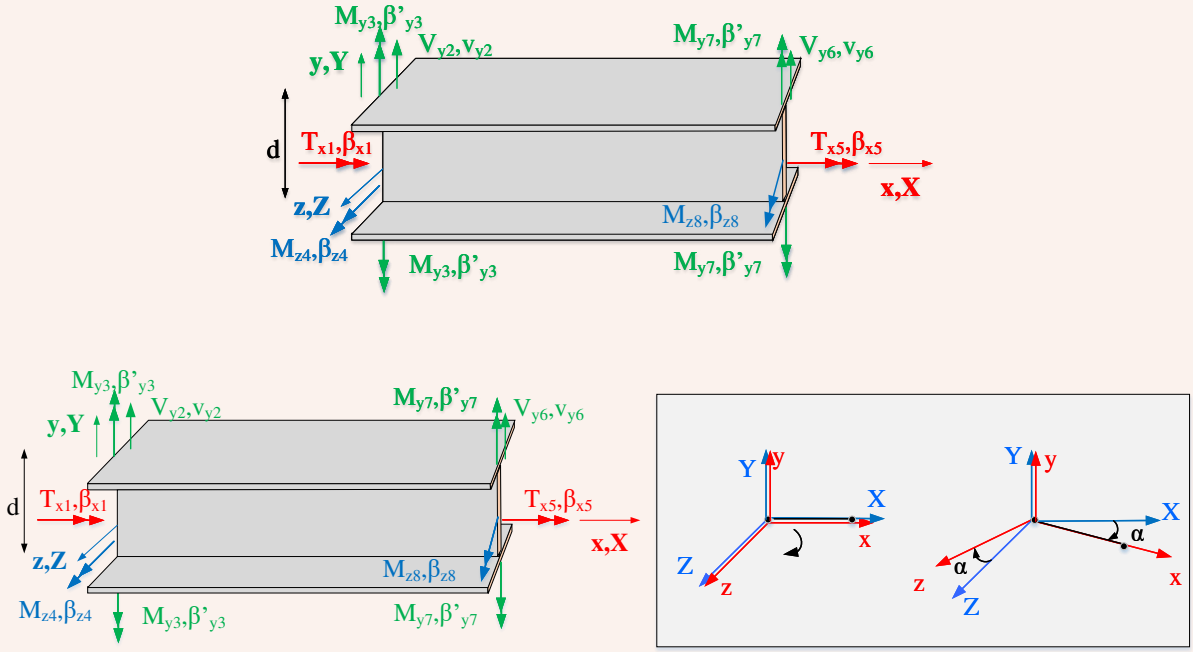


图 41.6: 终止部队和转移一个旋转元素与旋转限制

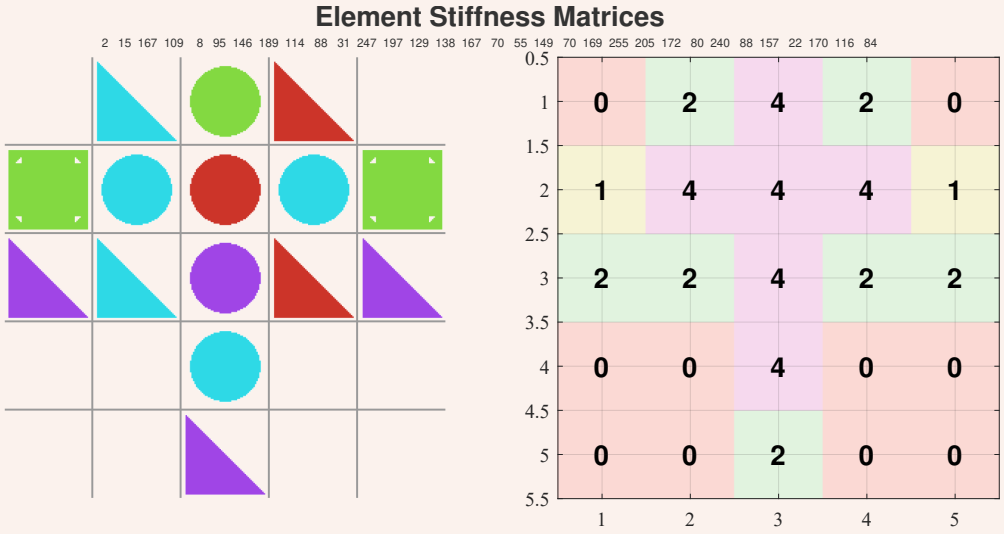
[21] 請注意這 $B_1 = M_{y1}d$ 和 $B_2 = M_{y2}d$ (Eq. 23.14)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

22 但是, 这不是完整的元素坚固性矩阵, 因为我们需要添加圣金字条款。($\mathbf{k}^{gw} = \mathbf{k}^{g} \cup bk^{V}$)

$$\begin{Bmatrix} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{x1} & v_{y1} & \beta'_{y1} & \beta_{z1} & \beta_{x2} & v_{y2} & \beta'_{y2} & \beta_{z2} \\ TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 & -TW'_{11} - \frac{GJ}{L} & 0 & TW'_{12} & 0 \\ & \frac{12EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12}{EI}L^2 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ & & TW'_{22} & 0 & -TW'_{12} & TW'_{24} & 0 & 0 \\ & & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ & & & & TW'_{11} + \frac{GJ}{L} & 0 & -TW'_{12} & 0 \\ & & & & & \frac{12EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & & TW'_{22} & 0 \\ & & & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{gw}} \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ v_{y2} \\ \beta'_{y3} \\ \beta_{z4} \\ \beta_{x5} \\ v_{y6} \\ \beta'_{y7} \\ \beta_{z8} \end{Bmatrix}$$

哪里 $TW'_{ij} = \frac{GJ}{L} TW_{ij}$.



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

42 密度方法; I 正统结构

摘要

到目前为止, 一个元素密度矩阵的概念已被理解。接下来, 我们需要将这个概念扩展到一个结构性的刚度矩阵并分析一个完整的结构。然而, 我们将面临调整元素密度矩阵与结构的全球协调系统相匹配的挑战。虽然这个任务可能看起来简单, 但它留在下一个章节。在本章中, 我们将通过限制自己到正方形结构来简化问题, 使我们能够通过简单的检查调整元素密度矩阵。通过这种简化, 我们将轻松地引入一个系统的方法来确定整个结构的平衡。一旦分散计算, 我们将恢复在单元内的内部力量。因此, 本章节在介绍一个可编程的方法中至关重要, 延长基于手的计算时刻分配或切断挠度方法, 引入了章节。27.

42.1 引入 1299
42.2 理论 1299
42.2.1 灵活性重复 1300
42.2.2 直接刚度法 1300
42.2.3 从 单元 到结构 1301
42.3 例子 1302
42.3.1 例题 42.1: 正统 梁 1302
42.3.2 例题 42.2: 正统 框架 1304
42.3.3 例题 42.3: 网格 1311
42.3.4 例题 42.4: 混合式 框架 1315
42.3.5 例题 42.5: 混合网络 1319

42.1 引入

1 在上一章中, 我们首先为不同类型的 1D 或单元的位移强度关系衍生, 然后使用这些关系来定义单元密度矩阵在单个单元的本地坐标中。

2 在本章中, 我们试图进行类似的操作, 但在全球坐标中建立一个正方形结构。

3 在上一章中, 我们的起点是基本的位移强度关系导致单元硬度矩阵。[**k**].

4 在本章中, 我们的起点是相同的单元坚定性矩阵 [**k**], 我们的目标是确定结构刚度矩阵 [**K**], 当被逆转时, 会产生节点移行。

5 单元 硬度矩阵被衍生为完全限制单元.

6 本章将仅限于正统结构, 以及一般化将随后讨论。硬度矩阵将仅限于无限制的自由度.

7 从这些例子中, 结构刚度矩阵、节点转移和固定终端行动之间的相互关系将显而易见。接下来, 该方法将在章节中普遍化。44 描述一个算法, 可以自动化结构的全球 刚度矩阵 的组合在其个体 单元 的意义上。

42.2 理论

8 如 A “车辆” 对于引入硬度方法, 让我们考虑 Fig 问题。42.1, 并承认只有两个未知的转移, 或者更准确地说, 两个全球性转移: θ_1 和 θ_2.

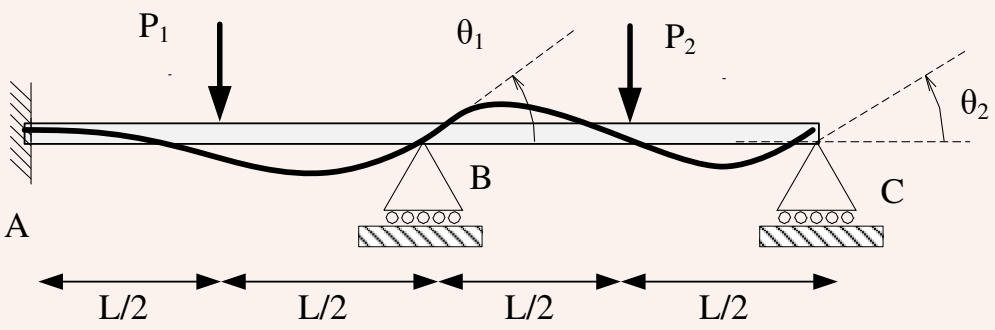


图 42.1: 梁 例子, 以比较灵活性和坚固性方法

9 简单地写下:

灵活性: 什么是力量 (反应) 以确保 变形协调 (解放的 DOF)?

精力: 什么是移居] 这会保证平衡吗?

42.2.1 灵活性重复

10 如果我们要用武力来分析这个问题 (或灵活性) 方法, 然后

1. 我们将结构静态确定, 通过移除 **任意** 2 反应 (只要结构保持稳定), 而梁现在是静态定义。
2. 假设我们删除两个轮子支持, 然后我们确定相应的缺陷, 因为实际的荷载 (Δ_B 和 Δ_C).
3. 應用一個單位 荷载 在點 B, 然后 C, 并计算缺陷 f_{ij} 注意事项 i 由于一个单位的力量在节点 j.
4. 写下 变形协调 的 位移 方程式

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5. 转换 矩阵, 并解决反应

42.2.2 直接刚度法

有关历史背景，请参见 §??

11 我们将通过硬度方法分析这个简单的问题。在我们的判断中, 我们不是通过偏微分方程的解决方案作为一个连续的一个问题, 而是通过线性算法来解决这个问题。差异化将专注于

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

节点数量, 如果有荷载沿着单元, 我们应该计算相应的节点等值荷载. (相似于固定终端行动, 但反向标志).

1. 第一步是让它在电影中确定 (如反对静态定义在柔度法). 在这种情况下, Kinematically determinate 简单地意味着限制所有 dof 并从而防止合成 转角, Fig。42.2.

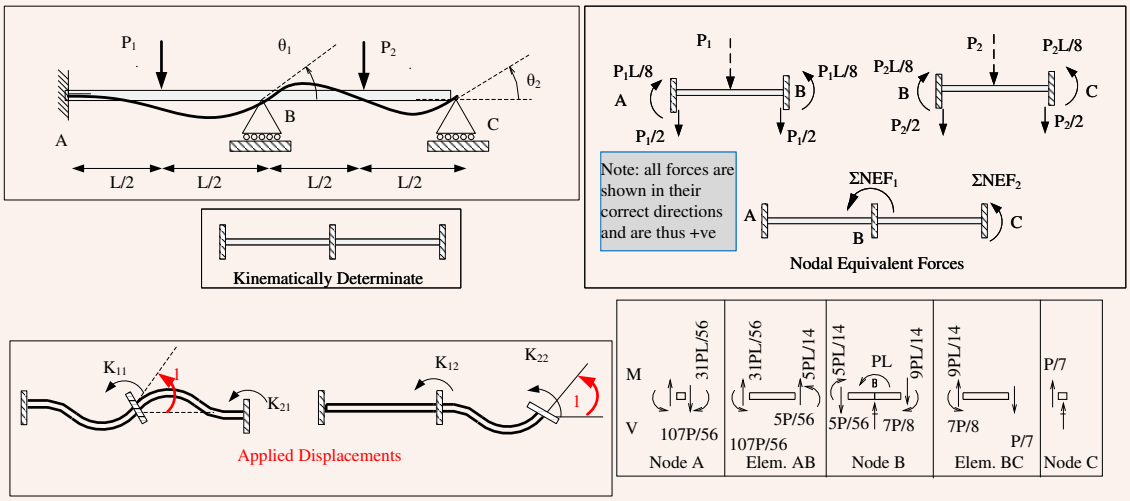


图 42.2: 梁的例子, 以确定电影不定义程度

2. 然后我们确定由 单元 荷载 引起的固定终端行动, 并为每个 dof 总结它们: nodal 等值荷载 的总额。ΣNEL_1 和 ΣNEL_2.
3. 在第三步中, 我们将应用一个单位位移 (转角 在此情况下) 在每個 自由度 時刻, 並在每個情況下, 我們將確定內部的 反力 勢力, K_{11}, K_{21}, 和 K_{12}, K_{22} 相应。请注意, 我们使用 [**K**] 而不是 [**k**] 因为这些是总体坐标系中的力量。再次注意, 我们只专注于与全球自由度相匹配的反力力量。因此, 我们不试图在 A 节点确定 反力。
4. 最后, 我们写下每个节点的平衡方程式:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Sigma\text{NEL}_1 \\ \Sigma\text{NEL}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

[12] 请注意, 在右侧的 FEM, 它们是根据对应用荷载的反应确定。严格说, 这是一个负载应该出现在方程的左侧, 是节点相当于元素负载的负载。(更多关于此后).

[13] 与单元 刚度矩阵一样, 每个进入全球的刚度矩阵 K_{ij} 相应于内部力量, 沿着 DOF i 由于一个单位 位移 (一般化) 沿着 DOF j (二、全球协调系统).

42.2.3 从 单元 到结构

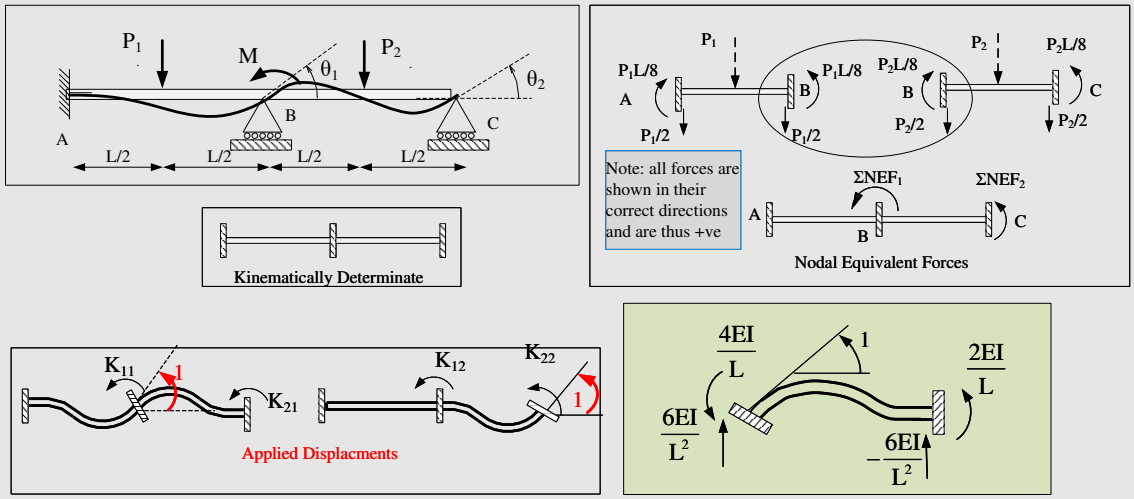
[14] 個別 单元 的 刚度矩阵 以前由 局部坐标系, 并授予较低的案例字母 **k**.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15 现在, 我们将需要从一个结构中产生的刚度矩阵 总体坐标系 将使用上层 **K**. 本章只涉及正统结构, 如转型 **k** 到 **K** 是直觉的 (同樣的力量和流亡).

42.3 例子

42.3.1 例题 42.1: 正统 梁



為 $P_1 = 2P$, $M = PL$, 和 $P_2 = P$ 我们正在寻求解决流离失所问题。

1. 电影不定义的程度是 2。
2. 使用先前定义的信号协议, 确定节点相当于 荷载 (到 荷载 應用於會員)

$$\Sigma\text{NEF}_1 = \underbrace{\frac{P_1 L}{8}}_{BA} - \underbrace{\frac{P_2 L}{8}}_{BC} = \frac{2PL}{8} - \frac{PL}{8} = \frac{PL}{8}$$

$$\Sigma\text{NEF}_2 = \underbrace{\frac{PL}{8}}_{CB}$$

3. 如果需要 $\frac{4EI}{L}\left(k_{44}^{BA}\right)$ 要旋转 BA 和 $\frac{4EI}{L}\left(k_{22}^{BC}\right)$ 要旋转 BC 它将需要一个 全部力量的 $\frac{8EI}{L}$ 同时旋转 BA 和 BC. 全球 DoF 1 的旋转固定值的总额是 $K_{11} = \frac{8EI}{L}$;

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 同样, $K_{21} = \frac{2EI}{L}\left(k_{42}^{BC}\right)$. 如果我们现在用单元角度旋转 dof 2 , 我们将有 $K_{22} = \frac{4EI}{L}\left(k_{22}^{BC}\right)$ 和 $K_{12} = \frac{2EI}{L}\left(k_{42}^{BC}\right)$. 等式 平衡:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{NEF}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

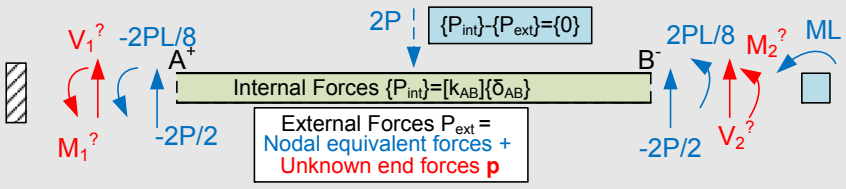
请注意, 我们有 $P_{ext} - P_{int} = 0$ 而不是 $P_{ext} + P_{int} = 0$ 因为外部力量必须由内部势力以平等和相反的方向抵抗。替代, 重新安排

$$\begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \theta_2^? \end{Bmatrix}$$

5. 转换两个为两个 矩阵

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ +\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}$$

6. 接下来, 我们需要确定内部力量。
7. 记住, 对于每个单元 $\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{k}]\{\boldsymbol{\delta}\}$ 而在这种情况下 $\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{P}\}$ 和 $\{\boldsymbol{\delta}\} = \{\boldsymbol{\Delta}\}$ 为 单元 AB. 单元 刚度矩阵 以前已被衍生, 并且在此情况下 全球和地方的 DOF 是相同的. 接下来, 我们需要计算单元的内部力量。
8. 元素 AB 的平衡方程式, 在元素水平上, 可以写为 (请注意, 我们必须包含节点等级负载以保持平衡):



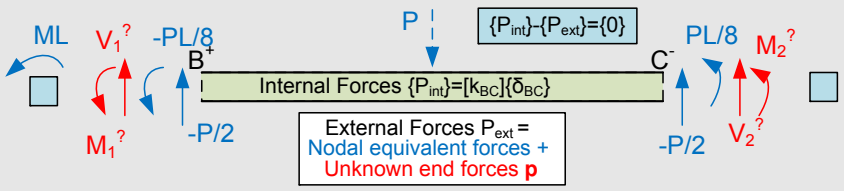
$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{2P}{2} \\ -\frac{2PL}{8} \\ -\frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}}}_{p_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{AB}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\left\{\boldsymbol{\delta}^{AB}\right\}}}_{p_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

这个步骤被称为 力量恢复也就是说, 我们从节点转移中确定内部力量。解决

$$\lfloor\ V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\ \rfloor = \lfloor\ \frac{107}{56}P \quad \frac{31}{56}PL \quad \frac{5}{56}P \quad \frac{5}{14}PL\ \rfloor$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9. 同样, 对于单元 BC:



$$\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1^? \\ M_1^? \\ V_2^? \\ M_2^? \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{p}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{\text{NEF}}}_{P_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}^{BC}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{17}{112}\frac{PL^2}{EI} \\ 0 \\ -\frac{5}{112}\frac{PL^2}{EI} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\delta}^{BC}\}}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

或

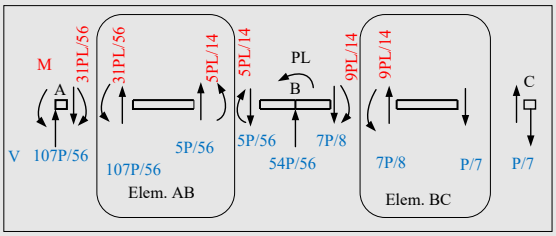
$$\lfloor\ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4\ \rfloor = \lfloor\ \tfrac{7}{8}P \quad \tfrac{9}{14}PL \quad -\tfrac{P}{7} \quad 0\ \rfloor$$

10. 这个简单的例子要求以下观察:

(a) 节点 A 有来自 单元 的贡献 AB 但是, 当 B 节点有两者的贡献 AB 和 BC.

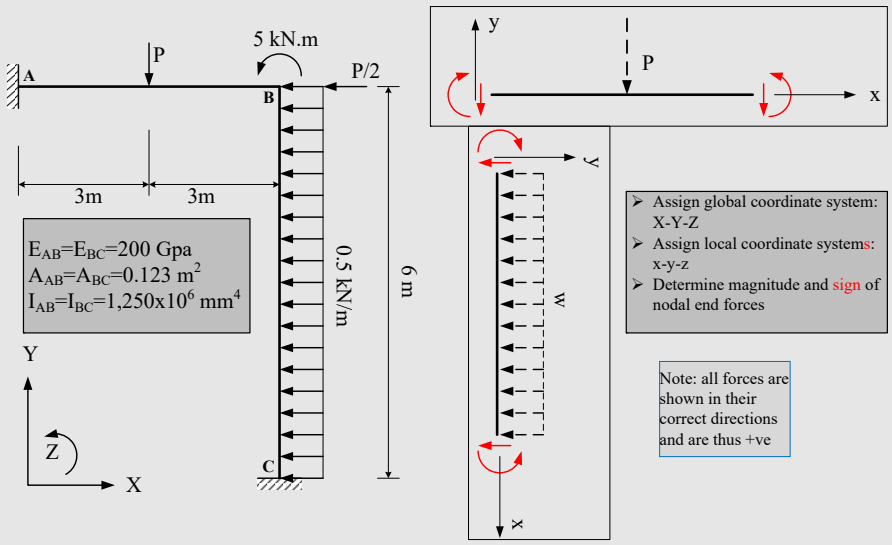
(b) 我们观察到这 $p_3^{AB} \neq p_1^{BC}$ 雖然兩者都相同於一個剪力在點 B, 但 它们之间的差异相当于反力 在 B. 同样, $p_4^{AB} \neq p_2^{BC}$ 由于外部应用的时刻在节点 B。

(c) 必须以自由的身体、表和瞬间图表结束,



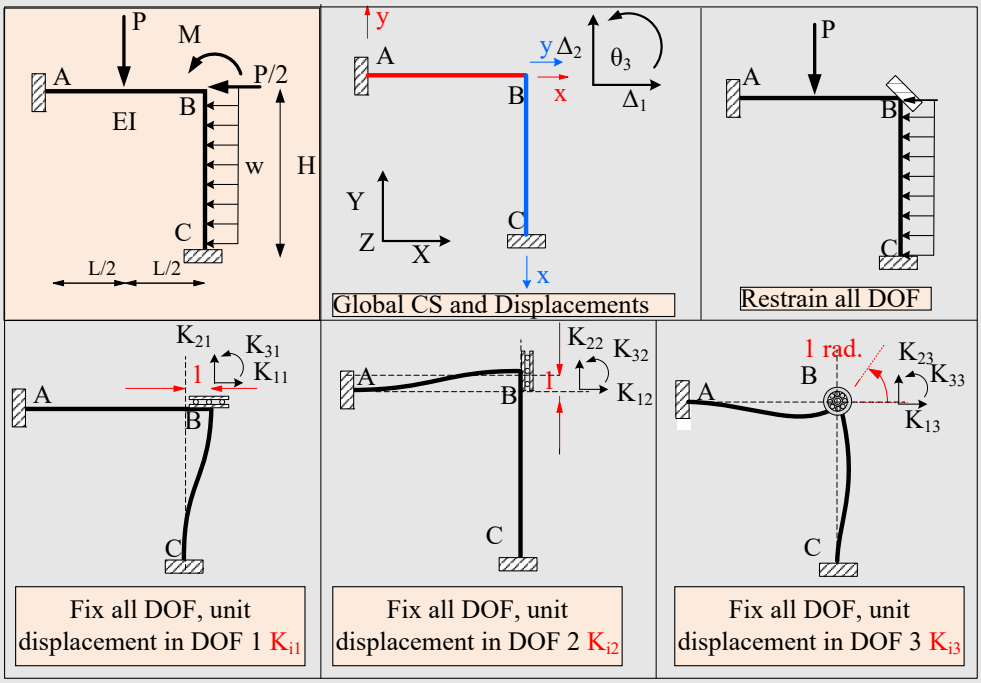
42.3.2 例题 42.2: 正统 框架

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



$P = 2$ kN, $L = H = 6$ m, $M = 5$ 千米, $w = 0.5$ KN / M, $E = 2 \times 10^8$ KPA , $A = 0.123$ m^2, 和 $I^b = I^c = 0.00125$ m^4.

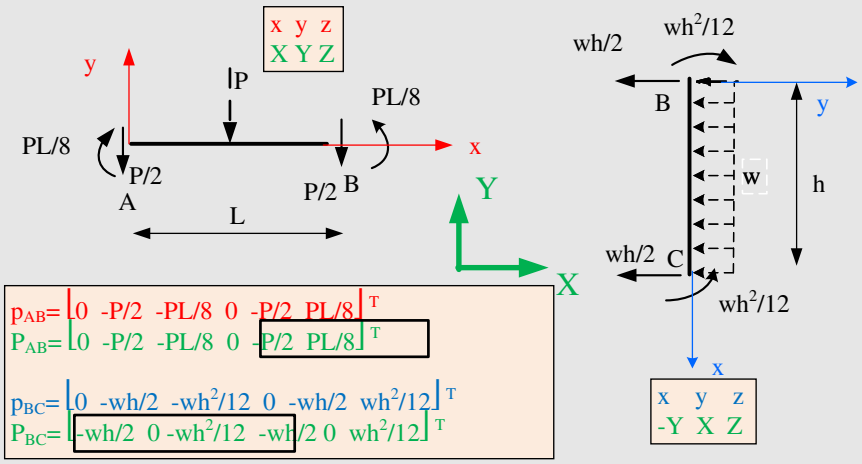
1. 我们提到下面的数字



2. 假设有轴形变, 我们有三个全球自由度, Δ_1, Δ_2, 和 θ_3.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 限制所有 自由度, 从而使结构动态定义。
4. 确定每个 单元 的 nodal 等值负载在 局部坐标系 在其自己的 局部坐标系. (单元 1 被认为是由 A 到 B, 和 单元 2 从 B 到 C)



$$\underbrace{\lfloor\, p_1^A \quad p_2^A \quad p_3^A \mid p_4^B \quad p_5^B \quad p_6^B \,\rfloor}_{AB} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad -\tfrac{PL}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{P}{2} \quad \tfrac{PL}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad -\tfrac{(2)(6)}{8} \mid 0 \quad -\tfrac{2}{2} \quad \tfrac{(2)(6)}{8} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -1.0 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.0 \quad 1.5 \,\rfloor$$

$$\underbrace{\lfloor\, p_1^B \quad p_2^B \quad p_3^B \mid p_4^C \quad p_5^C \quad p_6^C \,\rfloor}_{BC} = \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad -\tfrac{wH^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{wH}{2} \quad \tfrac{wH^2}{12} \,\rfloor$$

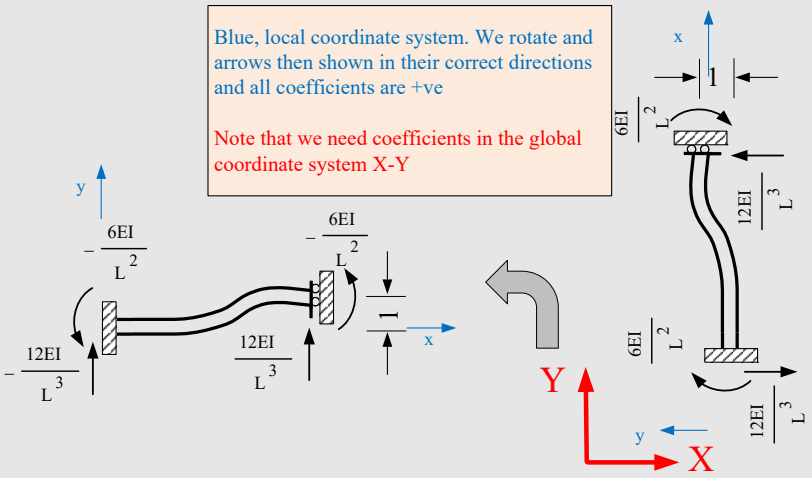
$$= \lfloor\, 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad -\tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \mid 0 \quad -\tfrac{(0.5)(6)}{2} \quad \tfrac{(0.5)(6)^2}{12} \,\rfloor$$

$$= \lfloor\, 0 \quad -1.5 \quad -1.5 \mid 0 \quad -1.5 \quad 1.5 \,\rfloor$$

而且在节点 B 的节点等级力量必须总结。

5. 應用 A 单位 位移 在 3 全球 自由度 的每一个要确定结构 全球 刚度矩阵. 每个入口 K_{ij} 全球 刚度矩阵 将与 自由度 的内部力量相匹配 i, 由于 位移 在 自由度 中的单元 j.
6. 回忆起以前产生的强度位移关系, 我们可以从 AB 和 BC 的贡献方面收集全球刚度矩阵。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



7. 需要完成下面的表格, 在那里列匹配于在 dof 上施加的转移 j, 和行符合相应的引导内部力量在每个单元在 dof i. 两者都在总体坐标系中。

   - $K_{1,2}$ 是零, 因为一个强制的 位移 沿着 dof 2 (地平线), 同时锁定所有其他转移, 不会在两个单元中引发内部力量。
   - K_{31} 是内部力量 (此时此刻) 由一个强制的单位 位移 在 dof 1 的结果 (地平线). 这将不会“动员” AB, 但将激活 BC 的灵活性。BC 從下列数字 (上面已经显示)
   - 请注意, 所有字符串都是 +ve, 图表是相同的。

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} θ_3
K_{1j} (F_X)	AB BC	$\frac{EA}{L}$ $\frac{12EI^c}{H^3}$	0 0	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$
K_{2j} (F_Y)	AB BC	0 0	$\frac{12EI^b}{L^3}$ $\frac{EA}{H}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0
K_{3j} (M_Z)	AB BC	0 $\frac{6EI^c}{H^2}$	$-\frac{6EI^b}{L^2}$ 0	$\frac{4EI^b}{L}$ $\frac{4EI^c}{H}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

8. 合并, 全球结构刚度矩阵 $[\mathbf{K}]$ is:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{K}] &= \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{21}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{23}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{11}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{13}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{65}^{AB}+k_{31}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{33}^{BC} \end{bmatrix} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ M_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix} \end{array}
\end{aligned}
$$

9. 替代

$$
[\mathbf{K}] = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}
$$

请注意, 轴性强度 (EA/L) 是 4.1×10^6 同时, 灵活的一个 $(12EI/H^3)$ 是 0.0071×10^6. 轴硬度总是比灵活硬度高得多。我们需要有 P_{ext} 在 总体坐标系. 從前的方程式: 我们有

$$
\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} p_1^A & p_2^A & p_3^A & p_4^B & p_5^B & p_6^B \end{array}\right\rfloor}_{AB} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} & 0 & -\frac{P}{2} & \frac{PL}{8} \end{array}\right\rfloor
$$

$$
\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} p_1^B & p_2^B & p_3^B & p_4^C & p_5^C & p_6^C \end{array}\right\rfloor}_{BC} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{wH}{2} & -\frac{wH^2}{12} & 0 & -\frac{wH}{2} & \frac{wH^2}{12} \end{array}\right\rfloor
$$

在总体坐标系中插入, 这将是

$$
\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} P_1^A & P_2^A & P_3^A & P_4^B & P_5^B & P_6^B \end{array}\right\rfloor}_{AB} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} & 0 & -\frac{P}{2} & \frac{PL}{8} \end{array}\right\rfloor
$$

$$
\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} P_1^B & P_2^B & P_3^B & P_4^C & P_5^C & P_6^C \end{array}\right\rfloor}_{BC} = \left\lfloor \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{wH}{2} & 0 & -\frac{wH^2}{12} & -\frac{wH}{2} & 0 & \frac{wH^2}{12} \end{array}\right\rfloor
$$

10. 全球方程式 平衡 现在可以写下 (请注意, 为了描述目的, 我们 w 又一瞬间 M 在 Node B).

$$
\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ 0 \\ M \end{Bmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{wH}{2} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8}-\frac{wH^2}{12} \end{Bmatrix}}_{NEL}}_{P_{ext}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI^c}{H^3} & 0 & \frac{6EI^c}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI^b}{L^3}+\frac{EA}{H} & -\frac{6EI^b}{L^2} \\ \frac{6EI^c}{H^2} & -\frac{6EI^b}{L^2} & \frac{4EI^b}{L}+\frac{4EI^c}{H} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

11. 替代:

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ -0.75 \end{Bmatrix}}_{NEL}}_{} = \underbrace{10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

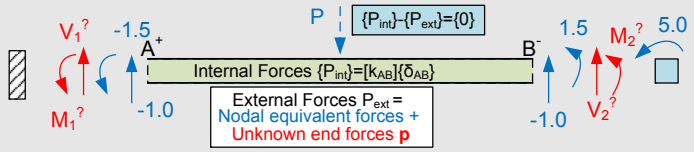
12. 解决转移问题

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 4.1139 & 0 & 0.0417 \\ 0 & 4.1139 & -0.0417 \\ 0.0417 & -0.0417 & 0.3333 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -2 \\ -0.5 \\ 4.25 \end{Bmatrix}$$

或

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -0.61 \text{ m} \\ 0.0084 \text{ m} \\ 12.82 \text{ radian} \end{Bmatrix}$$

13. 为了获得 单元 内部力量, 每個 单元 刚度矩阵 加倍 地方流亡. 对于单元 AB, 本地和全球坐标相匹配



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} = \underbrace{10^6 \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & - & - & -4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & -13,889. & 41,667. \\ - & - & - & 0 & -41,667. & 83,333. \\ - & - & - & 4.1\times10^6 & 0 & 0 \\ - & - & - & 0 & 13,889. & -41,667 \\ - & - & - & 0 & -41,667 & 166,667. \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{AB}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.61 \\ 0.0084 \\ 12.82 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}^{AB}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ -0.75 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{Bmatrix}}_{NEL^{AB}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

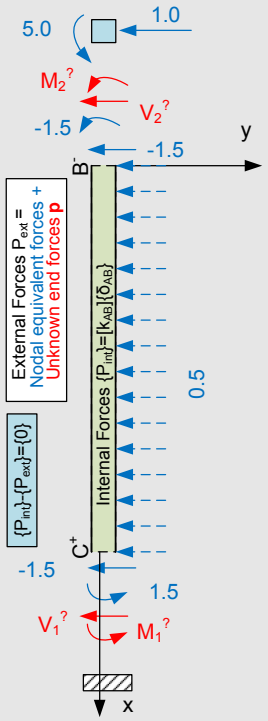
或

$$\left\{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 2.52\ \text{kN} \\ 1.03\ \text{kN} \\ 1.82\ \text{kN.m.} \\ \hline -2.52\ \text{kN} \\ -0.034\ \text{kN} \\ 1.39\ \text{kN.m} \end{array}\right\}$$

14. 对于单元 BC, 当地和全球坐标不匹配, 因此我们将需要 将移动从其全球化转变为其本地协调组件. 通过检查

地方	x	y	z
全球	$-Y$	$+X$	$+Z$

15. 因此, 单元 BC 的内部力量由:



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

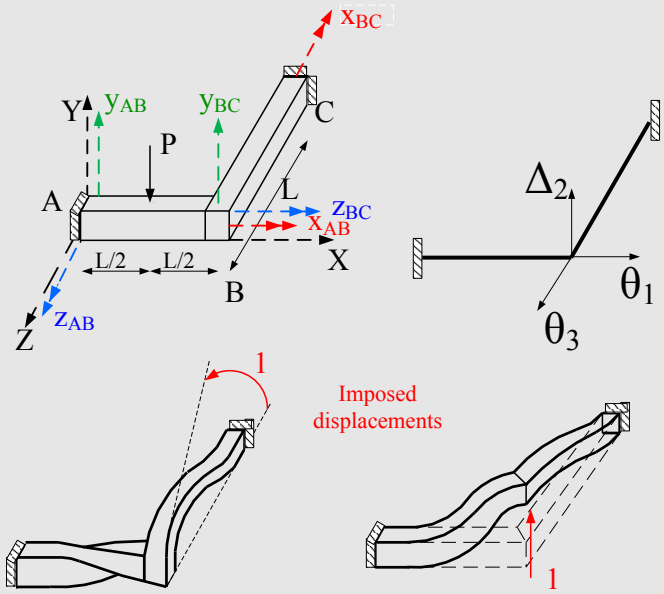
$$= 10^6 \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & 13,888.9 & 41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 16,6667. & - & - & - \\ -4.1\times10^6 & 0 & 0 & - & - & - \\ 0 & -13,888.9 & -41,666.7 & - & - & - \\ 0 & 41,666.7 & 83,333.3 & - & - & - \end{array}\right]}_{\mathbf{k}^{BC}}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} -0.0084 \\ -0.61 \\ 12.82 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}^{BC}} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ \hline N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.034 \text{ kN} \\ 2.026 \text{ kN} \\ 3.612 \text{ kN.m} \\ 0.0344 \text{ kN} \\ 0.974 \text{ kN} \\ -0.456 \text{ kN.m} \end{Bmatrix}$$

A MATLAB® 这个例子的代码在 §I.2.4

42.3.3 例题 42.3: 网格

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



两個 单元 有相同的柔軟性和旋轉性硬度, EI 和 GJ.

1. 识别三级的自由 , θ_1, Δ_2, 和 θ_3.
2. 限制所有 自由度, 并确定节点相当负载:

$$\left\{\begin{array}{c} T_1 \\ V_2 \\ M_3 \end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{array}\right\}}_{\text{@node A}} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{array}\right\}}_{\text{@node B}}$$

3. 应用一个单元位移沿着三个自由度的每个, 并确定内部力量:

全球 DOF1

(a) AB (扭转) $K_{11}^{AB} = \frac{GJ}{L}, K_{21}^{AB} = 0, K_{31}^{AB} = 0$
(b) BC (灵活性) $K_{11}^{BC} = \frac{4EI}{L}, K_{21}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}, K_{31}^{BC} = 0$

全球 Dof 2

(a) AB (灵活性): $K_{12}^{AB} = 0, K_{22}^{AB} = \frac{12EI}{L^3}, K_{32}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}$
(b) BC (灵活性): $K_{12}^{BC} = \frac{6EI}{L^2}, K_{22}^{BC} = \frac{12EI}{L^3}, K_{32}^{BC} = 0$

全球 DOF3

(a) AB (灵活性): $K_{13}^{AB} = 0, K_{23}^{AB} = -\frac{6EI}{L^2}, K_{33}^{AB} = \frac{4EI}{L}$
(b) BC (扭转): $K_{13}^{BC} = 0, K_{23}^{BC} = 0, K_{33}^{BC} = \frac{GJ}{L}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 组合结构 刚度矩阵

$$
\begin{aligned}
2\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{44}^{AB}+k_{33}^{BC} & k_{45}^{AB}+k_{32}^{BC} & k_{46}^{AB}+k_{31}^{BC} \\ k_{54}^{AB}+k_{23}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{22}^{BC} & k_{56}^{AB}+k_{21}^{BC} \\ k_{64}^{AB}+k_{13}^{BC} & k_{55}^{AB}+k_{12}^{BC} & k_{66}^{AB}+k_{11}^{BC} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{AB}]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{BC}]} \\
&= \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \alpha L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L \\ 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha L^2 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}_{Structure}]}
\end{aligned}
$$

哪里 $\alpha = \frac{GJ}{EI}$ 在最后的方程式中, 假设为单元 BC, 节点 1 相当于 C 和 2 到 B。

5. 结构 平衡方程 在 矩阵 格式:

$$
\underbrace{\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{P}_{nodes}\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}}_{P_{el}^{B}}}_{\mathbf{P}_{ext}} - \underbrace{\underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 \\ 6L & 24 & -6L \\ 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \theta_1^? \\ \Delta_2^? \\ \theta_3^? \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\Delta}\}}}_{\mathbf{P}_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

6. 转移和解决流离失所

$$
\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{PL^2}{16EI}\frac{5+2\alpha}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \\ -\frac{PL^3}{96EI}\frac{5+2\alpha}{1+\alpha} \\ -\frac{3PL^2}{16EI}\frac{1}{(1+\alpha)(4+\alpha)} \end{Bmatrix}
$$

7. 地图 地方和全球 Dof

$$
\text{AB}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & X \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & Z \end{Bmatrix}; \qquad \text{BC}\begin{Bmatrix} x & \leftarrow & -Z \\ y & \leftarrow & Y \\ z & \leftarrow & X \end{Bmatrix}
$$

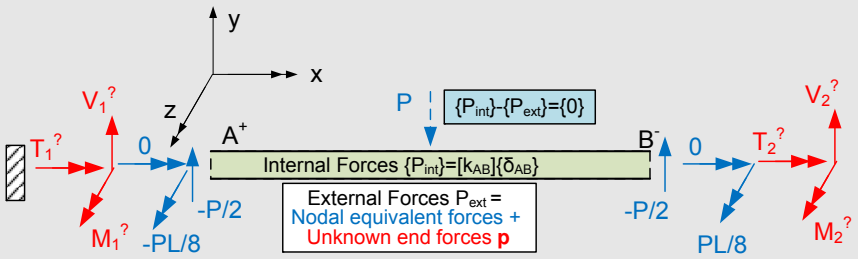
8. 通过每次 单元 刚度矩阵 倍数来确定内部力量 [**k**] 由 向量 的 nodal 位移 $\{\boldsymbol{\delta}\}$. 两者都應該在局部坐标系中。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

AB 和 BC 向量的节点转移是

$$\left\{\begin{array}{c}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ \hline \delta_4\\ \delta_5\\ \delta_6\end{array}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\}}_{AB} = \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-\theta_3\\ \Delta_2\\ \theta_1\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{BC}$$

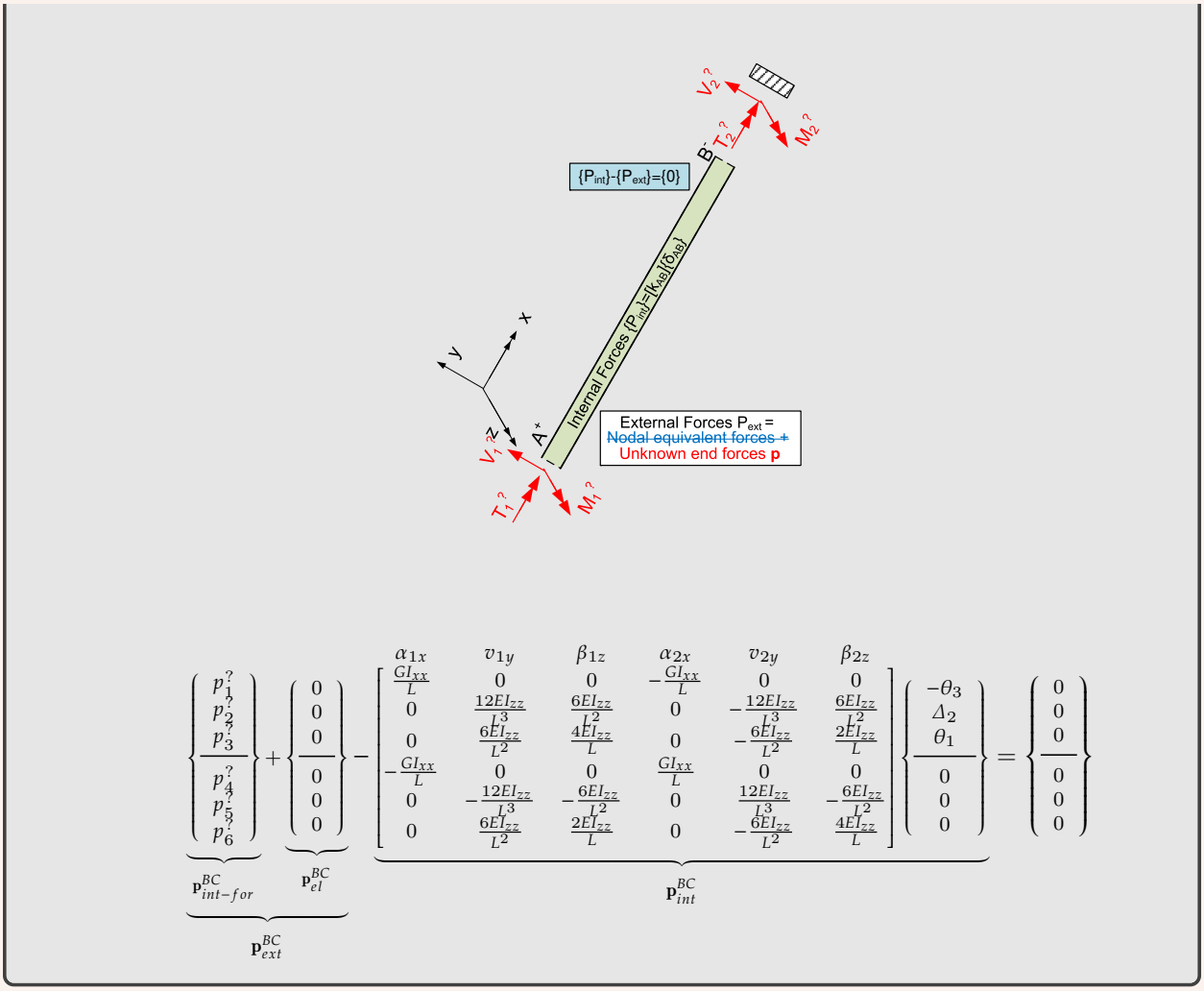
AB



$$\underbrace{\underbrace{\left\{\begin{array}{c}p_1^?\\ p_2^?\\ p_3^?\\ \hline p_4^?\\ p_5^?\\ p_6^?\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{int-for}^{AB}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ -P/2\\ -PL/8\\ \hline 0\\ -P/2\\ PL/8\end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{el}^{BC}}}_{\mathbf{p}_{ext}^{AB}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{int}^{AB}} \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline \theta_1\\ \Delta_2\\ \theta_3\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}$$

BC

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



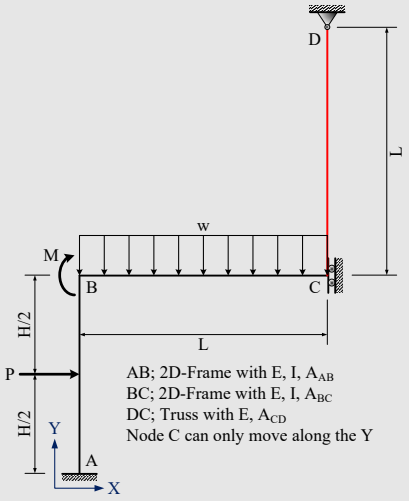
$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{int-for}^{BC}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\mathbf{p}_{el}^{BC}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{1x} & v_{1y} & \beta_{1z} & \alpha_{2x} & v_{2y} & \beta_{2z} \\ \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & \frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} \\ -\frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_{xx}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{L^3} & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{2EI_{zz}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{L^2} & \frac{4EI_{zz}}{L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{int}^{BC}} \left\{\begin{array}{c} -\theta_3 \\ \Delta_2 \\ \theta_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$\mathbf{p}_{ext}^{BC}$

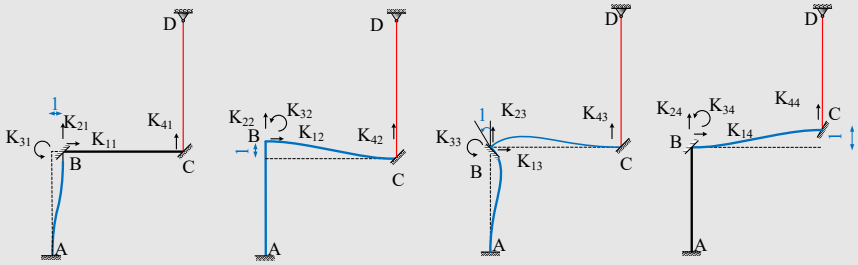
42.3.4 例题 42.4: 混合式 框架

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们正在努力分析这个框架为 $E = 200$ GPA , $I = 200{\times}10^6\,\text{mm}^4$, $L_{AB} = H = 8\text{m}$, $L_{BC} = L_{DC} = 10\,\text{m}$, $A_{AB} = A_{BC} = 5,000$ mm^2, $A_{DC} = 100\,\text{mm}^2$, $P = 10\,\text{kN}$, $M = P \cdot L_{BC}$ 和 $w = 1\text{kN/m}$。使用 GPa、kN 和 mm。



1. 全球 DOF 是 $\Delta_1^{BH}, \Delta_2^{BV}, \Delta_3^{BZ}, \Delta_4^{CV}$
2. 识别全球道夫, 并绘制相应的歪曲



3. 表明与每个单位 位移 相关的实际力量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

		K_{i1}	K_{i2}	K_{i3}	K_{i4}
		Δ_1	Δ_2	θ_3	Δ_4
K_{1i}	AB	$\frac{12EI}{L_{AB}^3}$	0	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0
	BC	$\frac{EA_{BC}}{L_{BC}}$	0	0	0
	DC	0	0	0	0
K_{2i}	AB	0	$\frac{EA_{AB}}{L_{AB}}$	0	0
	BC	0	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	0
K_{3i}	AB	$\frac{6EI}{L_{AB}^2}$	0	$\frac{4EI}{L_{AB}}$	0
	BC	0	$\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{4EI}{L_{BC}}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$
	DC	0	0	0	0
K_{4i}	AB	0	0	0	0
	BC	0	$-\frac{12EI}{L_{BC}^3}$	$-\frac{6EI}{L_{BC}^2}$	$\frac{12EI}{L_{BC}^3}$
	DC	0	0	0	$\frac{EA_{DC}}{L_{DC}}$

4. 分析地组合全球固度矩阵, 写下全球方程平衡。

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_{AB}^3} + \frac{EA_{BC}}{L_{BC}} & 0 & \frac{6EI}{L_{AB}^2} & 0 \\ 0 & \frac{EA_{AB}}{L_{AB}} + \frac{12EI}{L_{BC}^3} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} \\ \frac{6EI}{L_{AB}^2} & \frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{4EI}{L_{AB}} + \frac{4EI}{L_{BC}} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L_{BC}^3} & -\frac{6EI}{L_{BC}^2} & \frac{12EI}{L_{BC}^3} \frac{EA_{DC}}{L_{DC}} \end{bmatrix}}_{K_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}}_{\Delta}$$

NF 是节点力量,NEF 节点同等力量。要确定 Δ,

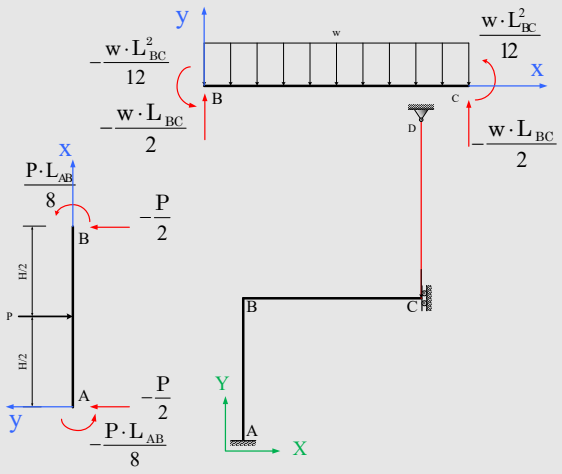
$$\Delta = [K_{tt}]^{-1}(NF + NEF)$$

5. 诺达尔终端力量 但首先, 地图地方和全球协调系统

全球	X	Y	Z
AB	-y	x	z
BC	x	y	z

地方	x	y	z
AB	Y	-X	Z
BC	X	Y	Z

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_{BC} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{NF} + \underbrace{\begin{Bmatrix} P/2 \\ -wL_{BC}/2 \\ PL_{AB}/8 - wL_{BC}^2/12 \\ -wL_{BC}/2 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

6. 替换与 $E = 200GPa$, $I = 200 \times 10^6 mm^4$, $L_{AB} = H = 8m$, $L_{BC} = L_{DC} = 10m$, $A_{AB} = A_{BC} = 5{,}000mm^2$, $A_{DC} = 100mm^2$, $P = 10kN$, $M = P \cdot L_{BC}$ 和 $w = 1kN/m$. 确定最终节点力量, 然后解决节点转移。MATLAB® 剧本在 §I.2.5

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1640\ [mm] \\ -2.36 \times 10^{-5}\ [mm] \\ -0.00308\ [radian] \\ -4.999\ [mm] \end{Bmatrix}$$

7. 在所有成员中确定内部力量。
8. 收集 单元 节点转移和相同负载:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_2 \quad -\Delta_1 \quad \theta_3\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad 0.0 \quad 0.00 \quad -23.6e-006 \quad -164.03e-003 \quad -3.08e-003\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{AB}} &= \lfloor\ 0 \quad -P/2 \quad -PL_{AB}ab/8; 0 \quad -P/2 \quad PL_{AB}/8\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -10{,}000.0 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 10{,}000\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{\delta}_{BC} &= \lfloor\ \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \theta_3 \quad 0 \quad \Delta_4 \quad 0\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 164.03e-003 \quad -23.6e-006 \quad -3.08e-003 \quad 0.0 \quad -5.00 \quad 0.0\ \rfloor^T \\
\boldsymbol{NEF_{BC}} &= \lfloor\ 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad -wL_{BC}^2/12 \quad 0 \quad -wL_{BC}/2 \quad wL_{BC}^2/12\ \rfloor^T \\
&= \lfloor\ 0.0 \quad -5.0 \quad -8{,}333 \quad 0.0 \quad -5.0 \quad 8{,}333\ \rfloor^T
\end{aligned}$$

9. 从内部的力量

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_1^? \\ p_2^? \\ p_3^? \\ \hline p_4^? \\ p_5^? \\ p_6^? \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} NEF_1 \\ NEF_2 \\ NEF_3 \\ \hline NEF_4 \\ NEF_5 \\ NEF_6 \end{Bmatrix}}_{P_{ext}} - \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \hline \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}}_{P_{int}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

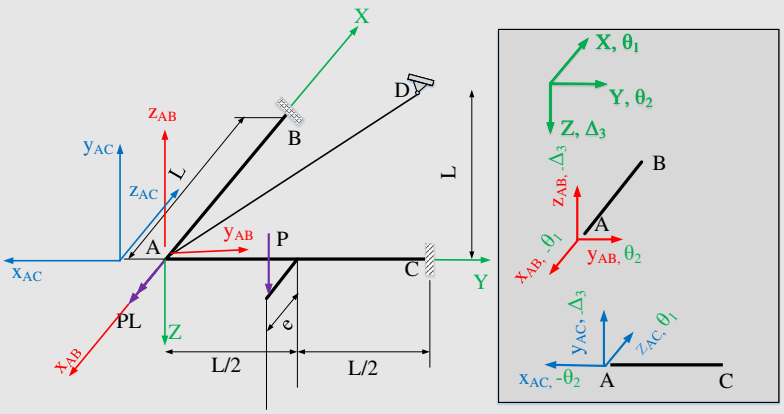
10. 替代

$$\mathbf{p}_{AB}=\left\{\begin{array}{c}P_A^x\\V_A^y\\M_A^z\\\hline P_B^x\\V_B^y\\M_B^z\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}0.00295\ [kN]\\-6.403\ [kN]\\-20,203.\ [kN\cdot mm]\\\hline -0.00295\ [kN]\\16.403\ [kN]\\-71,021.\ [kN\cdot mm]\end{array}\right\};\mathbf{p}_{BC}=\left\{\begin{array}{c}P_B^x\\V_B^y\\M_B^z\\\hline P_C^x\\V_C^y\\M_C^z\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}16.403\ [kN]\\0.00295\ [kN]\\-28,979.\ [kN\cdot mm]\\\hline -16.403\ [kN]\\9.997\ [kN]\\-20,991.\ [kN\cdot mm]\end{array}\right\}$$

$$\mathbf{p}_{DC}=\left\{\begin{array}{c}P_D^x\\P_C^x\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}-9.997\ [kN]\\9.997\ [kN]\end{array}\right\}\ \text{(Tension)}$$

42.3.5 例题 42.5: 混合网络

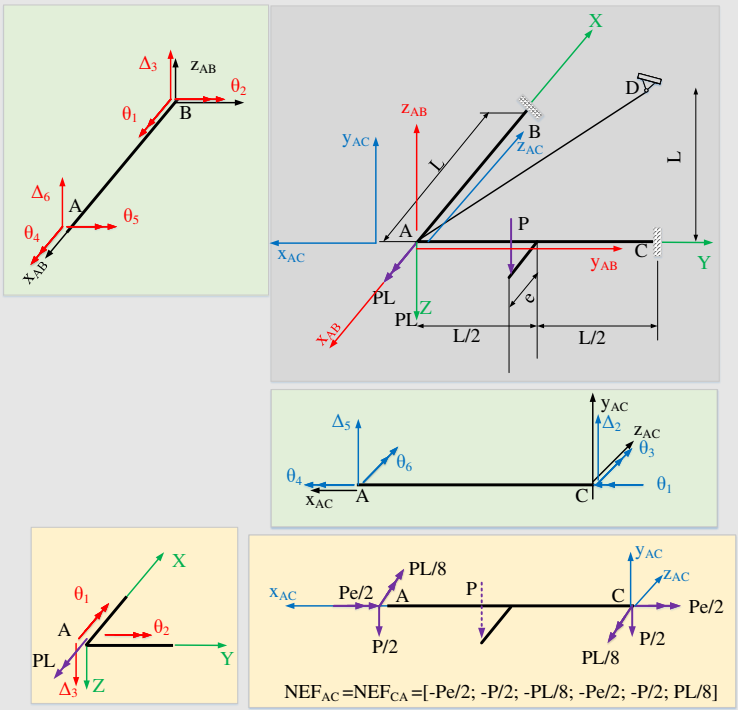
分析下列网格



笔记会员 AD 是 索 标志为 A 和 E 而且在 $Y-Z$ 飞机 两个成员的地点坐标轴的一些显示为红色和蓝色。使用 L=10 m; E= 200 GPa; $I=200\times10^6\text{mm}^4$; $J=I_{xx}=4\times10^6\ \text{mm}^4$, $A_{AD}=100\ \text{mm}^2$, $e=1$ 米, 和 $P$10 公元。使用 GPa、kN 和 mm。

1. 三大自由度是 θ_1^X, θ_2^Y 和 Δ_3^Z.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



2. (a) 点 荷载 将导致光瞬间和 扭转 在两个端的每个。因此, nodal 等级力量 (在 局部坐标系) 是

$$\begin{aligned} NEF_{CA} &= \lfloor\ -Pe/2 \quad -P/2 \quad -PL/8 \mid -Pe/2 \quad -P/2 \quad PL/8\ \rfloor^T \text{ Nodes C and A} \\ &= \lfloor\ -5,000 \quad -5 \quad -12,500 \mid -5,000 \quad -5 \quad 12,500\ \rfloor^T \\ NEF_{AB} &= \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \text{ Nodes A and B} \\ NF &= \lfloor\ -PL \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \\ &= \lfloor\ -100,000 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T \end{aligned}$$

(b) 单位 转角 在 dof 1

$$\begin{array}{llllll} \text{AB} & \text{Torsion} & K_{11} = \frac{GJ}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = 0 \\ \text{AC} & \text{Flexure} & K_{11} = \frac{4EI}{L} & K_{21} = 0 & K_{31} = \frac{6EI}{L^2} \end{array}$$

(c) 单位 转角 在 dof 2

$$\begin{array}{llllll} \text{AB} & \text{Flexure} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{4EI}{L} & K_{32} = -\frac{6EI}{L^2} \\ \text{AC} & \text{Torsion} & K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{GJ}{L} & K_{32} = 0 \end{array}$$

(d) 单位 位移 在 dof 3

$$\begin{array}{llllll} \text{AB} & \text{Flexure} & K_{13} = 0 & K_{23} = -\frac{6EI}{L^2} & & K_{33} = \frac{12EI}{L^3} \\ \text{AC} & \text{Flexure} & K_{13} = \frac{6EI}{L^2} & K_{23} = 0 & & K_{33} = \frac{12EI}{L^3} \\ \text{Cable} & & & K_{33} = \frac{AE}{\sqrt{2}L} \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AE}{2L} & & \end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(e) 局部坐标系 为每个 单元

(f) 编写 平衡 的方程式 (注明 nodal 等值 荷载 重新分为 总体坐标系).

$$\left\{\begin{array}{c} -PL \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c} PL/8 \\ Pe/2 \\ P/2 \end{array}\right\}=\frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{ccc} (4+\eta)L^2 & 0 & 6L \\ 0 & (4+\eta)L^2 & -6L \\ 6L & -6L & 24+\frac{AE}{2L}\xi \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{array}\right\}$$

哪里 $\eta=\frac{GJ}{EI}$ 和 $\xi=\frac{L^3}{EI}$.

或

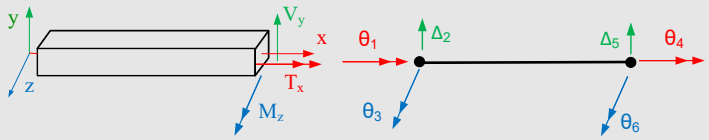
$$\left\{\begin{array}{c} -100,000 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c} 12,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{array}\right\}=\frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{ccc} 1.6032\times10^7 & 0. & 2400. \\ 0. & 1.6032\times10^7 & -2400. \\ 2400. & -2400. & 1.\times10^8 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{array}\right\}$$

or

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \end{array}\right\}=\left[\begin{array}{ccc} 6.23752\times10^{-8} & -2.24103\times10^{-16} & -1.49701\times10^{-12} \\ -2.24103\times10^{-16} & 6.23752\times10^{-8} & 1.49701\times10^{-12} \\ -1.49701\times10^{-12} & 1.49701\times10^{-12} & 1\times10^{-8} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} -87,500 \\ 5,000 \\ 5,000 \end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{c} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \end{array}\right\}$$

3. 要确定内部力量, 请记住, 我们使用了下列地方 x,y,z



4. 为了恢复 单元 AB 的内部力量, 我们将全球迁移地图与本地一

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\}\leftarrow\left\{\begin{array}{c} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

可以从以前的 单元 刚度矩阵 衍生, 因为坐标系统相匹配 ($\theta_{1x};\Delta_{2y};\theta_{3z};$)

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cccccc} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} -\theta_1 \\ \theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

替代

$$\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -0.00545784 \\ 0.000311884 \\ 0.0000501385 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -174.651 \\ 0.120482 \\ 802.965 \\ \hline 174.651 \\ -0.120482 \\ 0.748526 \end{array}\right\}$$

5. 我们重复相同的程序为单元 CA。开始地图全球迁移与当地一个

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \hline \theta_4 \\ \theta_5 \\ \Delta_6 \end{array}\right\} \leftarrow \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

可以从以前的 单元 刚度矩阵 衍生, 因为坐标系统相匹配 $(\theta_{1x}; \Delta_{2y}; \theta_{3z};)$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_A \\ V_A \\ M_A \\ \hline T_B \\ V_B \\ M_B \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -Pe/2 \\ -P/2 \\ -PL/8 \\ \hline -Pe/2 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc} \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\theta_2 \\ -\Delta_3 \\ \theta_1 \end{array}\right\}$$

审阅稿

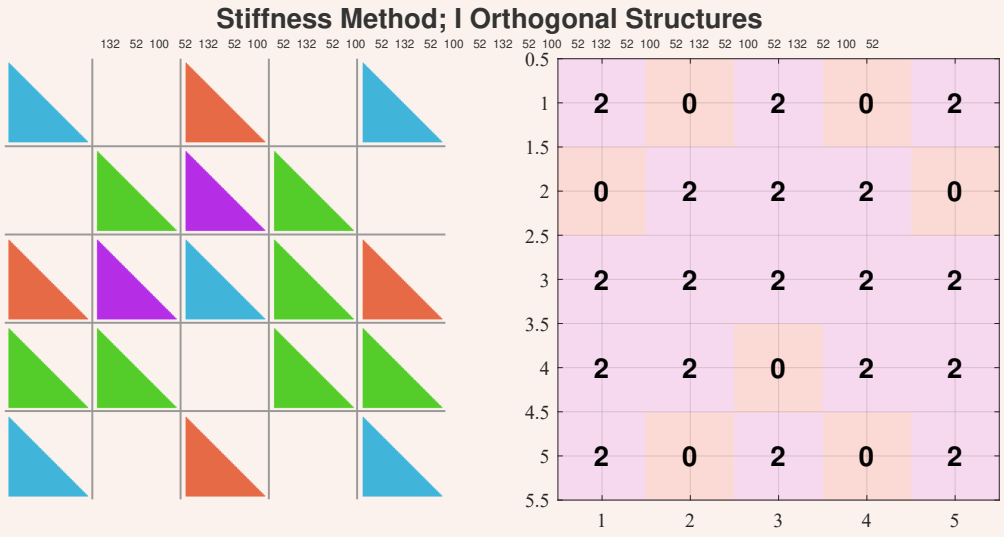
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

替代

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} -5,000 \\ -5 \\ -12,500 \\ \hline -5,000 \\ -5 \\ 12,500 \end{array}\right\}}_{P_{ext}}$$

$$\underbrace{-\begin{bmatrix} 32000 & 0 & 0 & -32,000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 2,400 & 0 & -\frac{12}{25} & 2,400 \\ 0 & 2,400 & 16,000,000 & 0 & -2400 & 8,000,000 \\ -32,000 & 0 & 0 & 32,000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{25} & -2,400 & 0 & \frac{12}{25} & -2,400 \\ 0 & 2400 & \frac{2}{25} & 0 & -2,400 & 16,000,000 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -0.0003118 \\ -0.00005013 \\ -0.005457 \end{array}\right\}}_{P_{int}} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} T_C \\ V_C \\ M_C \\ \hline T_A \\ V_A \\ M_A \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 5,009.98 \\ -8.09879 \\ -31,162.6 \\ \hline 4,990.02 \\ 18.0988 \\ -99,825.3 \end{array}\right\}$$



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

43 转型矩阵

摘要

在上一章中, 我们通过分析正方形结构介绍了直接刚度法。因此, 我们依靠非常简单的 *90°* 旋转将首先集合全球刚度矩阵 (从本地到全球协调系统) 然后从全球到地方, 以恢复力量。显然, 这对于一般结构是不可能的, 我们需要引入一个变换矩阵来执行这些操作。因为这可能对简单的成员来说是基本的。(如 *2D* 框架), 它变得更复杂的网络, 和更复杂 *3D* 框架 单元. 不同 单元 的转型矩阵的数学表达是本章的主题。

43.1 引入 1324
43.2 某些理论 1325
43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ 关系 1325
43.2.2 指向科森 1326
43.3 转型矩阵为单元框架 1328
43.3.1 2D 案例 1328
43.3.2 3D 框架 1331
43.3.3 Eulerian 旋转 1332
43.3.4 单元 轴 1334
43.3.5 3D 桁架 1336

43.1 引入

1 在前一章中, 我们专注于正角结构, 结构的组合为刚度矩阵 $[\mathbf{K}^e]$ 在单元的密度矩阵方面, 相对直前。

2 在全球坐标中确定元素密度矩阵, 从本地坐标中的元素硬度矩体要求, 图。43.1 引入一个变换矩阵.

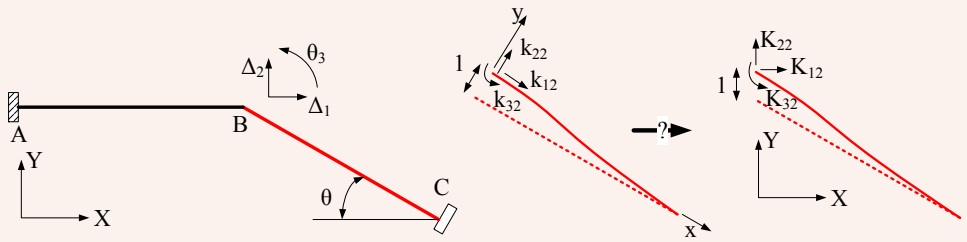


图 43.1: 地方 ($\mathbf{k}^e$) 和全球 ($\mathbf{K}^e$) 单元 硬度矩阵

3 对于简单的成员 (如 框架 单元), 这很容易实现, 图 43.2. 然而, 我们正在寻求合理地为不同类型的成员产生转型矩阵。(3D 框架 是最具挑战性的).

4 本章将探讨 2D 和 3D 转型需要在集合前全球协调系统中获得元素密度矩阵 (如下章节所讨论).

审阅稿

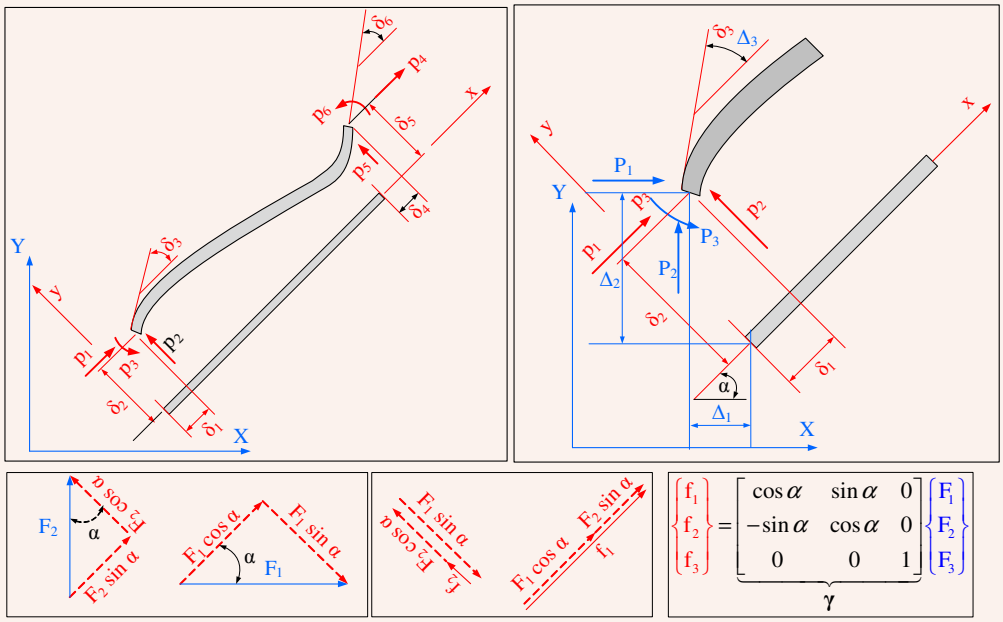


图 43.2: 转型矩阵为 2D 白色列

43.2 某些理论

43.2.1 $[\mathbf{k}^e]$ $[\mathbf{K}^e]$ 关系

5 回忆

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$
$$\mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

6 让我们定义一个 向量变换矩阵 $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$ 如这样:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}^{(e)} &\overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)} \boldsymbol{\Delta}^{(e)} \\ \mathbf{p}^{(e)} &\overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)} \mathbf{P}^{(e)} \end{aligned} \tag{43.1}$$

7 取代 EQ。43.1 到 eq。43.2.1

$$\mathbf{p}^{e} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)} \mathbf{P}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)} \boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

多元化由 $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}}$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}} \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)} \boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

8 但是, 由于旋转矩阵是正角的, 我们有 $\boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{-1}} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}}$ (和 $\boldsymbol{\Delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^{T}} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$)

$$\mathbf{P}^{(e)} = \underbrace{\boldsymbol{\Gamma}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}}_{\mathbf{K}^{(e)}} \boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$$

什么是元素密度矩阵在本地和全球协调。

43.2.2 指向科森

9 二维克特的产品

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|\cos\alpha = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

哪里 $|\mathbf{A}|$ 是规范 (长度) 由 $\vec{\mathbf{A}}$, 和 α 这是两个 vector 之间的角度。

10 向量 $\vec{\mathbf{V}}$

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\vec{\mathbf{i}} + V_y\vec{\mathbf{j}} + V_z\vec{\mathbf{k}}$$

可以正常化

$$\vec{\mathbf{V}}_n = \frac{V_x}{|V|}\vec{\mathbf{i}} + \frac{V_y}{|V|}\vec{\mathbf{j}} + \frac{V_z}{|V|}\vec{\mathbf{k}} = \frac{x_2-x_1}{L}\vec{\mathbf{i}} + \frac{y_2-y_1}{L}\vec{\mathbf{j}} + \frac{z_2-z_1}{L}\vec{\mathbf{k}}$$

哪里 $L = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ 因此, 要获得向量的三个方向同步。$\vec{\mathbf{V}}$ 我们只采取其正常形状的点产品, 由形成正角协调系统的三个单位 vectors

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{V}}_n\cdot\vec{\mathbf{i}} &= \frac{x_2-x_1}{L} = l_{vx}\\ \vec{\mathbf{V}}_n\cdot\vec{\mathbf{j}} &= \frac{y_2-y_1}{L} = l_{vy}\\ \vec{\mathbf{V}}_n\cdot\vec{\mathbf{k}} &= \frac{z_2-z_1}{L} = l_{vz}\end{aligned}$$

请注意, 由于两位 vector 都正常化, 所以点产品与方向相同。

11 我们面临的问题是向量的整体转型。$\mathbf{V}$ 从 $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ 协调系统为 $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$, 图 43.3: 在哪里:

$$\begin{Bmatrix} V_x\\ V_y\\ V_z\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ}\\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ}\\ l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ}\end{bmatrix}}_{\gamma}\begin{Bmatrix} V_X\\ V_Y\\ V_Z\end{Bmatrix} \tag{43.2}$$

哪里 l_{ij} 是的, **路由** *COSINE* 轴的 i 关于轴 j, $l_{xX} = \cos(\alpha)$, 和 $l_{xY} = \cos(\beta)$. (记住这 $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ 因此, 角度方向不重要。).

12 因此, γ 从全球到地方的协调系统。例如

$$\begin{aligned}V_x &= V_Xl_{xX} + V_Yl_{xY} + V_Zl_{xZ}\\ &= V_X\cos\alpha + V_Y\cos\beta + V_Z\cos\gamma\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

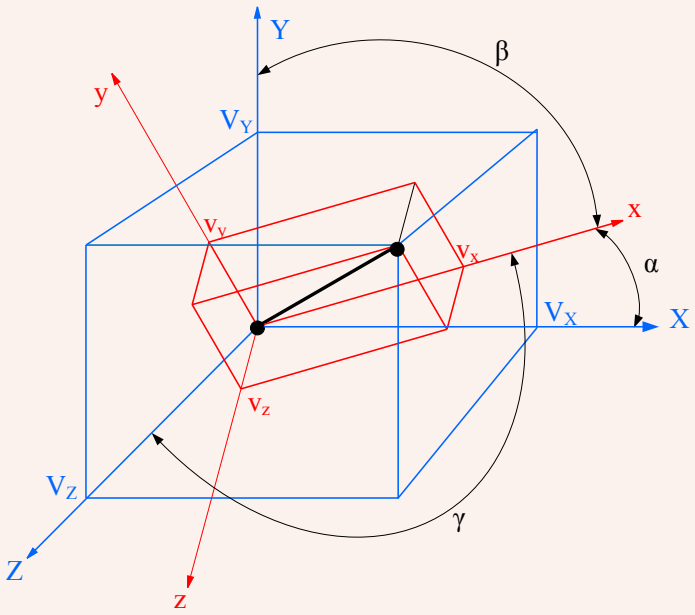


图 43.3: 算法 3D 向量 转换

13 方向同位素是满足下列关系的单位正角 vectors:

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

伊:

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1 \text{ or } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \delta_{11}$$

和

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} l_{kj} = 0 \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \\ i \neq k \end{cases}$$

$$l_{11} l_{21} + l_{12} l_{22} + l_{13} l_{23} = 0 = \delta_{12}$$

14 通过直接的多元化 $[\gamma]^T$ 和 $[\gamma]$ 可以证明: $[\gamma]^T [\gamma] = [\mathbf{I}] \Rightarrow [\gamma]^T = [\gamma]^{-1} \Rightarrow [\gamma]$ is an *orthogonal matrix* (i.e. orthonormal).

15 逆转转型 (从本地到全球) 会是

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{v}$$

16 最后, 第一行的 Eq。43.2 被授予 (在较低的情况下 $x - y - z$)

$$l_{xX} = C_X = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad l_{xY} = C_Y = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad l_{xZ} = C_Z = \frac{z_j - z_i}{L} \tag{43.3}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

43.3 转型矩阵为单元框架

17 转角 矩阵 是 $[\boldsymbol{\Gamma}]$, 显然会与单元类型不同。在最常见的情况下 (3D 单元, 每节点 6d.o.f) 我们必须定义:

$$\left\{\begin{array}{c} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ \hline M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ \hline M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \gamma & & & \\ \hline & \gamma & & \\ \hline & & \gamma & \\ \hline & & & \gamma \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \left\{\begin{array}{c} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{Z1} \\ \hline M_{X1} \\ M_{Y1} \\ M_{Z1} \\ \hline F_{X2} \\ F_{Y2} \\ F_{Z2} \\ \hline M_{X2} \\ M_{Y2} \\ M_{Z2} \end{array}\right\} \tag{43.4}$$

要区分向量转型 $[\gamma]$ 和 单元 变换矩阵 $[\boldsymbol{\Gamma}]$.

18 在接下来的部分中, 我们将探讨每个元素类型的转型矩阵, 在那里我们将从与全球性相匹配的元素开始。X 将其转向现状, 定义 $x-y-z$.

43.3.1 2D 案例

43.3.1.1 2D 框架

19 为 2D 框架 单元, 图 43.4 從 EQ。43.2 向量 转角 矩阵 定义为 9 个不同角度的 9 方向同位

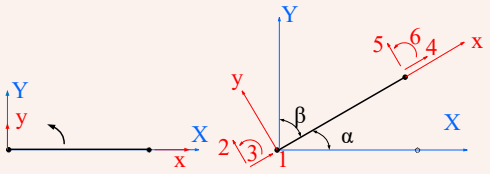


图 43.4: 2D 框元素旋转与 Z (或 z)

素。但对于 2D 案例, 我们将注意到四个角度相互关联。$(l_{xX}, l_{xY}, l_{yX}, l_{yY})$ 可以用一个单一的意义表达所有 α, 在哪里 α 是地方的方向。x 轴 (从第一个节点到第二个节点) 至于全球 X 轴。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

20 其余 5 个术语与角度有关 Z 和 z 这是零, 而 Z $x-y$ 飞机, 这就是 $\pi/2$. 因此, 旋转矩阵可以写为:

$$\gamma = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们观察到, 从第二个字段到第一个字节的角落是定义的, 反时的角度是积极的。

21 单元 转角 矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 然後將被授予

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \hline p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

43.3.1.2 网格

22 变换矩阵 为网络 单元, 图 43.5 非常相似于一个框元素, 除非旋转与 y 轴而不是 z 轴。

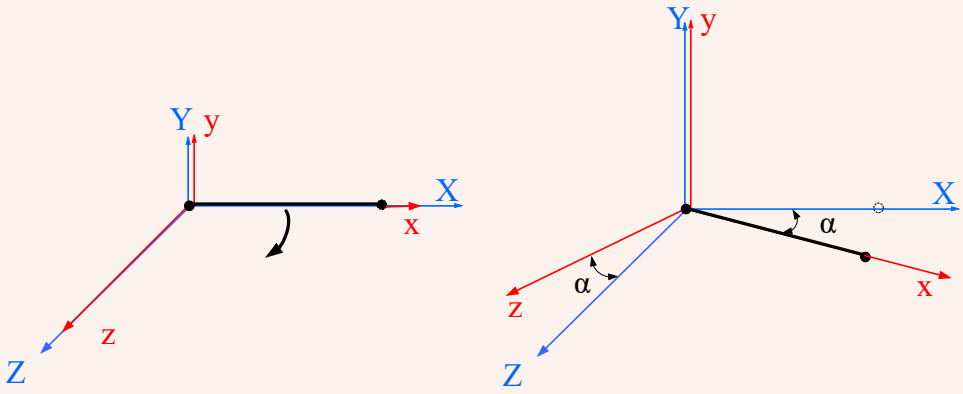


图 43.5: 網絡 单元 转角

23 来自 EQ。43.2 向量 转角 矩阵 定义为 9 个不同角度的 9 方向同位素。但是, 我们会注意到四个角度是相互关联的。$(l_{xX}, l_{xZ}, l_{zX}, l_{zZ})$ 可以用一个单一的意义表达所有 α, 在哪里 α 是地方的方向。x 轴 (从第一个节点到第二个节点) 至于全球 X 轴。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24 其余 5 个术语与角度有关 Y 和 y 这是零, 而 $Y\ x-z$ 飞机, 这就是 $\pi/2$. 因此, 旋转矩阵可以写为:

$$\gamma=\begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & l_{xZ}\\ 0 & 1 & 0\\ l_{zX} & 0 & l_{zZ}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

我们观察到, 从第二个字段到第一个字节的角落是定义的, 反时的角度是积极的。

25 单元 转角 矩阵 $[\boldsymbol{\Gamma}]$ 然後將被授予

$$\left\{\begin{matrix} p_1\\ p_2\\ p_3\\ \hline p_4\\ p_5\\ p_6\end{matrix}\right\}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}}\left\{\begin{matrix} P_1\\ P_2\\ P_3\\ \hline P_4\\ P_5\\ P_6\end{matrix}\right\}$$

43.3.1.3 布拉索夫 梁

26 刚度矩阵的网络单元与限制包装给了 Eq。41.3 (§41.8). 它的 变换矩阵 将与网络相似, 除非我们现在有一个额外的 Dof (M_y), 图 43.6.

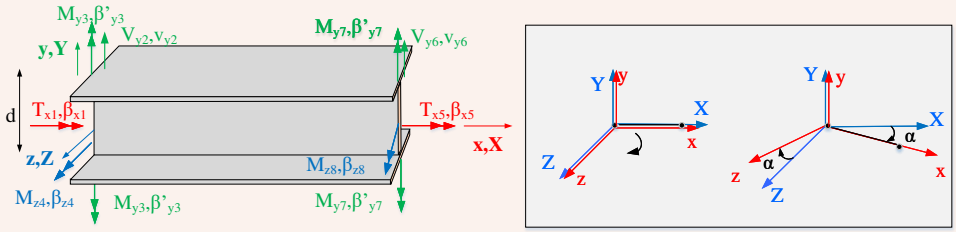


图 43.6: 变换矩阵 为 vlasov 梁

$$\gamma=\begin{bmatrix} l_{xX} & 0 & 0 & l_{xZ}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ l_{zX} & 0 & 0 & l_{zZ}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

27 单元 转角 矩阵 $[\Gamma]$ 然後將被授予

$$\left\{\begin{array}{c} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{array}\right]}_{\Gamma} \left\{\begin{array}{c} T_{x1} \\ V_{y2} \\ M_{y3} \\ M_{z4} \\ \hline T_{x5} \\ V_{y6} \\ M_{y7} \\ M_{z8} \end{array}\right\}$$

43.3.1.4 2D 桁架

28 对于 2D 特鲁斯元素来说, 全球坐标系统是两维的, 而本地则只有一个维度, 因此 向量变换矩阵 就是，见图 43.7.

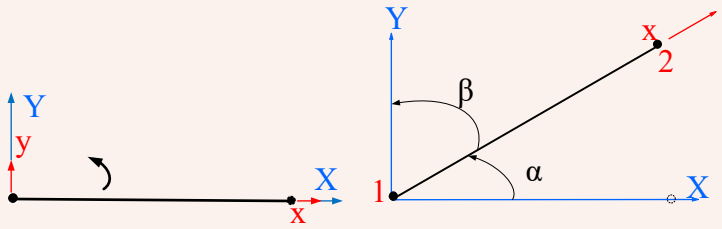


图 43.7: 2D 桁架 转角

$$\gamma = \left[\begin{array}{cc} l_{xX} & l_{xY} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \sin\alpha \end{array}\right]$$

29 单元 转角 矩阵 $[\Gamma]$ 然后将从 vector 旋转矩阵中收集 $[\gamma]$.

$$\left\{\begin{array}{c} p_1 \\ \hline p_2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc} \gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{array}\right]}_{\Gamma} \left\{\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \hline P_3 \\ P_4 \end{array}\right\}$$

43.3.2 3D 框架

30 由於 单元 列, 他們以這樣的方式定義為其當地 x 轴与其主要轴相匹配, 并且单元由两个终端节点定义 (已知的协调), 然后回忆起方向同步的定义, 应该显然, 第一行的评估, 仅仅是

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

相当简单的。C_X, C_Y, 和 C_Z 哪里 $C_X = l_{X_2X_1} = \frac{x_j - x_i}{L}, C_Y = l_{X_2Y_1} = \frac{y_j - y_i}{L}, C_Z = l_{X_2Z_1} = \frac{z_j - z_i}{L}$, $L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$. 然而, 其他条款的评估更为复杂。

31 这种普遍的转变, 从 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 在两维案例中, 完成了一个步骤, 但在 3D 案例上必须确定中间的步骤。

32 从参考开始 (X_1, Y_1, Z_1) 与 总体坐标系相匹配的坐标系统, 我们试图在原始情况下转换一个 单元 X_1 以其新位置为轴 X_2 轴 (或 x).

33 在 2D 案例中, 这是通过一个单一的转角实现的。α, 以及其它定义的各个角度。

34 在 3D 案例中, 我们希望从初始配置转换 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 到最后的配置 $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_2$. 这将需要至少两次旋转。$\beta$ 和 γ 也许, 第三个 α (不同于 2D 的) 为了实现这一转变, 桌子 43.1. 这三个角也被称为 *Eulerian* **角落**.

43.3.3 Eulerian 旋转

35 我们可以从变换矩阵的第一行开始, 这相当于参考轴方向同位。$(\mathbf{X_1}, \mathbf{Y_1}, \mathbf{Z_1})$ 至于 $\mathbf{X_2}$. 这将定义 vector 旋转矩阵的第一行 $[\boldsymbol{\gamma}]$:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$$

我们还需要定义第二和第三行。这是通过两次连续旋转实现的。(假设这 $(X_1, Y_1, Z_1$ 和 X_2, Y_2, Z_2 原来是偶然的。) (假设会员的垂直轴保持垂直). 与图的参考 43.8, 转型序列由表提供 43.1.

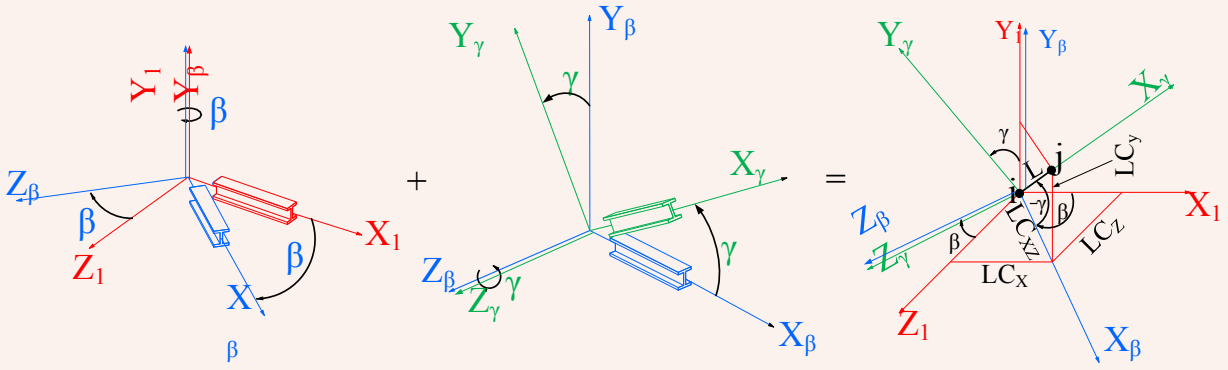


图 43.8: 3D 转角

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 43.1: 线性单元的 3D 转型

从	到	至于	角度
X_1, Y_1, Z_1	$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$Y_1 \equiv Y_\beta$	β
$X_\beta, Y_\beta, Z_\beta$	$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$Z_\beta \equiv Z_\gamma$	γ
可选			
$X_\gamma, Y_\gamma, Z_\gamma$	$X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$	$X_\gamma \equiv X_\alpha$	α

转角 由 β 關於 The Y_1 轴 , $X_1 \rightarrow X_\beta$. 此 转角 $\mathbf{R}_\beta$ 是由方向的同胞 β 轴 $(X_\beta, Y_\beta, Z_\beta)$ 至于 (X_1, Y_1, Z_1):

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_X}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_Z}{C_{XZ}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.5}$$

$\cos\beta = \frac{C_X}{C_{XZ}}$, $\sin\beta = \frac{C_Z}{C_{XZ}}$ 和从 EQ。43.3:

$$C_X = \frac{x_j - x_i}{L};\ C_Y = \frac{y_j - y_i}{L};\ C_Z = \frac{z_j - z_i}{L};\ C_{XZ} = \sqrt{C_X^2 + C_Z^2}$$

转角 由 γ 關於 The Z 轴

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{XZ} & C_Y & 0 \\ -C_Y & C_{XZ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.6}$$

哪里 $\cos\gamma = C_{XZ}$, 和 $\sin\gamma = C_Y$.

36 合并 eq。43.3, 43.5 和 43.6 收益:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y}{C_{XZ}} & C_{XZ} & \frac{-C_Y C_Z}{C_{XZ}} \\ \frac{-C_Z}{C_{XZ}} & 0 & \frac{C_X}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.7}$$

37 垂直会员 (在全球范围内 Y) 以前的 矩阵 不再有效 C_{XZ} 未定义 ($X_i = X_j \Rightarrow C_X = 0$ 和 $Z_i = Z_j \Rightarrow C_Z = 0$). 没有转角通过 β. 转角 与 Z_1 以某个角度的轴 γ 由 90° 或 270°. 有兩個可能性, 图 43.9:

1. $x_\gamma \uparrow$: X_2 是与 - 相匹配的 Y_1, Y_2 是与 - 相匹配的 X_1, Z_2 是与 - 相匹配的 Z_1
2. $x_\gamma \downarrow$: X_2 轴是与 Y_1, Y_2 是与 - 相匹配的 X_1 和 Z_2 轴是与 Z_1

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

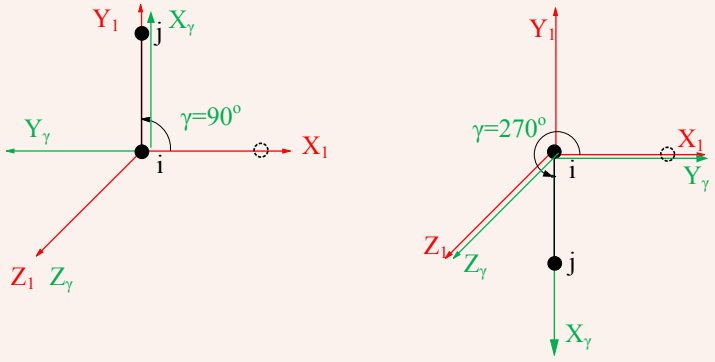


图 43.9: 垂直成员的 3D 转型特殊案例

因此, 旋转矩阵与 y 轴, 与此前为转角衍生相似。z 轴, 除了重新排序的条款:

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.8}$$

对于这两种情况, 有效。($C_Y = 1$ 為 $\gamma = 90\,\text{deg}$, 和 $C_Y = -1$ 為 $\gamma = 270\,\text{deg}$).

43.3.4 单元 轴

38 如果主要轴要旋转 (包括 单元 轴的最终旋转), 然后我们需要定义一个额外的转角到之前的转变一个角度 α 關於 The X_γ 轴, 图 43.10.

39 这个 转角 被定义为:

1. X_α 与此相匹配 X_2 正常的两者 Y_2 和 Z_2
2. Y_α 创建一个角度 0, α 和 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 至于 X_2, Y_2 和 Z_2 相应
3. Z_α 创建一个角度 0, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 和 α 至于 X_2, Y_2 和 Z_2 相应

40 记住这 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ 和 $\cos\beta = \sin\alpha$, the direction cosines of this transformation are given by:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{43.9}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

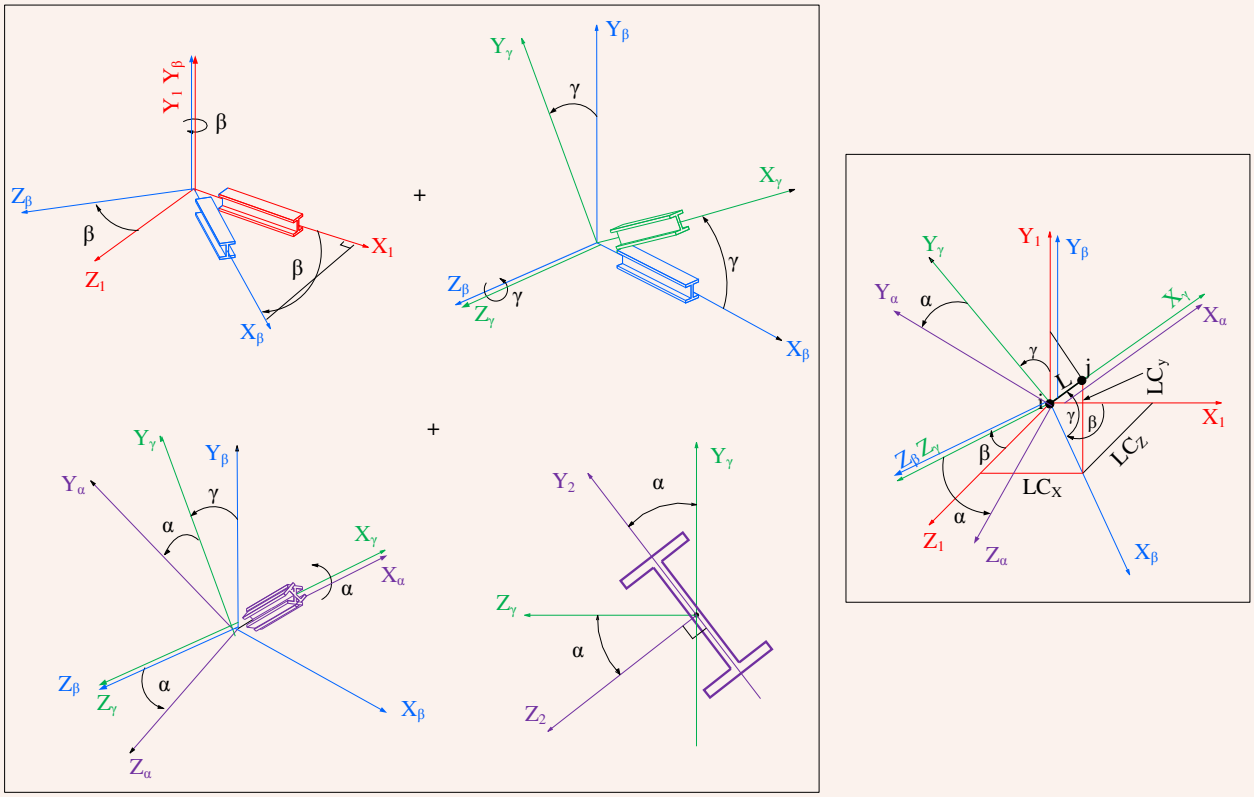


图 43.10: 3D 複合體 转角

引起的 $Y_2 - Z_2$ 轴与 截面 的主要轴相匹配。这将带来:

$$\gamma = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \tag{43.10}$$

$$= \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos\alpha - C_Z \sin\alpha}{C_{XZ}} & C_{XZ}\cos\alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos\alpha + C_X \sin\alpha}{C_{XZ}} \\ \frac{C_X C_Y \sin\alpha - C_Z \cos\alpha}{C_{XZ}} & -C_{XZ}\sin\alpha & \frac{C_Y C_Z \sin\alpha + C_X \cos\alpha}{C_{XZ}} \end{bmatrix} \tag{43.11}$$

41 至于更简单的情况, 前方等式为垂直成员而不定义, 对 Eq 的对称。43.8 必须衍生。这将以两步实现:

1. 将会员转向这样:
   (a) X_2 与轴相匹配 Y_1
   (b) Y_2 与 - 相匹配的轴 X_1
   (c) Z_2 与轴相匹配 Z_1

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

此前已完成, 结果是 Eq。43.8

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43.12}$$

2. 第二步是执行一个转角的角度 α 至于新 X_2 正如 EQ 中所定义。43.9.
3. 最后, 我们重复了两个转型矩阵。$[\mathbf{R}][\mathbf{R}]$ 由 EQ 提供。43.12 和 43.9 要得到:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{RR} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ C_Y \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

注意与 $\alpha = 0$ 回复 EQ。43.8.

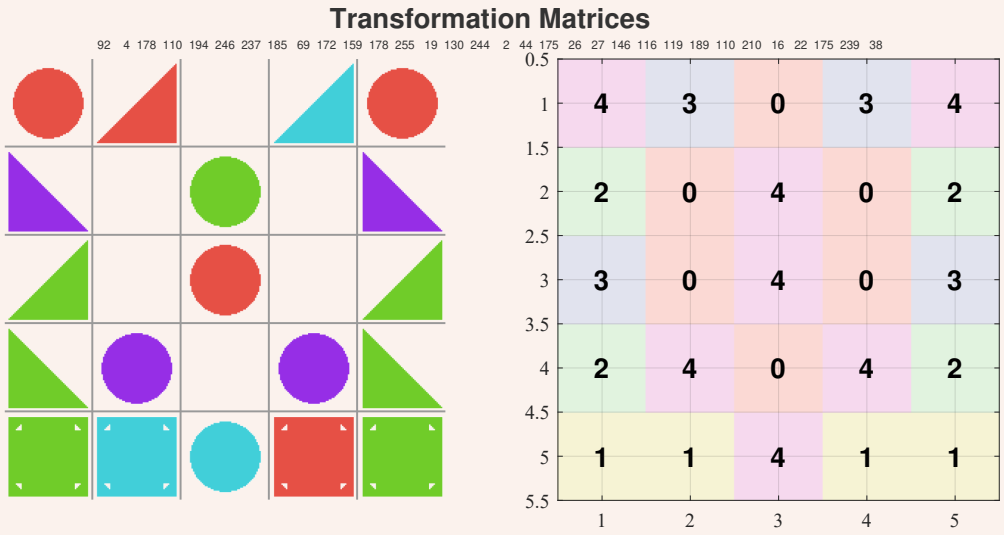
4. 最终旋转矩阵将是 Eq。43.4 与 The γ 由此部分引发。

43.3.5 3D 桁架

42 引用 3D 框架 单元的转换衍生品的第一部分, 则是 3D 桁架 单元 的 变换矩阵

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \hline p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{array}\right]}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \hline P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



具体的分类, chapter H

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

44 直接刚度法

摘要

在章节 42, 我们首次引入了总体坐标系的概念, 全球 *DOF* 和结构刚度矩阵在总体坐标系. 然后章节 43 引入了变换矩阵的概念, 可以用来从本地到全球协调系统转换单元密度矩阵。本章将普遍化第一章所引入的方法。42 包括自愿的 (非正统) 结构。值得注意的是, 本章的内容对所有最终单元代码至关重要, 这些代码随后由用户友好的图形用户界面包装, 以便易于操作。

44.1 目标 1338
44.2 理论 1338
44.3 差异化 1341
44.3.1 无限制 vs 有限 自由度 1341
44.3.2 结构性差异化 1341
44.4 计算机实施 1342
44.4.1 边界条件, [id] 矩阵 1342
44.4.2 LM 向量 1343
44.4.3 全球 刚度矩阵 的集合 1345
44.4.4 步骤程序 1345
44.5 例子 1346
44.5.1 例题 44.1: 框架 1347
44.5.2 例题 44.3: 桁架 1358

44.1 目标

1 到目前为止, 我们已经引入了直接刚度法的正角结构通过一个 “手册” 程序, 集合的全球刚度矩阵在免费自由度的意义上 (即无限). 我们还引入了各种元素类型的转型矩阵, 并且可以确定系统中的元素密度矩阵。(二、全球) 协调系统通过 $\mathbf{K}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)T}\mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}$.

2 此章节将将直接刚度法一般化为

1. 任意的结构地质学 (二、非正统).
2. 通过使用的反应来确定 **增長 刚度矩阵**.
3. 描述算法以完全自动化 (编写计算机程序) 程序的。

44.2 理论

3 上一篇: 章节 42 我们收集了 **减少** 刚度矩阵 只适用于活跃的 自由度 的 Hose (无限的 I). 那是被逆转的。(或者更有分裂) 确定节点转移。

4 在普遍化中, 我们试图将 **增加** 刚度矩阵 以 **所有** 杜夫 (被限制或不).

5 然后, 我们将矩阵分为两部分, 与订阅 “u” 被驱逐出境所知 (零或其他), 和 t 所知道的负载, 桌子 40.2.

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\checkmark\\ \hline \mathbf{R}_u?\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Delta}_t?\\ \hline \boldsymbol{\Delta}_u\checkmark\end{array}\right\} \tag{44.1}$$

审阅稿

我们注意到这 $\mathbf{K}_{tt}$ 相应于结构性 刚度矩阵.

6 引用到 §40.8 我们注意到, 两种类型的货物 (或移居) 相应的 **必不可少** 和 **自然** 边界条件。

7 第一方程式可以计算未知的转移。请注意, 它需要 (计算机上昂贵) 矩阵 逆转 (解散将是一个更合适的术语在这里).

$$\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \left(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu} \boldsymbol{\Delta}_u \right)$$

8 第二个方程式可以计算反应。

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut} \boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu} \boldsymbol{\Delta}_u$$

它只是一个矩阵的复制。

9 以内在的书持目的, 因为我们正在收集 **增加** 刚度矩阵, 我们将分为两个阶段:

1. 全世界无限自由度的第一个数字
2. 然后单独计算所有全球限制的自由度 (即已知的移动, 零或其他) 以 - 1 倍增, 这将使我们以后能够区分被限制的与无限的道夫。

10 单元 内部力量 (轴力和轴力, 每一刻的成员) 最终决定了

$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

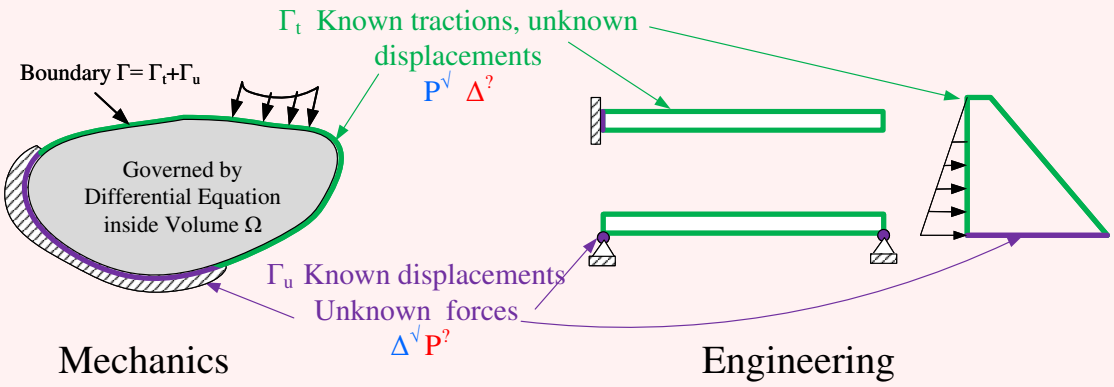
在 单元 水平上, 在 $p_{int}^{(e)}$ 是六分之六的内部力量序列, $\mathbf{k}^{(e)}$ 单元 刚度矩阵 在本地坐标系统中, $\boldsymbol{\delta}^{(e)}$ 是向量的节点转移在局部坐标系. 请注意, 此最后一行是通过首先识别总体坐标系中的转移而获得的, 然后由变换矩阵预增以获得局部坐标系中的转换。

11 值得注意的是, 在 EQ 中。44.1, 增長 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 有一个 Rank r 小于 n 當時 $\mathbf{K}_{tt}$ 有 $r = n$ (§L.3.1).

12 这个最后的过程类似于持续结束元素的压力恢复。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 44.1: 心脏的直接刚度法



- 全球 协调系统

$$\mathbf{K}^e = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{k}^e \boldsymbol{\Gamma}$$

$$\mathbf{K}^S = \sum_{e=1}^{e=nelem} \mathbf{K}^e$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_t^{\checkmark} \\ \mathbf{R}_u^{?} \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu} \\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu} \end{array}\right]}_{\text{Augmented Stiffness Matrix}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_t^{?} \\ \boldsymbol{\Delta}_u^{\checkmark} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{tt} = \mathbf{f}^{-1};\ \text{Reduced Stiffness Matrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \underbrace{(\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u)}_{\mathbf{P}'_t}$$

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$$

- 地方 协调系统

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)}\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$$

$$p_{int}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

注明效应 $\mathbf{P}_{el}$ 不包括在清晰度

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

44.3 差异化

44.3.1 无限制 vs 有限 自由度

13 此前, 我们已经标记了与无限 DOF 相关的全球 DOF (Γ_t) 只有, 然后我们解决了流离失所的转变。**减少** 结构 刚度矩阵。

14 在 直接刚度法 一般化中,Eq。44.1 我们将继续标记 DOF。Γ_t 首先, 然后, 这些 Γ_u 下一篇 (从桌子 40.2 , 这些将符合 Neuman/Essential 和 Dirichlet/Natural 边界条件。).

15 这将导致 **增加** 刚度矩阵. 编号顺序在图中显示 44.1 它是自我解释的。

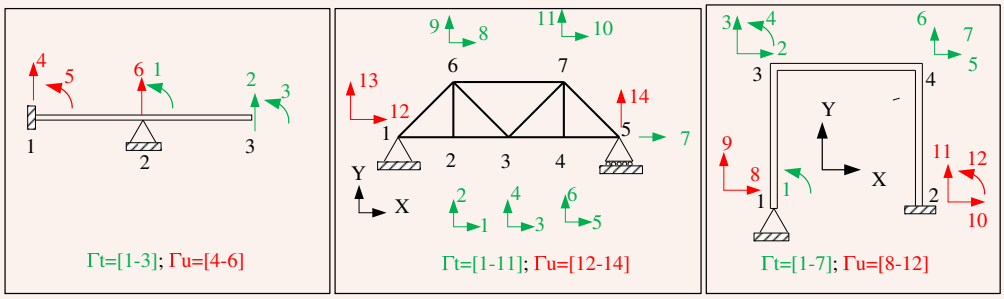


图 44.1: 无限和有限的 DOF

44.3.2 结构性差异化

16 直接刚度法的应用依赖于结构的适当数学差异化, 表 44.1.

表 44.1: 结构的差异化

诺德	协调	边界条件	荷载
成员	连接	类型	荷载
单元 类型	地质特征	弹性属性	

17 结构的数字模型需要我们能够数学地描述它: 地质, 边界条件, 连接性, 元素属性和负载。

18 这最好是通过图中显示的例子来解释。44.2.

19 用户必须在下方定义数据。“黄金” 盒子 更具体的

单元 数据 定义第一和第二节点 (命令无关) 由 单元; 组号连接。

Nodal 数据 每个节点的定义:A) 二或三座坐标在总体坐标系;b) 对每个相应的 DOF 的限制条件 (提到盒子 40.2). 0 是免费的 Dof, 1 是相应 位移 的已知。(不一定是零).

组数据 对于每个组数, 定义了弹性属性和分区属性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

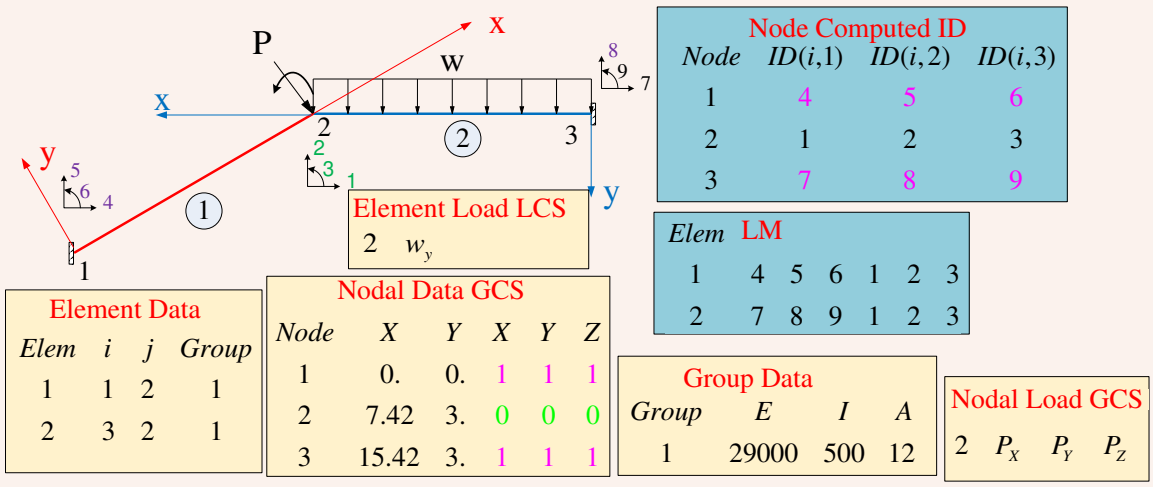


图 44.2: 结构性歧视的例子

诺达尔 荷载 将列出一个点荷载的节点, 沿着其全球道夫。

单元 荷载 列出 单元 与 荷载 沿着会员。

44.4 计算机实施

20 以完全分辨的结构, 并符合通用直接刚度法 (§44.2) 计算机程序从这里拿出来。

21 A MATLAB® 方法的实施 (2D 框架) 被授予在 §I.2.7.

44.4.1 边界条件, [id] 矩阵

22 由于边界条件的限制, 整体结构数量 **活跃** 自由度 (无限制的) 将低于节点时间的数量, 每个节点的 自由度 的数量。

23 要获得一个特定的节点的全球自由度, 我们需要定义一个 [ID] 矩阵 如下:

ID 有尺寸 $l \times k$ 哪里 l 是每个节点的 自由度 的数字, 并且 k 是数字的节点).

ID 矩阵 以零开始。

1. 在入口阶段阅读 ID (**伊多**, **内德**) 每個 Node 的 自由度如这样:

$$\texttt{ID}(\texttt{idof},\texttt{inod}) = \begin{cases} 0 & \text{if unrestrained d.o.f.} \\ 1 & \text{if restrained d.o.f.} \end{cases}$$

2. 经过所有节点边界条件的阅读, 增加等级数字

   (a) 首先是活跃的 DOF。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(b) 然后, 另一方 (限制) dof, 从 1 开始 (或替代, 在最后一个无限的 DOF 之后继续增加).

请注意, dof 的总数将相当于节点的数量。时间: Dof/Node 的数量 **尼古拉**.

3. 最大的 **积极的** 全球 自由度 号将是同等的 **尼克** (方程式数量) 四方的尺寸是什么矩阵将不得不分解。

24 例如, 对于框架顯示在 图 44.3:

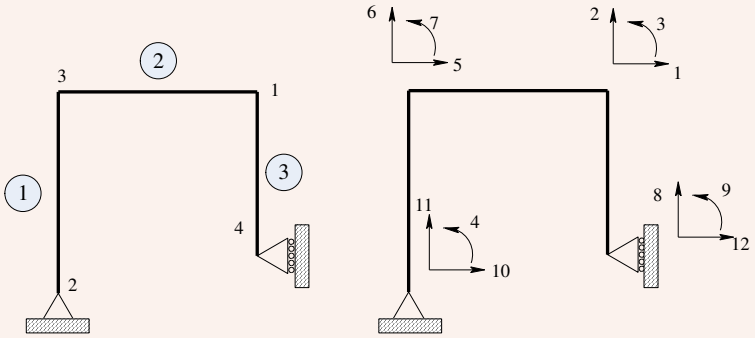


图 44.3: 例子为 [**ID**] 矩阵 定义

1. 原始的 **ID** 矩阵 會是

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 在我们将全球 DOF 分配 (或 **平衡数**我们会有:

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -11 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

44.4.2 LM 向量

25 **LM 地點 矩阵** 是每个成员的本地和全球道夫之间的地图。对于在 图 中显示的结构 44.3 我们会有:

$$\mathbf{LM} = \begin{bmatrix} -10 & -11 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

26 和 **LM** 符合 图 中显示的结构的矩阵 44.1 顯示在 图 44.4.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

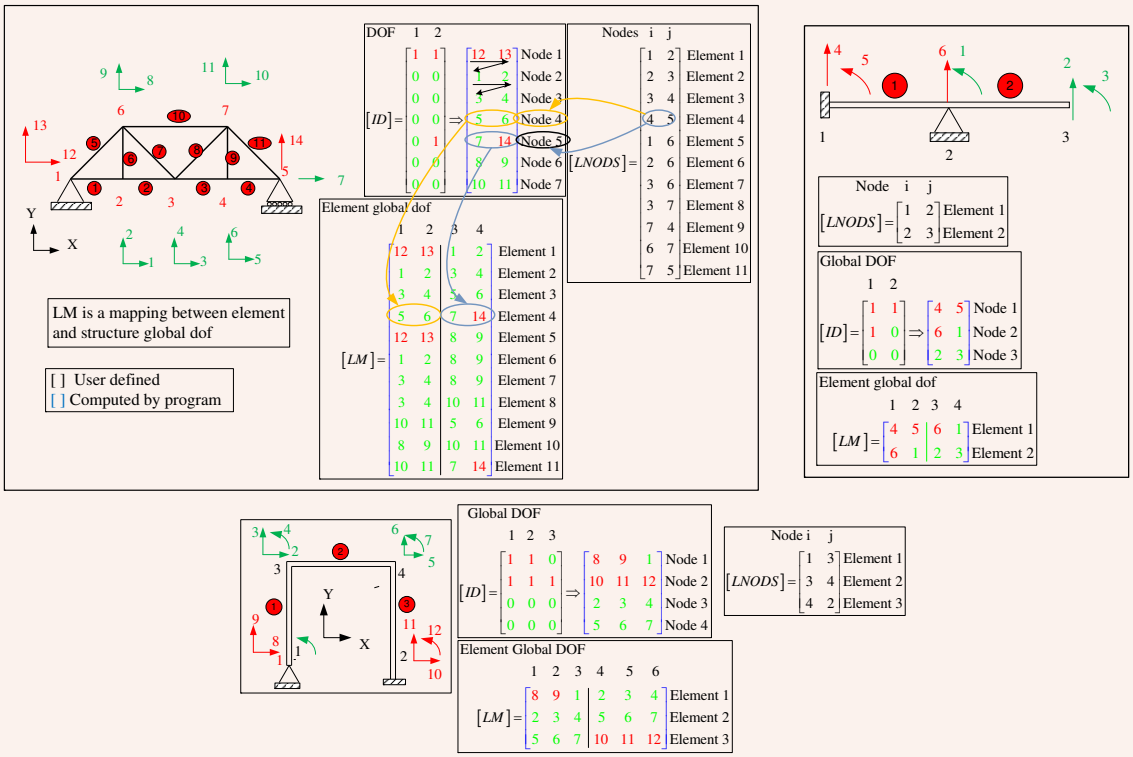


图 44.4: 例子 **LM** 任命

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

44.4.3 全球 刚度矩阵 的集合

27 增加的 (或全球) 刚度矩阵 **K** 是下一个从所有个别的 单元 硬度矩阵在 总体坐标系 中集成 ($\mathbf{K}^{(e)}$). 本节将描述一个常用的会议程序, 而替代一项 (合并转型) 将被覆盖在 §46.5.

28 对于每一个 K_{ij} 我们将添加所有可以连接自由程度的元素的贡献。i 到 自由度 j. 这将通过 **LM** 矩阵.

29 首先, 我们应该启动全球刚度矩阵。$\mathbf{K}^S = \mathbf{0}$, 然后旋转整个单元, 并使用通过 **LM** 矩阵.

$$K_{ij}^{(e)} \rightarrow K_{st}^{(S)} \quad \text{and} \quad \begin{cases} s = LM(e,i) \\ t = LM(e,j) \end{cases}$$

30 图 44.5 显示 框架 的集成过程, 显示在 图 44.2

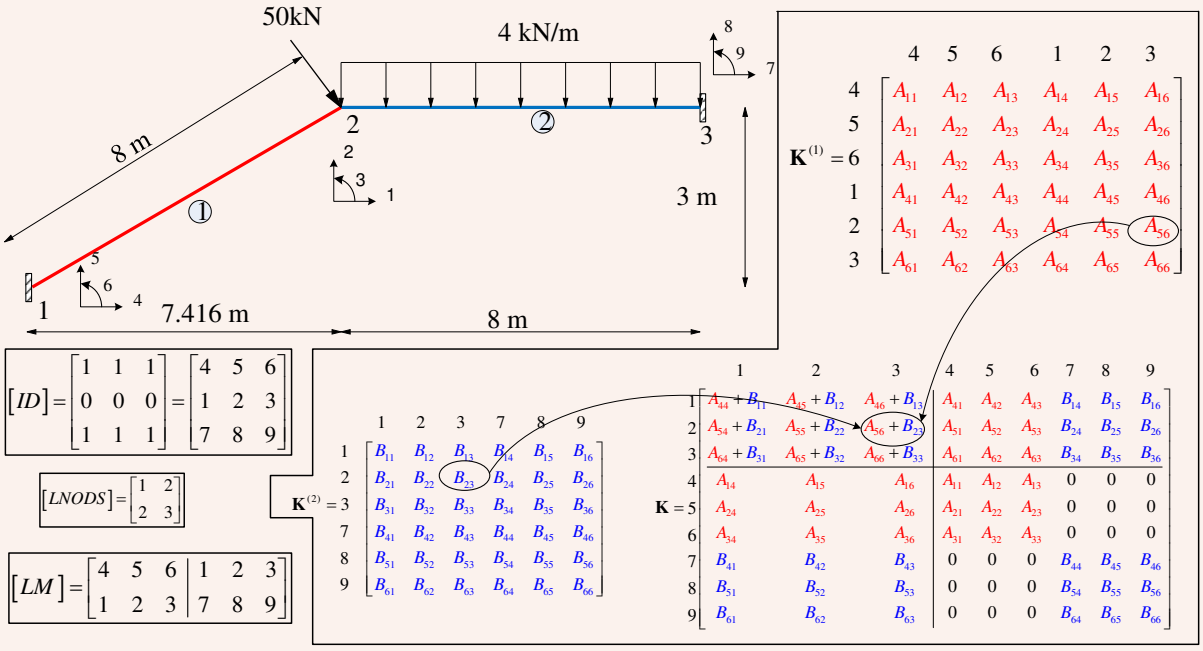


图 44.5: 全球 刚度矩阵 过程的集合

31 注意 值得注意的是, 有一个替代方法来组合全球刚度矩阵, 一个基于一个 **统一转型方法**, §46.5.

44.4.4 步骤程序

32 直接刚度法的算法是逐步描述的:

初步

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 阅读结构数学模型 (类型、坐标、连接性、跨部分和材料属性、负载)
2. 确定节点的数量 (尼奥德), 号码 单元 (无奈) 最多 DOF/NOD (`Ndofpn`), 尺寸的 K_{tt} (大小), 总数 DOF (天下) 更新 **ID** 并确定 **LM** 矩阵

Analysis, Global

1. 每個 单元 的確定
   (a) 向量 **LM** 地点单元地图到全球结构自由度。
   (b) 单元 刚度矩阵 $[\mathbf{k}^{(e)}]$
   (c) 变换矩阵 $[\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$
   (d) 单元 刚度矩阵 在全球坐标 $[\mathbf{K}^{(e)}] = [\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]^T[\mathbf{k}^{(e)}][\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]$
2. 收集增長 刚度矩阵 $[\mathbf{K}^{(S)}] = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{k}^{(e)}$ 无限和有限的自由度。
3. 提取 $[\mathbf{K}_{tt}]$ 从 $[\mathbf{K}^{(S)}]$ 和 Invert。
4. 荷载 向量
   (a) 各元素在本地坐标系统中计算节点等级力量 vectors $\mathbf{p}_{El}^{(e)}$ 在总体坐标系中 $\mathbf{P}_{El}^{(e)} = \boldsymbol{\Gamma}^{(e)^T}\mathbf{p}_{El}^{(e)}$
   (b) 将 节点 荷载 向量 集成, 以包含 节点 负载和 节点 等效 力量 (笔记 **P** 是为了结构). $\mathbf{P}_t = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{P}_{El}^{(e)} + \mathbf{P}_{nodes}(LM^{(e)}(i)); \forall LM^{(e)} \le \text{size}(K_{tt})$
5. 背部替代和获得节点转移的全球协调系统 , $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}_t$
6. 提取 $\mathbf{K}_{ut}$
7. 定义 $\mathbf{P}_R$ 它将存储

$$\mathbf{P}_R(\text{1:ndof-sizet}) = \sum_{e=1}^{nelem} \Gamma^{(e)}\mathbf{p}_{el}^{(e)}; \forall LM^{(e)} > \text{size}(K_{tt})$$

   这些是转化为全球协调系统的元素负载, 这些自由度已固定。因此, 它们会影响反力。
8. 解决反應, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_t + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u - \mathbf{P}_R$

Force Recovery, local (内部力量): 每個 单元

1. 从全球 nodal displacements 中确定 单元 节点转移在 总体坐标系
2. 将其节点位移从全球转化为本地坐标 $\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [\boldsymbol{\Gamma}^{(e)}]\boldsymbol{\Delta}^{(e)}$.
3. 确定内部力量 $\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)} - \mathbf{p}_{El}^{(e)}$.

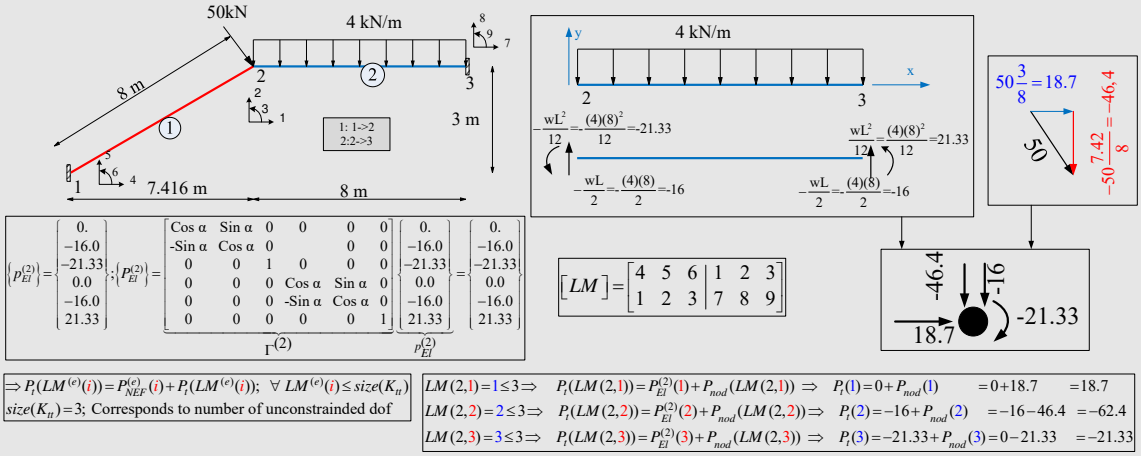
44.5 例子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

44.5.1 例题 44.1: 框架

我们重新审查了以前研究的简单框架, 并通过完整的步骤解决方案。中间值将是必不可少的帮助用户解密自己的代码 (和 A MATLAB® 这个问题的解决方案在 §I.2.6).

44.5.1.1 初步



$$\left\{p_{El}^{(2)}\right\}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix};\left\{P_{El}^{(2)}\right\}=\underbrace{\begin{bmatrix}\text{Cos }\alpha & \text{Sin }\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ \text{-Sin }\alpha & \text{Cos }\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \text{Cos }\alpha & \text{Sin }\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & \text{-Sin }\alpha & \text{Cos }\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\Gamma^{(2)}}\underbrace{\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}}_{p_{El}^{(2)}}=\begin{Bmatrix}0.\\-16.0\\-21.33\\0.0\\-16.0\\21.33\end{Bmatrix}$$

$$[LM]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&5&6&1&2&3\\1&2&3&7&8&9\end{array}\right]$$

$\Rightarrow P_t(LM^{(e)}(i))=P_{NEF}^{(e)}(i)+P_t(LM^{(e)}(i));\ \forall\ LM^{(e)}(i)\le size(K_u)$
$size(K_u)=3$; Corresponds to number of unconstrained dof

$$\begin{aligned}
&LM(2,1)=1\le 3\Rightarrow\quad P_t(LM(2,1))=P_{El}^{(2)}(1)+P_{nod}(LM(2,1))\ \Rightarrow\quad P_t(1)=0+P_{nod}(1)\quad =0+18.7\quad =18.7\\
&LM(2,2)=2\le 3\Rightarrow\quad P_t(LM(2,2))=P_{El}^{(2)}(2)+P_{nod}(LM(2,2))\Rightarrow\quad P_t(2)=-16+P_{nod}(2)\quad =-16-46.4\quad =-62.4\\
&LM(2,3)=3\le 3\Rightarrow\quad P_t(LM(2,3))=P_{El}^{(2)}(3)+P_{nod}(LM(2,3))\ \Rightarrow\quad P_t(3)=-21.33+P_{nod}(3)=0-21.33\quad =-21.33
\end{aligned}$$

密度矩阵 $\mathbf{k}^{(e)}$

$$k_1=k_2=10^5\begin{bmatrix}1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0\\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375\\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000\\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0\\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375\\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000\end{bmatrix}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

转型矩阵 Γ

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

密度矩阵 $\mathbf{K}^{(e)} \leftarrow \mathbf{k}^{(e)}$

$$[K_1] = [\Gamma_1]^T [k_1] [\Gamma_1] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0.0141 & -0.0348 & 0.100 \\ -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & 1.2904 & 0.5182 & 0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0.5182 & 0.2190 & -0.0348 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.100 & 0.0141 & -0.0348 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [\Gamma_2]^T [k_2] [\Gamma_2] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

全球刚度矩阵大会

$$[K_{Aug}] = \begin{bmatrix} K_{tt} & K_{tu} \\ K_{ut} & K_{uu} \end{bmatrix}$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & 0.0141 & -1.5000 & 0 & 0 \\ -0.5182 & -0.2190 & -0.0348 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.2904 & 0.5182 & -0.0141 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5182 & 0.2190 & 0.0348 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0141 & 0.0348 & 0.2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

强度 vector

$$p_{el}{}^{(1)(2)} = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{array} \right\}$$

$$P_{el}{}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{array} \right\}}_{p_{El}} = \left\{ \begin{array}{c} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \\ 0. \\ -16.0 \\ 21.33 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 18.75 \\ -46.35 \\ 0.0 \end{array} \right\}}_{P_{Nodes}} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0. \\ -16.0 \\ -21.33 \end{array} \right\}}_{P_{El}} = \left\{ \begin{array}{c} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{array} \right\}$$

转移

$$\{\Delta\} = [K_{tt}]^{-1} \{P\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{array} \right\} = 10^5 \left[\begin{array}{ccc} 2.7904 & 0.5182 & 0.0141 \\ 0.5182 & 0.2284 & 0.0027 \\ 0.0141 & 0.0027 & 0.400 \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{array} \right\}$$

$$= 10^{-4} \left[\begin{array}{ccc} 0.0619 & -0.1405 & -0.0012 \\ -0.1405 & 0.7567 & -0.0002 \\ -0.0012 & -0.0002 & 0.2500 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 18.75 \\ -62.35 \\ -21.33 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{array} \right\}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

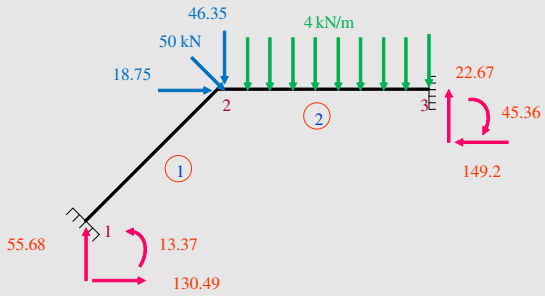
反应

$$\{\mathbf{R}\} = [\mathbf{K}_{ut}]\{\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} -1.2904 & -0.5182 & -0.0141 \\ -0.5182 & -0.2190 & 0.0348 \\ 0.0141 & -0.0348 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EI}^{(2)}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 130.49 \\ 55.676 \\ 13.374 \\ -149.24 \\ 22.673 \\ -45.35 \end{Bmatrix}$$

检查



$$\Sigma F_x = 130.49 - 149.2 + 18.75 = 0.04\checkmark$$

$$\Sigma F_y = 55.68 + 22.67 - 46.35 - (4)(8) = 0.0\checkmark$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

地方移居 $\delta \leftarrow \Delta$

$$[\delta_1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9270 & 0.3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3750 & 0.9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9270 & 0.3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3750 & 0.9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Displ.}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0009 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

$$[\delta_2] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Transformation Matrix}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Global Disp}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

内部力量

$$[p_1] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix, Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp.}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}}_{P_{El}^{(1)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 141.85 \\ 2.676 \\ 13.37 \\ -141.85 \\ -2.67 \\ 8.03 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

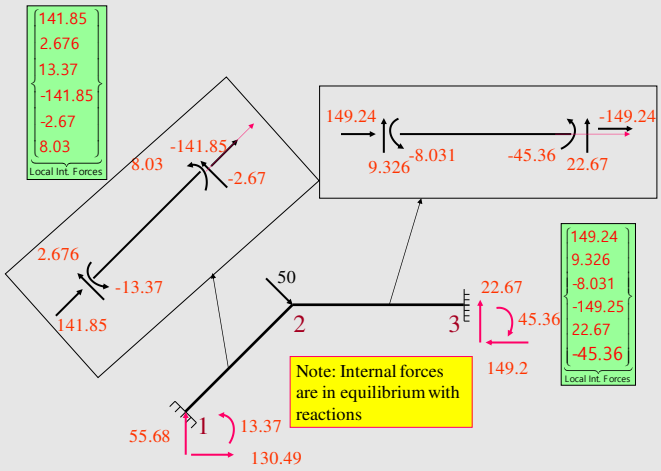
$$[p_2] = 10^5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5000 & 0 & 0 & -1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0094 & 0.0375 & 0 & -0.0094 & 0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.2000 & 0 & -0.0375 & 0.1000 \\ -1.5000 & 0 & 0 & 1.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0094 & -0.375 & 0 & 0.0094 & -0.0375 \\ 0 & 0.0375 & 0.1000 & 0 & -0.0375 & 0.2000 \end{bmatrix}}_{\text{Element Stiffness Matrix Local Coord.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0010 \\ -0.0050 \\ -0.0005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Disp}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -16.00 \\ -21.33 \\ 0.00 \\ -16.00 \\ 21.33 \end{Bmatrix}}_{P_{EL}^{(2)}}$$

$$= \underbrace{\begin{Bmatrix} 149.24 \\ 9.326 \\ -8.031 \\ -149.25 \\ 22.67 \\ -45.36 \end{Bmatrix}}_{\text{Local Int. Forces}}$$

审阅稿

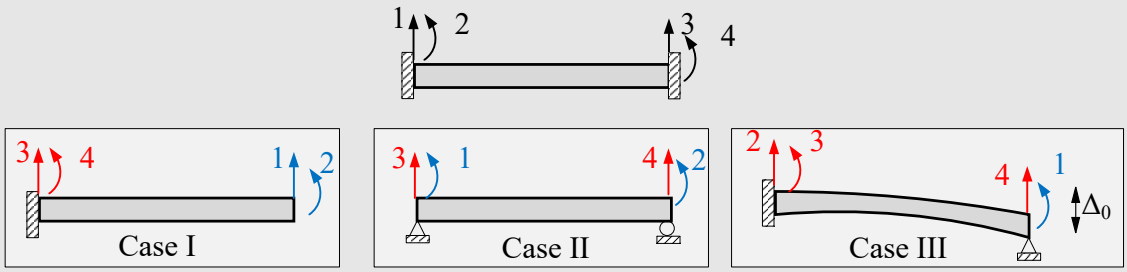
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

最终自由体图



例题 44.2: 梁

这个例子不仅强调了直接刚度法, 而且还展示了如何在一个小型计算机代码中存储内部数据。



一个射线元素的完整密度矩阵是由

$$[\mathbf{k}^e] = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

正如我们所知道的那样, 这个矩阵是单一的, 它有一个排名 2 和顺序 4 (因为它也体现了 2 个硬体动作). 但是, 可以通过上述三种情况来分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

I Cantilevered 梁/点 荷载

1. 和 **单元** 刚度矩阵 是

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & -4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. 增加的 **结构** 刚度矩阵 已收集

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

3. 全球 矩阵 可以重写为

$$\left\{\begin{array}{c} -P\checkmark \\ 0\checkmark \\ \hline R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 12EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Delta_1? \\ \theta_2? \\ \hline \Delta_3\checkmark \\ \theta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ 被逆转 (或实际上分裂) 被保留在相同的全球 矩阵

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right]$$

5. 接下来我们计算相当于 荷载, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$ 和过写 $\mathbf{P}_t$ 由 $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} \\ L^2/2EI & L/EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} -P \\ 0 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-P} \\ \boxed{0} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

6. 现在我们解决了位移 $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$, and overwrite $\mathbf{P}_t$ by $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\left\{\begin{array}{c}\boxed{\Delta_1}\\ \boxed{\theta_2}\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{L^2/2EI} & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ \boxed{L^2/2EI} & \boxed{L/EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\boxed{-P}\\ \boxed{0}\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right\} r$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\boxed{-PL^3/3EI}\\ \boxed{-PL^2/2EI}\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right\}$$

7. 最后, 我们解决了反应。$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$ 和过写 $\boldsymbol{\Delta}_u$ 由 $\mathbf{R}_u$

$$\left\{\begin{array}{c}-PL^3/3EI\\ -PL^2/2EI\\ \hline \boxed{R_3}\\ \boxed{R_4}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & L^2/2EI & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ L^2/2EI & L/EI & 6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\boxed{-PL^3/3EI}\\ \boxed{-PL^2/2EI}\\ \hline \boxed{0}\\ \boxed{0}\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c}-PL^3/3EI\\ -PL^2/2EI\\ \hline \boxed{P}\\ \boxed{PL}\end{array}\right\}$$

简单支持 梁/End Moment

1. 和 **单元** 刚度矩阵 是

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -3 & 1 & -4 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{array}\right] \end{array}$$

2. 增加的 **结构** 刚度矩阵 已收集

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & -4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \end{array}$$

3. 全球 刚度矩阵 可以重写为

$$\left\{\begin{array}{c}0\checkmark\\ M\checkmark\\ \hline \\ R_3?\\ R_4?\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4EI/L & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\theta_1?\\ \theta_2?\\ \hline \Delta_3\checkmark\\ \Delta_4\checkmark\end{array}\right\}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

4. $\mathbf{K}_{tt}$ 被逆转

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. 我们计算相当于 荷载, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$ 和过写 $\mathbf{P}_t$ 由 $\mathbf{P}'_t$

$$\mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u = \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ -L/6EI & L/3EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 0 \\ M \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

6. 解散的分离, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$ 和过写 $\mathbf{P}_t$ 由 $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\theta_1} \\ \boxed{\theta_2} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{L^3/3EI} & \boxed{-L/6EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \boxed{-L/6EI} & \boxed{L/3EI} & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

7. 解决反應, $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$ 和过写 $\boldsymbol{\Delta}_u$ 由 $\mathbf{R}_u$

$$\left\{\begin{array}{c} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{R_1} \\ \boxed{R_2} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L^3/3EI & -L/6EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ -L/6EI & L/3EI & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 \\ \hline \boxed{6EI/L^2} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{-12EI/L^3} \\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{12EI/L^3} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \boxed{-ML/6EI} \\ \boxed{ML/3EI} \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} -ML/6EI \\ ML/3EI \\ \hline \boxed{M/L} \\ \boxed{-M/L} \end{array}\right\}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

III Cantilevered 梁 / 初始 位移 和已知的转移

1. 和 单元 刚度矩阵 是

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & -3 & -4 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{array}$$

2. 增加的 结构 刚度矩阵 已收集

$$\mathbf{K}^{(S)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. 全球 矩阵 可以重写为

$$\left\{\begin{array}{c} M\checkmark \\ \hline R_2? \\ R_3? \\ R_4? \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|ccc} 4EI/L & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1? \\ \hline \Delta_2\checkmark \\ \theta_3\checkmark \\ \Delta_4\checkmark \end{array}\right\}$$

4. $\mathbf{K}_{tt}$ 被逆转 (或实际上分裂) 被保留在 same global matrix

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right]$$

5. 接下来我们计算相当于 荷载, $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u$ 和过写 $\mathbf{P}_t$ 由 $\mathbf{P}'_t$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tu}\boldsymbol{\Delta}_u &= \left\{\begin{array}{c} \boxed{M} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} - \left[\begin{array}{c|ccc} L/4EI & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{2EI/L} & \boxed{-6EI/L^2} \\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 \\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \hline \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\Delta^0} \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{c} \boxed{M + 6EI\Delta^0/L^2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \end{aligned}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

6. 现在我们解决了流离失所, $\boldsymbol{\Delta}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1}\mathbf{P}'_t$ 和过写 $\mathbf{P}_t$ 由 $\boldsymbol{\Delta}_t$

$$\left\{\begin{array}{c}\boxed{\theta_1}\\ \hline 0\\ 0\\ \Delta^0\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|ccc}\boxed{L/4EI} & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2\\ \hline 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3\\ 2EI/L & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2\\ -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\boxed{M+6EI\Delta^0/L^2}\\ \hline 0\\ 0\\ \Delta^0\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\boxed{ML/4EI+3\Delta^0/2L}\\ \hline 0\\ 0\\ \Delta^0\end{array}\right\}$$

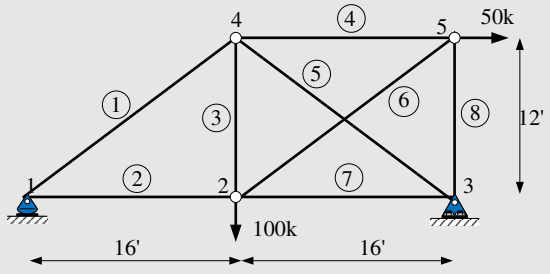
7. 最后, 我们解决了反应。 $\mathbf{R}_u = \mathbf{K}_{ut}\boldsymbol{\Delta}_{tt} + \mathbf{K}_{uu}\boldsymbol{\Delta}_u$ 和过写 $\boldsymbol{\Delta}_u$ 由 $\mathbf{R}_u$

$$\left\{\begin{array}{c}ML/4EI+3\Delta^0/2L\\ \hline \boxed{R_2}\\ \boxed{R_3}\\ \boxed{R_4}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc|cc} L/4EI & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2\\ \boxed{6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3}\\ \boxed{2EI/L} & \boxed{6EI/L^2} & \boxed{4EI/L} & \boxed{-6EI/L^2}\\ \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{-12EI/L^3} & \boxed{-6EI/L^2} & \boxed{12EI/L^3}\end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{c}\boxed{ML/4EI+3\Delta^0/2L}\\ \hline \boxed{0}\\ \boxed{0}\\ \boxed{\Delta^0}\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{c}ML/4EI+3\Delta^0/2L\\ \hline \boxed{3M/2L-3EI\Delta^0/L^3}\\ \boxed{M/2-3EI\Delta^0/L^2}\\ \boxed{-3M/2L+3EI\Delta^0/L^3}\end{array}\right\}$$

44.5.2 例题 44.3: 桁架



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 自由度 和 **LM** (连接性: 从较低到更高的节点数量)

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \\ 9 & 10 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{LM} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

2. 单元 刚度矩阵

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

$c = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}$; $s = \sin\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$

3. 替代

单元 1: $L = 20^{'}, c = \frac{16-0}{20} = 0.8, s = \frac{12-0}{20} = 0.6, \frac{EA}{L} = \frac{(四万克里)(10in^2)}{20^{'}} = 15,000\ K/F$

$$[K_1] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9,600 & 7200 & -9,600 & -7,200 \\ 7,200 & 5,400 & -7,200 & -5,400 \\ -9,600 & -7,200 & 9,600 & 7,200 \\ -7,200 & -5,400 & 7,200 & 5,400 \end{bmatrix} \end{array}$$

单元 2: $L = 16^{'}, c = 1, s = 0, \frac{EA}{L} = 18,750\ \mathrm{k/ft}.$

$$[K_2] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 18,750 & 0 & -18,750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18,750 & 0 & 18,750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

单元 3 $L = 12^{'}, c = 0, s = 1, \frac{EA}{L} = 25,000\ k/ft$

$$[K_3] = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,000 & 0 & -25,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 \end{bmatrix} \end{array}$$

单元 8 $L = 12^{'}, c = 0, s = 1, \frac{EA}{L} = 25,000\ k/ft$

$$[K_8] = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 9 & 10 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25,000 & 0 & -25,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 \end{bmatrix} \end{array}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

4. 将全球 刚度矩阵 集成到 k/ft 笔记中, 我们不是集成增長的 刚度矩阵, 而是其子矩阵 $[\mathbf{K}_{tt}]$.
5. 转换为 k/in 并简化

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2,362.5 & -1,562.5 & 0.00 & -800 & -600 & 0 & 0 \\ & 3,925.0 & 600 & 0 & 0 & -800 & -600 \\ & & 2,533.33 & 0.00 & -2,083.33 & -600 & -450 \\ & & & 3,162.5 & 0 & -1,562.5 & 0 \\ & \text{SYMMETRIC} & & & 2,983.33 & 0 & 0 \\ & & & & & 2,362.5 & 600 \\ & & & & & & 2,533.33 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{tt}} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_t}$$

6. 转换 刚度矩阵 并解决移动

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0223 \text{ in.} \\ 0.00433 \text{ in.} \\ -0.116 \text{ in.} \\ -0.0102 \text{ in.} \\ -0.0856 \text{ in.} \\ -0.00919 \text{ in.} \\ -0.0174 \text{ in.} \end{Bmatrix}$$

7. 解决成員 内部力量 (在这种情况下, 轴力) 在地方协调系统

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{AE}{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}}\underbrace{\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}}\underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\Delta}}}_{\boldsymbol{\delta}}$$

$$= \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

单元 1:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^1 = (15,000 \text{ kpf})\left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft.}}{\text{in.}}\right)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & -0.6 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0223 \\ 0.00 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 52.1 \text{ kip} \\ -52.1 \text{ kip} \end{Bmatrix} \text{ Compression}$$

单元 2:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^2 = 18,750 \text{ kpf}\left(\frac{1}{12}\frac{\text{ft}}{\text{in.}}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0233 \\ 0.00 \\ 0.00433 \\ -0.116 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -43.2 \text{ kip} \\ 43.2 \text{ kip} \end{Bmatrix} \text{ Tension}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

单元 3:

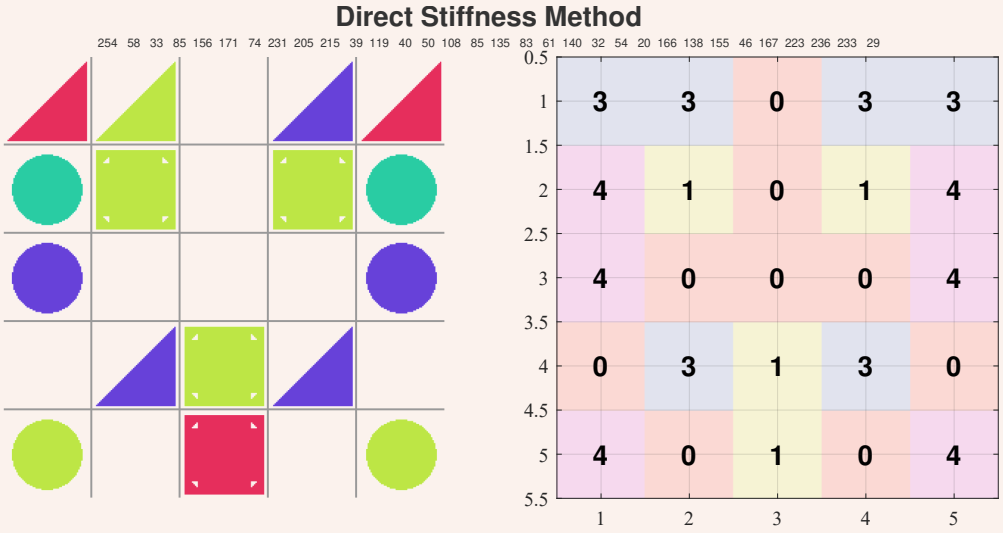
$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\}^3 = 25,000 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12} \frac{\text{ft.}}{\text{in.}} \right) \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0.00433 \\ -0.116 \\ -0.0102 \\ -0.0856 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -63.3 \text{ kip} \\ 63.3 \text{ kip} \end{array} \right\} \text{ Tension}$$

单元 4:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\}^4 = 18,750 \text{ kpf} \left(\frac{1}{12} \frac{\text{ft.}}{\text{in.}} \right) \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} -0.0102 \\ -0.0856 \\ -0.00919 \\ -0.0174 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -1.58 \text{ kip} \\ 1.58 \text{ kip} \end{array} \right\} \text{ Tension}$$



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

45 刚度矩阵的数学特性; 计算问题

摘要

刚度矩阵 不仅是移动和力量之间的地图; 它还包含了大量的额外 "甲基数据" 可以告知分析师解决方案的准确性。我们将审查这些数据, 并引入条件号的概念。首先, 我们将详细研究上述地图, 并在 *2D* 中视觉输入和输出 *vector* 之间的关系。这将导致模特可以采取的措施, 以尽量减少全球刚度矩阵的不良条件。接下来, 关于矩阵的分解对逆转的一个简短笔记。最后, 我们将讨论近最优化的节点编号, 因为在确定计算时间的减少至关重要。$\mathbf{K}^{-1}$. 虽然这些概念对基本理解并不重要, 但它们对一个良好的结构工程师有用。

45.1 低调的矩阵 1362
45.1.1 相同价值 1362
45.1.2 条件号 1366
45.1.3 无条件的硬度矩阵 1367
45.2 数值 评论 1371
45.2.1 逆转 vs 分裂 1371
45.2.2 诺达数 1372

本章是基于 Gavin, 2012, 其清晰、透明的处理数学特性密度矩阵, 作者非常感激。展览已延长、重新安排, 并数值例子与 Gavin 教授起源。

45.1 低调的矩阵

45.1.1 相同价值

1 刚度矩阵的 $[k]$ (或 $[K]$) 可以被视为一个 **地图 位移 向量 u 到一个力量 向量 p**. 没有理由将这些 vectors 调整, 图 45.1a

2 例如, 为了

$$\underbrace{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}^{truss}}\underbrace{\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\frac{AE}{L}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

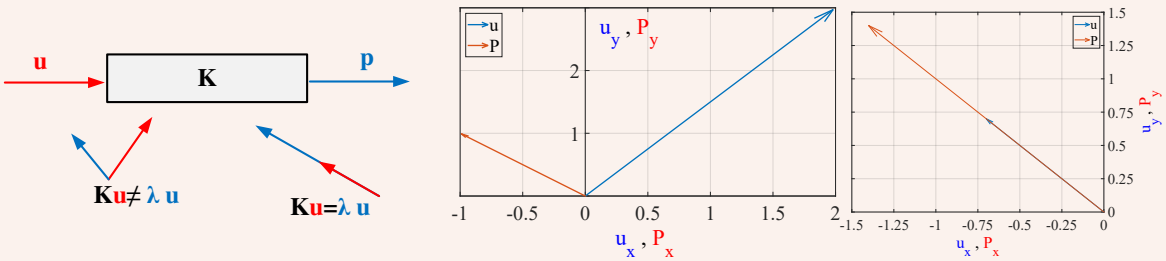
和 **u** 和 **p** 维克特显示在 图 45.1b (假设 $AE/L = 1$). 另一方面, 因为

$$\mathbf{ku} = \lambda\mathbf{u}$$

特征向量为 $\begin{matrix} -0.707 & 0.707 \end{matrix}$；此时 **u** 与 **p** 共线，如图 45.1c 所示。

3 该地图的地质内容可以通过考虑什么事发生在 A **完整集** 位移 vectors 同时, 而不是跟踪一个单一的向量。假设我们收集所有可能的转移 vector **u** 单位长度, 伊。每個 **u** 满足

$$u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2 = 1.$$



(a) 地图 (b) $\mathbf{Ku} \neq \lambda \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{Ku} = \lambda \mathbf{u}$

图 45.1: 地图转移到力量

為 $N = 2$, 这些 vector 的提示跟踪单位循环; 一般 N 他们跟踪单位的超级空间。應用 $\mathbf{K}$ 到每個 向量 在這個集 — 計算 $\mathbf{p} = \mathbf{Ku}$ 為每一个 - 产生一个新的集合的力量 vectors。主要的地质事实是: **一个单元范围的移动地图底下 K 到一个力量的精英。**

4 这个力量的半轴长度, 就是自我价值 λ_i 由 $\mathbf{K}$, 以及这些半轴的方向是相应的自助者。$\mathbf{u}_i$. 因为一个真实的交响式矩阵的特征是相互正角, 力量的主要轴是相互偏向的, 图 45.2. 在良好的面板的例子中 (a),

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.54, \quad \lambda_2 = 2.16, \quad \kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4.0,$$

兩個自我價值都是正確的, 而精液是非退化。注意到这 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{p} = \mathbf{Ku}$ do 不 一般而言, 在相同的方向 - 它们只会一致时 $\mathbf{u}$ 它与一个自己的维克特。

5 **什么是零或近零 特征值 的意思。** 如果一个 特征值 是正确的零, 则一半轴的力量 ellipsoid 到一个点崩溃: 为 $N = 2$ 直径变成一个线条部分。这意味着一个整个位移 vector 家族 - 所有这些与相应的 特征向量 相匹配 $\mathbf{u}_1$ ● 地图到**相同的** 功率 向量, 即零的 向量: $\mathbf{Ku}_1 = \mathbf{0}$. 结构可以通过变形模式 $\mathbf{u}_1$ 没有发展任何恢复力量: 这是一个 **坚固的身体运动** 或 A **机制**, 和 $\mathbf{K}$ 是独特的。相反, 对于某种强度 向量 没有独特的 位移当 $\mathbf{K}$ 是独一无二的 - 解决方案是不确定的。

面板 (b) 显示近单例案例

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0.02, \quad \lambda_2 = 2.42, \quad \kappa = 121.$$

最小的特征值不是零, 但与最大的相对较小。力量的脱落是如此延长, 它几乎是一个线条部分: 两个非常不同的 位移 vectors $\mathbf{u}$ 几乎产生相同的力量向量 $\mathbf{p}$. 数值的结果是计算解决方案 $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ 不信任 - 小错误 $\mathbf{p}$ (从旋转或荷载模型) 造成重大错误 $\mathbf{u}$.

6 **积极的确定性和结构稳定性。** 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 是 **积极定义** 如果和只有如果所有其自身价值是严格积极的:

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{Ku} > 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_i > 0 \quad \forall\, i.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

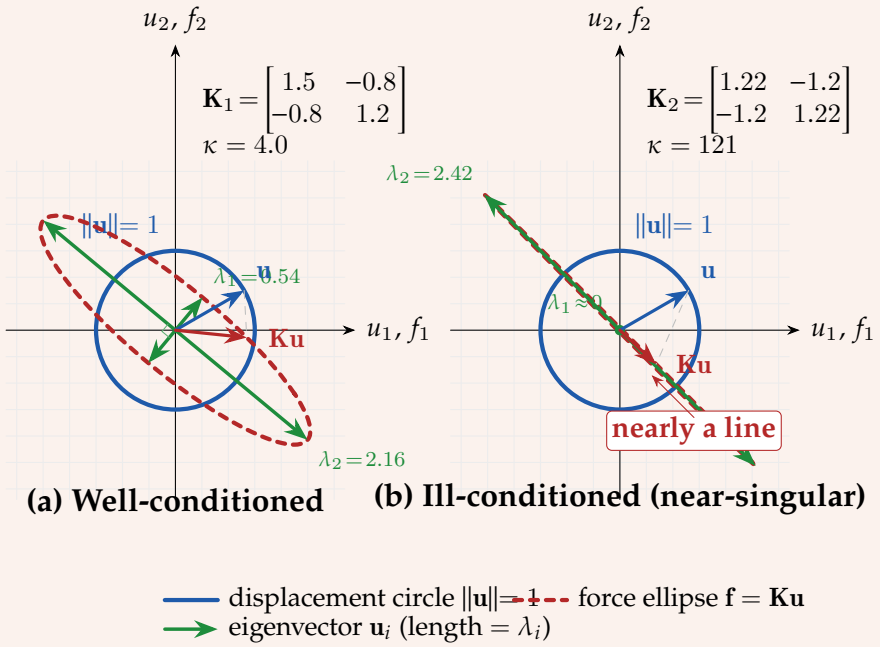


图 45.2: 将一个单位的位移循环地图化为力量排泄物, (Gavin, 2012).

左侧是内部应变能, 必须是积极的。对于任何不三重的稳定、被动结构变形。要证明相等性, 替代 $\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ 使用 $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = \sum u_j^2 > 0$:

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \lambda_i \, \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = \lambda_i \sum u_j^2.$$

因为 $\sum u_j^2 > 0$ 其积极性 U 需要 $\lambda_i > 0$. 零 特征值 信号一个硬体模式 (零 应变能); 一个负特征值 — 物理不可能的被动结构 — 这意味着一种释放能量的模式。除此之外, 由于行列式的 $\mathbf{K}$ 它是它的产物。自己的价值,

$$\det(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

正确定義的 矩阵 有 $\det(\mathbf{K}) > 0$ 是逆转的。而任何零特征值都会使矩阵成为奇异矩阵（$\det = 0$）。

7 **问题是矩阵。** 矩阵 被称为 **斯蒂夫** 在数值的意义上, 如果 $\kappa(\mathbf{K}) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$ 即使所有自己的值是严格积极的, 而矩阵是正式可逆转的。矩阵 硬不是单一的, 但它不受条件: 相似的尺寸的干扰 ε 在数据中 (管道, 协调) 可能产生相对尺寸的干扰 $\kappa\,\varepsilon$ 在解决方案。在 结构分析 中, 这种情况最常见的是当 单元以极其不同的密度共享一个节点 例如, 一灵活的泡沫框架到一个近固的列, 或使用人工强度大模型硬链接。条件数准确地定义了这种敏感性, 并且在下一个部分进一步讨论。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

45.1.1.1 自我价值的物理解释

8 存储在 单元 中的内部 应变能 可以从

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{up} = \frac{1}{2}\,\mathbf{uku} \tag{45.1}$$

现在, 如果我们考虑到一个系统, 其中荷载 $\{\mathbf{p}\}$ 适用于每个节点的比例与元素节点转移 $\{\mathbf{u}\}$ 因某个因素 λ 我们有: $\mathbf{ku} = \lambda\mathbf{u}$ 或 $(\mathbf{k} - \lambda[\mathbf{I}])\,\mathbf{u} = 0$

9 这就是定义一 **自己问题**将有这么多自己的价值 λ_i 如有 自由度 (或列在 $\mathbf{k}$). 每個 特征值 λ_i 相同的特征向量 $\mathbf{u}_i$.

10 Eigenvectors 是正常化的, 如下: $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^t = 1$ 这样

$$\mathbf{u}_i\mathbf{k}\mathbf{u}_i^t = \lambda_i$$

与 EQ 相比。45.1 显而易见的是

定义 45.1: 刚度矩阵 自己的值

刚度矩阵 特征值 λ_i 相当于在 单元 中存储的内部 应变能 的两倍。(正常化) 被定义为 $\mathbf{u}_i$.

11 在身体的硬动作中, 所有节点都分散。(或旋转) 相同的数量, 并且没有内部线条。因此, 在硬体运动中, 应变能 U (因此, 相应的 λ) 必须是零的。

12 应该有那么多零自我值, 因为有可能独立的固体身体动作 (即平衡的方程式数量). 因此, 对于两个维度的拉格兰元素, 应该有三个零本身值, 相当于两个翻译和一个旋转。

13 太少的零自我值是缺乏身体运动无压力能力的元素的一个迹象。

14 太多的零自值是指不必要的机制。(或失败).

15 当比较两个相同的元素的密度矩阵, 但基于不同的表达式, 其中一个具有最低压力能量。($\mathbf{trk} = \Sigma\lambda_i$) 是最好的。

定义 45.2: 单元 刚度矩阵 特性

一个 单元 刚度矩阵 将有:

命令: 相应于 自由度 的数字 (i.e 尺寸 矩阵).

排名: 相应于线性独立方程式的总数, 相当于顺序 minus 硬体运动的数量。(§L.3.1).

排序缺陷: 将相当于零本身值的总数, 低于排名。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

16 以后, 我们将从 Eq 中增加的强度表达。46.22:

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

哪里 $\mathcal{B}$ 是静态 (或 平衡) 矩阵, 与内部力量的外部节点力量相连; $\mathbf{d}$ 是 柔度矩阵, 和 $\mathbf{d}^{-1}$ 是其逆或减少的 刚度矩阵. 刚度矩阵显然是单一的, 因为第二个 "路由" 它是线性依赖的第一, 而减少的刚度矩阵, 这是逆转的柔度矩阵, 不是。因此, 将有那么多的零自值, 如大小。$\mathcal{B}$.

17 以图像方式, 我们考虑图 45.3: 相应的自我价值集是由

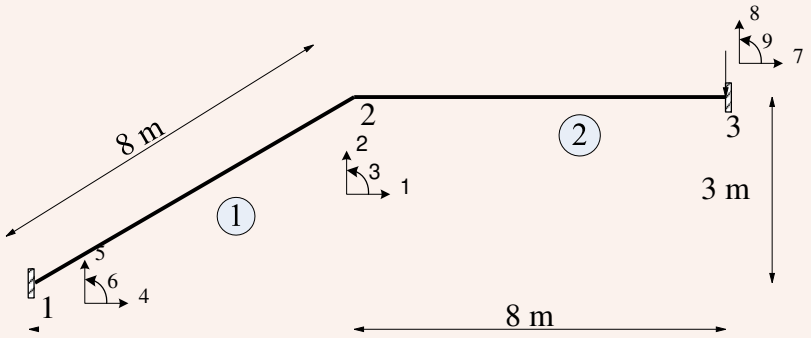


图 45.3: 特征值 测试问题

$$\begin{aligned}
\lambda_{Kaug} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0059 \quad 0.1274 \quad 0.2201 \quad 0.4821 \quad 1.6109 \quad 4.3911\ \rfloor \\
\lambda_{Ktt} &= 10^5 \lfloor\ 0.1275 \quad 0.3999 \quad 2.8913\ \rfloor \\
\lambda_{k} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001\ \rfloor \\
\lambda_{K^1} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3188 \quad 3.0001\ \rfloor \\
\lambda_{K^2} &= 10^5 \lfloor\ 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1000 \quad 0.3187 \quad 3.0000\ \rfloor
\end{aligned}$$

我们注意到, 结构的增强硬度矩阵和元素固态矩阵都实际上有三个零自值。另一方面, 单元的两者都有相同的自值与单元在局部坐标系中的父母。

45.1.2 条件号

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 45.3: 条件号码

矩阵的条件号 $\mathbf{K}$ 被定义为

$$\kappa(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|_2 \, \|\mathbf{K}^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

并应提起警告, 如果情况号被发现是大。条件数字测量解决问题的最大变化与问题中的小变化 (二、敏感性).

18 有两个主要原因导致一个大状态数量:

- 缺乏连接性: 附近的 单元 应该共享一个常见节点, 但连接到不同的节点是偶然的, 导致其中一个 单元 有不够的限制。
- 连接 单元 以极其不同的密度。

19 想要进一步进入数值算法的准确性和稳定性的人应该咨询优秀的。(可读的) 覆盖在 Higham, 2002.

20 以色列的目的, 让我们考虑一下 (结构性强度) 矩阵 [1] 兩個 自由度 結構

$$K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 = P_1$$
$$K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 = P_2$$

我们可以解决这些方程式。Δ_2 至于 Δ_1,

$$\Delta_2 = -\frac{K_{11}}{K_{12}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{12}}P_1$$
$$\Delta_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}\Delta_1 + \frac{1}{K_{22}}P_2$$

21 我们将考虑一个数值的例子, 以描述 κ

45.1.3 无条件的硬度矩阵

22 接下来, 我们试图通过连接一个粘贴器来构建一个恶劣的刚度矩阵 (轴) 成員到一個軟一, 图 45.4. 刚度矩阵的结构和其逆转是由

[1] 所有硬度矩阵都是由于麦克斯威尔的相互性相同的。$K_{ij} = K_{ji}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

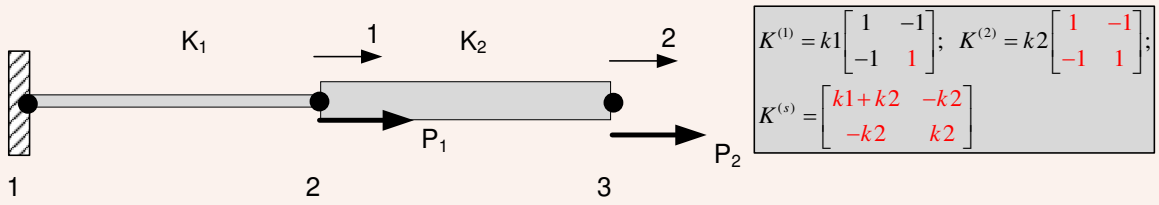


图 45.4: 会员组合导致不良条件 **K**

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}^{-1} &= \frac{1}{(K_1+K_2)K_2 - K_2^2}\begin{bmatrix} K_2 & K_2 \\ K_2 & K_1+K_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1K_2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

[23] 位移 向量 的解决方案是

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{K_1+K_2}{K_1K_2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

我们重新安排, 以获得两个方程式 $\Delta_2 = f(\Delta_1, 1/K_2)$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_1 = K_1\Delta_1 - P_2 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1K_2}\end{aligned}\right\} \Delta_2 = \Delta_1 + \frac{1}{K_2}P_2$$

同样

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2}{K_1} \Rightarrow P_2 = K_1\Delta_1 - P_1 \\ \Delta_2 &= \frac{P_1}{K_1} + \frac{P_2(K_1+K_2)}{K_1K_2}\end{aligned}\right\} \Delta_2 = \frac{K_1+K_2}{K_2}\Delta_1 - \frac{1}{K_2}P_1$$

或

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{K_1+K_2}{K_2} & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_2}\begin{Bmatrix} P_2 \\ P_1 \end{Bmatrix}$$

我们将注意到下方离线术语, 它将控制矩阵的状态号。

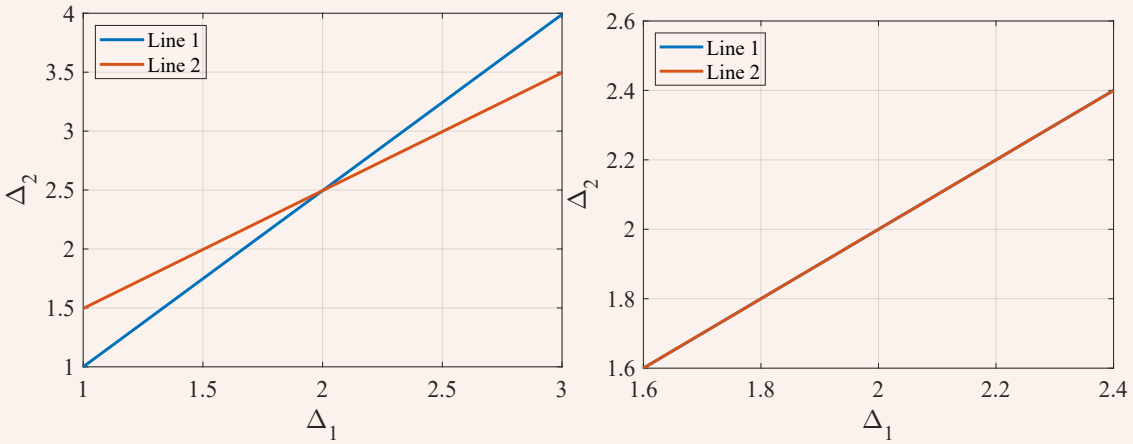
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

24 为了描述, 让我们考虑两个案例:

$$3\ \ K_1\ \ K_2\ \ =\ \ 1\ \ 2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.5000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_1\ \ K_2\ \ =\ \ 1\ \ 10,000 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 \\ 1.0001 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

并在 Δ_2 时绘制 Δ_1 关于 $P_1\ \ P_2\ =\ \ 1\ \ 1$ 的解，如图 45.5 所示。



(a) 1 2 (b) 1 10,000

图 45.5: 以 $K_1\ \ K_2$ 表示的病态矩阵

结果在表中总结 45.1.

表 45.1: 不良条件的矩阵的影响

	良好条件		疾病条件	
	K_1	K_2	K_1	K_2
2-5	1.0	2.0	1.0	10,000
2-5 (Δ_1, Δ_2)	(4.0000, 5.0000)		10^4(1.999999999999668, 2.000099999999668)	
(λ_1, λ_2)	(0.2247,-2.2247)		(0.000049998750062, -2.000049998750063)	
$\kappa(\mathbf{K})$	9.9		4.0e+04	

马特拉布 64 位 EPS=2.2204e-16

25 我们失去了非常大的条件数量的准确性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 45.4: 准确性和不良状态

通常是<矩阵被称为不良条件, 当条件号 ($\sim 1/(\texttt{EPS})$ 比机器的相互准确度更大, 例如: 10^7 典型的单一准确性 (32 位) 算法, 以及 10^{16} 64 位计算机。对于严重恶劣的矩阵, 使用单值分解技术。

26 不良条件的矩阵最好通过初步预约分解 (§L.3.4).

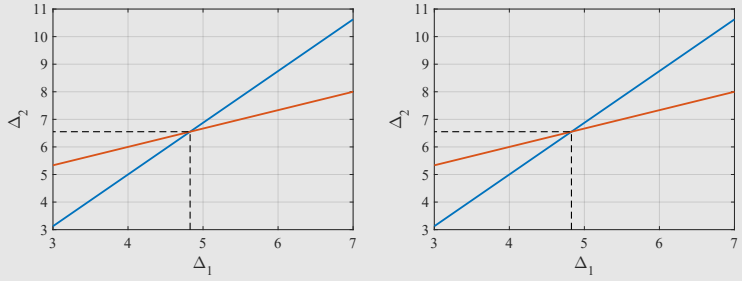
45.1.3.1 例题 45.1: 无条件

我们考虑了以下四个案例。

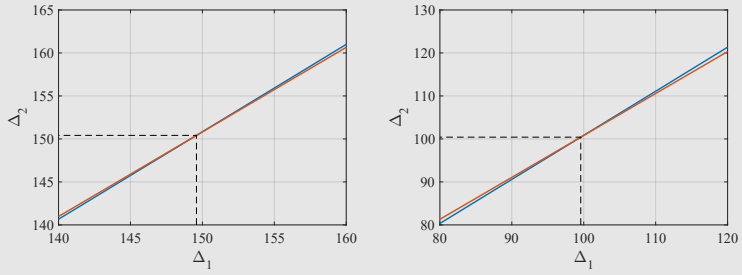
审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

	良好条件	
	初步	与干扰
$[K]$	$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ -0.8 & 1.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.5 & -0.79 \\ -0.79 & 1.2 \end{bmatrix}$
$\Delta_1 \quad \Delta_2$	4.8276 6.5517	4.7283 6.4461
$\lambda_1 \quad \lambda_2$	0.5361 2.1639	0.5459 2.1541
$\kappa(\mathbf{K})$	4.04	3.95



	疾病条件	
	初步	与干扰
$[K]$	$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.2 \\ -1.2 & 1.22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.22 & -1.19 \\ -1.19 & 1.22 \end{bmatrix}$
$\Delta_1 \quad \Delta_2$	149.5868 150.4132	99.5851 100.4149
$\lambda_1 \quad \lambda_2$	0.0200 2.4200	0.0300 2.4100
$\kappa(\mathbf{K})$	121.00	80.33



我们注意到疾病条件矩阵与高状态数之间的相互关系, 以及小干扰对状态数的影响。

45.2 数值 评论

45.2.1 逆转 vs 分裂

[27] 整体结构刚度矩阵 $\mathbf{K}_{tt}$ 必须求逆（$\mathbf{K}_{tt}^{-1}$）。显式求逆只能采用克莱姆法则；然而该方法仅适用于 2×2 矩阵。对于更大的矩阵，应通过高斯消元法的各种变体，将矩阵“分解”为 LU 或 LDU 乘积（§L.2.2）。矩阵分解可分为

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 直接方法, 其中有固定数量的数值操作。在最常见的情况下, 我们将 **L**.**U** 解体, 如果矩阵是相同的和积极的定义, 我们有一个 Cholesky 分裂。$\mathbf{L}.\mathbf{L}^T$ 一个。
2. 间接方法, 即异常, 没有固定操作数量 (盖斯 • 塞德尔). 更适合非常大的矩阵。

[28] 其中一些方法被描述在 §L.2.1.

[29] 对于那些特殊情况下, 我们有一个坚固的矩阵 (大条件号) 然后, **单一价值分解** (§L.2.2.5) 或预定 (§L.3.4) 需要使用技术方法。

[30] 当然, 在大多数情况下, 用户不必担心解决方案的策略, 因为这些可以很容易地提到这样的程序。MATLAB®. 其中一些相关功能是

入口 `(.)`	加斯 - 约旦
`lu(.)`	LU 解体
霍尔 `(.)`	霍尔斯基解体
同性恋 `(.)`	回归 Cuthill-McKee 订单
间谍 `(.)`	插入一个 矩阵 的 sparsity 模式

并在章节中的细节中审查 L.

45.2.2 诺达数

[31] 一般来说, **K** 它很少人口, 也就是说, 在矩阵中有许多零。无论解决方案如何, 矩阵的分解将过度写下所有 K_{ij} 其下方的 A "滑板" 无论是零还是不一样。所有零条款以上 "滑板" 它将保持不受触摸。字符串是给定的 柱 中最低的非零术语。

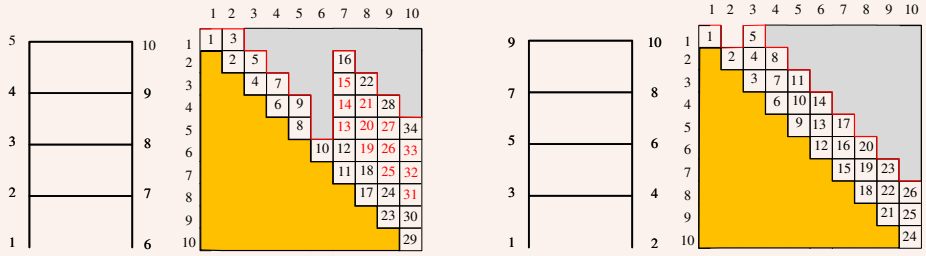
[32] 包装所有非零条款接近图表的优势很大, 以尽量减少存储和计算时间。假设在一个海湾中只有一块节点,4 个店铺建筑。图 45.6a 和 45.6a 这些是各自不良和法定数号的节点的例子。

[33] 彩色细胞在图表底下, 不需要因同位性而存储, 同样, 在字幕上方的灰色細胞也不需要存储。另一方面, 非零的术语以黑色标记, 字幕下的零则以红色标志。两者都将受分解的操作。

[34] 存储要求, 计算力受益于 "包装" 尽可能多的非零字符在图表周围。此任务目前由梅什发电机自动处理, 这些发电器可以内部使用逆 Cuthill-McKnee。(RCMH) 重新编号的算法 (Cuthill and McKee, 1969).

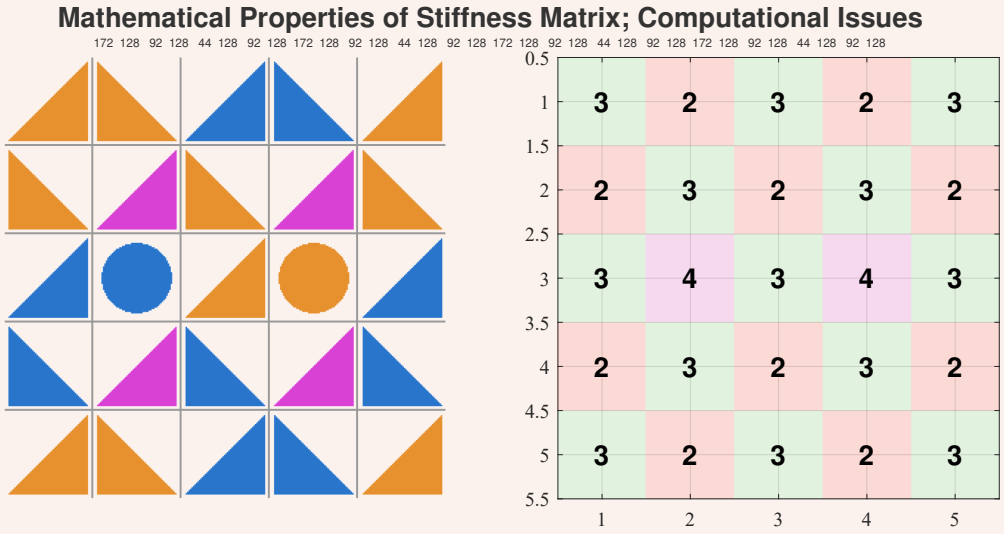
[35] 为了进一步突出结构密度矩阵的分裂性质, 以及其对存储要求以及计算成本的影响, 我们考虑到一个 250 个仓库单湾框架与 1500 个。(250 × 2 × 3) 方程式 不同分解策略 (Gauss-Jordan, LU Decomposition 和 Cholesky) 我们反对非零术语的分布与和没有 RCMH 算法。非零术语的数量被标记为 `nz` 每个数字下方。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 可怜的数字　　(b) 正确编号

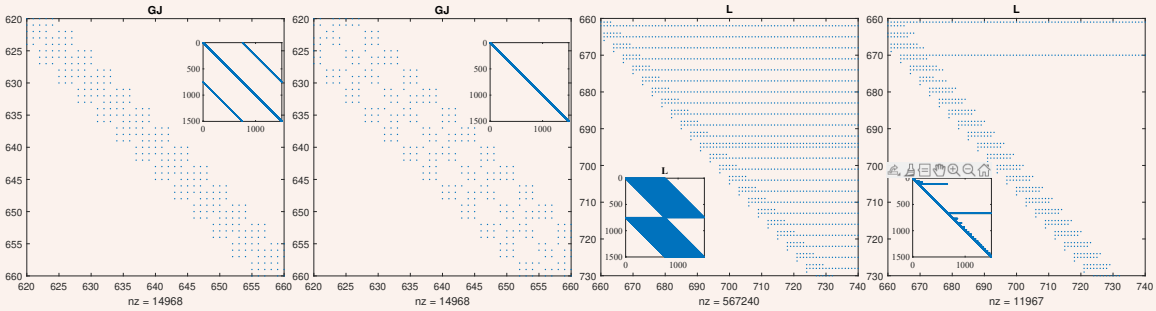
图 45.6: 节点数的重要性



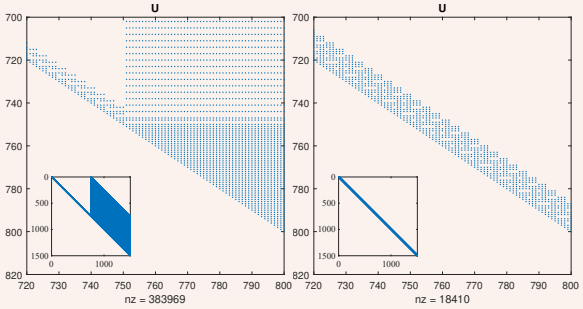
具体的分类, chapter H

审阅稿

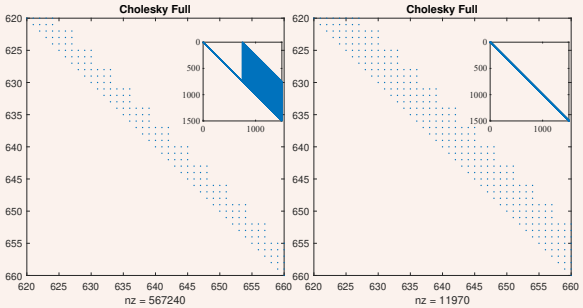
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 加斯 - 约旦　(b) Gauss-Jordan 與 RCMH　(c) L 分裂　(d) L 与 RCMH 的分解



(e) 解体　(f) 与 RCMH 的分解



(g) 巧克力　(h) Cholesky 與 RCMH

图 45.7: 结构性 刚度矩阵 的存储要求

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

46 特殊主题

摘要

本章包含一 支持 關於 矩阵 结构分析 的錯誤主題。我们开始用压缩/子结构化, 尽管如今由于计算机内存成本下降而很少使用。然后, 引入了静态和电影学矩阵的概念。这些概念将被用来产生坚固与灵活性关系, 矩阵分析的。*(§20.4)*, 以及基于灵活性的元素的制定 *(§61.4.1.1)*. 接下来, 合并转型, 一个替代方法来执行增强刚度矩阵的组装。*(§44.4.3)* 将被介绍。这种方法在某些最终的单元代码中受欢迎。章节将以三种特殊的梁列结束:*) rig rig* 有硬 *off,b)* 半固体射击 *(由 Springs 支持)*, 和 *C)* 带有变量交叉部分。

46.1 混凝土 / Substructuring 1375
46.2 静态和电影学的方程式 1376
46.2.1 静态 矩阵 $\mathcal{B}$ 1376
46.2.2 電影 矩阵 $\mathcal{A}$ 1383
46.2.3 静态化学 矩阵 关系 1385
46.3 通过静态逆转的动画关系 矩阵 . . . 1387
46.4 密度灵活性关系 1388
46.4.1 从稳定到灵活性 1388
46.4.2 从灵活性到坚固性 1389
46.4.3 灵活性与固态方法之间的双重性 1394
46.5 合并的转型方法 $\mathbf{K}$ 1394
46.5.1 例题 46.9: 合并转型 1395
46.5.2 例题 46.10: 框架的合成转型 . 1397
46.6 特殊 单元 1399
46.6.1 强烈的折扣; 1399
46.6.2 半固体射击 1402
46.6.3 变量十字段 1407
46.7 瞬间框中的侧驱动的来源 1409

46.1 混凝土 / Substructuring

1 凝固是通过替代来减少 d.o.f 的数量的过程。在 单元 级别上, 我们可能想要冷却一个内部节点 (如在 Lagrangian 单元中) 在全球范围内, 这一点与基础结构密切相关。

2 让我们考虑 $\mathbf{kd} = \mathbf{p}$ 讓我們 $\mathbf{d}$ 被分裂到

$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\}$$

在哪里订阅 r 和 c 提到保存和凝固的 d.o.f。相应。

3 以替代, 订阅 r 和 c 接口和内部 d.o.f. 因此,

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{rr} & \mathbf{k}_{rc} \\ \mathbf{k}_{cr} & \mathbf{k}_{cc} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{d}_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_r \\ \mathbf{p}_c \end{array} \right\}$$

或

$$\mathbf{k}' \mathbf{d}_r = \mathbf{p}'$$

哪里

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr}$$
$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_r - \mathbf{k}_{rc}\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{p}_c$$

4 考虑到上述两种方程式的常见形式, 我们得出结论, 凝聚力也可以被视为从一个 $\mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{k}$ 系统到 A $\mathbf{d}_r, \mathbf{p}', \mathbf{k}'$ 通过下一个转型

$$\mathbf{k}' = \boldsymbol{\Gamma}_c^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Gamma}_c$$
$$\mathbf{p}' = \boldsymbol{\Gamma}_c^T \mathbf{p}$$

哪里

$$\boldsymbol{\Gamma}_c = \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{k}_{cc}^{-1}\mathbf{k}_{cr} \\ \mathbf{I} \end{array} \right\}$$

5 $\mathbf{k}'$ 是一个 r 由 c 矩阵 , 而 $\mathbf{k}$ 是 $r+c$ 由 $r+c$ (但是, 我们必须单独分裂。$\mathbf{k}_{cc}$ 什么是 c 由 c).

46.2 静态和电影学的方程式

46.2.1 静态 矩阵 $\mathcal{B}$

46.2.1.1 衍生品

此部分由 *Matrix Structural Analysis* 由 McGuire and Gallagher, 1979[a].

[a]不幸的是, 第一版的原始部分已被第二版删除。

46.2.1.2 静态定义

6 静态 矩阵 $\mathcal{B}$ 与整个结构的向量有关 $\mathbf{P}$ 核力量在全球协调中的所有未知的力量 (单元 内部力量在其 局部坐标系 和结构的外部反应) $\mathbf{F}$, 通过平衡关系它被定义为:

$$\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F} \tag{46.1}$$

7 $\mathcal{B}$ 将有与独立的总数一样多的行列平衡的方程式; 以及许多列作为独立的内部力量。这是在分析中获得的平衡矩阵的回忆。信任由 “合成方法”.

8 根据结构类型, 内部的单元力量和平衡 力量将根据表格而异 46.1. 与柔度法一样, 有超过一个组合的独立的单元内部力量可以选择。

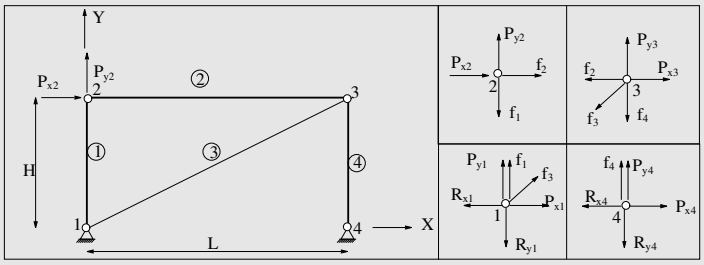
9 矩阵 $\mathcal{B}$ 将是一个平方 矩阵 为一个静态定义结构和直角 (更多列比行列) 否则。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 46.1: 对静态矩阵的内部元素强度定义

类型	内部部队	平衡的方程式
桁架	轴力在一端	$\Sigma F_X = 0, \Sigma F_Y = 0$
梁 1	一瞬间, 一瞬间在一个结局	$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$
梁 2	每端的叶子	$\Sigma F_y^A = 0, \Sigma F_y^B = 0$
梁 3	每一刻, 每一刻	$\Sigma M_z^A = 0, \Sigma M_z^B = 0$
2D 框架 1	轴力、剪力、弯矩 在 一 端	$\Sigma F_x^A = 0, \Sigma F_y^A = 0, \Sigma M_z^A = 0$

46.2.1.2.1 例题 46.1: 静态定义 truss statics matrix



这个桁架有 8 个未知的力量 (4 内部部队和 4 外部反应)8 等式以 平衡 (四个节点中的每一个节点). 接收所有 单元 力量是紧张的, 以及像图表中显示的反应, 平衡的方程式是:

诺德	$\Sigma F_X = 0$	$\Sigma F_Y = 0$
诺德 1	$\underbrace{P_{x1}}_{0} + F_3 C - R_{x1} = 0$	$\underbrace{P_{y1}}_{0} + F_1 + F_3 S - R_{y1} = 0$
诺德 2	$P_{x2} + F_2 = 0$	$P_{y2} - F_1 = 0$
诺德 3	$\underbrace{P_{x3}}_{0} - F_2 - F_3 C = 0$	$\underbrace{P_{y3}}_{0} - F_4 - F_3 S = 0$
诺德 4	$\underbrace{P_{x4}}_{0} + R_{x4} = 0$	$\underbrace{P_{y4}}_{0} + F_4 - R_{y4} = 0$

哪里 $\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+H^2}} = C$ 和 $\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}} = S$. 这些平衡的方程式可以在矩阵格式中提取

$$\begin{matrix} \Sigma F_x^1: \\ \Sigma F_y^1: \\ \Sigma F_x^2: \\ \Sigma F_y^2: \\ \Sigma F_x^3: \\ \Sigma F_y^3: \\ \Sigma F_x^4: \\ \Sigma F_y^4: \end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ P_{y4} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} \tag{46.2}$$

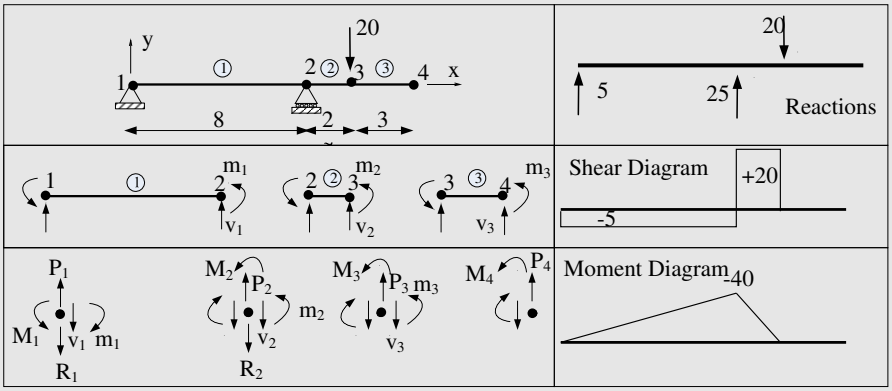
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

未知的力量和反应可以通过逆转来确定 $\mathcal{B}$:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ \hline R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} = \left\{\begin{array}{c} P_{y2} \\ -P_{x2} \\ \frac{P_{x2}}{C} \\ -\frac{S}{C}P_{x2} \\ \hline P_{x2} \\ \frac{S}{C}P_{x2} + P_{y2} \\ 0 \\ -\frac{S}{C}P_{x2} \end{array}\right\}$$

我们注意到, 矩阵 $\mathcal{B}$ 完全独立于外部负载, 一旦逆转, 可以用于多个负载案例。最小计算力。

46.2.1.2.2 例题 46.2: 梁 静态 矩阵



它由三个单元组成, 每一个有 2 个内部未知。(v 和 m) 加上 2 未知的反应, 共 8 名未知。为了解决这些未知, 我们有 2 个平衡的方程式在每个 4 节点。请注意, 在这个问题上我们选择的主要不了解每个单元的正确端的标志和时刻。左侧组件可以从 平衡 中恢复。从 平衡 我们有:

$$\begin{array}{l} \Sigma F_1: \\ \Sigma M_1: \\ \Sigma F_2: \\ \Sigma M_2: \\ \Sigma F_3: \\ \Sigma M_3: \\ \Sigma F_4: \\ \Sigma M_4: \end{array} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \\ P_3 \\ M_3 \\ P_4 \\ M_4 \end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\mathcal{B}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ m_1 \\ v_2 \\ m_2 \\ v_3 \\ m_3 \\ \hline R_1 \\ R_2 \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

转换这个 8 到 8 矩阵 会产生

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ m_1 \\ v_2 \\ m_2 \\ v_3 \\ m_3 \\ \hline R_1 \\ R_2 \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} & \frac{13}{8} & \frac{1}{8} \end{array}\right]}_{\mathcal{B}^{-1}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} = \left\{\begin{array}{c} 5 \\ -40 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 5 \\ -25 \end{array}\right\}$$

46.2.1.3 静态不确定

10 在静态不确定结构的情况下, Eq. 46.1 可以将其一般化为:

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\begin{array}{c|c} [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} & [\mathcal{B}_x]_{2n\times r} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \hline \mathbf{F}_x \end{array}\right\}_{(2n+r)\times 1} \tag{46.3}$$

哪里 $\mathcal{B}_0$ 是四方 矩阵, $\{\mathbf{F}_0\}$ 其它未知内部元素力量或外部反应的 vector 和 $\mathbf{F}_x$ 向量 未知的 **回归** 内部力量或反应。

11 因此, 我们可以确定 $\{\mathbf{F}_0\}$ 从

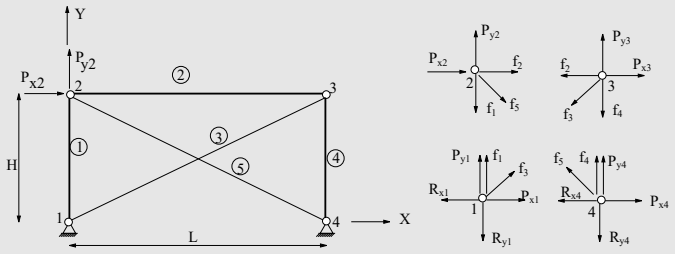
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \mathcal{B}_0^{-1}\mathbf{P} - \mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x\mathbf{F}_x \\ &= C_{1\,2n\times 2n}\mathbf{P} - C_{2\,2n\times r}\mathbf{F}_x \end{aligned} \tag{46.4}$$

12 注意下列定义, 以后将使用:

$$\mathcal{B}_0^{-1} \equiv C_1 \tag{46.5}$$

$$-\mathcal{B}_0^{-1}\mathcal{B}_x \equiv C_2 \tag{46.6}$$

46.2.1.3.1 例题 46.3: 静态不定义 桁架 静体 矩阵



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

审查第一例问题, 但与额外的成员它是静态不确定的, 目前有 9 个未知的力量。(5 个内部部队和 4 个外部反应), 只有 8 方程式 平衡. 選擇第五個 单元 力量為 redundant 力量, 与 $r = 1$ 我们写的就是 EQ。46.3

$$\mathbf{P}_{2n\times 1} = \left[\ [\mathcal{B}_0]_{2n\times 2n} \ \middle|\ [\mathcal{B}_x]_{2n\times r}\ \right] \left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_0\\ \hline \mathbf{F}_x\end{array}\right\}_{(2n+r)\times 1}$$

$$\mathbf{P} = [\mathcal{B}_0]\{\mathbf{F}_0\} + [\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\begin{array}{l}\Sigma F_x^1:\\ \Sigma F_y^1:\\ \Sigma F_x^2:\\ \Sigma F_y^2:\\ \Sigma F_x^3:\\ \Sigma F_y^3:\\ \Sigma F_x^4:\\ \Sigma F_y^4:\end{array} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}P_{x1}\\ P_{y1}\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ P_{x3}\\ P_{y3}\\ P_{x4}\\ P_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{0\,2nx2n}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}_{2nx1}} + \underbrace{\left[\begin{array}{c}0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_{xnx1}} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}$$

我们可以为内部势力解决问题。(未知的) 回归力量

$$\{\mathbf{F}_0\} = [\mathcal{B}_0]^{-1}\mathbf{P} - [\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x]\{\mathbf{F}_x\}$$

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\{\mathbf{F}_0\}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}_0^{-1}\equiv C_1} \left[\underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} - \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ -C\\ S\\ 0\\ 0\\ C\\ -S\end{array}\right\}}_{[\mathcal{B}_x]} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x}\right]$$

或使用下列关系 $[\mathcal{B}_0]^{-1} \equiv [C_1]$ 和 $-[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] \equiv [C_2]$ 我们获得

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{S}{C} & 1 & \frac{S}{C} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{S}{C} & 0 & -\frac{S}{C} & 1 & 0 & 1\end{array}\right]}_{C_1} \underbrace{\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ P_{x2}\\ P_{y2}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c}-S\\ -C\\ 1\\ -S\\ C\\ 0\\ -C\\ 0\end{array}\right\}}_{C_2} \underbrace{F_5}_{\mathbf{F}_x} \tag{46.7}$$

请注意, 这种方程式不足以解决未知的力量。如 $\mathbf{F}_x$ 必须通过强度 位移 获得关系 (**D** 或 **K**).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

46.2.1.4 解放力量的识别

13 當時, 解放部隊的識別已經完成通过仅仅对结构进行手动基于结构的分析, 这个识别过程可以自动化。

14 开始与

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{(2n+r)\times 1}\\ \mathcal{B}_{2n\times(2n+r)}\mathbf{F}_{2n+r\times 1} - \mathbf{I}_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} &= \mathbf{0}\\ \left[\begin{array}{c|c}\mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]_{2n\times(4n+r)}\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}\\ \hline \mathbf{P}\end{array}\right\} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

where $\left[\begin{array}{c|c}\mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]$ corresponds 到 The 增長 矩阵.

15 如果我们将加斯 - 约旦排除过程应用到增加的矩阵, 此方程式将转化为:

$$\left[\begin{array}{c|c|c}\mathbf{I}_{2n\times 2n} & -C_{2_{2n\times r}} & -C_{1_{2n\times 2n}}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{F}_0\\ \hline \mathbf{F}_x\\ \hline \mathbf{P}\end{array}\right\}_{4n+r\times 1} = \{\mathbf{0}\}$$

or:

$$\{\mathbf{F}_0\}_{2n\times 1} = [C_1]_{2n\times 2n}\mathbf{P}_{2n\times 1} + [C_2]_{2n\times r}\{\mathbf{F}_x\}_{r\times 1}$$

与 Eq 相同。46.4 如同以前, $\mathbf{F}_x$ 他们是救援力量, 他们的解决方案显然会依赖于单元的弹性特性。

46.2.1.4.1 例题 46.4: 解放力量的选择

审查前例的静态不确定 桁架但随着第五个单元的添加, 桁架将现在静态。到第一等级不确定。平衡的方程式 46.2 然后将写作如下:

$$\begin{array}{c}\\ \Sigma F_x^1 : A\\ \Sigma F_y^1 : B\\ \Sigma F_x^2 : C\\ \Sigma F_y^2 : D\\ \Sigma F_x^3 : E\\ \Sigma F_y^3 : F\\ \Sigma F_x^4 : G\\ \Sigma F_y^4 : H\end{array}\underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|cccc||cc}0&0&-C&0&0&1&0&0&0&0&0\\ -1&0&-S&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&-C&0&0&0&0&-1&0\\ 1&0&0&0&S&0&0&0&0&0&-1\\ 0&1&C&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&S&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&C&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&-S&0&0&0&1&0&0\end{array}\right]}_{\left[\begin{array}{c||c}\mathcal{B} & -\mathbf{I}\end{array}\right]}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ \hline R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{x4}\\ R_{y4}\\ \hline\hline P_{x2}\\ P_{y2}\end{array}\right\}}_{\mathbf{F}}$$

请注意, 因为荷载仅适用于节点 2 的, 我们已经考虑到一个子组。身份 矩阵 **I**.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 首先, 我们将从下一个矩阵开始。

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x1} & R_{y1} & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

2. 交换列

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

3. 按照指示行事

$$\begin{array}{r} \\ A \\ B' = B + DB \\ C \\ D \\ E' = \frac{E+C}{C} \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -S & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -S & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

4. 按照指示行事

$$\begin{array}{r} \\ A' = A + CE' \\ B'' = B' + SE' \\ C' = -C \\ D \\ E' \\ F' = F - SE' \\ G \\ H' = H + F' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & F_5 & R_{x4} & R_{y4} & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S & 0 & 0 & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

5. 交换列, 并观察到 F_5 是所选的回归。

$$\begin{array}{c} \\ A' \\ B'' \\ C' \\ D \\ E' \\ F' \\ G \\ H' \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} R_{x1} & R_{y1} & F_2 & F_1 & F_3 & F_4 & R_{x4} & R_{y4} & F_5 & P_{x2} & P_{y2} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S/C & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S & S/C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & S/C & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

来自 EQ。46.4 我们有

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} R_{x1} \\ R_{y1} \\ F_2 \\ F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{array}\right\}}_{\mathbf{F}_0} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ S/C & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/C & 0 \\ -S/C & 0 \\ 0 & 0 \\ -S/C & 0 \end{array}\right]}_{C_1} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} P_{x2} \\ P_{y2} \end{array}\right\}}_{\mathbf{P}} + \underbrace{\left\{\begin{array}{c} C \\ 0 \\ -C \\ -S \\ 1 \\ -S \\ -C \\ 0 \end{array}\right\}}_{C_2} \underbrace{\{F_5\}}_{\mathbf{F}_x}$$

相同的结果在 Eq。46.7 除了命令关于条款。

46.2.1.5 电影不稳定

16 动画不稳定是由于结构缺乏适当的限制而产生的。在哪个硬体运动可以发生。动画不稳定将导致一个矩阵是单一的, 并分解这个 矩阵 将导致分为零, 导致计算机计划为“事故”. 因此, 它往往是可取的。“大型” 要确定的结构 **初步** 是否结构在分析之前是动态不稳定的。

17 静态决定的条件和不稳定性可以说明为一个功能的排名 $\mathcal{B}$. If $\mathcal{B}$ 有 n 序列 (相应于 平衡方程式的数量), u 列 (与内部力量和反应的数量相匹配) 而且, 它是排名。r, 然后在图表中总结了电影不稳定条件。46.2

18 注意, 电影不稳定并不总是与结构崩溃。在某些情况下, 平衡 将仅在地理学将完全改变。(例如, 与灵活的索结构) 和平衡的方程式应该是完整的重新编写新地质学。

46.2.2 電影 矩阵 $\mathcal{A}$

19 電影 矩阵 $\mathcal{A}$ 连接整个结构的节点 **全部迁移** 全球协调 Δ 到 单元 **相应迁移** 在他们的局部坐标系 和 支座 位移 (可能不是零的, 如果解决问题发生) Υ 它被定义为:

$$\Upsilon \equiv \mathcal{A}\Delta \tag{46.8}$$

20 $\mathcal{A}$ 是直角 矩阵, 行数相当于单元的内部转移数量, 列数相当于节点转移的数量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 46.2: 静态决定的条件和电影不稳定

$n > u$ 动画不稳定	
$n = u$ 静态定义	
$n = u = r$	稳定
$n = u > r$	不稳定的与 $n - r$ 动画不稳定模式
$n < r$ 静态不确定 (程度 $u - n$)	
$n = r$	稳定
$n > r$	不稳定的与 $n - r$ 动画不稳定模式

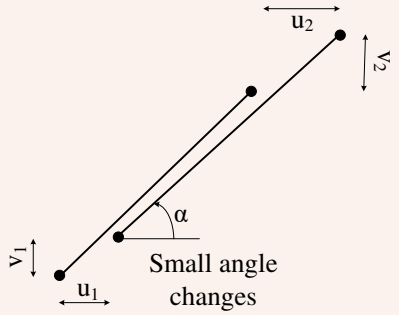


图 46.1: 桁架 单元的电影

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

21 与此前引入的旋转矩阵相反, 它改变了移动。从全球到本地协调 **单身** 单元 和矩阵 适用于整个结构。

22 可以很容易地证明, 对于特斯拉 (相应于会员的缩短或延长, 并在角度小变化。α):

$$\Upsilon^{(e)} = (u_2 - u_1)\cos\alpha + (v_2 - v_1)\sin\alpha$$

46.2.2.1 **例题 46.5: Kinematics Matrix: truss 例子**

再次考虑到前例的静态定义特征, 将由:

$$\Delta_1^{(e)} = v_2 - v_1; \quad \Delta_2^{(e)} = u_3 - u_2; \quad \Delta_3^{(e)} = (u_3 - u_1)C + (v_3 - v_1)S; \quad \Delta_i^{(e)} = \cdots$$

或以 矩阵 格式:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta_1^{(e)}\\ \Delta_2^{(e)}\\ \Delta_3^{(e)}\\ \Delta_4^{(e)}\\ \hline u_1\\ v_1\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\}$$

使用限制: $u_1 = 0$; $v_1 = 0$; $u_4 = 0$; 和 $v_4 = 0$ 我们得到了:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta_1^{(e)}\\ \Delta_2^{(e)}\\ \Delta_3^{(e)}\\ \Delta_4^{(e)}\\ \hline 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -C & -S & 0 & 0 & C & S & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathcal{A}} \left\{\begin{array}{c} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\}$$

我们应该注意到这 $\mathcal{A}$ 是转移的 $\mathcal{B}$ 矩阵 在 Eq. 46.2.1.4.1

46.2.3 静态化学 矩阵 关系

23 既定两种静态 $\mathcal{B}$ 和电影 $\mathcal{A}$ 矩阵, 直觉地说, 这两个矩阵必须是相连的。在此部分我们试图确定这两者静态定义的关系。静态不定义的案例。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

46.2.3.1 静态定义

24 外部工作被定义为

$$\left.\begin{aligned} W_{ext} &= \frac{1}{2}\mathbf{P}\boldsymbol{\Delta} \\ \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F} \end{aligned}\right\} W_{ext} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta}$$

25 否则, 内部工作由:

$$\left.\begin{aligned} W_{int} &= \frac{1}{2}\mathbf{F}\{\boldsymbol{\Upsilon} \\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta} \end{aligned}\right\} W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

26 将外部与内部工作等同 $W_{ext} = W_{int}$ 我们得到了:

$$\frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{B}^T\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\mathbf{F}\mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

或

$$\mathcal{B}^T = \mathcal{A} \tag{46.9}$$

27 与此同时, 在连续级别的对手是

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

或 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ 哪里 $\mathbf{L}$ 是线性运营商 (Eq. O.7), 和

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = 0$$

或 $\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

46.2.3.2 静态不确定

28 在此之前, 我们使用了 Eq。46.1 为 $\mathcal{B}$, 对于最常见的情况下, 静态不确定结构我们可以从 EQ 开始。46.3 又写:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_x \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_x \end{array}\right\}$$

哪里 $\mathbf{F}_x$ 相应于救援部队。外部工作将是

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \left\lfloor\begin{array}{c|c} \mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_x \end{array}\right\rfloor \left[\begin{array}{c} [\mathcal{B}_0]^t \\ [\mathcal{B}_x]^t \end{array}\right] \Delta$$

29 再一次, 我们可以普遍化 Eq。46.8 和写作

$$\left\{\begin{array}{c} \Upsilon_0 \\ \Upsilon_x \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{A}_0 \\ \mathcal{A}_x \end{array}\right] \Delta \tag{46.10}$$

哪里 Υ_0 和 Υ_x 相应的转移与 $\mathbf{F}_0$ 和 $\{\mathbf{F}_x\}$ 相应。

30 因此, 内部工作将由:

$$W_{int} = \frac{1}{2} \left\lfloor\begin{array}{c|c} \mathbf{F}_0 & \mathbf{F}_x \end{array}\right\rfloor \left[\begin{array}{c} [\mathcal{A}_0] \\ [\mathcal{A}_x] \end{array}\right] \Delta$$

31 如同以前一样, 将外部与内部工作等同。$W_{ext} = W_{int}$ 通过简化, 我们获得:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^T &= \mathcal{A}_0 \\ \mathcal{B}_x^T &= \mathcal{A}_x \end{aligned}$$

检查

46.3 通过静态逆转的动画关系 矩阵

32 我们现在正在寻求通过矩阵静态的逆转来产生一些额外关系。这些关系将随后在灵活性方法中使用, 并且没有即时应用。重新编写 EQ。46.10 如

$$\Delta = [\mathcal{A}_0]^{-1} \{\Upsilon_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^t\right]^{-1} \{\Upsilon_0\} = \left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t \{\Upsilon_0\} \tag{46.11}$$

我们可以解决 $\{\mathbf{F}_0\}$ 来自 EQ。46.4

$$\{\mathbf{F}_0\} = \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1}}_{[C_1]} \mathbf{P} - \underbrace{[\mathcal{B}_0]^{-1} [\mathcal{B}_x]}_{[C_2]} \{\mathbf{F}_x\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

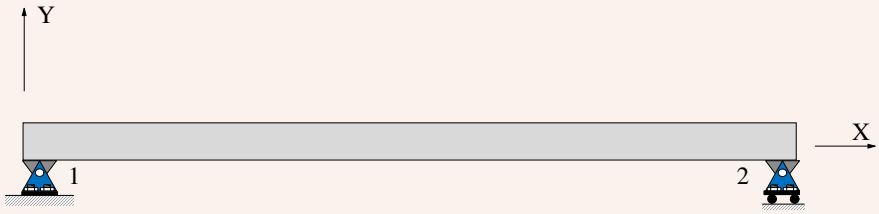


图 46.2: 稳定和静态定义 单元

33 将这个方程式与 $[\mathcal{B}_0]^{-1} = [C_1]$ 来自 EQ。46.5 与 EQ。46.11 我们获得

$$\boldsymbol{\Delta} = [C_1]^t \{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}$$

34 同样, 我们可以重新审查 Eq。46.10 和写作

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = [\mathcal{A}_x]\boldsymbol{\Delta}$$

当前方程与 Eq 的右侧相结合时。46.3 和 46.11 我们获得

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = [\mathcal{B}_x]^t \left[[\mathcal{B}_0]^{-1}\right]^t \{\boldsymbol{\Upsilon}_0\}$$

35 因此, 与 $[\mathcal{B}_0]^{-1}[\mathcal{B}_x] = -[C_2]$ 从 Eq. 46.6

$$\{\boldsymbol{\Upsilon}_x\} = -[C_2]^t \{\boldsymbol{\Upsilon}_0\} \tag{46.12}$$

这个方程式将未知的相对转移与相似已知的相似转移进行。

46.4 密度灵活性关系

目标

36 既引入了硬度和灵活性方法, 我们将严格考虑两种矩阵之间的关系。**K** 和 [**D**] 在结构层面上。

37 我们的衍生品的起点是 Eq。44.1

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}_t\\ \hline \mathbf{P}_u\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{tu}\\ \hline \mathbf{K}_{ut} & \mathbf{K}_{uu}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{\Delta}_t\\ \hline \boldsymbol{\Delta}_u\end{array}\right\}$$

46.4.1 从稳定到灵活性

38 要得到 **d** 结构必须保持稳定和静态。以某种方式, 就像在 Fig 中的泡沫一样。46.2. 我們所

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

擁有的:

$$\boldsymbol{\delta}_f = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \text{ and } \boldsymbol{\delta}_s = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_t = \left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\}$$
$$\mathbf{p}_s = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} \right\}$$

39 因为 $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ 上面的方程式减少到:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{p}_s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{k}_{tt} \\ \mathbf{k}_{ut} \end{array} \right] \boldsymbol{\delta}_f$$

我们会有:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt} \boldsymbol{\delta}_t \tag{46.13}$$

定义 46.1: 灵活性密切关系

$$\mathbf{d} = \mathbf{k}_{tt}^{-1}$$

46.4.1.1 例题 46.6: 柔度矩阵

这是一个简单的案例, 从图 46.2 當時 转角 的關係是由

$$\left\{ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{EI}{L} \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right]}_{\mathbf{k}_{tt}} \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\}$$

因此:

$$\mathbf{k}_{tt}^{-1} = \mathbf{d} = \frac{L}{EI} \frac{1}{12} \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{array} \right] = \frac{L}{6EI} \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right]$$

46.4.2 从灵活性到坚固性

40 我们从

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_f^{\checkmark} \\ \hline \mathbf{p}_s^{?} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{tu} \\ \hline \mathbf{k}_{ut} & \mathbf{k}_{uu} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\delta}_f^{?} \\ \hline \boldsymbol{\delta}_s^{\checkmark} \end{array} \right\} \tag{46.14}$$

每個字母都會從 刚度矩阵 分别來取。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

41 $\mathbf{k}_{tt}$ 来自 EQ。46.14, $\mathbf{k}$ 它被分为自由和支持的 d.o.f.s, 我们已经证明 $\mathbf{k}_{tt} = \mathbf{d}^{-1}$, or $\mathbf{p}_t = \mathbf{k}_{tt}\boldsymbol{\delta}_t$ 但是, 我们还必须确定 $\mathbf{k}_{tu}$, $\mathbf{k}_{ut}$, 和 $\mathbf{k}_{uu}$.

42 $\mathbf{k}_{ut}$ 因为: $\mathbf{d}$ 以稳定的静态定义结构为基础, 我们有:

$$\mathbf{p}_u = \mathcal{B} \underbrace{\mathbf{p}_t}_{\text{Eq. 46.13}} \tag{46.15}$$

$$= \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{k}_{tt}}_{\mathbf{k}_{ut}} \boldsymbol{\delta}_t \tag{46.16}$$

$$\mathbf{k}_{ut} = \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} \tag{46.17}$$

哪里 $\mathbf{P} \equiv \mathcal{B}\mathbf{F}$ 是静态 平衡 矩阵 (Eq. 46.1).

43 $\mathbf{k}_{tu}$ 二、将外部与内部等同工作:

1. 外部工作: $W_{ext} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_t\mathbf{p}_t$
2. 内部工作: $W_{int} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_u\boldsymbol{\delta}_u$

平等 W_{ext} 到 W_{int} 与此相结合

$$\mathbf{p}_u = \boldsymbol{\delta}_t\mathbf{k}_{ut}^T \tag{46.18}$$

来自 EQ。46.14 与 $\{\boldsymbol{\delta}_u\} = \{\mathbf{0}\}$ (零 支座移居) 我们得到了:

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{k}_{ut}^T = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T$$

44 $\mathbf{k}_{uu}$ 此期限是从

$$\mathbf{p}_s = \mathcal{B}\mathbf{p}_f \tag{46.19}$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{k}_{tu}\boldsymbol{\delta}_s \tag{46.20}$$

$$\mathbf{k}_{tu} = \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \tag{46.21}$$

结合 Eqns。46.19, 46.20, 和 46.21 we 获取:

$$\mathbf{p}_u = \underbrace{\mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T}_{\mathbf{k}_{uu}} \boldsymbol{\delta}_u$$

45 总的来说, 我们有:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 46.2: 灵活性密切关系

$$\mathbf{k}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^{T}\\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^{T}\end{array}\right] \tag{46.22}$$

[46] 一个非常重要的观察是, 刚度矩阵显然是单一的, 因为第二个 "路由" 线性依赖于第一 (通过 $\mathcal{B}$) 因此, 它的决定性相当于零。

46.4.2.1 例题 46.7: 灵活性到坚固

与图的参考 46.2 而与两者 M_1 和 M_2 假设是积极的 (克里斯蒂安):

1. 柔度矩阵 是由:
$$\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\ \theta_2\end{array}\right\}=\underbrace{\frac{L}{6EI}\left[\begin{array}{cc}2 & -1\\ -1 & 2\end{array}\right]}_{\mathbf{d}}\left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\end{array}\right\}$$
2. 静态 矩阵 $\mathcal{B}$ 与内部部队的外部关系被授予 by:
$$\left\{\begin{array}{c}V_1\\ V_2\end{array}\right\}=\underbrace{\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & -1\end{array}\right]}_{\mathcal{B}}\left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\end{array}\right\}$$
3. $\mathbf{k}_{tt}$: 将简单地由:
$$\mathbf{k}_{tt}=\mathbf{d}^{-1}=\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]$$
4. $\mathbf{k}_{tu}$ 标签: 顶部 Off-Diagonal
$$\mathbf{k}_{tu}=\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^{T}=\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & -1\end{array}\right]=\frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc}6 & -6\\ 6 & -6\end{array}\right]$$
5. $\mathbf{k}_{ut}$ 下载: 低离线期限
$$\mathbf{k}_{ut}=\mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}=\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ -1 & -1\end{array}\right]\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc}4 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]=\frac{EI}{L^2}\left[\begin{array}{cc}6 & 6\\ -6 & -6\end{array}\right]$$
6. $\mathbf{k}_{uu}$:
$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{uu}&=\mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^{T}=\mathbf{k}_{ut}\mathcal{B}^{T}\\ &=\frac{EI}{L^2}\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc}6 & 6\\ -6 & -6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & -1\end{array}\right]=\frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc}12 & -12\\ -12 & 12\end{array}\right]\end{aligned}$$

让我们注意到, 我们可以重写:

$$\left\{\begin{array}{c}M_1\\ M_2\\ \hline V_1\\ V_2\end{array}\right\}=\frac{EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc|cc}4L^2 & 2L^2 & 6l & -6l\\ 2L^2 & 4L^2 & 6l & -6l\\ \hline 6l & 6l & 12 & -12\\ -6l & -6l & -12 & 12\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\theta_1\\ \theta_2\\ \hline v_1\\ v_2\end{array}\right\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果我们重新安排刚度矩阵我们会得到:

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ \hline V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{EI}{L}\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & \frac{-6}{L} & 2 \\ \hline \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{12}{L} & \frac{-6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{-6}{L} & 4 \end{array}\right]}_{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \hline v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

它是相同的 刚度矩阵 以前衍生。列和列的线性依赖是由此相同的矩阵的下一个表达所突出。

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & \frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{11}+k^r_{21}}{L} & k^r_{11} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{12} \\ -\frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & \frac{k^r_{11}+k^r_{12}+k^r_{21}+k^r_{22}}{L^2} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} \\ \frac{k^r_{12}+k^r_{22}}{L} & k^r_{21} & -\frac{k^r_{22}+k^r_{12}}{L} & k^r_{22} \end{bmatrix}$$

哪里 k^r 相应的 k_{tt}

46.4.2.2 例题 46.8: 曲线元素的密度矩阵

我们试图确定一个圆形的刚度矩阵射线的弓 R 保持一个角度 θ. 首先, 我们将确定一根角形的柔度矩阵从

$$\delta U = \int_s \delta\overline{M}\frac{M}{EI}dx = \frac{R}{EI}\int_0^\theta \delta\overline{M}Md\phi$$

哪里 M 这是一个真正的时刻在意志点 A 因负载而造成的和 $\delta\overline{M}$ 是虚拟时刻 A 由单位 荷载 引起

[47] 因此, 柔度矩阵将由:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix}$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

和

$$M = M_3 + N(R - R\cos\phi) + V(R_2\sin\phi)$$

$$\delta\overline{M}+ \qquad 1_3 = R(1-\cos_1\phi) + R\sin_2\phi$$

$$f_{ij} = \text{ Disp. in DOF } i \text{ caused by unit load in DOF } j$$

$$f_{11} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta \delta M_{p1}\cdot M_{D1}d\phi$$

$$= \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2(1-\cos\phi)^2 d\phi$$

$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (1-2\cos\phi+\cos^2\phi)d\phi$$

$$= \frac{R^3}{EI}\left[\phi - 2\sin\phi + \phi/2 = 1/4\sin 2\phi\right]_o^\theta$$

$$= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2\sin\phi(1-\cos\phi)d\phi$$

$$= \frac{R^3}{EI}\int_o^\theta (\sin\phi - \cos\phi\sin\phi)d\phi$$

$$= \frac{R^3}{EI}\left[-\cos\phi - \frac{1}{2}\sin^2\phi\right]_o^\theta$$

$$= \frac{R^3}{EI}\left[(-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta) - (-1-0)\right]$$

$$= f_{21} = \frac{R^3}{EI}\left[1-\cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right]$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R(1-\cos\phi)d\phi$$

$$= \frac{R^2}{EI}\left[\phi - \sin\phi\right]_o^\theta$$

$$= \frac{R^2}{EI}\left[\theta - \sin\theta\right]$$

$$f_{22} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R^2\sin^2\phi d\phi$$

$$= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{\phi}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_o^\theta$$

$$= f_{22}\frac{R^3}{EI}\left[\frac{\theta}{\partial} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta R\sin\phi d\phi$$

$$= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\phi\right]_o^\theta$$

$$= \frac{R^2}{EI}\left[-\cos\theta + 1\right]$$

$$f_{33} = \frac{R}{EI}\int_o^\theta d\theta$$

$$= \frac{R\theta}{EI}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

46.4.3 灵活性与固态方法之间的双重性

	灵活性	精力
不确定性	静态	电影
平等的统治。	电影	平衡
初级未知	诺达尔力量	诺达尔转移
变分原理	虚拟力量	虚拟 位移
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}'\mathbf{P}$	$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Delta}$
	$\mathbf{d}$	$\mathbf{K}$
	$D = \mathcal{B}^T \mathbf{d} \mathcal{B}$	$\mathbf{K} = \Sigma \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Gamma}$
	$\left\{ \begin{array}{c} \Delta_P^? \\ \Delta_R^\surd \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}^\surd \\ \mathbf{R}^? \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}^\surd \\ \mathbf{R}^? \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{k}_{ff} & \mathbf{D}_{fr} \\ \mathbf{D}_{rf} & \mathbf{D}_{rr} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta_f^? \\ \Delta_r^\surd \end{array} \right\}$
	$\mathbf{R} = D_{22}^{-1}(\Delta_R - \mathbf{D}_{21}\mathbf{P})$	$\Delta_f = K_{ff}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{k}_{fr}\Delta_r)$
	$\Delta_P = D_{11}^{-1}(\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})$	$\mathbf{R} = K_{rf}\Delta_f + \mathbf{k}_{rr}\Delta_r$
	$\mathbf{P} = \mathcal{B}\mathbf{P}$	$\mathbf{P} = \mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Delta}$

46.5 合并的转型方法 K

注意: 本部分主要基于第 3.3 节的 (Gallagher, 1975)

47 在 §44.4.3 我们已经覆盖了一项程序, 将增加的刚度矩阵集成。此部分将描述一个替代方法。

48 由一个自愿的结构组成的 n 单元, 我们可以定义其它 **不连接** 节点负载和转移 vectors 在全球协调如

$$\mathbf{P}^{(e)} = \lfloor \begin{array}{cccc} P^1 & P^2 & \dots & P^n \end{array} \rfloor^T$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}^{(e)} = \lfloor \begin{array}{cccc} \Upsilon^1 & \Upsilon^2 & \dots & \Upsilon^n \end{array} \rfloor^T$$

哪里 $\{\mathbf{P}^i\}$ 和 $\{\boldsymbol{\Delta}^i\}$ 是荷载的节点和单元的分散线 i. 每個字母的尺寸 (或更准确地说, 每个字符串) 相当于在全球协调中为 单元 的 d.o.f 总数。i.

49 同样, 我们可以定义不连接的 (或未集合) 全球 刚度矩阵 的结构如 $[\mathbf{K}^{(e)}]$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)}\{\boldsymbol{\Upsilon}\}$$
$$\mathbf{K}^{(e)} = \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{K}^1 & & & & \\ & \mathbf{K}^2 & & & \\ & & \mathbf{K}^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{K}^n \end{array} \right]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

50 请注意, 这一 矩阵 的所有其他条款均为零, 并且不同子属之间没有交叉。因此, 这个 矩阵 不反映所有 单元 的连接性。

51 我们记得以下关系 (Eq. 46.1, 46.8, 和 46.9 相应)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}\\ \mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F}\\ \mathcal{B}^T &= \mathcal{A}\end{aligned}$$

我们现在将这些矩阵与刚度矩阵的定义相结合:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathcal{B}\mathbf{F}\\ \mathbf{P} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta}\\ \mathcal{B} &= \mathcal{A}^T\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\mathcal{A}^T\mathbf{F} &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta}\\ \mathbf{F} &= \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\Upsilon}\\ \boldsymbol{\Upsilon} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}\end{aligned}\right\}$$

定义 46.3: 合并转型

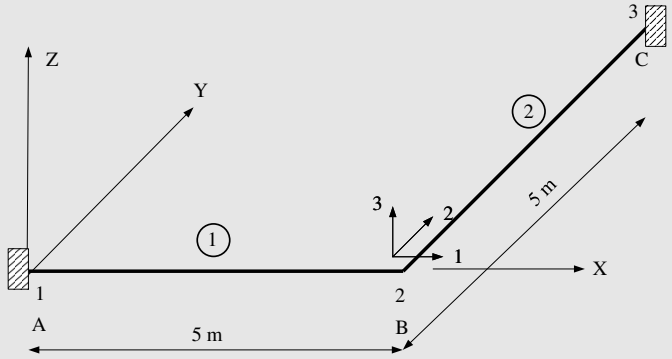
$$\mathbf{K} = \mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$$

52 因此, 我们刚刚确定了关于未连接的全球刚度矩阵的一般转型。$[\mathbf{K}^{(e)}]$ 以获得结构 刚度矩阵。我们要注意的是:

1. If $\mathbf{K}^{(e)}$ 它在全球协调中表达, 然后 $\mathcal{A}$ 是 A 布莱恩 矩阵。
2. If $\mathbf{K}^{(e)}$ 在地理坐标中, $\mathcal{A}$ 必须包括转型从单元到全球协调系统, 并且不再是波利安。
3. $\mathbf{K}$ 与此相关的条款, 如同 BC 与被限制的 d.o.f. 不包括。
4. 注意直接刚度法之间的相似之处: $\mathbf{K} = \sum \boldsymbol{\Gamma}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Gamma}$ 相同的转型方法: $\mathbf{K} = \mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$.
5. 如果结构是框架与 n 单元 , 那我们会 $\mathbf{K}_{neq\times neq} = \sum_1^n \boldsymbol{\Gamma}^T_{6\times 6}\mathbf{K}_{6\times 6}\boldsymbol{\Gamma}_{6\times 6}$ 相同的转型方法: $\mathbf{K}_{neq\times neq} = \mathcal{A}^T_{\text{尼克}\times 6n}\mathbf{K}^{(e)}_{6n\times 6n}\mathcal{A}_{6n\times \text{尼克}}$.
6. 合并方法似乎比直接固态更不有效两种方法 $\mathbf{K}^{(e)}$ 和 $\mathcal{A}$ 更大于 $\mathbf{K}$.

46.5.1 例题 46.9: 合并转型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



我们试图通过 直接刚度法 和合并转换方法, 将上述网络的全球 刚度矩阵 集成起来。全球协调系统中的 2 元素密度矩阵由:

$$\mathbf{K}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0. & 0. & -7.692 & 0. & 0. \\ & .4\times10^5 & -12. & 0. & .2\times10^5 & 12. \\ & & .0048 & 0. & -12. & -.0048 \\ \hline & & & 7.692 & 0. & 0. \\ & & & & .4\times10^5 & 12. \\ & & & & & .0048 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{K}_{BC} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1\times10^5 & 0. & 18.75 & .5\times10^5 & 0. & -18.75 \\ & 14.423 & 0. & 0. & -14.423 & 0. \\ & & .00469 & 18.75 & 0. & -.00469 \\ \hline & & & 1\times10^5 & 0. & -18.75 \\ & & & & 14.423 & 0. \\ & & & & & .00469 \end{array}\right]$$

我们将通过两种方法来确定全球刚度矩阵:

地點 矩阵 LM

$$\mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LM}^1 = \lfloor\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{LM}^2 = \lfloor\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ \rfloor^T$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (7.692+1\times10^5) & (0.+0.) & (18.75+0.) \\ (0.+0.) & (.4\times10^5+14.423) & (12.+0.) \\ (0.+18.75) & (12.+0.) & (.0048+.00469) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times10^5 & 0. & 18.75 \\ 0. & .4\times10^5 & 12. \\ 18.75 & 12. & .00949 \end{bmatrix}$$

合并转型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 未收集的 刚度矩阵 $\mathbf{K}^{(e)}$, 为节点 2 提供:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\left\{\begin{array}{c} M_x^1 \\ M_y^1 \\ F_z^1 \\ \hline M_x^2 \\ M_y^2 \\ F_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7.692 & 0 & 0 & & 0. & \\ & .4\times 10^5 & 12. & & & \\ \text{sym} & & .0048 & & & \\ \hline & 0. & & 1\times 10^5 & 0. & -18.75 \\ & & & & 14.423 & 0. \\ & & & \text{sym} & & .00469 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Theta_x^1 \\ \Theta_y^1 \\ W_z^1 \\ \hline \Theta_x^2 \\ \Theta_y^2 \\ W_z^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{element 1} \\ \\ \\ \text{element 2} \end{array}$$

请注意,B.C. 因忽略被限制的行为而随意承担责任。d.o.f 但是 单元 的连接性不反映由此 矩阵。

2. 矩阵的动画是由:

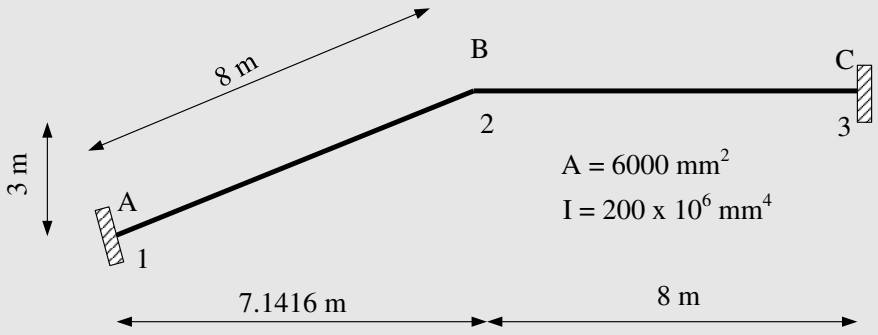
$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ w_z^1 \\ \hline \theta_x^2 \\ \theta_y^2 \\ w_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_x \\ \theta_y \\ w_z \end{array}\right\}$$

至于矩阵的电影, 我们正在谈论当地的转移从每一个单元到全球的。因此, 这个 矩阵 与连接性 矩阵。既然连接性 矩阵 以前定义的反映单元 连接, 这反映了所有无限 自由度。

3. 如果我们采取产品: $\mathcal{A}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathcal{A}$ 然后我们将恢复 $\mathbf{K}$ 如上所示。

46.5.2 例题 46.10: 框架的合成转型



接下来, 我们试图将 刚度矩阵 的 框架 组合, 使用 矩阵 定位器以及两种相匹配的方法。单元 AB 和 BC 在 局部坐标系 的硬度矩阵被授予:

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{K}_{BC} = 200 \left[\begin{array}{cccccc} .75 & 0. & 0. & -.75 & 0. & 0. \\ & .00469 & 18.75 & 0 & -.0048 & 18.75 \\ & & 1\times 10^5 & 0 & -18.75 & .5\times 10^5 \\ & & & .75 & 0. & 0. \\ & & & & .00469 & -18.75 \\ \text{sym} & & & & & 1\times 10^5 \end{array}\right]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

而旋转矩阵则由:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{AB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} .9272 & .375 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -.375 & .927 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1 & 0. & 0. & 0. \\ \hline 0. & 0. & 0. & .9272 & .375 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{BC} = \mathbf{I}$$

单元在全球坐标中的密度矩阵将是由:

$$\mathbf{K}_{AB} = \boldsymbol{\Gamma}_{AB}^T \mathbf{K}_{AB} \boldsymbol{\Gamma}_{AB}$$

$$= 200 \left[\begin{array}{cccccc} .645 & .259 & -7.031 & -.645 & -.259 & -7.031 \\ & .109 & 17.381 & -.259 & -.109 & 17.381 \\ & & 1\times 10^5 & 7.031 & -17.381 & .5\times 10^5 \\ & & & .645 & .259 & 7.031 \\ & \text{sym} & & & .109 & -17.381 \\ & & & & & 1\times 10^5 \end{array}\right]$$

和 $\mathbf{K}_{BC} = \mathbf{K}_{BC}$

路由器 矩阵: 我们可以轻松地收集全球刚度矩阵:

$$\mathbf{K} = 200 \left[\begin{array}{ccc} (.645+.75) & (.259+0.) & (7.031+0.) \\ & (.109+.00469) & (-17.38+18.75) \\ \text{sym} & & (1+1)\times 10^5 \end{array}\right]$$

$$= 200 \left[\begin{array}{ccc} 1.395 & .259 & 7.031 \\ & .1137 & 1.37 \\ \text{sym} & & 2\times 10^5 \end{array}\right] \tag{46.23}$$

Congruent Transformation, global axis, Boolean $\mathcal{A}$

1. 我们开始与全球无连接的刚度矩阵协调系统:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{(e)} \boldsymbol{\Upsilon}$$

$$\left\{\begin{array}{c} P_X^1 \\ P_Y^1 \\ M_Z^1 \\ \hline P_X^2 \\ P_Y^2 \\ M_Z^2 \end{array}\right\} = 200 \left[\begin{array}{ccc|ccc} .645 & .259 & 7.031 & & & \\ & .109 & -17.381 & & 0 & \\ \text{sym} & & 1\times 10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0. \\ & 0 & & & .00469 & 18.75 \\ & & & \text{sym} & & 1\times 10^5 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_X^1 \\ V_Y^1 \\ \Theta_Z^1 \\ \hline U_X^2 \\ V_Y^2 \\ \Theta_Z^2 \end{array}\right\}$$

2. 接下来我们将确定矩阵的电影学 $\mathcal{A}$:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathcal{A} \boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u^1 \\ v^1 \\ \theta^1 \\ u^2 \\ v^2 \\ \theta^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ \theta \end{array}\right\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 最后, 如果我们采取产品 $\underbrace{\mathcal{A}^T}_{3\times6}\underbrace{\mathbf{K}^{(e)}}_{6\times6}\underbrace{\mathcal{A}}_{6\times3}$ 我们获得全球结构 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 在 EQ。46.23

合并转型 (地方轴):

1. 无连接 刚度矩阵 在本地坐标中:

$$\mathbf{p}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\boldsymbol{\delta}^{(e)}$$

$$\left\{\begin{array}{c} P_X^1 \\ P_Y^1 \\ M_Z^1 \\ \hline P_X^2 \\ P_Y^2 \\ M_Z^2 \end{array}\right\} = 200 \left[\begin{array}{ccc|ccc} .75 & 0. & 0. & & & \\ & .00469 & -18.75 & & & \\ \text{sym} & & 1\times10^5 & & & \\ \hline & & & .75 & 0. & 0. \\ & & & & .00469 & 18.75 \\ & & & \text{sym} & & 1\times10^5 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{array}\right\}$$

2. 電影 矩阵 $[\mathcal{A}]$ 如今已由:

$$\boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathcal{A}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\left\{\begin{array}{c} u_x^1 \\ v_y^1 \\ \theta_z^1 \\ \hline u_x^2 \\ v_y^2 \\ \theta_z^2 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} .9272 & .375 & 0. \\ -.375 & .9272 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \\ \hline 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_X \\ V_Y \\ \Theta_Z \end{array}\right\}$$

3. 当产品: $\mathcal{A}^T\mathbf{K}^{(e)}\mathcal{A}$ 我们恢复全球结构 刚度矩阵

46.6 特殊 单元

46.6.1 强烈的折扣;

53 到目前为止, 所有成员都被认为是严格连接和连接中心线到中心线。在很多情况下, 我们都有一个绳子, 半紧的连接, 我们可能想考虑会员的折扣, 图 46.3.

自由体图

54 相应的自由体图, 图 46.4, 引导

$$\mathbf{p} = \lfloor\ N_1 \quad V_2 \quad M_3 \quad N_4 \quad V_5 \quad M_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{p}} = \lfloor\ \overline{N}_1 \quad \overline{V}_2 \quad \overline{M}_3 \quad \overline{N}_4 \quad \overline{V}_5 \quad \overline{M}_6\ \rfloor$$
$$\overline{\mathbf{u}} = \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{v}_2 \quad \overline{\theta}_3 \quad \overline{u}_4 \quad \overline{v}_5 \quad \overline{\theta}_6\ \rfloor$$

代表在硬链的内部和外部侧面行动的力量, 以及相应的外部转移。

平衡

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

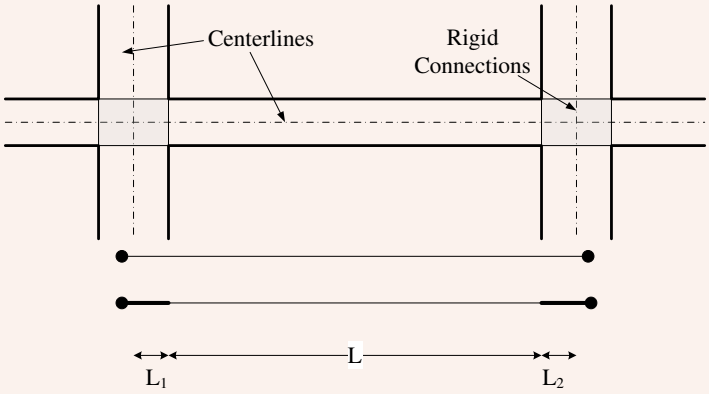


图 46.3: 梁 具有硬折扣

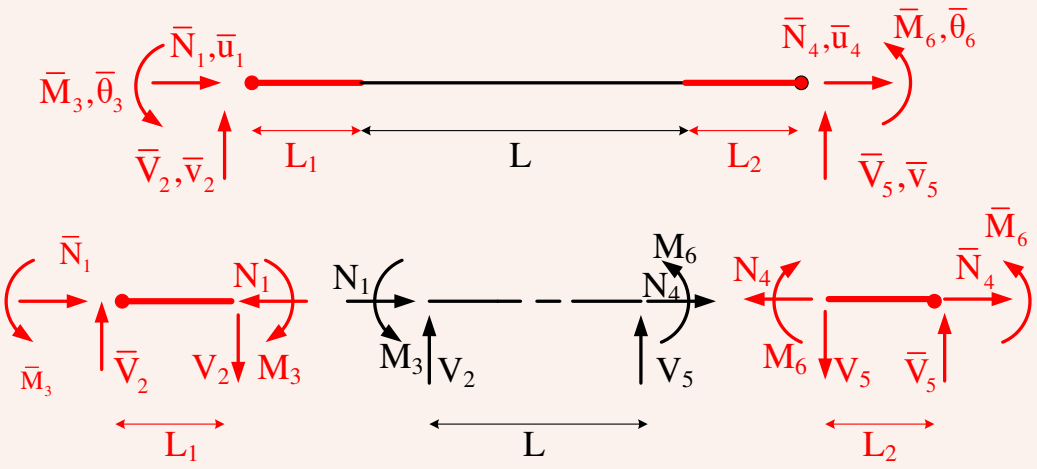


图 46.4: Fbd 的 梁 与硬折扣

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

55 外部和内部力量必须在平衡

$$\begin{aligned}\overline{N}1 = N_1; \quad \overline{V}_2 = V_2; \quad \overline{M}_3 = L_1V_2 + M_3\\ \overline{N}4 = N_4; \quad \overline{V}_5 = V_5; \quad \overline{M}_6 = -L_2V_5 + M_6\end{aligned}$$

或

$$\overline{\mathbf{p}} = \mathcal{B}\mathbf{p} \tag{46.24}$$

$\mathcal{B}$ 是的, **静态 矩阵** (Eq. 46.1)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix}$$

56 同样, 我们可以定义一个电影学矩阵 (Eq. 46.8) $\mathcal{A}$ 这样的那

$$\mathbf{u} = \mathcal{A}\overline{\mathbf{u}} \tag{46.25}$$

我们知道 (Eq. 46.9) 这 $\mathcal{A} = \mathcal{B}^T$.

密度和 NEF 矩阵

57 我们现在已经准备好确定泡沫元素的强度 粗糙的折扣 至于 已知的

$$\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku} \tag{46.26}$$

如果我们双边多重 $\mathcal{B}$ 取代 EQ。46.24 和 46.25 进入 46.26:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} &= \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{A}\overline{\mathbf{u}}\\ \mathcal{B}p + \mathcal{B}\mathbf{NEF} &= \mathcal{B}\mathbf{k}\mathcal{B}^T\overline{\mathbf{u}}\\ \overline{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{NEF}} &= \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

哪里

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & \alpha_1 & 0-12 & \alpha_2 & \\ 0 & \alpha_1 & \gamma & 0-\alpha_1 & \beta & \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -\alpha_1 & 012 & -\alpha_2 & \\ 0 & \alpha_2 & \beta & 0 & -\alpha_2 & \gamma \end{bmatrix}$$

和 $\alpha_i = 6L + 12L_i$, $\beta = 2L^2 + 6LL_1 + 6LL_2 + 12L_1L_2$, 和 $\gamma = 4L^2 + 12LL_2 + 12L_2^2$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

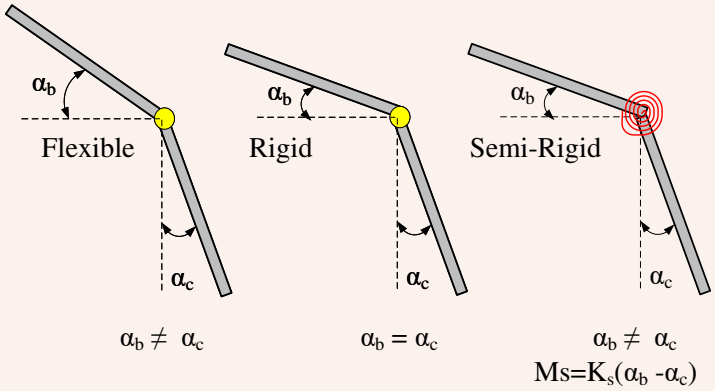


图 46.5: 灵活、坚固、半坚固的泡沫

58 最终的核心力量将由

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{FN_1} \\ \overline{FV_2} \\ \overline{FM_3} \\ \overline{FN_4} \\ \overline{FV_5} \\ \overline{FM_6} \end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} FN_1 \\ FV_2 \\ FM_3 \\ FN_4 \\ FV_5 \\ FM_6 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

46.6.2 半固体射击

标签: 适应 (Kassimali, 2021, pg. 532)

54 经常, 梁没有灵活或硬的连接。相反, 一半强 (如类型 II 钢材 连接), 图 46.5

55 一个常规射线元素的密度矩阵可以被表达为,Eq。41.1:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} FV_1 \\ FM_2 \\ FV_3 \\ FM_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{NEF}} = \underbrace{\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{46.27}$$

或者只是 $\mathbf{p} + \mathbf{NEF} = \mathbf{ku}$.

56 现在, 我们正在寻求确定带元素的坚固性与半硬连接

$$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

用 **k**、**NEF** 及两个弹簧刚度表示为 k^s_{lft} 和 k^s_{rgt} 左边和右边的成员 (第一和第二节点).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

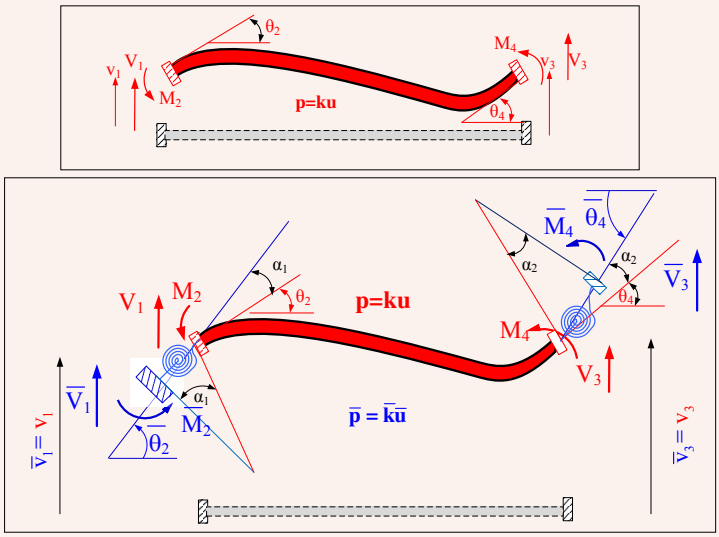


图 46.6: 半固体斑点的变形

自由体图

57 与图的参考 46.6 我们称之为

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \lfloor\ V_1 \quad M_2 \quad V_3 \quad M_4\ \rfloor \\ \overline{\mathbf{p}} &= \lfloor\ \overline{V}_1 \quad \overline{M}_2 \quad \overline{V}_3 \quad \overline{M}_4\ \rfloor \\ \mathbf{u} &= \lfloor\ v_1 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_4\ \rfloor \\ \overline{\mathbf{u}} &= \lfloor\ \overline{v}_1 \quad \overline{\theta}_2 \quad \overline{v}_3 \quad \overline{\theta}_4\ \rfloor\end{aligned}$$

行动的部队在内外侧的喷泉以及节点转移各方的内部和外部侧面。

平衡

58 平衡 表示 $\mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

59 至于移行，并假设喷泉是无限的微小，我们有

$$\begin{aligned} v_1 &= \overline{v}_1 \\ \theta_2 + \alpha_{\text{lft}} = \overline{\theta}_2 \Rightarrow \theta_2 &= \overline{\theta}_2 - \underbrace{\frac{M_2}{k^s_{\text{lft}}}}_{\alpha_{\text{lft}}} \\ v_3 &= \overline{v}_3 \\ \theta_4 + \alpha_{\text{rgt}} = \overline{\theta}_4 \Rightarrow \theta_4 &= \overline{\theta}_4 - \underbrace{\frac{M_4}{k^s_{\text{rgt}}}}_{\alpha_{\text{rgt}}} \end{aligned} \tag{46.28}$$

哪里 k^s_{lft} 和 k^s_{rgt} 右边和左边是相应的。

60 取代 EQ。46.28 到 eq。46.27 我们得到了

$$\begin{aligned} \overline{V}_1 + FV_1 &= \frac{EI}{L^3}\left[12\overline{v}_1 + 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 12\overline{v}_3 + 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\ \overline{M}_2 + FM_2 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 4L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 2L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\ \overline{V}_3 + FV_3 &= \frac{EI}{L^3}\left[-12\overline{v}_1 - 6L\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) + 12\overline{v}_3 - 6L\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \\ \overline{M}_4 + FM_4 &= \frac{EI}{L^3}\left[6L\overline{v}_1 + 2L^2\left(\overline{\theta}_2 - \frac{\overline{M}_2}{k^s_{\text{lft}}}\right) - 6L\overline{v}_3 + 4L^2\left(\overline{\theta}_4 - \frac{\overline{M}_4}{k^s_{\text{rgt}}}\right)\right] \end{aligned} \tag{46.29}$$

61 四个方程式相结合 (M_2 和 M_4 既在内外，又在刚度矩阵)，我们试图把它们分开，并在位移的意义上表达力量。

$$\begin{aligned} \overline{M}_2 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_b}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 4L^2(3-2\phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 + 2L^2\phi_{\text{rgt}}\overline{\theta}_4\right] \\ &\quad + \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4-3\phi_{\text{rgt}})FM_2 - 2(1-\phi_{\text{rgt}})FM_4\right] \\ \overline{M}_4 &= \frac{EI}{L^3}\frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_1 + 2L^2\phi_{\text{lft}}\overline{\theta}_2 - 6L(2-\phi_{\text{lft}})\overline{v}_3 + 4L^2(3-2\phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\right] \\ &\quad + \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2 + (4-3\phi_{\text{lft}})FM_4 - 2(1-\phi_{\text{lft}})FM_2\right] \end{aligned}$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

哪里

$$\phi_{\text{lft}} = \frac{k^s_{\text{lft}} L}{EI + k^s_{\text{lft}} L}$$
$$\phi_{\text{rgt}} = \frac{k^s_{\text{rgt}} L}{EI + k^s_{\text{rgt}} L}$$
$$\Phi = 12 - 8\phi_{\text{lft}} - 8\phi_{\text{rgt}} + 5\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}$$

ϕ 可以被解释为 A **硬度因素**. 紧密的连接 $\phi = 1$ 至於被打破的人, $\phi = 0$.

62 接下来, 我们将这些最后两个方程替换为 Eq 的第一个和第三个方程。46.29 并获得:

$$\begin{aligned}\overline{V}_1 = \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[&12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 + 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 - 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 \\ &+6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_1 - \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})FM_4\right] \\ \overline{V}_3 = \frac{EI}{\Phi L^3}\Big[&-12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_b\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_1 - 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}})\overline{\theta}_2 + 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}})\overline{v}_3 \\ &-6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}})\overline{\theta}_4\Big] + FV_3 + \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})FM_2 + (1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})FM_4\right]\end{aligned}$$

刚度矩阵

63 我们可以用这些表达方式来表达

$$\overline{P} = \overline{\mathbf{k}}\overline{u} + \overline{\mathbf{NEF}}$$

哪里

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{\Phi L^3}\begin{bmatrix} 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & -12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & 6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}}) \\ 6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & 4L^2\phi_{\text{lft}}(3 - 2\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} \\ -12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{lft}}(2 - \phi_{\text{rgt}}) & 12(\phi_{\text{lft}} + \phi_{\text{rgt}} - \phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}}) & -6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_b) \\ 6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}}) & 2L^2\phi_{\text{lft}}\phi_{\text{rgt}} & -6L\phi_{\text{rgt}}(2 - \phi_{\text{lft}}) & 4L^2\phi_{\text{rgt}}(3 - 2\phi_{\text{lft}}) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{FV_1} \\ \overline{FM_2} \\ \overline{FV_3} \\ \overline{FM_4} \end{Bmatrix}}_{\overline{NEF}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})\right] & 0 & -\frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})\right] \\ 0 & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[(4 - 3\phi_{\text{rgt}})\right] & \frac{\phi_{\text{lft}}}{\Phi}\left[-2(1 - \phi_{\text{rgt}})\right] \\ 0 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{lft}})(2 - \phi_{\text{rgt}})\right] & 1 & \frac{6}{\Phi L}\left[(1 - \phi_{\text{rgt}})(2 - \phi_{\text{lft}})\right] \\ 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1 - \phi_{\text{lft}})\right] & 0 & \frac{\phi_{\text{rgt}}}{\Phi}\left[-2(1 - \phi_{\text{lft}})\right] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} FV_1 \\ FM_2 \\ FV_3 \\ FM_4 \end{Bmatrix}}_{NEF}$$

64 很明显, 对于完全紧密的连接, $\phi = 1$ 我们恢复了原始的坚固性。火焰的矩阵,Eq。46.27.

65 如果我们表达了春天的坚固 k^s 如 $k^s = \alpha EI/L$ 然后, $\phi = \alpha/(1 + \alpha)$. 图 46.7 表明了依赖的 $\overline{K}_{22}$ 因子对 α (假设兩個 spr 有相同的堅固性).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

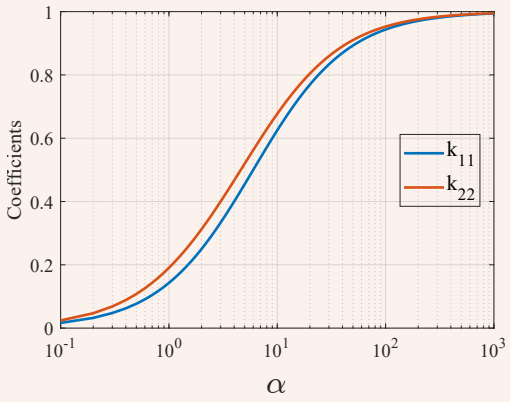


图 46.7: $\overline{K}_{22}$ 半灵活的连接率

观察

66 完全固定的连接, $\phi = 1$, we 恢复原始 刚度矩阵 的 梁。

67 如果我们设置 $\phi_1 = 0$ 和 $\phi_2 = 1$ 然后我们在左边有一个绳子, 右边有一个硬的连接和相应的刚度矩阵是:

$$\overline{\mathbf{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3L \\ 3L & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

68 刚度矩阵 的 梁 柱 右边的环将是:

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果手指在左端

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix}$$

69 要注意: 符合零本地 DOF 的全球 DOF 不应该是零, 即另一个单元应该是 “贡献” 在全球范围内。

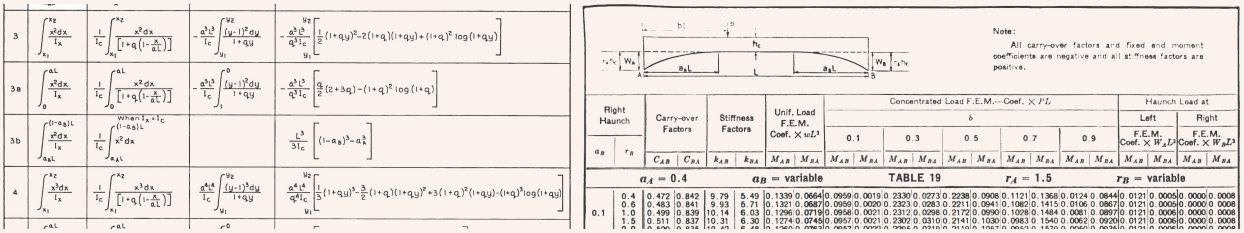
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

70 如果我们表达了春天的坚固 k^s 如 $k^s = \alpha EI/L$ 然后, $\phi = \alpha/(1+\alpha)$. 依赖于的 $\overline{K}_{22}$ 因子对 α (假设两条喷气具有相同的强度).

46.6.3 变量十字段

71 通常情况下, 在支座我们有负面时刻比中心的积极时刻更大。因此, 有一个有利于在支持下有一个更大的瞬间的无情的泡沫。(通过深度增加). 这是一个实用的尝试, 以时图为形状的梁 (单身 荷载).

72 因此, 需要确定这样的 单元 的 刚度矩阵。我所知道的, 没有任何出版物提供这个问题的简单解决方案, 最有权威的参考是: (Portland Cement Association, 1947). 这本手册值得一些评论, 因为它是一个大 **强力之旅** 三个账户:A) 复杂, 但优雅的解析解为复杂集成品, 图 46.8a; b) 26 张桌子,1320 名会员与 25 个不同尺寸组合考虑 46.8b; c) 易于使用。而且, 这些计算是在 1947 年进行的!好预算时代。与图的参考 46.9 我们定义



(a) 综合 解析 集成

(b) 数值 值

图 46.8: 来自框架常态手册的提取物 (Portland Cement Association, 1947)

a	长度的比例在终点 A 到长度间隔
b	长度的比例在结束 B 到长度间隔
h_a	高度 支座 A
h_b	高度在 支座 B
h_c	中间的高度
I_c	惯性矩 部分在中间
I_x	惯性矩 任何部分距离 x 从 A
r_a	$(h_A - h_c)/h_c$ 直角 截面 在 A 结尾
r_b	$(h_B - h_c)/h_c$ 直角 截面 在 B 端
x	从变量点到终点的距离 A

使用以下方程式为变量 惯性矩:

$$I_x = \begin{cases} Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)^2\right]^3 & \text{Parabolic haunches} \\ Ic\left[1 + r\left(1 - \frac{x}{aL}\right)\right]^3 & \text{Straight haunches} \end{cases} \tag{46.30}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

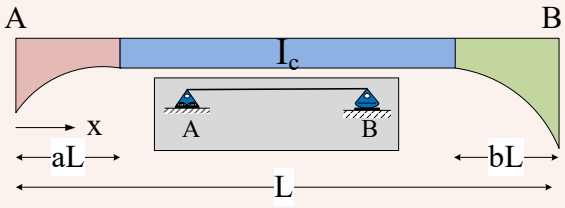


图 46.9: 梁 与变量部分

73 元素密度矩阵将由灵活性和静态一 (**d** 和 $\mathcal{B}$) (如同 EQ 中所产生的。46.22):

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

74 静态 矩阵 $\mathcal{B}$ 与内部力量的外部关系, 仅支持的梁是由

$$\begin{Bmatrix} R_1 = V_1 \\ R_2 = V_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

75 柔度矩阵 相反, 在章节中衍生 25, 在那里, 强度位移的关系是由

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

使用补充 虚功 (查普 24) 我们有

$$d_{ij} = \int_0^l \delta\overline{M}(x)_i \frac{M(x)_j}{EI_z} dx \tag{46.31}$$

这对一个持久深度的成员来说是简单的。

76 对于变量深度会员, 我们将需要替代由 Eq 提供的惯性矩 46.30 在 EQ。46.31, 并将整体分成三部分:

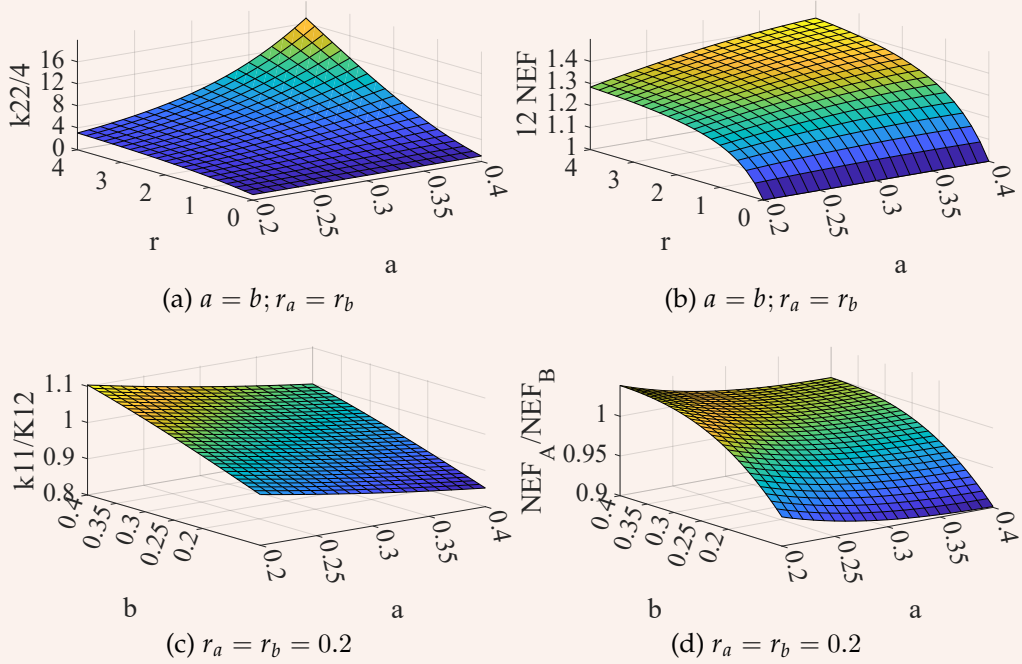
$$\begin{aligned} d_{ij} = &\int_0^{aL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,a,L,r_a}} dx && \text{Left haunch} \\ &+ \int_{aL}^{L-al} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_c} dx && \text{Central part} \\ &+ \int_0^{bL} \delta\overline{M}(x) \frac{M(x)}{EI_{Ic,b,L,r_b}} dx && \text{Right haunch} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

77 我试图用数学解决这些方程式, 但结果的解析解相当复杂和不实。因此, 解决方案必须以数字方式获得。因此,A MATLAB® 编码写了 (§I.2.9) 如同 EQ。41.1 它可以被修改, 以反映两种平凡或直角的存在。

$$\mathbf{k}^b = \begin{array}{c} \\ V_{1y} \\ M_{1z} \\ V_{2y} \\ M_{2z} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_{1y} & \theta_{1z} & v_{2y} & \theta_{2z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

它被用来产生在图中显示的插件。46.10 和 46.11 与 $L = I_z = w = 1$. 請注意這 k_{22} 和 The **NEF** 相应的 4 和 12 是正常化的。(相应的常态 截面 的比例).



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$

(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

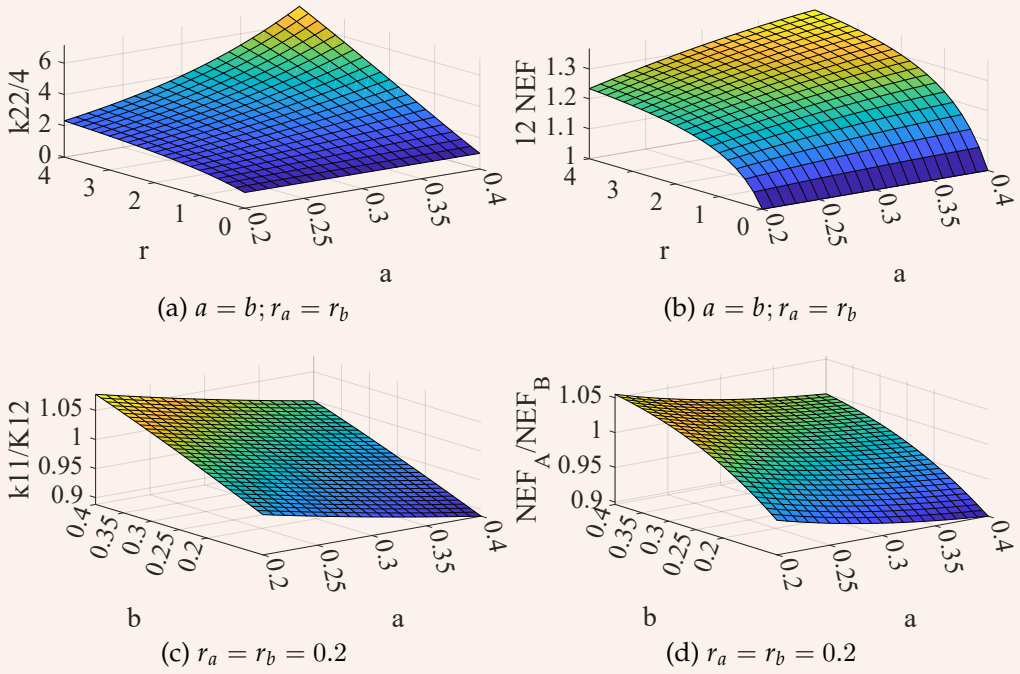
图 46.10: 线性不同深度的部分; 参数研究

46.7 瞬间框中的侧驱动的来源

78 在一个建筑物 框架 可以动态分析 - 找到它的自然时期, 其模式形状, 或其地震反应 必须首先要理解它的 **侧面硬度** k. 自然时期 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ 完全由此统治。数量, 以及一个误解在哪里 k 来自领袖必然是对随之而来的所有事物的误解。因此, 本节以谨慎的解析分解开始。在瞬间抵抗的框架中, 前方冲动的来源任何动态力量或动态效应都被引入。

79 这里提出的问题是由一个有影响力的论文启发的 Powell, 2008, 谁认为结构分析教育致

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) $a = b; r_a = r_b$ (b) $a = b; r_a = r_b$

(c) $r_a = r_b = 0.2$ (d) $r_a = r_b = 0.2$

图 46.11: 参数不同深度的部分; 参数研究

力于太多的努力, 经典手工方法 — Slope-Deflection, Moment Distribution, 密度矩阵组合 — 而且太少到实际上有什么意义: 理解计算结果在物理上意味着什么, 并承认当它是错了。

80 帕威尔的办法是把计算机程序放在学生手中。从第一天开始, 让物理洞察力从导向的数值中成长实验: 改变梁的坚定性, 观察冲动, 检查平衡 有一个自由的身体, 重复。我们对这个哲学和问题非常同情。下面密切关注 Powell 的结构。

81 但是, 在这种类型的处理中 - 针对那些希望理解结构性行为的原则, 而不是开发日常设计实践 我们故意遵循不同的路线 而不是通过计算机实验引导读者, 我们解析解 以 框架 的形式衍生参数 V, H, L, EI_c, 和 EI_b. 原因很简单:Algebra 可见 什么是计算机隐藏。

82 封闭形式表达式立即显示哪个参数控制流动性, 波和列灵活性如何通过合体相互作用平衡, 为什么一个列中的通胀点移动时梁 变化, 在哪里的四因子之间的粘贴和固定基层的固体来自。

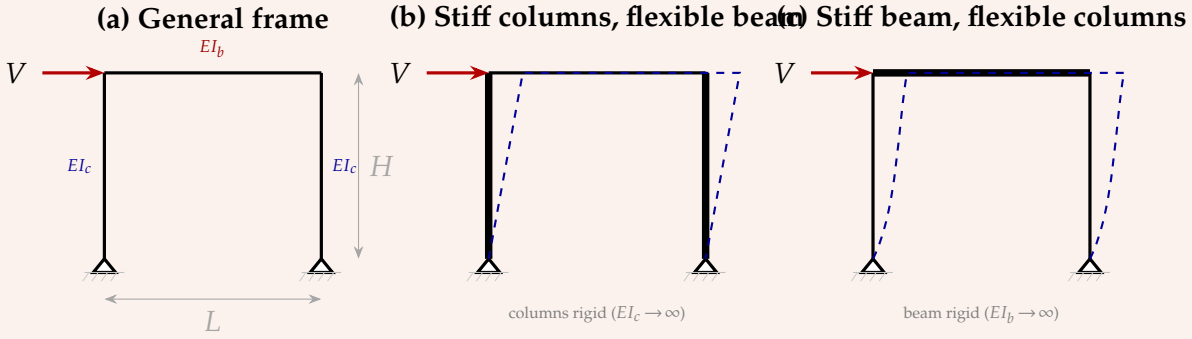
83 這些是 Powell 想要的物理真相。工程师要明白; 我们只是相信, 因为数学上倾向的读者, 一个精心解释的解析衍生品更直接和更持久的理解, 而不是一个参数。数值 研究。

84 这两种方法是补充的, 而不是竞争的。一位通过 algebra 工作的人, 一旦在计算机打印机中立即识别 D 值公式, 将本能地知道是否在一个柱图表是可行的, 并且会立即理解为什么以天文学为主, 在 “硬” 单元数值 溶液中毒。

85 Powell 的计算机实验和下面的解析处理最终, 教导相同的物理真理; 它们只在路径是为了达到它。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

86 框架 全方位考慮為 n 商店 , m 贝时刻抵抗 框架。重量被编号 1 (土地) 到 n (天花板)store i 有高度 h_i 和 Bay j 有宽度 L_j. 柱 (i,j) 具有灵活性 $EI_{c,ij}$ 和 梁 在水平 i 巴伊 j 具有灵活性 $EI_{b,ij}$. 侧重负载 $\{F_i\}$ 每个楼层的行动; store 在水平上 i 是这个水平以上的累积 荷载 , $\hat{V}_i = \sum_{k=i}^{n} F_k$. 所有成员都是普里斯马特的, 分析是线性弹性。基地固定, 除非另有规定。单楼, 单台的案例 ($n = m = 1$, 荷载 V 天花板上, 高度 H 宽度 L) 它一直被用作初级描述案例; 将多层框架的通用化明确指出行为在质量上有所不同重要途径



基本研究

Question 1 — 完整 框架 分析

分析 框架 既有斑点和列可变。识别 自由度, 写下侧面结构硬度, 并获得天花板驱动 Δ, 柱 终点时刻和 柱 表在 V, H, L, EI_c, EI_b. 对于多层通用, 请描述 刚度矩阵结构和仓库驱动方程式。

Solution

自由度. 对于单台, 单台框架有三个独立的标签: 天花板 Δ 兩個 梁 - 柱 組合旋转 θ_L, θ_R. 因同义 $\theta_L = \theta_R \equiv \theta$ 减少系统兩個未知的 (Δ, θ).

Slope-挠度 等式。 每個 柱 (长度 H, 密码 转角 $\psi = \Delta/H$, 近端 转角 θ, 远端 转角 0 在固定基地):

$$M_{\text{top}} = \frac{2EI_c}{H}(2\theta - 3\psi),$$
$$M_{\text{bot}} = \frac{2EI_c}{H}(\theta - 3\psi).$$

為 梁 (无代码 转角, 远端 转角 $-\theta$ 由反对象):

$$M_{\text{beam}} = \frac{2EI_b}{L}(2\theta + \theta) = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

共用 平衡 ($\sum M = 0$ 在梁级别):

$$2M_{\text{top}} + M_{\text{beam}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

端口 平衡 ($\sum Q = V$, 每個 柱 Shear $Q = (M_{\text{top}} + M_{\text{bot}})/H$):

$$\boxed{\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c}\cdot\frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.}$$

柱 Shear: $Q = V/2$ (反对象). 柱 终点:

$$M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+\rho/3}{1+\rho/6}, \qquad M_{\text{top}} = \frac{VH}{4}\cdot\frac{1+2\rho/3}{1+\rho/6}.$$

多层通用化。 有了硬达法格姆层, 侧 DOF 是 n 地板移居 $\{u_i\}$. 以 向量 的名义订购这些, 全球侧 刚度矩阵 是三角形:

$$\mathbf{K}_{\text{sway}} = \begin{bmatrix} k_1{+}k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2{+}k_3 & -k_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -k_n & k_n \end{bmatrix},$$

哪里 k_i 是的, 在水平上有 sti i (总数 全部列, 修改为 梁 灵活性如上所述). Storey 流动 $\delta_i = u_i - u_{i-1}$ 他们从 $\mathbf{K}_{\text{sway}}\mathbf{u} = \mathbf{F}$.

Question 2 - 板架构限制: 无限的硬点

让 $EI_b \to \infty$ (形象 c). 由侧密度、天花板冲动和柱时刻图衍生。解释脱落的形状。通用到 n 斯特里斯

Solution

与 $EI_b \to \infty$, 合体旋转被抑制 ($\theta = 0$, $\rho \to \infty$). 每個 柱 都會像一個 固定 - 固定 成員雙重曲率.

侧面硬度和振动:

$$k^{\infty} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \boxed{\Delta^{\infty} = \frac{VH^3}{24EI_c}.}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

柱 时刻 (平等的顶部和底部, 影响中高):

$$M_{\text{top}} = M_{\text{bot}} = \frac{VH}{4}.$$

脱落的形状。 梁 作为一个固体, 没有 转角. 兩個列都變成雙重 曲率 (S 形状) 以一片侵入正直在中高点。這是 **沙尔建造** 假设, 广泛使用在初步设计。
多层楼。 平面上的坚固性 i 总的来说, 是全部 $m+1$ 列:

$$k_i = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}.$$

每个列都携带与其密度相比例的叶子; 每个 柱 的旋转时刻图表与通胀点在中等高度, 无论水分数量如何。用于单一屋顶负载下的统一框架 V 每一个流浪的相同的金额 $\delta = V/k$ 以线性为不同, 位移 个人资料

Question 3 — 梁-灵活性限制和 cantilever 模式

让 $EI_c \to \infty$ 要弯曲, 但保持最终的轴性坚固 EA_c (形象 b). 顯示 框架 現在在 A 中分解 **灵活的** *Cantilever* 时尚由列的差异性轴形变动引发。取出相应的天花板驱动。讨论当这种模式与 Shear-Building 模式

Solution

梁灵活性贡献 (单身商店). 当列是灵活的硬, 没有柱弯曲发生。共同旋转 θ 完全由 梁 的灵活性控制。设置 $EI_c \to \infty$ 在合并 平衡方程 提供

$$\theta = \frac{VH^2\,L}{12\,EI_b},$$

由 转角 单独驱动 (“梁灵活性驱动”):

$$\Delta^{\text{beam}} = \theta H = \frac{VH^3}{12\,EI_b/L \cdot H^2}.$$

坎特利弗 (轴) 时尚对于一个多层框架与灵活硬列, 框架 围绕其基础像垂直的岩石。相同的柱轴系统的灵活性是

$$EI_{\text{eq}} = \sum_j EA_{c,j}\,s_j^2,$$

哪里 s_j 是 柱 的距离 j 从中枢轴。天花板的旋转则相同于一个角膜:

$$\boxed{\Delta^{\text{ax}} = \frac{VH^3}{3\,EI_{\text{eq}}}.}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

这个模式什么时候会重要? 轴与甲板构建冲动的比例大约是

$$\frac{\Delta^{\mathrm{ax}}}{\Delta^{\infty}} \propto \frac{I_c\, H^2}{A_c\, s^2},$$

與 框架 成長的 **滑雪** H/B 哪里 B 是的, 天空宽。低高框架 ($H/B < 3$) 轴模式是不可忽视的。用于滑板高级框架 ($H/B > 6$–8) 它可以贡献 30–50 % 总流动, 必须明确控制增加 柱 区域或添加一个坚固的核心。

Question 四、冲动组件的过度配置

表明, 总流量可以大约分解为

$$\Delta \approx \Delta^{\mathrm{col}} + \Delta^{\mathrm{beam}} + \Delta^{\mathrm{ax}},$$

解释为什么这种分解是接近的而不是准确的, 讨论其实际价值。

Solution

三个来源。 问答的完整流动 1 可以写到第一命令如下:

(i) **柱 旋转** Δ^{col}: drift 當 The 梁 是硬的 (问题 2).
(ii) **梁 灵活性** Δ^{beam}: 额外從結合 转角 流動, 當列硬 (问题 3).
(iii) **柱 轴** Δ^{ax}: 摇滚模式从差异性柱延伸 (问题 3).

添加这三个给了大约的公式; 准确的结果从问题 1 表明, 三个来源通过共同的互动平衡, 产生交叉的术语, 即简单的金额忽略。数量上, 添加接近中的错误通常是 5–15 % 对于实用的框架比例

为什么不准确。 列弯曲产生结合旋转, 增加泡沫时刻; 泡沫灵活性减少列时刻, 改变通胀点; 轴形变小轻地改变了有效的柱高度。这些相互作用仅通过完整的密度被捕获。解决方案。

实用价值。 尽管接近, 但分解是最有用的。可用的诊断工具它立即确定哪个来源主导, 因此在哪里应引导施加努力: 施加列要减少 Δ^{col}sti 打破的射击, 以减少 Δ^{beam} 增加 柱 区域或添加一张叶墙要减少 Δ^{ax}. 没有计算机输出, 无论细节如何, 都将这种物理直接理解。

Question 5 — 平衡 检查

使用自由体图表来验证: (a) 柱 Shears 的总值相同的应用侧 荷载; (b) 柱 表格一致与柱的终点; (c) 共用时刻 平衡满足于 beam - 列连接。一般化到多层 框架.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Solution

(a) 全球水平 平衡. 通过框架在任何层次的垂直切割表明, 柱 叶的总值必须相当于上面的侧面力量。切割。对于单层框架: $Q_L + Q_R = V$. 以抗同位素 $Q_L = Q_R = V/2$. 为多层 框架 在商店 i: $\sum_j Q_{ij} = \hat{V}_i = \sum_{k \geq i} F_k$. ✓
(b) 瞬间 - 保持一致性。 隔离一个 柱 的高度 h 作为一个自由的身体:

$$Q = \frac{M_{\text{top}} + M_{\text{bot}}}{h}.$$

取代问题时刻 1 确认 $Q = V/2$ 为两个列。✓
(c) 共用时刻 平衡. 在 梁 - 柱 合金中 (天花板, 左 柱):

$$M_{\text{col,top}} + M_{\text{beam,left}} = 0,$$

伊。列的顶部时刻必须是平等的, 反对泡沫。最后一刻, 在这个团结中。取代问题 1: $M_{\text{col,top}} + \dfrac{6EI_b}{L}\theta = 0$ 被满足的由斯洛普 - 分解合并平衡构建平等。✓
多层合并 平衡. 在内部的共同点 (地板 i, 柱 线 j):

$$M_{ij}^{\text{col,top}} + M_{i+1,j}^{\text{col,bot}} + M_{b,ij}^{\text{left}} + M_{b,ij}^{\text{right}} = 0.$$

这一点必须在每个组合中进行验证; 任何违规行为都表明模型错误平衡 类型的检查是最可靠的工具计算机模型中的错误检测和 Powell (Powell, 2008) 正确地识别它们作为一个必需的工程技能。

Question 6 - 直接地质验证

關於清算限制 (问题 2), 检查使用的流动 $\delta = PL^3/12EI$ 对于固定 - 固定 柱. 对于梁灵活性贡献 (问题 3) 使用 梁转角 公式 $\theta = ML/6EI_b$ 估计额外的流浪。显示这些如何结合, 以提供 D 值接近。

Solution

由直接地质学驱动。 固定 - 固定 柱 的高度 H 在 Shear $Q = V/2$ 發展一点在中高。每半行事为固定长度的分支 $H/2$ 在 荷载 Q:

$$\Delta = 2 \times \frac{Q(H/2)^3}{3EI_c} = \frac{VH^3}{24EI_c},$$

确认问题 2 准确。✓
梁 - 灵活性修复。 梁, 在平等和相反的结尾下反对。时刻 M, 有结束 转角 $\theta = ML/6EI_b$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

此合金 转角 添加流动 θH 到 柱-bending 流浪。设置 $M = M_{\text{top}}$ 以完整的解决方案和表达结果作为硬梁驱动的纠正因素，给出 D 值 为 柱 (i, j):

$$D_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \frac{12\,EI_{c,ij}}{h_i^3}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{K_{c,ij}}{K_{c,ij} + \frac{1}{2}(K_{b,ij}^{\text{above}} + K_{b,ij}^{\text{below}})},$$

与 $K_c = EI_c/h$, $K_b = EI_b/L$. 包括 梁 灵活性在内的存储驱动是:

$$\boxed{\delta_i = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}}.}$$

D 值方法恢复了准确的结果，当 $\alpha = 1$ (硬 梁) 提供可靠的接近 (通常在 5 至 10 % 密度 - 矩阵 结果) 对于所有实用强度比例。

Question 7 — 梁 终端旋转和时刻

由于天花板的流动 Δ 从问题 1、计算合并转角 θ 并确保 梁 终点时刻计算为梁的坚定性与全球分析中获得的相同。将其通用到多层 框架，并指定合体 平衡一般内部节点的方程式。

Solution

单层 框架。 由 平衡 衍生在 问题 1:

$$\theta = \frac{6EI_c\,\Delta/H^2}{8EI_c/H + 2EI_b/L}.$$

梁 终点 (反对式旋转，远端转角 $-\theta$):

$$M_{\text{beam}} = \frac{6EI_b}{L}\,\theta.$$

替代 θ 然后 Δ 从问题 1 恢复 M_{top} 正确的。✓
多层 框架。 在一个整体的内部 (地板 i, 柱 线 j)，该平衡方程 是:

$$\left(\frac{4EI_{c,ij}}{h_i} + \frac{4EI_{c,i+1,j}}{h_{i+1}} + \frac{4EI_{b,ij}}{L_j} + \frac{4EI_{b,i,j-1}}{L_{j-1}}\right)\theta_{ij} = \text{carry-over terms} + \text{chord-rotation terms}.$$

承载条件源于附近关节的旋转; chord-转角 术语与间层流程相比例 δ_i 和 δ_{i+1}. 把这个方程式聚集在每一个组合中，并将其与存储的平衡方程式提供完整的固态系统解决問題 1.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

更多研究

Question A1 - Pinned vs 固定基

对于单层 框架 与硬 梁 的, 比较侧面硬度与粘贴和固定 柱 基。分析证据表明, 粘贴基 框架 是正确的四倍。更灵活。绘制和解释两个案例的旋转时刻图表。通用到一个多层框架并讨论如何基础条件传播到上层。

Solution

固定基, 硬 梁. 每個 柱 都是固定 - 固定; 從 問題 2:

$$k^{\text{fixed}} = \frac{24EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{fixed}} = \frac{VH^3}{24EI_c}.$$

平板基, 硬 梁. 每個 柱 在基礎上並固定在頂部。(无 转角, 硬 梁): 固定 - 粉碎的 cantilever。柱 固定在顶部和粘贴在基础上的标准公式:

$$k_{\text{col}}^{\text{pinned}} = \frac{3EI_c}{H^3}, \qquad k^{\text{pinned}} = \frac{6EI_c}{H^3}, \qquad \Delta^{\text{pinned}} = \frac{VH^3}{6EI_c}.$$

灵活性比例:

$$\frac{\Delta^{\text{pinned}}}{\Delta^{\text{fixed}}} = \frac{VH^3/6EI_c}{VH^3/24EI_c} = 4. \qquad \checkmark$$

四的比例直接从坚固的比例中跟随因子: $12EI/H^3$ (固定 - 固定) 相反 $3EI/H^3$ (固定 - Pinned).

Bending 时刻图表固定基础, 两个列都具有相同的顶部和底部时刻。$M = VH/4$ 二重曲率 , 与一点冲击中高。以平面基础, 时刻在基地上是零, 升线。到 $M = VH/2$ 在 梁 级别, 而 柱 变形在单一曲率 没有通胀点。梁的终点是两倍大, 基于粘贴的基础。

多层 框架。 四是只适用于 **第一条大道** • 顶部是由点击的顶部和底部连接, 并保持固定 - 固定无论基本条件如何。然而, 更大的第一层驱动改变了瞬间需求第一层喷雾: 有粘着的基地, 这些喷雾必须抵抗二是固定基地案例的终点, 可以控制梁 设计在低升框中。

Question A2 - 不同成员尺寸的影响

讨论如何改变冲动配置和柱时刻分布当 (a) 柱 尺寸在顶部的仓库中减少, 并且 (b) 梁 尺寸不同地板。确定密度比例 $\rho = EI_bH/(EI_cL)$ 如同 The 管理参数并描述其限制行为。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Solution

管理参数。 从问题 1、全流是:

$$\Delta = \frac{VH^3}{12EI_c}\cdot\frac{1+\rho/2}{1+\rho/6}, \qquad \rho = \frac{6EI_c\,L}{EI_b\,H}.$$

限制	ρ	驱动	柱 时刻模式
硬 梁	$\rho \to 0$	$VH^3/24EI_c$	二重 曲率 $M_{\text{top}} = M_{\text{bot}}$
硬 柱	$\rho \to \infty$	$VH^3L/(12EI_bH^2)$	单元 曲率 $M_{\text{bot}} = VH/2$
实用	$\rho \approx 1$–6	中间	混合,IP 高于中等高度

变量 柱 尺寸 (多层). 如果 柱 尺寸在顶部的仓库中减少比仓库更快毛巾下降, 顶部的毛巾变得相对更灵活和 Drift Profile 是 **重型**. 相同的 框架 保持大约均匀的流动比例 δ_i/h_i 在各级。

影响点位置。 柱的通胀点 (i, j) 超越中等时下面的 梁 比上面的 梁 更强 (或接近时一个基于) 降落到中高, 如火焰变成更有可能平等。跟踪通胀点位置是可靠的质量检查计算机时刻图表的可行性。

Question A3 — 梁 - 柱 连接的坚固终端区域

添加硬端区域长度 $a = d_c/2$ 每個 梁 結束時, 计算最终 柱 宽 d_c. 展示如何有效的清晰的延伸 $L' = L - d_c$ 改变的梁 密度比例, D 值和存储驱动。修正在高框中更重要吗?

Solution

修正的密度率。 取代全域 L 以清晰的间隔 $L' = L - d_c$ 在所有 梁 硬度表达:

$$K_b' = \frac{EI_b}{L'} > K_b = \frac{EI_b}{L},$$

给一个更大的 α', 更大的 D 值, 因此一个**更小** 德里特:

$$\delta' = \frac{\hat{V}_i}{\sum_j D_{ij}'} < \delta.$$

对于一个典型的钢框 $d_c \approx 0.4$ m 和 $L = 6$ m, 修正是 $L'/L = 5.6/6 \approx 0.93$, 给予 $K_b'/K_b \approx 1.07$ (7 % stiffer beam) and a drift reduction of 约 5∼8 %.

更重要的是在高层。 在高框中, 柱高度纠正是相对较高的。重要。If $h = 3.5$ m 和 $d_b = 0.5$ m (梁 深度), 清晰的 柱高度是 $h' = 3.0$ m 和 柱 密度比例是 $(h/h')^3 = (3.5/3.0)^3 \approx 1.59$ — a 59 % 增加在柱 旋转硬度, 在严重的分析中不能忽略。忽略多层 框架 的板块区域通常过度预测侧面冲动 15 - 30 %.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Question A4 - 天文坚固的列: 数值 准确性

设置 $EI_c = \alpha\, EI_b$ 与 $\alpha \gg 1$ 模拟硬度列。顯示 刚度矩阵 的條件數量是如何成長的 α, 估计 数值 精度的损失, 并识别超越结果不可靠的实用限制。

Solution

条件号。 收集的 刚度矩阵 的条件号为 $\kappa(\mathbf{K}) \sim \alpha = EI_c/EI_b$. 為 $\alpha = 10^n$ 大约 n 精度的十数数字失去了解决方案。标准双精度算法 (大约 15 个重要数字) 使用的精度减少到 $15 - n$ 数字。

力量恢复。 即使移行仍然是可接受的准确, 力量在非常坚固的成员被计算为坚固 × 位移: 一个大数字, 加倍一个非常小的数字, 这是一个**灾难性取消** 在浮动点的算法。灵活成员的力量 (比亚姆) 一般是可靠的; 天文上坚固的列中的力量不存在。

实用的边界。 Ratios 到 $\alpha \approx 10^3$–10^4 安全的标准二重精度溶剂, 可容纳 50 个架子。除此之外, 最受欢迎的治疗方法是严格链接限制。(问题 A5) 没有延长精度。

物理解释。 即使在 数值 失败之前, 创建列 100 或更多次比射击更强, 产生物理上的结果。不可分离的真实硬-柱限制; 额外的硬度没有实用的效果在冲动或梁时刻。这是一个制度, 在那里的布局模型是基本上是框架的准确描述。

Question A5 - 固定链接限制: 准确的 P、M、V 值

取代天文密集的问卷列 A4 与**硬链接限制** (主 - 奴隶电影限制). 解释为什么这种方法是数字稳定和物理准确, 为什么 P M, V 值计算在被限制的会员不同于计算中的会员 A4. 确定硬直径是最常见的特殊案例。

Solution

电影制限主节点之间的紧密联系 A 奴隶节 B 强迫

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{T}_{AB}\, \mathbf{u}_A,$$

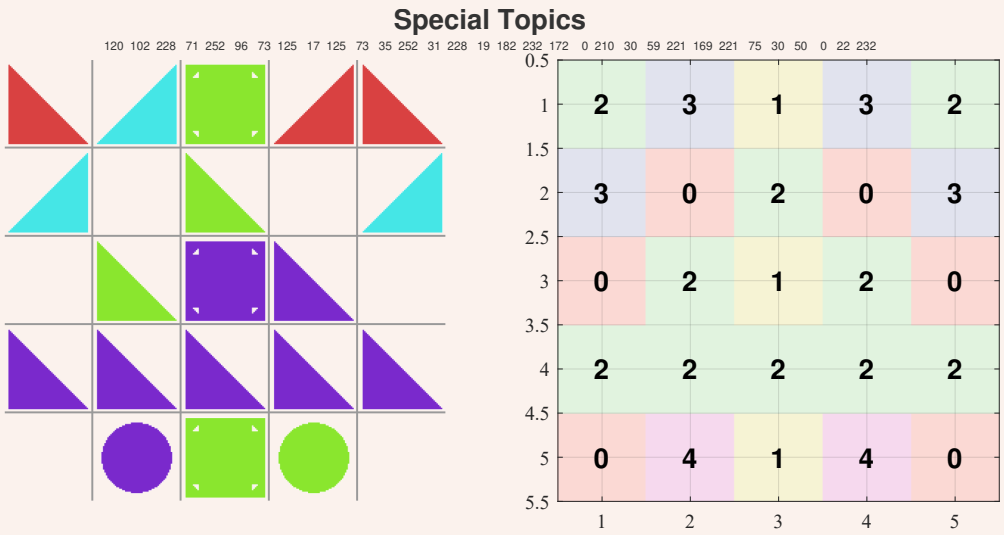
哪里 $\mathbf{T}_{AB}$ 是硬体转型。奴隶 DOF 被排除在全球体系中; 限制武力从平衡中恢复 **附近灵活成员** 独自一人 - 没有大硬度出现在任何地方计算的。结果是数字准确的, 完全独立于密度比例。

為什麼 P, M, V 值与问题不同 A4. 在大密度模型中, 柱的力量被计算为 $F = K_c\, \delta$ 一个大和一个小数量的产品, 相应的价值, 只有当 $\alpha \to \infty$ 和遭受灾难性取消的最终准确性。有了固定的联系, 限制力是准确的静态。反力 需要执行 变形协调, 直接从平衡 连接的灵活会员。当使用硬链接限制时, 计算机报告**零** 内部 P, M, V 在 限制 单元 (自从它没有变形。) 所有的力量都被限制。反应 - 物理准确和数字稳定。

强烈的幻灯片。 硬地板直径, 几乎每个多层使用建筑模型, 正是一组严格的链接限制确保在某个地板层的所有节点都处于相同的状态垂直翻译加上一个硬体转角. 内置 Diaphragm 力量 (轴力, Shears) 被恢复作为限制反应: 准确, 良好的条件, 独立在模型中所

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分配的厚度。相同的原则应适用于每次结构性 单元它是真正的坚固: 模型它与限制, 而不是非现实的巨大的。



具体的分类, chapter H

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

47 机械中的变量计算:Euler-Lagrange 框架

摘要

本章开发了机械学的变量方法理论框架, 为下一章讨论的基于能源的方法提供了基础。

它开始了一个引入, 对抗新东尼亚和拉格兰的方法结构分析, 强调变量原则在机械中的作用。*Euler* 部分引入 变分法, 定义功能和衍生 *Euler-Lagrange* 方程, 这些方程是静态和动态的中心。强大的形状之间的区别 (差异方程式) 弱形状 (全面声明) 它们在机械学方面具有重要意义。

接下来, 章节探讨了边界条件, 区分基本和自然的边界状况及其在变量形式中的影响。

总的势能原则作为以能源为基础的方法的角落, 导致虚功原理。最后, 汉密尔顿的原则被介绍, 将变量方法扩展到动态系统, 随后讨论了多领域变量原则, 包括 *Hu-Washizu* 表述.

虽然这篇文章从 (*Reddy, 2017*; *Sokolnikoff, 1956*; *Pilkey and Wunderlich, 1994*), 努力在这一和随后的讨论中统一一致性评论。该材料是为对结构力学有强烈的数学兴趣的读者提供的; 专注于应用程序的人可以直接进入下一章。

47.1 引入 1421
47.2 Euler 1422
47.2.1 初步 1422
47.2.2 不同形式的 $\delta\Pi$ 1424
47.2.3 欧拉方程 1425
47.2.4 $\delta\Pi$ 1426
47.2.5 观察 1426
47.2.6 边界条件 1426
47.3 总数 势能 原则 1430
47.4 汉密尔顿 1433
47.4.1 动态; Euler/Lagrange 1433
47.4.2 例题 47.3: 汉密尔顿 1437
47.5 Hu-Washizu 变量原则 1440
47.6 “色情名称” 图表 1443
47.6.1 德 • 阿伦伯特的原则 1443
47.6.2 汉密尔顿的平衡 1444
47.6.3 拉格兰的平衡 1444

47.1 引入

1 到目前为止, 结构的分析已经通过在部分差异方程式方面表达的具体边界值问题解决实现。

2 但是, 结构工程 (和机械) 可以从两个不同的角度接近:

纽顿 平衡, 动机的平衡 (平衡).

拉格兰 方法: 能量平衡 (热力学).

3 第二种方法, 利用具有平衡弹性体的状态的最低原则, 在本章中开发。这是一个基于使用直接方法的方法, 在变分法首先由 Rayleigh 和 W 提出。里斯, 然后由 R。流动,B。加勒比和其他人

4 这个章节将:

审阅稿

1. 提供严格的变量方法框架, 这些方法是所谓的基础。“能量” 方法。在这样做中, 正式定义自然和基本边界条件。
2. 把各式各样的 “能源方法” 并证明他们都是 (基本上) 相同的。
3. 發展的 **虚拟位移的原理** 作为有限元法的先例。
4. 显示所谓强形之间的双重性 (差异方程式) 弱形状 (满足一个原则在平均意义上).

47.2 Euler

47.2.1 初步

5 差异计算 (DC) 其中一个或多个变量的功能, 而变量计算 (VC) 它涉及一个功能或一个功能的功能。

6 另一方面, 计算变量的基本问题是找到一个功能。$u(x)$ 这样的那

$$\Pi(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))dx \tag{47.1}$$

它是静态的。

$$\delta\Pi = 0$$

哪里 δ 指示了 **变量运营商** (不要与衍生品混淆)

7 定义 $u(x)$ 要成为一个功能 x 在间隔中 (a, b), 和 F 成为一个已知的真实功能 (如 能量密度) 我们定义了 **域名** 函数作为属于函数空间中的函数类别的可接受功能集合而不是协调空间中的区域。(这就是一个功能的情况。).

8 查找功能 $u(x)$ 哪些极端 Π. 所以, 让 $\tilde{u}(x)$ 成为极端功能的邻近路径的家庭 $u(x)$ 假设在最后一点 $x = a, b$ 他们相匹配。

9 定义 $u(\tilde{x})$ 作为极端化的路径和某些自愿的变异的总数, 图 47.1.

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) = u(x) + \varepsilon\eta(x) = u(x) + \delta u(x) \tag{47.2}$$

哪里 ε 这是一个小参数, 而且 $\delta u(x)$ 是的, **变量** 由 $u(x)$

$$\begin{aligned}\delta u &= \tilde{u}(x, \varepsilon) - u(x)\\ &= \varepsilon\eta(x)\end{aligned}$$

和 $\eta(x)$ 它是可区分的两倍, 具有不确定的宽度, 但它是这样 $\eta(a) = \eta(b) = 0$. 請注意這 $\tilde{u}$ 相匹配与 u if $\varepsilon = 0$.

10 请注意:

- 在 DC 中极端化一个值的必要条件是, 第一衍生品等于零, 而在 VC 中第一变量为零。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

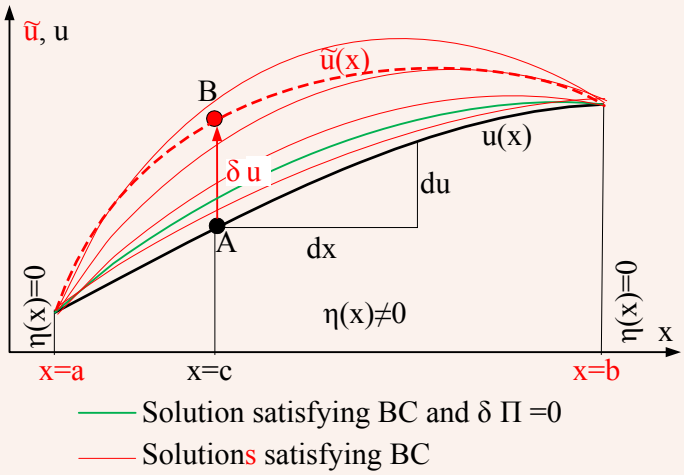


图 47.1: 变量和差异运营商

- 极端化的结果是一个单一变量。x 在 DC, 以及 $u(x)$ 在 VC。

11 变量运营商 δ 与此相似的 δ 与虚拟 位移 后来相关。

12 可以证明, 变量和衍生运营商是转换的。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\\ \delta u' &= \tilde{u}'(x,\varepsilon) - u'(x)\end{aligned}\right\} \frac{d}{dx}(\delta u) = \delta\left(\frac{du}{dx}\right)$$

13 变量运营商 δ 与差异计算运营商 d 可以用同样的方式, 即

$$\begin{aligned}\delta(u')^2 &= 2u'\delta u'\\ \delta(u+v) &= \delta u + \delta v\\ \delta\left(\int u dx\right) &= \int(\delta u)dx\\ \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\end{aligned}$$

但是, 它们显然有不同的意义。du 与近距离的附近点相连。dx 但是 δu 这是一个小意志性的功能变化。u 对于一个给予的 x (没有联系人 δx).

14 边界在哪里 u 它是指定的, 它的变量必须是零, 它在其他地方是自愿的。变量 δu 由 u 有人说, 我们正在进行虚拟变革。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

47.2.2 不同形式的 $\delta\Pi$

15 切割变量 表述 ($\delta\Pi = 0$) 在一个差异的 $\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ 使用基本计算。

16 定义 $\Phi(\varepsilon)$ 如

$$\Phi(\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \Pi(u + \varepsilon\eta(x)) = \int_a^b F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))dx \tag{47.3}$$

请注意, 这将被称为 **弱形** ("弱点" 因为它需要一个更小的命令的衍生品).

17 因为 $\tilde{u}(x) \to u(x)$ 如 $\varepsilon \to 0$ 所需的条件为 Π 成为一个极端是

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

18 来自 EQ。47.2 $\tilde{u} = u + \varepsilon\eta$, 和 $\tilde{u(x)}' = u'(x) + \varepsilon\eta'(x)$, 并执行链条规则

$$\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}}\frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'}\frac{d\tilde{u}'}{d\varepsilon}\right)dx = \int_a^b \left(\eta\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}} + \eta'\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}'}\right)dx$$

为 $\varepsilon = 0, \tilde{u} = u$ 这样

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\eta\frac{\partial F}{\partial u} + \eta'\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx = 0 \tag{47.4}$$

19 集成部分 ($\int fg'dx = fg - \int f'gdx$) 二、第二期引导到

$$\int_a^b \left(\eta'\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx = \eta\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b - \int_a^b \eta(x)\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right)dx$$

20 取代,

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I } (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II } (x=a,b)} = 0 \tag{47.5}$$

21 每个字符都必须是零。

1. 第一部分将给我们 **欧拉方程**.
2. 第二部分将使我们能够定义 **边界条件**.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

47.2.3 欧拉方程

22 计算变量的基本细节表明, 在连续 $\Psi(x)$ 在 $a \le x \le b$ 具有自愿的持续功能 $\eta(x)$ 谁消失在 a 和 b 然后,

$$\int_a^b \eta(x)\Psi(x)dx = 0 \Leftrightarrow \Psi(x) = 0$$

因此, 我分为 eq。47.5 给出强大的形状。

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \quad \text{in} \quad a < x < b \tag{47.6}$$

23 这种差异方程式被称为 *Euler-Lagrange* **方程式** 与相关的 Π 这是一个必要的条件 $u(x)$ 极端化 Π.

24 请注意, 弱势的形状是 u' (Eq. 47.3) 而在强烈的形式上, u'' Eq. 47.6.

25 以前的方程式可以一般化为一个功能性 Π 它依赖于两个领域变量, $u = u(x,y)$ 和 $v = v(x,y)$

$$\Pi = \iint F(x,y,u,v,u_{,x},u_{,y},v_{,x},v_{,y},\cdots,v_{,yy})dxdy \tag{47.7}$$

而且会有那么多 Euler 方程式, 就像依赖的领域变量一样。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,yy}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,x}} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,y}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xx}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{\partial F}{\partial v_{,yy}} = 0 \end{cases} \tag{47.8}$$

26 注意, 函数和相应的 Euler 方程式,Eq。47.1 和 47.6 或 EQ。47.7 和 47.8 描述相同的问题。

27 Euler 方程式通常相匹配于统治的差异方程, 并被称为强大的形式。(或经典形式).

28 功能性被称为弱形状。(或一般化解决方案).

29 在机械学中, 平衡在身体上以平均意义执行。(域变量是差异化的。m 弱势的时刻, 以及 $2m$ 时光在强烈的形状) Eq. 47.3 *vs* Eq. 47.6.

30 可以证明, 在虚拟移动的原则上, 欧勒方程是平衡方程, 而在虚构力量的原则中, 它们是兼容性方程。

31 Euler 方程式是差异方程, 不能总是用准确的方法解决。一个替代方法是超越欧勒方程式, 直接转向问题的变量陈述到解决欧勒的方程。

32 它将被证明, 最终元素的制定是基于弱形状, 而最终差异的制定则基于强形状。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

47.2.4 $\delta\Pi$

33 在上一篇文章中, 我们刚刚展示了 $d\Phi(\varepsilon)/d\varepsilon$ 引导到 *Euler - 拉格兰* 平衡 (Eq. 47.5)

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I}\ (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II}\ (x=a,b)} = 0$$

我们必须定义 $\delta\Pi$.

34 一个功能表达的第一种变异是

$$\left.\begin{aligned}\delta F &= \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \\ \delta\Pi &= \int_a^b \delta F dx\end{aligned}\right\} \delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'\delta u'}\right) dx \tag{47.9}$$

集成部分 (Eq. R.3) 第二期的日期 (如同 EQ。47.4) 收益

$$\delta\Pi = \int_a^b \delta u\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right) dx \tag{47.10}$$

47.2.5 观察

35 只是表明, 找到站点价值的 Π 通过设置 $\delta\Pi = 0$ 相同于发现极端价值的 Π 通过设置 $\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ 等于零。

36 同样, 可以证明, 与第二衍生品在计算中一样, 第二个变量 $\delta^2\Pi$ 可以用来将极端分为最低或最高。

37 一个重要观察是, 变量表述是一个规模的, 而 Eulerian 则是 vectorial。

47.2.6 边界条件

38 审查 Eq 的第二部分。47.5,

$$\left.\frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]}_{\text{I}\ (x\in[a,b])} + \underbrace{\eta(x)\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{II}\ (x=a,b)} = 0$$

允许我们定义边界条件, 图 47.1.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\underbrace{\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\ \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial u'}\right|_a^b}_{\text{Nat.}}}_{\text{Boundary Cond.}} = 0 \tag{47.11}$$

可以通过以下组合实现。

$$\begin{array}{llllll}
\eta(a)=0 & \text{and} & \eta(b) & =0 & \text{Essential} & \Gamma_u \\
\eta(a)=0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{and} & \eta(b) & =0 & \text{Mixed} & \Gamma_u \cup \Gamma_t \\
\frac{\partial F}{\partial u'}(a)=0 & \text{and} & \frac{\partial F}{\partial u'}(b) & =0 & \text{Natural} & \Gamma_t
\end{array}$$

[39] 一般化, 对于一个问题, 一个领域变量, 其中最高的衍生在统治差异方程是顺序。$2m$ (或者只是 m 相应的功能), 然后我们有, 图 47.2,

重要 (或强迫, 或地质) 边界条件, (因为它对欧拉方程的衍生性至关重要) if $\eta(a)$ 或 $\eta(b)$ =0. 基本边界条件, 包括零订单衍生品 (域变量本身) 通过 M1。数学上, 这与 *Dirichlet* **边界值问题**.

自然 (自然或静态) 如果我们离开 η 要有意志性, 就需要使用 $\frac{\partial F}{\partial u'}=0$ 在 $x=a$ 或 b. 自然界限条件, 包括订单衍生品 m 和上。此 B.C. 是由变量声明的满足所带来的, 但在功能本身中没有明确说明。数学上, 这与 **尼曼边界价值问题**.

混合边界值 问题是, 在这些情况下, 基本和自然边界条件都被指定在边界的补充部分上。(如如 Γ_u 和 Γ_t).

问题	Axial 會員 分布荷载	灵活会员 分布荷载
差异方程式	$AE\frac{d^2u}{dx^2}-q=0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4}-q=0$
m	1	2
重要 BC。$[0,m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
自然的 C。$[m,2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ 或 $\sigma_{xx}=Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ 和 $\frac{d^3w}{dx^3}$ 或 $M=EIw_{,xx}$ 和 $V=EIw_{,xxx}$

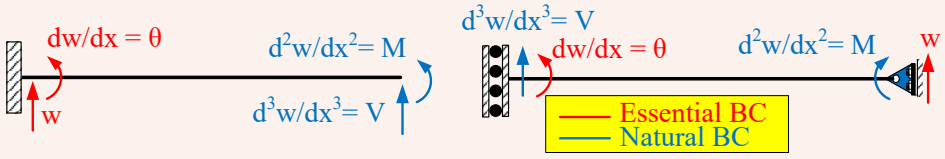


图 47.2: 基本和自然边界条件的例子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

47.2.6.1 例题 47.1: 标签:Axial

势能 Π 一个 Axial 成员 (L, E, A), 固定在左端, 受轴力的约束 P 正义是由

$$\Pi = \underbrace{\int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}_{\text{Strain Energy}} \underbrace{-Pu(L)}_{\text{Work}}$$

确定 欧拉方程 要求 Π 要是最低限度。

解决 I

遵循以 Euler Equations 的衍生程序, 第一个变量 Π:

$$\delta\Pi = \int_0^L \underbrace{\frac{EA}{2}2\left(\frac{du}{dx}\right)}_{a}\underbrace{\delta\left(\frac{du}{dx}\right)}_{b'} dx - P\delta u(L)$$

集成部分 (Eq. R.3)

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= +\underbrace{EA\frac{du}{dx}}_{a}\underbrace{\delta u}_{b}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{a'}\underbrace{\delta u}_{b} dx - P\delta u(L) = 0\\ &= -\int_0^L \delta u \underbrace{\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)}_{\text{Euler Eq.}} dx + \underbrace{\left[\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L} - P\right]}_{\text{B.C.}}\delta u(L)\\ &\quad \underbrace{-\left(EA\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0}\underbrace{\delta u(0)}_{0}}_{0}\end{aligned}$$

记住这 δ 在一个可以分配任何值的任意运营商中, 我们设置了 δu 之间 $(0, L)$ 而那些为 δu 在 $x = L$ 以零为分, 并获得

- 欧拉方程:
$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = EA\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \qquad 0 < x < L$$
请注意, 在功能方面是如何 u' 和欧拉方程的观点 u''.
- 自然界限:
$$EA\frac{du}{dx} - P = 0 \quad \text{at} \quad x = L$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

解决方案 II

使用前衍生品的结果 (Eq. 47.6): 我们得出:

$$F(x,u,u') = \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

(请注意, 自从 P 是应用 荷载 在会员的结尾, 它不显示为部分 $F(x,u,u')$. 接下来, 我们将从 Eq 中确定欧拉方程。47.6

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= 0\\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} &= 0\\ \Rightarrow -\frac{d}{dx}(EAu') = -EA\frac{d^2u}{dx^2} &= 0 \text{ Euler Equation}\end{aligned}$$

最后, 边界条件从 Eq 获得。47.11:

$$\begin{aligned}\underbrace{\eta(x)}_{\text{Ess.}}\underbrace{\frac{\partial F}{\partial u'}\Big|_a^b}_{\text{Nat.}} &= 0\\ \frac{\partial F}{\partial u'} &= EAu'\\ EA\frac{du}{dx} &= 0\end{aligned}$$

47.2.6.2 例题 47.2: 标签: flexure

支持统一负载的闪电的总潜能 p 被授予

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2}M\kappa - pw\right)dx = \int_0^L \underbrace{\left(\frac{1}{2}(EIw'')w'' - pw\right)}_{F}dx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我們要從第一個變化中獲得 Π. 延伸 EQ。47.9 并将部分集成 (Eq. R.3) 二次

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \int_0^L \delta F dx = \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial F}{\partial w}\delta w\right) dx \\ &= \int_0^L (EIw''\delta w'' - p\delta w) dx \\ &= (EIw''\delta w')|_0^L - \int_0^L \left[(EIw'')'\delta w' - p\delta w\right] dx \\ &= \underbrace{\underbrace{(EIw'')}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w')|_0^L}_{\text{Ess.}} - \underbrace{[(EIw'')'}_{\text{Nat.}}\underbrace{\delta w]|_0^L}_{\text{Ess.}}}_{\text{BC}} + \int_0^L \underbrace{\left[(EIw'')'' + p\right]}_{\text{Euler Eq.}} \delta w dx = 0\end{aligned}$$

或

$$(EIw'')'' = -p \quad \text{for all x}$$

是指支配的差异方程式和边界条件, 由

重要		自然
$\delta w' = 0$	或	$EIw'' = -M = 0$
$\delta w = 0$	或	$(EIw'')' = -V = 0$

47.3 总数 势能 原则

40 对整体 势能 的表达 (TPE) 被授予

$$\begin{aligned}\Pi &\overset{\text{def}}{=} U - W_e \\ W_e &\overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}d\Gamma + \mathbf{uP} \\ U &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega\end{aligned}$$

一般形式的功能性能量潜力变化的原则

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega}_{U} \underbrace{- \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}d\Gamma - \mathbf{uP}}_{-W_e} \tag{47.12}$$

41 一个变量声明是通过采取第一个变量的 Π 把这个尺寸的数量等于零。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

42 对潜力的整体形状的变量声明能量功能 (伊。平等 47.12) 是

$$\delta\Pi = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{47.13}$$

哪个是 **虚功原理**.

43 我们重新写下应变-位移关系的意义上 **线性区别运营商 L** (Eq. O.2.3.2)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

哪里 $\mathbf{L}$ 它是线性差异操作器和 $\mathbf{u}$ 是的, 转移 vector 在 Eq 中定义。O.7:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

44 因区别运营商 $\mathbf{L}$ 是 **线性**各式各样的流动性 $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ 可以说是关于变异的移居 $\delta\mathbf{u}$

$$\delta\boldsymbol{\epsilon} = \delta(\mathbf{L}\mathbf{u}) = \mathbf{L}\delta\mathbf{u} \tag{47.14}$$

45 我们考虑了两种形式的变量声明

1. 关于线条: 更适合衍生品的相应的 Euler 方程式,

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega}_{\delta U} \underbrace{- \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0 \tag{47.15}$$

2. 关于转移: (使用方程式 47.14) 更适合随后的判断。

$$\delta\Pi = \underbrace{\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega}_{\delta U} \underbrace{- \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma}_{-\delta W_e} = 0$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

[46] 以 Euler 方程式为一般形式的。势能 变量原则 体积 定义虚拟 应变能 的集成 δU 在平等 47.15 必须由部分集成, 以便转换各式各样的流动性 $\delta(\mathbf{Lu})$ 在一个变异的移居者 $\delta\mathbf{u}$.

[47] 这些组成部分的整合, 使用绿色理论 (Eq. R.6)

$$\int_\Omega R\frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial x}S\mathrm{d}\Omega + \oint_\Gamma RSn_x\mathrm{d}\Gamma$$

收益

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{d}\Omega \\
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0)\mathrm{d}\Omega \\
\int_\Omega \delta(\mathbf{Lu})^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega &= \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{47.16}$$

哪里 $\mathbf{G}$ 变换矩阵 包含方向同位素对于正常 向量 单位, 如表面拖动 $\mathbf{t}$ 被定义如 $\mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ 表面整合物结束了整个身体的表面 Γ.

[48] 取代平衡 47.16 到平等 47.15, 变量声明成为

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = -\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{L}^T\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}\}\mathrm{d}\Omega \\
+\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\{\mathbf{G}\underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}}\}\mathrm{d}\Gamma = 0
\end{aligned}$$

[49] 因为 $\delta\mathbf{u}$ 是自愿的, 在内心的表达。双手必须等于零。$\delta\Pi$ 要等于零。认识到, 压力与压力关系顯示在 体积 和表面整體中,Euler 方程式是

$$\text{(BE): Equilibrium}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ on } \Omega \tag{47.17}$$

$$\text{(NBC): Natural B.C.}\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_t \tag{47.18}$$

第一個 欧拉方程 是 平衡方程 和第二個欧拉方程 定义了自然边界条件。自然的边界条件是定义的 Γ_t 而不是 Γ 因为两种应用的表面拖动 $\hat{\mathbf{t}}$ 与矩阵 vector 产品 $\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$ 外面是同一零 Γ_t.

[50] 一般来说, 只有某些形式的差异方程式是 Euler。一个变量功能的方程式。

[51] 对于 Elasostatic 问题, 可以从 Euler 方程式, 然后由 势能 函数的全部衍生这些操作只是在逆转顺序中呈现。

[52] TPE 的 Tonti 图表显示在 图 47.3. 在这个图表中, 坚固的连接是由坚固线路显示的, 软弱的链接是春类似的。符号, 固定线的盒子标志着原始未知的字段, 内置的变量是内部衍生字段和阴影盒子指示规定的字段。

[53] §48.4.1 在此部分进一步扩展。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

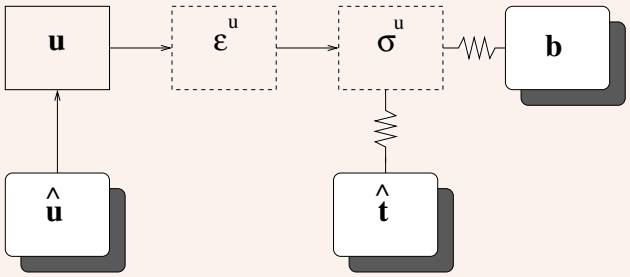


图 47.3: 对合体势能方法的色调图表

47.4 汉密尔顿

47.4.1 动态; Euler/Lagrange

47.4.1.1 差异制度

54 如果我们考虑一个单粒子质量 m 在一个力量的影响下移动 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r)$, 路径 $\mathbf{r}(t)$ 由粒子追随, 必须满足牛顿的第二条动作法则

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

55 与实际道路不同的一条路径被表达为 $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, 在哪里 $\delta\mathbf{r}$ 是任何固定时间的路径变异 t. 假设真正的道路 $\mathbf{r}$ 不同的路径不同, 除了两次不同的时刻 t_1 和 t_2 這就是, $\delta\mathbf{r}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$.

56 接收前方方程式的规模产物与变量 $\mathbf{r}$ 与时间相结合, 与 t_1 和 t_2 我们得到了

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r})\right]\cdot\delta\mathbf{r}dt = 0$$

集成部分 (Eq. R.3) 第一期收益

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{r}\right)dt + \left(m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{47.19}$$

第二期结束后 $\delta\mathbf{R}(t_1) = \delta\mathbf{r}(t_2) = 0$. 此外, 我们还注意到

$$\delta K \overset{\text{def}}{=} m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \delta\left[\frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]$$

因此 Q。47.19 变成

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K + \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r})dt = 0 \tag{47.20}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

究竟是什么 **汉密尔顿原则的普遍形式** 只有一粒子。

57 如果力量 $\mathbf{F}$ 是保守的 (这就是其潜力和动态能量的总数是恒定的。) 我们可以用潜在的格拉迪恩取代它。(卡斯蒂格利亚诺的第一理论)

$$\mathbf{F} = -\nabla \Pi$$

哪里 $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{r})$ 是粒子的势能。因此, 我们重写 eq。47.20 现在可以重写如

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) dt = 0 \tag{47.21}$$

因为

$$\nabla \Pi \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} \delta x_3 = \delta \Pi(x_1, x_2, x_3)$$

58 动能和潜在能量之间的差异被称为 **拉格兰** 功能

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} K - \Pi$$

Eq. 47.21 汉密尔顿的保守性粒子运动原则

定义 47.1: 汉密尔顿的原则

粒子的动作由保守势力在两个任意时刻之间进行。t_1 和 t_2 因此, 拉格兰功能的整线是路径运动的极端。

59 这也可以用其他词语说出来。**所有可能的路径中, 粒子可以从其位置出发。t_1 按时的立场 t_2 其真正的道路将是它的**

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt.$$

这是极端。

60 如果路径可以以通用坐标来定义 [1]q_i $(i = 1, 2, 3)$ 然后,

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \mathrm{d}t = 0 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \mathrm{d}t \end{aligned}$$

请注意, 四方手相关术语内部的术语可以轻松地通过类似于其中一个程序来衍生。§47.2.4.

[1]通用坐标是用于在配置空间中的系统状态的参数组合。这些参数必须单独定义系统对参考状态的配置。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

61 如果所有 q_i 线性独立 (他们之间没有任何限制。), 变量 δq_i 他们是独立的 t 除外 $\delta q_i = 0$ 在 t_1 和 t_2. 因此, 与此同时, 对 δq_1, δq_2, 和 δq_3 故意分开发出**拉格兰动作方程式**也被称为 " *Euler* - **拉格兰** 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

当然, 它与 Eq 相似。47.6.

62 对于非保守主义势力, 读者应该提到 (Reddy, 2017, pg. 148).

47.4.1.2 连续系统

63 基本上按照与差异化系统开发的程序相同, 我们可以发展汉密尔顿的动态动态原则。虽然牛顿的第二法则运动显而易见仍然适用, 现在身体变形, 我们将需要一个本构方程.

64 开始与

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

真正的道路 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 跟随物质粒子在位置 $\mathbf{x}$ 与电影相一致的变化 (必不可少) 边界条件为 $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ 哪里 $\delta\mathbf{u}$ 可接受的变量 (或虚拟位移) 路上的。

65 就像以前一样, 我们假设不同的路径与实际的路径不同, 除非有时 t_1 和 t_2. 因此, 可接受的变量 $\delta\mathbf{u}$ 满足条件 (管理方程式和边界条件)

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u} &= 0 && \text{on } \Gamma_u \text{ for all } t \\ \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) &= \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2) && \text{for all } \mathbf{x} \end{aligned} \tag{47.22}$$

哪里 Γ_u 指的是身体表面部分, 在那里位移向量 $\mathbf{u}$ 被定义。

66 身体及时完成的工作 t 通过虚拟 位移 的流动力 $\delta\mathbf{u}$ 是

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

哪里 4$\mathbf{b}$ 是身体力量 向量, $\mathbf{t}$ 具体的拖动, $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是应力和应变的传感器。最后的术语代表体内存储的内部力量的虚功。(这样负面).

67 由内心力量所做的工作 $m\mathbf{a}$ 通过虚拟 位移 移动 $\delta\mathbf{u}$ 是

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega$$

哪里 ρ 是 质量 密度.

68 我们可以这样写

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right) \right] dt = 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right) \right] dt = 0 \end{aligned} \tag{47.23}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

第二个表达式的第一术语是通过部分集成获得的; 由于初始和最终边界条件而, 整合术语消失。(Eq. 47.22).

69 Eq. 47.23 这是汉密尔顿的原则的一般形式, 以便不断的媒体 (保守和弹性或不).

70 外部工作的潜力, 相反, 由 (Eq. 48.6).

$$\delta \mathcal{W}_e = -\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma$$

以理想的弹性身体为基础 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{t}$ 是保守的和应变能 U_0 有這樣的存在

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad \text{where } U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$$

(应用计算的基本理论

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{and} \quad F'(x) = f(x)$$

到 eq。48.3).

71 将最后的方程式替换为 Eq。47.23 我们获得

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (\mathcal{W}_e + U)]\, dt = 0 \tag{47.24}$$

哪里 K 和 U 基因和应变的能量

$$K = \int_\Omega \frac{\rho}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\partial t} d\Omega, \qquad U = \int_\Omega U_0 d\Omega$$

72 Eq. 47.24 代表汉密尔顿的灵活身体原则 (线性或非线性).

73 因为 $\Pi = U + \mathcal{W}_e$ 总值为 势能, Eq。48.6 没有动作的身体 (即力量适用得足够慢, 以便运动独立于时间, 而无情的力量则不可忽视。) 哈密尔顿的原则减少到虚拟位移的原则。

74 Euler-Lagrange 与 Lagrangian 相关的方程式 $L = K - \Pi$ 可以从 EQ 获得。47.24.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(u_i, \dot{u}_i) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\mathbf{t} - \widehat{\mathbf{t}}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \right] dt \end{aligned}$$

哪里 $\widehat{\mathbf{t}}$ 是指定的表面拖动 Γ_t. 我们从 Eq 到达这个最后的方程式。47.24 通过部分集成, 格拉迪特理论和 Eq。47.22.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

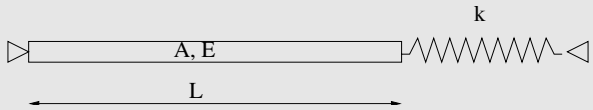
75 因为 $\delta\mathbf{u}$ 是自愿的 $t_1 < t < t_2$, 和 $\mathbf{x}$ 内部 Ω 而在 Γ_t 其次, 它是

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega$$
$$t - \widehat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_t$$

这是一个弹性身体的 Euler-Lagrange 方程式。

47.4.2 例题 47.3: 汉密尔顿

对于单一的截面条长度 L 十字路口区域 A, 杨氏模量 E, 和 质量 密度 ρ 固定在一个端, 并连接到一个硬支座 在另一个通过一个春天与坚固 k



我们有兴趣确定定期动作, 该动作具有形式

$$u(x,t) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

哪里 ω 是自然振动的频率, 以及 $u_0(x)$ 这就是宽度。Kinetic 和 应变 能量是由

$$K = \int_\Omega \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{\rho A}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$
$$U = \int_\Omega \frac{E}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^L \frac{EA}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{k}{2}[u(L)]^2$$

在缺乏外部工作潜力的情况下,Eq。47.24 (与 $\mathcal{W} = 0$)

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta\int_{t_1}^{t_2}(K-\Pi)dt \\ &= \frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - k[u(L)]^2\right\}\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

我们承认

$$u(x,t) = u_0(x)e^{i\omega t}$$

哪里 ω 是自然振动的频率, 以及 $u_0(x)$ 是的, 宽度和替代

$$\delta\left\{\int_0^L\frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2[u_0(x)]^2 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\right\} = 0$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

哪里 $\int_{t_1}^{t_2} \exp^{2i\omega t}\,\mathrm{d}t$ 非零是因果的。而不是使用先前衍生公式, 我们重新提取相应的欧拉方程。

$$\delta\left\{\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2(u_0)^2 - EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x - \frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\right\} =$$
$$\int_0^L \left[\rho A\omega^2 u_0\delta u_0 - EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0$$

集成部分 (Eq. R.3)

$$\int_0^L \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{v'}\mathrm{d}x = \underbrace{EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u}\underbrace{\delta u_0}_{v}\Bigg|_0^L - \int_0^L \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)}_{u'}\underbrace{\delta u_0}_{v}\,\mathrm{d}x$$

替代

$$\int_0^L \left[\rho A\omega^2[u_0(x)] - EA\frac{\partial u_0}{\partial x}\delta\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]\mathrm{d}x - ku_0(L)\delta u_0(L)$$
$$= \int_0^L \rho A\omega[u_0(x)] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}EA\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\underbrace{- EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)\delta u_0\Big|_0^L}_{0} - ku_0(L)\delta u_0(L) = 0$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right) + \rho A\omega^2 u_0 = 0 \text{ for } 0 < x < L$$
$$\left(EA\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x} + ku_0\right) = 0 \text{ for } x = L$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

替代 $\overline{x}=\frac{x}{L}$, $\mathrm{d}x=L\mathrm{d}\overline{x}$, $\overline{u}=\frac{u_0}{L}$, 和 $\alpha=\frac{kL}{EA}$, $\lambda=\frac{\omega^2\rho L^2}{E}$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2}\left[\rho A\omega^2(u_0)^2-EA\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\frac{k}{2}\left[u_0(L)\right]^2\\
&=\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda EA}{L^2}(L\overline{u})^2-EA\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]L\mathrm{d}\overline{x}-\frac{k}{2}\left[L\overline{u}_0(1)\right]^2\\
&=\int_0^1 \frac{1}{2}EAL\left[\lambda(\overline{u})^2-\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\frac{kL^2}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\\
&=\frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1\left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}\\
&\Rightarrow \delta\left[\frac{KL^2}{2}\left\{\int_0^1\left[\frac{\lambda}{\alpha}(\overline{u})^2-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}\right]=0\\
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left[\lambda(\overline{u})^2-\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}_0}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2\right]\mathrm{d}\overline{x}-\frac{\alpha}{2}\left[\overline{u}_0(1)\right]^2\right\}=0
\end{aligned}$$

使用 Rayleigh-Ritz 方法

$$u=c_1x+c_2x^2$$

重定向前方程式, 以 u

$$\begin{aligned}
&\delta\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left[\lambda(u)^2-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{2}\left[u(1)\right]^2\right\}=0\\
&\int_0^1\left[\lambda(c_1x+c_2x^2)(\delta c_1x+\delta c_2x^2)-(c_1+2c_2x)(\delta c_1+2\delta c_2x)\right]\mathrm{d}x\\
&-(c_1+c_2)(\delta c_1+\delta c-2)=0
\end{aligned}$$

收集的比例 δc_1 和 δc_2 把它们放在零分开, 我们有

$$\begin{aligned}
\delta c_1:&\int_0^1\left[\lambda(c_1x+c_2x^2)x-(c_1+2c_2x)\right]\mathrm{d}x-(c_1+c_2)=0\\
\delta c_2:&\int_0^1\left[\lambda(c_1x+c_2x^2)x^2-(c_1+2c_2x)2x\right]\mathrm{d}x-(c_1+c_2)=0
\end{aligned}$$

集成、减少和压缩

$$\left(\begin{bmatrix}2&2\\2&\frac{7}{3}\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

一个不利的解决方案存在, 如果和只有

$$\begin{vmatrix}2-\frac{\lambda}{3}&2-\frac{\lambda}{4}\\2-\frac{\lambda}{4}&\frac{7}{3}-\frac{\lambda}{5}\end{vmatrix}=0$$

或

$$15\lambda^2-640\lambda+2400=0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这个四方方方程式有两个根。

$$\lambda_1 = 4.1545 \qquad \lambda_2 = 38.512$$

相应的

$$\omega_1 = \frac{2.038}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{6.206}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

正確的解決方案是由

$$\lambda + \tan\lambda = 0$$

其前两根根是

$$\omega_1 = \frac{2.02875}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\omega_2 = \frac{4.91318}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

47.5 Hu-Washizu 变量原则

下一篇: 重复 Reich, 1993 *"On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams"*.

[76] A **多田** 变分原理 是具有多个主字段的 (或国家变量), 它是多个一个未知的领域受独立变化的。

[77] 在线性 elastostatics 中, 我们可以有 位移, $\mathbf{u}$ 紧张 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 或 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 作为大师领域的潜在候选人。因此, 七结合是可能的, (Felippa, 2000) 桌子 47.1.

[78] 华西佐 Hu-Washizu (HW) 变分原理 是三域变量原则上, 该 **转移、紧张和压力** 被处理如 **独立领域** (相反, 只有位移在总势能 原则).

[79] 当然, 另外两个领域变量, 对于 TPE 变分原理 , 不仅在功能性, 但也在差异化方程式中。因此, 对于一个域, 具有特定的差异化, 对方程式的分歧系统由 HW 变分原理 衍生, 将比与 TPE 变分原理 相同的差异系统。

[80] 随着方程式的数量增加, 显著改善可以观察到从差异性中获得的解决方案的准确性。HW 变分原理的形状与获得的解决方案相比从 TPE 变分原理 的差异形状为同一差异化。因此, 可以使用严格的判断。HW 变分原理的差异形状, 以获得相同程度以更精确的准确性来观察, 用更微妙的判断 TPE 变分原理。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$\mathbf{u}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma}$	名称
		单一领域	
Y			全 势能
		Y	全额补充 势能
	Y		没有名字
		兩個領域	
Y		Y	赫林格 • 雷斯纳
Y	Y		饰 Veubeke
	Y	Y	没有名字
		三个领域	
Y	Y	Y	华盛顿

表 47.1: 线性弹性的功能

81 HW 变分原理 的功能源于 TPE 变分原理 的功能, 通过强制紧张转移方程式作为终端补贴条件使用拉格兰多元化方法。

82 终止补贴条件或限制以剩余形式写作如:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} \tag{47.25}$$

以平均的意义在整个身体上 Ω.

83 通过强制应变-位移方程式作为限制 C^0 不断的紧张和压力以差异的形式获得变量声明, 与获得的分离压力和压力相反在 TPE 变分原理 的差异性声明的格式中。

84 有限的功能写作如:

$$\Pi_{HW} = \Pi_{\text{TPE}} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{47.26}$$

哪里 $\boldsymbol{\lambda}$ 是 Lagrange 多元化器和要与 TPE 功能中的集成 (伊。平等 47.12) 其它 Lagrange 增量器必须有 应力 的单位。因为这就是情况, $\boldsymbol{\sigma}$ 将用于拉格兰奇多元化器而不是更多典型 $\boldsymbol{\lambda}$ 如同 Lagrange 的物理意义多元化更明显。

85 因此,HW 变分原理的功能为

$$\begin{aligned}\Pi_{HW} \;=\; & \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega}_{U} \\ & \underbrace{- \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma}_{-W_e} + \underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \left(\mathbf{L}\,\mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}\right) \mathrm{d}\Omega}_{\text{Constraint}}\end{aligned} \tag{47.27}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

86 一个变量声明是通过采取第一函数的变量, 并设置这个规模数量等于零。

87 第一個變化的 HW 功能, 與條件安排根据哪个领域变量是多样的,

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HW} \;=\; & \int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ & + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\mathbf{D}\,\boldsymbol{\epsilon}_0\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \\ & + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon})\,\mathrm{d}\Omega = 0\end{aligned} \tag{47.28}$$

请注意, 第 4 期和第 7 期被添加并互相取消。

88 因为 $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 是独立的字段变量, 包括 $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\epsilon}$, 和 $\delta\boldsymbol{\sigma}$ 必须单独添加到零, 因此集合, 形成三个单独的变量声明 (与方法相似分离变量在部分差异方程式的解决中)

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \;=\; 0 \tag{47.29}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\epsilon}^T[\mathbf{D}(\boldsymbol{\epsilon}\,-\,\boldsymbol{\epsilon}_0)\,+\,\boldsymbol{\sigma}_0\,-\,\boldsymbol{\sigma}]\,\mathrm{d}\Omega \;=\; 0 \tag{47.30}$$

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon})\,\mathrm{d}\Omega \;=\; 0 \tag{47.31}$$

89 以获得相应的 Euler 方程式为一般形式的 HW 变量原理 平衡中的集体容量 47.29 包含各式各样的变异 $\delta(\mathbf{Lu})$ 定义至于移居 $\mathbf{u}$ 必须由使用的部分集成绿色理论 (Eq. R.2.6) 为了实现变量的形式关于转移的变化 $\delta\mathbf{u}$.

90 集成部分 (Eq. R.3) 这个完整的收益

$$\int_\Omega \delta(\mathbf{L}\,\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega = \oint_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\Omega \tag{47.32}$$

哪里 $\mathbf{G}$ 变换矩阵 包含方向同位素对于正常 向量 单位, 如表面拖动 $\mathbf{t}$ 被定义如 $\mathbf{t} = \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ 全方位的表面是超越整个身体的表面 Γ.

91 取代平衡 47.32 到平等 47.29, 第一個變化表達

$$-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b})\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T(\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}-\hat{\mathbf{t}})\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{47.33}$$

因为 $\delta\mathbf{u}$ 是自愿的, 在内心的表达。兩個分配都必須等於零, 以便整體的合計為等于零。

92 同样, $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ 和 $\delta\boldsymbol{\sigma}$ 同样是自愿的, 在第二个手臂内的表达。变量声明 (伊。平等 47.30) 在第三个变量声明中, (伊。平等 47.31) 兩者均為零。整合到零等。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

93 对于 HW 功能的 Euler 方程式是

$$\text{(BE): Equilibrium} \qquad \mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad \text{on } \Omega \tag{47.34}$$

$$\text{(CE): Stress-Strain} \qquad \mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon}\,-\,\boldsymbol{\epsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0-\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0} \text{ on } \Omega \tag{47.35}$$

$$\text{(KE): Strain-Displacement} \qquad \mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{0} \quad \text{on } \Omega \tag{47.36}$$

$$\text{(NBC): Natural B.C.} \qquad \mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}-\hat{\mathbf{t}}=\mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_t \tag{47.37}$$

第一個 欧拉方程 是 平衡方程; 第二 Euler 方程式是 Stress-Strin 关系; 第三 Euler 方程式是应变-位移方程; 和第四 Euler 平衡定义自然边界条件。

94 自然界限条件是定义的 Γ_t 而不是 Γ 因为两种应用的表面拖动 $\hat{\mathbf{t}}$ 与矩阵 vector 产品 $\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}$ 外面是同一零 Γ_t. 从 Euler 方程式开始, 可以从 HW 衍生。通过执行仅以逆顺序呈现的操作进行功能。

95 这四个 Euler 方程式的最后一组, 应该与二人 (Eq. 47.17 和 47.18) 從中獲得的原始的 TPE。另外两种方程式将为应力-应变和应变 位移. 此分類上一篇: 表述 (Eq. 47.17 和 47.18) 以 位移 的名义只有 (**u**),Hu-Washizu 表述是三独立的意义上变量 (**u**, $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$) 桌子 47.2.

			TPE	HW
Euler 方程式				
平衡	$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$	Ω	Y	Y
应力-应变	$\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\epsilon}\,-\,\boldsymbol{\epsilon}_0)+\boldsymbol{\sigma}_0-\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$	Ω	N	Y
应变-位移	$\mathbf{L}\,\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{0}$	Ω	N	Y
自然的 C。	$\mathbf{G}\,\boldsymbol{\sigma}-\hat{\mathbf{t}}=\mathbf{0}$	Γ_t	Y	Y
变量				
	位移	$\mathbf{u}$	Y	Y
	应变	$\boldsymbol{\varepsilon}$	N	Y
	应力	$\boldsymbol{\sigma}$	N	Y

表 47.2: 总 势能 和 Hu-Washizu 表格的比较

96 图为 Tonti Diagram (§O.8) 对于 Hu-Washizu 变分原理 在 图 中显示 47.4.

47.6 “色情名称” 图表

47.6.1 德 • 阿伦伯特的原则

97 德 • 阿伦伯特的原则是纽顿第二法案的改革, 引入了无情的力量, 将动态系统转化为一个近静的平衡形式。这个原则作为新顿机械和拉格兰机械之间的桥梁, 通过表达运动方程式作为应用力量与无情反应之间的平衡。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

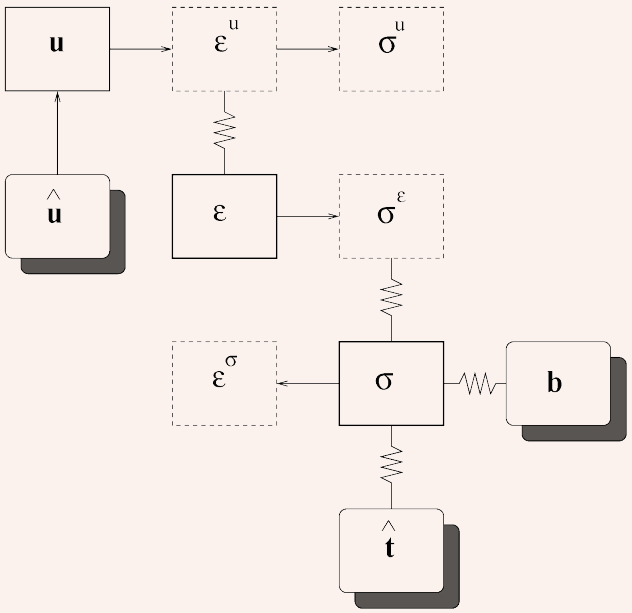


图 47.4: 图为 Hu-Washizu, (Červenka, 1994)

98 D’Alembert’s Principle 的 Tonti 图表, 图 47.5c 它将其作为连接纽顿的法律与虚功和拉格兰奇方程式的中心节点, 突出机械系统通过通用坐标如何发展。图表还包含通用力量、无情力量。(ma), 动能 (T), 和 势能 (V) 展示了这个原则如何融入基于力量和能量的机械学的表达。

47.6.2 汉密尔顿的平衡

99 汉密尔顿的方程式源于拉格兰奇方程子的传奇转型, 从基于配置的表述到一个阶段空间代表性。

100 汉密尔顿方程式的图表, 图 47.5b 将牛顿的法律、德阿伦伯特原则和拉格兰奇方程式链接到通用坐标。(q) 通用速度 ($\dot{q}$) 和普遍的时刻 (p). 此外, 它连接了哈米尔顿功能。(H), 代表总能量, 到 Kinetic 和 势能 表达式。这种结构强调了哈米尔顿机械如何为古典动态提供一个强大的框架, 使其能够直接应用于频道转型、综合地质和量子机械。

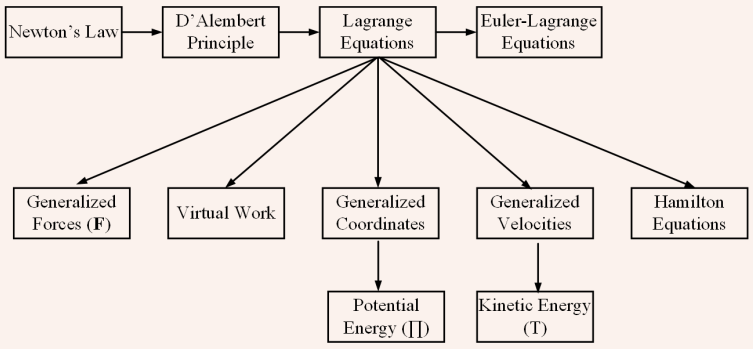
47.6.3 拉格兰的平衡

101 Lagrange 的方程式形成了变量机械的基础 , 提供了一个优雅的表述 表达动态纯粹在通用坐标方面。(q) 和速度 ($\dot{q}$).

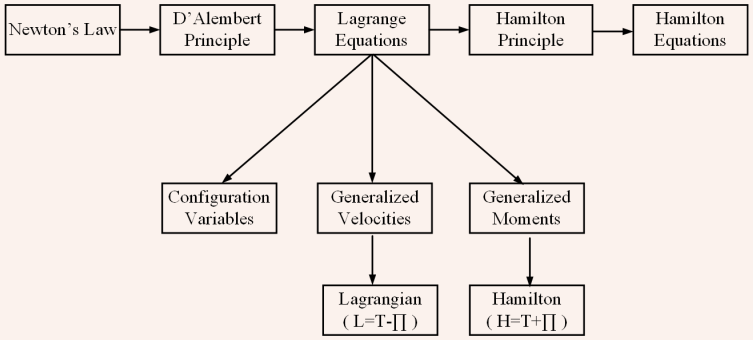
102 拉格兰方程式的 Tonti 图表, 图 47.5a 它通过 D’ Alembert 的原则将其连接到新顿机械, 同时也将其与虚功和能源方法相连。它通过 Legendre 转型和连接到 Euler-Lagrange 方程式, 进一步将距离与 Hamilton 的平衡的差距加大, 强调其深度与变分法的联系。通过显示

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

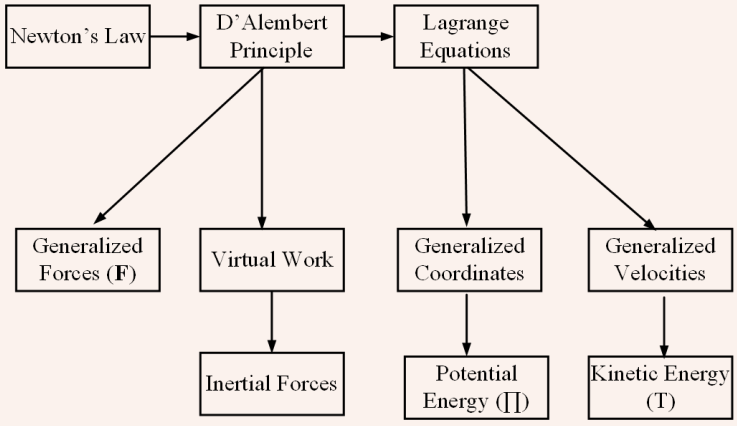
从基于力量的描述到基于能源的方法的过渡, 图表展示了拉格兰机械如何在强大的解析框架下统一古典机械。



(a) 拉格兰



(b) 汉密尔顿



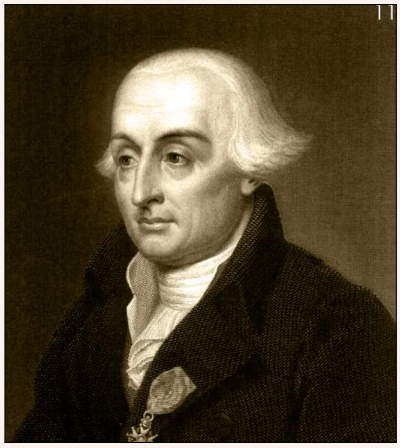
(c) 阿伦伯特

图 47.5: 拉格兰奇、汉密尔顿和德阿伦伯特的图表

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



Euler (1707)-1783)



拉格兰 (1736-1813)



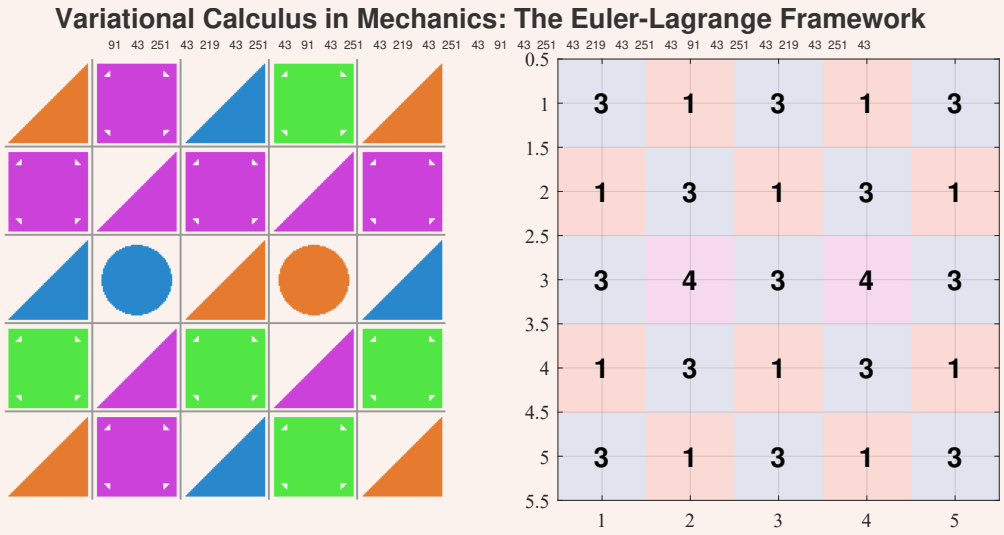
汉密尔顿 (1805-1865)



阿伦伯特 (1717-1813)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



具体的分类, chapter H

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

48 结构分析中的变量和能源原则

摘要

本章将引入与此前采用的平衡基于解决方案的根本不同。(纽顿) 接近 (章节 44).

它将包围一个功能的稳定性概念, 如从前章讨论的变量原则所产生的。这种类型的解决方案被称为 *Lagrangian*。

一些解决方案将产生, 尽管它们都是相互关联的。(也就是说, 一个人可以从另一个人中取出任何一个。). 這將導致更熟悉的表現, 稱為虛擬工作原則, 最低總潛能原則、里茨方法和卡斯蒂格利亞諾的理論。其中一些可能已经熟悉读者。(章节 24).

最后, 虚拟迁移的原则将为本章中介绍的终端元素方法奠定基础。50.

48.1 引入 1448
48.1.1 热力学 1448
48.1.2 基本关系 1449
48.1.3 定义 1450
48.1.4 真实的条款 1450
48.1.5 虚拟表达式 1452
48.1.6 注意事项 1452
48.1.7 应用程序 1D 单元 1454
48.1.8 关于 VW 和 CVW 的概述 . . 1459
48.2 接近 1460
48.3 虚功 1460
48.3.1 补充 虚功 的原则 (PCVW) . 1460
48.3.2 例题 48.2: 四半循环 拱 1464
48.3.3 虚功原理 (PVW) 1466
48.4 势能的原则 1470
48.4.1 总数 势能 的原则 (PTPE) . . 1470
48.4.2 总补充 势能 的原则 (PTCPE) 1473
48.5 卡斯蒂格利亚诺的理论 1473
48.5.1 第一理论 1473
48.5.2 第二理论 1476
48.6 雷莱里茨方法 1479
48.6.1 衍生品 1479
48.7 总结 1488

1 这个章节主要是由 (Pilkey and Wunderlich, 1994) 和 (Reddy, 2017).

48.1 引入

2 此部分将简单地列出各种定义, 而无需尝试将一对术语结合在一起。这一点将是这样做的, 即当我们有一个明确的理解每个术语的含义。

48.1.1 热力学

3 工作被定义为一个力量的产物和位移

$$W \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{s}$$
$$\mathrm{d}W = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y$$

4 能量是代表能力或能力的数量。工作。

审阅稿

5 能量的变化与完成的工作数量。因为只有能量的变化是涉及的, 任何日期都可以用作基础。以能量为准。因此, 能量既不被创造又不被消耗。

定义 48.1: 热力学国家第一法则

总能量的变化时间率 (即, 动能的总额 K 和内部能量 U) 相当于外部工作所完成的劳动率。力量 W_e 每单位时间的热量变化 H:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+U)=W_e+H \tag{48.1}$$

哪里 K 是 动能。U 内部 应变能 , W 外部工作, 以及 H 热入系统。

6 对于一个阿迪亚巴特系统 (没有热交换) 假如在某种情况下, 有静态方式 (没有 动能) 上面的关系简化到:

$$W_e=U \tag{48.2}$$

7 我们必须定义两者。U 和 W_e 在结构力学的背景下。这将是下一个。

48.1.2 基本关系

8 在我们开始之前, 我们需要定义一些将需要的表达式 这些将随后提到。

压力压力关系 $\sigma=\mathbf{D}(\varepsilon-\varepsilon_0)+\sigma_0$

哪里 $\mathbf{D}$ 是构成性 矩阵; ε 是的, 应变 向量 由于转移 $\mathbf{u}$; ε_0 是的, 初始压力 vector; σ_0 是初始应力 向量; 和 σ 是压力 vector。

9 初步的压力和紧张如系统的加热或冷却等条件的结果。在系统中出现波压。

力量 在 结构力学, 我们只有两种力量:

表面拖动 $\hat{\mathbf{t}}$, 图 48.1 注意: 点力与拖动有关 **迪拉克功能** $\delta(z-d)=0, z\neq d$ 因此:

$$\int_{\infty}^{\infty}\delta(z-d)dz=1$$
$$\int_{0}^{L}\delta(z-d)dz=1$$
$$\int_{0}^{L}f(z)\delta(z-d)dz=f(d)$$

身体力量 $\mathbf{b}$ (如 重力 或电磁).

点力 / 时刻

$$W_e=\int_0^{\Delta_f}Pd\Delta+\int_0^{\theta_f}Md\theta$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

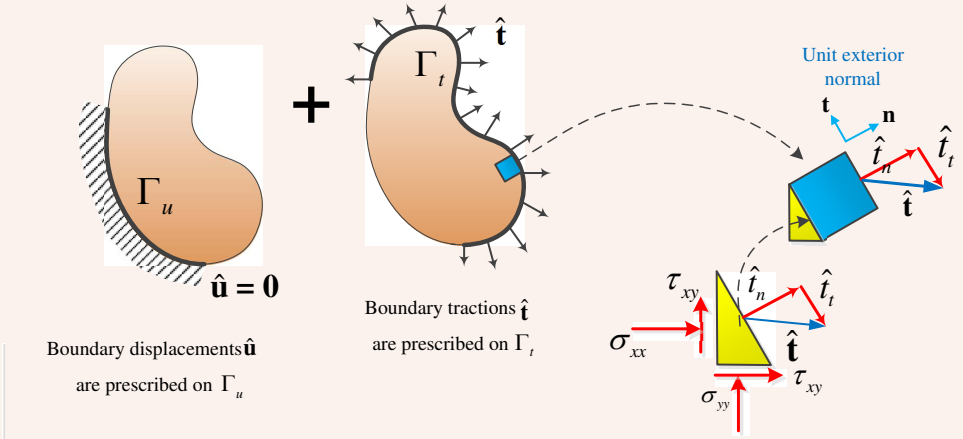


图 48.1: 拖拉机定义

48.1.3 定义

48.1.4 真实的条款

内部 应变 能量密度

$$U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{48.3}$$

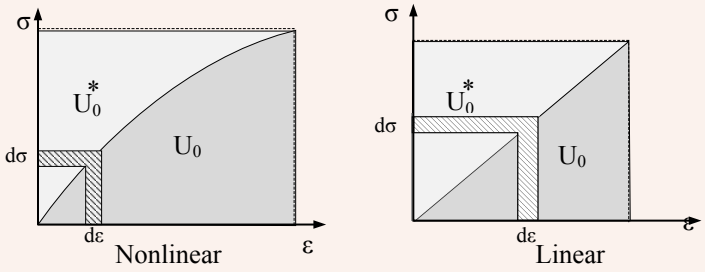


图 48.2: 应变 和附加的 应变能 密度

补充电源能量密度 $U_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

应变能 $U \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0 d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

线性弹性系统

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathrm{d}\Omega$$

哪里 Ω 是系统的 体积。

附加 应变能 $U^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega U_0^* d\Omega = \int_\Omega \int_0^{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} d\Omega$

外部工作

$$W_e \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$
$$W_e = \int_0^{\Delta_f} P \mathrm{d}\Delta + \int_0^{\theta_f} M \mathrm{d}\theta$$

为 **线性弹性系统**我们要点负担

$$\left.\begin{aligned} P &= K\Delta \\ W_e &= \int_0^{\Delta_P} P \mathrm{d}\Delta \end{aligned}\right\} W_e = K\int_0^{\Delta_P} \Delta \mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2} K \Delta_P^2$$

当这个最后的方程式与 $P = K\Delta_P$ 我们获得

$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta_P \tag{48.4}$$

哪里 K 是的, **坚定性** 关于结构。

[10] 相同的, 在一个应用时刻, 我们

$$W_e = \frac{1}{2} M \theta_M \tag{48.5}$$

外部工作潜力

$$\mathcal{W}_e \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma + \mathbf{u}\mathbf{P} \tag{48.6}$$

请注意, 外部力量的势能并不像外部势力的工作。**增加** 负载 (以 位移 增加的). 外部力量的势能是工作的 **永久性** 能量通过一个位移. 因此, 它们因 1/2 的因素而有所不同。

势能

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} U - \mathcal{W}_e = \int_\Omega U_0 d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{u}\mathbf{P} \right) \tag{48.7}$$

因此, 势能是应变能的总和。**外部工作的潜力** (而不是工作). 如在 图 中所示 48.3 压力能量随着迁移增加四方, 而外部工作的潜力随着扩散减少。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

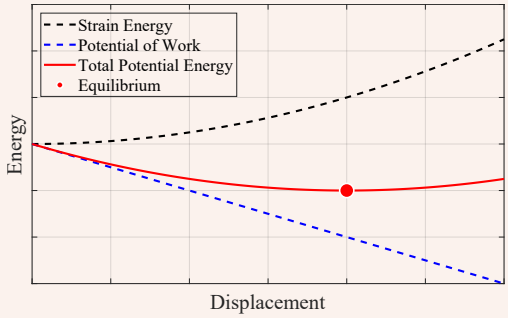


图 48.3: 势能

附加 势能

$$\Pi^* \stackrel{\text{def}}{=} U^* - \mathcal{W}_e^* = \int_\Omega U_0^* d\Omega - \left(\int_\Omega \mathbf{u}\mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}\hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{u}\mathbf{P} \right)$$

48.1.5 虚拟表达式

[11] 值得注意的是, 虚拟数量先于 δ. 因为我们不把这个象征任何特殊的数学意义, 这非常相同 δ 将用于指定区别运营商在最低总值的原则 (或补充) 势能.

内部虚拟 应变能 $\delta\overline{U} = -\delta\overline{W}_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega$

虚拟 应变能 $\delta\overline{U}^* = -\delta\overline{W}_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}\delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega$

外部 虚功 $\delta\overline{W}_e \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_t} \delta\bar{\mathbf{u}}^t \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_\Omega \delta\bar{\mathbf{u}}^t \mathbf{b} d\Omega$

外部 虚功

$$\delta\overline{W}_e^* \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}^t \delta\bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{48.8}$$

48.1.6 注意事项

48.1.6.1 内部工作與 应变能

[12] 在 应变 增長期間, 内部勢力進行的工作在差异性单元中, 将是由施加压力, 以此为作用。

$$W_i \stackrel{\text{def}}{=} -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}\Omega$$

[13] 如果紧密的弹性固体被允许慢慢返回他们的未受干预的状态, 那么坚固的将返回所完成的工作外部力量。这是由于应变能存储的释放在坚固的

[14] 因此, 在缺乏初步的压力下,

$$U = -W_i$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15 内部工作取决于荷载历史, 这表明考虑到一个被两个负载案例的轴成员,Fig。48.4: a) 初始

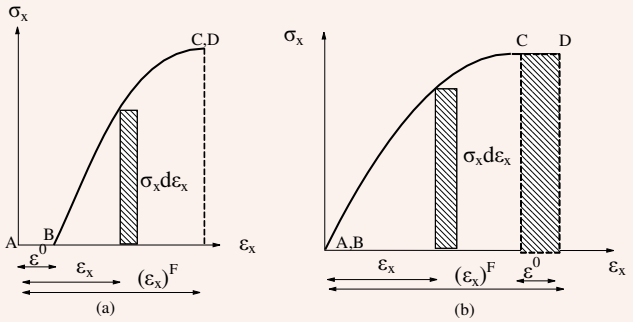


图 48.4: 荷载 历史的影响 U 和 W_i

热线 (没有相应的 应力 增加), 跟随由外部力量; 和 B) 外部力量, 其次是热 应变. 在两种情况下, 内部工作相当于曲线 ABCD 下的区域。

$$
\begin{aligned}
U_i &= \int_0^L \left(\int_0^{(\varepsilon_x)_F} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x \\
W_i^a &= -U_i \\
W_i^b &= -U_i - \int_0^L \left(\int_0^{\varepsilon^0} \sigma_{xx} \mathrm{d}\varepsilon_x \right) A \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

因此, W_i 并不总是平等的 $-U_i$.

48.1.6.2 外部工作独立之路

16 在本节中, 我们试图证明完成的全部工作从 A 到 B 的状态是独立的路径。

17 在 2D 中, 作品的区别表达是由

$$\mathrm{d}W_e = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{48.9}$$

18 从计算, 一个必要和足够的条件 $\mathrm{d}W_e$ 要成为一个具体的差异就是

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{48.10}$$

19 如果力量要沿着封闭的圈子移动 (或从 A 到 B 然后回到 A, 沿着任何自愿的路径) 相应于 Γ 从绿色的理论 (Eq. R.2.6) 我们有

$$\oint (R\mathrm{d}x + S\mathrm{d}y) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.11}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果我们允许 $R = F_x$ 和 $S = F_y$ 然后,

$$W_e = \oint (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int_\Gamma \underbrace{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{48.12}$$

20 因此, 从 eq。48.10 工作等于零,

21 如果我们破坏道路

$$W_e = \oint = \int_A^B + \int_B^A = 0 \Rightarrow \int_A^B = -\int_B^A \tag{48.13}$$

因此, 整合工作导致

$$W_e = \int_A^B (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) \tag{48.14}$$

这是一个独立的道路。

22 请注意, 如果没有网络工作在围绕一个关闭的路径进行, 则系统被称为 **保守**. 这就是纯粹的情况。弹性系统。

23 當摩擦或塑料 (或蒸发) 变形发生, 我们会有 A **非保守主义** 系统。

48.1.7 应用程序 1D 单元

48.1.7.1 补充能量, 线性弹性 U^*

Axial 成员

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon \sigma d\Omega \\ \sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U^* = A \int_\Omega \int_0^L \frac{P}{AE} \frac{dP}{A} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2}{AE} dx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

灵活的成员

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{E I_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} U^* = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2(x)}{EI_z}dx \tag{48.15}$$

48.1.7.2 能量, 线性弹性 U

Axial 成员

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon\sigma d\Omega \\ \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\ \sigma &= \frac{1}{E}\frac{du}{dx} \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} U = \frac{A}{E}\int_\Omega\int_0^L \frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}dx = \frac{A}{2E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

灵活的成员

$$\left.\begin{aligned} U &= \int_\Omega \varepsilon E \delta\varepsilon d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{E I_z} \\ d\Omega &= dA dx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \\ \frac{M(x)}{EI} &= \frac{d^2y}{dx^2} \end{aligned}\right\} U = \int_0^L M(x)\frac{M(x)}{EI_z}dx = \int_0^L EI_z y''\frac{EI_z y''}{EI_z}dx = EI_z\int_0^L (y'')^2 dx$$

48.1.7.3 虚拟 应变能 δU^*

Axial 成员

[24] 压力和力量构成虚拟数量, 由 δ.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

弹性系统

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}\varepsilon d\Omega \\ d\Omega &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$$

线性弹性

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon\delta\overline{\sigma} d\Omega \\ \delta\overline{\sigma} &= \frac{\delta\overline{P}}{A} \\ \varepsilon &= \frac{P}{AE} \\ d\Omega &= Adx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{``\delta\overline{\sigma}''} \underbrace{\frac{P}{AE}}_{``\varepsilon''} dx$$

灵活的成员

弹性系统

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \delta\overline{\sigma}_{xx}\varepsilon_x d\Omega \\ \delta\overline{M}(x) &= \int_A \delta\overline{\sigma}_x y dA \Rightarrow \frac{\delta\overline{M}(x)}{y} = \int_A \delta\overline{\sigma}_x dA \\ \phi &= \frac{\varepsilon}{y} \Rightarrow \phi y = \varepsilon_x \\ d\Omega &= \int_0^L\int_A dAdx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \delta\overline{M}(x)\phi dx$$

线性弹性

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U}^* &= \int_\Omega \varepsilon \underbrace{E\delta\overline{\varepsilon}}_{\delta\overline{\sigma}} d\Omega \\ \sigma_x &= \frac{M_z y}{I_z} \\ \varepsilon_x &= \frac{M_z y}{EI_z} \\ d\Omega &= dAdx \\ \int_A y^2 dA &= I_z \end{aligned}\right\} \delta\overline{U}^* = \int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}(x)}_{``\delta\overline{\sigma}''} \underbrace{\frac{M(x)}{EI_z}}_{``\varepsilon''} dx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

Torsional 会员

弹性系统

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \varepsilon \delta\sigma dvol \\ \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy}\gamma_{xy} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \mathrm{d}\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \frac{\delta T}{J}\gamma_{xy}\mathrm{d}x \tag{48.16}$$

线性弹性

$$\left.\begin{aligned} \delta U^* &= \int_\Omega \delta\tau_{xy} \underbrace{G\tau_{xy}}_{\gamma_{xy}} dvol \\ \tau_{xy} &= \frac{Tr}{J} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \mathrm{d}\Omega &= r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}x \\ J &= \int_o\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \delta U^* = \int_0^L \underbrace{\delta T}_{``\delta\sigma''} \underbrace{\frac{T}{GJ}}_{``\varepsilon''} \mathrm{d}x \tag{48.17}$$

48.1.7.4 虚拟 应变能 δU

25 内部虚拟 应变能 以 应变 或内部转换的意义表达。

26 它将导致在终端元素方法的根源上的表达。

Axial 成员

27 流和移行构成虚拟数量, 由 δ.

弹性系统

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ d\Omega &= A dx \end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = A\int_0^L \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x dx$$

线性弹性

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x = E\frac{du}{dx} \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{d(\delta\overline{u})}{dx} \\ d\Omega &= Adx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{"\sigma"} \underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{dx}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"} \underbrace{Adx}_{d\Omega}$$

灵活的成员

弹性系统

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ M(x) &= \int_A \sigma_x y dA \Rightarrow \frac{M(x)}{y} = \int_A \sigma_x dA \\ \delta\overline{\phi} &= \frac{\delta\overline{\varepsilon}_x}{y} \Rightarrow \delta\overline{\phi} y = \delta\overline{\varepsilon}_x \\ d\Omega &= \int_0^L \int_A dA dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L M(x)\delta\overline{\phi} dx$$

线性弹性

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{U} &= \int_\Omega \sigma_x \delta\overline{\varepsilon}_x d\Omega \\ \left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{M(x)y}{I_z} \\ M(x) &= \frac{d^2v}{dx^2} EI_z\end{aligned}\right\} \sigma_x &= \underbrace{\frac{d^2v}{dx^2}}_{\kappa} Ey \\ \delta\overline{\varepsilon}_x &= \frac{\delta\overline{\sigma}_x}{E} = \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y \\ d\Omega &= dx\end{aligned}\right\} \delta\overline{U} = \int_0^L \int_A \frac{d^2v}{dx^2} Ey \frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2} y dA dx$$

因为 $\int_A y^2 dA = I_z \Rightarrow$

$$\delta\overline{U} = \int_0^L \underbrace{EI_z \frac{d^2v}{dx^2}}_{"\sigma"} \underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}}_{"\delta\overline{\varepsilon}"} dx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

48.1.8 关于 VW 和 CVW 的概述

[28] 桌子 48.1 是 A “全景” 看见以前定义的各式各样的表达。

注意: 需要从 势能 到 Beamer 和 Book 的移动

表 48.1: 对 vw,cvw、pe、cpe 的方程式总结

内部虚拟 应变 能量				
	应变能 $\delta\overline{U}$		**完美。应变能**: $\delta\overline{U}^*$	
	弹性	**线性弹性**	**弹性**	**线性弹性**
轴心	$A\int_0^L \sigma\delta\overline{\varepsilon}dx$	$\int_0^L \underbrace{E\frac{du}{dx}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d(\delta\overline{u})}{Dx}}_{\delta\overline{\varepsilon}}\underbrace{\text{标签}x}_{d\Omega}$	$A\int_0^L \delta\overline{\sigma}\varepsilon dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{P}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{P}{AE}}_{\varepsilon}Dx$
灵活性	$\int_0^L M\delta\overline{\phi}dx$	$\int_0^L \underbrace{EI_z\frac{d^2v}{dx^2}}_{\sigma}\underbrace{\frac{d^2(\delta\overline{v})}{\text{二}\times 2}}_{\delta\overline{\varepsilon}}Dx$	$\int_0^L \delta\overline{M}\phi dx$	$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}}_{\delta\overline{\sigma}}\underbrace{\frac{M}{\text{是}Z}}_{\varepsilon}Dx$
外部 虚功				
P	$\sum_i^n P_i\delta\overline{\Delta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{P}_i\Delta_i$	
M	$\sum_i^n M_i\delta\overline{\theta}_i$		$\sum_i^n \delta\overline{M}_i\theta_i$	
w	$\int_0^L w(x)\delta\overline{v}(x)dx$		$\int_0^L \delta\overline{w}(x)v(x)dx$	
能量				
	能量 U **(位移)**		**完美。能量** U^* **(力量)**	
轴心	$\frac{1}{2}\frac{A}{E}\int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE}dx$	
灵活	$\frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx$		$\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx$	

请注意，本节包含必须在下一节之前排出的浮动对象（插图和/或表格），因此此处可能出现空白或间隙。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

48.2 接近

29 到目前为止, 我们已经定义了等式的每一个和每个组成部分尚未衍生。再一次, 到目前为止, 这些条款是独立的, 他们之间没有任何关系。

30 因此, 在我们深入了解细节之前, 最好看看两种可能的方法: 虚功的原则。(PVW) 补充的原则虚功 (PCVW) 与什么有关

力量 符合 平衡 的要求的系统
歪曲 符合 kinematics 的要求。

31 我们显然有两条路径来结合虚拟和真实的数量, 桌面 48.2, 和 图 48.5 二是依据这两项原则。

表 48.2: 虚拟工作原则和补充虚拟工作的原则的替代路径

原则	虚拟			寻找	真实的	
	开始	满足			满足	
	与	弱点	BC。		坚强	BC。
CVW $\delta\overline{U}^* = \delta\overline{W}_e^*$	力量。	平衡	自然 Γ_t	迪斯普	变形协调	重要 Γ_u
VW $\delta\overline{U} = \delta\overline{W}_e$	迪斯普	变形协调	重要 Γ_u	力量	平衡	自然 $\Gamma_t jh$

32 请注意, 根据 变形协调, 我们意味着

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

以 平衡:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

33 但是, 在我们前进之前, 读者应该有一个良好的理解, 图 48.5:

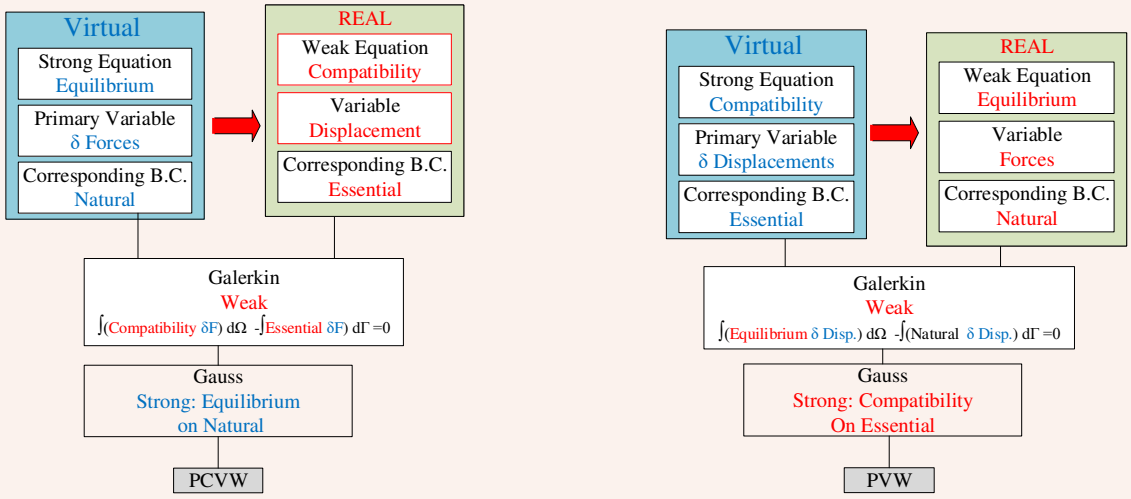
强弱 覆盖的形式 §47.2.3.
基本和自然 BC 覆盖在 (§47.2.6)
弹性 (基本方程式) (§O.8)

48.3 虚功

48.3.1 补充 虚功 的原则 (PCVW)

34 我们开始与 PCVW 的衍生, 因为读者可能已经熟悉该方法。(以前和经典地引入 §24.2) 定义缺陷).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 附加 虚功　　(b) 虚功

图 48.5: 虚拟和补充虚拟作品的原则图表

48.3.1.1 衍生品

35 补充虚功原则的衍生始于一个静态可接受的虚拟力量集。(满足 平衡) 相应的自然边界条件。我们正在寻找相应的动态上可接受的实际转移, 这些转移也符合相应的重要边界条件。48.2, 图 48.5a.

36 电影《 (变形协调) 条件 (应变-位移) 被授予

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

37 请注意, 可以重写为 (Eq. O.7)

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

而此以后 (由 PVW 衍生), 平衡的方程式将被表达为 (Eq. O.9).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$\underbrace{\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}}_{\text{div }\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{b}=0$$

38 自然界限条件如:

$$u_i=\hat{u}\ \text{ on }\ \Gamma_u$$

哪里 $\hat{u}$ 已知的流浪 Γ_u.

39 这两个方程式被重写为

$$\varepsilon_{ij}-u_{i,j}=0;\qquad u_i-\hat{u}=0$$

40 现在, 我们将以平均水平满足。(弱点在整体上) 这些强烈的差异方程式使用 **伽辽金法**. 通过虚拟 应力 字段预测第一个方程式 $\delta\overline{\sigma}_{ij}$ 并在 体积 上集成; 通过相应的虚拟拖动, 预先进行第二次 $\delta\bar{t}_i$ 并在相应的表面上整合, 产生弱形状

$$\int_\Omega \underbrace{\left(\varepsilon_{ij}-u_{i,j}\right)\delta\overline{\sigma}_{ij}}_{\text{Compatibility}}\,d\Omega-\int_{\Gamma_u}\underbrace{\left(u_i-\hat{u}\right)\delta\bar{t}_i}_{\text{Essential B.C.}}\,d\Gamma=0 \tag{48.18}$$

41 专注于 $\int_{\Gamma_u}u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma$

$$\int_{\Gamma_u}u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma=\int_{\Gamma}u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma-\int_{\Gamma_t}u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma$$

请注意, 右侧的第二个术语是零。

$$\delta\bar{t}_i=0\ \text{ on }\ \Gamma_t$$

为了满足自然边界条件。

42 因此

$$\int_{\Gamma_u}u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma=\int_{\Gamma}u_i\delta(\overline{\sigma}_{ij}n_j)d\Gamma \tag{48.19}$$

43 我们谈论了 $u_i\delta\bar{t}_i$ 用 Gauss' Theorem 的用法 (§R) 与此同时 $t_i=\sigma_{ij}n_j$ 然后

$$\begin{aligned}\int_\Gamma t_iu_i d\Gamma&=\int_\Gamma\sigma_{ij}n_ju_i d\Gamma=\int_\Gamma(\sigma_{ij}u_i)n_j d\Gamma\\&=\int_\Omega(\sigma_{ij}u_i)_{,j}d\Omega=\int_\Omega(\sigma_{ij,j}u_i+\sigma_{ij}u_{i,j})d\Omega\end{aligned}$$

因此, 现在我们可以转换 eq。48.19 以 体积 集成

$$\int_\Gamma u_i\delta\bar{t}_i d\Gamma=\int_\Omega u_i\delta\overline{\sigma}_{ij,j}d\Omega+\int_\Omega u_{i,j}\delta\overline{\sigma}_{ij}d\Omega$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

44 假设的虚拟压力必须是静态可接受的 (即在 平衡) 内部 Ω (相反, 在虚功原理/位移中, 虚拟移动必须是动态可接受的。). 在身体力量的缺乏下:

$$\delta\overline{\sigma}_{ij,j} = 0 \text{ in } \Omega$$

或

$$\int_{\Gamma_u} u_i \delta\bar{t}_i d\Gamma = \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\overline{\sigma}_{ij} d\Omega$$

45 将此方程式与 Eq 相结合。48.18 导致

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{i,j} \delta\sigma_{ij} d\Omega = 0 \tag{48.20}$$

它简化了

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \hat{u} \delta t_i d\Gamma = 0 \tag{48.21}$$

46 每一个术语都是工作表达, 第一个符合内部补充虚拟工作, 第二个符合外部补充虚拟工作。48.8

$$-\delta W_i^* - \delta W_e^* = 0 \tag{48.22}$$

或

$$\delta U_i^* = \delta W_e^* \tag{48.23}$$

什么是虚拟补充工作的原则 (虚拟力量)

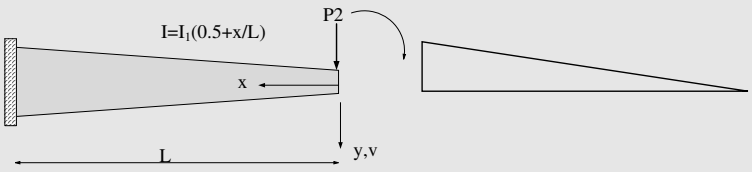
定义 48.2: 虚拟补充工作原则

可扭曲的系统满足所有动画需求 (Eq. 48.2) 如果外部补充的虚拟工作和内部补充虚拟工作的总额为所有静态可接受的虚构压力零 $\delta\overline{\sigma}_{ij}$.

这个原则导致柔度矩阵。

48.3.1.2 例题 48.1: PCVW, 粘贴的梁

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



$$\int_0^L \underbrace{\delta\overline{M}\frac{M}{EI_z}dx}_{\text{Internal}} = \underbrace{\delta\overline{P}\Delta}_{\text{External}}$$

这里: $\delta\overline{M}$ 和 $\delta\overline{P}$ 是虚拟力量, $\frac{M}{EI_z}$ 和 Δ 这是真正的转移。

If $\delta\overline{P}=1$ 然后, $\delta\overline{M}=x$ 和 $M=P_2x$ or:

$$(1)\Delta = \int_0^L x\frac{P_2x}{EI_1(.5+\frac{x}{L})}dx = \frac{P_2}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{\frac{L+x}{2L}}dx = \frac{P_2 2L}{EI_1}\int_0^L \frac{x^2}{L+x}dx$$

从 **数学** 我们知道这一点:

$$\int \frac{x^2}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln(a+bx)dx\right]$$

以此代替 $a=L$ 和 $b=1$ 我们得到了:

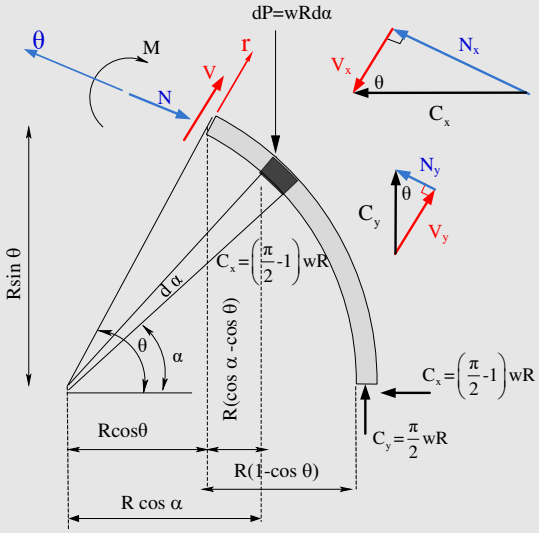
$$\Delta = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[\frac{1}{2}(L+x)^2 - 2L(L+x) + L^2\ln(L+x)\right]\Big|_0^L = \frac{2P_2L}{EI_1}\left[L^2(\ln 2 - \frac{1}{2})\right] = \frac{P_2L^3}{2.5887EI_1}$$

同样:

$$\theta = \int_0^L \frac{M(1)}{EI_1\left(.5+\frac{x}{L}\right)} = \frac{2ML}{EI_1}\int_0^L \frac{1}{L+x} = \frac{2ML}{EI_1}\ln(L+x)\,|_0^L = \frac{ML}{.721EI_1}$$

48.3.2 例题 48.2: 四半循环 拱

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



我们试图确定三根曲子的冠冕的垂直挠度静态定义的半循环拱在其自己的死体重下 w.
首先, 我们试图确定时刻图表的解析表达式。从静态,可以证明垂直和水平反应是 $R_v = \frac{\pi}{2} wR$ 和 $R_h = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR$.
接下来考虑了拱的自由体图表, 并总结了力量放射方向 ($\Sigma F_R = 0$):

$$-\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR\cos\theta + \frac{\pi}{2} wR\sin\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha \sin\theta + V = 0$$
$$V = wR\left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cos\theta + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\right]$$

同样, 如果我们考虑到在轴向的力量集合 ($\Sigma F_T = 0$):

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR\sin\theta + \frac{\pi}{2} wR\cos\theta - \int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha \cos\theta + N = 0$$
$$N = wR\left[\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\sin\theta\right]$$

现在我们可以考虑平衡的第三方程式。($\Sigma M_\theta = 0$):

$$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) wR \cdot R\sin\theta - \frac{\pi}{2} wR^2 (1 - \cos\theta) +$$
$$\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\mathrm{d}\alpha \cdot R(\cos\alpha - \cos\theta) + M = 0$$
$$M = wR^2\left[\frac{\pi}{2}(1 - \sin\theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

真正的曲率 ϕ 它是通过分配时刻的 EI

$$\phi = \frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1 - \sin\theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]$$

虚拟力量 δP 将是一个单一的垂直点在挠度的方向, 导致虚拟内部时刻

$$\delta M = \frac{R}{2}\left[1 - \cos\theta - \sin\theta\right] \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

因此, 虚功方程式的应用结果:

$$\begin{aligned}\underbrace{1}_{\delta P}\cdot\Delta &= 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{wR^2}{EI}\left[\frac{\pi}{2}(1-\sin\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta\right]}_{\phi}\cdot\underbrace{\frac{R}{2}\cdot[1-\cos\theta-\sin\theta]}_{\delta M}\underbrace{R\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}x}\\ &= \frac{wR^4}{16EI}\left[7\pi^2-18\pi-12\right]\\ &= 0337\frac{wR^4}{EI}\end{aligned}$$

48.3.3 虚功原理 (PVW)

48.3.3.1 衍生品

47 虚功原理的衍生始于存在 Kinematically Admissible 虚拟移动 (满足 变形协调) 相应的基本边界条件。

48 我们正在寻找相应的静态可接受的实体力量集, 也满足相应自然边界条件。

49 内部压力在 平衡 中, 如果

$$\underbrace{\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}}_{\text{div }\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{b}=0 \tag{48.24}$$

50 相应的基本边界条件是由

$$\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}=0 \quad \text{on } \Gamma_t \text{ Essential B.C.} \tag{48.25}$$

哪里 $\hat{t}$ 已知的拖动 Γ_t.

51 平等 48.24 和 48.25 形成一个静态可接受的 应力 字段。

52 我们将实现满足平衡 Eq 的本地状况。48.24 和静态边界状态 Eq。48.25 在全球 (或完整/弱) 形式。通过通过虚拟位移来加倍两种方程式实现这一目标。$\delta\bar{\mathbf{u}}$.

53 因此, 弱势的形状是由

$$-\int_{\Omega}\delta\bar{\mathbf{u}}^T\underbrace{\left(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}\right)}_{\text{Equil.}}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\delta\bar{\mathbf{u}}^T\underbrace{\left(\mathbf{t}-\hat{\mathbf{t}}\right)}_{\text{Essential B.C.}}d\Gamma=0 \tag{48.26}$$

54 这是一个重要的要求, 在 (虚拟) 转移, 是他们必须满足变形协调的要求。(相反, 在补充虚功的原则下, 压力必须是静态可接受的。). 虚拟移动必须满足基本的边界条件:

$$\mathbf{L}\delta\bar{\mathbf{u}}=\text{div}\delta\bar{\mathbf{u}}=\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{48.27}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

55 专注于 $\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$

$$\int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

我们通过加乌斯理论来将体积变成一个整体。记住拖动的定义 向量

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \text{ or } t_i = \sigma_{ij} n_j$$

我们所获得的加乌斯理论

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma})\mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \text{div}\boldsymbol{\sigma} d\Omega\end{aligned}$$

但是, $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}$ 这样

$$\int_{\Gamma} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}\delta\overline{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$

56 经过一些迷失和令人兴奋的步骤, 上面的方程式结果虚功原理的 (转移)

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{-\delta\overline{W}_i = \delta\overline{U}_i} \underbrace{- \int_{\Omega} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\overline{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma}_{-\delta\overline{W}_e} = 0 \tag{48.28}$$

或

$$\delta\overline{U}_i = \delta\overline{W}_e$$

定义 48.3: 虚拟位移的原理

可变的系统在平衡中 (Eq. 48.24) 如果外部 虚功 和内部 虚功 的总值为虚拟移动的零 $\delta\overline{\mathbf{u}}$ 满足电影方程式和电影边界条件的 (Eq. 48.27).

57 对于一个尺寸的 单元, 这减少了

$$\underbrace{\int \sigma \delta\overline{\varepsilon} d\Omega}_{\delta\overline{U}} = \underbrace{P\delta\overline{v}}_{\delta\overline{W}}$$

请注意, 这张 $\delta U - \delta W = 0$ 我们可以根据某个数据的所有条款进行 δv_i 把它等于零。这将导致

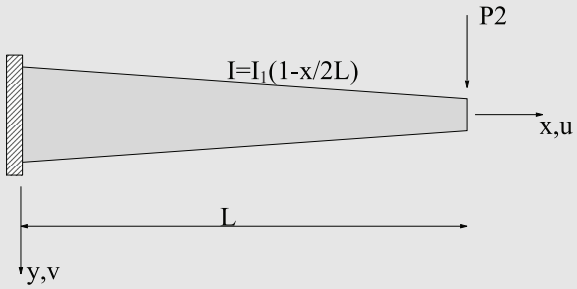
$$A_1 \delta v_1 + A_2 \delta v_2 + \cdots + A_n \delta v_n = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因为 δv_i 可以随意选择, 然后每一个 A_i 必须是零的。这将导致一个系统的 n 线性方程式:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta v_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta v_n \end{bmatrix}}_{\text{Ignore}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}}_{\text{Solve}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{48.29}$$

48.3.3.2 例题 48.3: PVW, 粘贴的 Cantilevered 梁



在应用 PVW 时, 我们需要接近实际 位移 v 虚拟一 δv. 这些表达必须满足基本的边界条件。(位移 和插槽).
对于这个问题提出的解决方案是

$$v = \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) v_2 \tag{48.30}$$

$$v = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] v_2 \tag{48.31}$$

他们满足基本的 BC: $v = v' = 0$ 在 $x = 0$.

我们考虑了三个案例:

解决方案	真实的	虚拟
1	EQN。48.30	EQN。48.31
2	EQN。48.30	EQN。48.30
3	EQN。48.31	EQN。48.31

- PVW 的应用需要对二次衍生品功能进行评估。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

	三角形 (EQN。48.30)	聚合物 (EQN。48.31)
v	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)v_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_2$
$\delta\overline{v}$	$\left(1-\cos\frac{\pi x}{2L}\right)\delta\overline{v}_2$	$\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\delta\overline{v}_2$
v''	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}v_2$	$\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)v_2$
$\delta\overline{v}''$	$\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2$	$\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]\delta\overline{v}_2$

$$\delta\overline{U}=\int_0^L EI_z\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2(\delta\overline{v})}{dx^2}dx;\qquad \delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

解决方案 1:

$$\begin{aligned}\delta\overline{U}&=\int_0^L\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)v_2}_{v''}\underbrace{\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx\\&=\frac{3\pi EI_1}{2L^3}\left[1-\frac{10}{\pi}+\frac{16}{\pi^2}\right]v_2\delta\overline{v}_2\\\delta\overline{W}&=P_2\delta\overline{v}_2\end{aligned}$$

什么是收益:

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.648EI_1}$$

解决方案 2:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{v''}\underbrace{\frac{\pi^2}{4L^2}\cos\frac{\pi x}{2L}\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx=\frac{\pi^4EI_1}{32L^3}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right)v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

什么是收益:

$$v_2=\frac{P_2L^3}{2.57EI_1}$$

解决方案 3:

$$\delta\overline{U}=\int_0^L\underbrace{\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]v_2}_{v''}\underbrace{\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right]\delta\overline{v}_2}_{\delta\overline{v}''}\underbrace{EI_1\left(1-\frac{x}{2L}\right)}_{EI}dx=\frac{9EI}{L^3}v_2\delta\overline{v}_2$$

$$\delta\overline{W}=P_2\delta\overline{v}_2$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

什么是收益:

$$v_2 = \frac{P_2 L^3}{9EI_1}$$

48.4 势能的原则

58 现在将提出一个完全不同的但相关的方法。而不是转换现实和虚拟数量,我们将简单地试图尽量减少总数。(或补充) 势能. 這些兩個原則將從虛擬应变能的原則中獲得。(逆行是自然可能的。).

59 值得注意的是,在这里, δ 运营商将承担其完整的数学意义: 差异性,而在它之前则意味着虚拟量。

60 请注意,补充 势能 的原则仅是轻微相关的,并将不会讨论。

48.4.1 总数 势能 的原则 (PTPE)

61 我们重新审查了此原则,以前提到的 §47.3

48.4.1.1 衍生品

62 注: 差异化是用来计算一个点周围的变量的数学方法。

63 If U_0 这是一个潜在的功能,我们采取它的差异性 $\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}$ 根据计算理论的说法, $\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du = f(x)$. 这样

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ U_0 &= \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ \frac{\delta}{\delta \varepsilon_{ij}} \int_0^x \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \frac{\delta U_0}{\delta \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \Rightarrow \delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

64 虚功原理的 (Eq. 48.28)

$$\int_\Omega \delta \overline{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_\Omega \delta \overline{u}_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \overline{u}_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

现在可以重写为

$$\int_\Omega \delta U_0 d\Omega - \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \hat{t}_i d\Gamma = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

65 到目前为止 δ 说到虚拟数量, 我们现在正在做交换和 δ 将提到变量。

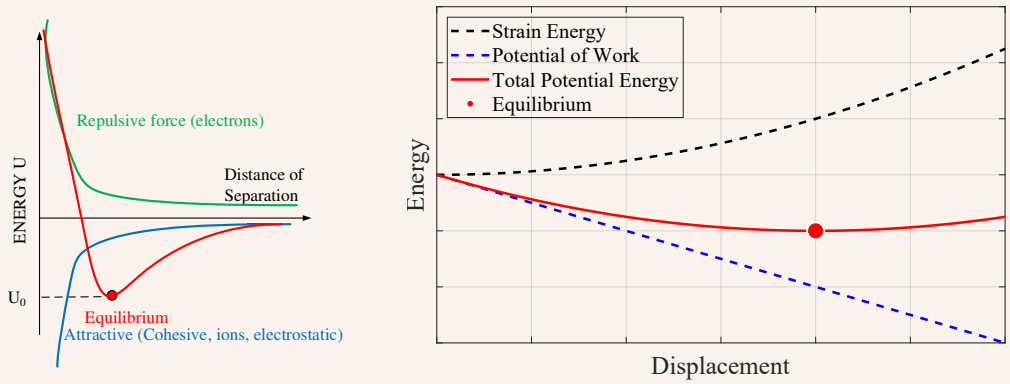
66 如果表面拖动或身体力量在变形期间改变其大小或方向, 则可以简化。

$$\delta \left[\overbrace{\int_{\Omega} U_0 d\Omega}^{U} \overbrace{- \int_{\Omega} u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \hat{t}_i d\Gamma}^{-\mathcal{W}_e} \right] = 0 \tag{48.32}$$

67 比较这个最后的方程式, 与 Eq。48.7 我们得出结论, 势能的变量是零。

$$\delta \Pi = 0 \tag{48.33}$$

此分類上一篇: 图 48.6b 如果 平衡 相当于总 势能 的最低值。这类似于量子机械中的相互原子力量中平衡状态, 图 48.6a.



(a) 量子机械 (b) 经典机械

图 48.6: 量子和经典机械的减少

定义 48.4: 势能的静态值原则

所有 kinematically admissible deformations (满足基本边界条件的转移) 实际的歪曲 (相应于满足平衡的压力的人) 是那些对其总值 势能 承认的固定值。

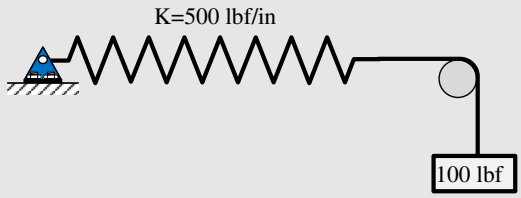
68 对于涉及多个 自由度 的问题,

$$\delta \Pi = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1}}_{0} \delta \Delta_1 + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2}}_{0} \delta \Delta_2 + \cdots \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_n}}_{0} \delta \Delta_n = 0 \tag{48.34}$$

或 n 与方程式 n 未知的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

48.4.1.2 例题 48.4: PTPE, 春天和质量



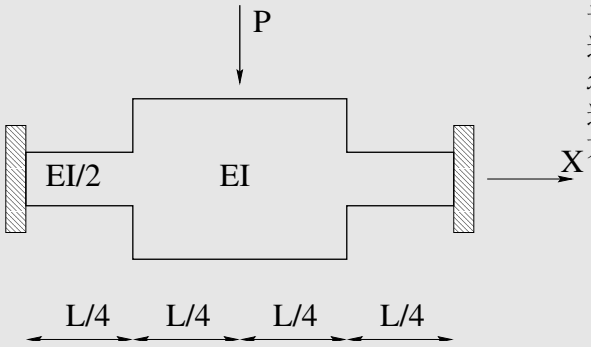
我们试图确定群众的平衡位置。
纽顿 $\Delta = \frac{F}{K} = \frac{100}{500} = 0.2"$
拉格兰:The 应变能 U 外部工作的潜力 W 被授予

$$U = \frac{1}{2}u(Ku) = 250u^2 \qquad W_e = mgu = 100u$$

请注意, 没有 $1/2$ 在 W_e 因为在工作中, 力量是稳定的。总数 势能 是 $\Pi = U - W_e$ 而且是 $\Pi = 250u^2 - 100u$ 必须是静态的。

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{du} = 0 \Rightarrow 500u - 100 = 0 \Rightarrow u = 0.2 \text{ in}$$

48.4.1.3 例题 48.5: PTPE; 粘贴 梁 与变量 I



让我们假设这 $v = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$
这个解决方案必须满足基本的 BC: $v = v' = 0$ 在 $x = 0$ 其次, $v = v_{max}$ 和 $v' = 0$ 在 $x = \frac{L}{2}$.
这将是通过确定四个参数在一个单一的未知数量方面进行的。(4 个方程式和 4 个公元前):

$$\begin{array}{lll} @x = 0 & v = 0 & \Rightarrow a_4 = 0 \\ @x = 0 & \frac{dv}{dx} = 0 & \Rightarrow a_3 = 0 \\ @x = \frac{L}{2} & v = v_{max} & \Rightarrow v_{max} = a_1\frac{L^3}{8} + a_2\frac{L^2}{4} \\ @x = \frac{L}{2} & \frac{dv}{dx} = 0 & \Rightarrow \frac{3}{4}a_1L^2 + a_2L = 0 \qquad \Rightarrow a_2 = -\frac{3}{4}a_1L \end{array}$$

交换后, 我们获得:

$$v = \left(-\frac{16x^3}{L^3} + \frac{12x^2}{L^2}\right)v_{max}$$

因此, 在这个问题上解决方案只有一个未知的变量。v_{max}.

为了实现最低势能的原则, 我们应该评估: 内部 应变能 U: 为灵活的成员, 表达在转移方面 (在这种方法中, 必须) 被授予

$$U = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{L/2} E\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 I_z dx\right]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, 我们必须评估 $\frac{d^2v}{dx^2}$:

$$\frac{dv}{dx} = \left(-\frac{48x^2}{L^3} + \frac{24x}{L^2}\right) v_{max}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{24}{L^2}\left(1 - \frac{4x}{L}\right) v_{max}$$

替代

$$\frac{U}{2} = \frac{E}{2}\int_0^{\frac{L}{4}} \frac{24^2}{L^4}\left(1 - \frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 \frac{I_z}{2} dx + \frac{E}{2}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}} \frac{24^2}{L^4}\left(1 - \frac{4x}{L}\right)^2 v_{max}^2 I_z dx$$
$$U = \frac{72EI_z}{L^3} v_{max}^2$$

外部工作的潜力 W_e:] 对于一个点 荷载, $W_e = Pv_{max}$

最后,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial v_{max}} - \frac{\partial W_e}{\partial v_{max}} = 0 \quad \frac{144EI_z}{L^3} v_{max} = P \quad \Rightarrow v_{max} = \frac{PL^3}{144EI_z}$$

48.4.2 总补充 势能 的原则 (PTCPE)

69 按照与你 TPE 相似的方法, 可以很容易地证明

$$\delta \Pi^* = \delta U^* - \delta \mathcal{W}_e^* \tag{48.35}$$

48.5 卡斯蒂格利亚诺的理论

有关历史背景，请参见 §??

虽然卡斯蒂格利亚诺的理论基本上与虚功原理相似, 但它往往是解决某些问题的最佳方法。这是在斯特拉的例子中所示。

该方法不与虚拟量分开, 但在两种数量方面提供一个单一的应变能表达方式, 然后将衍生品与虚构量相匹配。

48.5.1 第一理论

70 卡斯蒂格利亚诺的第一理论是基于总原则势能。审查 EQ。48.33 可以重写为

$$\delta \Pi = \delta U - \delta \mathcal{W}_e = 0$$

第二个术语可以表达为

$$\delta \mathcal{W}_e = F\delta u + \frac{1}{2}\Delta F \delta u + \cdots$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

合并 [1] 我们得到

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u}-F\right)\delta u=0\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial u}=F$$

这是卡斯蒂格利亚诺的第一个理论:

定义 48.5: 卡斯蒂格利亚诺的第一理论

第一部分内部能源衍生品 (应变能) 对于某个特定 挠度 组件的结构, 在一个点上相当于当时应用的强度, 并以相应的方向与该 挠度 组成部分。

71 这一第一理论适用于线性或非线性弹性结构, 温度是稳定的, 支持是无缝的。

72 到目前为止, 我们已经提到了只有一个力量的系统。可以将其转移到一个系统中。N 力量在哪里

$$\mathcal{W}_e=\sum_{i=1}^{N}F_iu_i$$

然后, 总的 势能 可以表达为

$$\Pi=U-\mathcal{W}_e=U(u_1,u_2,\cdots,u_N)-\sum_{i=1}^{N}F_iu_i$$

任何虚拟变量 δu_i 在 位移 中 u_i 但是, 它的变异 $\delta\Pi$ 总数 势能 Π 必须消失 (根據總 势能 的原则)

$$\delta\Pi=\frac{\partial U}{\partial u_i}\delta u_i-F_i\delta u_i=\left(\frac{\partial U}{\partial u_i}-F_i\right)\delta u_i=0$$

由于其多样性 $\delta u_1,\delta u_2,\cdots,\delta u_N$ 彼此是独立的, 因此

$$\frac{\partial U}{\partial u_i}-F_i=0,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

这是卡斯蒂格利亚诺的第一理论的一般陈述。

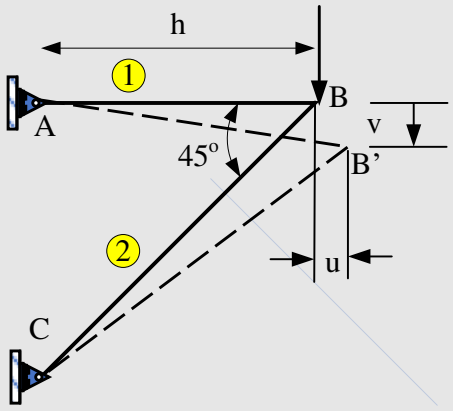
如果一个结构系统的 应变能 可以表达为 N 独立转移, $u_1,u_2,\cdots,u_N$ 相应的 N 特定的力量, $F_1,F_2,\cdots,F_N$ 第一部分 应变能 的衍生品, 与任何 位移 有关 u_i (在 荷载 F_i) 与力量相同 F_i 在方向上, u_i.

[1] 记住这 $\delta F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

48.5.1.1 例题 48.6: 非线性弹性 桁架

从 (Reddy, 2017)



对于附属连接的桁架, 我们试图在适用的荷载下确定关节 B 的水平和垂直转移。P. 行列是由非线性弹性材料制成的, 其应力-应变行为被给予

$$\sigma = \begin{cases} K\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon \geq 0 \\ -K\sqrt{-\varepsilon} & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

每个成员的十字路口是 A.

从电影中 (二、变形素的地质学) 每個會員的 桁架 , 每個成員的 应变 都由

$$\varepsilon_1 = \frac{AB' - AB}{AB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + v^2}{h^2}} - 1$$
$$\varepsilon_2 = \frac{CB' - CB}{CB} = \sqrt{\frac{(h+u)^2 + (h-v)^2}{2h^2}} - 1$$

但是, 因为我们有小小的转移 (伊 • e $u^2 \simeq 0$ 和 $v62 \simeq 0$ 这使得它变得更简单

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 + 2\frac{u}{h}} - 1 \simeq \frac{u}{h}$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 + \frac{(u-v)}{h}} - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{u-v}{h}\right)$$

结构的 应变 能量密度 是由 $U_0 = U_{01} + U_{02}$

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \\ &= \int_0^{\varepsilon_1} K\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_2} -K\sqrt{-\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{2K}{3}(\varepsilon_1)^{3/2} + \frac{2K}{3}(-\varepsilon_2)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3}K\left[\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

我們採取成員 2 在壓縮下。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

总值 应变能 由 $U = U_1 + U_2$

$$U = Ah\frac{2}{3}K\left(\frac{u}{h}\right)^{3/2} + A\sqrt{2}h\frac{2}{3}K\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{v-u}{h}\right)^{3/2}$$
$$= \frac{AK}{3\sqrt{h}}\left[2u\sqrt{u} + (v-u)\sqrt{v-u}\right]$$

现在我们使用卡斯蒂格利亚诺的第一理论

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 0 = \frac{AK}{2\sqrt{h}}(2\sqrt{u} - \sqrt{v-u})$$
$$\frac{\partial U}{\partial v} = P = \frac{AK}{2\sqrt{h}}\sqrt{v-u}$$

解决为 u 和 v

$$u = \frac{P^2h}{A^2K^2}, \qquad v = \frac{5P^2h}{A^2K^2}$$

48.5.2 第二理论

73 卡斯蒂格利亚诺的第二个理论是基于整体补充势能原则。审查 EQ。48.35 可以重写为

$$\delta\Pi^* = \delta U^* - \delta\mathcal{W}_e^* \Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial F}\delta F - u\delta F = 0$$

或

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = u$$

+

74 这个方程式可以将其转化为结构系统。

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_i} = u_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

定义 48.6: 卡斯蒂格利昂的第二个理论

结构中的整体内部能量的第一部分衍生物, 与任何时刻所应用的力量相同, 相当于该力量在其行动线的方向上适用时的挠度。

75 如果我们用这个表达式 U^* 从 §48.1.7.1

$$U* = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{AE} \\ \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx \end{cases}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

然后

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{P}{AE}\frac{\partial P}{\partial P_i}\\ \theta_i &= \frac{\partial U^*}{\partial M_i} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_i}\end{aligned} \tag{48.36}$$

48.5.2.1 例题 48.7: 卡斯蒂格利亚诺 2; cantilevered 梁

我们正在寻找一个点 荷载 加载的 cantilever 的端口的 位移。

来自 EQ。48.15, 补充 应变能 是 $U^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x$, 和一个点 荷载, 外部工作是 $\mathcal{W}^*{}_e = P\Delta$ 因此, 系统的势能是

$$\begin{aligned}\Pi^* &= U^* - \mathcal{W}^*{}_e\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}\mathrm{d}x - P\Delta\end{aligned} \tag{48.37}$$

但是, 对于荷载的点, 现在是 $M = Px$ 替代上方

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \tfrac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2x^2}{EI}\mathrm{d}x - P\Delta\\ &= \tfrac{1}{6}\frac{P^2L^3}{EI} - P\Delta\\ \frac{\mathrm{d}\Pi^*}{\mathrm{d}P} &= \tfrac{1}{3}\frac{P^2L^3}{EI} - \Delta = 0\\ \Rightarrow \Delta &= \tfrac{1}{3}\frac{PL^3}{EI}\end{aligned} \tag{48.38}$$

48.5.2.2 例题 48.8: 卡斯蒂格利亚诺 2; 使用加斯蒂里亚诺的第二理论, 单一负载的喷雾的破裂

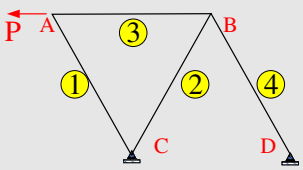
考虑到一个简单支持的单一充电梁, 我们正在寻找中间的挠度.

在这种情况下, 我们将不得不引入一个 **虚构的力量** R 在中间, 现在就是这样。$M(x) = \frac{wL}{2}x + \frac{R}{2}x - w\frac{x^2}{2}$. 附加的 应变能 $U^* = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$ 和 位移

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{\partial U^*}{\partial R}\big|_{R=0}\\ &= \left(\tfrac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}} M\tfrac{\partial M}{\partial R}\mathrm{d}x\right)\Big|_{R=0} = \left\{\tfrac{2}{EI}\int_0^{\frac{L}{2}}\left[\left(\tfrac{wL}{2} + \tfrac{R}{2}\right)x - w\tfrac{x^2}{2}\right]\tfrac{x}{2}\mathrm{d}x\right\}\Big|_{R=0}\\ &= \tfrac{5wL^4}{384EI}\end{aligned} \tag{48.39}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

48.5.2.3 例题 48.9: 卡斯蒂格利亚诺 2、非线性桁架



接近者 (平等) 桁架 由具有非线性 位移 强度关系的行列组成 $u = k_1F + k_2F^2$.
因为材料是非线性 $U_i^* \neq U_i$ 在这种情况下, 我们应该使用补充 应变能

$$U_i^* = \sum \int_0^F u dF$$

由静态 平衡

$$\lfloor\ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4\ \rfloor = \lfloor\ 0 \quad -P \quad P \quad P\ \rfloor$$

这样

$$\lfloor\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\ \rfloor = \lfloor\ 0 \quad -k_1P + k_2P^2 \quad k_1P + k_2P^2 \quad k_1P + k_2P^2\ \rfloor$$

因此, 整体补充 应变 能量, 结构变成

$$U_i^* = 2\left(\frac{k_1F^2}{2} + \frac{k_2P^3}{3}\right) + \left(\frac{k_1F^2}{2} - \frac{k_2P^3}{3}\right) = \frac{3k_1F^2}{2} + \frac{k_2P^3}{3}$$

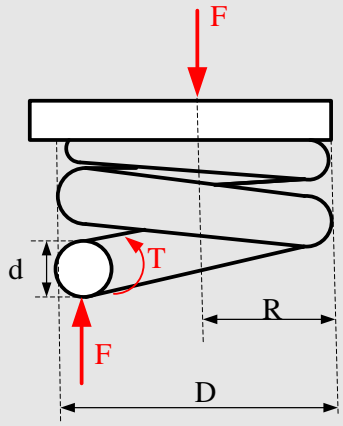
这样

$$v_A^H = \frac{\partial U_i^*}{\partial P} = 3k_1P + k_2P^2$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

48.5.2.4 例题 48.10: 卡斯蒂格利亚诺 2 号, 春天挠度



对于附属的直径压缩喷泉, 由循环交叉部分制成的轮子, 受过旋转 剪应力 和跨形叶 (忽略灵活性).
总补充 应变能 由

$$U^* = U_T^* + U_S^* = \frac{T^2 L}{2GJ} + \frac{F^2 L}{2AG}$$

哪里 L 是电线的长度。
替代 $T = FD/2, L = N\pi D, J = \pi d^4/32$ 和 $A = \pi d^2/4$ 我们获得

$$U^* = \frac{4NF^2D^3}{d^4G} + \frac{2NF^2D}{d^2G}$$

哪里 N 是活跃的相关术语子数量。
然后我们将卡斯蒂格利亚诺的第二理论应用来确定春天的挠度。

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{8NFD^3}{d^4G} + \frac{4NFD}{d^2G}$$

48.6 雷莱里茨方法

有关历史背景，请参见 §??

48.6.1 衍生品

76 在最小化总值势能, 我们表达了势能在物理量方面。(转移/旋转) 在某些节点上, 然后说潜力是静态的, 也就是说。

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1}\delta\Delta_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2}\delta\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_n}\delta\Delta_n$$

77 更一般的 (依然接近) 方法是表达转移, 从而在一个功能中的未知方数的潜力, 如:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i + \Phi_0$$

哪里 a_i 标记不确定的参数, 以及 Φ 定义职位的适当功能 (接下来, 这些将是形状功能。N_i 最后的单元表述).

78 在 PTPE 中, 我们有一个单一的 位移 字段。n 变量 (不知不觉的转移), 现在我们有多个表达式的位移字段在 n 因子 a.

79 Φ 必须满足三项条件

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 保持连续。
2. 必须是可接受的, 即满足基本边界条件。(自然界限条件已经被列入变量声明中。但是, 如果 Φ 也满足他们, 然后获得更好的结果).
3. 必须独立和完整。(这意味着正确的位移和其衍生品在 Π 可以随意匹配, 如果使用足够的条款。最低订单条款也必须包括).

80 总体而言 Φ 它具有多元或三角功能。

81 我们确定参数 c_i 满足其稳定性 Π 任意变异 δc_i.

$$\delta\Pi(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} \delta a_i = 0$$

对自愿和独立的变异 δa_i,

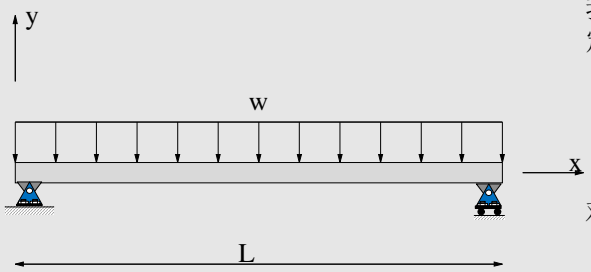
82 因此, 其次是

$$\delta\Pi = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}\delta a_1}_{0} + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\delta a_2}_{0} + \ldots + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}\delta a_n}_{0} = 0 \tag{48.40}$$

与 Eq 相同。48.34

83 因此, 我们得到了总的 n 线性独立的同步方程式。从这些转移中, 我们可以确定紧张和压力。(或内部力量). 因此, 我们用无限数的 d.o.f 的一个问题取代了一个最终数字。

48.6.1.1 例题 48.11: Rayleigh Ritz 均匀充电 仅支持 梁



我们试图通过下列无限系列提供的解决方案来确定附近喷雾的相关术语分裂:

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \ldots$$

对于这个具体的解决方案, 让我们只保留第一句:

$$v(x) = a_1 x(L-x)$$

我们观察到:

1. 与前例相反, 基本问题 (或地质) B.C 是即时满足两者 $x = 0$ 和 $x = L$.
2. 我们可以保持 v 至于 a_1 和采取 $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ (如果我们离开 v 至于 a_1 和 a_2 我们应该然后要拿两 $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$, 和 $\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$).
3. 或者我们可以解决 a_1 至于 v_{max} 在 $x = \frac{L}{2}$ 和采取 $\frac{\partial \Pi}{\partial v_{max}} = 0$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\begin{aligned}\Pi(a_1) &= U(a_1) - W_e(a_1)\\ &= \int_0^L \frac{EI_z}{2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv(x)dx\\ &= \int_0^L \left[\frac{EI_z}{2}(-2a_1)^2 - a_1 wx(L-x)\right] dx\\ &= \frac{EI_z}{2}4a_1^2 L - a_1 w\frac{L^3}{2} + a_1 w\frac{L^3}{3}\\ &= 2a_1^2 EI_z L - \frac{a_1 wL^3}{6}\end{aligned}$$

如果我们现在采取 $\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0$ 我们会得到:

$$\begin{aligned}4a_1 EI_z L - \frac{wL^3}{6} &= 0\\ a_1 &= \frac{wL^2}{24EI_z}\end{aligned}$$

已解决了 位移 字段, 在 a_1 我们现在决定了 $v_{\max}$ 在 $\frac{L}{2}$:

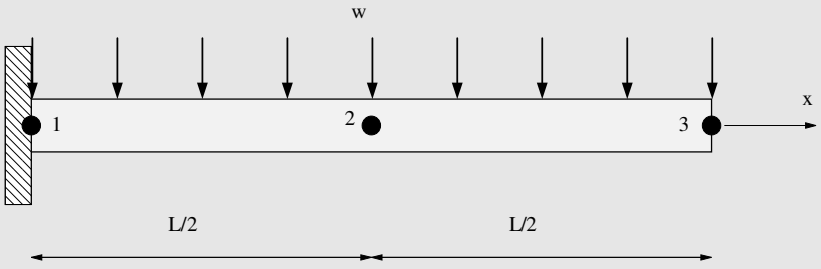
$$v = \underbrace{\frac{wL^4}{24EI_z}}_{a_1}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) = \frac{wL^4}{96EI_z}$$

与其准确价值相比较。$v_{\max}^{exact} = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI_z} = \frac{wL^4}{76.8EI_z}$，这相当于 $\approx 17\%$ 错误。

注: 如果有两条 $a_1 x(L-x) + a_2 x^2(L-x)^2$ 被保留, 然后我们会得到: $a_1 = \frac{wL^2}{24EI_z}$ 和 $a_2 = \frac{w}{24EI_z}$ 和 $v_{\max}$ 将是相同的 $v_{\max}^{exact}$. (為什麼?)

48.6.1.2 例题 48.12: 变量方法

对于下方显示的梁分类:



被常态 荷载 所服用。我们试图通过以下方法来分析相同的问题:

1. **补充 虚功 的原则**, (使用虚拟单位点 荷载), 和:
   (a) 确定 3 点的垂直 位移。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(b) 计算完整的势能 $\left(\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI_z}dx\right)$

2. **虚功原理** 使用下列表达式为虚拟和现实系统:

$$v = a_1 x^2 + a_2 x^3$$

和:

(a) 确定垂直 位移 的节点 3。
(b) 基于您的结果, 绘制时刻图 (其次, 在转移的第二个衍生品方面) 和 Shear (目前的衍生品).
(c) 计算系统的整体 势能。
(d) 与问题 1 的结果进行比较 (准确的解决方案) 和 讨论.

注意: 我们首先要调整指数 a_1 和 a_2 第 2 和第 3 条的转移, v_2 和 v_3.

3. **最低总值 势能 的原则**.
4. **雷利 • 里茨**
5. **PVW; 三角形 位移**

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right) a_2$$

而不是聚合物位移接近。

解决方案

Kathryn Sufka 的家务解决方案

注意, 完整的步骤解决方案将在这里提供 (饰 Kathryn Sufka). 数学解决方案为线性不同荷载在附件中提供 I.2.14.

1. 补充 虚功 的原则 垂直 位移 在 3 点。PCVW: $\delta U^* = \delta W^*$

$$\delta U^* = \int_0^L \delta\bar{M} * MEIdx$$
$$\delta M = x$$
$$M = \frac{wx^2}{2}$$
$$\delta U^* = \int_0^L x * \frac{wx^2}{2EI}dx = \frac{w}{2EI}\int_0^L x^3 dx = \frac{w}{2EI}[\frac{x^4}{4}]_0^L = \frac{wL^4}{8EI}$$
$$\delta W^* = \delta P * \Delta$$
$$\delta P = 1$$
$$\delta W^* = \Delta$$
$$\Rightarrow \Delta = \frac{wL^4}{8EI}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

全额补充 势能

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(wx^2)^2}{4EI}dx = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4 dx$$

$$\Pi^* = \frac{w^2 L^5}{40EI}$$

2. 虚功原理

1. 垂直 位移 的 3 点。$v = a_1 x^2 + a_2 x^3$

   重写 v 至于 v_2 和 v_3, 第 2 和第 3 节所述的转移:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1\frac{L^2}{4} + a_2\frac{L^3}{8}$$
$$v_3 = v(L) = a_1 L^2 + a_2 L^3$$

   解决为 a_1 和 a_2 至于移居

$$a_1 = \frac{8v_2 - v_3}{L^2}$$
$$a_2 = \frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}$$

   然后

$$v = \left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{dv}{dx} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right)x + 3\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)x^2$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left(\frac{8v_2 - v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8v_2 + 2v_3}{L^3}\right)$$

   同样,

$$\delta v = \left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right)x^2 + \left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x^3$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = 2\left(\frac{8\delta v_2 - \delta v_3}{L^2}\right) + 6\left(\frac{-8\delta v_2 + 2\delta v_3}{L^3}\right)x$$

2. PVW: $\delta U = \delta W$

$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx = \frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3)$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx = \frac{2wL\delta v_2}{3} + \frac{wL\delta v_3}{6}$$

3. $\delta U - \delta W = 0$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2\delta v_2 - 20\delta v_2 v_3 - 20v_2\delta v_3 + 7v_3\delta v_3) - \frac{2wL\delta v_2}{3} - \frac{wL\delta v_3}{6} = 0$$

$$\left[\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3}\right]\delta v_2 + \left[\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6}\right]\delta v_3 = 0$$

$$\frac{4EI}{L^3}(64v_2 - 20v_3) - \frac{2wL}{3} = 0$$

$$64v_2 - 20v_3 = \frac{wL^4}{6EI}$$

$$64v_2 = \frac{wL^4}{6EI} + 20v_3$$

$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$

$$\frac{4EI}{L^3}(-20v_2 + 7v_3) - \frac{wL}{6} = 0$$

$$\frac{4EI}{L^3}\left[-20\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) + 7v_3\right] - \frac{wL}{6} = 0$$

$$\frac{4EI}{L^3}\left[\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3\right] = \frac{wL}{6}$$

$$\frac{-5wL^4}{96EI} - \frac{25v_3}{4} + 7v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$

$$\frac{3v_3}{4} = \frac{3wL^4}{32EI}$$

$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

4. 页面和瞬间图表。

$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$

$$v'' = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$

$$M(x) = EIv'' \frac{5wL^2}{12} - \frac{wLx}{2}$$

$$V(x) = M'(x) = \frac{-wL}{2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 计算总值 势能.

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wv dx$$
$$v = \frac{5wL^2}{24EI}x^2 - \frac{wL}{12EI}x^3$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{5wL^2}{12EI} - \frac{wL}{2EI}x$$
$$\Pi = \frac{7w^2L^5}{8EI} - \frac{7w^2L^5}{144EI}$$
$$\Pi = \frac{119w^2L^5}{144EI}$$

3. 最低总值 势能 $\delta\Pi = 0$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2)$$
$$W = \int_0^L wv dx = \frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}$$
$$\Pi = U - W = \frac{2EI}{L^3}(64v_2^2 - 40v_2v_3 + 7v_3^2) - \left(\frac{2Lv_2w}{3} + \frac{Lv_3w}{6}\right)$$
$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial v_2}\delta v_2 + \frac{\partial\Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = 0$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial v_2} = 0 \text{ and } \frac{\partial\Pi}{\partial v_3} = 0$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial v_2} = \frac{2EI}{L^3}(128v_2 - 40v_3) - \frac{2Lw}{3} = \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) - \frac{2Lw}{3} = 0 \frac{16EI}{L^3}(16v_2 - 5v_3) = \frac{2Lw}{3}$$
$$16v_2 - 5v_3 = \frac{wL^4}{24EI}$$
$$v_2 = \frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial v_3}\delta v_3 = \frac{2EI}{L^3}(-40v_2 + 14v_3) - \frac{Lw}{6} = \frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EIv_2}{L^3} - \frac{Lw}{6} = 0$$
$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{80EI}{L^3}\left(\frac{wL^4}{384EI} + \frac{5v_3}{16}\right) = \frac{wL}{6}$$
$$\frac{28EIv_3}{L^3} - \frac{25EIv_3}{L^3} - \frac{5wL}{24} - = \frac{wL}{6}$$
$$\frac{3EIv_3}{L^3} = \frac{9wL}{24}$$
$$v_3 = \frac{wL^4}{8EI}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 雷利 • 里茨 $\delta\Pi = 0$

$$
\begin{aligned}
v &= a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \\
\phi_1 &= x^2 \text{ and } \phi_2 = x^3 \\
v &= a_1x^2 + a_2x^3 \\
\frac{dv}{dx} &= 2a_1x + 3a_2x^2 \\
\frac{d^2v}{dx^2} &= 2a_1 + 6a_2x \\
\Pi &= U - W \\
U &= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \\
&= 2EI(a_1^2L + 3a_2^2L^3 + 3a_1a_2L^2) \\
W &= \int_0^L wv dx = \frac{a_1wL^3}{3} + \frac{a_2wL^4}{4} \\
\Pi &= 2EI(a_1^2L + 3a_2^2L^3 + 3a_1a_2L^2) - \frac{a_1wL^3}{3} - \frac{a_2wL^4}{4} \\
\delta\Pi &= \frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0 \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= 0 \text{ and } \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = 0 \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} &= EI(4a_1L + 6a_2L^2) - \frac{wL^3}{3} = 0 \\
4a_1L + 6a_2L^2 &= \frac{wL^3}{3EI} \\
4a_1L &= \frac{wL^3}{3EI} - 6a_2L^2 \\
a_1 &= \frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2L}{2} \\
\frac{\partial\Pi}{\partial a_2} &= 6EI(2a_2L^3 + a_1L^2) - \frac{wl^4}{4} = 0 \\
6EI\left[2a_2L^3 + \left(\frac{wL^2}{12EI} - \frac{3a_2L}{2}\right)L^2\right] - \frac{wL^4}{4} &= 0 \\
12EIL^3a_2 + \frac{wL^4}{2} - 9EIL^3a_2 - \frac{wL^4}{4} &= 0 \\
3EIL^3a_2 &= -\frac{wL^4}{4} \\
a_2 &= -\frac{wL}{12EI} \\
a_1 &= \frac{wL^2}{12EI} - \left(\frac{3L}{2} * \frac{-wL}{12EI}\right) \\
a_1 &= -\frac{wL^2}{24EI} \\
v &= \frac{-wL^2}{24EI}x^2 + \frac{-wL}{12EI}x^3 \\
v_3 = v(L) &= \frac{-wL^2}{24EI}L^2 + \frac{-wL}{12EI}L^3 \\
v_3 &= \frac{wL^4}{8EI}
\end{aligned}
$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；译文可能存在错误。

审阅稿

注: v_3 这是负的, 因为位移在负的 Y 方向。

5. PVW, 三角形 位移 (数学的一些帮助)

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)a_1 + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)a_2$$

重写 v 至于 v_2 和 v_3, 第 2 和第 3 节所述的转移:

$$v_2 = v\left(\frac{L}{2}\right) = a_1(1 - \sqrt{2}/2) + a_2(1 + \sqrt{2}/2)$$
$$v_3 = v(L) = a_1 + a_2$$

解决为 a_1 和 a_2 至于移居

$$a_1 = \frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}$$
$$a_2 = \frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}$$

因此

$$v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}v_2 + v_3 + \sqrt{2}v_3}{2}\right) + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}v_2 - v_3 + \sqrt{2}v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}v_2 + v_3 - \sqrt{2}v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\delta v = \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right) + \left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2L}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3}{2}\right)$$
$$\frac{d^2\delta v}{dx^2} = \frac{\pi^2}{8L^2}\left[-(\sqrt{2}\delta v_2 - \delta v_3 + \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{\pi x}{2L} + 9(\sqrt{2}\delta v_2 + \delta v_3 - \sqrt{2}\delta v_3)\cos\frac{3\pi x}{2L}\right]$$
$$\text{PVW} : \delta U = \delta W$$
$$\delta U = \int_0^L EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx$$
$$\delta U = \frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123 - 80\sqrt{2})v_3\delta v_3]$$
$$\delta W = \int_0^L w\delta v dx$$
$$\delta W = \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)\delta v_3]$$
$$\delta U - \delta W = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2\delta v_2 + 2(-41 + 20\sqrt{2})\delta v_2 v_3 + 2(-41 + 20\sqrt{2})v_2\delta v_3 + (123 - 80\sqrt{2})v_3\delta v_3] - \frac{wL}{3\pi}[(4\sqrt{2})\delta v_2 + (-2 - 4\sqrt{2} + 3\pi)\delta v_3] = 0$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

$$\left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})\right]\delta v_2 + \left[\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)\right]\delta v_3 = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2}) = 0$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3] = \frac{wL}{3\pi}(4\sqrt{2})$$

$$82v_2 + 2(-41+20\sqrt{2})v_3 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI}$$

$$82v_2 = \frac{256\sqrt{2}wL^4}{3\pi^5 EI} - 2(-41+20\sqrt{2})v_3$$

$$v_2 = \frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41+20\sqrt{2})}{41}v_3$$

$$\frac{\pi^4 EI}{64L^3}[2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3] - \frac{wL}{3\pi}(-2-4\sqrt{2}+3\pi) = 0$$

$$2(-41+20\sqrt{2})v_2 + (123-80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)$$

$$2(-41+20\sqrt{2})\left[\frac{128\sqrt{2}wL^4}{123\pi^5 EI} - \frac{(-41+20\sqrt{2})}{41}v_3\right] + (123-80\sqrt{2})v_3 = \frac{64wL^4}{3\pi^5 EI}(-2-4\sqrt{2}+3\pi)$$

$$-37.4275\frac{wL^4}{\pi^5 EI} - 7.8873v_3 + 9.8629v_3 = 37.7157\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$

$$1.9756v_3 = 75.1432\frac{wL^4}{\pi^5 EI}$$

$$v_3 = 0.1243\frac{wL^4}{EI}$$

48.7 总结

84 概述本章所引入的各种方法顯示在 图 48.7.

85 兩個變化原則之間的雙重性被图強調。48.8 首先, 从动态可接受的转移开始, 虚功原理提供静态可用的解决方案。同样, 对于静态可接受的压力, 补充性虚功的原则导致动态可用的解决方案。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

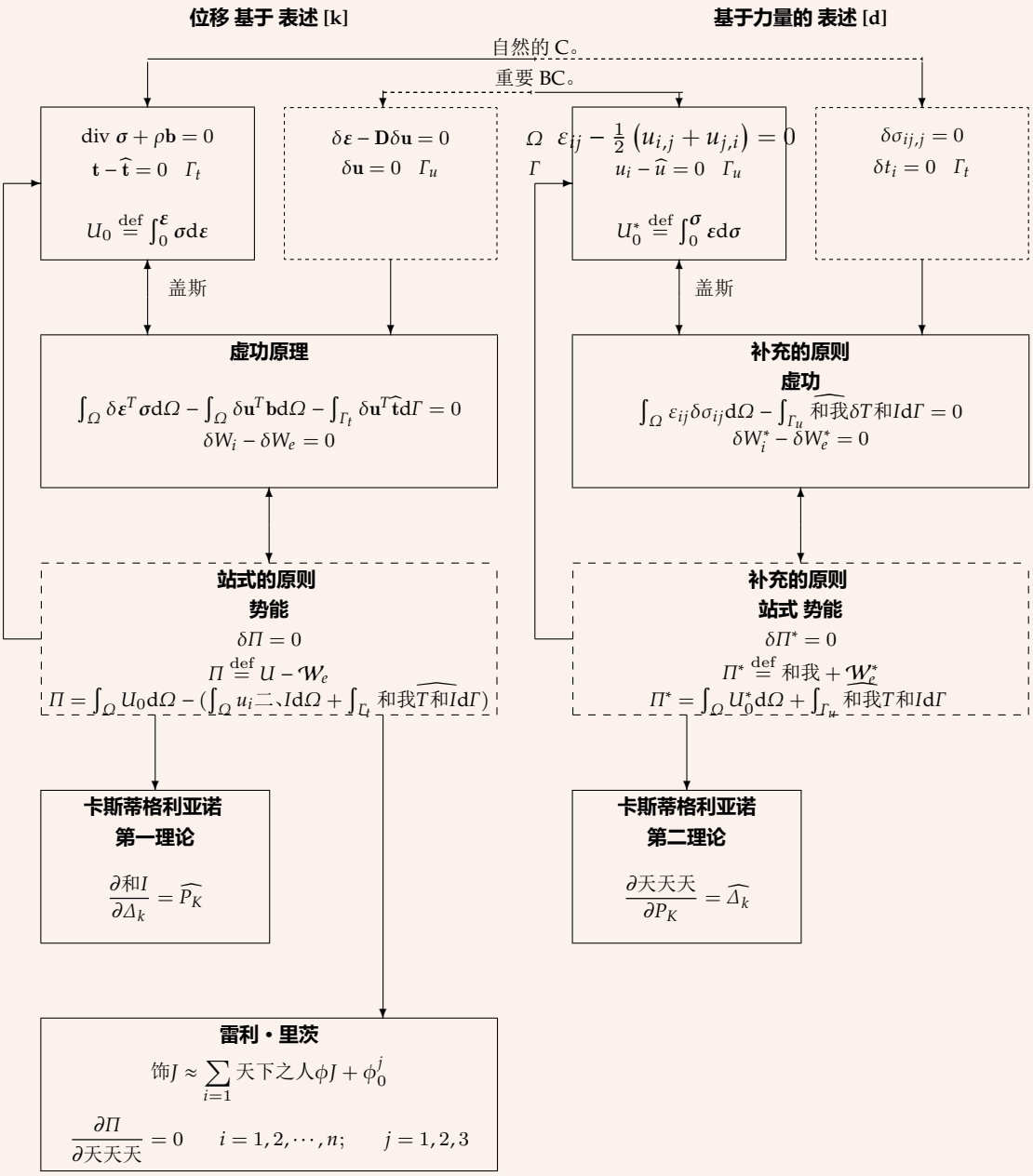


图 48.7: 变量方法的概述

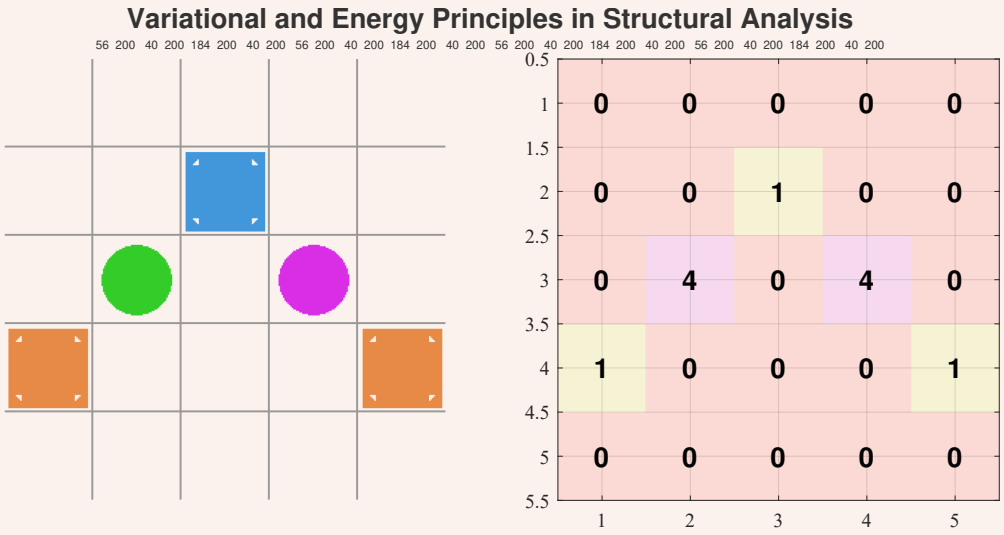
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



图 48.8: 二元性变量原则

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

49 干扰功能

摘要

在 *Rayleigh Ritz* 方法中, 我们用位移字段的功能接近解决了变量问题。(*§48.6*). 然而, 使用的比例没有物理意义。在本章中, 我们将介绍在已知节点转移方面的多元位移接近。这些中断功能被称为形状函数。

不同多元级的间隔, 在卡特西亚、三角和自然协调系统方面将被介绍为 *1D*、年及 *2D* 和 *3D*。(可用于 *Continuum Finite* 单元).

类似于我们在覆盖直立固态方法之前引入转型矩阵的方式, 我们将提前引入终端元素方法, 讨论形状功能。

49.1 引入 1492
49.1.1 形状功能的特点 1492
49.1.2 帕斯卡的三角形 1493
49.1.3 协调系统 1494
49.1.4 连续性 1498
49.2 形状功能 1499
49.2.1 直播 表述 1499
49.2.2 Lagrangian Interpolation 功能 1505
49.2.3 赫米蒂亚交叉功能 1510

49.1 引入

49.1.1 形状功能的特点

1 雷莱里茨方法 (§48.6) 我们提到, 这个功能 Φ 必须是持久的, 满足边界条件, 独立和 **完整**.

2 转到 有限元法, 在那里 Φ 目前, 代价已被替换为 **形状功能 N**.

3 形函数 是用来交换字段变量的解决方案的数学功能。(如 位移, 温度等。) 在一个单元中。形状函数, 定义字段变量如何在元素内根据元素的节点中的值变化。

4 形状功能的主要特点包括:

介入: 形状函数在节点之间的字段变量中交叉。如果字段变量在节点上是已知的, 则形状函数允许在元素内的任何点计算变量。

诺达值: 在任何特定节点 i, 形函数 N_i 值为 1 在节点 i 和 0 在 单元 的所有其他节点。这确保间隔准确在节点上。

连续性: 形状功能的连续性取决于 单元 类型和问题的性质。例如, 线性单元具有连续的形状功能, 而更高的命令单元具有形状函数, 在更高的订单衍生品中可持续。

硬体运动: 要被捕 (伊。$v = a_1 + \ldots$)

永久性 应变: 也应该被抓住

尺寸依赖: 形状功能因 单元 的尺寸性而有所不同。

审阅稿

49.1.2 帕斯卡的三角形

5 形状函数与帕斯卡的三角形之间存在联系, 通过多元形状功能的数学结构和属性 (更高命令 单元).

6 与此相同的比例 (基于多元化) 形状函数可以与帕斯卡的三角形中发现的二元因子相关。

7 事实上, 帕斯卡的三角形提供了用于扩展多元化所使用的二进制因素。例如, 扩展 $(a+b)^n$ 它涉及的比例, 正是帕斯卡三角形的输入。同样, 在 2D 中, 形状函数可以用多元术语来写作, 其中包括 x 和 y. 这些术语的比例, 当扩展时, 遵循二元率的模式。

8 对于四方三角单元, 形状功能可能看起来如下:

$$N_1(x,y) = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 x^2 + e_1 xy + f_1 y^2$$

$$N_2(x,y) = a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 x^2 + e_2 xy + f_2 y^2$$

$$N_3(x,y) = a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 x^2 + e_3 xy + f_3 y^2$$

各方因子 $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ 它将基于节点值确定, 并且可以与二元率相关联。

9 形状函数在多元序列术语方面的有序解释是由表中显示的帕斯卡三角形提供的。49.1. 不

表 49.1: 形状功能在多元序列的解释 (1d & 2d)

Constant					a_1					
Linear				$a_2 x$		$a_3 y$				
Quadratic			$a_4 x^2$		$a_5 xy$		$a_6 y^2$			
Cubic		$a_7 x^3$		$a_8 x^2 y$		$a_9 xy^2$		$a_{10} y^3$		
Quartic	$a_{11} x^4$		$a_{12} x^3 y$		$a_{13} x^2 y^2$		$a_{14} xy^3$		$a_{15} x^4$	

同 单元 格式中存在的多元术语显示在桌子 49.2

表 49.2: 不同 单元 格式中的多元术语 (1d & 2d)

单元	条款	# 诺德 (条款)
线性	a_1, a_2	2
四角形	a_1, a_2, a_4	3
二线 (三角形)	$a_1, a_2, a_3,$	3
二线 (四角形)	a_1, a_2, a_3, a_5	4
二四方 (心情)	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9$	8
二四方 (拉格兰)	$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, a_{13}$	9

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

10 A **完整** 聚合物包含在帕斯卡三角形中的某个线上的一切术语。包含的条款越多，准确度就越高。例如 $u = a_1 + a_2x + a_3y + a_5xy$ 更准确的比 $u = a_1 + a_2x + a_3y$，然而，相似率却不变。(因为第二个接近不是一个完整的四方).

11 接近的条款，不提高对立率，被称为 **寄生虫** 条款

49.1.3 协调系统

49.1.3.1 卡特西亚

12 为一個 单元 (终结或其他) 我们可以写出一个表达式为一般化 位移 (翻译 / 转角)，u 在任何地方至于它的所有节点，$\overline{\mathbf{u}}$.

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i(X)\overline{\Delta}_i = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

在哪里:

1. $\overline{u}_i$ 是的，(一般化) 位移 相应的饰 O.F i
2. N_i 是 插值函数，或 **形函数** 它具有以下特点:
   (a) $N_i = 1$ 在 $\overline{u}_i$
   (b) $N_i = 0$ 在 $\overline{u}_j$ 哪里 $i \neq j$.
3. $\mathbf{N}$ 可以根据以下基础进行:
   (a) 假设的变形状态在多元序列方面定义。
   (b) 插值函数 (拉格兰或赫尔米蒂亚).

13 我们将区分两类问题:

C^0 只有 位移 的连续性必须确保单元 (特鲁斯 „ 飞机压力/stra,3D 灵活性).

C^1 我们必须确保持续的 **两者**转移及其衍生品 (如 be, 板块, 和沙特).

49.1.3.2 自然

14 二是自然协调 ξ_1 和 ξ_2，图 49.1

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \quad \text{and} \quad \xi_2 = \frac{L_2}{L}$$

自从 $L_1 + L_2 = L$ 我们有

$$\xi_1 + \xi_2 = 1$$

我们注意到这 $\xi_i = 1$ 在 Node i 和零在所有其他节点。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

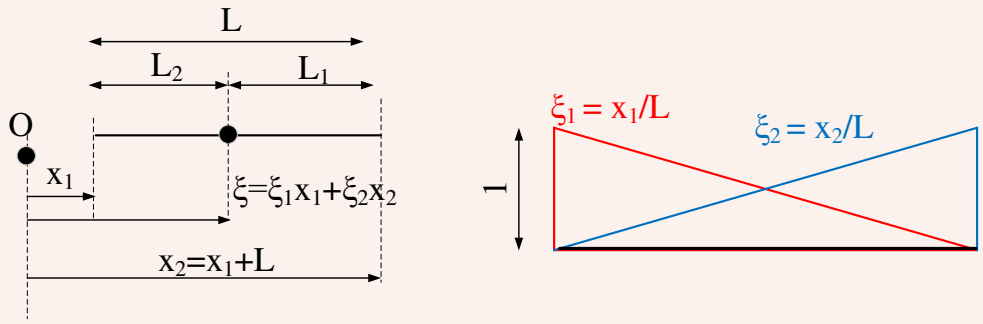


图 49.1: 自然协调系统沿着直线

15 任意点 P 与协调 x 有

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$$

因此, 在每一个点 x 相匹配一组 (不独立) 自然协调 ξ_1, ξ_2. 这些方程式可以说是

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \left[\begin{array}{cc} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \right\}$$

16 可以通过自然协调进行中间隔。

$$\phi = \underbrace{\lfloor \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \rfloor}_{\mathbf{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\phi}_1 \\ \overline{\phi}_2 \end{array} \right\}$$

17 聚合物的整合 ξ_1 和 ξ_2 可以通过 (a 严格的证据通过 Eq 在下面开发。49.1)

$$\int_L \xi_1^k \xi_2^l \mathrm{d}L = L \frac{k!\, l!}{(1+k+l)!}$$

此外

$$\begin{array}{rcll} \int_L x \mathrm{d}L & = & \int_L (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \mathrm{d}L & = \frac{L}{2}(x_1 + x_2) \\ \int_L \xi_1 \xi_2^2 \mathrm{d}L & = & L \frac{2}{4!} & = \frac{L}{12} \end{array}$$

49.1.3.3 三角形

18 自然坐标是无尺寸的, 并根据 单元 长度/区域/体积 而不是 总体坐标系 定义。

19 常用在单元表述中 **简单** 单元 (在哪里在一个 n 太空, 有 $n+1$ 垂直和 $n+1$ 尺寸的表面 $n-1$).

20 三角形单元允许在卡特西亚坐标中进行完整的多元化用于田野的 (例如, 温度, 位移) 数量。因此, **所有** 帕斯卡三角形的术语在格式函数中使用。(这将不适用于双方四方单元。).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

21 我们要确定 $\phi = \sum N_i \overline{\phi}_i$ 哪里 $\overline{\phi}_i$ 是 nodal D.O.F 和 $N_i = N_i(L_1, L_2, L_3)$.

我们开始与 $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i L_1^q, L_2^r, L_3^s)$ 哪里 q, r 和 s 超越的范围 n 可能的组合 $q + r + s = p$ 而在哪里 p 是多元化的命令。例如, 为

线性 单元:

$$\phi = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y$$

四角形 单元:

$$\phi = a_1 L_1^2 + a_2 L_2^2 + a_3 L_3^2 + a_4 L_1 L_2 + a_5 L_2 L_3 + a_6 L_3 L_1 = a'_1 + a'_2 x + a'_3 y + a'_4 x^2 + a'_5 xy + a'_6 y^2$$

22 线性三角形的形状功能只是区域坐标,

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3$$

每一个在一个节点上均等于统一, 另一个节點上是零的。线性。

23 三角形表面, 任何点 P 将三角形分为 1～2～3 地下 A_1, A_2, A_3, 图 49.2 因此, 我们将区域

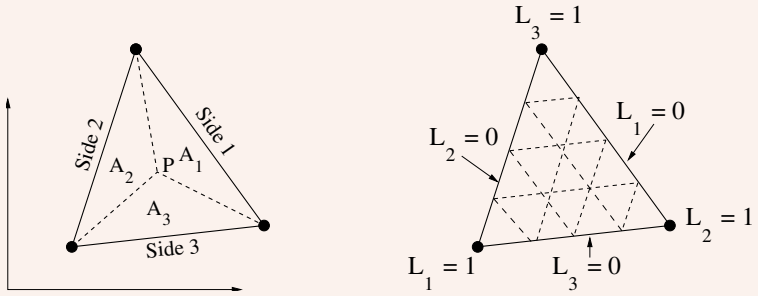


图 49.2: 三角形的自然协调系统

协调定义为区域的比例。

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_{21}}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

哪里 A 它是三角形的区域 1-2-3。因为 $A = A_1 + A_2 + A_3$ 然后

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

中央是在 $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{3}$

24 再次限制的方程式

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \right]}_{\mathbf{a}} \left\{ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

逆转

$$\left\{\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{array}\right]}_{\mathbf{a}^{-1}} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{ccc} 2A_{23} & y_{23} & x_{32} \\ 2A_{31} & y_{31} & x_{13} \\ 2A_{12} & y_{12} & x_{21} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right\}$$

哪里 $x_{ij} = x_i - x_j$

25 我们观察到该区域相当于行列式在两个以上。

$$2A = |\mathbf{A}| = x_2 - x_1y_3 - y_1 - x_{31}y_{21}$$

如果标签是逆转的, 这样 1-2-3 是时钟, 那么行列式是负面的。

26 一项功能 ϕ 可以以区域协调的形式表达

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(L_1, L_2, L_3) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\phi}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial y} \end{aligned}$$

和

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & = & \frac{y_2-y_3}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial x} & = & \frac{y_3-y_1}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial x} & = & \frac{y_1-y_2}{2A}; \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & = & \frac{x_3-x_2}{2A}; & \frac{\partial L_2}{\partial y} & = & \frac{x_1-x_3}{2A}; & \frac{\partial L_3}{\partial y} & = & \frac{x_2-x_1}{2A}; \end{array}$$

27 刚度矩阵 将需要在区域协调的表达形式的整合 $\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A$. 要完成此操作, 并与图 49.3, (Eisenberg and Malvern, 1973):

$$\begin{aligned} dA &= (\mathrm{d}s_1)\csc\theta_3(\mathrm{d}s_2) \\ &= (h_1\mathrm{d}L_1)\csc\theta_3(h_2\mathrm{d}L_2) \\ &= 2A\mathrm{d}L_1\mathrm{d}L_2 \end{aligned}$$

这样

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\int_0^1 \left[\int_0^{1-L_1} L_1^k L_2^l (1 - L_1 - L_2)^m \mathrm{d}L_2\right] \mathrm{d}L_1$$

下一篇 替代 $L_2 = t(1 - L_1)$ 和 $\mathrm{d}L_2 = (1 - L_1)\mathrm{d}t$ 哪些收益

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\int_0^1 L_1^k (1 - L_1)^{l+m+1} \mathrm{d}L_1 \int_0^1 t^l (1 - t)^m \mathrm{d}t$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

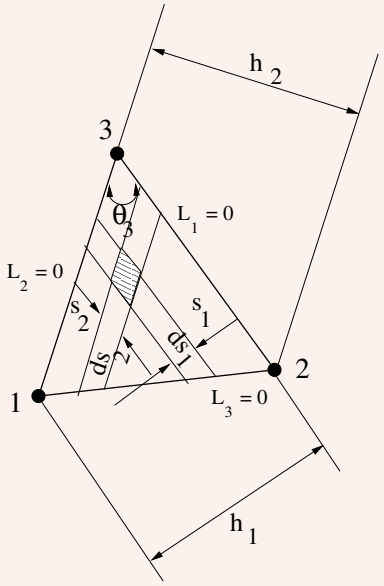


图 49.3: 跨越三角形的融合

右侧的各个集成物都是 beta 的形状。功能 (Abramowitz and Stegun, 1970)

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

哪里 Γ 标记满足的 Gamma 功能 $\Gamma(n+1) = n!$ 為整體 $n \geq 0$. 这样

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+l+m+3)}$$

因为 k, l, 和 m 是非负面整体,

$$\int_A L_1^k L_2^l L_3^m \mathrm{d}A = 2A\frac{k!\,l!\,m!}{(k+l+m+2)!} \tag{49.1}$$

[28] 值得注意的是, 上述关系只有当我们有直侧元素时才会被使用, 因此元素的制定可以分析地衍生。否则, 如果我们有一个曲线侧, 这个公式将不会被使用, 元素将在以色列方形的背景下数字化整合。

49.1.4 连续性

[29] C^0 连续性是指一个函数必须在接近的终端 单元 的边界内保持连续性, 但不一定是其第一或更高的衍生品。(例如, 扭转).

[30] C^1 连续性是指一个函数和其第一衍生品在接近的终端单元的边界上保持连续性。(通常是灵活的成员).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

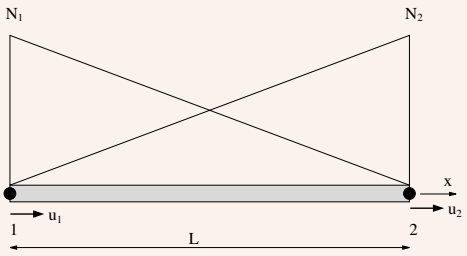


图 49.4: 轴端 单元

49.2 形状功能

49.2.1 直播 表述

49.2.1.1 桁架 单元; 线性

31 我们从简单的特鲁斯元素开始, 明确发展形状功能, 然后产生其普遍化的公式。

32 与图的参考 49.4 我们开始的是:

$$\begin{aligned} u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 \\ \theta_x &= N_1\overline{\theta}_{x1} + N_2\overline{\theta}_{x2} \end{aligned}$$

33 因为我们有 2d.o.f, 我们将承认一个线性变形状态。

$$u = a_1 x + a_2 \tag{49.2}$$

哪里 u 也可以是 u 或 θ, B.C. 是由: $u = \overline{u}_1$ 在 $x = 0$, 和 $u = \overline{u}_2$ 在 $x = L$. 因此, 我们有:

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= a_2 \\ \overline{u}_2 &= a_1 L + a_2 \end{aligned}$$

34 解决为 a_1 和 a_2 至于 $\overline{u}_1$ 和 $\overline{u}_2$ 我们得到了:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L} \\ a_2 &= \overline{u}_1 \end{aligned}$$

35 将这些表达式替换为 Eq。49.2 我们获得

$$\begin{aligned} u &= (\frac{\overline{u}_2}{L} - \frac{\overline{u}_1}{L})x + \overline{u}_1 \\ &= \underbrace{(1 - \frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2 \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

or:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \tfrac{x}{L} \\ N_2 &= \tfrac{x}{L} \end{aligned} \tag{49.3}$$

49.2.1.2 一般化

36 以前的衍生可以通过写作来普遍化:

$$u = a_1 x + a_2 = \underbrace{\lfloor\, x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \tag{49.4}$$

哪里 **p** 与多元化接近相匹配, 以及 **a** 是 向量 的比例。

37 接下来, 我们将适用边界条件:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ L & 1 \end{array} \right]}_{\mathcal{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}}$$

接下来的投资 $\mathcal{L}$ 这就导致

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L}\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ L & 0 \end{array} \right]}_{\mathcal{L}^{-1}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

38 将最后的方程式替换为 Eq。49.4 我们得到了:

$$u = \underbrace{\underbrace{\lfloor\, (1 - \tfrac{x}{L}) \quad \tfrac{x}{L} \,\rfloor}_{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

因此, 形状功能 **N** 可以直接从

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$$

39 请注意, 在某些情况下 $\mathcal{L}^{-1}$ 它并不总是可以得到的, 而且在其他人可能对自愿地质学有显著的算法困难。因此, 我们将随后介绍拉格兰和赫尔米蒂安交叉功能。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

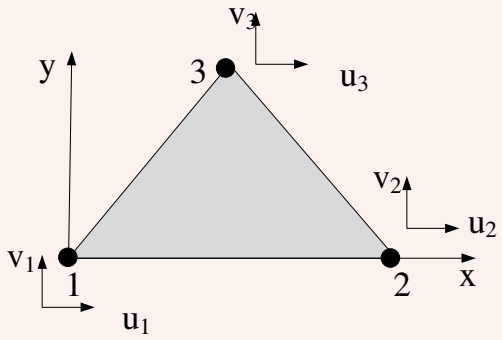


图 49.5: 永久 应变 三角形 单元

49.2.1.3 永久 应变 三角形 单元

40 下面我们考虑一个三角形单元, 图 49.5 与 双线 位移田野 (在两者 x 和 y):

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \\ u &= \underbrace{\lfloor\ 1 \quad x \quad y\ \rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}}_{\{\mathbf{a}\}} \end{aligned}$$

41 就像以前一样, 我们首先寻找形状功能, 因此我们应用了边界条件在节点上为 u 首先是移居:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{array} \right]}_{[\mathcal{L}]} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}}_{\mathbf{a}} \tag{49.5}$$

然後, 我們將相反的重複。$\mathcal{L}$ 在 EQ。49.5 由 $\mathbf{p}$ 并获得:

$$u = N_1 \overline{u}_1 + N_2 \overline{u}_2 + N_3 \overline{u}_3$$

哪里

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x_2 y_3 - x y_3 - x_2 y + x_3 y) \\ N_2 &= \frac{1}{x_2 y_3}(x y_3 - x_3 y) \\ N_3 &= \frac{y}{y_3} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

注意, 三种形状函数中的每个函数均为相应的 1 个。节点, 等于 0 在其他两个。

42 相同的形状功能可以由 v:

$$v = N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + N_3\overline{v}_3$$

43 因此, 位移字段将由:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \end{array} \right\}$$

相应的 单元 he 单元, 是指为 **固定 应变 三角形** (CST) 因为它有一个线性 位移 字段, 因此是一个恒定的 应变.

49.2.1.4 直角二重 单元

44 下面我们考虑一个四方单元, 图 49.6 与 **双线** 位移 字段 (在两者 x 和 y). 使用 Eq 的 La-

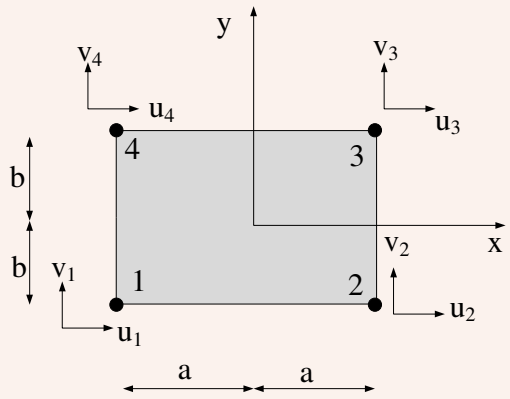


图 49.6: 直角二重 单元

grangian 插值函数。49.6, 首先, 从 The u 位移, 我们进行两次交叉: 第一位沿着底边。(1-2) 沿着顶部一 (4-3).

45 来自 EQ。49.6 与 $m = 1$ 我们得到了:

$$\begin{aligned} \overline{u}_{12} &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\overline{u}_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}\overline{u}_2 \\ &= \frac{a - x}{2a}\overline{u}_1 + \frac{x + a}{2a}\overline{u}_2 \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

同样

$$\begin{aligned}\overline{u}_{43} &= \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\overline{u}_4+\frac{x_1-x}{x_1-x_2}\overline{u}_3\\ &= \frac{a-x}{2a}\overline{u}_4+\frac{x+a}{2a}\overline{u}_3\end{aligned}$$

46 接下来, 我们在 y 方向长 1-4 和 2-3 之间 $\overline{u}_{12}$ 和 $\overline{u}_{43}$. 再一次, 我们使用 eq。49.6 但是这一次, 我们换了 x 由 y:

$$\begin{aligned}u &= \frac{y_2-y}{y_2-y_1}\overline{u}_{12}+\frac{y_1-y}{y_1-y_2}\overline{u}_{43}\\ &= \frac{b-y}{2b}\frac{a-x}{2a}\overline{u}_1+\frac{b-y}{2b}\frac{x+a}{2a}\overline{u}_2+\frac{y+b}{2b}\frac{a-x}{2a}\overline{u}_4+\frac{y+b}{2b}\frac{x+a}{2a}\overline{u}_3\\ &= \underbrace{\frac{(a-x)(b-y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_1+\underbrace{\frac{(a+x)(b-y)}{4ab}}_{N_2}\overline{u}_2+\underbrace{\frac{(a+x)(b+y)}{4ab}}_{N_3}\overline{u}_3+\underbrace{\frac{(a-x)(b+y)}{4ab}}_{N_1}\overline{u}_4\end{aligned}$$

47 可以轻松地检查到每个节点。i 相应的 N_i 是等于 1 和所有其他零, 而在任何点 $N_1+N_2+N_3+N_4=1$. 因此, 位移字段将由:

$$\left\{\begin{array}{c}u\\v\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cccccccc}N_1&0&N_2&0&N_3&0&N_4&0\\0&N_1&0&N_2&0&N_3&0&N_4\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\\overline{v}_1\\\overline{u}_2\\\overline{v}_2\\\overline{u}_3\\\overline{v}_3\\\overline{u}_4\\\overline{v}_4\end{array}\right\}$$

48 四个节点以色列方形单元的形状功能在图中显示 49.7

49.2.1.5 布里克三角形 单元

49 通过延伸到以前的衍生, 形状功能固定直角三角固体 单元, 图 49.8 将由:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

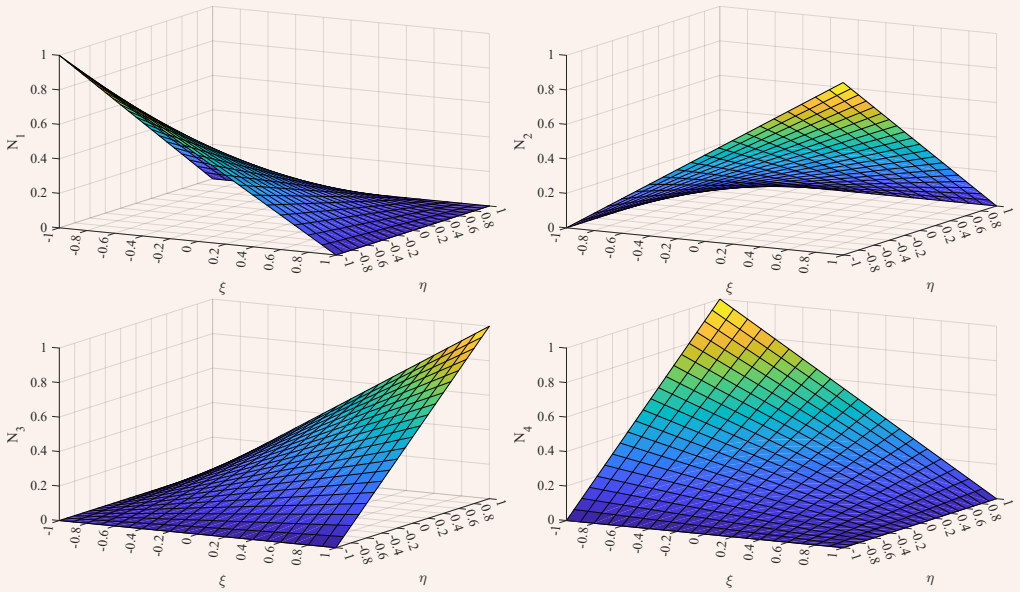


图 49.7: 形状功能为 4 节点四方 单元

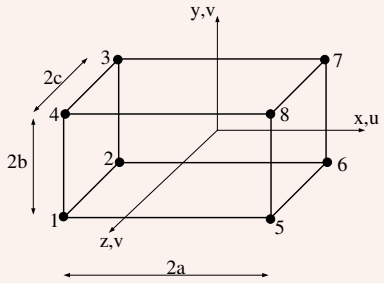


图 49.8: 固体三角直角 单元

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \overline{w}_3 \\ \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \\ \overline{w}_4 \end{array}\right\}$$

哪里

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc}$$

49.2.2 Lagrangian Interpolation 功能

49.2.2.1 四角形

50 在我们之前的方法中, 形状功能通过:

1. 假设多元功能: $u = \mathbf{pa}$
2. 限制条件的应用 $\overline{\mathbf{u}} = \mathcal{L}\mathbf{a}$
3. 转换的 $\mathcal{L}$
4. 最后, $\mathbf{N} = \mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}$

经过这些行动, 我们实际上确定了 *Lagrangian Interpolation* **功能** 与问题 C^0 间元素连续性 (i.e 连续性 位移 仅).

51 Lagrangian Interpolation 定义各方的比例 ($\mathbf{N}$ 在我们的案例) 一个多元序列的代表性, 在某种意义上以差异点定义的价值观 (在我们的案例中). 对于沿着一条线的点, 这将产生:

$$N_i = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x - x_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{m+1}(x_i - x_j)} \tag{49.6}$$

如果扩展, 先前的方程式将产生:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_{m+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_{m+1})} \\ N_2 &= \frac{(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_{m+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_{m+1})} \\ N_{m+1} &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)}{(x_{m+1} - x_1)(x_{m+1} - x_2)\cdots(x_{m+1} - x_m)} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52 对于阿克西亚人, $m = 1$, $x_1 = 0$, 和 $x_2 = L$ 上述方程式将导致 in:

$$u = \frac{(x-L)}{-L}\overline{u}_1 + \frac{x}{L}\overline{u}_2 = \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1}\overline{u}_1 + \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}\overline{u}_2$$

与 Eq 相同。49.3.

49.2.2.2 三角形

53 其他 单元 的格式功能可从 Lagrangian 插值函数 以前使用的 Eq。49.6

$$\begin{aligned} l_k^n &= \frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L-L_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(L_k-L_i)} \\ &= \frac{(L-L_0)(L-L_1)\cdots(L-L_{k-1})(L-L_{k+1})\cdots(L-L_n)}{(L_k-L_0)(L_k-L_1)\cdots(L_k-L_{k-1})(L_k-L_{k+1})\cdots(L_k-L_n)} \end{aligned}$$

54 因此, 用一个典型的节点 i 三个数字 q, r 和 s 相应与坐标的立场 L_{1i}, L_{2i} 和 L_{3i}, 我们可以写下形状函数在三个 Lagrangian interpolation 函数的意义上

$$N_i = l_q^q(L_1)l_r^r(L_2)l_s^s(L_3)$$

55 使用此公式, 更高的命令 单元 的形状功能是:

三角线

$$N_i = L_i$$

四角三角

$$\begin{array}{rcll} N_i &=& L_i(2L_i-1) & \text{Corner nodes} \\ N_j &=& 4L_iL_k & \text{Midside nodes, } i,j,k \text{ are on the same side} \end{array}$$

古比三角形

$$\begin{array}{rcll} N_i &=& \frac{1}{2}L_i(3L_i-1)(3L_i-2) & \text{Corner nodes} \\ N_j &=& \frac{9}{2}L_iL_k(3L_i-1) & \text{Midside nodes, } i,j,k \text{ are on the same side} \\ N_{10} &=& 27L_1L_2L_3 & \text{Internal node} \end{array}$$

56 三角形线性三角形的形状功能在图中显示 49.9. 在区域坐标中注明, 图形功能的唯一视觉方式是确定 **N** 至于 L_1 和 L_2

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

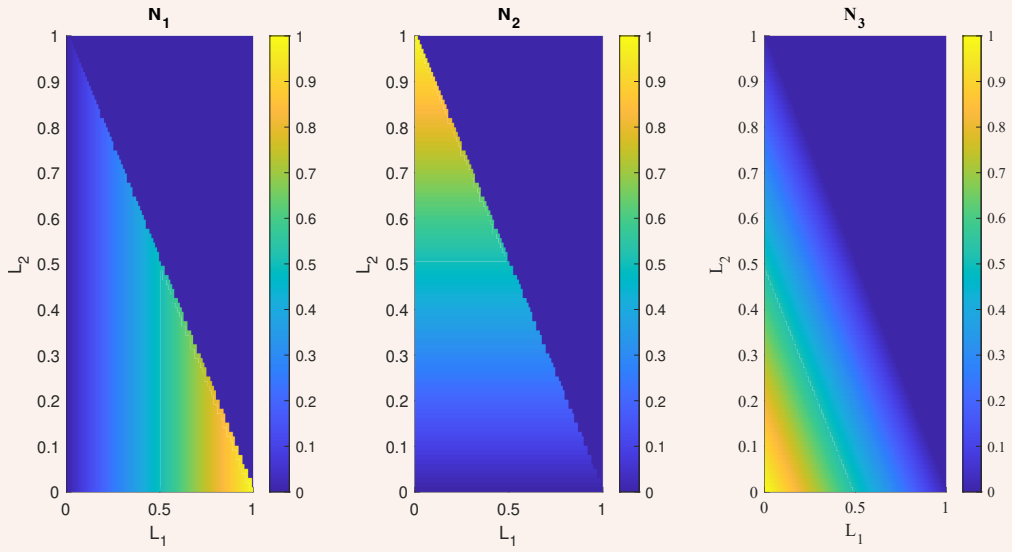


图 49.9: 形状功能为 3 节点线性三角形 单元

49.2.2.3 信条元素; 四角形

57 我们现在采用拉格兰间隔函数来衍生一个四方信托元素的形状函数。

58 四角形三角形单元, 图 49.10.

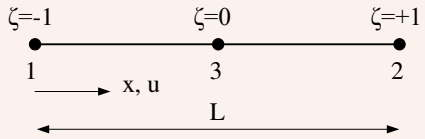


图 49.10: 三角四角栏 单元

59 单元 的形状功能可以从 Lagrangian 插值函数 从 Eq. 49.6 而在哪些我们替代 x 由 ξ. 和 k 此期限在命令的多元化 $n-1$ 会是

$$\begin{aligned} N_k^n &= \frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi-\xi_i)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\xi_k-\xi_i)} \\ &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{k-1})(\xi-\xi_{k+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)(\xi_k-\xi_2)\cdots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\cdots(\xi_k-\xi_n)} \end{aligned}$$

60 三角形四角形 单元 $\xi_1=-1$, $\xi_2=+1$, 和 $\xi_3=0$. 替换, 我们获得三个形状功能

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{(\xi-1)(\xi-0)}{(-1-1)(-1-0)} = \frac{1}{2}(\xi^2-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}(\xi^2+\xi) \\ N_3(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-\xi^2 \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

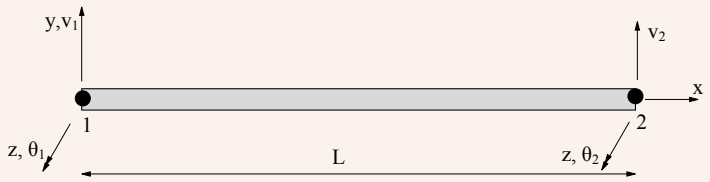


图 49.11: 灵活端口 单元

因此,

$$x(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{x}_1 \quad \overline{x}_2 \quad \overline{x}_3\ \rfloor^T \quad \text{and} \quad u(\xi) = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \lfloor\ \overline{u}_1 \quad \overline{u}_2 \quad \overline{u}_3\ \rfloor^T \tag{49.7}$$

哪里

$$\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \lfloor\ \tfrac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \quad \tfrac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \quad 1 - \xi^2\ \rfloor \tag{49.8}$$

49.2.2.4 梁

61 我们将使用所产生的方程式 §49.2.1.2. 与图的参考 49.11. 我们有四个 D.O.F。$\{\mathbf{u}\}_{4\times 1}$: 因此, 需要 4 个形状功能。$N_1$ 到 N_4, 这些将通过 4 个边界条件获得。因此, 我们需要采取多元化接近 3 级的转移。

$$\begin{aligned} v &= a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \\ \theta &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 \end{aligned}$$

請注意這 v 可以重写为:

$$v = \underbrace{\lfloor\ x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1\ \rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} \tag{49.9}$$

62 现在, 我们将实施以下边界条件:

1. $v = \overline{v}_1$ 在 $x = 0$
2. $v = \overline{v}_2$ 在 $x = L$
3. $\theta = \overline{\theta}_1 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 在 $x = 0$
4. $\theta = \overline{\theta}_2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 在 $x = L$

or:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

以逆转的功效:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{49.10}$$

63 合并 eq。49.10 与 EQ。49.9 我们得到了:

$$\begin{aligned} u &= \underbrace{\lfloor\, x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \,\rfloor}_{\mathbf{p}} \underbrace{\frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{L}]^{-1}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\ &= \underbrace{\lfloor\, \underbrace{(1+2\xi^3-3\xi^2)}_{N_1} \quad \underbrace{x(1-\xi)^2}_{N_2} \quad \underbrace{(3\xi^2-2\xi^3)}_{N_3} \quad \underbrace{(\xi^2-\xi)}_{N_4} \,\rfloor}_{\underbrace{\mathbf{p}\mathcal{L}^{-1}}_{\mathbf{N}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{\theta}_1 \\ v_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}} \end{aligned}$$

哪里 $\xi = \frac{x}{l}$.

64 因此, 为单元的格式功能由以下提供:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1+2\xi^3-3\xi^2) \\ N_2 &= x(1-\xi)^2 \\ N_3 &= (3\xi^2-2\xi^3) \\ N_4 &= x(\xi^2-\xi) \end{aligned} \tag{49.11}$$

在 FIG 中显示 49.12. 桌子 49.3 描述这些形状功能的特点

65 请注意, 我们将重复下面的相同形状功能。(§49.2.3.1) 使用赫米蒂亚交叉功能。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

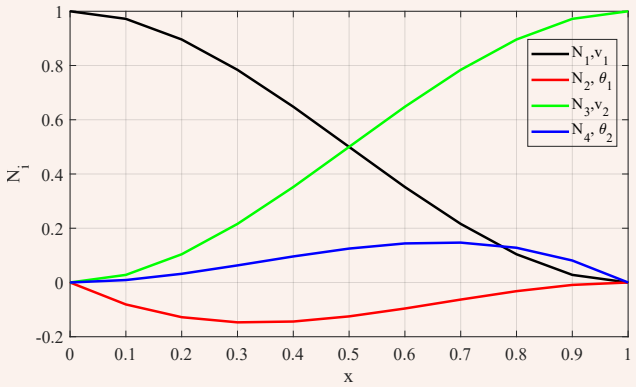


图 49.12: 格式功能为单一 梁 单元 的旋转。

	$\xi = 0$		$\xi = 1$	
功能	N_i	$N_{i,x}$	N_i	$N_{i,x}$
$N_1 = (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2)$	1	0	0	0
$N_2 = x(1 - \xi)^2$	0	1	0	0
$N_3 = (3\xi^2 - 2\xi^3)$	0	0	1	0
$N_4 = x(\xi^2 - \xi)$	0	0	0	1

表 49.3: 梁 单元 形状功能的特点

49.2.3 赫米蒂亚交叉功能

66 对于涉及形函数的第一衍生品的问题, 这就是与 C^1 inter-单元 连续性 (二、第一衍生品或折扣的连续性) 如同灵活性, **赫米蒂亚交叉功能** 而不是应该使用拉格兰基。

67 赫米蒂亚交叉功能是可见的圆形功能, 满足位移 和 Slope 的条件 (C^0, C^1) 连续性。他们在 CAD 中广泛使用, 作为 Bezier 曲线。

68 插值函数 是一种聚合物交叉的类型, 用来估计一个函数的值, 基于两个函数值和衍生值在交叉点。(节点). 赫米蒂亚间隔不仅确保间隔的聚合物与节点中的特定的功能值相匹配, 而且第一节 (可能更高) 衍生品与这些节点相匹配。这导致一个更顺利和更准确的接近, 特别是当函数被关闭时, 已知有某些衍生值。

69 例如, 我们考虑一个简单的案例, 在那里我们想要中断一个功能。$f(x)$ 在两个点上 x_0 和 x_1 使用赫米蒂亚交叉。我们有功能价值 $f(x_0), f(x_1)$ 其第一批衍生品 $f'(x_0), f'(x_1)$.

70 赫尔米蒂亚交叉波利诺米亚 $H(x)$ 3 级可以如下构建:

$$H(x) = h_0(x)f(x_0) + h_1(x)f(x_1) + h_2(x)f'(x_0) + h_3(x)f'(x_1)$$

基因在哪里工作 $h_0(x), h_1(x), h_2(x)$, 和 $h_3(x)$ 它们被定义为确保交叉条件得到满足。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

71 基本功能是为了满足节点的交叉条件而构建的。二节节点 x_0 和 x_1，基本功能可以定义为:

$$h_0(x) = (1 - 2(x - x_0)\frac{d}{dx}L_0(x))(L_0(x))^2$$

$$h_1(x) = (1 - 2(x - x_1)\frac{d}{dx}L_1(x))(L_1(x))^2$$

$$h_2(x) = (x - x_0)(L_0(x))^2$$

$$h_3(x) = (x - x_1)(L_1(x))^2$$

哪里 $L_0(x)$ 和 $L_1(x)$ 是线性拉格兰基的聚合物，由:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

49.2.3.1 梁 格式功能修订

72 在 §49.2.2.4 我们采用了梁的形状功能，使用开发的方法 §49.2.1.2 与 图 有关 49.11.

73 在 Euler-Bernoulli 喷气理论中，主要的无知是转移。w 和 转角 (斯洛普) $\theta = \frac{dw}{dx}$. 为了模拟受灵活的射线行为，形状功能必须确保位移和单元边界的连续性。赫米蒂亚形状功能是理想的这个目的。

74 考虑一个带有两个节点的射线元素，x_0 和 x_1. 每个节点都有两个自由度: 转移。w 和 转角 (斯洛普) $\theta = \frac{dw}{dx}$. 赫米蒂亚间隔聚合物是建立的，以确保移动和滑板在元素边界之间是连续的。

75 赫尔米蒂亚交叉波利诺米亚 $H(x)$ 对于一个泡沫元素，可以写成一个圆形聚合物的基本功能和节点值:

$$H(x) = h_0(x)w_0 + h_1(x)\theta_0 + h_2(x)w_1 + h_3(x)\theta_1$$

在哪里:

- w_0 和 θ_0 是位移和点击节点 x_0,
- w_1 和 θ_1 是位移和点击节点 x_1,
- $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, 和 $h_3(x)$ 是赫米蒂亚形状的功能。

76 定义形状功能 $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, 和 $h_3(x)$ 我们必须在节点上设定以下条件:

1. $H(x_0) = w_0$
2. $\frac{dH}{dx}(x_0) = \theta_0$
3. $H(x_1) = w_1$
4. $\frac{dH}{dx}(x_1) = \theta_1$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

77 要构建基本功能, 我们使用正常化坐标 $\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$. 其次, 基本功能如下定义:

1. $h_0(\xi)$: 位移 在 x_0
2. $h_1(\xi)$: 斯洛普在 x_0
3. $h_2(\xi)$: 位移 在 x_1
4. $h_3(\xi)$: 斯洛普在 x_1

$h_0(x)$

$$h_0(x_0) = 1, \quad h_0'(x_0) = 0, \quad h_0(x_1) = 0, \quad h_0'(x_1) = 0$$

我们建造 $h_0(\xi)$ as:

$$h_0(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$h_1(x)$

$$h_1(x_0) = 0, \quad h_1'(x_0) = 1, \quad h_1(x_1) = 0, \quad h_1'(x_1) = 0$$

我们建造 $h_1(\xi)$ as:

$$h_1(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

$h_2(x)$

$$h_2(x_0) = 0, \quad h_2'(x_0) = 0, \quad h_2(x_1) = 1, \quad h_2'(x_1) = 0$$

我们建造 $h_2(\xi)$ as:

$$h_2(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$h_3(x)$

$$h_3(x_0) = 0, \quad h_3'(x_0) = 0, \quad h_3(x_1) = 0, \quad h_3'(x_1) = 1$$

我们建造 $h_3(\xi)$ as:

$$h_3(\xi) = \xi^2 - \xi^3$$

结合这些结果, 一个喷射元素的赫尔米蒂亚交叉聚合物是:

$$H(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)w_0 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)(x - x_0)\theta_0 + (3\xi^2 - 2\xi^3)w_1 + (\xi^2 - \xi^3)(x - x_1)\theta_1$$

哪里 $\xi = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$. 与此相同, 与此前所产生的 §49.2.2.4.

49.2.3.2 四方 单元

49.2.3.2.1 四方线路 (q4) 78 以前, 我们从直角的刚度矩阵衍生单元 (与协调轴相匹配), 这个表述 将普遍化它具有自愿的四方形状。

79 图 49.13 顯示 单元

80 二维案例

$$u(\xi, \eta) = \sum N_{ij}\overline{u}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} N_j(\xi)N_i(\eta)\overline{u}_k$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

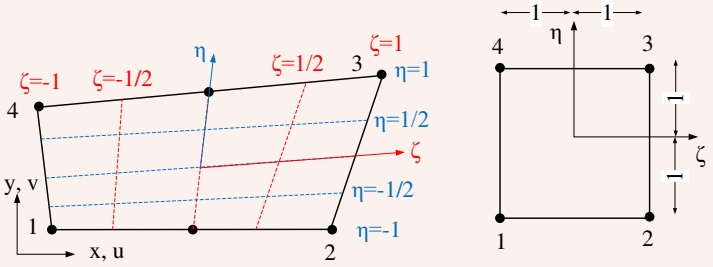


图 49.13: 四个节点 等参单元

哪里 $k=(i-1)m+j$. 二元单元。$n=m=2$ 可以重写为

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \lfloor\, N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \,\rfloor \begin{bmatrix} \overline{u}_1 & \overline{u}_3 \\ \overline{u}_2 & \overline{u}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\eta) \\ N_2(\eta) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\xi^T \overline{\mathbf{u}} \mathbf{N}_\eta \\ &= N_1(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi)N_1(\eta)\overline{u}_2 + N_1(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_4 + N_2(\xi)N_2(\eta)\overline{u}_3 \\ &= N_1(\xi,\eta)\overline{u}_1 + N_2(\xi,\eta)\overline{u}_2 + N_3(\xi,\eta)\overline{u}_3 + N_4(\xi,\eta)\overline{u}_4 \\ &= \sum_{i=1}^{4} N_i \overline{u}_i \end{aligned}$$

81 使用拉格兰间隔方程式,Eq。49.7 我们获得

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)}{(\xi_1-\xi_2)} = \frac{(\xi-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_1)} = \frac{(\xi+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \\ N_1(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_2)}{(\eta_1-\eta_2)} = \frac{(\eta-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-\eta) \\ N_2(\eta) &= \frac{(\eta-\eta_1)}{(\eta_2-\eta_1)} = \frac{(\eta+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+\eta) \end{aligned}$$

替换为 Eq。49.12

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_2(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_4(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{aligned} \tag{49.12}$$

值得注意的是, 在这种简单的情况下, 形状功能可以通过简单的检查来确定。

49.2.3.2.2 四角形方位

82 对于四方单元, 有两种可能性, 图 49.14.

83 巴斯卡三角形, 图。49.15, 将随后用于在隔离参数元素的转移领域中选择术语的正当化。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

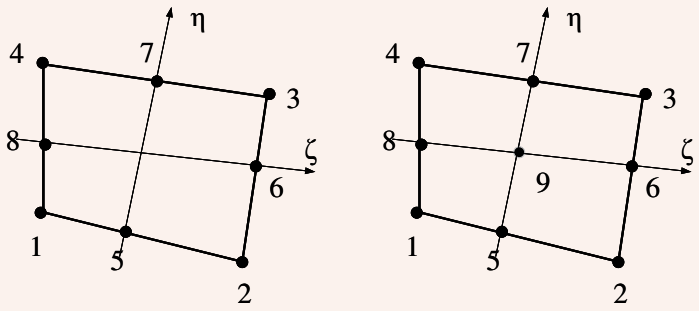


图 49.14: Serendipity 和 Lagrangian 四角形

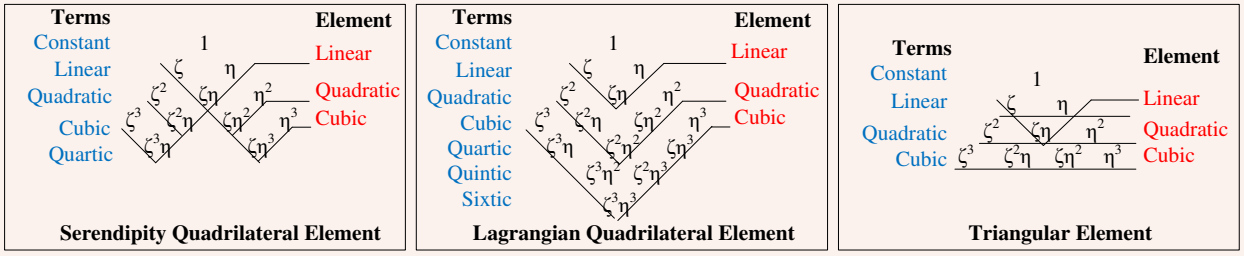


图 49.15: 四方元素和三角元素的复活三角形

49.2.3.2.2.1 直径 单元 (q8)

84 基于帕斯卡尔的三角形, 转移该领域由

$$u = \underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2x + a_3y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8x^2y + a_9xy^2}_{\boxed{3}}$$

85 在此 表述中, x^2y^2 术语是缺失的, 在假设的多元化中有 8 个术语扩展符合 8 节点 (4 角和 4 中侧).

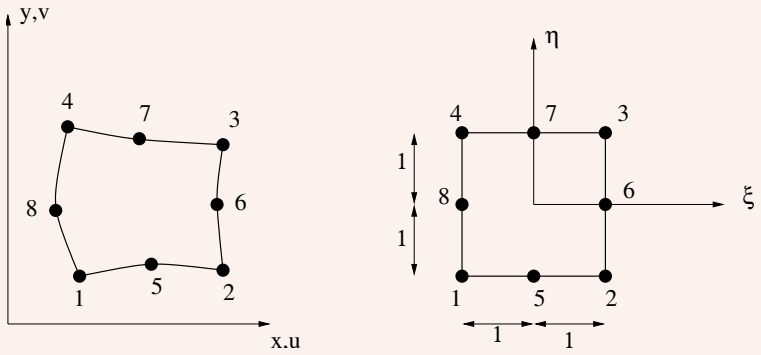


图 49.16: Serendipity isoparametric quadratic finite element: 全球和母元素

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

86 与桌子相似 49.1 和 49.2, 形状功能可以通过简单的检查获得 (伊。顺利的),

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{4}(1+\xi\xi_i)\left(1+\eta\eta_i\right)\left(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1\right) && i=1,2,3,4 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta\eta_i\right) && i=5,7 \\ N_i &= \tfrac{1}{2}(1+\xi\xi_i)\left(1+\eta^2\right) && i=6,8 \end{aligned}$$

他们在桌子上写着 49.4.

表 49.4: 形状功能和天然衍生品 q8 单元

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi+\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi-\eta-1)$	$\frac{1}{4}(2\xi-\eta)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$
5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

87 角和中间节点的形状功能是顯示在 图 49.17.

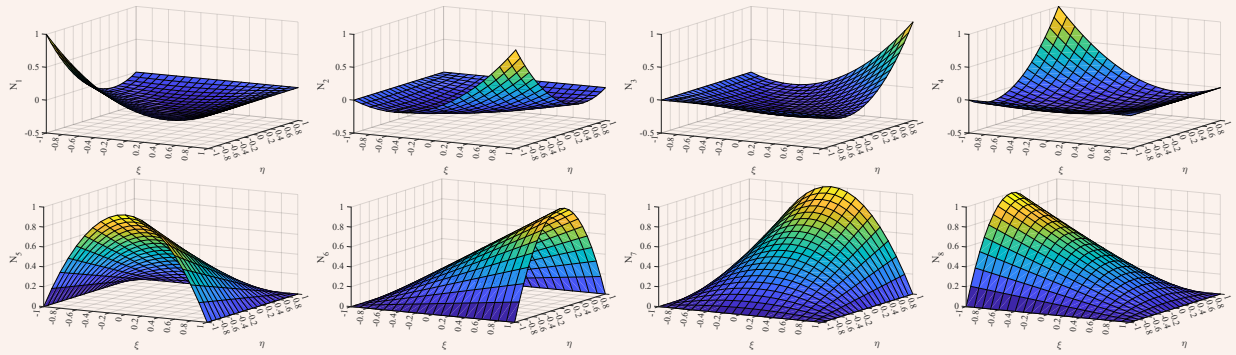


图 49.17: 形状功能为 8 节点四方 单元

49.2.3.2.2.2 拉格兰单元 (q9)

88 在此元素中, 转移领域是由

$$u = \underbrace{\underbrace{a_1}_{\boxed{0}} + \underbrace{a_2x+a_3y}_{\boxed{1}} + \underbrace{a_4x^2+a_5xy+a_6y^2}_{\boxed{2}} + \underbrace{a_8x^2y+a_9xy^2}_{\boxed{3}}}_{\text{Serendipity}} + \underbrace{a_{12}x^2y^2}_{\boxed{4}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

89 所有四方术语都存在, 因此有九个术语在聚合物扩展, 第九节将与内部节点相匹配。

90 在这种情况下, 形状功能可以直接从 Lagrangian interpolation 函数中获得。

91 Q9 单元 有九个节点, 并使用形状函数, 在两方都是四角形。ξ 和 η 方向。形状功能由 Lagrangianinterpolation 使用衍生。

92 Q9 单元 具有自然协调系统中的以下节点和坐标 (ξ, η) 在桌子上展示 49.5.

表 49.5: 诺达协调 (自然) Q9 单元 的

诺德	1	2	3	4	5	5	7	8	9
ξ	-1	0	1	1	1	0	-1	-1	0
τ	-1	-1	-1	0	1	1	1	0	0

93 四角形单元在 1D 的 Lagrange 格式功能由以下提供:

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$$

94 对于一个四方单元与节点在 $\xi = -1$, $\xi = 0$, 和 $\xi = 1$, 形状功能是:

形函数 $N_0(\xi)$ **为** $\xi = -1$

$$N_0(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

形函数 $N_1(\xi)$ **为** $\xi = 0$

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{-1} = 1 - \xi^2$$

形函数 $N_2(\xi)$ **为** $\xi = 1$

$$N_2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{(\xi + 1)\xi}{2}$$

95 Q9 单元 的 2D Lagrange 形功能是 1D LagRange 形式功能的产品。ξ 和 η 方向:

$$N_{ij}(\xi, \eta) = N_i(\xi) \cdot N_j(\eta)$$

96 现在我们正在构建形状功能

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 在 $(\xi,\eta)=(-1,-1)$:

$$N_{11}(\xi,\eta)=N_0(\xi)N_0(\eta)=\left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta-1)}{2}\right)=\frac{\xi(\xi-1)\eta(\eta-1)}{4}$$

2. 在 $(\xi,\eta)=(0,-1)$:

$$N_{21}(\xi,\eta)=N_1(\xi)N_0(\eta)=(1-\xi^2)\left(\frac{\eta(\eta-1)}{2}\right)=\frac{(1-\xi^2)\eta(\eta-1)}{2}$$

3. 在 $(\xi,\eta)=(1,-1)$:

$$N_{31}(\xi,\eta)=N_2(\xi)N_0(\eta)=\left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)\left(\frac{\eta(\eta-1)}{2}\right)=\frac{(\xi+1)\xi\eta(\eta-1)}{4}$$

4. 在 $(\xi,\eta)=(1,0)$:

$$N_{32}(\xi,\eta)=N_2(\xi)N_1(\eta)=\left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)(1-\eta^2)=\frac{(\xi+1)\xi(1-\eta^2)}{2}$$

5. 在 $(\xi,\eta)=(1,1)$:

$$N_{33}(\xi,\eta)=N_2(\xi)N_2(\eta)=\left(\frac{(\xi+1)\xi}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right)=\frac{(\xi+1)\xi(\eta+1)\eta}{4}$$

6. 在 $(\xi,\eta)=(0,1)$:

$$N_{23}(\xi,\eta)=N_1(\xi)N_2(\eta)=(1-\xi^2)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right)=\frac{(1-\xi^2)(\eta+1)\eta}{2}$$

7. 在 $(\xi,\eta)=(-1,1)$:

$$N_{13}(\xi,\eta)=N_0(\xi)N_2(\eta)=\left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)\left(\frac{(\eta+1)\eta}{2}\right)=\frac{\xi(\xi-1)(\eta+1)\eta}{4}$$

8. 在 $(\xi,\eta)=(-1,0)$:

$$N_{12}(\xi,\eta)=N_0(\xi)N_1(\eta)=\left(\frac{\xi(\xi-1)}{2}\right)(1-\eta^2)=\frac{\xi(\xi-1)(1-\eta^2)}{2}$$

9. 在 $(\xi,\eta)=(0,0)$:

$$N_{22}(\xi,\eta)=N_1(\xi)N_1(\eta)=(1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

97 最后的形函数经常被称为 **泡沫功能**

98 這些 形函数 與 单元 的相同性有所不同。

99 格式功能显示在 图 49.18.

100 Q9 单元 比 Q8 表现得更好, 如果边缘不平行或稍微弯曲。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

49.2.3.3 变量 (希拉里) 单元

101 基于上述, 我们可以将 表述 一般化为一个四方 单元 有变数的节点。这个 单元 可能有不同的变化顺序沿着不同的边缘, 并且非常有用, 以便轻松分类一个最终的单元面板。

102 在其最简单的表述中, 它有四个节点, 并且有一个线性变异。沿着所有侧面, 在最常见的情况下, 它是一个完整的四方单元. 形状功能可以从表中获取 49.6. 请注意, 这些格式功能适用于单元的序列, 其中角节点首先被列数, 中侧则随后, 图 49.19.

表 49.6: 形状功能为变量节点 单元

		只有当 Node i 是存在的				
		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
N_1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$			$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$-\frac{1}{2}N_5$	$-\frac{1}{2}N_6$			$\frac{1}{4}N_9$
N_3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$		$-\frac{1}{2}N_6$	$-\frac{1}{2}N_7$		$\frac{1}{4}N_9$
N_4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$			$-\frac{1}{2}N_7$	$-\frac{1}{2}N_8$	$\frac{1}{4}N_9$
N_5	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_6	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_7	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$					$-\frac{1}{2}N_9$
N_9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$					

49.2.3.4 三角形 单元 (t6)

103 四角形 位移 形状功能可以写在自然协调如:

$$u = \sum_{i=1}^{6} N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^{6} N_i v_i \tag{49.13}$$

在哪里的形状函数在 Eq 中获得。49.2.2.2

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 & N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \tag{49.14}$$

104 值得注意的是, 我们可以否则获得这种形状。通过假设下列函数

$$u(L_1, L_2) = a_1 + a_2L_1 + a_3L_2 + a_4L_1^2 + a_5L_1L_2 + a_6L_2^2 \tag{49.15}$$

接下来, 我们将通过满足适当的边界条件。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

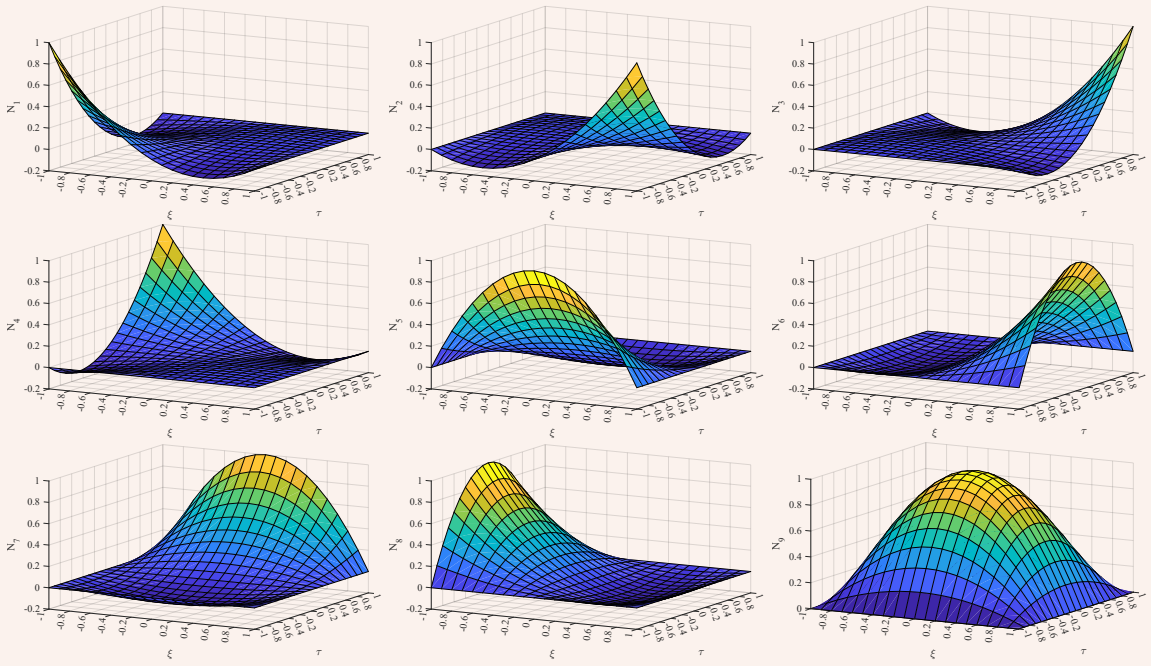


图 49.18: 形状功能为 9 节点四方 单元

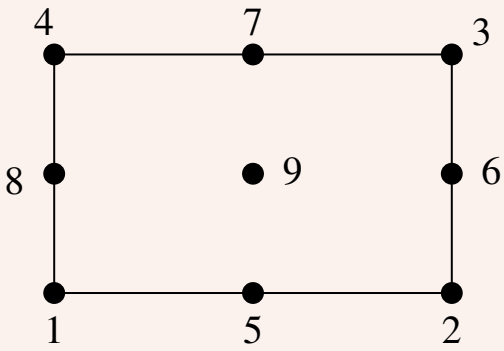


图 49.19: 以色列分数的节点编号 单元

表 49.7: T6 单元 的形状功能和衍生品

i	N_i	N_{i,L_1}	N_{i,L_2}	N_{i,L_3}
1	$(2L_1-1)L_1$	$4L_1-1$	0	0
2	$(2L_2-1)L_2$	0	$4L_2-1$	0
3	$(2L_3-1)L_3$	0	0	$4L_3-1$
4	$4L_1L_2$	$4L_2$	$4L_1$	0
5	$4L_2L_3$	0	$4L_3$	$4L_2$
6	$4L_1L_3$	$4L_3$	0	$4L_1$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

105 形状功能及其衍生物与自然的关系协调 L_1 和 L_2 在桌子上放下 49.7 (在条款中由 $L_1, L_2,$ 和 L_3).

106 六个节点四角三角形的形状功能在图中显示 49.20.

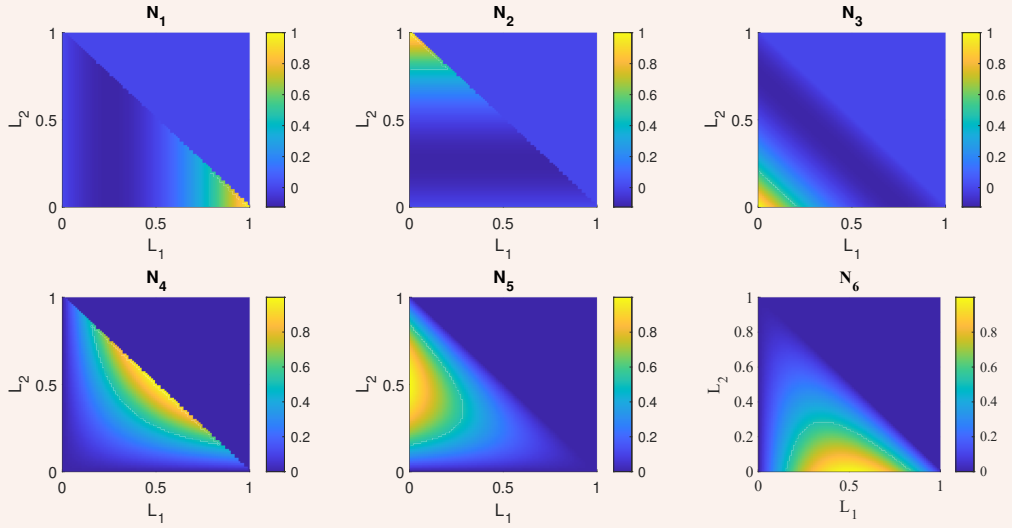
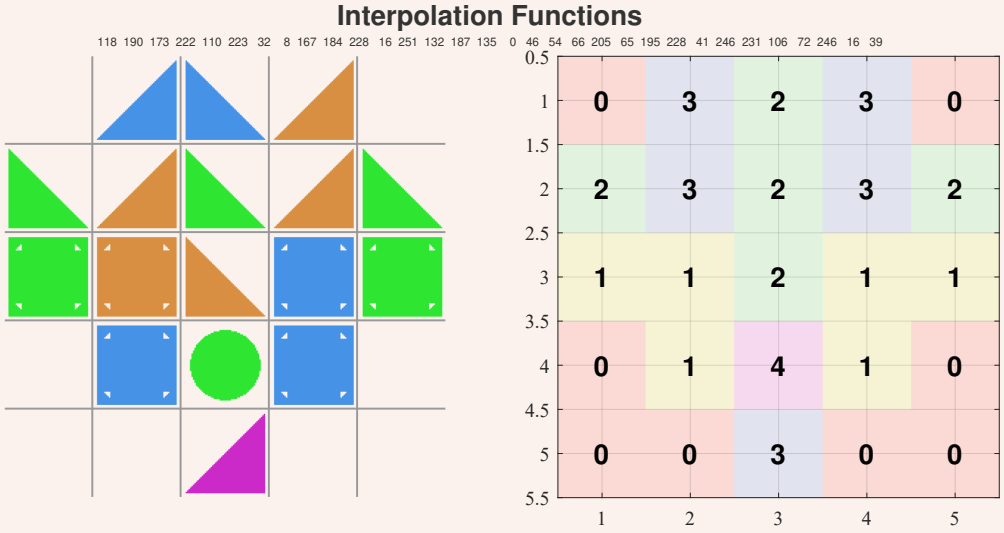


图 49.20: 形状功能为 6 节点四角三角 单元



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

50 线性 单元表述

摘要

在以前的章节中, 我们引入了变量方法, 特别是虚拟工作的原则, 并讨论了在 *nodal* 值方面对移动领域的 *interpolation* 功能。现在, 是时候应用这些概念来制定有限元法. 此章节为 *1D* 的 表述 提供的一般 *(梁/桁架)* 直播 单元。请注意, 这不是唯一的方法, 在下一章中我们将审查伽辽金法 *(§52)* 对于所有实用目的, 将导致机械中相同的表述。

50.1 引入 1521
50.2 结尾 单元 1522
50.2.1 引入 1522
50.2.2 应变 位移 关系 1522
50.2.3 虚拟位移和线条 1523
50.2.4 单元 刚度矩阵 表述 1523
50.2.5 应力 恢复 1525
50.3 应用 1525
50.3.1 桁架 单元 1525
50.3.2 灵活 单元 1526
50.4 一般要求 单元 1526
50.5 差异化错误和转换率 1528
50.6 基于 势能 的最低解决方案的低限性 1529
50.7 平衡 和 变形协调 在解决方案中 . . . 1529

50.1 引入

[1] 到目前为止, 我们已经考虑了连续的系统, 在本章中, 我们试图应用以前产生的关系 差异化 系统。主要解决方案仅在 只有节点 (相反, 在内部的不断解决方案 Ω). 虚拟位移原则的应用需要 假设 位移 字段 这个 位移 字段可以接近干扰功能 写在意义上:

1. 不知不觉的聚合物因子, 最适合连续系统。例如: 和 The 雷利 • 里茨 方法

$$v(x) = a_1 \underbrace{x(L-x)}_{\Phi_1} + a_2 \underbrace{x^2(L-x)^2}_{\Phi_2} + \dots$$

   这种方法的一个主要缺点是, 因子没有物理意思。
2. 未知的节点变形, 最适合分歧系统和势能 基于格式

$$v(\overline{\mathbf{u}}_i) = u = N_1\overline{\mathbf{u}}_1 + N_2\overline{\mathbf{u}}_2 + \dots + N_n\overline{\mathbf{u}}_n$$

   哪里 $\overline{\mathbf{u}}_i$ 是已知的 位移 在 dof i.

审阅稿

50.2 结尾 单元

50.2.1 引入

2 在章节 41 我們將堅固性矩阵取出。一个尺寸的 单元 行, 使用的方法不能将一般的终端 单元 通用。否则, 本章的衍生将是 适用于两种一维线 (或 continu 连续) 单元 或 Continuum (2D 或 3D) 单元.

3 值得注意的是, 虽然先前提到的刚度矩阵 得出准确的解决方案, 它不能被普遍化为连续 (2D / 3D 单元). 另一方面, 这里提出的方法是 接近 方法, 它会导致一个准确的硬度矩阵为灵活一维元素。尽管它的接近, 这个所谓的终端元素方法将产生优秀的结果, 如果使用足够的元素。

50.2.2 应变 位移 关系

4 位移的 u 在任何点内, 一个单元可以写在形状功能方面。$\mathbf{N}$ 和 nodal 转移 $\overline{\mathbf{u}}$ 如

$$\mathbf{u}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{u}}$$

5 应变 被定义为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B}(x)\overline{\mathbf{u}} \tag{50.1}$$

哪里 $\mathbf{B}$ 是矩阵与应变领域的节点转移相关, 并在衍生品方面明确表示。$\mathbf{N}$.

50.2.2.1 Axial 成员

6 使用在 Eq 中产生的形状函数 49.3 然后是 eq。50.1 将给予

$$\begin{aligned} u(x) &= \underbrace{\lfloor \underbrace{(1-\frac{x}{L})}_{N_1} \quad \underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2} \rfloor}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\ \varepsilon(x) &= \varepsilon_{xx} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\left\lfloor \underbrace{-\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_1}{\partial x}} \quad \underbrace{\frac{1}{L}}_{\frac{\partial N_2}{\partial x}} \right\rfloor}_{\mathbf{B}} \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{matrix} \right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \end{aligned}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

50.2.2.2 灵活成员

7 使用格式功能为以前在 Eq 中衍生的灵活单元。49.11

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{y}{\rho} = y\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = y\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}x^2}\overline{\mathbf{v}} \\ &= \underbrace{y\left[\underbrace{\frac{6}{L^2}(2\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-2)}_{\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}} \quad \underbrace{\frac{6}{L^2}(-2\xi+1)}_{\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2}} \quad \underbrace{-\frac{2}{L}(3\xi-1)}_{\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2}}\right]}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix}\overline{v}_1\\ \overline{\theta}_1\\ \overline{v}_2\\ \overline{\theta}_2\end{Bmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}}\end{aligned} \tag{50.2}$$

50.2.3 虚拟位移和线条

8 在预测虚拟位移原则的应用时, 我们定义虚拟移动的 vectors 和 应变 在节点方面移动和形状功能:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}(x) &= \mathbf{N}(x)\delta\overline{\mathbf{u}} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}(x) &= \mathbf{B}(x)\delta\overline{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

50.2.4 单元 刚度矩阵 表述

9 现在, 让我们应用 虚拟位移的原理 重新建立已知的关系 (注意矩阵):

$$\delta U = \delta W \tag{50.3}$$

$$\delta U = \int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega \tag{50.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{50.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \tag{50.6}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\overline{\mathbf{u}}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \tag{50.7}$$

结合 Eqns。50.3, 50.4, 50.5, 50.7, 和 50.6，该 内部虚拟 应变能 被授予:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}\underbrace{\mathbf{D}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}}_{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T}_{\delta\boldsymbol{\varepsilon}}\underbrace{\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0}_{\boldsymbol{\sigma}^0}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\Omega\overline{\mathbf{u}} - \delta\overline{\mathbf{u}}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{50.8}$$

10 虚拟的 外部工作 相反, 它是由:

$$\delta W = \underbrace{\delta\overline{\mathbf{u}}}_{\text{Virt. Nodal Displ.}} \underbrace{\overline{\mathbf{F}}}_{\text{Nodal Force}} + \int_l \delta\mathbf{u}q(x)\mathrm{d}x$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

11 将这个方程式与 $\{\delta \mathbf{u}\} = \mathbf{N}\{\delta \overline{\mathbf{u}}\}$ 收益:

$$\delta W = \delta \overline{\mathbf{u}} \overline{\mathbf{F}} + \delta \overline{\mathbf{u}} \int_0^l \mathbf{N}^T \, q(x) \, \mathrm{d} \tag{50.9}$$

12 相同的内部 应变能 Eqn。50.8 外部工作 Eqn。50.9 我们得到了:

$$\underbrace{\underbrace{\delta \overline{\mathbf{u}} \underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, \mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{k}} \overline{\mathbf{u}} - \delta \overline{\mathbf{u}} \underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathrm{d}\Omega}_{\overline{\mathbf{F}}^0}}_{\delta U} = \underbrace{\delta \overline{\mathbf{u}} \overline{\mathbf{F}} + \delta \overline{\mathbf{u}} \underbrace{\int_0^l \mathbf{N}^T \, q(x) \, \mathrm{d}x}_{\overline{\mathbf{F}}^e}}_{\delta W}} \tag{50.10}$$

或

$$\mathbf{k} \overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^o = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e \tag{50.11}$$

13 取消了 $\delta \overline{\mathbf{u}}$ 这个词, 这是相同的平衡方程式与以前写的。它涉及到 (未知) 点数 位移 $\overline{\mathbf{u}}$, 结构 刚度矩阵 $\mathbf{k}$, 外部节点力量向量 $\overline{\mathbf{F}}$, 分布的单元力量 $\overline{\mathbf{F}}^e$, 和初始 向量 的 位移.

14 从这个关系中, 我们定义:

定义 50.1: 刚度矩阵 和 单元 力量

单元 刚度矩阵:

$$\mathbf{k} = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathrm{d}\Omega \tag{50.12}$$

单元 初始力量 向量:

$$\overline{\mathbf{F}}^0 = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathrm{d}\Omega \tag{50.13}$$

单元 相当于 荷载 向量:

$$\overline{\mathbf{F}}^e = \int_0^L \mathbf{N} \, q(x) \, \mathrm{d}x \tag{50.14}$$

15 将军 等式 平衡 可以写作如:

$$\underbrace{\mathbf{k} \overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{F}}^0}_{F_{\text{int}}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^e}_{F_{\text{ext}}} = 0$$

這是 可分辨 欧拉方程 (平衡方程) 与 虚功原理 定义的变量相关。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

50.2.5 应力 恢复

16 既然从前一部分, 我们得出一个普遍的关系, 在其中节点转移是主要的未知, 我们下一步寻求确定内部的。(一般化) 最常需要的压力是设计。提醒我们有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

与节点转移的 vector $\bar{\mathbf{u}}$ 知道, 这两个方程式会产生:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}$$

我们注意到, 二级变量 (应变和压力) 是主要变量的衍生品 (位移) 因此, 不能总是以相同的准确性确定。

50.3 应用

50.3.1 桁架 单元

17 由 Eq 所产生的特鲁斯元素的形状功能。49.3

$$\begin{aligned}N_1 &= 1-\frac{x}{L}\\ N_2 &= \frac{x}{L}\end{aligned}$$

18 相应的 应变 位移 关系 $\mathbf{B}$ 被授予:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{dN_1}{\mathrm{d}x} & \frac{dN_2}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}\\ &= \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

对于桁架 单元, 构成的矩阵 $\mathbf{D}$ 以 E 的尺寸降低; 因此, 取代为 Eq。50.12, 与 $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A\mathrm{d}x$: $\mathbf{k} = \int_{\Omega}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega$ 但 $\mathrm{d}\Omega = A\mathrm{d}x$ 而对于单元与恒定的跨分区区域, 我们获得:

$$\mathbf{k} = A\int_0^L\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L}\\ \frac{1}{L}\end{Bmatrix}\cdot E\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L^2}\int_0^L\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\mathrm{d}x = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

50.3.2 灵活 单元

19 对于一个 梁 单元, 形状函数在 Eq 中衍生。49.11 和该 **B** 矩阵 在 式 50.2 以 式 替代。50.12:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, y^2 \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}x$$

记住这 $\int_A y^2 \, \mathrm{d}A = I_z$ Eq. 50.12 减少到

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} I_z \, \mathrm{d}x$$

在这个简单的情况下, 我们有: $\mathbf{D} = E$ 这样:

$$\mathbf{k} = E I_z \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{B} \, \mathrm{d}x$$

20 注意到整合变量的变化 $\mathrm{d}x$ 到 $\mathrm{d}\xi$ 我们得到了

$$\mathbf{k} = E I_z \int_0^1 \begin{Bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi - 1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi - 2) \\ \frac{6}{L^2}(-2\xi + 1) \\ -\frac{2}{L}(3\xi - 1) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2}(2\xi - 1) & -\frac{2}{L}(3\xi - 2) & \frac{6}{L^2}(-2\xi + 1) & -\frac{2}{L}(3\xi - 1) \end{bmatrix} \underbrace{L \mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}x}$$

或

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overline{v}_1 & \overline{\theta}_1 & \overline{v}_2 & \overline{\theta}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

它实际上是相同的以前衍生 矩阵 在 Eq 。41.1

21 我們已經經過四章了。(从章节开始 47 为此一 50) 最终能够使用一般化方法来衍生这一矩阵 , 可以应用于任何类型的终端的 单元. 这个方法将在下一章中被利用, 以产生刚度矩阵的隔离性单元。

50.4 一般要求 单元

22 终点 单元 (只有一個大約的 位移 字段在雷利 • 里茨 表述) 必须满足两个基本 **要求**

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

完整性: 信仰的差异化必须 **至少** 常容位移 和常态 应变 (或温度和温度格拉迪安). 这是实现的二次性问题, 如下:

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + \text{ possibly additional terms}$$

变形协调 或符合: 对 单元 的接近边界必须持续 (C^0 或 C^1 连续性). 大多数最终的单元符合, 但一些是不是。

23 例如, 关于图 50.1, 单元 A 必须是能够在没有内部压力/紧张的情况下进行严格的身体运动; 在 B 节点, 我们应该有 位移 的连续性 (但是不要为这个 单元 放下).

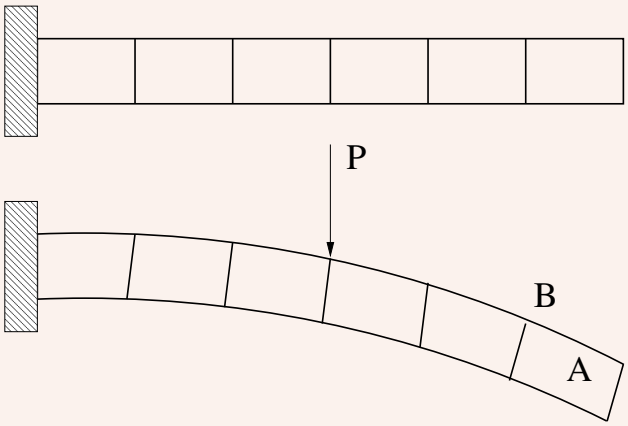


图 50.1: 完整性和变形协调

24 如果满足这两项要求, 那么 **接近** 是保证的。在 FE 方法中, 我们获得了大约的解决方案, 而越多 单元使用, 更准确的是近距离的解决方案。在限量上, 对于无限小的单元, 我们需要解决方案无限地接近一个。因此, 在完整性和变形协调要求已满足。

25 **拉克斯等级理论:**

定义 50.2: 转型标准

转型标准=完整性+ 变形协调 要求

26 两个基本要求:

Patch 测试: 完整性可以通过 *Patch* **测试** 什么将是后来讨论。

零 应变能: 对于结构问题, 应该有零 应变能当单元受硬体运动时。记住, 在刚度矩阵中表述、矩阵是独一无二的, 因为它不仅体现了强度位移。相同的关系, 但平衡方程式也。对于每个方程式, 相应于硬体模式, 可以通过 特征值 分析检测 (更多关于此后).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

50.5 差异化错误和转换率

27 接近将提供准确的解决方案在尺寸的范围内 h 由单元接近零。

28 在某些情况下, 确切的解决方案是通过一个最终数量获得的。单元 (或者只有一个) 如果使用多元化扩展在这个 单元 可以正确的解决方案。(吉。Truss, beam 元素, 飞机压力元素使用在一个盘子下干净轴 荷载).

29 准确的解决方案可以随时在任何节点附近扩展 i 作为一个聚合物

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots$$

如果在一个单元的尺寸内 h 一个多元学位 p 使用, 然后泰勒系列扩展到这个程度可以适应, 错误是命令 $O(h^{p+1})$.

30 因此, 对于一个线性单元, **接近** 利率是命令 $O(h^2)$, 即, 位移中的错误减少到原始的 1/4 错误是半分的。

31 相似的论点, 可以证明, 流派 (或压力) 由此授予的 m 位移的衍生品应该相匹配一个错误的 $O(h^{p+1-m})$, 和应变能 (由此授予的紧张的四方) 错误将是 $O(h^{2(p+1-m)})$

32 从上面的论点, 了解对方程的顺序可以帮助以极端化解决方案为主 “正确的” 一个。因此, 例如如果 位移 相匹配 $O(h^2)$ 我们有两个近距离的解决方案。u_1 和 u_2 以大小的尺寸获取 h 和 $h/2$ 然后我们可以写

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4$$

哪里 u 是外汇的价值。

33 转向准确的解决方案可以通过, 图加速 50.2.

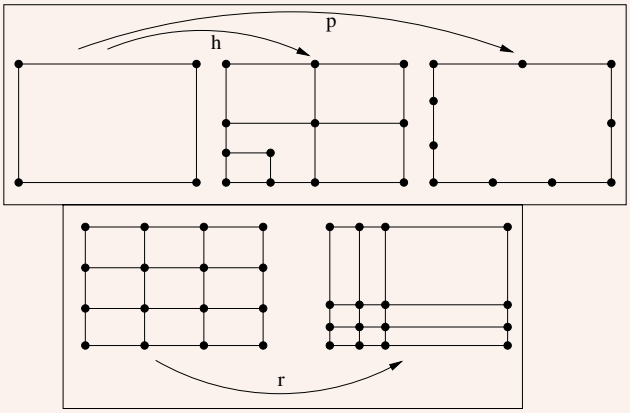


图 50.2: h, p 和 r 接近

h 减少 单元 的尺寸 (或清理).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

p 增加聚合物的秩序 (相同的 单元 但较高的节点/节点数量).

r 将最终的单元清真寺的节点移动, 而不会改变清真台的地质。

第三种形式的加速度是所谓的 **r** 改造在哪同一数量的节点/单元 保持, 但按钮转移周围增加其密度在高压力格拉迪恩特的区域。

34 上述的接近程序可以加速在一个可以容纳的计划中, **适应性转换** 技术。

35 最终, 可能有其他错误。**旋转** 在内在的计算机

50.6 基于 势能 的最低解决方案的低限性

36 数值 解决方案, 源于最低总的原则势能 是 **低线** 解决方案, 因为应变能它比一个更小。(即从无限数量获得的单元).

37 这可以很容易地显示, 如果我们考虑到位移 u_i 因果由 荷载 P_i 从零增加到其规定的值。完成的工作是 $\frac{P_i u_i}{2}$ 必须与内部相等。应变能 U. 否则, 应用的 荷载 的潜力是 $P_i u_i$, 正確的势能是

$$\Pi_{\text{exact}} = \frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2} - P_i u_i^{\text{exact}} = -\frac{P_i u_i^{\text{exact}}}{2}$$

同样, 势能的约值是

$$\Pi_{\text{approx}} = -\frac{P_i u_i^{\text{approx}}}{2}$$

我们知道, 接近 Π 是 **算法** 更高于准确价值 (因为准确的值是最低) 因此

$$\underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{exact}}}}{2}}_{\Pi_{\text{exact}}} < \underbrace{-\frac{P_i u_{i_{\text{approx}}}}{2}}_{\Pi_{\text{approx}}}$$

或

$$u_i^{\text{approx}} < u_i^{\text{exact}} \tag{50.15}$$

否则, 解决方案是 **太坚固**.

38 注意与 Rayleigh-Ritz 方法的相似之处, 缺乏足够的我們多元化接近的條件也導致了一個堅固的解決方案。

50.7 平衡 和 变形协调 在解决方案中

39 在一 **准确的解决方案** 每個差別 单元 平衡 和变形协调 主持。

40 在最终的单元差异化中, 这不一定是:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

平衡的诺达力量: 自动满足的人根据定义 ($\mathbf{k}^e\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} = 0$) 在节点上。

变形协调 在 Nodes 中: 单元 相互连接具有相同的移居 (相应的 DOF) 在连接节点。

对 应力 的 Interelement 连续性: 通常不满意, 就是平衡 超越 单元 不一定占主导地位。例如, 考虑 图 50.3 如果节点 4 是唯一的转移 (其余的所有保持固定) 然后, 将会有不停

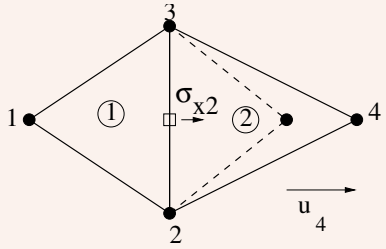


图 50.3: 应力的相互元素连续性

的 σ_{xx} 超過 单元 邊界 2-3.

Interelement 变形协调 的移行: 大多数 单元 有此要求满意的。如果 单元 不, 则被标记为 不兼容或 不符合, 图 50.4

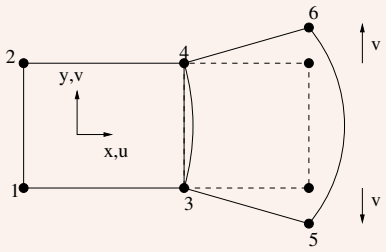
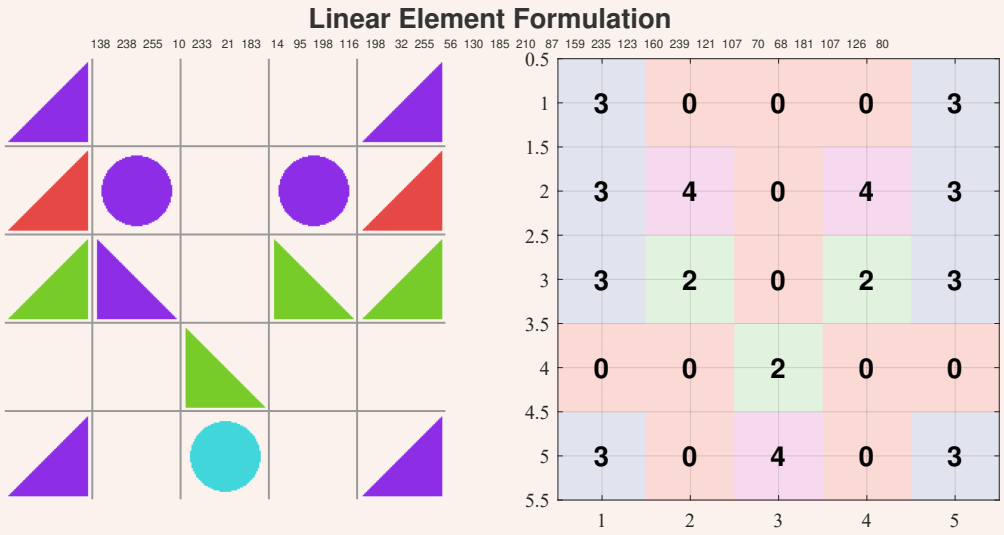


图 50.4: 应变的相互元素连续性

平衡 内部 单元: 并不总是满意。总体满意度平衡在每个点都要求 DOF 之间的关系, 而不是必然是由 $\mathbf{k}^e\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}} = 0$

移动兼容性在一个元素内: 满足, 因为我们只需要元素的转移是连续的, 单值。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

51 以色列 单元

摘要

雖然這本書主要集中在 *1D* 单元, 但最終的 单元 部分的基本理論也適用於持續的 单元. 一个流行的单元是基于等参单元表述. *Isoparametric* 单元 使用相同的形状功能, 无论是分散和地质。这使得在单元中有曲线边缘, 使结构更灵活。形式功能在前一章中产生。在本章中, 我们将严格提取这种类型的元素的硬度矩阵, 特别是 *Q4* 元素。类似的程序可以跟随其他 单元. 虽然最初的表达可能看起来无聊和困惑, 但它导致一个简单的计算机程序实施, 并适用于两维和三维压力分析以及非结构性问题。刚度矩阵 的 单元 将通过 数值积分 进行评估。因此, 本章的第二部分将详细讨论数值积分。

51.1 引入 1532
51.2 单元表述 1534
51.2.1 酒吧 单元 1534
51.2.2 四方 (q4) • 详细 表述 1535
51.2.3 三角形 单元 1539
51.2.4 例题 51.1: 雅各比亚运营商 . 1542
51.3 数值积分 1543
51.3.1 纽顿评论 1544
51.3.2 Gauss-Legendre 四角形 . . . 1546
51.3.3 直角和普里斯姆地区 1549
51.3.4 三角区 1549
51.4 应力恢复; 节点压力 1549
51.5 Nodal 等级负载 1552
51.5.1 重力 荷载 1552
51.5.2 特拉克 荷载 1553
51.5.3 初始压力/压力; 热 荷载 . . . 1554
51.5.4 集成命令 1555
51.6 寄生虫/不兼容的单元 1557
51.6.1 Q4 问题 1557
51.6.2 Q6 答案 1558
51.6.3 Qm6, 进一步改进 1558
51.7 旋转 D.O.F 1559

51.1 引入

1 此前, 我们已经审查了简单的终端单元, 在本讲座中我们将扭曲那些更简单的单元到其他更有意志的形状。

2 因此, 自然坐标将被扭曲到新的曲线设置, 当在卡特西亚 x, y, z 太空, 图 51.1.

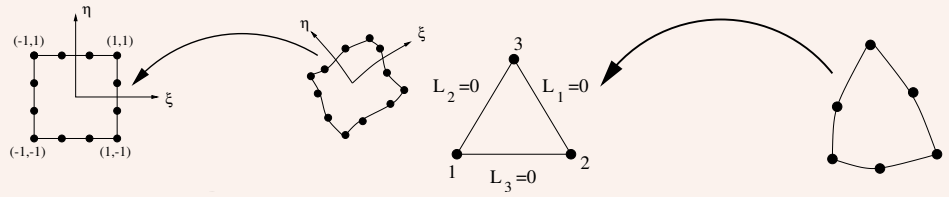


图 51.1: 二维地图某些 单元

3 在 等参单元表述 中, 分散表达为自然坐标, 但它们必须与卡特西亚协调 x, y, z. 这是通过转型实现的。矩阵 **J** 整合不能再进行分析。但是, 必须进行数字化。

4 自然坐标范围为 -1 至 +1, 图 51.2

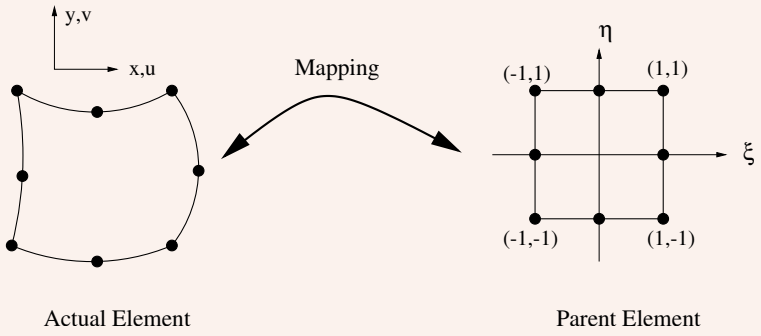


图 51.2: 现有和父母 单元

5 可以在 单元 中任何点的节点转移可以写入关于已知的节点转移和形状功能

$$
\begin{aligned}
u &= N_1\overline{u}_1 + N_2\overline{u}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e\\
v &= N_1\overline{v}_1 + N_2\overline{v}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{v}_1\\ \overline{v}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{v}}_e\\
w &= N_1\overline{w}_1 + N_2\overline{w}_2 + \cdots = \mathbf{N}\left\{\begin{array}{c}\overline{w}_1\\ \overline{w}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \mathbf{N}\overline{\mathbf{w}}_e
\end{aligned}
$$

或

$$
\mathbf{u} = \lfloor\ u \quad v \quad w\ \rfloor^T = [\mathbf{N}]\overline{\mathbf{u}}_e
$$

6 当单元也被扭曲时, 任何点的坐标可以 **也** 以 nodal coordinates 的意义表达

$$
\begin{aligned}
x &= \tilde{N}_1\overline{x}_1 + \tilde{N}_2\overline{x}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{x}}\\
y &= \tilde{N}_1\overline{y}_1 + \tilde{N}_2\overline{y}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{y}_1\\ \overline{y}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{y}}\\
z &= \tilde{N}_1\overline{z}_1 + \tilde{N}_2\overline{z}_2 + \cdots = \tilde{\mathbf{N}}\left\{\begin{array}{c}\overline{z}_1\\ \overline{z}_2\\ \vdots\end{array}\right\} = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

或

$$
c = \lfloor\ x \quad y \quad z\ \rfloor^T = \tilde{\mathbf{N}}\overline{\mathbf{c}} \tag{51.1}
$$

7 形函数 矩阵 $\mathbf{N}$ 和 $\tilde{\mathbf{N}}$ 是职能的 ξ, η, 和 ζ. 因此, 三個可能的案例出現, 图 51.3

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

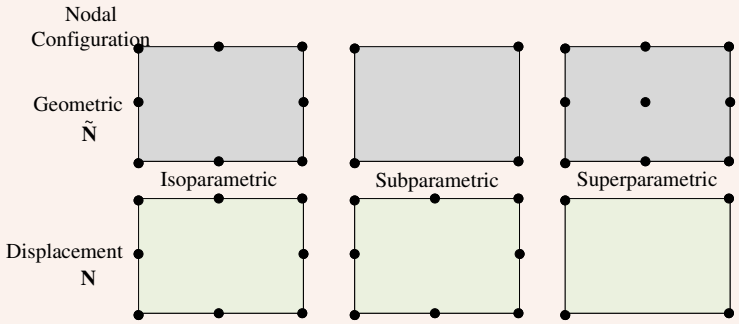


图 51.3: Iso、Super 和 Sub Parametry 单元

以色列人: $\mathbf{N}$ 和 $\tilde{\mathbf{N}}$ 是相同的

副参数: $\mathbf{N}$ 它比更高的水平 $[\tilde{\mathbf{N}}]$

超级参数: $\mathbf{N}$ 低于低于 $[\tilde{\mathbf{N}}]$

8 底部和超级参数单元很少使用。

51.2 单元表述

51.2.1 酒吧 单元

9 形状函数由 §49.2.2.3.

10 应变 位移 关系是由 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}_e = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}_e$ 与区别运营商 $\mathbf{L}$ 等同于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. 对于这个单次元案例, 这减少了

$$\varepsilon_x = \frac{du}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{L} \lfloor \mathbf{N} \rfloor}_{\mathbf{B}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \end{array} \right\} \tag{51.2}$$

11 我们呼吁链条规则, 因为形状功能在自然坐标的意义上表达:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} \tag{51.3}$$

第一個用語可以從格式功能,Eq 中輕鬆使用。49.8 但是, 第二个不是。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

12 當時, $\frac{d\xi}{dx}$ 它不存在, 我们可以确定其相反的 $\frac{dx}{d\xi}$ 来自 EQ。49.7 我們將所指示的 J 或 **雅各比**. 雅各比亚运营商 J 这是一个与卡特西亚人有关的规模因素 自然协调 $dx = Jd\xi$.

$$J(\xi) = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\underbrace{\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi-1) & \frac{1}{2}(2\xi+1) & -2\xi \end{array} \rfloor}_{\frac{d_N}{d_\xi}} \left\{ \begin{array}{c} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{array} \right\}}_{\frac{d_x}{d_\xi}}$$

13 我们可以重写 eq。51.3 如

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \underbrace{\frac{d\xi}{dx}}_{J^{-1}} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi}$$

和 The **B** 因此, 矩阵是通过替换为 Eq 获得的。51.2

$$\lfloor \mathbf{B}(\xi) \rfloor = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi}\lfloor \mathbf{N} \rfloor = \frac{1}{J}\lfloor \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}(2\xi-1) & \frac{1}{2}(2\xi+1) & -2\xi \end{array} \rfloor$$

14 区别区域是

$$d\Omega = Adx = AJd\xi$$

15 替换, 元素密度矩阵最终获得来自 EQ。50.12

$$\mathbf{K}_e(\xi) = \int_0^L \mathbf{B}^T(\xi) AE\mathbf{B}(\xi) dx = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(\xi) AE\mathbf{B}(\xi) J(\xi) d\xi$$

16 我们观察到这 **B** 一般来说, 它包含 ξ 双方的条款数字和名称, 因此表达不能分析转换。除此之外, 整合的限制现在是从 -1 到 +1, 我们将稍后看到如何数字化整合它。

51.2.2 四方 (q4) • 详细 表述

17 协调和转移是由

$$\begin{array}{rclrcl} x &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{x}_i; & y &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{y}_i \\ u &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{u}_i; & v &=& \sum N_i(\xi,\eta)\overline{v}_i \end{array} \tag{51.4}$$

在那里, 形状函数在 Eq 中衍生。49.12.

18 应变 位移 关系是由

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}}_{\mathbf{u}} \tag{51.5}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

但是, 这些转移可以从 Eq. 51.4

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right\}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) \end{array}\right]}_{\mathbf{N}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array}\right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \tag{51.6}$$

19 合并 eq。51.5 和 51.6 收益

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{N}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \\ \left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(\xi,\eta) \\ \varepsilon_{yy}(\xi,\eta) \\ \gamma_{xy}(\xi,\eta) \end{array}\right\} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial x} \end{array}\right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{N}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array}\right\}}_{\overline{\mathbf{u}}} \\ &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{array}\right]}_{\mathbf{B}} \left\{\begin{array}{c} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_1 \\ \hline \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \hline \overline{u}_3 \\ \overline{v}_3 \\ \hline \overline{u}_4 \\ \overline{v}_4 \end{array}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{4} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array}\right]}_{\mathbf{J}^{-1}} \end{aligned} \tag{51.7, 51.8}$$

20 考虑到区域协调组 ξ,η 相应的全球一 x,y 连锁规则将提供

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array}\right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array}\right]}_{\mathbf{J}} \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array}\right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array}\right\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这个最后的方程式是获得所有将进入内部的组件的关键。**B** 矩阵.

21 扩展雅各比的定义

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial\xi}\\ \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial\eta}\end{array}\right\} &= \underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{array}\right]}_{\mathbf{J}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\} = \sum_{i=1}^{4}\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial\xi}\overline{y}_i\\ \frac{\partial N_i}{\partial\eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial\eta}\overline{y}_i\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\}\\ &= \left[\begin{array}{cccc}\frac{\partial N_1}{\partial\xi} & \frac{\partial N_2}{\partial\xi} & \frac{\partial N_3}{\partial\xi} & \frac{\partial N_4}{\partial\xi}\\ \frac{\partial N_1}{\partial\eta} & \frac{\partial N_2}{\partial\eta} & \frac{\partial N_3}{\partial\eta} & \frac{\partial N_4}{\partial\eta}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\overline{x}_1 & \overline{y}_1\\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2\\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3\\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\}\\ &= \underbrace{\frac{1}{4}\left[\begin{array}{cccc}-(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta)\\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\overline{x}_1 & \overline{y}_1\\ \overline{x}_2 & \overline{y}_2\\ \overline{x}_3 & \overline{y}_3\\ \overline{x}_4 & \overline{y}_4\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\end{array}\right\}}_{\mathbf{J}}\end{aligned} \tag{51.9}$$

22 回到雅各比

$$\mathbf{J}^{-1}\overset{\text{def}}{=}\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial x}\\ \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{array}\right] = \frac{1}{\det\mathbf{J}}\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial y}{\partial\eta} & -\frac{\partial y}{\partial\xi}\\ -\frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\xi}\end{array}\right] = \frac{1}{\det\mathbf{J}}\sum_{i=1}^{4}\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\overline{y}_i & -\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\overline{y}_i\\ -\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\overline{x}_i & \frac{\partial N_i}{\partial\xi}\overline{x}_i\end{array}\right]$$

23 从计算中, 如果 ξ 和 η 是某种意志性曲线坐标, 图 51.4, 然后

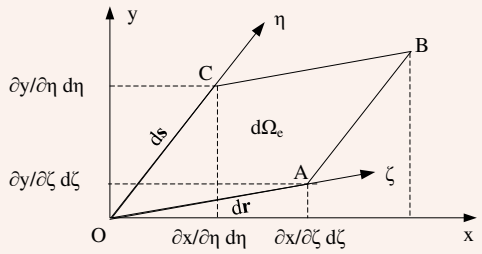


图 51.4: 曲线协调系统中的单元差异

$$d\mathbf{r} = \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial\xi}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi}\end{array}\right\}d\xi \quad\text{and}\quad d\mathbf{s} = \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{array}\right\}\mathrm{d}\eta$$

是指向坦克的 vectors $\xi =$ 不断, 和 $\eta =$ 永久性相应。

24 從 向量 algebra, 兩個 vector 的交叉產品在飞机 x-y, 图 51.5 是

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

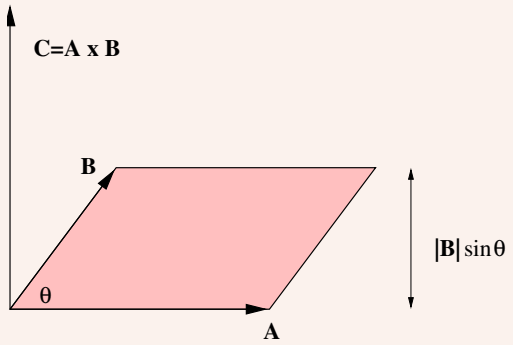


图 51.5: 二重 vector 交叉产品

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{A}\times\mathbf{B}\\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\mathbf{k}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & 0\\ B_x & B_y & 0\end{vmatrix} = \underbrace{(A_xB_y - B_xA_y)}_{\text{Area}}\mathbf{k}\\ |\mathbf{C}| &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\end{aligned}$$

因此, 区别区域 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于长度, 等于向量 由交叉产品产生的 $d\mathbf{r}d\mathbf{s}$ 等同于

$$\mathrm{d}(area) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{51.10}$$

[25] 最终确定 单元 刚度矩阵 从

$$\mathbf{k}_{8\times8} = \int\int \mathbf{B}^T_{8\times3}\mathbf{D}_{3x3}\mathbf{B}_{3\times8}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}t\det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

[26] 评估 单元 刚度矩阵 的内容包括 dA. 如果我们考虑无限的 单元, 长度 dr 和 ds, 在单元的垂直上, 它有单元的边界。就像它的侧面。然后, 从 EQ。51.10

$$dA = \mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\sin\theta$$

但是, 从 EQ。51.10 我们有 $dA = \det\mathbf{J}\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta$ 这样

$$\det\mathbf{J} = \frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta}\sin\theta$$

因此, 我们注意到如果 θ 小或近 180° 然后, 它 $\mathbf{J}$ 它会很小, 如果角度大于 180°, 行列式是负面 (意味着负密度, 通常会导致 FE 分析中的错误/停止。).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

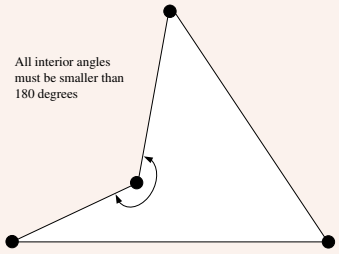


图 51.6: 单元 有可能的独特雅各比

27 一般来说, 建议 $30^o < \theta < 150^o$.

28 雅各比的反向存在, 只要单元不存在。很多被扭曲或背叛自己, 图 51.6 在这些情况下, 坐标之间没有独特的关系。

29 可以很容易地表明, 对于平行图, 雅各比语是恒定的, 而对于非平行文则不是。

30 总体而言 **J** 是单元扭曲量与 2x2 平方一的指标。有时它是恒定的, 有时它在单元中有所不同。

51.2.3 三角形 单元

51.2.3.1 T3 三角形

31 这个三角形的形状函数被给予在 §49.2.2.2.

32 和 **B** 矩阵 从:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]}_{\mathbf{L}} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{array} \right\} \tag{51.11}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{array}\right\} &= \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3)\\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3)\\ \varepsilon_{xy}(L_1,L_2,L_3)\end{array}\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{6}\underbrace{\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}}\left\{\begin{array}{c}\overline{\mathbf{u}}_i\\ \overline{\mathbf{v}}_i\end{array}\right\}\\ &= \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{cccccc}\lfloor\frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x}\rfloor[\mathbf{N}_L] & & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & & \lfloor\frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y}\rfloor[\mathbf{N}_L]\\ \lfloor\frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y}\rfloor[\mathbf{N}_L] & \lfloor\frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x}\rfloor[\mathbf{N}_L]\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\overline{\mathbf{u}}\\ \overline{\mathbf{v}}\end{array}\right\}\end{aligned}$$

哪里

$$\begin{aligned}[\mathbf{N}_L] &= \left[\begin{array}{cccccc}\frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \frac{\partial N_3}{\partial L_1} & \frac{\partial N_4}{\partial L_1} & \frac{\partial N_5}{\partial L_1} & \frac{\partial N_6}{\partial L_1}\\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \frac{\partial N_3}{\partial L_2} & \frac{\partial N_4}{\partial L_2} & \frac{\partial N_5}{\partial L_2} & \frac{\partial N_6}{\partial L_2}\\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \frac{\partial N_3}{\partial L_3} & \frac{\partial N_4}{\partial L_3} & \frac{\partial N_5}{\partial L_3} & \frac{\partial N_6}{\partial L_3}\end{array}\right]\\ &= \left[\begin{array}{cccccc}4L_1-1 & 0 & 0 & 4L_2 & 0 & 4L_3\\ 0 & 4L_2-1 & 0 & 4L_1 & 4L_3 & 0\\ 0 & 0 & 4L_3-1 & 0 & 4L_2 & 4L_1\end{array}\right]\end{aligned}$$

[33] 此前的平衡可以进一步简化。

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc}\mathbf{N}_x & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_y\\ \mathbf{N}_y & \mathbf{N}_x\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\overline{\mathbf{u}}\\ \overline{\mathbf{v}}\end{array}\right\}$$

哪里

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{N}_x^T|\mathbf{N}_y^T\right] &= \frac{1}{2A}\left[\begin{array}{c|c}\frac{\partial L_1}{\partial x}(4L_1-1) & \frac{\partial L_1}{\partial y}(4L_1-1)\\ \frac{\partial L_2}{\partial x}(4L_2-1) & \frac{\partial L_2}{\partial y}(4L_2-1)\\ \frac{\partial L_3}{\partial x}(4L_3-1) & \frac{\partial L_3}{\partial y}(4L_3-1)\\ 4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_2+4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_1 & 4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_2+4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_1\\ 4\frac{\partial L_2}{\partial x}L_3+4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_2 & 4\frac{\partial L_2}{\partial y}L_3+4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_2\\ 4\frac{\partial L_3}{\partial x}L_1+4\frac{\partial L_1}{\partial x}L_3 & 4\frac{\partial L_3}{\partial y}L_1+4\frac{\partial L_1}{\partial y}L_3\end{array}\right]\\ \lfloor\overline{\mathbf{u}}\quad\overline{\mathbf{v}}\rfloor &= \lfloor\overline{u}_1\quad\overline{u}_2\quad\overline{u}_3\quad\overline{u}_4\quad\overline{u}_5\quad\overline{u}_6\,|\,\overline{v}_1\quad\overline{v}_2\quad\overline{v}_3\quad\overline{v}_4\quad\overline{v}_5\quad\overline{v}_6\rfloor\end{aligned}$$

[34] 此表达式以分析方式集成, 使用 Eq。49.1. 一般来说, 一个以色列数值积分是偏好 (部分 51.2.3).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

51.2.3.2 T6 三角形

35 对于六个节点三角, 变量的部分衍生物 ϕ 至于 x 和 y 可以表达为, (Felippa, 2000)

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial x} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \\ \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right\} \tag{51.12}$$

36 两侧转移

$$\lfloor \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \quad \sum_{i=1}^{6} \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \rfloor \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \lfloor \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \rfloor$$

37 我们现在做 $\phi \equiv 1, x,$ 和 y:

$$\left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial 1}{\partial x} & \frac{\partial 1}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{array} \right]$$

38 但 $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1,$ 和 $\frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ since x and y 是独立的协调。除此之外, 第一行中的所有输入均等于一个连续的 (3 为 T6 单元), 由于相应的右手侧, 这个行可以正常化, 为此元素提供雅各比式矩阵。

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} x_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_1} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_2} & \sum_{i=1}^{6} y_i \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \end{array} \right]}_{\mathbf{J}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

39 从桌子上取代 49.7 我们获得

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ x_1(4L_1 - 1) + 4x_4L_2 + 4x_6L_3 & x_2(4L_2 - 1) + 4x_5L_3 + 4x_4L_1 & x_3(4L_3 - 1) + 4x_6L_1 + 4x_5L_2 \\ y_1(4L_1 - 1) + 4y_4L_2 + 4y_6L_3 & y_2(4L_2 - 1) + 4y_5L_3 + 4y_4L_1 & y_3(4L_3 - 1) + 4y_6L_1 + 4y_5L_2 \end{array} \right]}_{\mathbf{J}}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_1}{\partial y} \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} \\ \frac{\partial L_3}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

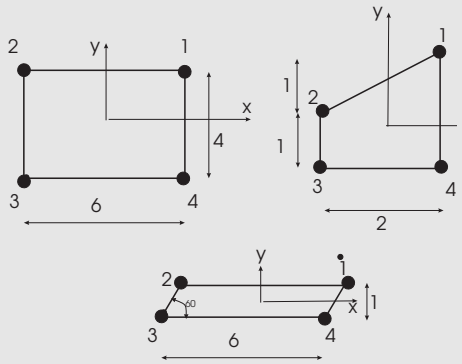
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[40] 接下来, 我们转换了矩阵并解决了六个三角形坐标的部分和替代在 Eq。51.12 这将使我们能够确定 **B** 矩阵 在 Eq. 51.7

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}(L_1,L_2,L_3)\\ \varepsilon_{yy}(L_1,L_2,L_3)\\ \gamma_{xy}(L_1,L_2,L_3)\end{array}\right\}=\underbrace{\sum_{i=1}^{6}\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(L_1,L_2,L_3)}{\partial x}\end{array}\right]}_{\mathbf{B}=\mathbf{LN}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\overline{u}_i\\ \overline{v}_i\end{array}\right\}}_{\overline{\mathbf{u}}}$$

51.2.4 例题 51.1: 雅各比亚运营商

例子从
我们正在寻找雅各比亚运营商 **J** 接近的 2 次元单元. 这些协调是由 Eq 提供的。51.1 形状的功能由 EQ。49.12 雅各比人, 以 Eq。51.9.



单元 1:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{x}_3+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{x}_4+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{x}_1+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{x}_2\\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3)+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-3)\\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\overline{y}_3+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\overline{y}_4+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\overline{y}_1+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\overline{y}_2\\ &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2)+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2)+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2)\\ [\mathbf{J}] &= \left[\begin{array}{cc}3 & 0\\ 0 & 2\end{array}\right]\end{aligned}$$

我们注意到这 $A=24=\det[J](2\times 2)=6\times 4$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

单元 2:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-(3+1/(2\sqrt{3}))) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(3-1/2\sqrt{3})) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(3+1/2\sqrt{3})) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-(3-1/2\sqrt{3}))) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-2) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(2) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(2) \\ [\mathbf{J}] &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

单元 3:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1) + \frac{1}{4}(1-\xi)(-1) \\ y &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-3/4) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(5/4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1/4) \\ [\mathbf{J}] &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & (1+\eta) \\ 0 & (3+\xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

51.3 数值积分

41 理解 数值积分 不僅是必要的適當整合单元的以色列参数家族, 但也有助于了解重量残留方法 (章节 52),

42 以色列元素的定义的一个关键方面是数字可以表达的集成, 如

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

在实践中, 我们通过数字化进行整合。

$$\int \mathbf{F}(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_i \mathbf{W}_i\mathbf{F}(\xi_i) + \mathbf{R}_n \quad \text{or} \quad \int\int \mathbf{F}(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_i\sum_j \mathbf{W}_{ij}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j) + \mathbf{R}_n$$

在那里, 集会扩展到所有 i 和 j, 和 $\mathbf{W}_i$, $\mathbf{W}_{ij}$ 重量因素, 以及 $\mathbf{F}(\xi_i)$ 和 $\mathbf{F}(\xi_i,\eta_j)$ are the matrices evaluated at the points specified in the arguments.

43 矩阵 $\mathbf{R}_n$ 是错误矩阵, 一般不计算。

44 如上所示, $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T.\mathbf{D}.\mathbf{B}$ 為終端 单元 刚度矩阵评估, 每个 单元 是单独集成。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

45 整合的 $\int_a^b F(\xi)d\xi$ 基本上是通过的。多元化 $P(\xi)$ 通过给予的价值观 $F(\xi)$ 然后使用 $\int_a^b P(\xi)d\xi$ 作为一个接近。

$$\int_a^b F(\xi)d\xi \approx \int_a^b P(\xi)d\xi$$

46 使用 $P(\xi) = F(\xi)$ 在 n 点, 并记住属性在 Lagrangian Interpolation 功能中, 我们可以

$$\begin{aligned} P(\xi) &= l_1(\xi)F(\xi_1) + l_2(\xi)F(\xi_2) + \cdots + l_n(\xi)F(\xi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i) \end{aligned}$$

要注意的是, 在 $\xi = \xi_i$ $l_i = 1$ 而所有其他 $l_i = 0$.

51.3.1 纽顿评论

47 在纽顿 - 科特的整合中, 假设样品点是 **平等的空间**, 图 51.7, 因此, 我们定义

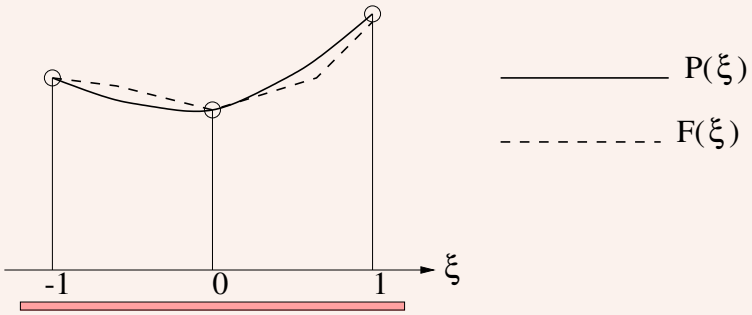


图 51.7: 纽顿评论 数值积分

$$\int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} l_i(\xi)F(\xi_i)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi F(\xi_i) \tag{51.13}$$

或

$$\begin{array}{r|rcl} \text{Approximation} & \int_a^b P(\xi)\mathrm{d}\xi & = & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{Weights} & W_i^{(n)} & = & \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = (b-a)C_i^{(n)} \end{array}$$

哪里 $C_i^{(n)}$ 是的, "重量" 关于 The **纽顿 · 科特四角形**数值积分 與 n 平等的样品点。

48 Newton-Cotes 常见, 并显示相应的提醒在桌子上 51.1, (Bathe, 1996)

49 可以证明, 这种方法允许准确的整合序列聚合物 $n-1$, 而如果 n 这是奇怪的, 然后我们可以准确地整合顺序的多元化。n. 因此, 我们一般使用的奇怪价值观 n,

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 51.1: Newton-Cotes 四角形公式的重量

n	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	错误
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$10^{-1}(b-a)^3F^{II}(\xi)$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$10^{-3}(b-a)^5F^{IV}(\xi)$
5	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	$10^{-6}(b-a)^7F^{VI}(\xi)$

50 为 $n=2$ 超越 $[-1,1]$ 我们选择平等的空间点 $\xi_1=-1$ 和 $\xi_2=1$ 要评估 $\int_{-1}^{1}P(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{2} l_i(\xi)F(\xi_i)\\
l_1(\xi) &= \frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=\frac{1}{2}(1-\xi)\\
l_2(\xi) &= \frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}=\frac{1}{2}(1+\xi)\\
W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\xi)\mathrm{d}\xi=1\\
\int_{-1}^{1}F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1}P(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{2}W_i^{(2)}F(\xi_i)=F(-1)+F(1)
\end{aligned}$$

哪个是 **特拉佩西亚规则**

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

51 为 $n = 3$ 超越 $[-1,1]$ 我们选择平等的空间点 $\xi_1 = -1$ $\xi_2 = 0$, 和 $\xi_3 = 1$ 为了评估 $\int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= \sum_{i=1}^{3} l_i(\xi)F(\xi_i) \\
l_1(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\
l_2(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = -(1+\xi)(\xi-1) \\
l_3(\xi) &= \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\
W_1^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_1(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(\xi-1)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
W_2^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_2(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} -(1+\xi)(\xi-1)\mathrm{d}\xi = \frac{4}{3} \\
W_3^{(3)} &= \int_{-1}^{1} l_3(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \xi(1+\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{3} \\
\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi &\approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{3} W_i^{(3)}F(\xi_i) = \frac{1}{3}[F(-1)+4F(0)+F(1)]
\end{aligned}$$

什么是 **辛普森的规则**

51.3.2 Gauss-Legendre 四角形

52 在 Gauss-Legendre 四角形中, 点不是固定和平等的空间, 但被选为 **最佳准确性**.

53 我们又开始了

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)}F(\xi_i)$$

但是, 在这个表述 **两者** $W_i^{(n)}$ 和 ξ_i 未知的到目前为止还要确定。因此, 我们有一个总的 $2n$ 未知的。

54 集成点 $P(\xi_i) = F(\xi_i)$ 但是, 在中间表示, 差异可以表达为

$$F(\xi) = P(\xi) + \underbrace{\chi(\xi)(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \cdots)}_{0 \text{ at } \xi=\xi_i; i=1,2,\cdots,n}$$

因为我们希望左侧是完全相同的 $P(\xi)$ 在整合中点, 我们定义

$$\chi(\xi) = (\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)...(\xi-\xi_n)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

作为一个秩序的多元化 n 要在整合中平等到零点数 ξ_i.

55 β_i 应适当选择, 以消除差距。$F(\xi)$ 和 $P(\xi)$ 在中间点。

56 集成

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

最后期限分开

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi + \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi$$

57 破坏扩张的最后条款

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi \tag{51.14}$$

我们观察到右侧的第一个整体涉及多元性命令 $n-1$ 二、第二个整体是秩序的多元化。$2n-1$. 因此, 我们设置

$$\int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi = 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{51.15}$$

这将导致一组 n 同步秩序方程式 n 在条款中不知不觉者 $\xi_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$.

58 回到 EQ。51.14

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \int_{-1}^{1} P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i)$$

或

$$\begin{array}{r|rcl} \text{Approximation} & \int_{-1}^{1} F(\xi)\mathrm{d}\xi & \approx & \sum_{i=1}^{n} W_i^{(n)} F(\xi_i) \\ \text{Weights} & W_i^{(n)} & = & \int_{-1}^{1} l_i(\xi)\mathrm{d}\xi \\ \text{Gauss Points} & \int_{-1}^{1} \chi(\xi)\xi^j \mathrm{d}\xi & = & 0 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \end{array}$$

59 集成点 ξ_i 重量率 $W_i^{(n)}$ 是在桌子上提供 51.2, (Bathe, 1996)

51.3.2.1 传奇聚合物

60 解决方案 (Gauss 集成点) 与根相同的 A 传奇多元化定义为

$$\begin{array}{rcl} L_0(\xi) & = & 1 \\ L_1(\xi) & = & \xi \\ L_k(\xi) & = & \frac{2k-1}{k}\xi L_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k}\xi L_{k-2}(\xi) \qquad 2 \le k \le n \end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

表 51.2: 整合点和重量在间隔内为 gauss-quadrature 公式 $[-1,1]$

n	ξ_i	$W_i^{(n)}$	错误
1	0	2	$\frac{1}{3}F^{(2)}(\xi)$
2	$-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	1 1	$\frac{1}{135}F^{(4)}(\xi)$
3	$-\sqrt{3/5}$ 0 $\sqrt{3/5}$	5/9 8/9 5/9	$\frac{1}{15,750}F^{(6)}(\xi)$

和 The n Gauss 集成点由解决 $L_n(\xi)=0$ 因其根源 $\xi_i, i=0,1,\cdots,n-1$.

61 其次, 重量功能由

$$W_i^{(n)}=\frac{2(1-\xi_i^2)}{[nL_{n-1}(\xi_i)]^2}$$

51.3.2.2 Gauss-Legendre 四角形 $n=2$

62 首先, 我们要寻找一体化点。$n=2, \chi(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)$ 结果的方程式是

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\xi^0\mathrm{d}\xi &= 0\\ \int_{-1}^{1}(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\xi^1\mathrm{d}\xi &= 0\end{aligned}$$

通过整合, 我们得到了

$$\xi_1\xi_2=-\frac{1}{3}\quad\text{and}\quad\xi_1+\xi_2=0$$

因此

$$\xi_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\text{and}\quad\xi_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

重量因素是

$$\begin{aligned}W_i^{(n)} &= \int_{-1}^{1}l_i(\xi)\mathrm{d}\xi\\ W_1^{(2)} &= \int_{-1}^{1}\frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\mathrm{d}\xi=\frac{-2\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=1.0\\ W_2^{(2)} &= \int_{-1}^{1}\frac{\xi-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\mathrm{d}\xi=\frac{-2\xi_1}{\xi_1-\xi_2}=1.0\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

51.3.3 直角和普里斯姆地区

63 数值积分的 $F(\xi,\eta)$ 超越直角地区 $-1 \le \xi \le 1$, 和 $-1 \le \eta \le 1$ 它是通过选择 m 和 n (不要被混淆与聚合物的顺序) 集成点在 ξ 和 η 方向

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi.\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \approx \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W_i^{(m)} W_j^{(n)} F(\xi_i,\eta_j)$$

因此, 整合点的总数将是 $m \times n$, 图 51.8.

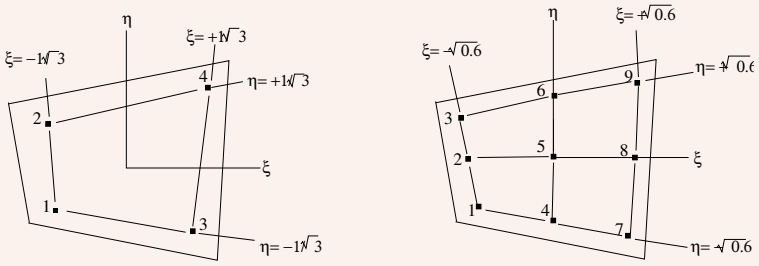


图 51.8: 盖斯传奇集成在表面上

51.3.4 三角区

64 对于三角形上方的数值积分则, 加斯点显示在图 51.9, 并提供相应的三角形坐标桌子上 51.3.

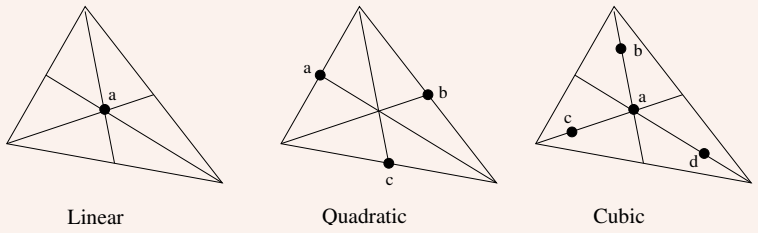


图 51.9: 数值积分 超越三角形

51.4 应力恢复; 节点压力

65 压力被评估

$$\sigma = \mathbf{DB}\bar{\mathbf{u}}$$

一般来说, 值得一提的是在单元 节点。但是, 应该记住以不同 单元 的特定节点计算的压力不需要相同 (因为压力不需要基于转移的终端元素格式). 因此, 某种类型的应力在节点的平均值可能是可取的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 51.3: 数值积分 的坐标和重量在三角形上

命令	错误	点数	三角形 协调。	重量
线性	$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
四角形		a	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	$\frac{1}{3}$
	$R = O(h^3)$	b	$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},$	$\frac{1}{3}$
		c	$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
库比		a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
	$R = O(h^4)$	b	$0.6, 0.2, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		c	$0.2, 0.6, 0.2$	$\frac{25}{48}$
		d	$0.2, 0.2, 0.6$	$\frac{25}{48}$

66 在等参单元表述中, 节点压力非常低。最好的结果在加斯点获得。

67 要评估节点压力, 有两种方法:

1. 评估 σ 直接在节点上 ($\xi = \eta = \pm 1$)
2. 评估加斯点的压力, 然后抽出。

第二种方法带来了更好的结果。

68 来自加斯点的抽象将通过图 51.10 四个节点的以色列方形方形。我們將一 “内部” 单元 与

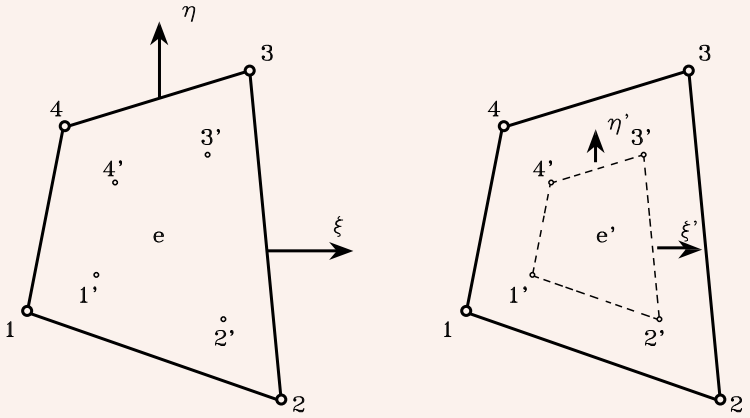


图 51.10: 4 节点四节点加斯点 (Felippa, 1999)

其自己的节点和自然协调 ξ' 和 η' 与此相关的 ξ 和 η 通过桌子 51.4 或

$$\xi' = \sqrt{3}\xi \qquad \eta' = \sqrt{3}\eta$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 51.4: 二元四方节点的自然协调

角落诺德	ξ	η	ξ'	η'	盖斯诺德	ξ	η	ξ'	η'
1	-1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$1'$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	-1	-1
2	$+1$	-1	$+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$2'$	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$+1$	-1
3	$+1$	$+1$	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	$3'$	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	$+1$	$+1$
4	-1	$+1$	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$	$4'$	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	-1	$+1$

因此, 任何规模的数量 σ (如如 σ_{xx}) 其价值 σ'_i 已知在 Gauss 单元角可以通过常见的双向形状功能进行交换, 现在表达至于 ξ' 和 η'

$$\sigma(\xi',\eta') = \lfloor\ N_1^{e'}\quad N_2^{e'}\quad N_3^{e'}\quad N_4^{e'}\ \rfloor \left\{\begin{array}{c}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\end{array}\right\}$$

哪里

$$\begin{aligned} N_1^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1-\eta')\\ N_2^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1-\eta')\\ N_3^{e'} &= \frac{1}{4}(1+\xi')(1+\eta')\\ N_4^{e'} &= \frac{1}{4}(1-\xi')(1+\eta') \end{aligned}$$

同样, 我们可以 **超越** σ 到 单元 的角落。第 1 章 换了我 ξ' 和 η' 在以前的方程式中, $-\sqrt{3}$. 为四人做這事角落, 我们得到了

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc} 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\end{array}\right\}$$

如预期, 每个行的总额相当于一个, 而压力我们取代 σ 由 σ_{xx}, σ_{yy}, 和 τ_{xy}

[69] 正如我们所知道的, 不同节点压力将从附近获得单元. 为了获得一个单一的价值, 我们也可以

1. 不重的所有节点压力平均。
2. 基于相对压力的节点平均重量单元的尺寸根据其区域确定它 (J).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

51.5 Nodal 等级负载

70 在终端 单元表述 中, 所有负载都必须被替换为一 “能量等级” 点数 荷载。

71 我们将考虑下列情况: nodal 荷载, 重力, 拖动, 和热量。

72 首先, 让我们再写一遍。48.32 关于节点值

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^t \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{b} d\Omega$$
$$\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{t}} d\Gamma$$

或

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t \hat{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{51.16}$$

51.5.1 重力 荷载

73 重力等于体力/单位量。在固体中行动, 以重力轴的方向, 图 51.11, (它不必与任何一方的

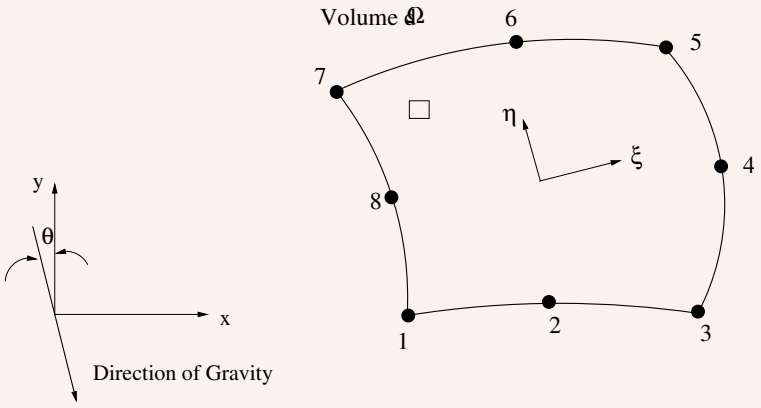


图 51.11: 重力 加载

协调轴相匹配。).

$$\begin{aligned} dG_x &= \rho g d\Omega \sin\theta \\ dG_y &= -\rho g d\Omega \cos\theta \end{aligned}$$

哪里 g 是重力加速度和 ρ 是 质量密度.

74 来自 EQ。51.16

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们获得

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \int_{\Omega_e} N_i \rho g \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} d\Omega$$

或节点的能量等级节点力量 i 是

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{xi} \\ P_{yi} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{ngaus} \sum_{k=1}^{ngaus} \rho g t \left\{ \begin{array}{c} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{array} \right\} N_i(\xi_j \eta_k) W_j W_k \mathbf{detJ}(\xi_j, \eta_k)$$

75 角度 θ 是要从积极的对时测量。y 轴。

51.5.2 特拉克 荷载

76 任何 单元 边缘都可以在一个正常的单位长度上有 1 分布荷载指示的方向。

77 分布荷载的变量是多元化和其订单不得超过 单元 的订单。为了一致性, 负载的节点也被列为反时。

78 首先, 我们要确定分配货物的组成部分。x 和 y 指向, 考虑到在增加的力量长度 dS 加载边缘, 图 51.12:

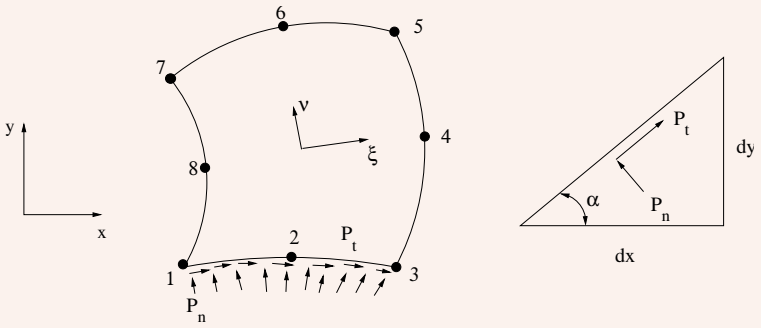


图 51.12: 荷载 以色列式的 单元

$$\begin{array}{rcccl} dP_x & = & (p_t dS\cos\theta - p_n dS\sin\theta) & = & (p_t \mathrm{d}x - p_n \mathrm{d}y) \\ dP_y & = & (p_n dS\cos\theta - p_t dS\sin\theta) & = & (p_n \mathrm{d}x - p_t \mathrm{d}y) \end{array}$$

79 但是, 由于整合必须在自然协调方面进行:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi \qquad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi$$

替代

$$\begin{array}{rcl} dP_x & = & \left(p_t \dfrac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \\ dP_y & = & \left(p_n \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

80 来自 EQ。51.16 我们有

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} \mathrm{d}\Gamma$$

这样

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \\ P_{yi} &= \int_{\Gamma_t} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

整合再次进行数字化 (沿着边缘) 和以节点为能量等级的节点力量 i 是

$$\begin{aligned} P_{xi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_t \frac{\partial x}{\partial \xi} - p_n \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j \\ P_{yi} &= \sum_{j=1}^{ngaus} N_i \left(p_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + p_t \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) W_j \end{aligned}$$

在那里, 整合在边缘上进行数字化。要注意的是 $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ 被从雅各比人中取出。矩阵.

81 请注意, 由于整合必须沿着边缘进行, 我们使用了 ξ.

82 接近 单元, 图 51.13.

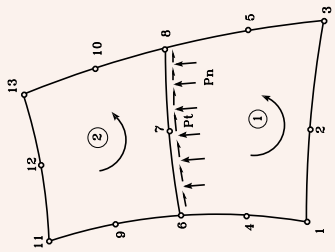


图 51.13: 拖拉 荷载 在相容的以色列分数 单元

51.5.3 初始压力/压力; 热 荷载

83 我们区分两个案例:

飞行器 应力 哪个是最简单的

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{xx} &= \alpha \Delta T \\ \varepsilon^0_{yy} &= \alpha \Delta T \\ \gamma^0_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

飞行器 应变 我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E}+\alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= -\frac{\nu\sigma^0_{zz}}{E}+\alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \varepsilon^0_{zz} &= \frac{\sigma^0_{zz}}{E}+\alpha\Delta T=0\end{aligned}$$

使用最后一句话来消除 σ^0_{zz} 我们得到了

$$\begin{aligned}\varepsilon^0_{xx} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \varepsilon^0_{yy} &= (1+\nu)\alpha\Delta T\\ \gamma^0_{xy} &= 0\\ \sigma^0_{zz} &= -E\alpha\Delta T\end{aligned}$$

84 此时, 这些表达式被替换为 Eq. 50.13

$$\mathbf{f}_{0_e}=\int_{\Omega_e}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega_t}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0\mathrm{d}\Omega$$

以数字化整合。

51.5.4 集成命令

51.5.4.1 完整的整合

85 对于数字化整合的单元, 一个关键问题是的, **命令** 以 数值积分 的。如果整合制度也是

高: 它肯定会导致一个准确的表述, 但是, 它可能是计算机上昂贵的。

低: 也许我们有缺点。

因此, 我们应该正确选择数值四角形的顺序。

86 我们记得这

1. 我們要整合 $\mathbf{F}=\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\mathrm{detJ}$.
2. 雅各比语仅为平行图的常态。
3. 加西方四角形, 与 n 点数正确整合一个序列的多元化 $2n-1$ (而为纽顿评论, 这是 $n+1$).

因此, 对于双方平行图 单元, $\mathbf{F}$ 是多元性功能, 顺序 2, in 自然协调的条件 ξ 和 η 可以是具体的由集成 $n=2$ 点数 (伊。2×2).

87 根据类似的论点, 必须集成四方性方位。三个点 (F 第 4 章 现在, 就是这样 $2\times 3-1=5$).

88 这些接近的命令仅适用于平行图, 因为边缘变得倾斜, 然后错误增加。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

51.5.4.2 减少整合

89 减少整合, 即使用比需要的加斯点少准确的整合, 会导致单元缓解, 因为更高的顺序多元术语可能会在低顺序规则的点消失。

90 在灵活的身体中,FE 解决方案只允许这些转移。它可以由形状功能的线性组合代表。一般来说, 正确的 位移 字段将与假设的 位移 不同, 在换句话说, 形状功能阻止结构扭曲它想要的方式 [1].

91 由于表述的坚定性太固, (Eq. 50.15), 通过减少 数值 引入的软化整合是有益的。

92 推荐的集成订单为 quadrilaterla 单元在桌子上展示 51.5.

表 51.5: 四方元素的完整和缩小数字集成

.

单元	可靠的整合	减少整合
四节点	2x2	-
四节曲折	2x2	-
八节点	3x3	2x2
八点破坏	3x3	2x2
九节	3x3	2x2
9 点 破坏	3x3	2x2

93 如果 单元 是人工缓解的, 那么将有 **追逐零能源模式**, 而刚度矩阵将是**排名不足**, 即其排名低于单元的数字 d.o.f. minus 硬体模式的数量。

94 二元元素的独立转移模式是顯示在 图 51.14. 第一三种模式是固体运动, 下三个模式是连

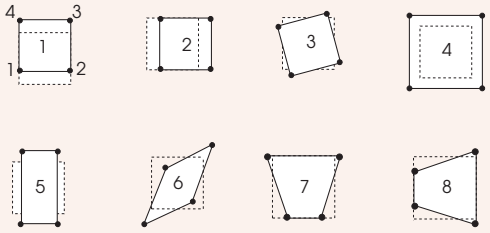


图 51.14: 二进制元素的独立转移模式

续的。紧张, 最后两种是旋转模式。

95 因为单元不提供任何抵抗的所有冲击零能量模式 (可在线性组合中使用。与其他模式描述 位移 字段) 然后, 效果减少的整合是缓解 FE 模型的硬度。

96 如果我们采取减少的集成方案, 我们将彻底减少计算力, 但我们将失去一些非常特殊的位移方法的特性, 即:A) 限制和 b) 单调的对立, 向一个准确的解决方案。

[1]这类似于编写一系列 Fourrier, 其中否则, 它可能是对一组物理物体的准确替代品。观察。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

97 与减少融入有关的问题的描述是如下: 单元

Q4 对于一个点的整合, 加斯点在中心。在一个单元的中心, 在旋转下 $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$, accordingly $U = 0$ for the corresponding modes 4 and 5 in 图 51.14 这些激动人心的模式会消失, 如果 $n = 2$.

Q9 位移 已提供 $u = 3\xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2$ 和 $v = 0$. 如果 单元 集成为 2x2 分, 在 $\xi = \eta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 可以证明, 在这些方面线条是零, 相应的机制, 或 **时光**顯示在 图 51.15.

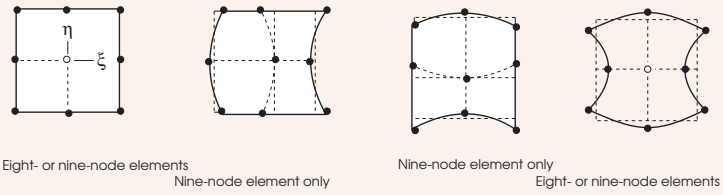


图 51.15: Hourglas 模式在低集成四方 单元 中

51.5.4.3 选择性减少融入

98 在选择性集成中, 我们将不同 应变 术语与各式各样的集成命令。

99 更多关于这项技术在下一章。

51.6 寄生虫/不兼容的单元

51.6.1 Q4 问题

100 二进制单元的形状功能由 Eq 提供。49.12

$$\begin{array}{rclrcl} N_1(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); & N_2(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta); \\ N_3(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); & N_4(\xi,\eta) &=& \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{array} \tag{51.17}$$

哪里 $\xi = x/a$ 和 $\eta = y/b$.

101 设置移动字段 Fig。51.16 二元单元和正确的移行和线条被给予桌子上 51.6.

102 从这个表中, 我们注意到寄生虫的相关术语有助于应变能 存储在 单元 (相同的就是 $\mathbf{P}^T.\mathbf{d}$). 因此, 对于一个被强加的位移, 力量将更大和 $M_1 > M_2$.

103 计算两个元素的电压能量的比例, 我们得到了

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1+\nu}\left[\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

因此, 如 a/b 增加, 单元 “锁” (一个将是在后章中解释).

104 因此, 不需要的页面 应变 产生 $M_1 > M_2$ 被称为**寄生虫** *Shear*.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

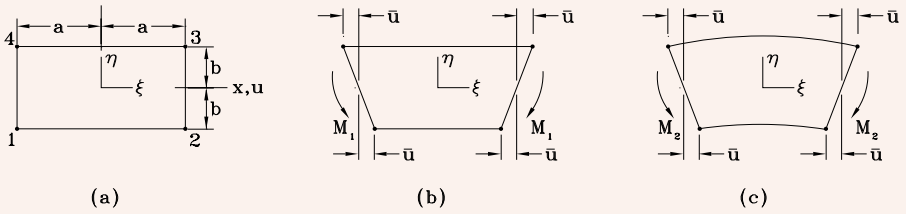


图 51.16: 受弯矩形双线性单元：双线性单元与正确几何形状

表 51.6: 双重和准确的转移/流动

	双重 单元	准确 表述
u	$\xi\eta\overline{u}$	$\xi\eta\overline{u}$
v	0	$(1-\xi^2)\frac{a\overline{u}}{2b}+(1-\eta^2)\nu\frac{b\overline{u}}{2a}$
ε_{xx}	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$	$\eta\frac{\overline{u}}{a}$
ε_{yy}	0	$-\nu\eta\frac{\overline{u}}{a}$
γ_{xy}	$\xi\frac{\overline{u}}{b}$	0

51.6.2 Q6 答案

105 在表中比较 位移 字段 51.6 we 注意, 二进制单元错误的准确解决方案通过忽略位移 模式与 $(1-\xi^2)$ 和 $(1-\eta^2)$.

106 我们可以通过添加错过的模式来弥补这种情况。内部节点

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i\overline{u}_i+(1-\xi^2)a_1+(1-\eta^2)a_2 \\ v &= \sum N_i\overline{v}_i+(1-\xi^2)a_3+(1-\eta^2)a_4 \end{aligned}$$

哪里是 N_i 由 EQ 提供。51.17, 和 a_i 是无奈的 DF 单元 现在有 6 自由度, 因此, 单元 有提及 Q6 等。

107 和 **B** 矩阵 必须相应调整其次是表述, 其次的 d.o.f。a_i 被排除通过康德纳 (塞克斯 46.1).

108 Q6 单元 是 **不兼容** (或不符合) 由于其四方分布 u 或 v 只在边缘定义的兩個節點, 图 51.17.

109 在这种情况下, 软化计算了内在的过度。標準假設 位移 表述。

51.6.3 Qm6, 进一步改进

110 可以证明,Q6 单元 只通过修复测试它是直角的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

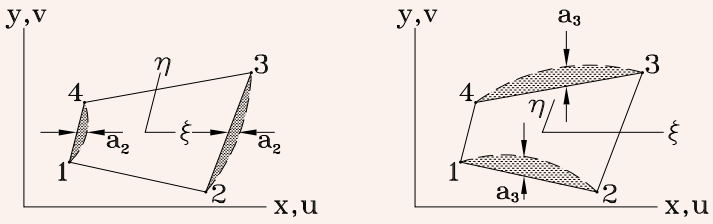


图 51.17: 与 q6 单元 不兼容模式相关的移动

111 为了弥补这种缺陷, 我们考虑到这一部分的 **B** 矩阵 与无节点 d.o.f. 相关, 并标记它 $\mathbf{B}_a$, 然后相应的连续节点负载 vector

$$\mathbf{p}_a^e = -\int_\Omega^e \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega$$

哪里 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 表明由标准 单元 引起的初始压力表述 与 d_r 以 D.O.F 的节点

112 因为标准 等参单元 通过 Patch 测试, 当 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 是永恒的, 没有此附加 荷载 与 a_i 然后, $\mathbf{p}_a^e$ 它也应该是零的永久性。$\boldsymbol{\sigma}_0$ 或

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}_a^T t \det\mathbf{J} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0$$

对于一般 (非直角 单元) 这个方程式不满意。然后,Patch 测试失败了。

113 可以用艺术来修复这种 $\mathbf{B}_a$ 和整合使用 $\mathbf{J}_0$ 雅各比的评估 $\xi = \eta = 0$ 更好在加斯四角点, 我们使用相应的 t_0 对于厚度。

114 当这样一个操作进行时, 结果的 单元 被称为 QM6 和它工作几乎相同的四方 单元 如果直角, 它比二进制单元更准确。

115 压力与所有 d.o.f 的计算, 包括 a_i. 如果单元节点负载, 则获得更好的结果 $\mathbf{p}^e$ 这就是与不兼容模式相关的设置为零, 在恢复相关模式时二、f。a_i (接下来的 condensation).

51.7 旋转 D.O.F

116 **打破** *D.O.F*。是角节点的旋转。在飞机的背景下单元, 它们与边缘的偏见转移形状有关, 图 51.18. 它们在被定义为一个平板 单元 的组合。因此, 单元可以模型灵活性和膜作用。

117 接收 转角 $\overline{\omega}_i$ 和 $\overline{\omega}_j$ 在节点 i 和 j 由单元 长度的一面 L, 一个想象的梁的最后时刻将是

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{2EI}{L}\left(2\overline{\omega}_i + \overline{\omega}_j\right) \\ M_j &= \frac{2EI}{L}\left(\overline{\omega}_i + 2\overline{\omega}_j\right) \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

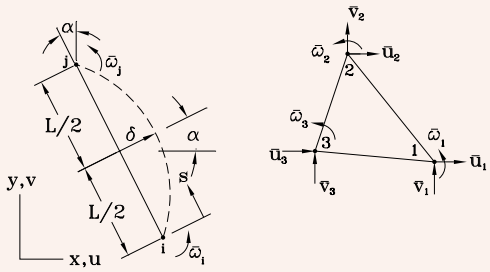


图 51.18: 由 drilling d.o.f 引发的副转移

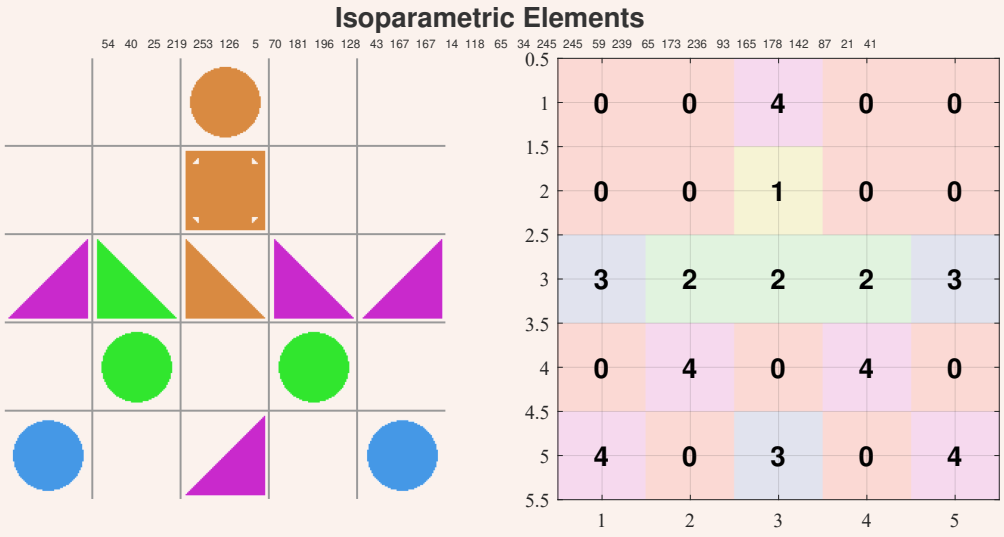
因此, 从 $M = M_i + (M_j - M_i)\frac{x}{L}$ 我们可以使用的强力方法解决中侧边缘正常 位移

$$\delta = \frac{L}{8}(\overline{\omega}_j - \overline{\omega}_i)$$

118 因此, 位移的边缘由两个部分引起: 翻译和帕拉布利克的破坏:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \frac{L-s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \end{array} \right\} + \frac{s}{L} \left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{array} \right\} + \frac{L-s}{2L} s(\omega_j - \omega_i) \left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{array} \right\}$$

类似的表达式可以写在其他边缘。



具体的分类, chapter H

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52 重量残留方法

摘要

最后的单元表述介绍在章节 *50* 它根源于虚功原理和变量原则。它指出, 对于平衡中的一个身体, 由内部压力所做的虚功相当于外部力量所做的虚功, 对于任何虚拟位移是动画上可接受的。

相反, 本章将提出替代方法。伽辽金法 是一种重量化残留方法, 用于区别方程式的 数值 解决方案。它涉及通过一组测试功能来增加控制差异方程式, 并在问题领域整合以尽量减少废物。

伽辽金法 是更普遍的, 可以应用于超越 结构力学 的差异方程式。

本章节将简短和简要介绍伽辽金法.

52.1 引入 1561
52.2 一般 表述 1562
52.2.1 不同运营商 1562
52.2.2 剩余 表述 1563
52.3 重量残留方法 1565
52.3.1 点配置方法 1565
52.3.2 Subdomain 配置方法 1565
52.3.3 最小四方方法 1565
52.3.4 伽辽金法 1565
52.4 应用程序 伽辽金法 到 3D 弹性 问题 1567
52.4.1 弱形的衍生 1568
52.4.2 信任差异化 1570

下一章 被调整为 Ottosen and Petersson, 1992 Introduction to the Finite Element Method.

52.1 引入

1 到目前为止, 有限元法是通过 Rayleigh-Ritz 方法从变分原理衍生。

2 在 Elasto-Statics 中, 使用的 变分原理 是总 势能 的减少, 结果的弱点为 表述 相当于 平衡的等式。(强大的形状).

3 在物理科学的许多分支中, 变分原理可能无法提供, 并且所有可用的都是差异方程和其相关边界条件。

4 值得注意的是, 差异方程式的顺序是不可能的。**奇怪的**.

5 因为这些问题, 就是 **重量残留方法** 被雇用。它基本上是一种数学方法。

6 结果的 表述 是一个完整的, 因此 “弱点”.

7 伽辽金法 是更普遍的, 可以应用于超越 结构力学 的差异方程式。此外, 它符合变量原则: 该方法与 Ritz 方法和变量原理一致。

审阅稿

52.2 一般 表述

52.2.1 不同运营商

8 考虑一般差异方程式

$$\begin{array}{lrcll} \text{Governing Differential Equation} & L\phi + g & = & 0; & \Omega \\ \text{Boundary conditions} & B_i(\phi) & = & q_i; & \Gamma_i \end{array} \tag{52.1}$$

哪里 L 是差异运营商。1D 问题, $\phi = \phi(x)$ 是未知的函数, 代表要确定的状态变量。(即位移, 温度, 头等。), $g(x)$ 这是一个已知的强迫功能。

9 我们假设区别运营商是相同的和肯定定义,

$$\begin{array}{lrcl} \text{Symmetric} & \int_\Omega (L[u])v\mathrm{d}\Omega & = & \int_\Omega (L[v])u\mathrm{d}\Omega \\ \text{Positive Definite} & \int_\Omega (L[u])u\mathrm{d}\Omega & > & 0 \end{array} \tag{52.2}$$

哪里 u 和 v 有哪些功能 **满足基本和自然边界条件**, L 它是 Eq 中定义的线性操作器。O.7.

52.2.1.1 例题 52.1: 检查 1D 轴成员的同步性和积极定义性

作为一个例子, 让我们来考虑一个轴栏的稳定状态反应。统治的差异方程式和边界条件是

$$\begin{array}{lrcl} \text{Governing Differential Equation} & -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & 0 \\ \text{Essential Boundary conditions} & u|_{x=0} & = & 0 \\ \text{Natural Boundary conditions} & EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} & = & P \end{array}$$

因此

$$\begin{array}{llllllllll} L[.] & = & -EA\frac{\partial^2}{\partial x^2}; & \phi & = & u; & g & = & 0; \\ B_1 & = & 1; & q_1 & = & 0; & B_2 & = & EA\frac{\partial}{\partial x}; & q_2 & = & P; \end{array}$$

要确定运营商是否 L 是同步和积极的。定义, 我们考虑 $P = 0$, 二次集成部分 [a] 我们获得

$$\begin{aligned} \int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v\mathrm{d}x &= -EA\frac{\partial u}{\partial x}v\Big|_0^l + \int_0^l EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= -EA\frac{\partial u}{\partial x}v\Big|_0^l + EAu\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0^l - \int_0^l EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u\mathrm{d}x \end{aligned}$$

但是, 由于边界条件是 $u = v = 0$ 在 $x = 0$ 和 $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 0$ 在 $x = l$ 然后, 我们只有

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v\mathrm{d}x = \int_0^l -EA\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u\mathrm{d}x$$

因此,The 主持人是同步的.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们也可以得出结论, 即 运营商是积极的定义 从 Eq. 52.3

$$\int_0^l -EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u\,\mathrm{d}x = \int_0^l EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

[a]来自 EQ。R.3: $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$

52.2.2 剩余 表述

10 现在我们要改变 Q。52.1 对于 1D 问题, 重写为

$$\int_a^b w(L\phi + g)\mathrm{d}x = 0 \tag{52.3}$$

哪里 w 是任意的 **重量功能** [1]. 我们注意到, 通过这个方程式, 管理差异方程式是满足在一个 **弱点** 感覺。

11 现在我们正在寻找一个近似的 数值 解决方案为未知功能 $\phi(x)$ 因此, 一般来说, 我们可以假设

$$\begin{aligned}\phi(x)^{app} &= a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \cdots + a_n\psi_n(x)\\ &= \mathbf{a}\boldsymbol{\psi}\end{aligned} \tag{52.4}$$

哪里 a_i 这些是未知的参数, $\psi(x)$ 被预定**审判** 功能 [2] 由 x.

12 将以前的方程式替换为 Eq。52.3

$$\int_a^b w(L\phi^{app} + g)\mathrm{d}x = 0$$

因为 ϕ^{app} 一般情况下, 不满足差异方程式。正确, 然後

$$L\phi^{app} + g = R$$
$$\int_a^b wR = 0$$

哪里 $R(x)$ 这是一个错误的测量, 被称为 **剩余**; 因此, 我们提出重量和废物的要求。正确的功能 [3].

[1]注意类似性与虚功原理的衍生从平衡平衡和边界条件。
[2]接下来, 在伽辽金法中, 是重量废物的特殊形式, ϕ 将符合位移, $\boldsymbol{\psi}$ 到形状功能 $\mathbf{N}$, 和 $\mathbf{a}$ 到 The nodal 转移 $\bar{\mathbf{u}}$.
[3]二个 vector $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是甲状腺, 如果 $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$ 同样, 两项功能 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是正统的, 如果 $\int v(x)u(x) = 0$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

13 剩余的明显取决于比例 a_i 因此, 我们的目标要选择重量 $w(x)$ 以这种方式, 即 **重量废物** $w(x)R(x)$ 超越 $a-b$ 是零。

14 算法重量功能首先选择

$$\begin{aligned} w &= c_1 W_1(x) + c_2 W_2(x) + \cdots + c_n W_n(x) \\ &= \lfloor\ W_1(x) \quad W_2(x) \quad \cdots \quad W_n(x)\ \rfloor \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{52.5}$$

和 $W_i(x)$ 已定义的功能 x, c_i 是参数。因此, 我们可以重写 eq。52.3 如

$$\mathbf{c}^T \int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{52.6}$$

但自从 **c** 它不依赖于坐标, 然后

$$\int_a^b \mathbf{W}^T R \mathrm{d}x = 0 \tag{52.7}$$

这个方程式实际上是一个系统的 n 方程式

15 取代 EQ。52.3, 从那以后 **a** 不依赖于协调

$$R = L(\boldsymbol{\psi}\mathbf{a}) + g = L(\boldsymbol{\psi})\mathbf{a} + g$$

因此, 考虑到重量平均值

$$\underbrace{\left(\int_a^b \mathbf{W}^T L(\boldsymbol{\psi})\mathrm{d}x\right)}_{\mathbf{K}^e}\mathbf{a} = \underbrace{-\int_a^b \mathbf{W} g \mathrm{d}x}_{\mathbf{f}}$$

或

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b W_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b W_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b W_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b W_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b W_1 g \mathrm{d}x \\ \int_a^b W_2 g \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b W_n g \mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

16 $\mathbf{K}^e$ 是这样一个 n 由 n 矩阵, 以及从预先方程式我们可以为您解决未知的比例 **a**.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52.3 重量残留方法

17 以前的表述是非常普遍的, 不同的技术它会根据所选择的重量而变化, 也就是说, 我们的选择 **W**.

52.3.1 点配置方法

18 在这种情况下, 体重功能 w 基于 **迪拉克的德尔塔功能** $\delta(x-x_i)$ 因此剩余的定义为准确等于零在 n 点。通过采用重量功能来实现这一目标 w 其它 **迪拉克的** *Delta* **功能** $\delta(x-x_i)$ 哪里

$$\delta(x-x_i) = \begin{cases} \infty & \text{if } x = x_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_i)\mathrm{d}x = 1$$

52.3.2 Subdomain 配置方法

19 我们将利益区分为 n 区域内, 以及其余的整体, 每个部分都设置为零。

52.3.3 最小四方方法

20 残留物的四方组成部分应尽量减少。尊重 a_i.

$$I = \int R^2(x, y, z, a_1, \cdots, a_n)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

52.3.4 伽辽金法

有关历史背景，请参见 §??

21 在 伽辽金法, 我们选择

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\psi}$$

也就是说, 重量函数与测试函数相同。因为试用功能是对废物的正确性 (Eq. 52.3), 然后是 Q。52.7 变成

$$\int_a^b \boldsymbol{\psi}^T R\mathrm{d}x = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

和

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \int_a^b \psi_1 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_1 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_1 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_2 L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_2 L(\psi_n)\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b \psi_n L(\psi_1)\mathrm{d}x & \int_a^b \psi_n L(\psi_2)\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b \psi_n L(\psi_n)\mathrm{d}x \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \int_a^b \psi_1 g\mathrm{d}x \\ \int_a^b \psi_2 g\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b \psi_n g\mathrm{d}x \end{Bmatrix}$$

52.3.4.1 例题 52.2: 强烈的振动

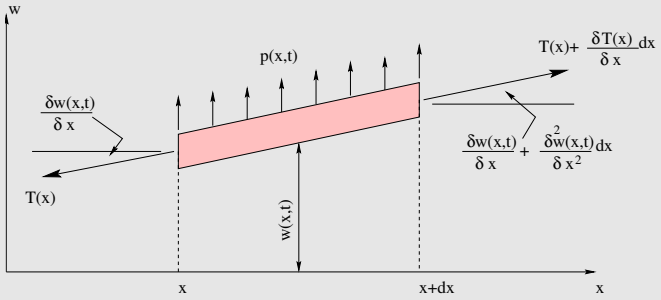
我们试图通过 伽辽金法 制定最终的 单元 矩阵一个 单元 的链条受压力 $T(x)$ 但是, 到一个外部跨逆力单位长度为 $p(x,t)$. 单位长度为 质量 标记为 ρ. 我们采取小移动, 并解决基本振动频率。

1. 首先, 我们写了牛顿的运动方程在转向方向 ($\Sigma F_y = ma$) 对于一个 单元 的序列

$$\left[T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right] + p(x,t)\mathrm{d}x - T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

   减少到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] + p(x,t = \rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$



2. 在自由振动的情况下 $p(x,t) = 0$ 以便不断的紧张 T =CST, 我们得到了

$$Tw_{,xx} - \rho w_{,tt} = 0$$

   哪个是 **波方程式**.

3. 接下来我们将应用伽辽金法

$$\int_0^L \mathbf{N}^T\left[Tw_{,xx} - \rho\ddot{w}\right]\mathrm{d}x = 0$$

   哪里 $w = \mathbf{N}\overline{w}$

4. 集成部分

$$-\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T w_{,x}\mathrm{d}x - \int_0^L \mathbf{N}^T\rho\ddot{w}\mathrm{d}x + \left[\mathbf{N}^T T w_{,x}\right]\Big|_0^L = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

最后的术语等于零, 因为形状在相应的节点相当于零。与虚拟位移方法相似, **N** 相应于虚拟 位移 在支持下必须等于零满足基本的边界条件。

5. 替代 $w = \mathbf{N}\overline{w}$ 和 $w_{,x} = \mathbf{N}_{,x}\overline{w}$ 我们获得

$$\underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T T \mathbf{N}_{,x} \mathrm{d}x}_{\mathbf{k}} \overline{w} + \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \mathrm{d}x}_{\mathbf{m}} \ddot{\overline{w}} = 0$$

哪里

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{N}_{,x} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 替代

$$\mathbf{k} = \frac{T}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{m} = \frac{\rho L}{6}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. 如果我们考虑一个两个单元组合, 并删除固定 d.o.f (1 和 3) 然后,

$$2\frac{T}{L}\overline{w}_2 + 4\frac{\rho L}{6}\ddot{\overline{w}}_2 = 0$$

8. 自由振动

$$\overline{w}_2 = A \sin \omega t$$
$$\ddot{\overline{w}}_2 = -\omega^2 A \sin \omega t$$

9. 替代

$$\left(2\frac{T}{L} - 4\frac{\rho L}{6}\omega^2\right) A \sin \omega t = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3\frac{T}{\rho L^2}$$

请注意, 正确的答案是 $w^2 = \frac{\pi^2 T}{4\rho L^2}$

52.4 应用程序 伽辽金法 到 3D 弹性 问题

22 我们将应用伽辽金法到两个问题类别。

23 我們開始與 弹性 問題, 顯示 伽辽金法 會结果是相同的 表述 与从变分原理.

24 跟随此 “批准” 根据方法, 我们将考虑 (在下一章中) 一课沒有变分原理的問題, 因此伽辽金法是唯一适用的技术。第二次申请将是温度方程式。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52.4.1 弱形的衍生

25 现在我们将应用伽辽金法到弹性的方程式。我們會發現, 這將是虚功原理的由 变分原理衍生。因此, 在这个具体如果两种方法是 (如预期) 同等。

26 以 平衡方程 开始 (Eq. O.9)

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0$$

哪里 $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{L}\mathbf{u}$ 和

$$\mathbf{L}^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&0&0&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}&0\\0&\frac{\partial}{\partial y}&0&\frac{\partial}{\partial x}&0&\frac{\partial}{\partial z}\\0&0&\frac{\partial}{\partial z}&0&\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{zz}\\\sigma_{xy}\\\sigma_{xz}\\\sigma_{yz}\end{Bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{Bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{Bmatrix};$$

27 扩展平衡的方程式我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+b_x&=0\\\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+b_y&=0\\\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+b_z&=0\end{aligned}\tag{52.8}$$

28 我们在 Eq 中加倍第一方程式。52.8 由任意功能 w_x 我们将通过体积集成 [4] Ω:

$$\int_\Omega w_x\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega w_x\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega w_x\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega w_x b_x\mathrm{d}\Omega=0$$

29 现在我们正在应用 Green-Gauss 理论 (不同理论的一种形式 [5])

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \text{饰}x\sigma_{xx}n_x\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial\text{饰}x}{\partial x}\sigma_{xx}\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma \text{饰}x\sigma_{xy}n\text{和}\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial\text{饰}x}{\partial y}\sigma_{xy}\mathrm{d}\Omega\\&+\int_\Gamma \text{饰}x\sigma_{xz}n_z\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial\text{饰}x}{\partial z}\sigma_{xz}\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega xb_x\mathrm{d}\Omega=0\end{aligned}\tag{52.9}$$

30 要记住, 引力是由 Eq. O.5

$$\begin{aligned}t_x&=\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xy}n_y+\sigma_{xz}n_z\\t_y&=\sigma_{yx}n_x+\sigma_{yy}n_y+\sigma_{yz}n_z\\t_z&=\sigma_{zx}n_x+\sigma_{zy}n_y+\sigma_{zz}n_z\end{aligned}$$

[4] 注意类似性与由 虚功原理 的衍生。

[5] 来自 EQ。R.6, $\int_\Omega\Phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\Phi\mathbf{v}^T\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^T\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega$. If we set $\mathbf{v}^T=\begin{bmatrix}\Psi&0&0\end{bmatrix}$, we obtain $\int_\Omega\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\Phi\Psi n_x\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi\mathrm{d}\Omega$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

此前的平衡减少了

$$\int_{\Gamma} w_x t_x \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\sigma_{xz} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} w_x b_x \mathrm{d}\Omega = 0$$

31 同样, 我们为其他两个方程式获得平衡

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} w_y t_y \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\sigma_{yz} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} w_y b_y \mathrm{d}\Omega &= 0 \\ \int_{\Gamma} w_z t_z \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_z}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} \right) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} w_z b_z \mathrm{d}\Omega &= 0 \end{aligned}$$

32 把这三个方程式合并起来

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_{\Gamma} (w_x t_x + w_y t_y + w_z t_z)\mathrm{d}\Gamma}_{\mathbf{W}^T\mathbf{t}} + \underbrace{\int_{\Omega} (w_x b_x + w_y b_y + w_z b_z)\mathrm{d}\Omega}_{\mathbf{w}^T\mathbf{b}} \\ &-\int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} + \right. \\ &\left. \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)\sigma_{xy} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)\sigma_{xz} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)\sigma_{yz} \right] \mathrm{d}\Omega = 0 \end{aligned} \tag{52.10}$$

33 接下来我们将专注于前方程中的第三个术语。为 $\mathbf{w} = \lfloor\ w_x \quad w_y \quad w_z\ \rfloor^T$, then

$$(\mathbf{Lw})^T = \lfloor\ \tfrac{\partial w_x}{\partial x};\quad \tfrac{\partial w_y}{\partial y};\quad \tfrac{\partial w_z}{\partial z};\quad \tfrac{\partial w_x}{\partial y} + \tfrac{\partial w_y}{\partial x};\quad \tfrac{\partial w_x}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial x};\quad \tfrac{\partial w_y}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial y};\ \rfloor$$

和

$$\begin{aligned} (\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma} \quad = \quad & \tfrac{\partial w_x}{\partial x}\sigma_{xx} + \tfrac{\partial w_y}{\partial y}\sigma_{yy} + \tfrac{\partial w_z}{\partial z}\sigma_{zz} \\ & + \left(\tfrac{\partial w_x}{\partial y} + \tfrac{\partial w_y}{\partial x} \right)\sigma_{xy} + \left(\tfrac{\partial w_x}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial x} \right)\sigma_{xz} + \left(\tfrac{\partial w_y}{\partial z} + \tfrac{\partial w_z}{\partial y} \right)\sigma_{yz} \end{aligned} \tag{52.11}$$

34 因此, 取代 eq。52.11 到 eq。52.10 我们获得

$$\int_{\Omega} (\mathbf{Lw})^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega$$

35 但是, 自从 $\mathbf{L}$ 操作员是同步的, 从 Eq。52.2 上面的方程式也可以写成

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T(\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{w}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{w}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega \tag{52.12}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪个是 **弱形** 平衡的差异方程式 受拖动的 (自然) 边界条件。

36 和 **重量 向量 w** 它是完全自愿的。在虚拟位移的原则上, 它将与虚拟相匹配。位移 将此最后的方程式与 Eq 比较。48.26.

$$\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \{ \mathbf{G} \underbrace{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0]}_{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{t}} \} d\Gamma = 0 \tag{52.13}$$

52.4.2 信任差异化

37 考虑到 位移 字段被写为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}$$

哪里 **N** 它是形状功能, 以及 $\bar{\mathbf{u}}$ 是已知的分支转移。请注意, 这是 eq 的应用。52.4

38 伽辽金法 使用形状功能为重量 (功能 W_i) 因此,eq。52.5 将是

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}\mathbf{c}; \quad \mathbf{w}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^T$$

和

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{c} = \mathbf{B}\mathbf{c}$$

39 把最后两种方程式插入弱形状, 并提醒 L 运营商 (O.7) 是相似的,eq。52.12, 收益

$$\mathbf{c}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega \right) = 0$$

(与 Eq 相似。52.6). 因为 **c** 这是一个自愿的矩阵, 我们得出结论:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega \tag{52.14}$$

这种方程式适用于线性和非线性系统。右手侧面代表荷载的效果。

40 接下来, 我们将介绍一个宪法模型,Eq。O.11 什么是重写在 向量 格式

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)$$

41 应力 和 应变 是由

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{aligned}$$

42 将这两个方程式插入 Eq。52.14, 收益

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega}_{\mathbf{K}^e} \bar{\mathbf{u}} = \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma}_{\mathbf{f}_1} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega}_{\mathbf{f}_0}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[43] 因此, 使用 Galerkin 的方法, 我们恢复了相同的坚定性表述与以前从一个变分原理 Eq 获得的。50.10).

[44] 但是, 在使用 Galerkin 时可能没有更明显的优势。接近 变分原理 可用时, 这可能是唯一的 表述 在没有第二次的情况下。

52.4.2.1 例题 52.3: 刚度矩阵 的 梁 单元

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

引入

我们试图使用 伽辽金法 来提取 刚度矩阵 为 梁 单元。

挠度的基本治理方程式 $v(x)$ 由 Euler-Bernoulli 梁 在 分布荷载 下 $q(x)$ is:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

通过重量函数多倍差异方程的两侧 $\psi(x)$ 与长度相结合 L 梁 单元 中的:

$$\int_0^L \psi(x)\left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q(x)\right)dx = 0$$

减少衍生品的顺序 v 我们将其集成到部分。考虑到最高衍生品的术语:

$$\int_0^L \psi(x)EI\frac{d^4v}{dx^4}dx$$

将部分集成两次, 以便从 v 到 ψ:

$$\int_0^L \psi EI\frac{d^4v}{dx^4}dx = -\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx + \left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$$

边界条款 $\left[\psi EI\frac{d^3v}{dx^3}\right]_0^L$ 如果重量是零的, 则 ψ 满足边界条件。

重新应用集成部分 $\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx$:

$$-\int_0^L \frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^3v}{dx^3}dx = \int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx - \left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$$

再一次, 边界条款 $\left[\frac{d\psi}{dx}EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^L$ 在适当的边界条件下消失 ψ.

因此, 统治方程式的弱形状变成了:

$$\int_0^L \frac{d^2\psi}{dx^2}EI\frac{d^2v}{dx^2}dx = \int_0^L \psi q(x)dx$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

提出一个近距离的解决方案 $v(x)$ 作为形状功能的线性组合 $N_i(x)$:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x)$$

哪里 v_i 是节点转移和 $N_i(x)$ 是形状功能。

同样, 选择重量功能 ψ 要成为形状功能 $N_j(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

将接近替换为弱形方程式:

$$\int_0^L \frac{d^2 N_j}{dx^2} EI \frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x) \right) dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

这简化了:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^L \frac{d^2 N_j}{dx^2} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

我们清楚地认识到平衡的声明, 在刚度矩阵, 位移和强度方面。这样

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{d^2 N_j}{dx^2} EI \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx$$

$$f_j = \int_0^L N_j(x) q(x) dx$$

对于具有圆形形功能的双节点喷射元素:

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$N_4(x) = -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right)$$

其二次衍生品:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$\frac{d^2 N_2}{dx^2} = \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}$$

$$\frac{d^2 N_3}{dx^2} = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

$$\frac{d^2 N_4}{dx^2} = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

现在, 计算 刚度矩阵 输入:

$$K_{ij} = \int_0^L \frac{d^2N_i}{dx^2} EI \frac{d^2N_j}{dx^2} dx$$

对于一个典型的泡沫元素, 结果的坚固性矩阵是 4×4 矩阵:

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

52.4.2.2 例题 52.4: 热转换

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

我们试图解决由

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

在哪里: $u(x,t)$ 是温度分布, α 是热传播。

我们解决这个方程式在域 $0 \le x \le L$ 如下初步和边界条件:

- 初步条件: $u(x,0) = u_0(x)$,
- 限制条件: $u(0,t) = u_L$ 和 $u(L,t) = u_R$.

伽辽金法 包含以下步骤:

1. 温度平衡的弱形状
2. 使用基本功能接近解决方案
3. 加勒基 表述
4. 平衡体系的组合
5. 时间集成

首先, 用测试函数加倍热方程式。$\psi(x)$ 连接到域内 $[0, L]$:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t} \, dx = \alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2} \, dx$$

将右手侧集成为部分, 以减少衍生品的顺序:

$$\alpha \int_0^L \psi(x) \frac{\partial^2 u}{dx^2} \, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx} \, dx + \left[\alpha \psi(x) \frac{\partial u}{dx} \right]_0^L$$

采用测试功能 $\psi(x)$ 满足边界条件, 以便边界条款消失, 我们得到:

$$\int_0^L \psi(x) \frac{\partial u}{\partial t} \, dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial \psi}{dx} \frac{\partial u}{dx} \, dx$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

接下来, 我们将采取近距离的解决方案。$u(x,t)$ 作为基本功能的线性组合 $N_i(x)$:

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x)$$

哪里 $U_i(t)$ 要确定时间依赖的比例和 $N_i(x)$ 是空间基础功能。

选择测试功能 ψ 与基本功能相同 $N_j(x)$:

$$\psi = N_j(x)$$

我们将接近的解决方案和测试功能替换为弱形状:

$$\int_0^L N_j(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x) \right) dx = -\alpha \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial}{dx} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i(t) N_i(x) \right) dx$$

这简化了:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dU_i(t)}{dt} \int_0^L N_j(x) N_i(x)\, dx = -\alpha \sum_{i=1}^{n} U_i(t) \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial N_i}{dx}\, dx$$

定义 质量矩阵 M 和 刚度矩阵 K:

$$M_{ji} = \int_0^L N_j(x) N_i(x)\, dx$$

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{\partial N_j}{dx} \frac{\partial N_i}{dx}\, dx$$

方程式的系统变成:

$$M \frac{dU}{dt} = -\alpha K U$$

哪里 $U = [U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t)]^2$.

使用时间步行方法, 如前进的 Euler 方法以整合时间方程式系统:

$$M \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha K U^{(k)}$$

重新安排提供:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta t M^{-1} (-\alpha K U^{(k)})$$

现在我们正在考虑具体基础功能。简单的, 我们考虑线性基础功能。分区域名 $[0, L]$ 进入 n 单元 同等长度 $h = L/n$. 定义基本功能 $N_i(x)$ 作为零件式线性函数, 在节点上是 1 i 和 0 在所有其他节点。

兩個線形 单元, 基本功能 $N_1(x)$ 和 $N_2(x)$ 可以被定义为:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ 1 - \frac{x-h}{h} & h \le x \le 2h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

质量矩阵的 M 和 刚度矩阵 K 对于这些基本功能, 计算为:

$$M = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

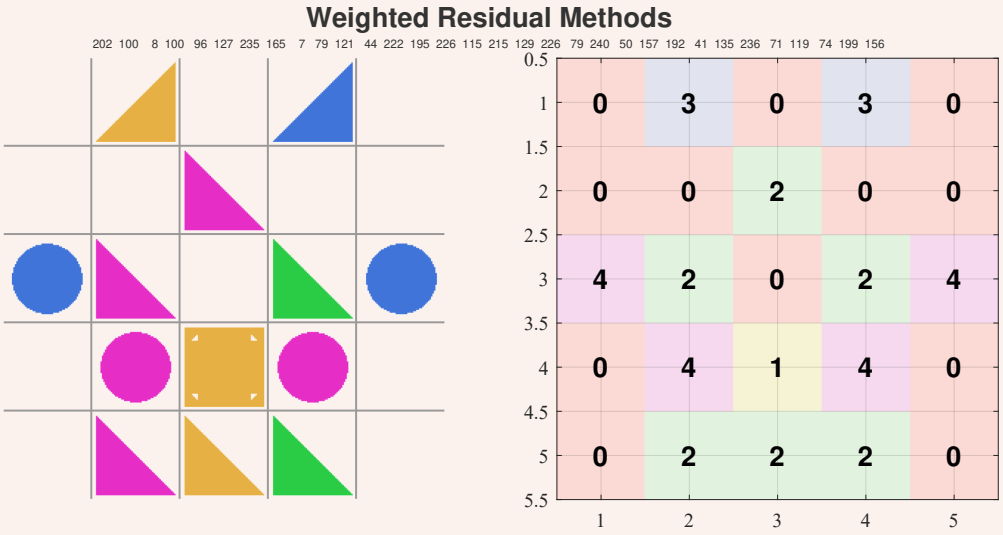
$$K = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

前进 Euler 方法的方程式系统变成:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{U^{(k+1)} - U^{(k)}}{\Delta t} = -\alpha \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$

解决为 $U^{(k+1)}$:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \frac{\alpha \Delta t}{h} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} U^{(k)}$$



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53 动态二

摘要

本章旨在为第一年毕业课程，并开发了现实的动力分析所需的计算和先进工具。在制定结构系统的运动总体方程式后，并确定用于框架结构的理想化后，它通过时间分辨和步骤一体化的过渡分析强调。古典算法（中央差异和新标型方法）以稳定性、准确性和 数值 *Damping* 的注意力呈现。接下来，该章节将讨论扩展到连续的系统和非线性动态，并以实用模型考虑和验证与验证之间的明确区别结束。如有必要，确定性反应措施将与章节相关联 72 以概率为基础的解释。

信号。 章节 36 强调解析理解在线性假设下。本章开始在线性封闭式方法达到其边界: 通用系统的定义，过渡计算和非线性反应。

转型 动力分析

摘要

动态是 *A* 自己不 对结构的地震调查。而不是审查其基本原则，本章将专注于在有限元分析代码中实施的计算方面。章节开启了动态分析的建筑物的差异化，随后是动态问题的变量形式，然后时间融入技术被讨论。

53.1 引入 1577
53.2 框架 理想化为 动力分析 1577
53.2.1 轴心 *vs* 灵活性 1577
53.2.2 模型 1578
53.3 问题 表述 1582
53.3.1 变量 表述 1582
53.3.2 质量 代表性 1583
53.3.3 冲浪 1585
53.3.4 数值技术:Euler 方法 1588
53.4 时间差异化 1589
53.4.1 包容性 1589
53.4.2 明确时间集成 1595
53.5 数值方法 為 动力分析 1598
53.5.1 中央区别方法 1598
53.5.2 例题 53.5: 中央差异稳定时间步骤 1599
53.5.3 纽马克 - 贝塔方法 1599
53.5.4 超级模式 vs. 直接集成 1599
53.6 连续系统 1600
53.6.1 波的轴振动 1600
53.6.2 转向的振动 Beams 1602
53.7 非线性动态 1602
53.7.1 非线性来源 1602
53.7.2 Ductility 和 Capacity Design 1603
53.8 实用考虑 1603
53.8.1 沉浸在现实结构中 1603
53.8.2 土-结构相互作用 1604
53.8.3 质量 Dampers 混凝土 1604
53.8.4 基础隔震 1604
53.9 总结 1604

有关历史背景，请参见 §??

审阅稿

53.1 引入

1 当应用的 荷载 的频率 (激情) 结构低于其最低的自然振动频率的三分之一, 然后我们可以忽略无情的影响, 并将问题视为 quasi-static one, 否则必须进行动态分析。

2 非常灵活的结构, 即使是 **慢慢应用 荷载** 可能需要动力分析。

3 如果该结构受一个 影响 荷载首先, 要关心的是 (应力) 波浪传播。在这种情况下, 我们经常 **高频率** 动力分析的长度是浪潮穿越结构所需要的时间。

4 如果存在的无情力量, 那么我们面临着一个动态问题, 可以通过下列解决程序中的任何一个分析它:

1. 反应谱 (只有线性弹性系统)
2. 时程分析 通过模型分析 (又是线性弹性), or 直接时间集成.
3. 教授 威尔逊据报道说:

> **雷 · 克劳和我很遗憾, 我们在 *1962* 年创建了大约反应谱方法, 用于地震分析结构。當時, 許多職業成員使用模型價值的絕對價值總數來估計最高成員力量。雷建议我们使用 *SRSS* 方法将模式值结合起来。然而, 我是把近距离的方法放在许多动力分析程序中, 这使得工程师能够产生无意义的积极数字, 少或没有价值。在与 *RSM* 工作超过 *50* 年后, 我建议不要用于地震分析.**

4. 结构动态的方法基本上独立于最终元素分析, 因为这些方法假设我们已经有硬度、质量和蒸发矩阵。这些矩阵可以从一个单一的自由度系统中获得, 从一个框架结构的理想化/简化, 或者从一个非常复杂的最终单元面板中获取。时程分析 程序仍然相同。

5 请注意, 附件 36.4.3 和 K 将简要覆盖自由振动和地震记录过滤技术。

53.2 框架 理想化为 动力分析

53.2.1 轴心 *vs* 灵活性

6 作为提醒, 在我们考虑建造模型之前, 应对侧面 (天主教) 荷载, 可能有用地把轴的重要性放在前面。*vs* 灵活的固定性, 图 53.1a.

7 轴性与灵活性密度的比例是:

$$\alpha = \frac{k_a}{k_t} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{AL^2}{12I}$$

為 A $b \times h$ 直角部分, 与 $b = h/2$, 和 $L = 10h$ 我们会有 $\alpha = 100$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

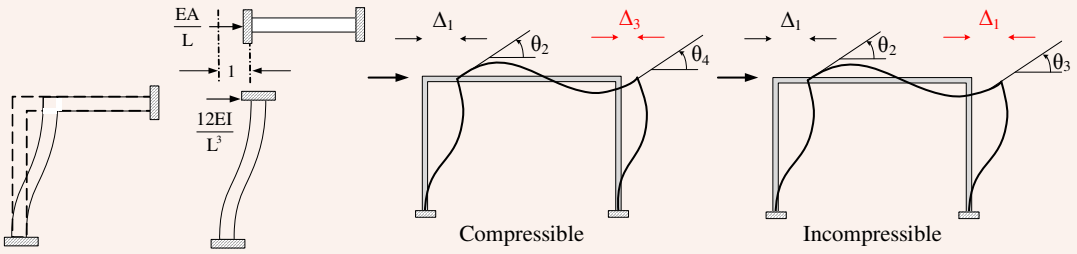
8 对于一个 W 部分与

$$\left.\begin{aligned} Z &\approx \frac{wd}{9} \\ \frac{Z}{S} &= \xi = 1.1 \\ S &= \frac{I}{\frac{d}{2}} \\ w &= (490)\ \text{lbs/ft}^3 A \end{aligned}\right\} \begin{aligned} I &\approx 0.208 A d^2 \\ \alpha &= \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12EI}{L^3}} = \frac{\frac{EA}{L}}{\frac{12E(0.208)Ad^2}{L^3}} = 0.4\left(\frac{L}{d}\right)^2 \end{aligned}$$

9 对于钢材结构, 我们可以假设
$L = 20d, \Longrightarrow \alpha = 160$

10 注意: 我们可能有可忽视的轴形状, 但是轴力 不是可忽略的。这在地震分析中经常被利用, 使我们能够替换一个 (短暂) 多台建筑与单一的柱与折叠大小。

11 If $\alpha >\approx 10$ 我们可以忽略轴性变形, 并且 减少 自由度 的数量, 图 53.1b. 因此, 如果 框架 受侧面 (风或地震) 每个列的负载, 粘贴强度均为其灵活硬度。



(a) 轴和灵活的坚定性　　(b) 对 框架 分析的影响

图 53.1: 轴心 *vs* 灵活的坚定性

53.2.2 模型

12 对于多历史/底层框架, 我们可以显著减少无限的自由度的数量。(因此, 要转换的矩阵的尺寸).

13 忽视轴形变, 大大促进对侧负载的小升建筑框架的动态分析。(风, 地震).

14 一个受侧 荷载 和被忽视的轴密度的建筑物的自由体图表显示在 图 53.1a.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

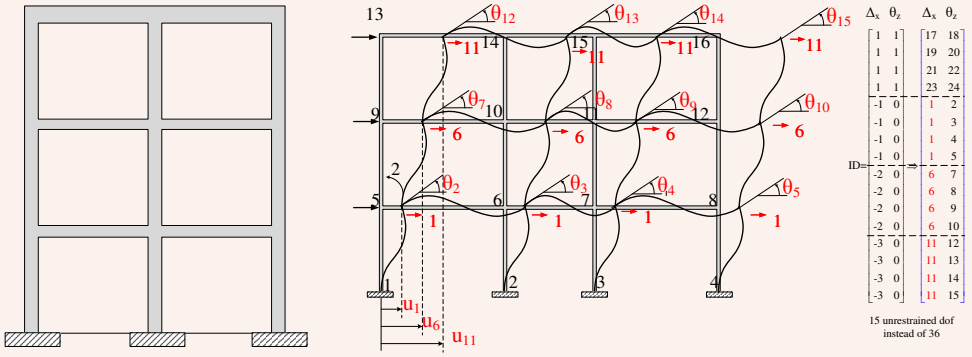


图 53.2: 减少不受限制的移行, 当忽略轴硬度时

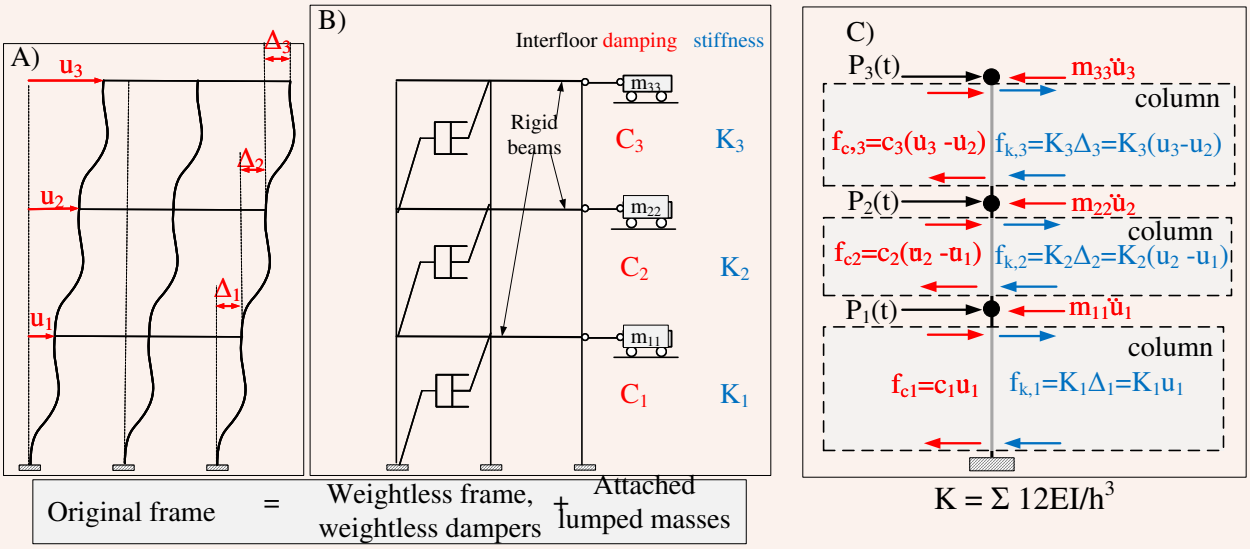


图 53.3: 建筑模型为地震荷载

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

15 强度和冲击力量是由 (注意到这 $\Delta_i = u_i - u_{i-1}$, 图 53.3-A)

$$\begin{array}{lll} F_{K,1} = f_{k,1} - f_{k,2} & = K_1 u_1 - K_2(u_2 - u_1) \\ F_{K,2} = f_{k,2} - f_{k,3} & = K_2(u_2 - u_1) - K_3(u_3 - u_2) \\ F_{K,3} = f_{k,3} & = K_3(u_3 - u_2) \\ \hline F_{C,1} = f_{c,1} - f_{c,2} & = c_1\dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \\ F_{C,2} = f_{c,2} - f_{c,3} & = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \\ F_{C,3} = f_{c,3} & = c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) \end{array} \tag{53.1}$$

哪里 $F_{K,i}$ 和 $F_{C,i}$ 是网内力量, 因为在节点上应用的硬度和蒸发。除了楼上, 还有 2 贡献, 一个在顶部, 另一个在节点下方, 图 53.3-C)).

16 故事的坚定是 侧面硬件的总数 故事中的所有列 $K_i = \sum_{columns} \frac{12EI_c}{h^3}$.

17 坚强的力量: $F_{K,i} = f_{k,i} - f_{k,i+1}$.

18 剪力 (最后的会员) $\mathbf{f}_i$ 与此相关 相对地板转移 $\mathbf{f}_i = K_i\Delta_i = K_i(u_i - u_{i-1})$.

19 施行牛顿的第二条动作法则, 适用于三个节点中的每个节点, 图 53.4 我们可以重写 eq。53.1 如

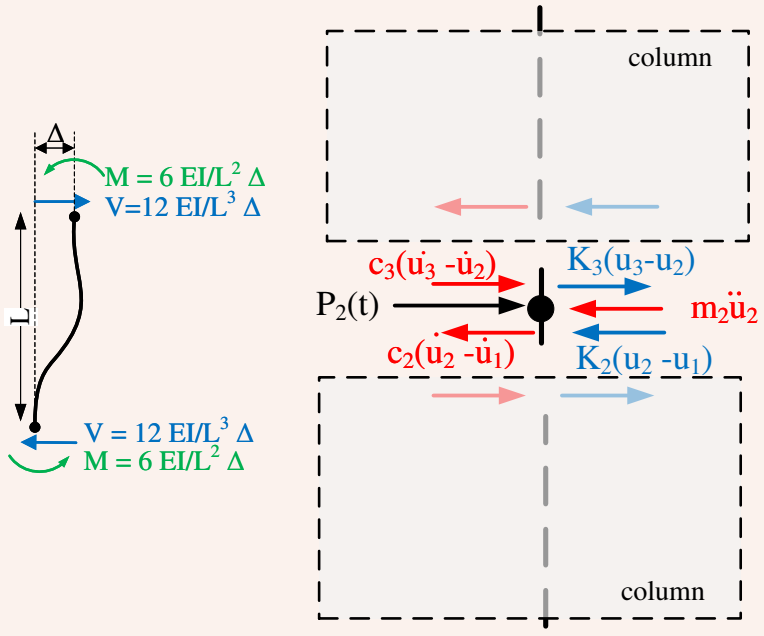


图 53.4: 一个节点的自由体图

$$\begin{array}{llll} P_3(t) & -m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) & -K_3(u_3 - u_2) & = 0 \\ P_2(t) & -m_{22}\ddot{u}_2 & +c_3(\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) & +K_3(u_3 - u_2) - K_2(u_2 - u_1) & = 0 \\ P_1(t) & -m_{11}\ddot{u}_1 & +c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - c_1\dot{u}_1 & +K_2(u_2 - u_1) - K_1 u_1 & = 0 \end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

重新安排条款:

$$\begin{array}{llll} m_{11}\ddot{u}_1 & +(c_1+c_2)\dot{u}_1 - c_2\dot{u}_2 & +(k_1+k_2)u_1 - k_2u_2 & = P_1(t) \\ m_{22}\ddot{u}_2 & -c_2\dot{u}_1 + (c_2+c_3)\dot{u}_2 - c_3\dot{u}_3 & -k_2u_1 + (k_2+k_3)u_2 - k_3u_3 & = P_2(t) \\ m_{33}\ddot{u}_3 & -c_3\dot{u}_2 + c_3\dot{u}_3 & -K_3u_2 + K_3u_3 & = P_3(t) \end{array}$$

或

$$\mathbf{M}\{\ddot{u}\} + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t)$$

哪里

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

53.2.2.1 例题 53.1: 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应

适应从 (Bucher, 2009).

我们重新审查建筑在图 53.3 把它伸到四层。它受四个静态负载。F_i, $i = 1, 2, 3, 4$. 地板板被认为是硬的, 列具有相同的长度 $H = 4$ m 和不同灵活性固体 EI_k, $k = 1...8$. 重量和硬度是 **随机变量**. 负载通常以 20 kN 的 均值 和 0.4 的 COV 分配, 硬度通常以 10 MNm 的 均值 分配。[2] 和一个 COV 0.2。所有变量都是独立的。我们要计算

- 均值 和 标准差 以及水平 位移 的变量比例 u 关于顶部的故事,
- 概率 p_F 这 u 超過 0.1 m 的值。

分析是基于结构的线性弹性行为, 排除重力的影响。顶部故事 挠度 可以通过添加间故事相对转移来计算 53.3

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{F_4 H^3}{12\,(EI_7 + EI_8)} \\ u_3 &= \frac{(F_3+F_4)\,H^3}{12\,(EI_5 + EI_6)} \\ u_2 &= \frac{(F_2+F_3+F_4)\,H^3}{12\,(EI_3 + EI_4)} \\ u_1 &= \frac{(F_1+F_2+F_3+F_4)\,H^3}{12\,(EI_1 + EI_2)} \\ u &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{aligned}$$

A MATLAB® 这个例子的代码在 §I.2.15 哪些收益 $\mu_u = 0.0545$, $\sigma_u = 0.0128$, $COV = 0.2353$ 但是, 失败的可能性是 $_pF == 7.6100e-04$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.3 问题 表述

53.3.1 变量 表述

20 一般的三维连续性中, 一个基本的运动方程的体积 Ω 没有冲浪是

$$\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} \tag{53.2}$$

哪里 $\mathbf{m}$ 重量密度矩阵等于 $\rho\mathbf{I}$, 和 $\mathbf{b}$ 是 向量身体的力量。

21 区别运营商 $\mathbf{L}$ (Eq. O.7) 是

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

22 线性弹性材料

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}$$

对于非线性物质, 可以写出宪法方程式如:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{D}_i\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

哪里 $\mathbf{D}_i$ 是 刚度矩阵 的坦根 .

23 如果平等 53.2 描述身体运动在强烈的意义上, 一个弱 表述 是通过最小补充 虚功 的原则获得。(或重量残留物/加勒金)

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T[\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}-\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}]\mathrm{d}\Omega=0 \tag{53.3}$$

24 加斯分离理论, 平等 R.4:

$$\int\int_A \phi\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}\mathrm{d}A=\oint_s \phi\mathbf{q}^T\mathbf{n}\mathrm{d}s-\int\int_A(\nabla\phi)^T\mathbf{q}\mathrm{d}A$$

并提醒这 $\mathbf{Lu}=\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega=-\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma$$

25 因此, 平衡 53.3 转变为

$$\int_\Omega[\delta\mathbf{u}^T(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}-\mathbf{b})+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}]\mathrm{d}\Omega-\int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{53.4}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

到目前为止, 没有关于物质行为的假设。

26 接下来我们将寻找虚功方程式的空间分辨 (平等 53.4). 从最终的单元的基础上, 我们有以下关系:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}\\ \delta\mathbf{u}^T &= \delta\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{N}^T\\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}\\ \mathbf{B} &= \mathbf{L}\mathbf{N}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}\\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T &= \delta\bar{\mathbf{u}}^T\mathbf{B}^T\\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{B}\dot{\bar{\mathbf{u}}}\end{aligned}$$

27 线性问题 $\boldsymbol{\sigma}_{t,n} = \mathbf{D}_e\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_{t,n}$ 但是, 如果有适当的替代, 这将是

$$\underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega\,\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\mathbf{M}_{tt}}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}} + \underbrace{\underbrace{\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}_e\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega\,\bar{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{K}}}_{\mathbf{P}^{int}_{t,n}} - \underbrace{\left(\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{P}^{ext}_{t,n}\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \mathbf{N}^T\mathbf{t}_{t,n}\mathrm{d}\Gamma\right)}_{\mathbf{P}^{ext}_{t,n}} = 0$$

或 $\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_{t,n} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$ 它代表了半直线运动方程在暗示时间集成。

28 注意 质量矩阵 和地质 1 的相似之处 (Eq. 60.5)

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{m}\mathbf{N}\mathrm{d}\Omega\\ \mathbf{k}^{(e)}_g &= P^{(e)}\int_L \mathbf{N}_{,x}\mathbf{N}_{,x}dx\end{aligned}$$

29 此外, 请注意缺席蒸汽率。(这是一个不合理的数值 “技巧”).

30 假设我们认为黏性阻尼 (下面看) 取代 $\bar{\mathbf{u}}$ 由 $\mathbf{u}$ 我们获得

$$\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{P}^{int}_t = \mathbf{P}^{ext}_t \tag{53.5}$$

哪里 $\mathbf{M}_{tt}$ 和 $\mathbf{C}_{tt}$ 是对结构的理想化所需的大量和粘液蒸发矩阵; $\ddot{\mathbf{u}}_t$ 是节点加速 向量, $\dot{\mathbf{u}}_t$ 是节点速度 向量, $\mathbf{P}^{int}_t$ 是静态恢复或内部节点力量 向量 由节点 位移 向量 产生的 $\mathbf{u}_t$, 和 $\mathbf{P}^{ext}_t$ 是由于地震负载而应用的节点力量的向量。

53.3.2 质量 代表性

31 质量矩阵有两种可能的代表性: 平滑和一致。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

质量 发射: 假设所有群体都集中在终端节点上。雖然不完全正確, 但這個模型的好處是我們將有一個 diagonal 矩阵 可以很容易地轉換。如果插入喷射元素的轴运动, 则与相应转移 vector 相同的大量矩阵, 然后

$$\mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们注意到, 我们在直径上有零术语, 相当于旋转 DOF。要包括旋转 DOF 我们考虑到一个 “磁盘” 长度 dx 在协调中 x 从第一节点。旋转的惯性矩这个 “磁盘” 关于节点的第一个节点是

$$dm_r = \rho \left(\frac{I}{A} + x^2 \right) dx$$

哪里 ρ 是 质量 密度 (质量 单位长度) 单元 和 A 是梁十字部分的区域。因为在每个节点中, 一半的单元旋转无效, 所以我们将有

$$m_{ri} = m_{rj} = \int_0^{L/2} dm_r = \frac{\rho L}{2} \left(\frac{I}{A} + \frac{L^2}{12} \right) = \frac{\rho L}{2} \left(r_y^2 + \frac{L^2}{12} \right)$$

接下来的旋转 质量矩阵 必须添加到翻译一

$$m_r = \mathbf{m}_e = \rho \cdot A \cdot L_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ri} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{rj} \end{bmatrix} = \frac{\rho L}{2} \left(r_y^2 + \frac{L^2}{12} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

共识 质量: 使用相同的质量矩阵的动态, 在那里与所有自由度相关的无效力量。给予

$$\mathbf{m}_e = \int_0^{L_e} \rho \cdot A(x) \cdot \mathbf{N}_d(x)^T \cdot \mathbf{N}_d(x) \mathrm{d}x$$

替代 梁 comn 的形状功能 (Eq. 49.11) 我们获得

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho \cdot A \cdot L_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22 \cdot L_e & 0 & 54 & -13 \cdot L_e \\ 0 & 22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 & 0 & 13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13 \cdot L_e & 0 & 156 & -22 \cdot L_e \\ 0 & -13 \cdot L_e & -3 \cdot L_e^2 & 0 & -22 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 \end{bmatrix}$$

质量矩阵 随后变成全球参考 $\mathbf{M}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \mathbf{m}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.3.3 冲浪

32 所有的结构都被蒸发, (2nd 热力学法则) 否则, 他们的波动永远不会停止。Damping 可以被视为一种驱动能量, 并且可以采取不同的形状。

33 最常用的蒸汽形式是所谓的威斯科或瑞利阻尼 , 当输入到运动方程时, 它有下列形状。

$$\mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$$

在哪里, $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ 和 $\mathbf{u}_{t,n}$ 是当前时间阶段的节点加速度, 速度和位移 vectors, 分别; $\mathbf{P}^{int}_{t,n}$ 是静态恢复或内部节点力量 向量 在当前时间阶段。

34 Damping 被认为是模拟能量的分散。在非线性分析中, 这一点是由一些构成模型计算的, 其中包括歇斯特里斯蒸发, 例如改造 Kent 和 Park 模型为混凝土。因此, 在添加 Damping 到非线性分析 时, 必须非常小心。

35 在线性弹性分析中, 最常见的蒸发形式是所谓的 黏性阻尼 (以 瑞利阻尼 更好地称为). 在这种简化中, 我们假设有一个威斯科蒸汽机的存在。(根据定义对 速度 敏感) 结构与外部固定点之间 (质量 比例), 以及结构内的另一个蒸汽组合, 连接所有自由度 (密度 相对 Damper), 图 53.5. 黏性阻尼: $\mathbf{C}_{tt} = a_m \cdot \mathbf{M}_{tt} + b_k \cdot \mathbf{K}_{tt}$ 在哪里, a_m 和 b_k 是预数质量和固定性条款相应

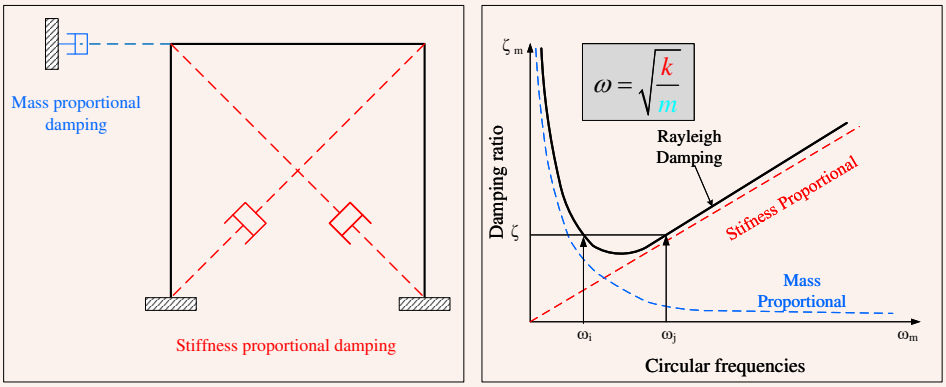


图 53.5: 质量 和密度比例蒸汽

的比例。因子 a_m 和 b_k 基于两个循环频率计算。(ω_1 和 ω_2 放射线 / sec) 要被吸入 ξ_1 和 ξ_2 相应。哪里 ω_m 和 ξ_m 是循环频率和阻尼比的 m^{th} 时尚可以很容易地证明,

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix}$$

36 如果有人承认相同的阻尼比 ζ 两种模式 (合理的实用假设) 然后,

$$a_m = \zeta \frac{2\omega_i \cdot \omega_j}{\omega_i + \omega_j}; \quad b_k = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

37 再次, 应强调不同蒸汽率应以线性和非线性分析使用。(特别是如果非线性构建模型对歇斯底里分裂负责。此外, 如果 瑞利阻尼 在 非线性分析 中使用, 则将 a_m 和 b_k 可能需要更新每次增加, 以反映在刚度矩阵的变化。$\mathbf{K}_t$.

38 在实践中, 我们可以通过激动一个结构来获得冲浪率, 但只有灵活范围。

53.3.3.1 例题 53.2: 瑞利阻尼 加密对一层建筑的比例

✳ 已分析了三层钢筋混凝土页面建筑, 并且第一两个自然频率被定义为 $f_1 = 1.20$ Hz 和 $f_2 = 3.60$ Hz (伊。$\omega_1 = 7.540$ rad/s 和 $\omega_2 = 22.619$ rad/s). 一个目标 阻尼比 $\zeta = 5\%$ 要分配到两种模式使用 瑞利阻尼 $\mathbf{C} = a_m\mathbf{M} + b_k\mathbf{K}$. 定义: (a) 各方的比例 a_m 和 b_k; (b) 所涉及的阻尼比 在第三模式 ($f_3 = 6.00$ Hz, $\omega_3 = 37.699$ rad/s); (c) 工程的解释。

解决方案。

(a) 雷利格率。

在两种目标模式中均匀的冲浪, 简化公式提供:

$$a_m = \zeta\frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2} = 0.05\times\frac{2\times 7.540\times 22.619}{7.540+22.619} = 0.05\times\frac{341.1}{30.159} = 0.565\ \text{s}^{-1}$$

$$b_k = \zeta\frac{2}{\omega_1+\omega_2} = 0.05\times\frac{2}{30.159} = 3.32\times10^{-3}\ \text{s}$$

(b) 在模式 3 中插入的冲浪。

以任何模式 n 与频率 ω_n,Rayleigh 模型授予一个阻尼比:

$$\zeta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a_m}{\omega_n} + b_k\omega_n\right)$$

模式 3:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{0.565}{37.699} + 3.32\times10^{-3}\times 37.699\right) = \frac{1}{2}\left(0.01499 + 0.12516\right) = 7.0\%$$

(c) 工程解释。

值得一提的三个观点。

1. 模式 1 和 2 是正确的目标 5 的蒸发% 由建设。
2. 时尚3、说谎 **上方** 加密带, 过度蒸发 7%: 固定性比例期限 $b_k\omega_n$ 线性成长频率和高模式主导。在一个终点单元多种模式的模型, 最高频率 (最短的波长) 模式可以被授予人工大蒸汽比例 — 一故意功能用于抑制刺激性高频反应, 但如果这些模式携带真正的能量, 则可能出现错误。
3. 质量 比例期限 a_m/ω_n 以频率和将过度蒸发模式 **下面** 加密带 (吉。非常低频滑动或滑动模式在基地隔离结构中), 需要仔细处理的。

这些特征解释了为什么选择加密频率 (ω_i, ω_j) 这是一个模型决策, 而不是纯粹的数值一个: 他们应该打破频率范围, 在那里结构的动态答案预计会显著。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.3.3.2 例题 53.3: 解析基线: 从一般初始条件自由振动

✳ 在转向数值时间步骤之前, 有准确的关闭形式的结果, 对其中集成者可以验证。考虑一个蒸发的 SDOF 系统, 其中:

$$m = 2\,000 \text{ kg}, \quad k = 800\,000 \text{ N/m}, \quad \zeta = 2\%$$

从初步条件释放 $u_0 = 25$ mm 和 $v_0 = 80$ mm/s. 定义: (a) 系统属性; (b) 精确的自由振动答案 $u(t)$; (c) 长度和阶段; (d) 答案在 $t = 0.20$ s 是第一零交叉的时刻。

解决方案。

(a) 系统属性。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\,000}{2\,000}} = 20.00 \text{ rad/s}, \qquad T_n = \frac{2\pi}{20} = 0.3142 \text{ s}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 20\sqrt{1-0.0004} = 19.996 \text{ rad/s}, \qquad T_d = 0.3143 \text{ s}$$

为 $\zeta = 2\%$ 与之之间的差异 ω_d 和 ω_n 只有 0.02%, 确认, 轻度蒸发的结构在基本上不蒸发固有频率.

(b) 准确的回应。

自由振动解决方案与 $u(0) = u_0$ 和 $\dot{u}(0) = v_0$ is:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

替代数字 ($\zeta\omega_n = 0.02 \times 20 = 0.40 \text{ s}^{-1}$, $\omega_d \approx 19.996$):

$$\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} = \frac{80 + 0.40 \times 25}{19.996} = \frac{90}{19.996} = 4.501 \text{ mm}$$

$$u(t) = e^{-0.40t}\,[25\cos(19.996\,t) + 4.501\sin(19.996\,t)] \quad \text{[mm]}$$

(c) 宽度和阶段。

宽度阶段形式 $u(t) = \rho\, e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2} = \sqrt{25^2 + 4.501^2} = \sqrt{625 + 20.26} = 25.40 \text{ mm}$$

$$\tan\phi = \frac{v_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0} = \frac{4.501}{25} = 0.1800 \quad \Rightarrow \quad \phi = 10.2^\circ$$

(d) 答案在 $t = 0.20$ s 首先是零交叉。

$$u(0.20) = e^{-0.40\times0.20}\,[25\cos(19.996 \times 0.20) + 4.501\sin(19.996 \times 0.20)]$$

$$= e^{-0.08}\,[25\cos(3.9992) + 4.501\sin(3.9992)]$$

$\cos(3.9992 \text{ rad}) = -0.6542$, $\sin(3.9992 \text{ rad}) = -0.7563$:

$$u(0.20) = 0.9231\,[25 \times (-0.6542) + 4.501 \times (-0.7563)] = 0.9231\,[-16.35 - 3.404] = -18.24 \text{ mm}$$

第一零交叉后 $t = 0$ 發生時 $25\cos(\omega_d t) + 4.501\sin(\omega_d t) = 0$ 是的, 我 $\tan(\omega_d t) = -25/4.501 = -5.554$, 给予 $\omega_d t = \pi - \arctan(5.554) = \pi - 1.391 = 1.749$ rad:

$$t_0 = \frac{1.749}{19.996} = 0.0875 \text{ s}$$

评论。 此封闭形式的结果作为 **验证基准** 对于任何数值集成器适用于相同问题: 与 $\Delta t \to 0$，该 Euler、Central-Difference 和 Newmark 解决方案都必须合并 $u(0.20) = -18.24$ mm. 相比 数值 的输出与此值在一个单一的检查点是简单但强大的执行准确性检查。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.3.4 数值技术:Euler 方法

39 Euler 的方法是第一次订单 数值方法 解决初始值问题 (二、动态). 它使用当前点的坦根线的插槽来估计下一个点的解决方案值。这种方法使用固定步骤大小, 只需要解决方案的初始值和差异方程本身来计算解决方案在每个点。Euler 方法的主要优点是它的简单性和易于实施, 但它可能因某些类型的差异方程而遭受低准确性和稳定性问题。

40 当我们考虑到更高和更高的衍生品如速度, 然后加速, 我们转向所谓的速度。*Runge-Kutta* **公寓**, 在那里,Runge-Kutta 的最低订单版本是 Euler 的方法。

41 在 §59.1.1 我们将使用另一个数值技术, 纽顿的方法来找到对差异方程的解决方案。

42 在我们的问题上, 最终我们试图解决 Eq。53.5 但是, 在解决动态问题之前 (§53.4) 对于 Euler 的方法, 简短的审查是保证的。

43 Euler 方法是 数值 方法, 以解决常规差异方程式的初始值。(如同在结构动力学). 换句话说, 及时解决问题 t_n 如何及时找到解决方案 t_{n+1}, 图 53.6 将描述这两种方法。

44 请注意, 我们提到 **纽顿的方法为非线性分析, 而** *Euler* **为动态**.

45 在我们的情况下, 我们通过最终的单元分辨空间, 并通过最终差异分辨时间。

46 正如纽顿的方法一样。(Eq. 59.1) 让我们从泰勒的系列开始。

前向 Euler/Explicit

$$y(t_n+h) \equiv y_{n+1} = y(t_n) + h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n} + O(h^2) \Rightarrow y^?_{n+1} \simeq y^\checkmark_n + h f(y^\checkmark_n, t_n) \tag{53.6}$$

哪里 $h = \Delta t$, 和 $f(y_n, t_n) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_n}$ 这也被称为 明确的 自从 y_{n+1} 以已知数量为准, 如 y_n 和 $f(y_n, t_n)$ 没有平衡可以解决。解释方法很容易实施, 但条件为沙子 (伊。h 要小于关键值). 这类似于以前用于地质非线性问题所使用的步骤方法。

回归 Euler / Implicit 下一篇: Taylor 系列的延伸

$$y(t_n) \equiv y_n = y(t_{n+1} - h) = y(t_{n+1}) - h \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_{n+1}} + O(h^2) \Rightarrow y^?_{n+1} \simeq y^\checkmark_n + h f(y^?_{n+1}, t_{n+1})$$

这是一个随机的方法, 因为 $f(y_{n+1}, t_{n+1})$ 不知不觉, 一 (通常) 非线性方程必须在每一步解决 (可以用新顿拉夫森方法). 显然, 这比明确的方法更昂贵, 但方法无条件稳定。

47 请注意, 即暗示方法 (以新顿-拉夫森解决方案的代价) 总是提供一个 "准确" 解决方案。在结构动力学的背景下, 我们可以说平衡满意。这不是明确的方法。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.3.4.1 例题 53.4: Euler 方法

我们试图解决以下常规线性第一顺序差异方程式:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + (t - y(t))^2; \qquad 2 \le t \le 3; \qquad y(0) = 1; n = 0$$

- 与 Euler 相处 $h = 0.1$

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.1\left[1 + (2. - 1.)^2\right] = 1.2$$

- 回归的 Euler 将提供

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1}) \\ \Rightarrow y_1 &= 1 + 0.1\left[1 + (2.1 - y_1)^2\right] \\ \Rightarrow 0 &= 0.1y_1^2 - 1.42y_1 + 1.541 \\ \Rightarrow y_1 &= 1.1839 \end{aligned}$$

  在这种情况下, 我们有一个 四方平衡可解决但是, 一般来说, 我们可能需要使用牛顿的方法来解决问题。y_n.
- 在非线性结构分析的背景下, 这意味着我们正在检查平衡在 $n = 1$ 但是, 这不是明确的方法。

53.4 时间差异化

[48] 数学, 方程式 53.5 它代表了二级线性差异方程式的系统, 原则上可以通过标准程序来解决常规方程的平衡方程。

[49] 但是, 对于区别方程式的通用系统解决方案提出的程序, 如果矩阵的顺序很大, 则可能非常昂贵 - 除非具体优点从对比矩阵特征中获取。**M**, **C**, 和 **K**.

[50] 因此, 在实用的有限元分析中, 我们主要对一些有效的方法感兴趣, 即直接集成和模式超级。这些两种技术密切相关, 一个或另一种方法的选择仅由其数值有效性决定。在目前的实施中, 使用了直接融入方法。

[51] 在直接融入方法中, 方程式 53.5 使用 数值 步骤程序进行集成; “直接” 这意味着在数值积分之前, 没有将方程式转化为不同的形式。

53.4.1 包容性

53.4.1.1 纽马克的方法

53.4.1.1.1 衍生品 [52] Newmark 的方法是 Euler 的第二次排序差异方程式方法的一般化。(运动方程)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

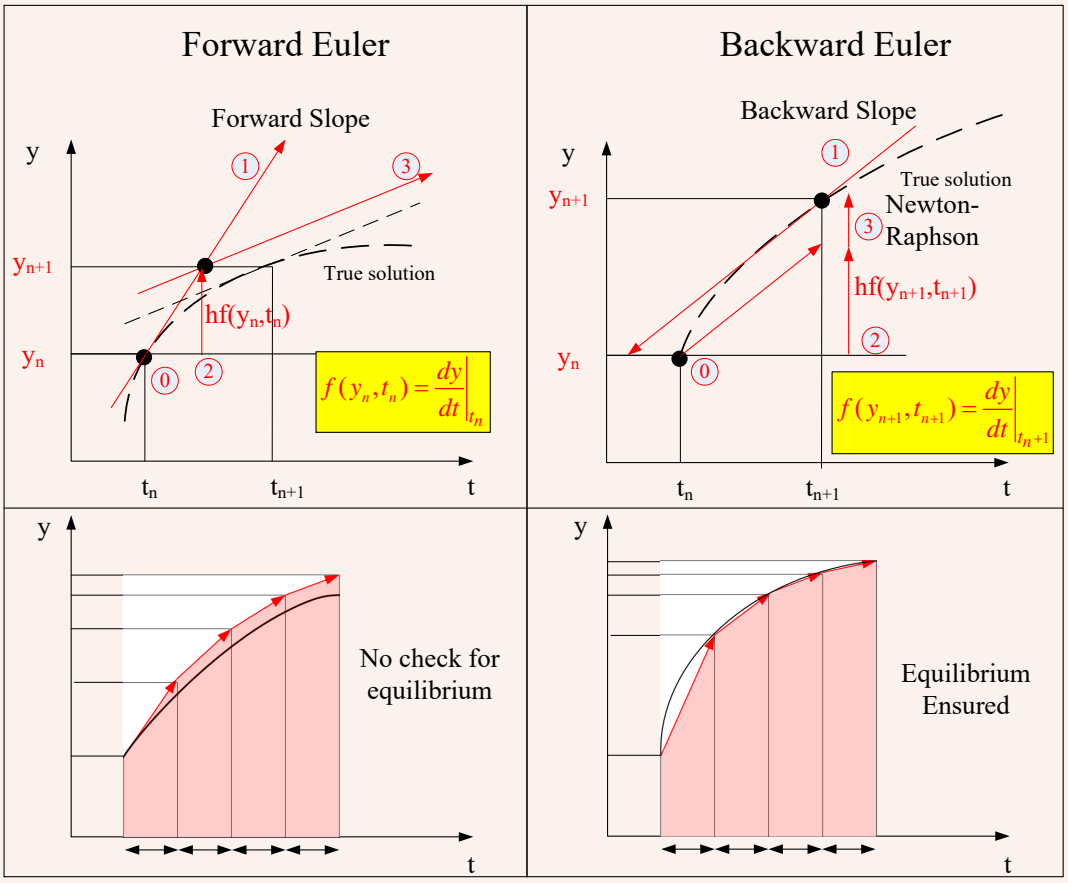


图 53.6: Euler 前向 vs Euler 后向方法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

53 以泰勒的系列开始

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{\mathbf{u}}\end{pmatrix}^{n} &= \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{\mathbf{u}}\end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}\\ \ddot{\mathbf{u}}\end{pmatrix}^{n-1} && \text{Forward Euler}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{\mathbf{u}}\end{pmatrix}^{n} &= \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \dot{\mathbf{u}}\end{pmatrix}^{n-1} + \Delta t \begin{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}\\ \ddot{\mathbf{u}}\end{pmatrix}^{n} && \text{Backward Euler}\end{aligned}$$

54 纽马克的方法与尤勒的方法不同。取代更高的订单衍生品 用更简单的表达式 (因此, 更低的准确性) 为了效率。

55 再一次, 我们首先考虑泰勒系列的节点转移和速度 vector 条款的扩展, 关于以前的值。$n-1$.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{t,n} &\approx \mathbf{u}_{t,n-1} + \frac{\partial \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots\\ \dot{\mathbf{u}}_{t,n} &\approx \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^2}\Delta t + \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots\end{aligned}$$

这些两个方程式代表了位移和速度的近距离 vectors。($\mathbf{u}_{t,n}$ 和 $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$) 除了泰勒系列的高顺序条款。我们代表了 上述两种方程式的最后一款条件如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^3}{3!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t^2}{3!}\\ &\approx \beta(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t^2\\ \frac{\partial^3 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial t^3}\frac{\Delta t^2}{2!} &\approx \frac{\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n}}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{t,n-1}}{\partial^2 t}}{\Delta t}\frac{\Delta t^2}{2!} \approx (\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\frac{\Delta t}{2!}\\ &\approx \gamma(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\,\Delta t\end{aligned}$$

哪里 β 和 γ 是描述 数值 接近的参数。

56 替代

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t^2\cdot\beta\cdot(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\\ \dot{\mathbf{u}}_{t,n} &= \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t\cdot\gamma\cdot(\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} - \ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1})\end{aligned}$$

57 因此, 我们得到了新标志。β 方法, 由以下方程式组成 (前进差异):

$$\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} \tag{53.7}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + 2\beta\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.8}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \gamma\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}\right] \tag{53.9}$$

第一方程式是按时表达的平衡方程。n, 其余两种是描述接近解决方案的进化最终差异公式。(我们有三个方程式和三个未知的方程: $\mathbf{u}_{t,n}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n}$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}$.

58 β 和 γ 它们是确定稳定性和准确性特征的参数。纽马克的稳定条件 β 方法如下, 表 53.1:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 无条件稳定, 如果 $\gamma \geq \frac{1}{2}$ 和 $\beta \geq \frac{\gamma}{2}$
- 条件稳定, 如果 $\gamma \geq \frac{1}{2}$ 和 $\beta < \frac{\gamma}{2}$ 下列稳定限制: $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\gamma-2\beta}} = 0.551$

表 53.1: 不同方法的稳定条件

方法	类型	β	γ	稳定条件	准确性命令
永久性 加速度	包容性	1/4	1/2	无条件	2
线性 加速度	包容性	1/3!=1/6	1/2!=1/2	$\Delta t \leq 2\sqrt{3}/\omega$	2
中央差异	解释	0	1/2	$\Delta t \leq 2/\omega$	2

53.4.1.1.2 纽约 β 暗示方法 [59] Newmark 的暗示方法以 Eqs 开始。53.7, 53.8 和 53.9 可以重写为:

$$\mathbf{P}_{t,n}^{ext} = \mathbf{M}_{tt} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{C}_{tt} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n} + \mathbf{P}_{t,n}^{int} \tag{53.10}$$

$$\mathbf{u}_{t,n} = \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.11}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \Delta t \cdot \gamma \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t,n} \tag{53.12}$$

已知的数量在时间段 $n-1$ 有 A $(\tilde{.})$ 与

$$\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$
$$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} = \dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$

[60] Eq. 53.11 给予 $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} = \frac{\mathbf{u}_{t,n}-\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}{\Delta t^2 \cdot \beta}$;

[61] 替代 EQ。53.12 我们可以解决 $\dot{\mathbf{u}}_{t,n} = \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}(\mathbf{u}_{t,n} - \tilde{\mathbf{u}}_{t,n})$. 最终取代 EQ。53.10 我们得到了:

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \mathbf{u}_{t,n} + \mathbf{P}_{t,n}^{int}}_{?}$$
$$= \underbrace{\mathbf{P}_{t,n}^{ext} + \frac{1}{\Delta t^2 \cdot \beta}\mathbf{M}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} + \frac{\gamma}{\Delta t \cdot \beta}\mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}}_{\checkmark}$$

[62] 如果在特定 iteration 步骤中的测试解决方案 k 是 $\mathbf{u}_{t,n}^k$, 和 $\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$ 然后, 它不满足运动方程式. 因此, 我们可以为此具体的步骤写下 剩余功率 向量 $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$:

$$\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{u}_{t,n}^k\right) - \mathbf{C}_{tt} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n} - \mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里, $\overline{\mathbf{M}}_{tt} = \frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t\cdot\gamma\cdot\mathbf{C}}{\Delta t^2\cdot\beta}$

63 使用初始固度异常方法, 我们可以解决 $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ 从 $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n} = \mathbf{K}_{eff}\cdot\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ 在哪里, $\mathbf{K}_{eff}$ 是有效的刚度矩阵, 和 $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \mathbf{u}_{t,n} - \mathbf{u}^k_{t,n}$.

64 在灵活的部分, $\mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{K}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}$ 可取代我们可以解决的 $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff}\cdot\mathbf{u}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} + \overline{\mathbf{M}}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n} - \mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}$$

在哪里, $\mathbf{K}_{eff} = \overline{\mathbf{M}}_{tt} + \mathbf{K}_{tt}$ (密集或一致 质量矩阵).

65 最后, 我们解决了 $\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ 和更新 位移 向量 $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ 下一步的 iteration $k+1$:

$$\delta\mathbf{u}^k_{t,n} = \left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1}\cdot\mathbf{P}^{R,k}_{t,n};\quad \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

注明需要将 质量矩阵 转换为一致的 矩阵。

66 注意与 非线性分析 的类似性 $\delta\mathbf{u}$ 等于剩余功率的 刚度矩阵 倍。

53.4.1.2 希尔伯 - 胡格斯 - 泰勒方法

67 纽马克的重大缺点 β 方法是高频噪音在解决方案中持续的趋势。另一方面, 当通过参数添加线性蒸发或人工粘度时 γ 准确度显著下降。

68 此分類上一篇: Hilber-Hughes-Taylor Method (HHT) (也被称为 α 方法), 这将改善数值分散高频, 而不会低估准确度。

69 运动方程 在 HHT 方法中写在 目前时间步骤 n (前进差异) as:

$$\underbrace{\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\mathbf{P}^{inertia}_{t,n}} + \mathbf{P}^{int}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n}$$

寻找这个方程式的一个步骤差异的约定解决方案, 我们写下,

$$\mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1} = (1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

我们注意到,HHT 方法 介绍 $\alpha(\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \mathbf{P}^{int}_{t,n-1})$ 以相同的厚度, 相对的蒸发。(事实上, 人们常说: α 方法提供 数值 damping). 如果上面的方程扩展, 输入蒸汽效应和可能的材料非线性输入, 我们获得:

$$(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \alpha\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} = \mathbf{M}_{tt}\cdot\ddot{\mathbf{u}}_{t,n} + (1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n} - \alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1} + (1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n} - \alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

If $-1/3 \le \alpha \le 0$, $\beta = (1-\alpha)^2/4$, 和 $\gamma = (1-2\alpha)/2$ 然后, 该 α 方法是无条件稳定, 具有第二命令准确性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

70 假设我们在前一阶段获得了答案 $n-1$ 是的。$\mathbf{u}_{t,n-1}$, $\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$ 满足 运动方程 的我们现在 试图在当前时间阶段确定解决方案 n 以 iteration。

71 首先, 我们需要确定有效的外部力量和有效的坚固性。

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2\cdot\beta}\mathbf{M}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}+\frac{\gamma}{\Delta t\cdot\beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}+(1+\alpha)\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{?}$$
$$=\underbrace{(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}+\frac{1}{\Delta t^2\cdot\beta}\mathbf{M}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}+\frac{\gamma}{\Delta t\cdot\beta}(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}}_{\checkmark}$$
$$\underbrace{-(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{n-1}+\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n}}_{\checkmark}$$

72 和 审判解决方案 以 iteration 步 k 是 $\mathbf{u}^k_{t,n}$, 和 $\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}$, 不一定满足运动方程式. 因此, 我们可以为此具体的步骤写下:

$$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}=(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}+\overline{\mathbf{M}}_{tt}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}-\mathbf{u}^k_{t,n}\right)-(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}$$
$$-(1+\alpha)\mathbf{P}^{int,k}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

在哪里, $\overline{\mathbf{M}}_{tt}=\frac{\mathbf{M}_{tt}+\Delta t\cdot\gamma(1+\alpha)\mathbf{C}_{tt}}{\Delta t^2\cdot\beta}$ 和 $\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}$ 是剩余力量 向量.

73 使用初始刚度迭代法，可由下式求得 $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$：$\mathbf{P}^{R,k}_{t,n}=\mathbf{K}_{eff}\cdot\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}$，其中 $\mathbf{K}_{eff}$ 为有效刚度矩阵，且 $\Delta\mathbf{u}^k_{t,n}=\mathbf{u}_{t,n}-\mathbf{u}^k_{t,n}$

74 在灵活的部分, 我们可以表达 $\mathbf{P}^{int}_{t,n}$ 用初始硬度矩阵计算有效的固态矩阵 $\mathbf{K}_{tt}$ as: $\mathbf{P}^{int}_{t,n}=\mathbf{K}_{tt}\cdot\mathbf{u}_{t,n}$.

75 取代我们解决的 $\mathbf{u}_{t,n}$:

$$\mathbf{K}_{eff}\cdot\mathbf{u}_{t,n}=(1+\alpha)\mathbf{P}^{ext}_{t,n}-\alpha\cdot\mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}+\overline{\mathbf{M}}_{tt}\cdot\tilde{\mathbf{u}}_{t,n}-(1+\alpha)\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\tilde{\dot{\mathbf{u}}}_{t,n}+\alpha\cdot\mathbf{C}_{tt}\cdot\dot{\mathbf{u}}_{t,n-1}+\alpha\cdot\mathbf{P}^{int}_{t,n-1}$$

在哪里, $\mathbf{K}_{eff}=\overline{\mathbf{M}}_{tt}+(1+\alpha)\mathbf{K}_{tt}$

76 最后, 我们解决了 $\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$ 和更新 位移 向量 $\mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ 下一步的 iteration $k+1$:

$$\delta\mathbf{u}^k_{t,n}=\left[\mathbf{K}_{eff}\right]^{-1}\cdot\mathbf{P}^{R,k}_{t,n};\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}=\mathbf{u}^k_{t,n}+\delta\mathbf{u}^k_{t,n}$$

77 最后的注意事项:

- α 它引入一个与时间增加的比率增长到节点的振动期。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

- 负面价值观 α 原因 Damping
- If $\alpha = 0$ 我们没有人工蒸发 (能源预防) 正確是 加速度 的常見 (特拉佩西亚规则) 纽马克的 β 方法如果 $\beta = 1/4$ 和 $\gamma = 1/2$.
- 最低值是 $\alpha = -1/3$ 提供最大人工蒸汽。此结果在一个 阻尼比 的约 6% 当时间增加为 40% 研究模式的振动期, 如果振动时间增加, 则较小。
- 这种人工蒸发对于现实时间增加和低频率并不太重要, 但对于高频率却不可忽视。
- 建议使用 -0.05 的默认值。

53.4.2 明确时间集成

78 对于明确的时间融入, 我们在起点上采用了以前产生的差异方程式的轻微变化, 其中包括蒸发的影响。

$$\underbrace{\mathbf{M}\ddot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_I(t)} + \underbrace{\mathbf{C}\dot{\overline{\mathbf{u}}}}_{\mathbf{F}_D(t)} + \underbrace{\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}}_{\mathbf{F}_i(t)} = \underbrace{\mathbf{f}_e}_{\mathbf{f}_e(t)}$$

哪里 $\mathbf{M}, \mathbf{C}$, 和 $\mathbf{K}$ 是质量, 蒸发和坚固的矩阵; $\mathbf{f}_e$ 是外部 荷载 向量; 和 $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}$, 和 $\mathbf{u}$ 它们是最终单元 组合的 加速度、速度 和 位移 vectors。

79 考虑这个方程式的另一种方法是及时检查静态方程。t, 在哪里 $\mathbf{F}_I(t), \mathbf{F}_D(t), \mathbf{F}_i(t), \mathbf{F}_e(t)$ 它们是内、外等弹性力量, 分别。

53.4.2.1 线性系统

80 对于半分歧视的运动方程, 我们采用了 **中央区别方法**. 这种方法是基于位移的时间衍生品的最终差异接近。(速度 和 加速度). 假设在每个时间步骤的移动线性变化, 速度和加速时间 t 是:

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t}\\ \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= \frac{\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

哪里 Δt 是时间的步骤。

81 取代平衡 53.5 我们得到了

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M} + \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)}_{\widehat{\mathbf{M}}}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \underbrace{\mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \underbrace{\frac{2}{\Delta t^2}}_{a_2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\underbrace{\frac{1}{\Delta t^2}}_{a_0}\mathbf{M} - \underbrace{\frac{1}{2\Delta t}}_{a_1}\mathbf{C}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}}_{\widehat{\mathbf{f}}_e^t} \tag{53.13}$$

我们可以解决的 $\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

82 值得注意的是:

- 解决方案是基於 平衡 條件的時間, t.
- 没有 刚度矩阵 的因素化, $\mathbf{K}$ 是必要的 (是的, 不 $\mathbf{K}^{-1}$ 这个词在方程中出现).
- 要启动方法, 我们应该及时确定 位移, 速度, 和 加速度。$-\Delta t$.

83 算法:

1. 格式为 刚度矩阵 $\mathbf{K}$, 质量矩阵 $\mathbf{M}$, 和 阻尼矩阵 $\mathbf{C}$.
2. 初步化 $\overline{\mathbf{u}}^0, \dot{\overline{\mathbf{u}}}^0, \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$ 时间的 $t = 0$.
3. 选择时间步骤 $\Delta t \le \Delta t_{cr}$.
4. 定义常态 $a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$, $a_1 = \frac{1}{2\Delta t}$, $a_2 = 2a_0$, $a_3 = \frac{1}{a_2}$.
5. 计算
$$\overline{\mathbf{u}}^{-\Delta t} = \overline{\mathbf{u}}^0 - \Delta t \dot{\overline{\mathbf{u}}}^0 + a_3 \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^0$$
6. 计算有效的 质量矩阵 , $\hat{\mathbf{M}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$.
7. 三角形 $\hat{\mathbf{M}}$ (不需要, 如果被使用的 质量矩阵):
$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$$
8. 每次步骤:
   (a) 及时确定有效的负载 t:
   $$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M})\overline{\mathbf{u}}^t - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C})\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t}$$
   (b) 及时解决转移问题 $t + \Delta t$
   $$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$
   (c) 如果需要, 及时解决速度和加速、紧张和压力。t
   $$\begin{aligned} \ddot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_0(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}) \\ \dot{\overline{\mathbf{u}}}^t &= a_1(-\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} + \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} &= \mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} \\ \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} \end{aligned}$$
   (d) 下次更新 $t = t + \Delta t$ 然后回到 (a).

84 明确的时间集成有许多优点; 主要的是, 它不需要刚度矩阵的因素化。

85 如果采用集中参数 (而不是一致的) 质量矩阵, 并且没有蒸发, 然后没有因素化是必要的。53.13 减少到:
$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_e^t$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} \tag{53.14}$$

86 因此, 如果 质量 是直径的, 则不需要加重。除此之外, 如果结构 刚度矩阵 不需要三角化, 那么不需要整合全球的 刚度矩阵. 可以证明,

$$\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum_i^n \mathbf{K}_{(e)}\overline{\mathbf{u}}^t = \sum \mathbf{F}_{(e)}^t$$

这意味着 $\mathbf{K}_{(i)}\overline{\mathbf{u}}^t$ 需要平衡 53.14 可在 单元 级别上进行评估, 总结每个 单元 的贡献到有效的 荷载 向量 。这样

$$\hat{\mathbf{f}}_e^t = \mathbf{f}_e^t - \sum_i \mathbf{F}_{(i)}^t - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}(\overline{\mathbf{u}}^{t-\Delta t} - 2\overline{\mathbf{u}}^t)$$

87 由于没有结构性 刚度矩阵 需要集成, 所以非常大的问题可以有效地解决。其中包括近位问题。(线性和非线性) 在 荷载 被应用时, 不断使用。

88 明确方法的一个主要缺点是它只会相匹配, 如果

$$\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}}$$

哪里 ω_{max} 是最高的 固有频率 (或最小的波长) 关于结构 (Courant, Friedrichs, and Lewy, 1967). 记住这 $\omega = \frac{2\pi}{T}$. 如果这种情况被侵犯, 则会出现数值的不稳定性。因此, 首先要进行完整系统的特征值分析。但是, 由于全球结构性刚度矩阵不一定是集成的, 一个上限的估计 ω_{max} 被从

$$\omega_{max} < \omega_{max}^{(e)}$$

哪里 $\omega_{max}^{(e)}$ 是单端的最大频率 单元 (通常是最小的). 它可以从

$$\det(\mathbf{K}^{(e)} - (\omega_{max}^e)^2\mathbf{M}^e) = 0$$

89 在非线性问题上, $\mathbf{K}$ 这是坦克的坚定性。

90 请注意, 决定的 自我价值 (相应的 ω^2) 一个简单的问题, 没有冲浪 ($\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$) 可以通过扩展结果的 矩阵 的 行列式 或简单地确定其自身值来解决。$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$.

91 相反,

$$\omega_{max}^e = \frac{2c}{L}$$

哪里 c 是音波速度, $c = \sqrt{E/\rho}$, 和 L 是单元的代表性长度 (e).

92 基本上, 这意味着 Δt 它必须足够小, 以免每步传播超过一个 单元 的信息。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.4.2.2 非线性系统

93 在非线性系统中, 增加的转移 $\Delta\overline{\mathbf{u}}$, 增加压力和压力, 以及刚度矩阵按更新

$$\begin{aligned}\Delta\overline{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} - \overline{\mathbf{u}}^{t}\\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}\Delta\overline{\mathbf{u}}\\ \Delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}_i^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\sigma}^{t} + \Delta\boldsymbol{\sigma}\\ \mathbf{K}_i^{t+\Delta t} &= \int_{\Omega}\mathbf{B}^T D_i^{t+\Delta t}\mathbf{B}\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

在上述算法中, 我们必须评估 $\mathbf{K}_i$ 每次步行。

53.5 数值方法 为 动力分析

94 解析解 的运动方程仅限于简单的系统和理想化的负载。对于现实的结构和兴奋, 数值时间步行方法是必不可少的。这些方法通过按时步骤计算差异值来接近持续响应。Δt 分开。

53.5.1 中央区别方法

95 中央区别方法 接近 速度 和 加速度 使用最终差异:

$$\dot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \tag{53.15}$$

$$\ddot{u}_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} \tag{53.16}$$

按时替换到 运动方程 t_n:

$$m\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2} + c\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} + ku_n = F_n$$

解决为 u_{n+1}:

$$u_{n+1} = \frac{F_n - (k - 2m/(\Delta t)^2)u_n - (m/(\Delta t)^2 - c/(2\Delta t))u_{n-1}}{m/(\Delta t)^2 + c/(2\Delta t)}$$

96 中央区别方法是 **明确的**: u_{n+1} 直接从已知的值计算 t_n 和 t_{n-1}. 但是, 它仅是条件稳定; 时间步必须满足:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{2}{\omega_n} \tag{53.17}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.5.2 例题 53.5: 中央差异稳定时间步骤

中央区别方法 如果一个系统的统治期 $T_n = 0.50\,\text{s}$, 什么是中央差异稳定限制?

来自 EQ。(53.17) is:

$$\Delta t < \frac{T_n}{\pi} = \frac{0.50}{3.1416} = 0.159\,\text{s}$$

一个常见的实用选择是采取更小的步骤。(是的, $\Delta t = 0.05\,\text{s}$) 提高准确性, 同时满足稳定性。

高频模式的系统 (相似于最终的单元模型) 这个限制可以是非常有限的。

53.5.3 纽马克 - 贝塔方法

97 纳坦 • 纽马克 (1910–1981) 开发了一系列方法, 根据每个时间步骤中的加速度的假设变量。新闻 -β 方法 假设:

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_n + \beta \ddot{u}_{n+1}\right](\Delta t)^2 \dot{u}_{n+1} \quad = \dot{u}_n + [(1-\gamma)\ddot{u}_n + \gamma \ddot{u}_{n+1}]\,\Delta t$$

参数 β 和 γ 控制估计的 加速度 变量:

- $\gamma = 1/2, \beta = 1/6$ 线性 加速度 (条件稳定)
- $\gamma = 1/2, \beta = 1/4$ 平均值 加速度 (无条件稳定)
- $\gamma = 1/2, \beta = 0$ 中央区别 (明确, 条件稳定)

98 平均 加速度 方法 ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$) 它特别受欢迎, 因为它是无条件稳定的 - 每个时间步骤给出了有限的响应, 尽管准确度下降到大 Δt. 它也是一般的, 这意味着 $\ddot{u}_{n+1}$ 它在两侧出现, 需要解决每个步骤的方程式系统。

99 MDOF 方程式 (36.15),Newmark 方法导致:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{n+1} = \hat{\mathbf{F}}_{n+1}$$

在哪里有效的硬度 $\hat{\mathbf{K}}$ 有效的力量 $\hat{\mathbf{F}}_{n+1}$ 包含来自质量和 Damping 的贡献。这个系统必须在每一个步骤中解决, 使随机方法的计算比明确的方法更昂贵, 但使用更长时间步骤的能力往往会补偿。

53.5.4 超级模式 vs. 直接集成

100 对于 MDOF 系统的 动力分析 有两种一般策略:

101 **模型超级** 将相结合的方程式转化为不相结合的大型方程, 解决每个 SDOF 大型的方程并重建物理反应。优点: 物理洞察力、高模式的能力、有少数参与模式的线性系统效率。缺点: 需要 特征值 解决方案, 仅限于线性系统, 必须有 阻尼矩阵 可分辨。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

102 **直接融入** 适用时间步行方法, 直接应用于结合的 MDOF 方程式, 而无需模型转变。优点: 处理非线性系统, 任意蒸发, 不需要特征值解决方案。缺点: 大型系统的计算成本昂贵, 物理洞察力较少。

103 对于被 地震 加载的线性系统, 通常是优先的模型超级。為 非线性分析 (出生, 接触, 大变形) 直接融入是必要的。

验证与验证

在计算动态中, 必须区分验证和验证。**验证** 问 数值 算法及其实施是否正确解决所述方程式 (时间步骤, convergence 检查和代码基准). **批准** 问所述方程式是否以足够的忠诚度代表物理系统 (模型形状、边界条件、冲浪和宪法假设). 一个模拟可以被验证, 但仍然是无效的, 两者之间的混乱是一个常见的错误信心来源在数值结果。

53.6 连续系统

104 配有分布的质量和坚固性 - 板块, 盘子, 支柱 - 由部分差异方程式统治。雖然数值方法最終會分辨這些系統, 但理解解析解的理解也會提供模式形狀和自然頻率的洞察力。

53.6.1 波的轴振动

105 考虑一个单一的长度栏 L, 横截面积 A 模块 E, 和 密度 ρ. 位移 轴 $u(x,t)$ 满足:

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或, 定义波速 $c = \sqrt{E/\rho}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

这就是一个维度波方程式。

106 为了自由振动, 我们正在寻找形状的解决方案。$u(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$. 替代给了:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0$$

与解决方案 $\phi(x) = A\cos(\omega x/c) + B\sin(\omega x/c)$. 限制条件决定允许的频率和模式形式。对于两端固定的条纹:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.6.1.1 例题 53.6: 波速和钢材 tie-rod 的轴自然频率

✳ 固体圆形钢材 tie-rod 有直径 $d = 50$ mm 和长度 $L = 3.0$ m. 两端都固定了。(硬到硬的终端板). 钢材 属性: $E = 210$ GPa, $\rho = 7\,850$ kg/m^3. 定义: (a) 长波速度; (b) 第一三种自然轴频率; (c) 如何将这些与典型的地震和风频率进行比较内容, 以及这对结构模型意味着什么。

解决方案。

(a) 长波速度。

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{7\,850}} = \sqrt{2.675 \times 10^7} = 5\,172 \text{ m/s}$$

这是一个长度应力波沿着线路的速度。● 大约是空气中的声音速度的 15 倍。

(b) 自然频率 Axial Frequency (固定 - 固定栏).

两個端子上固定的酒吧, $\phi(0) = \phi(L) = 0$ 需要 $\phi(x) = B\sin(\omega x/c)$ 与 $\sin(\omega L/c) = 0$, 给予 $\omega_n L/c = n\pi$, 因此:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f_1 = \frac{1 \times 5\,172}{2 \times 3.0} = 862 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 = 1\,724 \text{ Hz}, \qquad f_3 = 3f_1 = 2\,586 \text{ Hz}$$

相应的自然时期是 $T_1 = 1/862 = 1.16$ ms, 比任何 结构分析 在地震或风的时间步骤更短工程师 (Δt 通常是 0.005–0.02 s).

(c) 与地震和风频率的比较。

来源	主流频率	与轴性线路模式的关系
地震 地面动作	0.1–10 Hz	$< f_1/86$
风味光谱	0.01–2 Hz	$< f_1/430$
机器振动	1–100 Hz	$< f_1/8.6$
Axial Rod 模式 1	862 Hz	—

评论。 这个比较中有几个重要后果。

1. **轴模式从来没有受到地震或风负载的兴奋。** 频率分离是三种大小命令。這是一般模型假设的数学理由这种轴性变形可以是 **忽略** (无限轴坚定性) 在侧面荷载分析框架结构 (§53.2.1).
2. *Axial* **模式控制了明确的集成关键时间步骤。** 稳定界限 $\Delta t < 2/\omega_{\max}$ 对于一个字符串 单元 的长度 ℓ 是 $\Delta t < \ell/c$. 為 A 3 m 单元:

$$\Delta t < \frac{3.0}{5\,172} = 5.8 \times 10^{-4} \text{ s}$$

这比准确度所需的时间步骤小 10∼30 倍。在地震反应中, 使明确的方法昂贵的模型包括二氧化物。复杂方法 (纽约,HHT) 围绕此无条件稳定。

3. **波传播在影响问题上很重要。** 如果绳子受到终端影响, 则应对由应力 - 波传播在 5 172 m/s, 分析时间为波浪旅行时间 $L/c = 0.58$ ms. 这就是制度的明确的动态代码 (DYNA, ABAQUS / 解释) 需要时间步骤微秒顺序 - 一个完全不同的计算世界地震分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.6.2 转向的振动 Beams

107 Euler-Bernoulli 梁 对转振的方程式是:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t)$$

哪里 $v(x,t)$ 是转换 位移, EI 是灵活的硬度, 以及 $q(x,t)$ 是 分布荷载。

108 自由振动 ($q = 0$) 寻找 $v(x,t) = \phi(x)\sin(\omega t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4\phi = 0, \qquad \beta^4 = \frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

总体解决方案是:

$$\phi(x) = C_1\cosh(\beta x) + C_2\sinh(\beta x) + C_3\cos(\beta x) + C_4\sin(\beta x)$$

兩端的邊界條件為四個連續提供四個方程式, 造成特征值問題。β.

109 只需支持的 梁 的长度 L:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

自然频率增加如 n^2, 快速分离较高的模式和较低的模式。基本频率 ($n = 1$) is:

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

110 其他边界条件 (固定、固定、cantilever 等。) 超越频率方程应以数为准。频率指数表在标准参考中可用。

53.7 非线性动态

111 前部分采取了线性行为: 与移动和速度相对的力量。真正的结构, 特别是在强大的地震冲击或极端负载下, 显示非线性反应。非线性源于物质产量、地质效应 (大型迁移), 接触/错误行为, 和震动。

53.7.1 非线性来源

112 **材料非线性** 发生时, 压力和压力关系是非线性的。对于钢材而言, 初始的弹性行为在应力超越屈服强度时会产生成果。对于混凝土, 切割甚至在服务负载中也引入非线性。宪法关系必须适当模型 (骨折, 损伤等。).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 53.2: 不同类别结构的代表性蒸汽比例

结构类型	阻尼比 ζ
钢材、合金, 预加油	0.01–0.02
钢材, 折叠, 预交	0.02–0.03
钢筋混凝土 未分手	0.01–0.02
钢筋混凝土 被打破	0.03–0.05
预应力混凝土	0.01–0.02
马赛, 无情	0.02–0.03
木材结构	0.05–0.10

113 **几何非线性** 出现时, 转移是足够大的, 以便平衡方程式必须写在扭曲的配置上。和 P-Δ 列中的效应　由于通过侧移行动的轴力而引起的瞬间增强　是常见的例子。

114 **联系非线性** 它发生在组件可以分开或接触的界面上。基础隔震 携带、扩张关节和切割部分都显示这种行为。

53.7.2 Ductility 和 Capacity Design

115 和 **位移 双重性** μ 定义为最大转移与产生的转移的比例:

$$\mu = \frac{u_{\max}}{u_y}$$

结构设计以无缝地产生和扭曲, 可以比其弹性能力可能更强大地生存地震。这就是基本原则 **能力设计**: 接受在仔细详细的区域进行输出, 同时保护闪光 单元.

116 强度减少和双重需求之间的关系被捕获 R-μ-T 关系。对于在 速度 敏感范围内的时期结构:

$$R \approx \mu$$

这个 “平等 位移” 规则规定, 产量结构的最大 位移 相当于具有相同期限的弹性结构的最高值 - 发射减少了强度需求, 而不会增加 位移.

53.8 实用考虑

53.8.1 沉浸在现实结构中

117 结构的测量蒸发率取决于材料、振动宽度和建筑类型。典型值包括, 表 53.2

这些是顺序大小值; 实际的蒸发取决于细节, 并应在可能时测量。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

53.8.2 土-结构相互作用

118 结构的动态反应不仅取决于结构本身, 而且还取决於支持土壤。**土-结构相互作用** (SSI) 它可以显著影响输入运动和系统频率。灵活的土壤增加了系统的有效期, 并通过辐射能量进入土壤来引入额外的蒸发。对于软土上的坚固结构,SSI 效应可以显著; 对于岩石上的灵活结构, 它们是不可忽视的。

53.8.3 质量 Dampers 混凝土

119 质量 Damper 直播 (TMD) 是附属 质量 - 春蒸汽系统, 粘贴到主结构并调向特定的频率。当初级结构在其固有频率时振动时,TMD 在对立中旋转, 减少了初级反应。TMD 在高楼使用 (台湾 101) 长寿的桥梁, 以减少风引发和地震振动。

120 TMD 的最佳突变为一个不受压缩的初始结构是:

$$\frac{\omega_d}{\omega_n} = \frac{1}{1+\mu_m}, \qquad \zeta_d = \sqrt{\frac{3\mu_m}{8(1+\mu_m)^3}}$$

哪里 $\mu_m = m_d/m$ 是 质量 比例 (通常是 0.01 到 0.05), ω_d 是 TMD 频率, 以及 ζ_d 是 TMD 阻尼比。

53.8.4 基础隔震

121 基础隔震 引入灵活的层 (通常是弹性带或滑板系统) 结构与基础之间。隔离结构有更长的时间, 将其远离典型的地震地面动作的高能量内容。隔离层还提供额外的蒸发。基础隔震对于固态、短期结构特别有效, 广泛用于医院、紧急设施和历史建筑。

53.9 总结

122 本章介绍了结构动力学的基本原则, 从单级自由振动器到多级自由系统, 从自由振動到强迫响应, 从解析解到数值方法。关键概念包括:

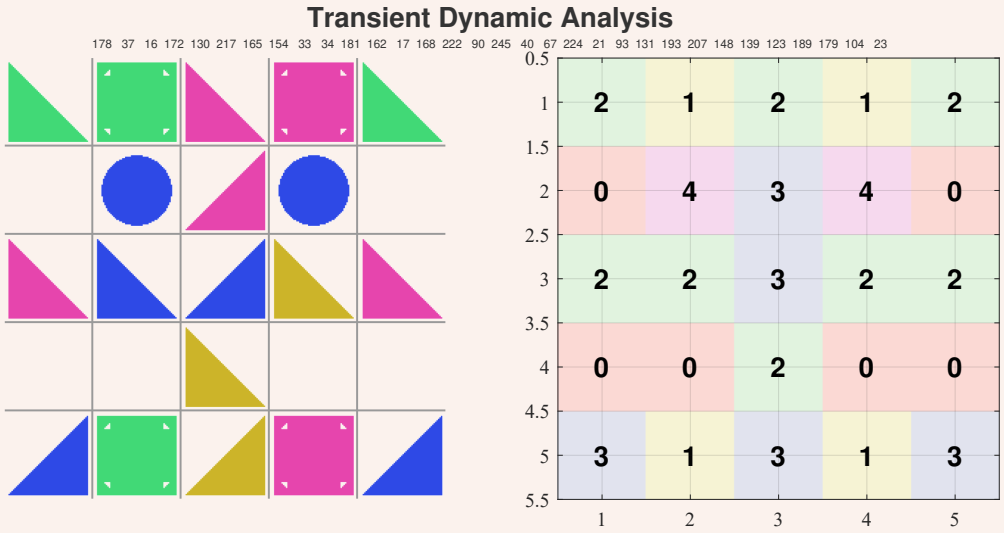
1. 运动的平衡, 表达动态平衡的无缝、倾斜、弹性和应用力量。
2. 固有频率 和 阻尼比 作为内部系统属性, 控制动态响应。
3. 自由振动揭示了自然的振动模式。
4. 和谐反应和响应现象。
5. 杜哈梅尔是对随意负载的反应不可或缺的。
6. 回复光谱作为地震工程的实用工具。
7. 模块分析将相结合的 MDOF 方程式转化为独立的 SDOF 方格。
8. 数值 时间步骤方法, 以计算对复杂的兴奋作出反应。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9. 非线性动态, 歇斯底里, 以及在地震设计中的二元性作用。

123 结构动力学 扩展了早期章节中开发的 静力分析 以涵盖时间变化的现象。相同的原则 平衡, 变形协调, 和宪法关系 应用, 但现在在时间依赖的背景下, 无效和能量分散发挥着核心作用。这些概念的掌握对风、地震、机械振动和其他动态负载的结构设计至关重要。

提前参考。 在这里计算的决定性反应量 (时间史、峰值要求和衍生措施) 在章节中使用 72 作为输入到 基于性能的地震工程。



具体的分类, chapter H

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Part IV

高级：非线性与其他专题

这个卷, 第三个关于结构分析的综合系列中, 开发了先进的概念, 重点是非线性行为和塑料性, 对于评估民用基础设施真正性能至关重要。它分为以下组:

I 塑料 在材料、部分和结构层面进行模型。

2、非线性分析 物质和地质。

3、基于纤维 1D 单元表述 (基于稳定性和灵活性) 和合适的宪法模型。

四 PBEE 完整覆盖性能基 地震工程。从危险、风险和不确定性概念的介绍开始, 我们将涵盖与 PBEE 相关的三个分析: 危险, 结构和损失。最后, 这本书以 PBEE 框架的全面覆盖, 将概率主义概念与非线性反应预测集成到支座合理性能评估和设计中。

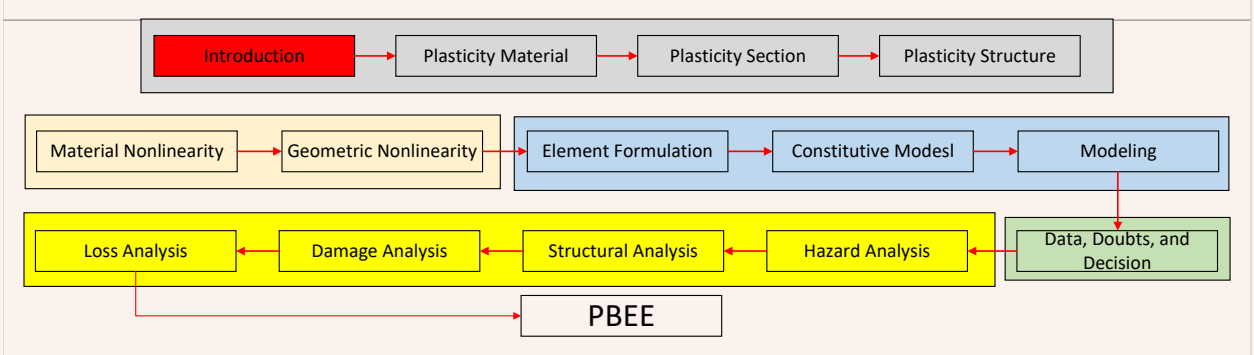
审阅稿

54 引入

摘要

第四本书的这篇介绍章, 涵盖非线性分析, 开始讨论非线性反应的根源原因以及它们如何影响刚度矩阵。**B** 或 **D** (相应地质和物质非线性). 这会导致各种类型的分析, 包括第一订单、第二订单、2 线、非线和限制负载, 可能导致不稳定。接下来, 我们讨论了安全的概念, 它转向设计代码的作用和进化。这些代码旨在确保足够的安全性, 历史上基于相关术语规则, 更最近, 现代考虑到失败的可能性。该章节指出, 确定真正的安全因素 (即不基于设计代码) 或确定逐步失败需要非线性分析, 这是第四本书的主要焦点。

54.1 引入 1607
54.1.1 非线性来源 1607
54.1.2 为什麼 非线性分析 1608
54.2 结构非线性分析类型 1610
54.3 增長 荷载 / 位移 1612
54.4 安全 1613
54.4.1 术语 1613
54.4.2 安全 & 负载 1613
54.5 设计代码 1614
54.5.1 引入 1614
54.5.2 进化: 古代 1615
54.5.3 现代时代 1616
54.5.4 总结 1619



54.1 引入

54.1.1 非线性来源

1 到目前为止, 我们已经限制自己在线性弹性问题与小变形 (除章节外 29). 这也意味着我们暗示地假设物质具有无限的力量。(但从来没有真正依靠这个假设。).

2 当然, 没有任何物质具有无限的力量, 在某个时刻, 所有人都开始以弹性方式行事, 最终破裂。

3 第四本书将以这种方式讨论这两种非线性形式: 一) 地质和物质。

4 事实上, 我们简要考虑了大歪曲的例子。(或 几何非线性) 在章节 29, 并检查了一个问题显示在图 54.1 从 §29.2.3. 这一次, 我们将在最终的单元差异化背景下正式解决问题。

审阅稿

5 至于材料非线性, 它们来自:

钢材 它有一个线性压力紧张曲线, 直到产量点。在这个时候, 我们有麻烦的硬化和过度变形。

混凝土 有一个非线性压力曲线开始周围 $0.6f_c'$ 到 抗压强度 (在 应变 周围 0.003) 然后放松。注意, 强度将随着限制而增加 (由 Shear 增強). 至于抗拉强度, 它显著低 (周围 0.1 f_c').

6 虽然我们将使用物质内在的非线性应力-应变关系, 但我们也可以提到部分非线性的反应。$M-\Phi$ 或 $M-\theta$ (曲率 或 转角).

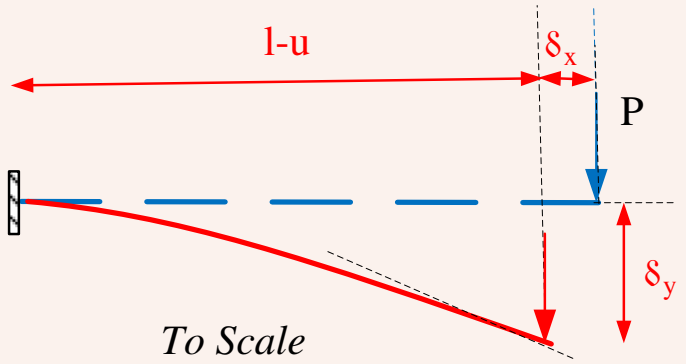


图 54.1: 地质非线性, 大差异例子 (**B**), 29.2.3

7 如下所示, 我们基本上有两种模型来捕捉 1D 单元的非线性反应。

分布 塑性 在那里, 塑料化发生在整个单元沿线。

彩色 塑性 塑料反应限于单元的尽头, 线性弹性反应在中间。

8 钢材 和 混凝土 的非线性反应显示在 图 中 54.2. 因为这些曲线将经常使用在 **连续** 单元的结尾, 在本书的背景下 (专注于 1D) 单元 将用于纤维 (比亚克西亚) 或加层 (单元的 bend) **分布 塑性** 模型

9 图 54.3 描述了 Lumped 塑性的组成模型。答案 (灵活的) 它最常被一瞬间曲线图, 有时也被一刻旋转图捕获。

54.1.2 為什麼 非线性分析

10 虽然线性弹性分析是为设计或初步安全评估提供的, 但非线性分析必须在需要完整结构反应时进行, 故障 荷载 应尽可能准确地确定。“真实的” 需要找到安全因素。

11 正如前一章所表明的那样, 我们不能依靠 (主流) LRFD 可以评估真实的 安全系数, 或者进行对部分损害负责的分析。这将需要一个非线性分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

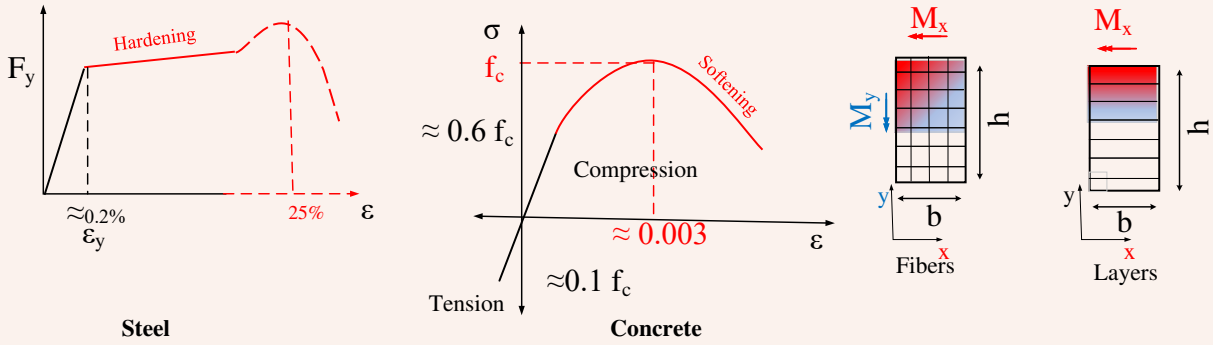


图 54.2: 材料非线性, 纤维 (**D**)

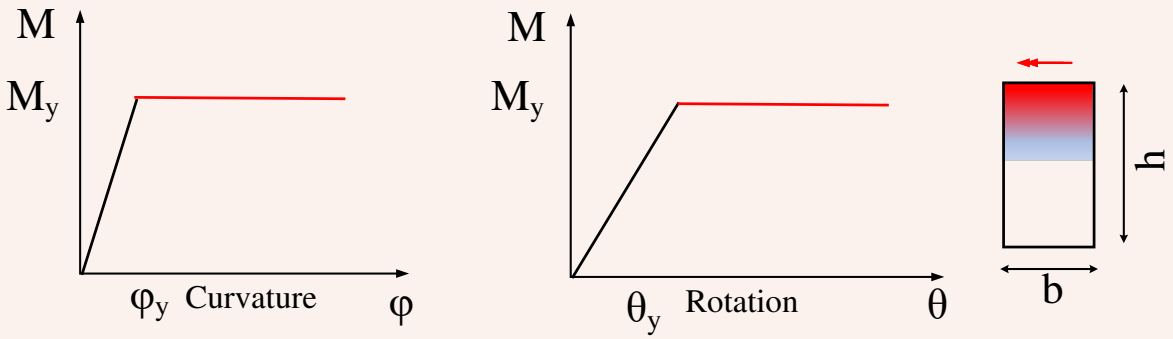


图 54.3: 材料非线性 部分 (**D**)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

12 在这种情况下, 简单的线性弹性分析将过度估计荷载峰值, 或者低估转移。在第一种情况下, 解决方案可能导致不必要的逆转; 在第二种情况下的潜在危险情况, 由于意想不到的大型迁移, 图 54.4. 在两种情况下, 应力重新分配不被捕获, 并且将无法区分定位于全球失败。

13 在线性弹性分析中, 我们将过度评估容量, 并低估位移.

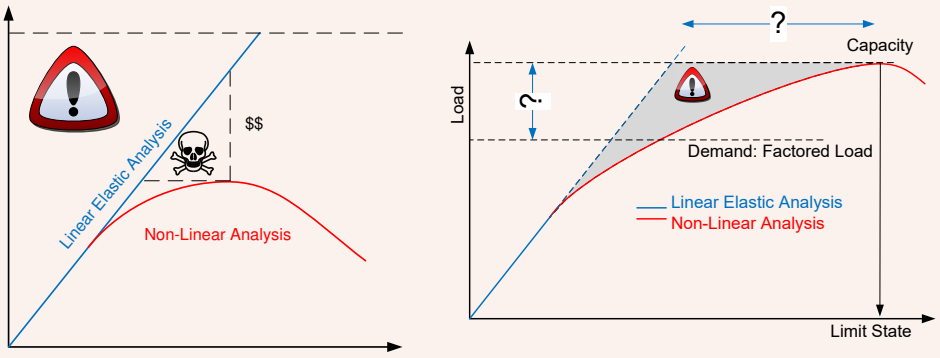


图 54.4: 线性 *vs.* 非线性分析

14 应该始终记住, 非线性分析不是工程良好的常见意义的替代品; 它只应该是常见的后来的最后一个解决方案, 线性分析, 并且简化的方法已经耗尽了。理想情况下, 它应该进行验证/定量一个固定的假设。

54.2 结构非线性分析类型

15 如上所述, 有两种非线性来源。第一种是由非线性物质反应引起的, 第二种是由于大型转移。

16 在元素密度矩阵的形成中, 它们通过 (Eq. 50.12)

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

B 第一, 和 **D** 对于第二个。

17 在非线性分析的背景下, 这可以重新写作为

$$\mathbf{K}^i_{tan} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^i_{tan} \mathbf{B} d\Omega$$

18 他们将为不同类型的分析提供起源, 表 54.1 取决于哪个是非线性。在此表中, 我们还包括关键 (双重化) 分析 (二、屈曲).

19 相应的负载转移曲线在 Fig 中显示。54.5. 也表明了无症状值的

20 表述 基于未形成的自由体图表, 如 **拉格兰**, 而那些必须负责破坏的人则被称为 **乌利亚**.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 54.1: 结构分析 水平表格

		D			
	自由体图 基于	不变的形状		扭曲的形状	
		弹性 (线性)	无情 (非线性)	弹性 (线性)	无情 (非线性)
B	1st 命令 (线性)	1 (**D**:L-**B**:L)	2 (**D** 答:NL-**B**:L)	关键 荷载 (屈曲)	
				5 弹性	6 无线
	2nd 命令 (非线性)	扭曲的形状			
		3 (**D**:L-**B**:NL)	4 (**D** 答:NL-**B**:NL)	-	-

B 几何非线性; **D** 材料非线性.

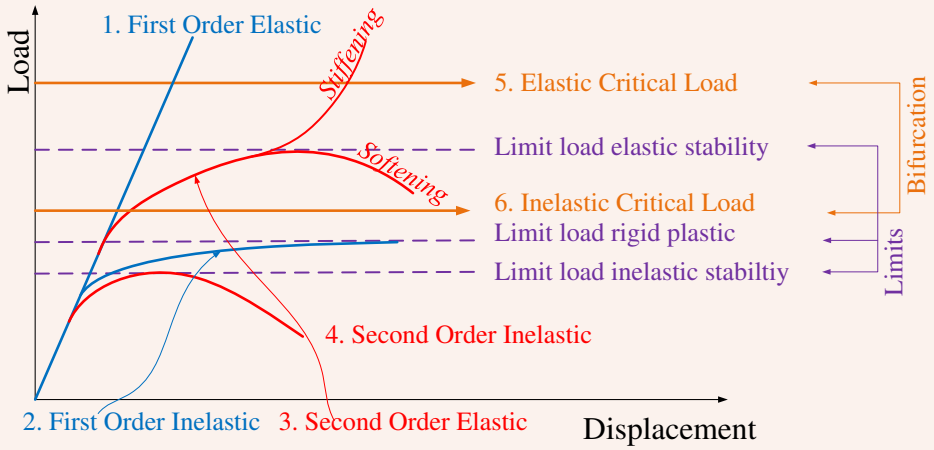


图 54.5: 类型 结构分析

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

增加分析: (加重货物、转移或两者) 通过牛顿的方法 (典型), §59.3.1.1.

1 (D:L-B:L) • 不变的形状 这是最常见的情况, 线性弹性。通常是可接受的服务负载。对于时间依赖的情况, 我们必须考虑维斯科弹性模型。

2 (D 答:NL-B:L) • 不变的形状 第二个最常见的分析形式, 通常进行寻找最终/异常负载。需要 PBEE (下面看).

3 (D:L-B:NL) • 弹性 考虑到影响的 终结变形 和分散, 平衡方程式是从形状的地质上写出来 (乌利亚), 不考虑物质非线性, 可能能够检测到 双重化 或增強硬度 (当一个会员受紧张轴荷载的约束时). 分析的 电缆、网络、管道结构.

4 (D 答:NL-B:NL) • 无线 平衡的方程式, 写在形状变形的地质学方面, 可以涉及到地质和物质的非线性。最适合确定失败或最终负载。分析的最复杂形式, 用于金属形成模拟, 结构分裂。(导弹影响).

二、双重分析: 同值分析将导致弹性关键负载 (屈曲). 请注意, 我们没有相应的负载转换曲线, 但更 “屈曲 模式”.

5 双重; 弹性

6 混合; 无线性

21 桌子 54.2 总结分析不同非线性分析的假设。

表 54.2: 不同分析水平的相互关系

	1	2	3	4	5	6
D	L	NL	L	NL	L	NL
B	L	L	NL	NL	NL	NL
FBD	无奈。	无奈	防。	防。	防。	防。
分析	英格兰	英格兰	英格兰	英格兰	BIF	BIF

54.3 增長 荷载 / 位移

22 在结构的非线性分析中, 负载被逐步应用, 并在每个增加结束时寻求解决方案:

1. “打破下” 外部 荷载 在 n 加大 (他们不需要平等; 因为我们接近预期的峰值荷载, 建议减少增加的一个。).
2. 在每个步骤中, 应用加重负载 vector。$\Delta \mathbf{P}_i$.
3. 解决相应的 位移。$\mathbf{u}_i$, 这肯定会满足平衡 (分析的概念, 但不是明确的).
4. 更新 荷载 和 位移 vectors

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta \mathbf{P}_i$$
$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

23 在暗示解决方案中, 需要额外的 iterative loop 以确保 平衡 (几乎) 满意的。

24 虽然在大多数分析中, 荷载是不断应用的, 但这种解决方案策略可能无法预测后峰答案。如果需要的话, 转移向量。(代替负载向量) 需要加大地应用。

54.4 安全

54.4.1 术语

25 最终, 非线性分析只是一个解决结构的真正安全的车辆。与此相关的术语是各种概念, 将在本书中讨论。

26 **安全** 指一个结构的状态, 当它能够抵抗在其预期的服务寿命中可能遇到的负担和环境条件, 而无需经历故障或崩溃。安全性通常是通过比较实际负载和压力, 一个结构受到了它的能力抵抗这些负载与压力, 由分析和测试确定。

27 **安全边界** 另一方面, 它指的是实际负担的数量, 并强调一个结构体验低于其抵抗这些负担和压力能力。安全边界是根据实际负载和压力之间的差异, 以及结构能够抵抗这些负载与压力的能力, 分为能力。

28 **安全因素** 这是一个设计标准, 负责荷载和材料强度的不确定性。这是一个结构可以处理的最大 荷载 的比例, 与所需的 荷载. 它提供一个泡沫, 以确保安全和可靠性。

29 **风险评估** 是识别、分析和评估与项目或系统相关的风险的过程, 以缓解潜在危险。

30 **危险性分析** 它是一种用于识别潜在危险的技术, 并评估其严重性和可能性。它有助于制定防止事故的安全措施。

31 **失败模式** 它是一种系统的方法, 以确定系统中的潜在故障模式及其对系统性能的影响。它有助于优先考虑风险, 并实施纠正措施。

32 **风险概率评估** 定量分析, 利用概率来评估不同失败场景的风险和其潜在影响。

33 **回报** 包括额外的组件或系统, 在故障的情况下可以承担, 增加整体可靠性和安全性。

34 **可靠指标** 是对系统或组件的安全性或可靠性的衡量措施; §N.

35 **错误的宽容** 一个系统能够在缺陷或错误的情况下继续正常运作。

36 **安全危机系统** 它是一个系统, 其失败可能导致对人、财产或环境造成重大损害。这些系统需要严格的安全措施。

54.4.2 安全 & 负载

37 从材料非线性应力-应变曲线开始, 我们在各种假设下转向预期的结构非线性的反应, 现在我们试图在这些曲线下调整荷载。

38 收费被讨论在 chapter 18但在非线性分析的背景下, 一个特定的负载在全球负载转移曲线中适合哪里? 如何确保安全, 以及我们需要最大的安全边缘。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

39 此分類上一篇: 图 54.6, 在哪里

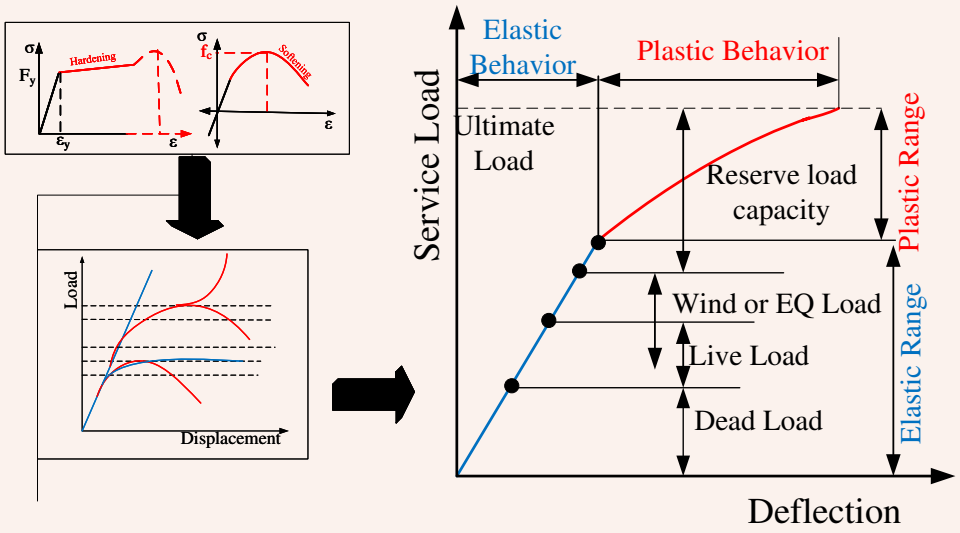


图 54.6: 负载漏洞曲线和各种响应范围

40 由于明显原因, 我们不希望服务负担引发结构的无缝反应。这样做是通过实现足够大的**安全因素**. 但是, 在罕见但高强度的负载的情况下, 我们可以安全地 (但是要小心) 降低安全边界 (这就是一个好工程师可以区分自己。). 在任何情况下, 我们不希望超越弹性范围。(虽然可以超越真正极端的地震兴奋, 如我们将看到章节 72) 用 Ultimate/Collapse 荷载 播放。为了防止这种出现, 会导致过度昂贵的超设计。

54.5 设计代码

54.5.1 引入

41 安全要求现在在设计代码中包含。

42 设计代码在提供标准化指南和建筑设计、建设和维护要求的结构安全方面起着关键作用。基础设施。

標準化: 设计代码提供了一系列规则和程序, 工程师和建筑师必须遵循。这种标准化确保结构使用接受的原则和实践进行设计, 从而减少错误和缺陷的风险。

安全边界: 设计代码包含对物质属性、负载条件和环境影响的不确定性的安全因素和边缘。这些安全边界有助于确保结构能够抵抗意想不到的压力和负担, 而不会失败。

材料规格: 代码指定可以在建筑中使用的材料的类型和程度。通过标准化材料特性, 如强度和耐用性, 设计代码确保仅适当的材料被使用, 提高结构的整体安全。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

荷载 评论: 设计代码提供计算一个结构必须支持的负载的指南, 包括死亡负载 (永久静态力量) 生活负载 (临时或移动力量) 环境负担 (风, 地震, 雪) 随机负载 (爆炸、爆炸). 准确的荷载计算对于确保结构能够安全地携带这些力量至关重要。

结构分析 设计代码描述分析结构行为在各种负载条件下的方法。其中包括进行应力分析、稳定性分析和动力分析的指导方针, 帮助工程师预测结构将如何应对不同的场景。

地震设计: 在受地震影响的地区, 设计代码包括对地震设计的具体规定。这些规定确保结构是为了抵抗地震势力而设计的, 从而减少在地震期间发生灾难故障的风险。

质量控制和检查: 设计代码要求在整个建设过程中进行质量控制程序和定期检查。这有助于确认建筑工作是否符合设计规格, 以及任何偏差或缺陷的迅速解决。

更新和修订: 设计代码定期更新, 以反映新的研究发现、技术进步和从过去的结构失败中学到的教训。这种不断改进过程确保设计代码在促进结构安全方面保持相关和有效。

法律和法规遵守: 遵守设计代码往往是法律要求。基于设计代码的建筑规则由当地当局执行, 以确保所有建筑项目都符合最低安全标准。不遵守可能导致法律后果, 包括罚款、罚款和要求进行昂贵的修改。

职业责任: 遵守设计代码是工程师和建筑师职业责任的一个基本方面。它表现出对公共安全的承诺, 并有助于维护客户、监管机构和公众的信任和信任。

54.5.2 进化: 古代

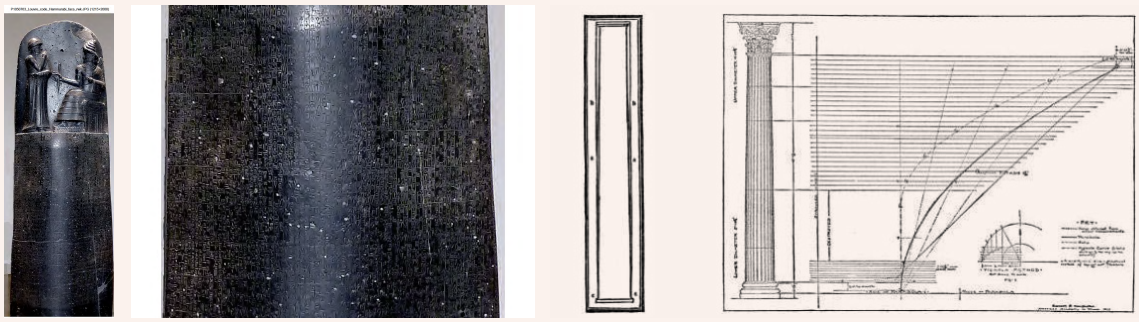
54.5.2.1 梅索波塔米亚; 哈穆拉比

43 哈穆拉比的代码 (1780 BC) 包括与建筑有关的规定。在这个强迫的石头钢从一个单一, 四吨的板块 (黑色) 二元,282 个编辑是以 if-then 形式写的 (如今, 我们将把它们称为决策逻辑表。), 图 54.7a. 对于现代建筑工程师特别重要:

> *228.* 如果一个建筑师为某人建造一间房子, 并完成它, 他将给他两支谢克尔的费用。
> *229* 若有人为某人建造一座房子, 而不正确地建造它, 他所建造的房子倒下, 杀死他的主人, 那位建筑师就被打死。
> *230.* 如果他杀死主人的儿子, 那造物主的儿子将被处死。
> *231.* 如果他杀死主人的奴隶, 那末, 他将为奴隶付给房子的主人。
> *232.* 如果它破坏了财产, 他将为一切被毁灭的赔偿; 因为他不正确地建造这座房子, 他建造并倒塌, 他会从自己的手段重新建造。
> *233.* 如果一个建筑师为某人建造一栋房子, 即使他还没有完成它; 如果墙壁看起来很平滑, 建筑师必须用自己的手段使墙壁坚固。
>
> 哈穆拉比代码 (1780 BC)

44 然而, 代码的硬度是平衡的。(历史上第一次) 以无辜的概念, 直到被证明有罪。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 哈穆拉比的代码 (莫斯 é 卢浮宫)　　(b) 维特鲁威《建筑十书》第四卷

图 54.7: 古代设计代码

54.5.2.2 罗马; 维特鲁维亚

45 维特鲁维亚 (Vitruvius, 1960), (详细讨论在 §6.3.1 和 15.2.1) 十 **关于建筑的书籍** 它可以被认为是最早的设计代码之一。

46 第四章 第三本书 (寺庙的基础与基础) 图 54.7b 开始与

> 这些作品的基础, 如果可以找到, 应从坚固的地面上取出, 并在工作大小似乎需要的程度上将其放入坚固地面。整个基础结构应该是尽可能坚固的。在地面上, 让墙壁放在柱子下方, 厚一半的柱子应该是, 所以低可能比更高。因此, 他们被称为 “斯特里奥巴” 因为他们采取荷载。而且, 基地的预测不应该超越这个坚固的基础. 墙厚度同样应保留在地面上, 这些墙之间的间隔也应被覆盖或填满硬地板, 以保持墙壁的分离。
>
> 维特鲁维亚, 第四章, 第三书

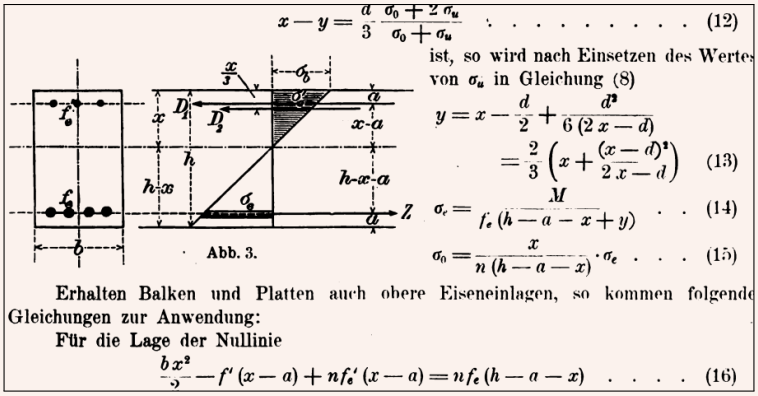
54.5.3 现代时代

47 显而易见的古老 “代码” 他们都是基于从一代传递给其他人的鼓的规则。他们被用在哥特式大教堂的设计中 (§4) 阿克斯 (§31) 和其他人。直到加利利奥 (§6.6.2) 第一次引入实验机械, 并且强调的概念不能忽略 “代码” 發展 (很久以后) 在科学中根植的文档 (使用的机械, 大部分).

48 钢筋混凝土 的最古老的设计代码是 **混凝土规则** *F u* **艾森贝顿巴布** (强化具体建设的具体规则), 在 1904 年德国开发的图 54.8. 该代码是基于法国工程师弗兰的作品。ç 哈内比克 (Hennebique) 在 19 世纪末开发了一种加强混凝土的系统。它制定了钢筋混凝土结构的设计和建设规则和指导方针, 包括混凝土属性规格和钢材强化, 以及设计计算和详细要求。它在德国和其他欧洲国家广泛采用, 并作为随后的钢筋混凝土代码的模型服务于世界各地开发。

49 自从发展以来, **混凝土规则**, 许多其他代码和标准已经为钢筋混凝土设计开发, 反映了技术进步和建筑代码与法规的变化。然而, 强化混凝土设计的基本原则, 包括使用强化钢来提供压力强度以及适当的细节和建筑实践的重要性, 仍在很大程度上不变。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



$$x - y = \frac{a}{3}\,\frac{\sigma_0 + 2\sigma_u}{\sigma_0 + \sigma_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ist, so wird nach Einsetzen des Wertes von σ_u in Gleichung (8)

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^3}{6\,(2x - d)}$$

$$= \frac{2}{3}\left(x + \frac{(x-d)^2}{2x-d}\right) \quad (13)$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e\,(h - a - x + y)} \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sigma_0 = \frac{x}{n\,(h - a - x)} \cdot \sigma_e \quad \ldots \quad (15)$$

Abb. 3.

Erhalten Balken und Platten auch obere Eiseneinlagen, so kommen folgende Gleichungen zur Anwendung:

Für die Lage der Nullinie

$$\frac{b\,x^2}{2} - f'(x-a) + n f_e'(x-a) = n f_e (h - a - x) \quad \ldots \quad (16)$$

图 54.8: 混凝土规则 *F u* 艾森贝顿巴布

50 同样, 在美国, 建筑规则在 20 世纪初出现, 因为城市开始实施规则来解决与建筑相关的安全问题。国家消防署于 1915 年制定了第一款建模代码, 主要专注于火灾安全。

51 1927 年, 国际建筑官员和代码管理者 (博卡) 它是为了促进模型建造代码的开发而形成的, 并于 1940 年出版了 BOCA 国家建筑法典的第一版。国际建筑官员会议 (ICBO) 它也形成在 20 世纪 20 年代, 并于 1940 年开发了自己的模型建造代码, 这被称为统一建筑代码。

52 美国混凝土研究所 (这里) 它成立于 1904 年, 但最初的 ACI 代码专门致力于钢筋混凝土直到 1915 年才发布。这个代码, 标题 “钢筋混凝土 构建代码要求”, 制定了美国钢筋混凝土结构的设计和建设指南。

53 最古老的钢材设计代码是建筑结构钢的设计、制造和勃起规格, 由美国钢材建设研究所于 1923 年首次出版。(艾斯克). 该组织成立于 1921 年, 旨在促进建筑结构钢的使用, 第一版的规格提供了用于结构应用钢的指南, 包括设计、制造和勃起。

54 因为设计的细节基本上仍然相同。(例如, 在内部和外部力量之间保持 平衡 或限制 挠度), 超越哲学已经发展到所有代码 (混凝土、钢材、木材等). 这些人,FIG。54.9 可以广泛分类为

可用的应力设计 最古老、最简单的方法是引入安全概念。

荷载 抵抗因子设计 ACI 编号于 1977 年,AISC 于 1986 年。关键参考 Ellingwood。

基于性能的工程 1 & 2 主要是为了地震设计。



图 54.9: 现代设计代码的例子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

54.5.3.1 可用的应力设计,ASD

55 ASD 是最直观、最简单的方法。实际的强度是由一个因素减少的。(一般 60%) 被认为是最高可用的应力 (紧张、压缩或灵活).

56 该方法的主要限制, 是安全系数仅受到影响。主条目: 信任区 在力量中 (能力) 而不是在荷载中 (需求).

54.5.3.2 荷载 抵抗和因素设计,LRFD

关键概念

57 荷载 和抵抗不是决定性量 (如同允许的应力设计中,ASD) 但它们是随机变量, 具有自己的概率分布功能。因此, 我们可以提到一个 **失败的可能性**.

58 既然我们有能力和动力, 每一个将以适当的因素加倍。荷载 将由一个因素加倍 α, (ASCE/SEI 7-16, 2017) 和能力 (最终抵抗) 将被减少 Φ.

59 α 和 Φ 将确定, 以便失败的可能性不超过一定值。因此,LRFD 一般表达为

$$\Phi C_n \geq \Sigma \alpha_i D_i \tag{54.1}$$

哪里 C_n 和 D 是名义能力和要求 (或名称抵抗和荷载). 极限状态 通常由 塑料容量 没有非线性分析。LRFD 寻求一个可靠指标 (查普。N) 这样的那 $\beta >\sim 3.5$ (桌子 N.1). 可靠指标 是“普遍” 指示一个结构的适当性, 可以用作测量到 1) 评估一个结构的健康, 和 2) 比较不同的结构, 以便进行可能的修复。

60 可靠指标 在附件中定义 N.

LRFD 的限制

61 有三大限制的 LRFD,

1. 不一致: 线性分析, 但塑料设计。
2. 忽略荷载重新分配近失败 (ACI 因某些负担而因减少负面时刻而承担责任。).
3. 只应对一个危险级别: 一个结构组件的失败 (而不是整个系统。)

62 由于这些限制对静态分析是不可或缺的, 但如果:) 要确定一个结构的真正安全性;B) 在动态 荷载 中, 部分损害是 (经济上) 可接受。这些限制是通过下一个方法解决的。

54.5.3.3 基于性能 地震工程

63 基于性能的地震工程 (PBEE) 是对地震工程的方法, 专注于实现地震负载结构的具体性能目标。在 PBEE 中, 性能目标通常是根据结构在 地震 期间所能承受的损害水平以及其功能性在 地震 之后定义的。

64 PBEE 明确评估建筑物可能如何运作, 考虑到潜在的危险, 并考虑到对潜在危险的定义中内在的不确定性以及对实际建筑反应的评估中的不确定性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

65 与 LRFD 不同, 它不限于一个危险水平, 而是多元化。性能是根据事故发生的可能性、维修和更换成本、维改时间以及不安全的放置而测量。

66 性能可以根据特定 地震 场景或强度进行评估, 或者考虑到可能发生的所有地震以及每个地震的概率, 在一定时间内。表现表达在一系列差异性性能水平的意义上, 被定义为, 图 54.10:

1. 运营
2. 即时占领
3. 生命安全
4. 崩溃预防

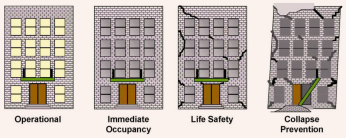


图 54.10: 性能水平

67 一些限制:

- 限制国家是 基于组件而不是真正的系统范围, (如果一个组件失败, 它会导致逐步崩溃吗?)
- 只为 MCE 活动 (2%50 年).
- 有限的处理 主条目: 信任区 和概率。
- 限量信息设计上代码。

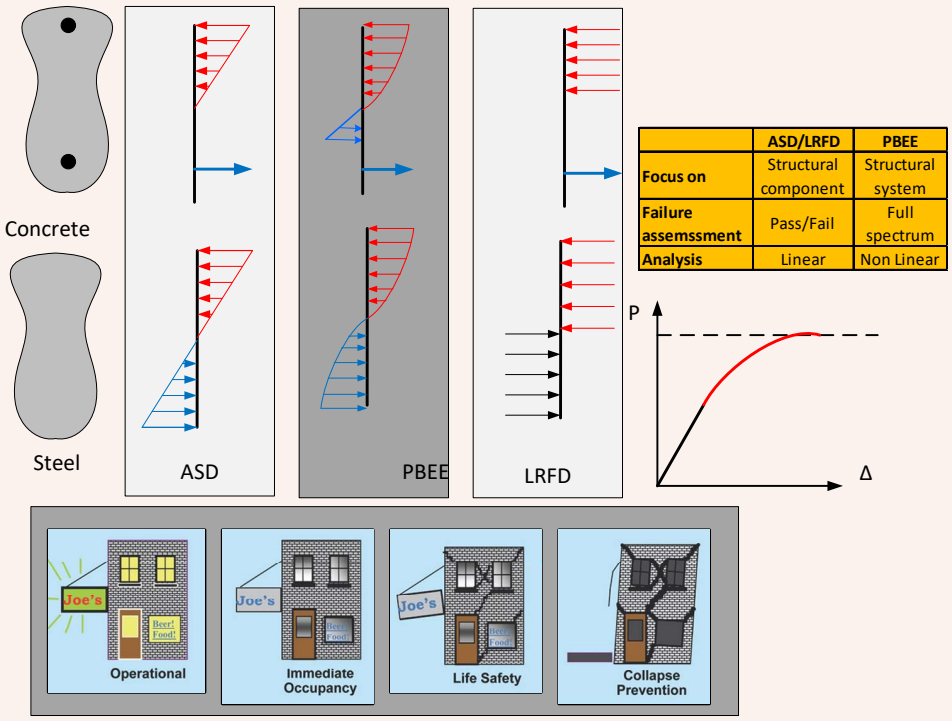
68 PBEE 是实践状态, 仅由高端公司使用。

69 关于 PBEE 的详细描述在章节中提供 72.

54.5.4 总结

70 此前讨论的设计范式在图中总结 54.11

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



	ASD/LRFD	PBEE
Focus on	Structural component	Structural system
Failure assemssment	Pass/Fail	Full spectrum
Analysis	Linear	Non Linear

图 54.11: 不同设计框架的比较

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

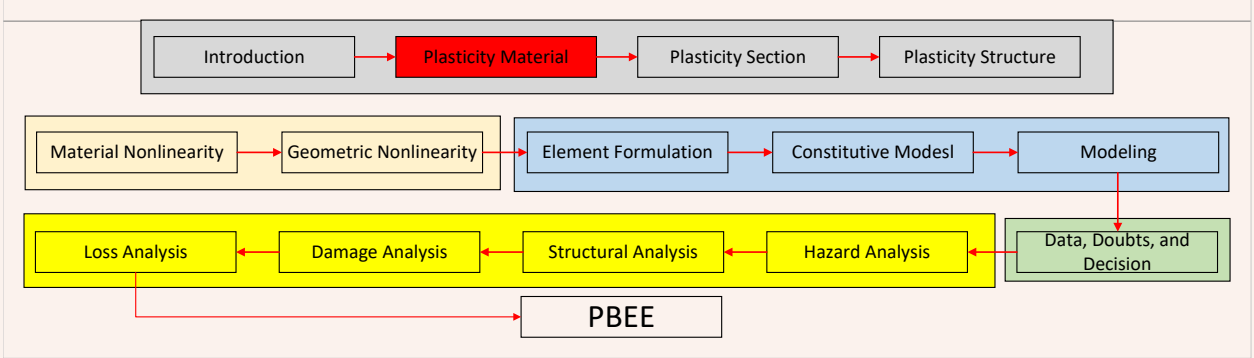
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

55 塑性 I; 纤维 & 连续 (为 有限元分析)

摘要

此分類上一篇: 關於 塑性 的三個章節在此一 [1] 我们专注于 *A* "加斯点" 在连续终端元素的精神上, 或在分布式塑料元素中的纤维/层上。这基本上是塑性的基本原则, 如无数文本中所发现。我们从塑料产量标准开始, 用于金属和水泥材料。经过实验室观测和微观失败的简短概述, 塑性理论的基础被强调为弹性模量的衍生。两种方法被覆盖, 第一种通用衍生引入收益函数的概念, 流规则 (库恩 - 图克的条件) 和谐条件。第二个, 更简单的, 仅限于 *1D*, 并基于更简单工程考虑。接下来的章节将涵盖分区塑性, 随后一个结构性塑性.

55.1 引入 1622
55.2 塑料生产条件 1623
55.2.1 压力 独立模型 1623
55.2.2 压力依赖型号 1625
55.3 实验室观察 1626
55.3.1 金属 1626
55.3.2 混凝土 1627
55.4 微观失败 1628
55.4.1 化学债券 1628
55.4.2 杜克特和布里特的失败 . . . 1628
55.4.3 散步 1629
55.5 塑性的基本内容 1630
55.5.1 引入 1630
55.5.2 弹性模量 直播 1631



55.1 引入

1 有三种主要类型的失败: 破裂/破裂, 屈曲不稳定和结果/塑性. 本章将讨论塑性。

2 对于混凝土, 塑料故障往往与 "克鲁斯" 以 混凝土 (看见 §55.2.1) 或者是为了加强 (§55.2.2).

3 本章节将提供基于塑料性的故障标准的简短介绍, 这些标准在非线性终端元素分析中几乎普遍使用。

[1] 读者被鼓励审查附件 O 在进入这个章节之前

55.2 塑料生产条件

4 在一个单轴负载的结构单元中输出可以很容易地确定 $|\frac{\sigma}{\sigma_{yld}}| \overset{?}{\geq} 1$. 那么, 一般三维应力状态呢?

5 这就是通过引入一个 **成果功能** F 作为主要压力和单元效益的功能 应力

$$F(\sigma_{(1)},\sigma_{(2)},\sigma_{(3)};\sigma_y)\begin{cases} <0 & \text{Elastic} & \left|\frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t}\right|=0 \\ =0 & \text{Plastic} & \frac{\mathrm{d}\varepsilon^P}{\mathrm{d}t}\geq 0 \\ >0 & \text{Impossible} & \end{cases}$$

請注意這 F 不能超过零, 因为同样的原因, 一个单轴的应力不能超过应力. 二、主要压力 $\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)}$, F 在图中显示 55.1. 所定义的区域 F 构成了 **出生表面**.

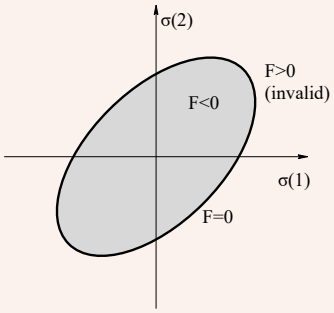


图 55.1: 利息表面; 定义

6 有两类的产量表面: 那些独立于水位应力 (平等 O.2.2.1) 那些依赖的人 (Chen and Zhang, 1990).

55.2.1 压力 独立模型

7 压力 独立产量表面 (例如, 钢材) 他们的梅里迪安是直线, 与水静轴平行。因此, 应力必须是这种材料的主要产量原因。因为它是压力大小, 而不是它的方向重要, 因此在紧张和压缩时的弹性塑料行为应相当于液压独立材料。(如 钢材).

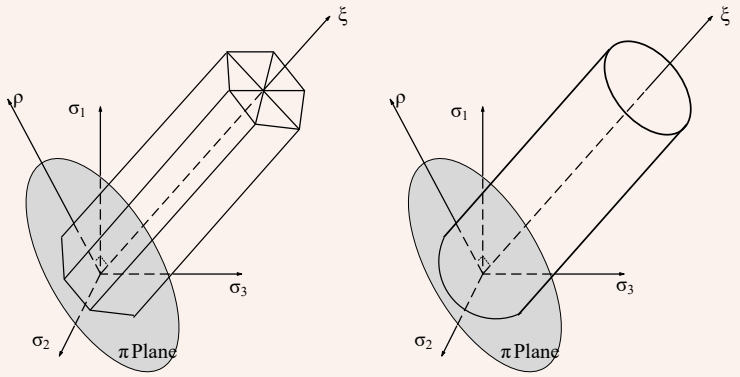
特斯拉: 基准规定, 当最大 剪应力 达到限制值时, 产量会发生 k 图像 55.2a.

$$F\left(\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1-\sigma_2|,\frac{1}{2}|\sigma_2-\sigma_3|,\frac{1}{2}|\sigma_3-\sigma_1|\right)-k\right)=0$$

从一个单轴压力测试中, 我们确定 $k=\sigma_y/2$ 從清潔的考驗中, $k=\tau_y$. 因此, 在 Tresca, 抗拉强度和 Shear 强度与

$$\sigma_y=2\tau_y$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 特斯拉　　(b) 由 MISES

图 55.2: 压力 独立模型

特斯卡的标准也可以代表为

$$2\sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma_y=0 \text{ for } 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

Tresca 标准是第一个提出的, 主要用于弹性塑料问题。然而, 由于单一的角落, 它在数值分析中引起了许多问题。

由 MISES: 对于 Von Mises 标准的多种物理解释 (所有相同) 图像 55.2b:

1. 材料将产生, 当第二个偏差性应力变量达到关键值时

$$F(J_2)=J_2-k^2=0 \tag{55.1}$$

2. 材料将产生, 当最大扭曲性 (谢尔) 能量达到产量的关键值, 就像在单轴紧张状态下。
3. 当距离 (ρ) 应力 点之间 P 和水位轴 ξ 等同于

$$\rho_0=\tau_y\sqrt{2}$$

使用方程式 55.1 以此为例, 在一级测试中, k 等同于 $k=\sigma_y/\sqrt{3}$ 從清潔的 she 試中, $k=\tau_y$. 因此, 在 von Mises 中, 抗拉强度 和 Shear 强度与

$$\sigma_y=\sqrt{3}\tau_y$$

因此, 我们可以重写平衡。55.1 如

$$f(J_2)=J_2-\frac{\sigma_y^2}{3}=0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

55.2.2 压力依赖型号

8 压力 敏感振动材料 (如土壤、岩石、混凝土) 需要考虑第一和第二 应力 invariants 的效果, 更好地解释在产量表面方面。

9 产地表面的交叉部分是产地面和偏离层之间的交叉曲线。(ρ, θ) 它是对水位轴的偏差性, ξ, 与 $\xi =$ 常态。这个产地表面的跨部分形状将有三倍的同义。

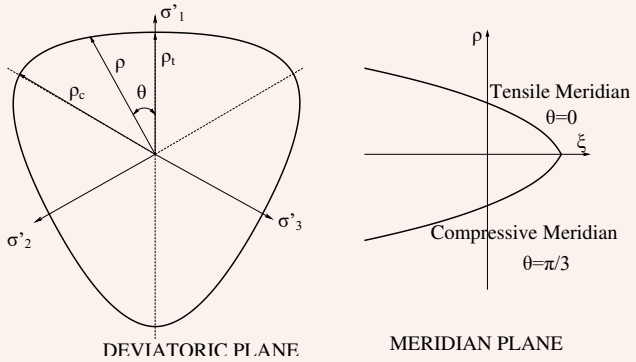


图 55.3: 压力 依赖的产量表面

10 产地表面的梅里迪安是表面与梅里丁平板之间的交叉曲线。(ξ, ρ) 它包含水晶轴。梅里迪亚飞机与 $\theta = 0$ 是紧张的梅里迪安 它通过了统一的紧张输出点。梅里迪亚飞机与 $\theta = \pi/3$ 压缩的梅里迪安 通过单轴压缩输出点, 图 55.3. tens 的平面上的一种表面的直径是 ρ_t 在压缩的梅里迪安 ρ_c.

排名: 基准规定, 当最高 主应力 达到 抗拉强度 时, 产量发生。55.4a.

$$\sigma_1 = \sigma_y; \quad \sigma_2 = \sigma_y; \quad \sigma_3 = \sigma_y;$$

莫克 • 库伦布: 这些标准可以被视为 Tresca 标准的延长。最大 剪应力 是一个恒定的, 加上在同一行程上运作的 正应力 的一个功能。55.4b.

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi$$

哪里 c 是团结和 ϕ 内部振动的角度。两者 c 和 ϕ 物质特性, 可以从单轴紧压和单轴压缩测试中进行定义。

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{2c\cos\phi}{1+\sin\phi} \\ \sigma_c &= \frac{2c\cos\phi}{1-\sin\phi} \end{cases}$$

至于异常,Mohr-Coulomb 标准可以表达为:

$$\frac{1}{3} I_1 \sin\phi + \sqrt{J_2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{J_2}{3}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\phi - c\cos\phi = 0$$

$$\text{for } \; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

布拉格 • 德鲁克: postulate 是 von Mises 标准的一个简单的延伸, 包括水静 压力 的对材料产生的影响。I_1 图像 55.4c:

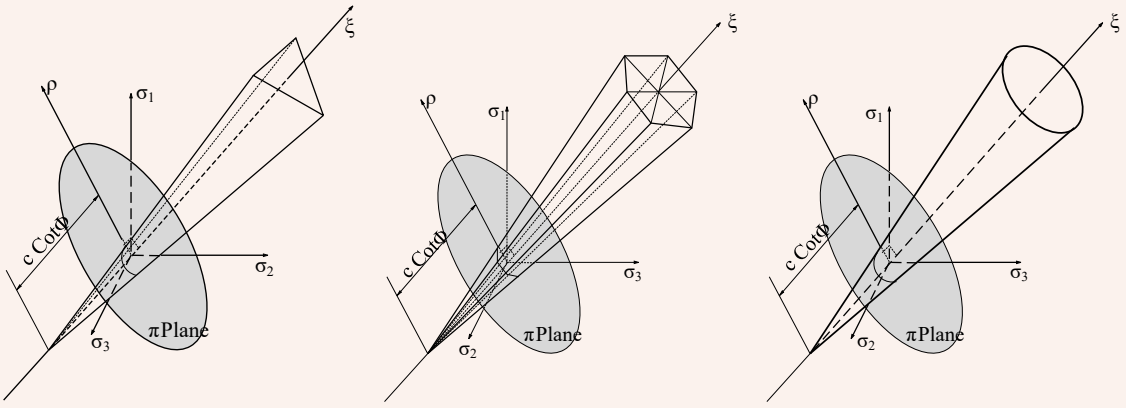
$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + J_2 - k$$

强度参数 α 和 k 可以通过单轴压力和压缩测试来确定:

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{\sqrt{3}k}{1+\sqrt{3}\alpha} \\ \sigma_c &= \frac{\sqrt{3}k}{1-\sqrt{3}\alpha} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{m-1}{\sqrt{3}(m+1)} \\ k &= \frac{2\sigma_c}{\sqrt{3}(m+1)} \end{cases}$$



(a) 兰克　(b) 莫格 • 库伦布　(c) 布拉格 • 德鲁克

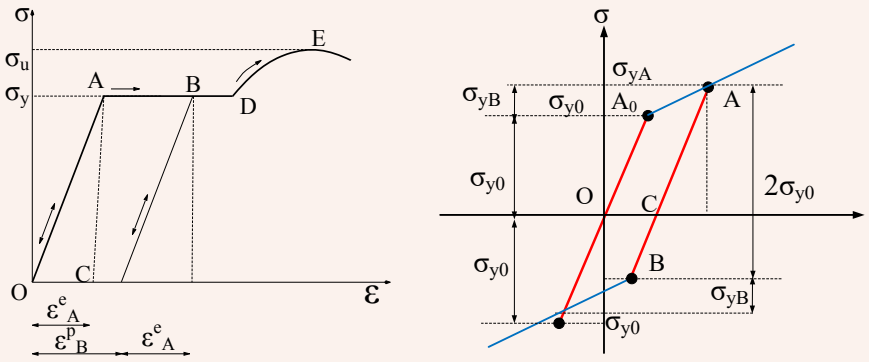
图 55.4: 压力依赖型号

55.3 实验室观察

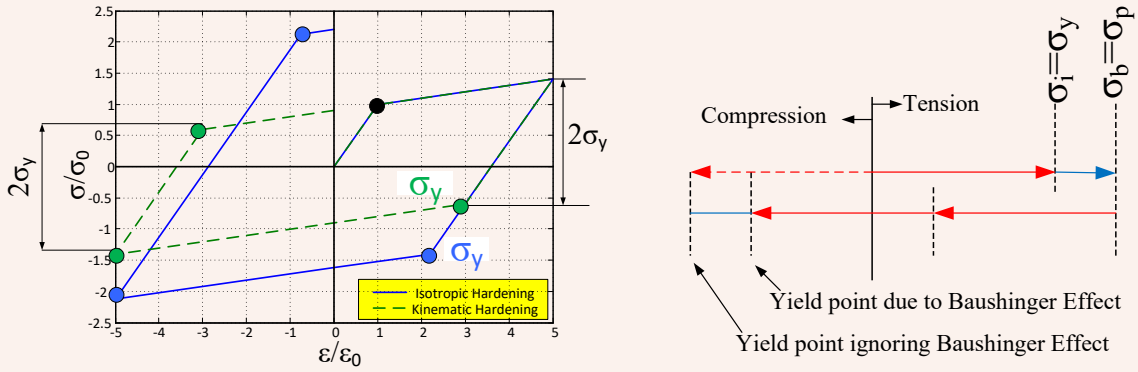
55.3.1 金属

11 在不同阶段上传和下载一个钢材优惠券, 图 55.5a 我们观察到, 直到 A, 在初始充电路径后会出现线性弹性排放。O-A 行为是 荷载 独立的路径。在 A, 我们达到弹性界限。然后, 材料变成塑料, 不逆转地行事: 第一次产量发生 (A-D) 然后, 硬化。在下载时, 材料体验永久性 应变 或塑料 应变. ε^p. 因此, 仅有一部分的整体应变 ε_B 在 B 回收时, 即弹性应变 ε^e_A.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 以色列硬化



(b) 动画硬化; Bauschinger 效应

图 55.5: 金属的压力 - Baushinger Effect

[12] 一个方向的电线硬化, 其次是逆载在另一个方向导致不同的压力电线曲线, 而不是从纯紧张或压缩中获得的。在 B 压缩中的新收益点相当于 应力 σ_y^B 小于 σ_y^0, 和比以前的收益小得多, 应力在 *A*. 这种现象被称为巴申根效应, 或电影硬化。(相反, 以色列的硬化) 图像 55.5b.

[13] 塑料范围内的压力流动行为是路径依赖的, 即压力不会依赖当前的压力状态。它也取决于整个加载历史, 即应力历史和变形历史。

55.3.2 混凝土

[14] 混凝土 因缩小而含有微粒, 原来是以色列的。在压缩下, 当应力达到时 $\simeq 0.5 f_c'$ 接口裂缝围绕集合传播, 倾向于与压缩应力相匹配。在应力的顶端, 形成一个机制 (微粒子的混凝土) (Hsu et al., 1963) (Slate and Olsefski, 1963) 图像 55.6.

[15] 如果应用 荷载, 则在峰会上突然出现失败, 如果强加 位移, 则后峰会缓解。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

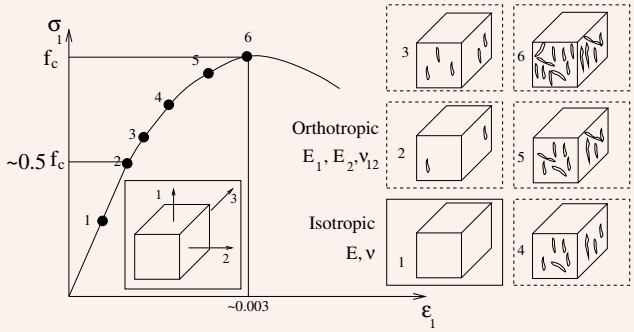


图 55.6: 混凝土 微型折叠

55.4 微观失败

55.4.1 化学债券

16 理解化学联系是很重要的解释双重失败和分散, 图 55.7. 离子连接的原子由电静吸引在一起, 因为电子从一个原子转移到邻近的一个。放弃电子的原子会被负担得好, 接收它的原子的原子也会被负载得好。可瓦伦特连接发生时, 电子在邻近的原子之间分为多或少平等。虽然接近原子之间的吸引力的电静强度低于离子连接, 但科瓦伦特连接往往是非常方向性的, 这意味着它们抵抗原子的相互移动。钻石有可瓦伦特债券。在金属连接中, 电子通过金属晶体分散或平等分发, 并且连接不位于两个原子之间。它们最好被描述为电子的海洋中的积极离子。

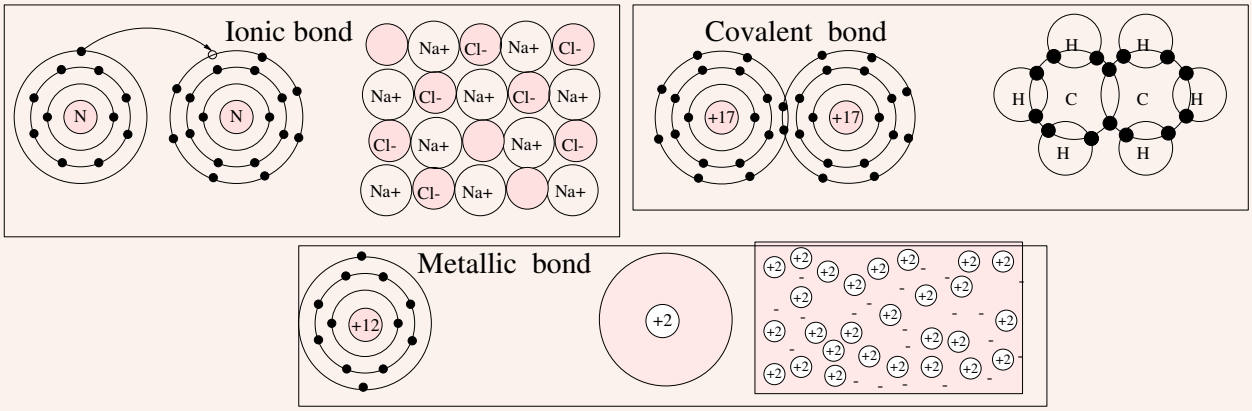


图 55.7: 化学债券

55.4.2 杜克特和布里特的失败

17 在一个离子固体中, 每个离子都被对立充电的离子包围, 因此粘贴更难实现, 材料通过在明亮的行为中破裂来响应。55.8. 当一个足够大小的力量将原子从一个平衡位置转移到另一个时, 我们在滑板上有一个塑料变形, 不考虑电负限制, 从而产生双重反应。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

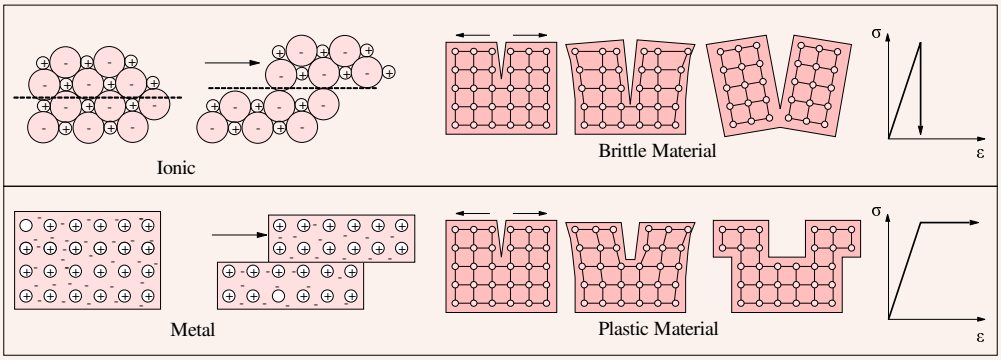


图 55.8: 杜克特和英国债券

55.4.3 散步

18 完美的晶体的理论力量 (应力 需要分离两个附近的原子) 是关于 $E/10$ 但是, 由于随机不完美的存在, 它从未实现。边缘分散是由原子飞机内部缺陷引起的。由于 τ, 有一个驱动力打破原子之间的联系 A 和 C 直到分散完全脱离晶体。它被称为分散滑动, 图 55.9.

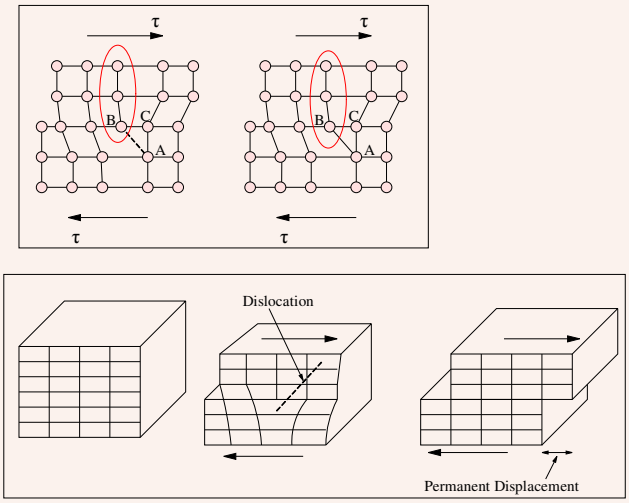


图 55.9: 散步

19 当分散离开晶体时, 将有一个永久的补偿。

20 和 **出售 应力** 一旦应用的 stress 压力相当于所需的压, 以便提供足够的能量来克服障碍所执行的短距离力量。

21 **工作硬化** 反过来, 可以解释塑料变形分散的增加, 需要更多的压力来克服这种抵抗力和应变硬化发生。

22 和 *Bauschinger* **效应** 发生时, 变形或分散积累, 导致分散电池升起。由于压力硬化与分散密度增加有关, 减少分散的数量 (通过 应力 逆转) 减少力量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

55.5 塑性的基本内容

55.5.1 引入

23 有两种主要理论对弹性塑料:

变形理论 (或全部) 假设塑料变形可以被整体 应变 所特征, 而不必考虑到该 应变 所实现的路径或序列。$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ 导致塑性的分类型表述基于总应变的添加分解为弹性和塑料组件。

利率理论 (普兰特尔 - 雷斯) 也称为增量理论或流理, 描述塑料变形作为一个速度依赖的过程, 在那里加载的速度影响材料的塑料反应。它被定义为

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

利率理论本质上是路径依赖的, 这意味着塑料反应不仅取决于当前状态, 而且还取决於充电历史和速度。因此, 它更适合不比例的负载和负载随着时间的推移改变方向或强度的情况。

利率理论是最常用的。

24 引用图像 55.10 总增幅 应变 可以分成一个弹性和塑料:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

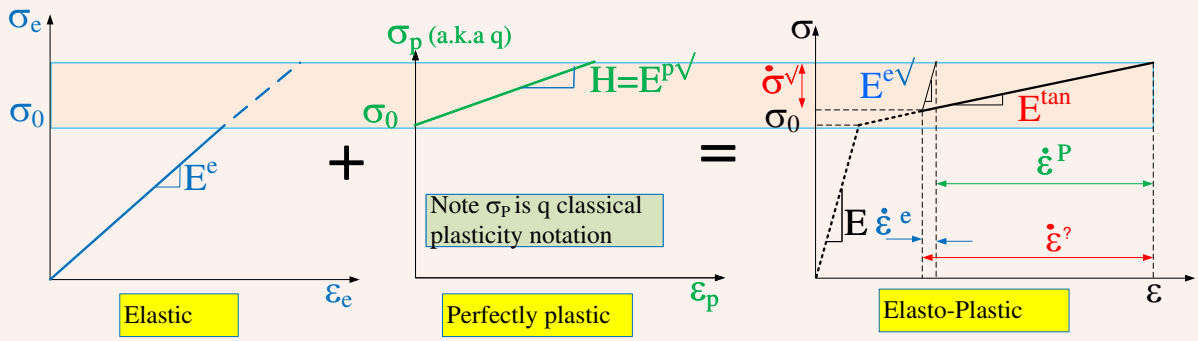


图 55.10: Elasto 塑料 应力 应变 回复

25 但是, 我们只知道宪法的弹性部分:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \tag{55.2}$$

26 塑料压力和相应的塑料压力的增加是:

$$\dot{\sigma_p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \tag{55.3}$$

哪里 H 是硬化模块 或 .

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

55.5.2 弹性模量 直播

27 引用图像 55.10, 考虑到总增值 应变 是 $\dot{\varepsilon}$, 现在我们正在寻找相应的增量塑料应力, $\dot{\sigma}$ 如同这样

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\dot{\varepsilon} \tag{55.4}$$

这将需要所谓的弹性模量坦根。E^{tan} (不要被混淆 H).

28 两种方法是可能的:

1. 一般化 3D 机械; 这将需要
   (a) Yield 功能
   (b) 流规则
   (c) 一致性条件
2. 工程 1D

每个人都将单独处理。

55.5.2.1 一般化衍生

55.5.2.1.1 利率功能; 以色列硬化模型

29 和 标记了 应力 的当前水平, 而不是初始收益的 应力, 其中可以添加一个功能: α 它描述了硬化的类型。在 1D 中, 可以定义为

$$h(\sigma, q) = |\sigma| - q \leq 0 \tag{55.5}$$

q 确定产地表面的运动和变形 (硬化或软化). If $h < 0$, 然后应力在弹性域内, 如果 $h = 0$, 应力已经达到其塑料限制。

30 首先, 应变达到成果 ($\sigma_0 = \sigma_y$). 在此时, 应变的进一步增加导致扩展 q 这将使灵活域的扩展。

55.5.2.1.2 流规则

31 当应力在产表面内, 它是弹性的, 胡克的法律适用, 线条可恢复, 没有能量分散。. 因此, 当结构上的 荷载 推动 应力张量 超越产表面时, 产表面的 应力张量 会锁定起来, 结构就会塑料变形。

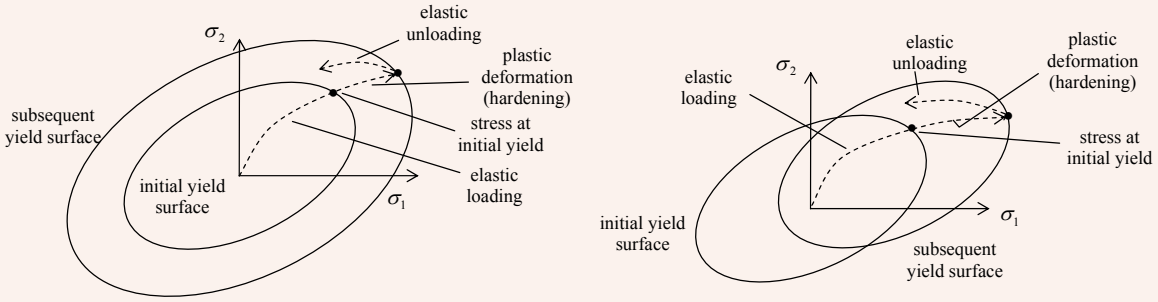
32 如果材料表现出硬化, 与弹性完美塑料反应相反, 那么产量表面扩展或移动, 与应力点仍然在产量面积上。

33 关键问题是塑料流的方向将是什么 (这就是组成部分的相对大小。$\boldsymbol{\varepsilon}^P$). 这个问题是由流规则或正常性规则解决的。

34 流规则假设塑料压力增加和偏差性压力压缩机具有相同的主要方向, 它将塑料压力的进化定义为:

$$\dot{\varepsilon}^p := \lambda \cdot \frac{\partial g(\sigma, \varepsilon^p, q)}{\partial \sigma} = \lambda \cdot h(\sigma,\ q) \tag{55.6}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 以色列　　(b) 电影

图 55.11: 硬化模型

哪里 $g(\sigma, \varepsilon^p, q)$ 塑料潜力 和 λ 是塑料多元器, 测量塑料变形的程度。(如下所示, 这段时间将下降并导致 E^{tan} 我们最终正在寻找的).

35 If $g \equiv h$ 我们有一个相关的流规则。(通常是金属). If $g \neq h$ 我们有一个不相关的流规则。(混凝土 和地质材料显示分裂性).

36 对于以色列硬化模型和相关流规则,

$$g(\sigma, \varepsilon^p, q) = h(\sigma, q) = |\sigma| - q \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$$

哪里 $\text{sign}(\sigma)$ 是 1 if $\sigma \geq 0$ 或 -1 if $\sigma < 0$. 从平等到 55.6,

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)$$

或

$$\lambda = |\dot{\varepsilon}^p| \geq 0$$

37 为了简单性和假设有以二进制曲线的弹性塑料硬化材料,

$$h(\sigma,\ q) = -\frac{\partial g}{\partial q} = 1$$

因此, 我们可以表达应力 (平等 55.2) 如

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \Rightarrow \dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}) = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \text{sign}(\sigma)) \tag{55.7}$$

从方程式 55.3

$$\dot{q} = H\dot{\varepsilon^p} \Rightarrow \dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = H \cdot \lambda \tag{55.8}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

55.5.2.1.2.1 库恩 • 图克的条件

38 在弹性模式下, 产能功能 f 它必须保持负面, 而塑料复合器则是零。在塑料流中, 产量功能 f 它必须是零, 而塑料复合器则是积极的。

39 这些限制可以简要地表达为所谓的库恩 - 图克状态,

$$\begin{aligned} \text{Elastic loading and unloading}: f < 0, \quad \dot{\gamma} = 0 \\ \text{Plastic loading}: f = 0, \quad \dot{\gamma} > 0 \end{aligned} \tag{55.9}$$

或者在一般情况下, $f \leq 0$ 和 $\dot{\gamma} \geq 0$:

$$f \cdot \dot{\gamma} = 0 \tag{55.10}$$

55.5.2.1.3 一致性条件

40 在塑料充电期间, 应力路线被限制沿着产量表面移动, 因此这种一致性状态阻止我们超越产量面积并数学地表达为: $\dot{f}(\sigma, q) = 0$, or

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma,\ q) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \end{aligned} \tag{55.11}$$

55.5.2.1.4 模块

41 现在, 我们终于能解决平衡。55.4

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \dot{\varepsilon}$$

在某种情况下, 坦根模块是应力-应变曲线在任何指定的应力, 或应变. 在比例限制下, 坦根模块相当于杨氏模量, 不被混淆。$\dot{\sigma^p} = \dot{q} = H\dot{\varepsilon^p}$. 替代

$$\begin{aligned} &\text{Flow Rule Equation 55.7} && \dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}) \\ &\text{Equation 55.8} && \dot{q} = H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) \\ &\text{Consistency Equation 55.11} && \dot{f}(\sigma,\ q) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \end{aligned}$$

我们获得

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \left(\dot{\varepsilon} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot \lambda \cdot h(\sigma,\ q) = 0$$

42 因此,

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q} \cdot H \cdot h(\sigma,\ q)}$$

替换回入

$$\dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma} \cdot \text{sign}(\sigma))$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们得到了对应力的明确表达,

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= E\cdot\left(\dot{\varepsilon}-\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)\\ &=\underbrace{\left(E-\frac{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot E^2\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma}}{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot E\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma}-\frac{\partial f}{\partial q}\cdot H\cdot h(\sigma,\ q)}\right)}_{(by\ definition)\ E^{tan}}\cdot\dot{\varepsilon}\end{aligned}$$

43 对于一层二进制曲线的弹性塑料硬化材料,

$$\lambda=\frac{\text{sign}(\sigma)\cdot E\cdot\dot{\varepsilon}}{E+H}$$

即 Tangent Modus 将减少

$$\begin{aligned}E^{tan} &= E-\frac{\text{sign}(\sigma)\cdot E^2\cdot\text{sign}(\sigma)}{\text{sign}(\sigma)\cdot E\cdot\text{sign}(\sigma)-(-1)\cdot H\cdot(1)}\\ &= E-\frac{E^2}{E+H}=\frac{E\cdot H}{E+H}\end{aligned}\tag{55.12}$$

请注意, 如果 $H=E/9$ 然后, $E^{tan}=E/10$.

55.5.2.2 Tangent Modulus 工程

44 更简单的 (更直观) 接下来的 Tangent Module 的衍生。

45 利率理论是由

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^e+\dot{\varepsilon}^p$$

If $\sigma\le\sigma_y$ (弹性) 然后,

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^e=\frac{\dot{\sigma}}{E}$$

如果 $\sigma>\sigma_y$ (塑性) 然后,

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon^e}+\dot{\varepsilon}^p\\ \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E}+\frac{\dot{\sigma}}{H}=\frac{\dot{\sigma}}{E^{tan}}\end{aligned}$$

哪里

$$E^{tan}=\frac{E.H}{E+H}$$

46 我们注意到这

$$E^{tan}=\begin{cases}>0, & \text{Hardening}\\ =0, & \text{Perfectly-Plastic}\\ <0, & \text{Softening}\end{cases}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[47] E_t 独立于硬化类型 (以色列或电影).

[48] 注意: 在非线性 结构分析 中, 我们正在寻求确定一个 单元 的 刚度矩阵 在一定时间步骤。这个程序是概念上相同的, 与第一部分进行分析。

[49] 注意与同等抵抗器的类似性, 当多个在平行时。

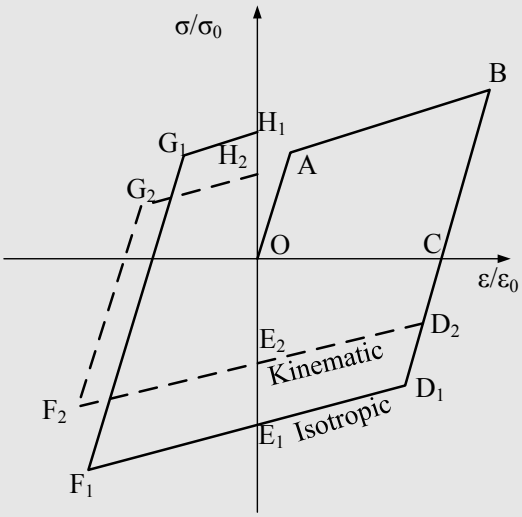
$$R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

55.5.2.3 例题 55.1: 模块

和 $\sigma - \varepsilon$ 简单的紧张反应是通过以下线性工作硬化模型接近的:

$$\begin{array}{rcll} \sigma & = & E\varepsilon; & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0; \\ \sigma & = & \sigma_0 + m\varepsilon^p; & \varepsilon_0 \le \varepsilon; \qquad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \end{array}$$

哪里 $m = E/9$. 材料 单元 受下列统一的 应变 历史: $\varepsilon = 0 \to \varepsilon_1$ (B) $\to 0$ (E) $\to -\varepsilon_1$ (F) $\to 0$ (H) 初始充电结束在 B 的位置 $\varepsilon = \varepsilon_1, \sigma = (1.0 + \alpha)\sigma_0$ 与 $0 \le \alpha \le 1.$. 我们正在寻找 A、B、C、D、E、F 和 G 的结果。(应力 和 应变) 至于 α, 并为结论结果 $\alpha = 0.4$. 使用增量形式 (我们知道压力线反应是线性的, 这取决于它是否弹性或塑料。), 我们试图解决总应变的增加: 如果弹性 $d\varepsilon = d\sigma/E$ 如果是塑料 $d\varepsilon/dE^p$.



伊索特里克 • 哈登

提前注意: 我们不应该混淆坦根模块和塑料模块。塑料模块: $d\varepsilon_p = d\sigma/E_p$ 此分類上一篇: Tango Module $d\varepsilon = d\sigma/E_t$ 威尔 $E^t = \frac{E.E_p}{E+E_p}$ 哪里 $E_p = m = E/9$. 因此, $E_t = E/10$.

A 这是一个中间点, 因为应变从零上升到 $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ 而且, 它相应于 $\sigma_A = \sigma_0$ 和 $\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B 应力 是由 $\sigma_B = (1 + \alpha)\sigma_0$. 对于相应的应变, 我们可以采取两种方式

1. 使用 E_t: $\varepsilon_B = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{(1+\alpha)\sigma_0 - \sigma_0}{E/10} = (1 + 10\alpha)\varepsilon_0$
2. 使用 m $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1 + \alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_0)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1 + 10\alpha)\varepsilon_0$

C 我们现在有 $\sigma_C = 0$, 材料是以弹性的方式解载的

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1 + 10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1 + \alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

D 是我们应变之旅的中间点 $\varepsilon = \varepsilon_1$ 到 $\varepsilon = 0$. 到目前为止, 我们有 **以色列硬化**这样 $\sigma_D = -\sigma_B = -(1+\alpha)\sigma_0$, 我们从 B 点确定相应的 应变

$$\varepsilon_D = \varepsilon_B - 2\sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - 2\frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = (8\alpha - 1)\varepsilon_0$$

E 这里 $\varepsilon_E = 0$, 材料正在进行塑料加载和

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = -(1+\alpha)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -(0.9 + 1.8\alpha)\sigma_0$$

F 在 EF 中, 材料仍然处于塑料充电状态, 并且 $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$ 相应的 σ_F 可以从以下关系中获得: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$ 换取, 回归, 我们得到了 $\Delta\varepsilon = -18\alpha\varepsilon_0$; $\Delta\sigma = -1.8\alpha E\varepsilon_0$, 和 $\sigma_F = -(1+2.8\alpha)\sigma_0$

G 材料首先处于脱负状态, 然后在逆转的弹性加载中, 塑料加载将从 G 点开始。由于以色列硬化的假设 $\sigma_G = -\sigma_F = (1+2.8\alpha)\sigma_0$, 和 $\varepsilon_G = \varepsilon_F + 2\sigma_F/E$ 相应于弹性脱负。

$$\varepsilon_G = -(1+10\alpha)\varepsilon_0 + 2(1+2.8\alpha) = (1 - 4.4\alpha)\varepsilon_0$$

H 目前, 该材料正在塑料上传。$\varepsilon_H = 0$ 和 $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1+2.8\alpha)\sigma_0 + E_t(4.4\alpha - 1)\varepsilon_0$ 或 $\sigma_H = (0.9 + 3.24\alpha)\sigma_0$

我们注意到各个国家的决定 n 依赖于国家的 $n-1$.

动画 Hardening

注意: 前三点与以色列硬化模型相同

A 这是一个中间点, 因为应变从零上升到 $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ 而且, 它相应于 $\sigma_A = \sigma_0$ 和 $\varepsilon_A = \varepsilon_0$.

B 应力 是由 $\sigma_B = (1+\alpha)\sigma_0$. 相应的 应变 , $\sigma = \sigma_0 + m\varepsilon_p$; $\underbrace{(1+\alpha)\sigma_0}_{\sigma_B} = \sigma_0 + m(\varepsilon_B - \varepsilon_e)$; $\varepsilon_e = \frac{\sigma_0(1+\alpha)}{E}$; $\Rightarrow \varepsilon_B = (1+10\alpha)\varepsilon_0$

C 我们现在有 $\sigma_C = 0$, 材料是以弹性的方式解载的

$$\varepsilon_C = \varepsilon_B - \sigma_B/E = (1+10\alpha)\varepsilon_0 - \frac{(1+10\alpha)\sigma_0}{E} = 9\alpha\varepsilon_0$$

D 是我们应变之旅的中间点 $\varepsilon = \varepsilon_1$ 到 $\varepsilon = 0$. 到目前为止, 我们有 **动画硬化**这样 $\sigma_D = \sigma_B - 2\sigma_0 = (\alpha - 1)\sigma_0$, 我们从 C 点确定相应的应变

$$\varepsilon_D = \varepsilon_C + \sigma_D/E = 9\alpha\varepsilon_0 + \frac{(\alpha-1)\sigma_0}{E} = (10\alpha - 1)\varepsilon_0$$

E 这里 $\varepsilon_E = 0$, 材料正在进行塑料加载和

$$\sigma_E = \sigma_D + \Delta\sigma = (\alpha-1)\sigma_0 - E_t \underbrace{\Delta\varepsilon}_{\varepsilon_D} = \ldots = -0.9\sigma_0$$

F 在 EF 中, 材料仍然处于塑料充电状态, 并且 $\varepsilon_F = -\varepsilon_B = -(1+10\alpha)\varepsilon_0$ 相应的 σ_F 可以从以下关系中获得: $\sigma_F = \sigma_D + \Delta\sigma$; $\Delta\sigma = E_t\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon = \varepsilon_F - \varepsilon_D$ 取代, 我们得到了 $\sigma_F = -(1+\alpha)\sigma_0$

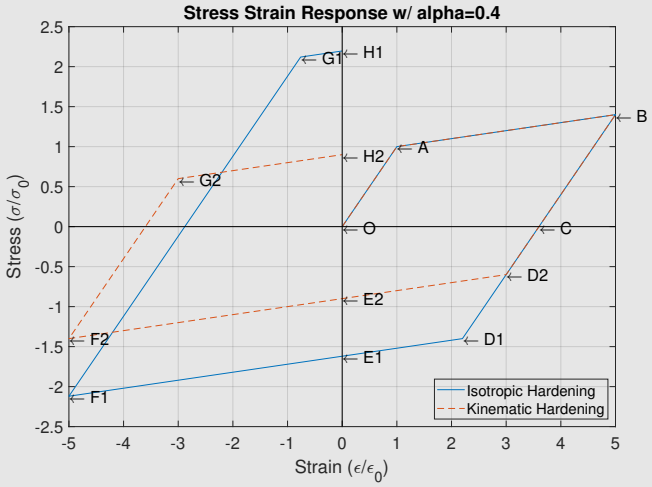
审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

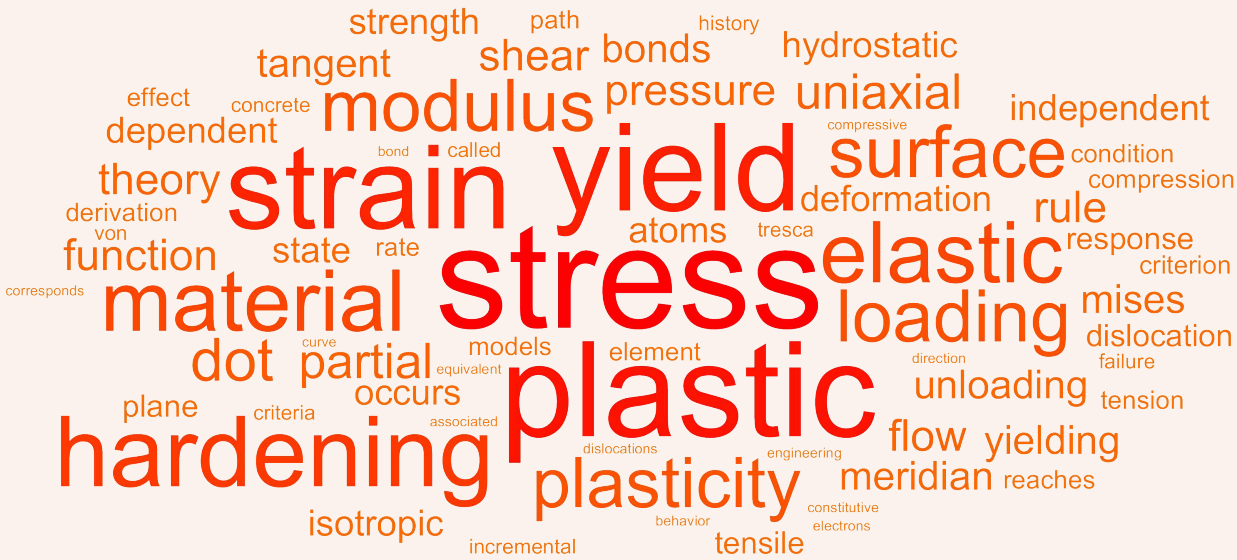
G 材料首先处于脱负状态, 然后在逆转的弹性加载中, 塑料加载将从 G 点开始。由于假设 **动画硬化** $\sigma_G - \sigma_F = -(\sigma_D - \sigma_B)$ 或 $\sigma_G = -\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 + \alpha\sigma_0 - \alpha\sigma_0 + \sigma_0 = (1-\alpha)\sigma_0$

$$\varepsilon_G = \varepsilon_F + \frac{\sigma_G - \sigma_F}{E} = -\varepsilon_0 - 10\alpha\varepsilon_0 + (1-\alpha)\varepsilon_0 + (1+\alpha)\varepsilon_0 = (1-10\alpha)\varepsilon_0$$

H 目前, 该材料正在塑料上传。$\varepsilon_H = 0$ 和 $\sigma_H = \sigma_G - E_t\varepsilon_G = (1-\alpha)\sigma_0 - \frac{1}{10}(1-10\alpha)\sigma_0 or \sigma_H = 0.9\sigma_0$



A MATLAB® 这个问题的解决方案在附件中提供。I.3.1.



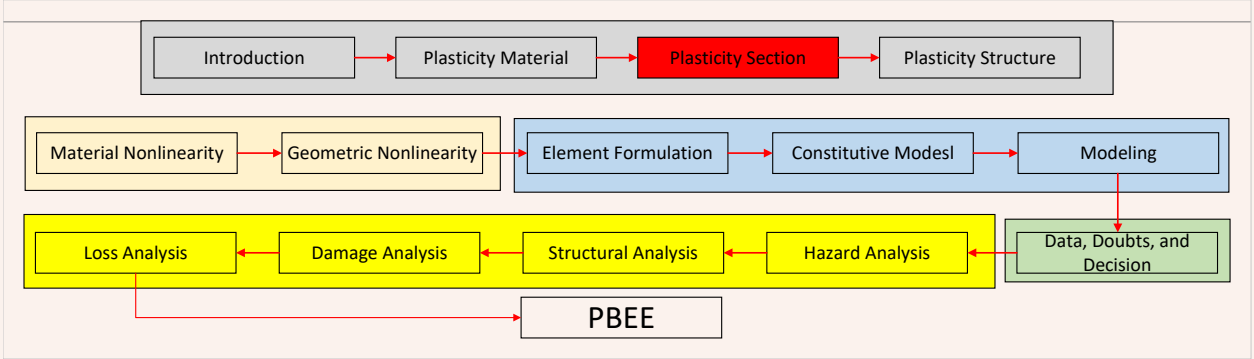
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

56 塑性 II; 部分:

摘要

按照 塑性 点, 本章节专注于分区 塑性. 我们将首先审查瞬间曲线关系, 然后将其应用于钢柱的非线性推向分析。然後, 我們將分成層的部分, 而不是引用一個 $M-\phi$ 关系, 我们将从应用的 $\sigma-\varepsilon$ 一个应用于部分层。此后将适用于以前分析的同一压缩, 然后我们将应用它来验证威特尼压力区块假设在增强的混凝土泡沫中的准确性。最后, 层化方法将被普遍化为随意的部分使用一个解析或一个数值方法.

56.1 引入 1638
56.2 理论框架: 假设和关键结果 1638
56.3 时刻 - 曲率; $M-\Phi$ 1640
56.3.1 从现在 曲率 关系 1641
56.3.2 压力与流动关系 1643
56.4 时刻 曲率, 通用化 1650
56.4.1 解析 方法 1651
56.4.2 数值方法 1659



56.1 引入

1 在上一章中, 我们的分析集中在应力-应变 $(\sigma-\varepsilon)$ 答案在一个特定的加斯点。基于这个基本的理解, 本章转向重点探索时刻-曲率 $(M-\Phi)$ 关系在一个白色列元素的交叉部分。这种关系是结构性行为的关键描述, 可以通过实验观察或计算分解跨部分到差异纤维, 每一个由其相应的应力-应变统治。$(\sigma-\varepsilon)$ 宪法法。

56.2 理论框架: 假设和关键结果

2 要充分理解随之而来的衍生品, 重要的是要提到几个关键考虑, 以基础为理论框架。

假设

力量: 我们考虑到两者轴力, N, 和 弯矩, M, 如主要负载在部分上运作。

飞机部分仍然是飞机 (伯诺利的假设): 假设飞机部分在变形下保持平面是基本的, 确保线性应变分布在部分深度。

完美的邦德 (为 钢筋混凝土): 在 钢筋混凝土 的情况下 (R / C) 成员, 我们假设钢材强化和混凝土之间存在一个完美的联系, 允许在材料上连接。

管理方程式

平衡 的力量和时刻: 十字路口的平衡条件确保内部力量和时刻对外负载条件进行平衡。

曲线和曲线的兼容性: 应变 分布在部分被认为与 曲率 相关。$\varepsilon = \Phi \cdot y = \frac{M}{E \cdot I} \cdot y$, 通过物质和地质特性将应用时刻与结果的曲率联系起来。

宪法法律

瞬间曲率关系 ($M - \Phi$): 这种关系的特点是部分的灵活硬度和反应, 反映了材料抵抗弯曲的能力。

压力与流动关系 ($\sigma - \varepsilon$): 管理每个材料纤维, 这个法则定义了每个部分如何应对应力, 基于复合部分, 其中多种材料相互作用。

曲率 定义为 转角 每单位长度的 梁 (§22.3), 曲率 Φ 在任何十字段中, 表达为:

$$\Phi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

哪里 ρ 代表曲率的射线, θ 角 转角, 和 y 挠度 等。

结果

时刻曲率 ($M - \Phi$): 一个关键关系, 以评估灵活性能。

负载解答 (打击, $P - \Delta$): 评估结构的进展性挠度在增加荷载下, 指示杜克蒂尔行为。

互动图表 ($M - N$): 描述时刻与轴力之间的相互作用, 在组合充电下设计至关重要。

延性比 [1]**:**

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

哪里 Φ_u 是最终的曲率在失败时 (定义为 混凝土 压缩 应变), 和 Φ_y 是曲率在产量, 标志着紧张强化的初始产量。

[3] 值得注意的是, 对于简单性和效率, 在分析时通常采用非层化方法。$M - \Phi$ 对于钢材成员, 而一个层化方法是优先的混凝土考虑其更复杂, 非线性行为。此选项反映了每个材料中内在的不同双重性和连接特征。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

56.3 时刻 - 曲率; $M - \Phi$

4 和 **时刻曲率** ($M - \Phi$) 关系是结构工程中使用的一个基本工具, 以理解和预测在旋转负载下带子和列的灵活行为。

5 它定义了应用 弯矩 的连接 (M) 和结果 曲率 (Φ), 是角 转角 每单位长度的变化速度, 沿着梁 。这种关系对结构元素的分析至关重要, 因为它提供了跨部分将如何扭曲和负载负担的洞察力, 帮助工程师确保结构的稳定性和安全性。

6 Moment-曲率 分析因几个原因至关重要:

- **预测灵活性:** 它允许工程师评估一个部分的硬度, 这是该部分对弯曲的抵抗。一个更强的部分将有较低的 曲率 为某个时刻。
- **理解二元性:** 杜克特性, 或者一个部分无法失败的能力, 对地震地区结构至关重要。瞬间曲线关系有助于量化双向性, 通过显示一个部分在达到其最终强度之前可以经历多少曲线。
- **评估最终能力:** 最后一刻的能力 (当部分失败时) 它是基本的设计参数, 特别是对于钢筋混凝土或复合部分, 其中行为往往是不线性和复杂。

7 处理非线性行为时, 分析可以以两种主要方式进行:

1. 直接使用 A **非线性瞬间曲率关系**.
2. 从 A 开始 **非线性压力关系** 结果是瞬间曲率的回应。

8 Moment-曲率计算涉及部分的地质和物质属性:

1. **假设和地质:** 一般来说, 我们认为 **飞机部分仍然是飞机** bend 下 (伯诺利的假设), 意思是, 应变分布在部分深度保持线性。这种假设简化了整个部分的紧张和曲线之间的关系。
2. **宪法条款/材料:** 我们有两个可能的特征之一:

   时刻曲率 被授予如 $M - \Phi$ 這是最簡單的案例, 這將是一 **部分** 特征性。

   应力-应变 这是最普遍的案例。这将是 A **或纤维** 特征性。

   请注意, 在第一种情况下, 整个部分同时进行塑造化, 而在第二种情况中, 塑造过程逐步发生。
3. **层或纤维分解:** (只有当 应力 应变 , 而不是当时的 曲率 关系被提供时). 交叉部分分为小型单元或纤维, 每一个具有自己的应力-应变反应。对于一个 曲率 , 每个纤维中的 应变 是基于它的距离从 中性轴, 并从物质法则中获得相应的压力。请注意, 这可以分析 (n 需要明确的层/纤维, 因为它被替换为 dy) 或数字。请注意, 这将导致, 中间到一个时刻的曲率关系。
4. **内部部队的集成:** 内部力量 (压力) 在每个部分/纤维都集成到整个部分, 以确定结果的弯矩 (M). 这个过程重复为曲率的增值, 创造一个 $M - \Phi$ 曲线显示该部分在经过逐步弯曲时如何行事。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. **非线性分析:** 随着曲率的增加, $M - \Phi$ 关系通常变成非线性, 特别是在钢筋混凝土部分, 在那里混凝土开始崩溃和钢材产生。这种非线性反应对于理解部分的完整灵活能力和后期行为至关重要。

9 Moment-曲率分析广泛应用于:

- **梁柱设计:** 定义部分在旋转负载下的行为, 通知决策的尺寸, 强化和材料选择。
- **地震设计:** 确保结构性单元具有足够的二进制性和能量分散能力。
- **非线性终端单元模型:** 提供各种负载条件下的复杂结构系统的详细模拟。

10 总体而言,The $M - \Phi$ 关系提供了灵活性能的详细理解, 使工程师能够通过精确预测单元在现实世界负载条件下如何行事来设计更安全、更耐用的结构。

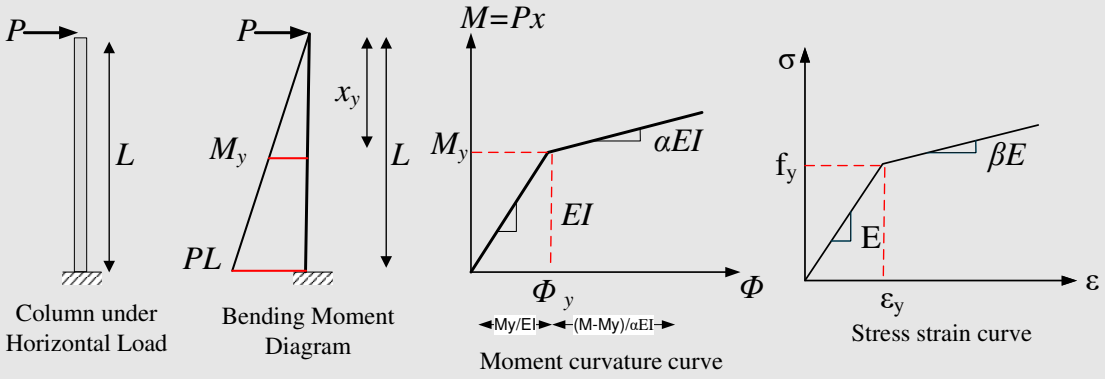
56.3.1 从现在 曲率 关系

11 这个程序是相当简单的, 并被下一个例子描述。

56.3.1.1 例题 56.1: 非线性分区分析; 解析

第一部分: 部分

我们试图确定并为下一个问题编写曲率关系的时刻。



雅利 发生在 x_y 这样的那

$$x_y = \frac{M_y}{P} \leq L$$

曲线 被授予

$$\Phi = \begin{cases} \frac{P.x}{E.I} & \text{if } x < x_y \\ \frac{M_y}{E.I} + \frac{P.x - M_y}{\alpha.E.I} & \text{if } x > x_y \end{cases}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

位移 根据补充 虚功 的原则获得。(虚拟力量)

$$\begin{aligned}\delta\overline{M} &= x\\ \delta\overline{P}\Delta &= \int_0^L \delta\overline{M}.\Phi dx = \int_0^L x\,.\Phi.dx\\ &= \int_0^{x_y} x\frac{P.x}{E.I}dx + \int_{x_y}^{L} x\left(\frac{M_y}{E.I}+\frac{P.x-M_y}{\alpha.E.I}\right)\cdot dx\\ &= \frac{P.{x_y}^3}{3.E.I}+\frac{3(-1+\alpha)M_y\left(L^2-{x_y}^2\right)+2.P\left(L^3-{x_y}^3\right)}{6E.I.\alpha}\end{aligned}$$

替代 由 $x_y = M_y/P$ 给予 Force-位移 或 Pushover

$$\Delta = \frac{2L^3P^3-(\alpha-1)M_y\left(M_y^2-3L^2P^2\right)}{6\alpha EIP^2}$$

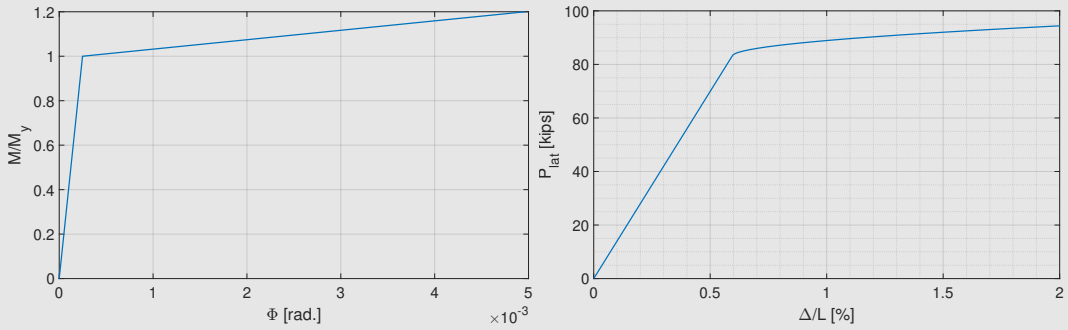
这是一个显而易见的非线性关系。

```
clear all;clc;close all
% Initialization for figures
fs = 24;scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
% units: kips in; Rectangular section (to make it simpler)
E=29000;fy=36;h=10;h2=h/2;b=10;beta=0.01;I=b*h^3/12;
L=6*12;alpha=0.01;S=I/h2;%7 ft long column; 10x10 inch
EI=E*I; My=S*fy; Phiy=My/EI;A=b*h;
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% P A R T  I;
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
%=========================
% MOMENT CURVATURE PLOT
%=========================
M(1) = 0; Phi(1) = 0.;M(2) = My; Phi(2) = Phiy;
M(3) = 1.2*M(2); Phi(3) = (M(3)-My)/(alpha*EI);
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(Phi,M/My,'LineWidth',2)
xlabel('\Phi [rad.]'); ylabel('M/M_y');
grid ; set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredMomentCurvature.pdf','BackgroundColor','none')
%============================
% LOAD DISPLACEMENT PLOT
%============================
DeltaP=0.5;P(1)=0.0; Delta(1)=0;
for i=2:1000
P(i) = P(i-1)+DeltaP;
xy = My/P(i);
if xy>L
Delta(i) = P(i)*L^3/(3*E*I);
else
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
Delta(i) = (2*L^3*P(i)^3 - My*(My^2 - 3*L^2*P(i)^2)*(-1 + alpha))/...
(6.*EI*P(i)^2*alpha);
end
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*Delta/L,P,'LineWidth',2)
xlabel('\Delta/L [%]'); ylabel('P_l_a_t [kips]');xlim([0,2])
grid;grid minor;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'NonLayeredLoadDisplacement.pdf','BackgroundColor','none')
Delta0=Delta;P0=P; % Store results for Part II
```



56.3.2 压力与流动关系

在前一部分, 我们考虑了整个部分的潜在塑造化, 实际上这是一个进步进展, 从极端纤维开始, 一个逐渐向中性轴移动。

因此, 可以保证一个清洁的方法。这将通过考虑到 **层** 截面可以独立于附近的。换句话说, 我们将审查外层的逐步塑造, 直到达到中性轴。

因此, 我们需要根据自己的 本构方程 来描述每个层。$\sigma - \varepsilon$ 然後, 將其發出。

1. 非线性时刻 曲率 关系 (与此前所假设的二进制相矛盾。
2. 相应的力量 位移 关系。

当从非线性压力带关系开始时, 曲线源于整合材料的非线性的行为在交叉部分。

在此情况下, 应力 σ 是 应变 的非线性功能 ϵ:

$$\sigma = g(\epsilon)$$

哪里 $g(\epsilon)$ 代表非线性材料反应, 如金属硬化或混凝土中的非线压。

分析:

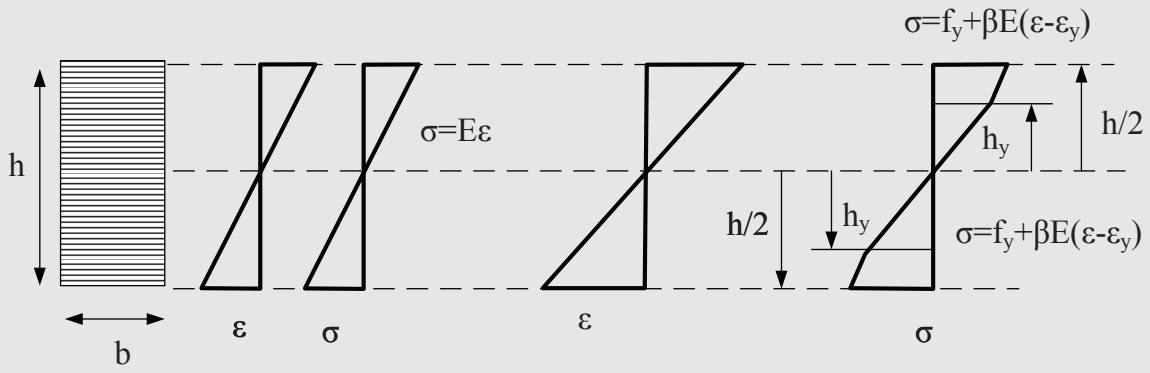
1. **应变 分布**: 當一個 梁 部分曲線時, 应变 $\epsilon(y)$ 远程的 y 从 中性轴 是与 曲率 的比例:

$$\epsilon(y) = -\kappa y$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. **非线性 应力 从 Nonlinear 应变**: 应用非线性压力压缩关系 $\sigma = g(\epsilon)$, 在任何纤维上使用 应力 y is:
$$\sigma(y) = g(-\kappa y)$$
3. **集成到 弯矩**原名:The 弯矩 M 通过将 应力 分布集成到 横截面积 A:
$$M = \int_A \sigma(y) \cdot y \, dA = \int_A g(-\kappa y) \cdot y \, dA$$
这种整体通常是由于非线性而以数字方式解决的。$g(\epsilon)$.
4. **部分或增加分析**: 对于一个小小的应力-应变关系, 如:
$$g(\epsilon) = \begin{cases} E\epsilon, & \epsilon \leq \epsilon_y \\ E'(\epsilon - \epsilon_y) + \sigma_y, & \epsilon > \epsilon_y \end{cases}$$
哪里 $E' < E$ 代表后叶尔的坚固性, 时刻曲率关系也变成一部分, 整合在部分进行。

56.3.2.1 例题 56.2: 平板; 钢材



我们将考虑与上面的例子相同的直角部分。

第一部分 曲率 等式

- 第一, 在外部的纤维上发生。x_y 这样的那 (并提醒这 $\Phi = \varepsilon/y$, Eq. 22.15):
$$P.x_y = E.I.\Phi_y = E.I\frac{\varepsilon_y}{h/2} \Rightarrow x_y = \frac{2.f_y.I}{P.h} \leq L$$
- 最多 曲率 低于所有压力是弹性, 由
$$\Phi_y = \frac{2.f_y}{E.h}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- If $h \le h_y$, 然后我们有一个线性弹性应力分布和

$$\Phi = \frac{M}{E.I} = \frac{P.x}{E.I}$$

- If $h > h_y$ 然后, 在远程 h_y 從 中性轴 硬化開始和

$$h_y = \frac{f_y}{E.\Phi} \le \frac{h}{2}$$

- 压力是由

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} E.\varepsilon & \text{if } \ h < h_y \\ f_y + \beta E.(\varepsilon - \varepsilon_y) & \text{if } \ h_y < h \end{cases}$$

- 回忆这 $\varepsilon = \Phi y$ 因此, 内部抵抗的时刻将由

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h/2}^{h/2} b.\sigma_{xx}.y.dy \\ &= 2.b.\int_0^{h_y} E.(\Phi.y).y dy + 2b\int_{h_y}^{h/2} [f_y + \beta.E.(\Phi y - \varepsilon_y)].y.dy \\ &= 2E.b.\Phi\int_0^{h_y} y^2.dy + 2b\int_{h_y}^{h} \left[f_y.y + \beta.E.\Phi.y^2 - \beta f_y.y\right] dy \\ &= \frac{-\left(b\left(3.f_y\left(h^2 - 4.{h_y}^2\right)(-1+\beta) + E\Phi\left(8{h_y}^3(-1+\beta) - h^3\beta\right)\right)\right)}{12} \end{aligned}$$

替代 (使用数学) 价值的 h_y 这会减少到瞬间 曲率 关系

$$M = \frac{b\left(4{f_y}^3(-1+\beta) - 3E^2 f_y h^2 \Phi^2(-1+\beta) + E^3 h^3 \Phi^3 \beta\right)}{12E^2\Phi^2}$$

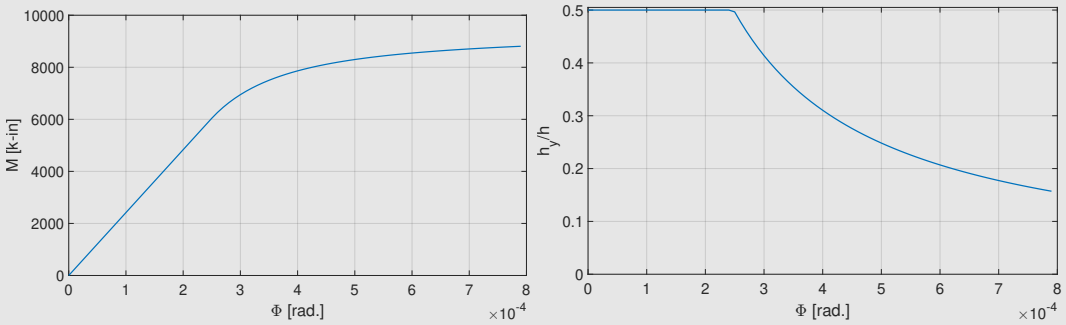
目前, 这基本上是曲率的表达。$\Phi > \Phi_y$.

- 与此关系武装, 我们可以重复上面的例子中使用的程序, 并应用虚拟力量原则来确定位移.
- 数值 解决方案:

```
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% Note this is appended to the previoous Metlab code
% P A R T   II  L A Y E R E D   S E C T I O N
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
% Plot M-phi and h-phi for the section based on layers
% this is a section property, nothing to do with the actual column
%=============================================================================
clear P Delta phi M
epsiy=E/fy; phi_y=fy/(E*h2);delta=10^-5;phi(1)=0.;
M(1)=0.;hy(1)=h2;k=0;
for i=2:80
phi(i)=phi(i-1)+delta; hy(i)=fy/(E*phi(i));
if hy(i)>h2
M(i)=phi(i)*E*I; hy(i)=h2;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

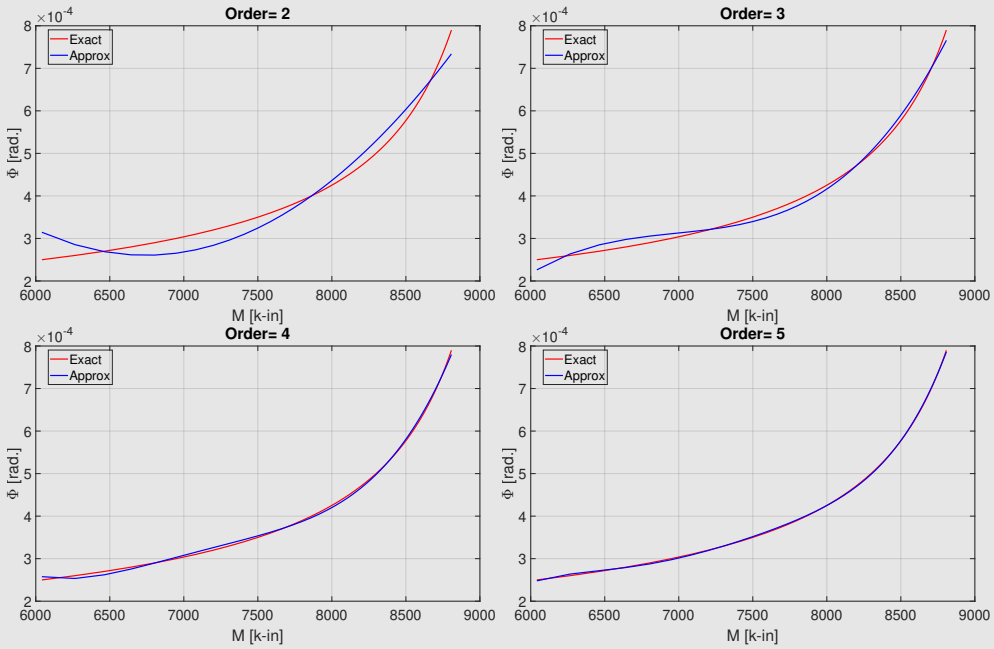
```
else
M(i)=(b*(4*fy^3*(-1 + beta) - 3*E^2*fy*h^2*phi(i)^2*(-1 + beta)...
+ E^3*h^3*phi(i)^3*beta))/(12.*E^2*phi(i)^2);
k=k+1;
nlphi(k)=phi(i); nlM(k)=M(i);
end
fprintf("i %6.0f hy %10.4e phi %10.4e phi_y %10.4e\n",i,hy(i),phi(i),phi_y);
end
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,M,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel("M [k-in]");grid;
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'M-phi.pdf','BackgroundColor','none')
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(phi,hy/h,'linewidth',2);
xlabel("\Phi [rad.]");ylabel('h_y/h');grid;
ylim([0.,0.505]);set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
exportgraphics(gca,'h-phi.pdf','BackgroundColor','none')
```




```
%=========================================================
% Fit polynomial in nonlinear portion of the curve
% =========================================================
for i=2:5
clear p
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
[p]=polyfit(nlM,nlphi,i); f=polyval(p,nlM);
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
plot(nlM,nlphi,'r',nlM,f,'b','linewidth',2);
asc=num2str(i);
lgnd=legend('Exact','Approx','Location','Best');
ylabel('\Phi [rad.]');
xlabel('M [k-in]');grid;title(['Order= ', asc])
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');
fn=['Poly-fit-' num2str(i) '.pdf'];
exportgraphics(gca,fn,'BackgroundColor','none')
end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 因为我们将需要曲率时刻关系 ($\Phi = \Phi(M)$), 一个聚合物将被调整到时刻的非线性部分曲率.



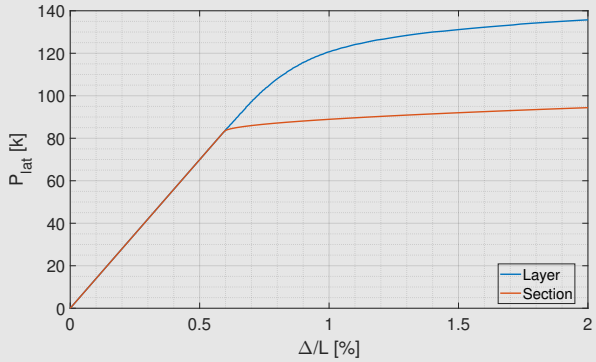
- 选择第 5 行, 则指数为:

$$\Phi = 2.12\times10^{-20}M^5 - 7.58\times10^{-16}M^4 + 1.08\times10^{-11}M^3 - 7.71\times10^{-8}M^2 + 2.74\times10^{-4}M^2 - 3.88\times10^{-1}M$$

```
%=========================================================================
% Compute the deflection as in Part I but with the new M-phi relations
%=========================================================================
P_y=2*fy*I/(h*L);
P_max=2*P_y;
np=400;
delta_P=P_max/np;
EI=E*I;delta_L=0.001*L;
%
P(1)=0.;delta(1)=0;
for i=2:np
P(i)=P(i-1)+delta_P; x_y(i)=2*fy*I/(h*P(i));
if x_y(i)>L
delta_1=P(i)*L^3/(3*EI);
% Entire Beam is in the linear range
delta_2=0.;
else
delta_1=P(i)*x_y(i)^3/(3*EI);
delta_2=0.;
for x=x_y(i):delta_L:L
M=P(i)*x; phi=polyval(p,M); delta_2=delta_2+phi*x*delta_L;
end
end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
delta(i)=delta_1+delta_2;
end
%
figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
plot(100*delta/L,P,100*Delta0/L,P0,'linewidth',2);grid;
xlabel("\Delta/L [%]");ylabel("P_l_a_t [k]");grid minor;
xlim([0,2]);lgd=legend('Layer','Section','location','best')
set(gca,'fontsize',fs);set(gca, 'color', 'none');set(lgd,'color','none');
exportgraphics(gca,'Pushover-Final.pdf','BackgroundColor','none')
```



18 一层完成的单元的实施将迟到 §61.4.

56.3.2.2 例题 56.3: 平板; 混凝土/ACI

我们试图评估 ACI 方程式对最终灵活能力的适当性 (威特尼的压力区块,Fig。37.7) 考虑下列 应力 应变 曲线为 混凝土 (Desayi, 1964) (其他方程式已提出 (Saenz, 1964), (Kent and Park, 1971) (Mander, Priestley, and Park, 1988)).

$$\sigma = \frac{2\frac{f'_c}{\varepsilon_{max}}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{max}}\right)^2}$$

哪里 f'_c 相应的 ε_{max}. 我们将确定一个 R/C 射线的准确平衡钢比例 $b = 10"$, $d = 23"$, $f'_c = 4,000$ 狗, $f_y = 60$ 李, $\varepsilon_{max} = 0.003$.

最后一刻 M_u

应力-应变

$$\sigma = \frac{2\frac{4,000}{.003}\varepsilon}{1+\left(\frac{\varepsilon}{.003}\right)^2} = \frac{2.667\times 10^6\varepsilon}{1+1.11\times 10^5\varepsilon^2}$$

变形协调 假设在失败时崩溃, 因此应变分配将由

$$\varepsilon = \frac{0.003}{c}y$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

将这两个方程式结合起来:

$$\sigma=\frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}$$

总压力的强度是由

$$\begin{aligned}F&=\int_0^c dF=b\int_0^c\sigma dy=b\int_0^c\frac{8,000\frac{y}{c}}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy=b\frac{8,000}{c}\int_0^c\frac{y}{1+\left(\frac{y}{c}\right)^2}dy\\&=8,000\frac{b}{c}\frac{1}{2\left(\frac{1}{c}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c=8,000\frac{b}{c}\frac{c^2}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]\Big|_0^c\\&=4,000bc\ln(2)=2,773bc\end{aligned}$$

平衡 需要这 $C=T$

$$2,773bc=A_sf_y$$

从 应变 图表:

$$\frac{.003}{c}=\frac{\varepsilon_y+.003}{d}\Rightarrow c=\frac{(.003)d}{\varepsilon_y+.003}\tag{56.1}$$

$$c=\frac{(.003)(23)}{\frac{60}{29,000}+.003}=13.6\text{in.}\tag{56.2}$$

合并 eq。56.3.2.2 与 EQ。56.2

$$A_s=\frac{(2,773)(10)(13.6)}{60,000}=6.28\text{in.}^2$$

要确定时刻, 我们首先必须确定压缩力量的中心。從 中性轴 中测量

$$\begin{aligned}\overline{y}\overset{\text{def}}{=}\frac{\int ydA}{A}&=\frac{b\int y\overbrace{\sigma dy}^{dC}}{C}=\frac{b\int_0^c\frac{8,000\frac{y^2}{c}}{1+(y/c)^2}dy}{2,773bc}=\frac{8,000b}{2,773bc^2}\int_0^c\frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2y^2}dy\\&=\frac{2.885}{c^2}\int_0^c\frac{y^2}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2y^2}dy=\frac{2.885}{(13.61)^2}\left[\frac{y}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^2}\int_0^c\frac{dy}{1+\left(\frac{1}{c}\right)^2y^2}\right]\\&=.01557\left[yc^2-c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}}\tan^{-1}y\sqrt{\frac{1}{c^2}}\right]\right]\Big|_0^c\\&=.01557\left[c^3-c^3\tan^{-1}(1)\right]=(.01557)(13.61)^3(1-\tan^{-1}(1))=8.43\text{in.}\end{aligned}$$

下一篇: 我们现在解决了

$$M=A_sf_y(d-c+\overline{y})=(6.28)(60)(23-13.61-8.43)=6,713\text{ k.in}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使用 ACI 代码

引用到 §37.4.1

$$\rho_b = .85\beta_1 \frac{f'_c}{f_y}\frac{87}{87+60} = (.85)^2\frac{4}{60}\frac{87}{147} = .0285$$

$$A_s = \rho_b bd = (.0285)(10)(23) = 6.55\text{in.}^2$$

$$a = \frac{A_s f_y}{.85 f'cb} = \frac{(6.55)(60)}{(.85)(4)(10)} = 11.57\text{in.}$$

$$M = A_s f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) = (6.55)(60)\left(23 - \frac{11.57}{2}\right) = 6,765\text{k.in}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.57}{.85} = 13.61\text{in.}$$

总结

		准确	这里
A_s	在 ^{2}	6.28	6.55
c	吉普	13.6	13.6
$\overline{y}'$	in.	5.18	5.78
M	K - 在	6,713	6,765

56.4 时刻 曲率, 通用化

19 在本节中, 我们将一般化确定 $M-\Phi$ 相對的關係, 考慮一個任意 截面, 图 56.1. nxt 我们将首先考虑一个分析方法, 然后一个数字方法。

20 我们采用外部 轴力 N_{ext} 用一种激情的应用 e' 当然, 要保持稳定。

21 内部 平衡 的力量需要

$$N_{ext} = N_{int};\quad M_{int} = N_{int}.e';$$

我们要努力确定 $M-\Phi$ 关系。

$$N_{int} = \underbrace{\int_0^{k.d}\sigma_c b_c dy}_{C_c} + \underbrace{A'_s f'_s}_{C_s} - \underbrace{\int_0^{y_t}\sigma_t b_t dy}_{T_c} - \underbrace{A_s f_s}_{Ts} \tag{56.3}$$

$$N_{int}e' + M = C_c(d-k'd) + C_s(d-d') - T_c(d-kd-\frac{2}{3}y_t) \tag{56.4}$$

在哪里: $\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c), b_c = b_c(y_c), \sigma_t = \sigma_t(\varepsilon_t), b_t = b_t(y_t)$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

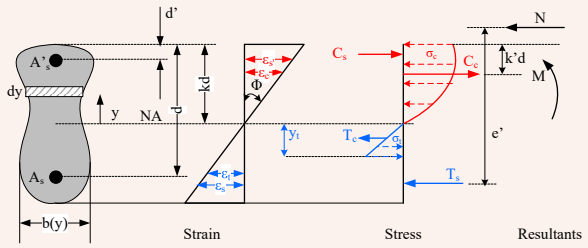


图 56.1: 算法 截面 考虑到确定 $M - \Phi$

56.4.1 解析 方法

22 对于给予的 (固定) N_{ext} 我们将逐步增加 ε_c^{top} (伊。Φ 间接), 并解决为 k 和相应的 M_{int}, 图 56.2.

23 问题是非线性的, 因为只有一个值 k 这将确保平衡的轴力。

24 注意: 如果 $N_{ext} \neq 0$, 然后必须添加初始 应变 由于连续的强度。

1. 增長高 应变

$$\varepsilon_{n+1}^{top} = \varepsilon_n^{top} + \Delta\varepsilon^{top} < \varepsilon_u$$

2. 假设 k 定义力量

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon_c^{top}}{k.d} = \frac{\varepsilon_s'}{k.d - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - kd}\\ \varepsilon_s &= \Phi(d - k.d)\\ f_s &= E_s\varepsilon_s\end{aligned}$$

3. 计算 N_{int} 来自 EQ。56.3 If

$$|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$$

若不满足则修正 k 并继续迭代，否则退出。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

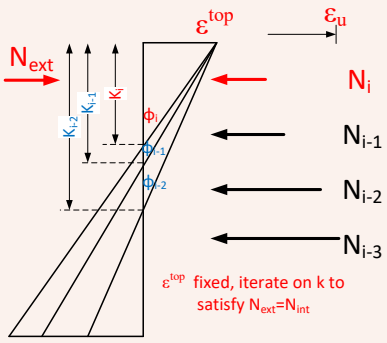


图 56.2: 增長決定的程序 $M - \Phi$ 分析

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

4. 解决相應的問題 M 来自 EQ。56.4
5. 定义相应 曲率 从

$$\Phi_{i+1} = -\frac{\varepsilon_{i+1}^{top}}{k_{i+1}d}$$

和 坚定性

$$EI_{i+1} = \frac{dM}{d\Phi}$$

一旦完成, 结论 $M - \Phi$, 并识别 Φ_{cr}, Φ_y 和 Φ_u,

确定的

$$\xi = \frac{\Phi_u}{\Phi_y}$$

请注意, 如果我们重复分析的不同 N, 然后我们可以生成梁-柱 **互动图表** (相应的 M_u).

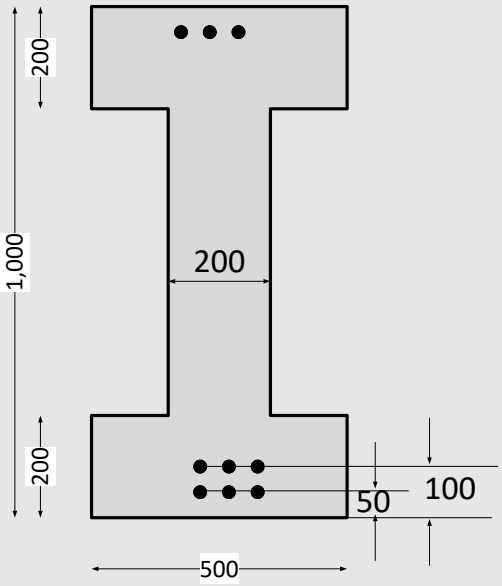
56.4.1.1 例题 56.4: 时刻 曲率 的 I R/C 部分

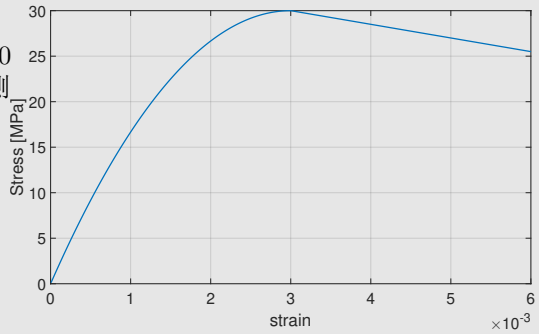
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们正在努力在 Matlab 中开发一个程序, 以计算和编写曲率时刻对钢筋混凝土交叉部分的响应, 并计算曲率二元性。
我们将假设混凝土不做支座任何紧张的应力当紧张 应变大于切割应变时, ε_{cr}. 该插图应该仅包含对积极曲线的反应 (面部紧张).
我们将假设荷载的轴值大约为 10。% 这个跨部分的轴压容量 (伊。$N \simeq 0.1 A_g f_c'$).
我们将使用以下构成关系: 混凝土 在压缩中 (简单的 Parabolic) $f_c' = 30$ MPa 與

$$f_c = \begin{cases} f_c' \left[\frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \text{for} \varepsilon_c < \varepsilon_0 \\ f_c' \left[1 - 0.15 \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] \text{for} \varepsilon_c > \varepsilon_0 \end{cases}$$

哪里 $\varepsilon_0$0 和 003 $\varepsilon_u = 2\varepsilon_0$.
混凝土 在 紧张: $f_{cr} = 0.6\sqrt{f_c'}$ (MPA), $E_c = 5,500\sqrt{f_c'}$ (MPA) 和 $f_c = E_c \varepsilon_c \leq f_{cr}$.
强化是线性弹性/完美塑料 $E_s = 200,000$ MPA 和 $f_y = 400$ MPa.Each Bar 是我們#8 (測量 #25) 有一个 A_s=510 mm^2






```
%%  Jordan Brennise & Dean Van
clear;clc,close
scrsz = get(0,'ScreenSize');figpos = [2 2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];
h=1000;bw=200;bf=500;hf=200;
%
y_As=75; % distance from origin to bottom steel
As=6*510; % tension steel
y_Aps=950; % distance from origin to top steel
Aps=3*510; % compression steel
%
Es=200000; % MPa
fy=400;
%
fp_c=30; % MPa
Ec=5500*sqrt(fp_c); % MPa
epsip_c=0.003;
epsi_u=2*epsip_c;
f_cr=0.6*sqrt(fp_c); % MPa
%================================================================
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    Ac=bf*bw*2+bw*(h-2*hf); % mm^2
    Nappl=0.1*fp_c*Ac; % Applied normal force
    nl=100; % number of layers in tension or compression
    epsilon=0.000001;
    Bmin=1.0-epsilon;Bmax=1.0+epsilon;Nmax=Bmax*Nappl;Nmin=Bmin*Nappl;
    % We bound phi, the angle between the vertical and the strain on a linear
    stress-strain relationship. This is done by limiting the failure strain epsip_c
    =0.003. Use plane sections and an estimate of c to find the failure phi
    associated with this failure strain.
    c=0.1*h; % Estimate of c
    phi_fail=epsip_c/c;
    delta_phi=phi_fail/100; % estimate of upper limit of phi
    % Start the loop to determine the curvature, phi, and N. Initialize phi. Assign
     an initial internal moment and force of zero (KN-m and KN, respectively).
    Limit neutral axis location  yn(iphi) to bounds within the column depth, h.
    Begin the internal forces loop by specifying that the neutral axis only be
    varied while internal force N is outside established Nmin and Nmax bounds.
    iphi=1;
    phiM(1)=0;M(1)=0; % initialization of data to be plotted
    EndRun=0; % flag to interupt iterations later
    for phi=delta_phi:delta_phi:phi_fail % loop on phi
    % initialization
    iphi=iphi+1; % counter
    phiM(iphi)=phi; % store for plotting
    ymin=0; % initial values
    ymax=h;
    yn(iphi)=(ymin+ymax)/2; %start with neutral axis in the middle
    %Iterate until convergence
    iter=0; %counter
    N=0;
    while N < Nmin ||  N > Nmax %loop while B outside acceptable range
    iter=iter+1;
    % Use a while loop. If the previous internal force is outside of the set force
    bounds, recalculate the internal stresses with the next phi until the internal
    force converge with the limits. These internal force calculations begin with
    the steel, both in tension and compression (and the top and bottom of the
    section, respectively). These internal stresses are calculated for a single
    layer of steel in both compression and tension. It is important to note to
    ensure that the steel stress is bounded by the yield stress of steel when in
    tension.
    %Steel forces
    fs= phiM(iphi)*(yn(iphi)-y_As)*Es; %stress in tension steel
    if fs > fy
    fs=fy; %check if steel is yielding
    end
    F_TR=As*fs; %tensile force in bottom steel
    MF_TR=F_TR*y_As; %Moment caused by tension reinforcement
    fps=phiM(iphi)*(y_Aps-yn(iphi))*Es; %stress in compression steel
    if fps > fy
```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

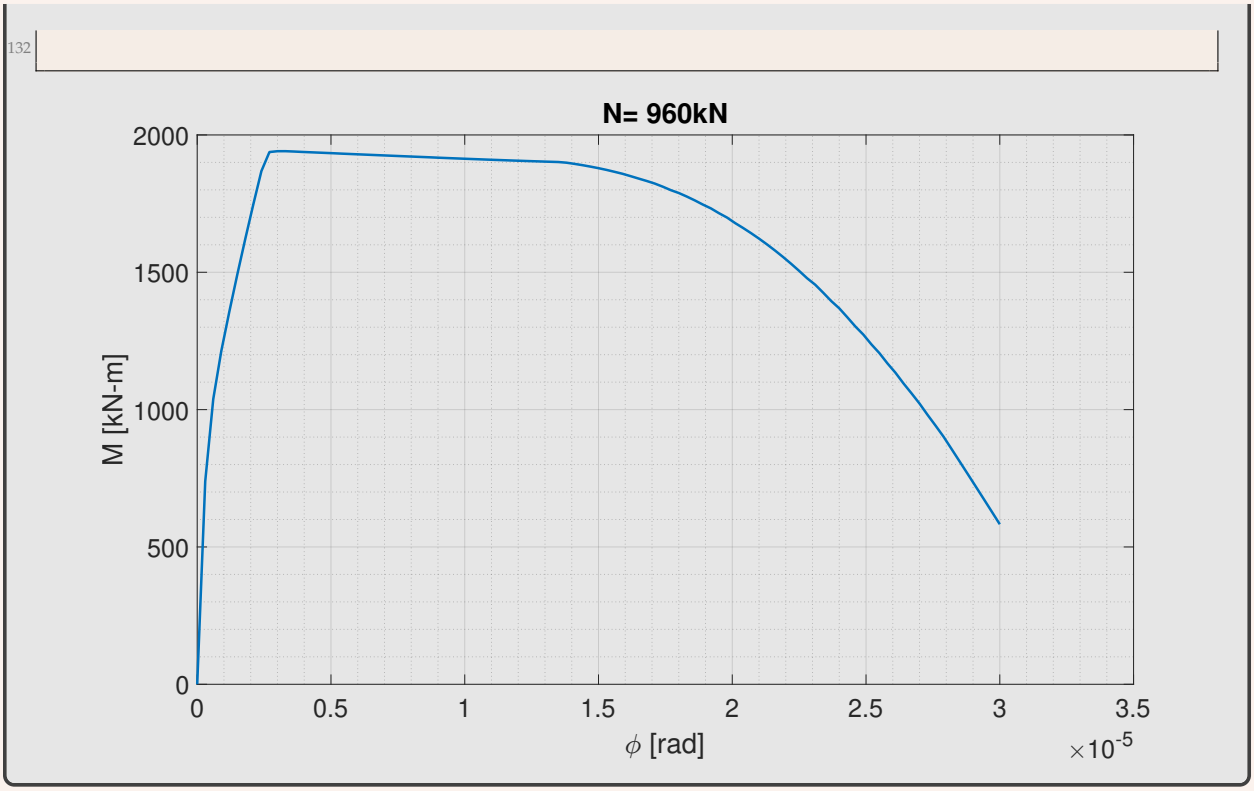
```
    fps=fy; % check if steel is yielding
    end
    F_CR=-fps*Aps;  % Compressive force in top steel
    MF_CR=F_CR*y_Aps; % Moment caused by compression reinforcement
    % Next compute the internal forces for the concrete, both in tension and
    compression (and the top and bottom of the section, respectively). Unlike the
    steel, which had its internal stresses calculated for a single layer of steel
    in both compression and tension, the concrete internal stresses are computed
    for a series of layers throughout the section. This began at the bottom (yc=0)
    and continued for a number of layers (nl) with height delta_yc. Included is an
    if statement to ensure that the change in width of the section from web to
    flange are captured depending on the location of yc(ic). In order to compute
    the internal stresses in compression, an external script was used,
    stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c).  This script used the
    relationship for compressive stress in concrete as a function of strain, but
    accounting for failure. Tension in concrete is done similarly, but the stress
    for this was calculated using a simple relationship.
    % Loop over the layers:
    % Compression in concrete
    yc=0;
    ic=0;
    delta_yc=(h-yn(iphi))/nl;
    for ic=1:nl % loop over the layers
    yc(ic)=yn(iphi)+(ic-0.5)*delta_yc; % store in array for possible plotting
    b=bw; % check width
    if yc(ic) > h-hf
    b=bf;
    end
    epsi_c=phi*yc(ic); % strain at layer location
    F_CC(ic)=-b*delta_yc*stress_strain(fp_c,epsip_c,epsi_u,epsi_c); %concrete
    compression at that layer
    MF_CC(ic)=F_CC(ic)*yc(ic); % Moment contribution from layer force
    end
    % Tension in concrete
    it=0;
    yt=0;
    delta_yt=(yn(iphi))/nl;
    for it=1:nl
    yt(it)=(it-0.5)*delta_yt;
    b=bf; % Check for width
    if yt(it) > hf
    b=bw;
    end
    epsi_t=phi*(yn(iphi)-yt(it));
    ft=Ec*epsi_t;
    if ft > f_cr
    ft=0;
    end
    F_TC(it)=b*delta_yt*ft;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
    MF_TC(it)=F_TC(it)*yt(it);
    end
    % Using the internal forces for steel and concrete (both in compression and tension), compute the total force through equilibrium. Assume compression to be negative and tension to be positive. The N value for internal force is compared to the bounds set earlier, and is recomputed with an increased phi if it is outside those bounds. If this is the case, then the neutral axis is shifted accordingly, phi will be increased, and N recomputed through the steps above. When the internal force are within the bounds set, then we will compute total moment for that phi and plot the moment curvature at equilibrium.
    % Compute total force should be -ve
    N=F_CR+sum(F_CC)+sum(F_TC)+F_TR;
    N=-N; % make it positive
    %%%
    % make adjustments
    if N < Nmin
    ymax=yn(iphi);
    yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymin);
    end
    if  N > Nmax
    ymin=yn(iphi);
    yn(iphi)=0.5*(yn(iphi)+ymax);
    end
    % sanity check in case yn(iphi) is getting to close to the top
    if yn(iphi)<0.01*h
    EndRun=1;
    break
    end
    end
    M(iphi)=-(MF_CR+sum(MF_CC)+sum(MF_TC)+MF_TR)/1000000; % convert N-mm to kN-m
    if EndRun == 1
    break
    end
    end
    figure('Position',figpos); set(gca,'FontSize',28);
    plot(phiM,M,'linewidth',2);grid minor; grid
    xlabel('\Phi [rad]');ylabel('M [kN-m]');titre=['N= ' num2str(Nappl/1000 ) 'kN'];
    title(titre);
    set(gca,'fontsize',20);set(gca, 'color', 'none');
    exportgraphics(gca,'Concrete-M-Phi.pdf','BackgroundColor','none')
    %=========================================================================
    function fc= stress_strain(fp_c, epsip_c, epsi_u, epsi_c)
    if epsi_c < epsip_c
    fc=fp_c*(2*epsi_c/epsip_c -(epsi_c/epsip_c)^2);
    else
    fc=fp_c*(1-0.15*((epsi_c-epsip_c)/(epsi_u-epsip_c)));
    end
    end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



56.4.1.2 互动图表 $M-N$

28 重复以前的程序, 为各种 N_{ext} 我们可以从泡沫列中取出 **互动图表**, 图 56.3 这是一个荷载

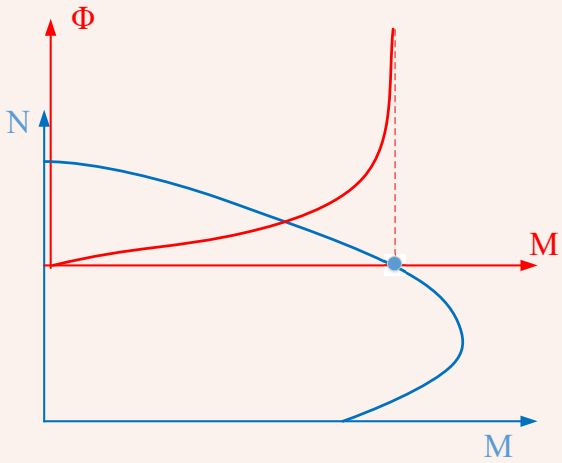


图 56.3: 瞬间曲线和瞬间轴力 (互动) 图表

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

的图表 P_n 柱可以携带与其瞬间容量相比, M_n[2].

56.4.2 数值方法

29 此前描述的解析方法可以数字化实施。首先, 我们必须 **差异化** 十字路口到层 [3], 图 56.4.

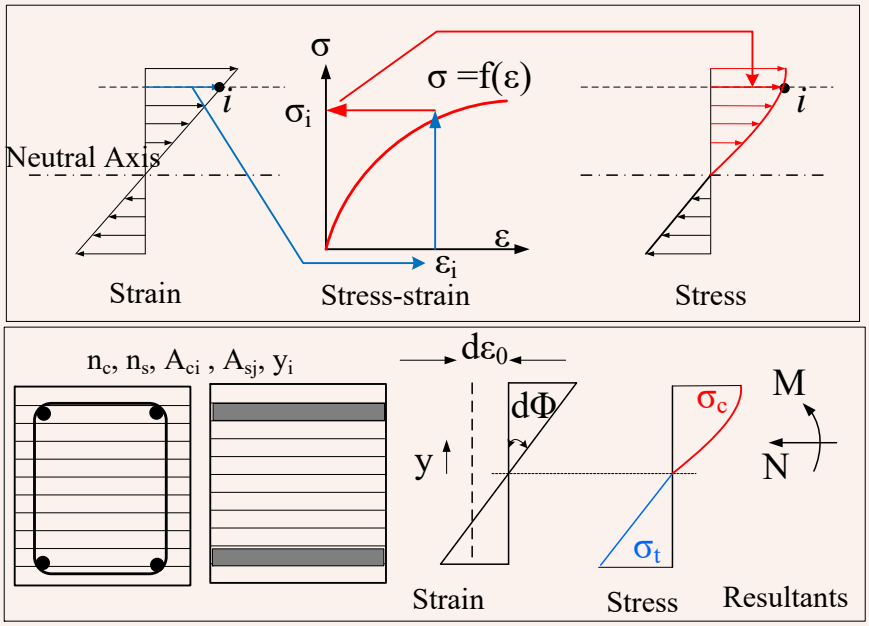


图 56.4: 将 截面 分为层

因此, 我们打破了混凝土部分 n_c 层 (指数 i), 和 钢材 在 n_s 层 (指数 j)[4]. A_{ci} 和 $A_{sj} = A_s$ 相应于每个 混凝土 和 钢材 层的区域, y_i 是纤维的距离 i 来自 NA。

30 对于一个给予的 (固定) N_{ext} 我们将逐步增加 Φ 由 $\Delta\Phi$ [5], 并解决为 N_{int}. 因此, 我们试图确定 M_{ext} 对于一个给予的 Φ. 在任何部分 $\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y\Phi$ 哪里 ε_0 是的, 轴 应变 因而造成的 N_{ext}.

[2]签名 n 指的是名称。
[3]或纤维, 如果我们有 bia-axial moment 或 扭转.
[4]接下来, 我们将区分有限的 (钢材盒子内) 而且不限, 因为它们有不同的特性。
[5]请注意, 在解析方法中, 我们增加了 ε_c^{top} 被解散为 k.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

30 对于某个 应变, 结果的内部力量:

$$N_{int} = \int E d\varepsilon dA = \int E dA d\varepsilon_0 + \int E dA y d\Phi$$
$$= \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}\right]}_{\text{初始应变}} \varepsilon_0 + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}y_i\right]}_{\text{曲率 } \Phi} \Phi \tag{56.5}$$

$$M = \int E d\varepsilon y dA \tag{56.6}$$

31 算法, 图 56.5:

1. 增長 曲率 $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Delta\Phi$ (N_{ext} 固定).
2. 中性轴的位置 (k) 更新 应变 个人资料 $\varepsilon(y_i) = d\varepsilon_0 + y_i d\Phi$ 哪里 $d\varepsilon_0 = (\Delta N - E_x\Delta\Phi)/E_a$.
3. If $\varepsilon \geq \varepsilon_u$ (通常 0.003 为 混凝土) 出门。
4. 定义 N_{int} 来自 EQ。56.5

$$\begin{aligned} N_{comp} &= \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci}A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj}A_{sj} \\ \sigma_{ci} &= \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci}A_{ci}(\varepsilon_0 + y_i\Phi) \\ \sigma_{sj} &= \sum_{j=1}^{n_s} E_{sj}A_{sj}(\varepsilon_0 + y_j\Phi) \end{aligned}$$

5. If $|N_{ext} - N_{int}| > \varepsilon$ 调整 k 要不然, 他就出去了。
6. 计算

$$M_{int} = \sum_{i=1}^{n_c} \sigma_{ci}A_{ci}y_i + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_{sj}A_{sj}y_i$$

32 确保接近可能很困难, 因此首先将定义一个大边界框。y_{min} 和 y_{max}, 每次 iteration, 我们将更新其中一个, 直到两个边缘盒相对较小。因此,

步骤 1 開始一個初始的 曲率 和 中性轴 即假設: $\Phi, y_n(1), y_{min}(1), y_{max}(1)$

压缩和紧张的部分应分为平等层深度与长度 L_e. 要小心不要把太少的层分配在旗帜上, 而不是与网相反。

推荐变量名称:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

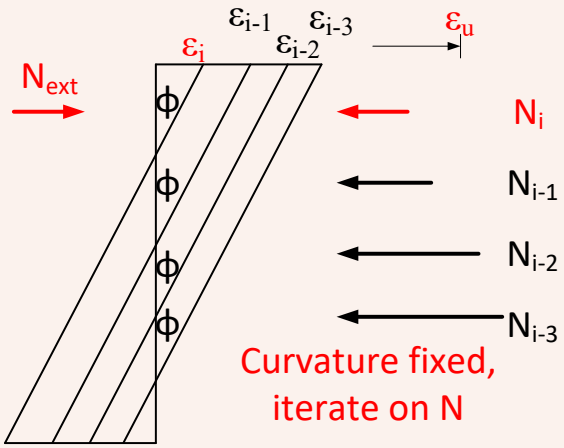


图 56.5: 增加方法确定 $M-\Phi$ 数字化

- 混凝土 压缩强度 F_{CC}
- 混凝土 紧张力量 F_{CT}
- 钢材 紧张力量 F_{ST}
- 钢材 压缩强度 F_{SC}
- F_{CT} : 只有如果层不被打破。

步骤 2 定义正常力量

$$N_i = F_{cr} + F_{cc} - F_{ct} - F_{tr}$$

并确定边界 B 为 y_{min} 和 y_{max} 将更新到每个字符串结束时

$$\underbrace{N_{min}}_{B_{min}N_{appl}} < N < \underbrace{N_{max}}_{B_{max}N_{appl}}$$

可能, $[B_{min}, B_{max}] = [0.95, 1.05]$ 相应的 ±5% 偏差

步骤 3 启动 iteration

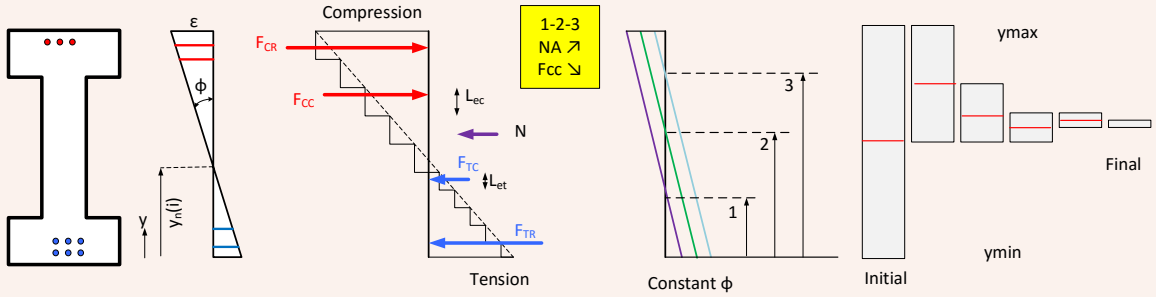
虽然 $N < N_{min} \| N > N_{max}$

$$\text{if} \begin{cases} \text{if } N < N_{min} \implies y_{max} \downarrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{min} \\ y_{max} = y_n(i) \end{cases} \\ \text{if } N > N_{max} \implies y_{min} \uparrow \begin{cases} y_n(i) = 0.5(y_n(i-1) + y_{max} \\ y_{min} = y_n(i) \end{cases} \end{cases} \tag{56.7}$$

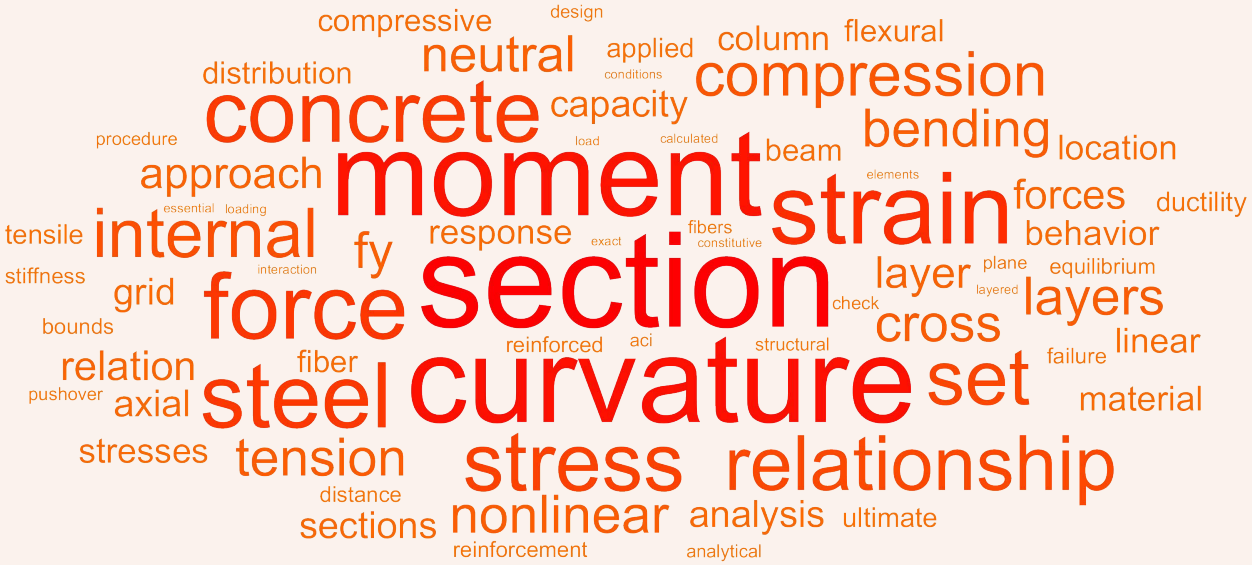
更新 N_i

`if` $N_{min} < N_{appl} < N_{max}$ 条件满意的出口路径, 计算时刻

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



33 此方法将随后在 表述 的预测密度中重新审查 §61.4.



审阅稿

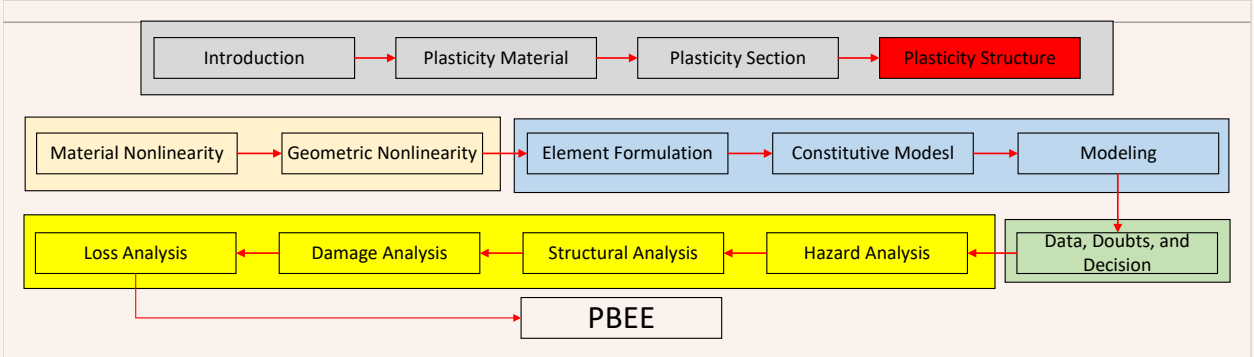
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

57 塑性 III; 结构: Yield Lines

摘要

在我们关于塑料性系列的这篇结论章节中, 我们将重点从结构元素中的定位塑料行为扩展到整个结构系统在最终负载条件下的行为。该章节开始于梁崩溃的分析, 重点是塑料粘贴的形成, 允许喷射器在达到荷载容量时转化为机制。此后, 探讨了屈服线理论的板块, 在那里失败模式在负载下分开的线路上发展。屈服线理论提供了一个有效的方式来预测崩溃机制, 即使有复杂的分布式板载的性质。最后, 我们讨论了屈服线理论、虚假的塑性模型和静力推覆分析模型的相似之处。这些模拟描述了这些方法的共同原则, 所有这些都通过专注于特定地区的不弹性反应来接近崩溃行为, 从而在极限状态中提供实用工具来评估结构安全。

57.1 引入 1663
57.2 线性 单元 (布, 框架) 1665
57.2.1 动画: 上限 1665
57.2.2 静态; 下限 1671
57.3 编程 单元 (弱点) 1679
57.3.1 标签: 下限 1680
57.3.2 主条目: 上限 1681
57.4 静力推覆分析 1684
57.5 低边界分析与 1685
57.5.1 静力推覆分析 1685
57.5.2 彩色 塑性 1688
58.1 由 ChatGPT 提供 1691
58.1.1 动机与物理基础 (~1.5 页) . . 1691
58.2 热力框架 (~2 页) 1691
58.3 斯卡拉的异常损害: 马扎尔模型 (~4 页) 1691
58.4 压力 - 压缩无形和单方面效果 (~2 页) 1691
58.5 破坏 - 塑性 结合 (~2 页) 1691
58.6 规律和客观性 (~3 页) 1692
58.7 應用於 梁 和 柱 单元 (~3 页) 1692
58.8 参数识别和实用指南 (~1.5 页) 1692
58.9 图书馆笔记及进一步阅读 (~0.5 页) . 1692



57.1 引入

1 研究塑性在一个定位级别的作用后 - 首先在一个点, 然后在一个部分 - 我们现在将这一分析扩展到整个结构。本章探讨了塑料在结构分析中的作用, 特别专注于结构如何达到其最终负载能力。

2 到目前为止, 我们的结构分析已经通过线性弹性方法进行, 这使我们能够确定负载部署关系。这种分析往往是足够的, 当目标在服务负载下理解结构的一般行为时, 缺陷在可接受的

范围内。然而, 纯粹的弹性方法并不完全捕捉结构的行为, 因为它接近失败, 特别是在双向系统中, 塑性扮演重要角色。

3 在本章中, 我们的重点转向确定一个结构的崩溃负担, 而不是它的负载移动关系到失败。类似于列布克林, 我们的目标在这里是评估结构的最终强度或失败机制, 而不会产生到这一点的增加负载转移反应。此分析符合 图 的 6 型 54.5.

4 弹性和塑料解决方案之间的差异是显著的, 并在下面列出:

灵活的解决方案 满足以下标准:

1. **平衡**: 结构在适用的负载下处于 平衡 的状态。
2. **灵活的条件**所有内部时刻都在弹性范围内。$|M| < M_{\text{yld}}$.
3. **变形协调 (连续性)**: 变形 变形协调 在整个结构中保持, 确保连续的 位移 字段。

塑料解决方案 满足这些标准:

1. **平衡**: 结构保持在应用负载下 平衡。
2. **Yield 條件**时刻达到塑料时刻容量, $|M| \leq M_{\text{pl}}$ 表明塑料行为的起源。
3. **机制**: 额外的变形可能发生, 没有进一步增加荷载, 这意味着结构已成为一个机制。
4. **塑料手中的工作能量原则**:

$$\text{External Work}\,(W_e) = \text{Dissipation Energy}\,(D \geq 0) + \text{Strain Energy}\,(U = 0).$$

塑料分析的假设

1. 所有外部负载均匀增加。
2. 材料行为是弹性塑料, 允许塑料粘贴的发育。
3. 缺陷很小, 所以几何非线性不考虑。

5 在泡沫和框架中, 失败通常发生在足够的数量后 **塑料手相关术语** 形状, 将结构转化为 **机制**, 导致部分或全部崩溃。对于分析目的, 我们通常会采取弹性完美塑料材料反应, 内部时刻达到。M_p 在 塑性铰 中, 没有进一步抵抗额外的 转角.

6 最终的 (或 **限制**) 一个结构的负担可以通过两个不同的方法来确定, 如表中总结 57.1:

上限; Kinematic 方法: 这个方法是基于假设可能的倒塌机构和计算相应的荷载。产生的负载将始终超过或相当于真正的最终负载。我们认为所有塑料轴承的同时形成是要形成一个机制所需的, 而不考虑到轴承形成的实际序列。这种方法确保平衡和满足塑料条件, 但不能准确预测实际崩溃机制。

下限; 静态方法: 在这里, 我们将与应用的负载在平衡中的瞬间分配, 确保没有内部时刻超过。M_p. 这个 荷载 估计将始终低于或相当于真正的最终 荷载. 该方法试图模拟形状的序列, 并提供保守的荷载估计, 确保塑性不超过, 尽管它可能无法完全满足机制状态。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 57.1: 对 荷载 分析限制的动态和静态方法的比较

方法	约束	假设	满足	可以强奸
电影	上方	机制	塑性	机制的形成
静态	低下	平衡	机制	塑性

我们将仔细审查每一个方法, 分析它们的价值观和限制。

57.2 线性 单元 (布, 框架)

57.2.1 动画: 上限

定义 57.1: 顶部相关理论

一个结构将崩溃, 如果存在一种 kinematically admissible deformation field, 其工作率由外部力量完成超过内部能量分散的速度。

7 上方的理论, 有时被称为 **不安全 荷载 理论**, 提供一个方法, 以估计结构的崩溃荷载通过分析潜在变形机制。这个理论表明, 任何基于假设、动态可接受的变形机制导致崩溃的荷载将作为真正的崩溃荷载. 结果是, 如果这个荷载超过结构的容量, 崩溃是不可避免的。

8 这个理论与 **虚功原理** §48.3.3, 也被称为虚拟移动的原则。在两种原则上, 平衡和崩溃条件通过在假设的变形或崩溃机制下比较外部和内部工作率来评估。

9 虚功 原则规定, 对于 平衡 , 虚拟 位移 期间由负载进行的外部 虚功 必须相当于结构的抵抗力所进行的内部 虚功 。在这里, 可以识别一个崩溃的荷载当这种平衡被破坏的方式引发一个机制。

定义一个 Kinematically Admissible Field

10 A **可接受的电影领域** 代表一个假设变形状态, 与结构的限制和被认为崩溃机制一致。对于被视为 kinematically acceptable 的变形领域:

- 外部工作, W_e 由应用部队执行 $\mathbf{F}$ 反对变形 $_F$ 它必须是积极的, 这意味着结构在应用负载的方向被扭曲。
- 内部工作, W_i 由塑料时刻制作 $\mathbf{M}_p$ 在旋转中行动 $\boldsymbol{\theta}$ 在 塑性铰 位置, 也是积极的, 这意味着内部抵抗力正在以对外 荷载 的反应工作。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

通过工作平等来确定崩溃

11 要评估是否会导致某个 荷载 的崩溃, 我们将应用的 荷载 的外部工作与塑料粘贴中分散的内部工作等同。这种方法依赖于假设一个特定的倒塌机构并计算与它相关的工作。有可能的机制 i, 在崩溃时的外部和内部工作的平衡要求:

$$U_i = \lambda_i W_i$$

在哪里: W_i 是应用 荷载 在虚拟 位移 中在假设机制中进行的外部工作; λ_i 是 A **电影多元化** 将应用的负载扩展到崩溃状态的机制 i; U_i 是机制中的塑料粘贴所分散的整体内部能量。

12 这种内部能量可以表达为:

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} M_{p_j} \theta_{ij}$$

在哪里:M_{p_j} 是塑料时刻的容量在 j^{th} 塑性铰的位置; θ_{ij} 是指甲 转角 在 j^{th} 机械的位置 i; n 代表结构中的潜在塑料粘贴或关键部分的总数。

工作平等过程的解释

外部工作计算: 外部工作 W_i 取决于由应用负载引起的 位移。每個 荷载 F_k 适用于结构的贡献, 以其位移为基础完成的工作。Δ_{F_k} 以 荷载 的方向。从所有应用负载中收集工作贡献, 就产生了整体外部工作:

$$W_i = \sum_k F_k \Delta_{F_k}$$

哪里 F_k 是的, k^{th} 使用 荷载, 和 Δ_{F_k} 其相应的转移在假设崩溃机制中。

内部分散能源计算: 内部工作 U_i 是塑料旋转时由塑料曲线分散的能量。每個輪子 转角 θ_{ij} 在塑料时刻 M_{p_j} 它能为内部能量提供贡献。这些能量捐款的总额, 从每个环定义了所假设机制的全部分散能量, 如上方方程中所示。

13 通过平等 U_i 与 $\lambda_i W_i$ 我们解决了 λ_i, 需要的荷载多元化器, 以便结构崩溃为假设机制。如果考虑到多种机制, 最低的 λ_i 给出最关键的顶部链接在崩溃 荷载。

假设为 Kinematic (顶部限制) 方法

14 上方的链接方法依赖于几个简化假设, 以使崩溃分析可追踪:

- **精致的塑料行为**结构成员被认为以弹性、完美的塑料方式行事。这意味着一旦产量开始, 会员可以在没有额外的抵抗力的情况下保持塑料变形, 这意味着在产量点之外没有应变硬化。
- **位於 塑性 在 Hinges**: 塑料变形被认为仅在特定地点发生, 称为塑料粘贴。这些曲线形成时, 瞬间达到塑料瞬间的容量。M_p. 在曲线之间, 会员被认为保持弹性, 这通过专注于分散的塑料区域来简化分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- **塑料瞬间统治崩溃**塑料时刻 M_p 在每个交叉部分中, 代表了该部分能够抵抗的最大时刻。一旦到达这一点, 部分被认为是完全完成的, 没有额外的时刻抵抗是可能的。因此, 结构的崩溃 荷载 由这些塑料时刻能力控制。

独立机制的数量

15 可能的独立崩溃机制数量 n 在一个结构中, 它受到结构的潜在塑性铰位置和其回收性的影响。一般来说, n 它是由以下关系决定:

$$n = h - r$$

在哪里: h 是结构中的可能塑性铰位置的数量; r 是解放的程度, 代表过度限制的数量超越静态决定的。

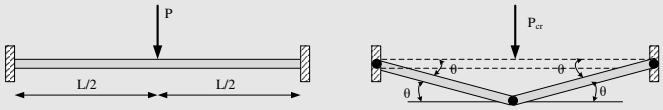
16 这种关系有助于了解潜在的崩溃模式。具有更高的回报率的结构 (更大 r) 可以开发更独立的崩溃机制, 因为它们具有更大的荷载再分配能力。

17 通过计算 n, 我们可以确定可行崩溃配置的总数, 每个相应于不同的潜在机制。这些机制的审查提供了如何和在应用充电期间可能发生崩溃的地方的洞察力, 从而允许对结构安全进行彻底评估。

57.2.1.1 例题 57.1: 固定 梁; 中心 荷载

- $n = 3 - 2 = 1$
- 内部工作完成

$$M_p\theta + M_p\theta + 2M_p\theta = 4M_p\theta$$



- 由点 荷载 完成的外部工作

$$P_{cr}\theta L/2$$

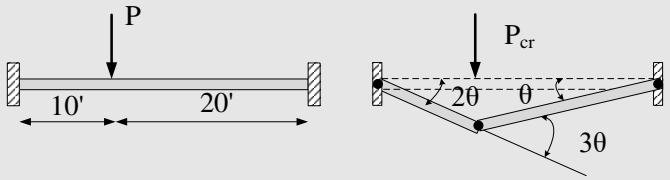
- 相同的两者, 我们得到了

$$P_{cr} = 8M_p/L.$$

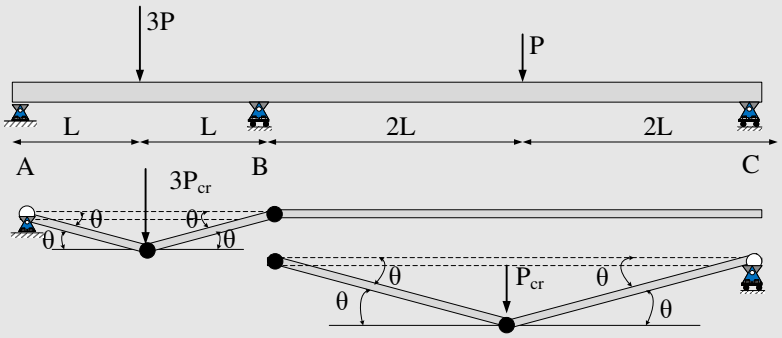
57.2.1.2 例题 57.2: 固定 梁; 折扣 荷载

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$
\begin{aligned}
W_{int} &= W_{ext} \\
M_p(\theta + 2\theta + 3\theta) &= P_{cr}\Delta \\
6M_p\theta &= P_{cr}\theta(20) \\
\Rightarrow P_{cr} &= 6\frac{M_P}{20} \\
P_{cr} &= 0.3M_p
\end{aligned}
$$



57.2.1.3 例题 57.3: 连续 梁



将垂直力量所做的外部工作与内部工作等同:

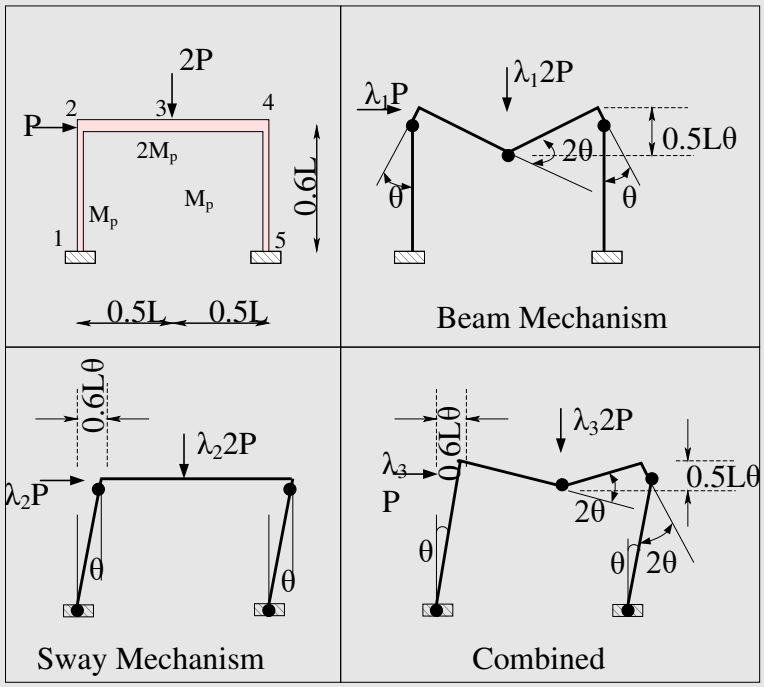
- 阿布: $3P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ 或 $P_{cr} = \frac{M_p}{L}$.
- 斯本 BC: $2P_{cr}L\theta = 3M_p\theta$ 或 $P_{cr} = \frac{3}{2}\frac{M_p}{L}$

57.2.1.4 例题 57.4: 正统 框架

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- $n = 5-3 = 2$ 独立模式。
- 可能的机制总数为 3 个。(其中一个依赖于其他两者。).
- 要检查这 λ 事实上是最低限度, 我们可以绘制相应的时刻图表, 并确认没有部分时刻更大。M_p.

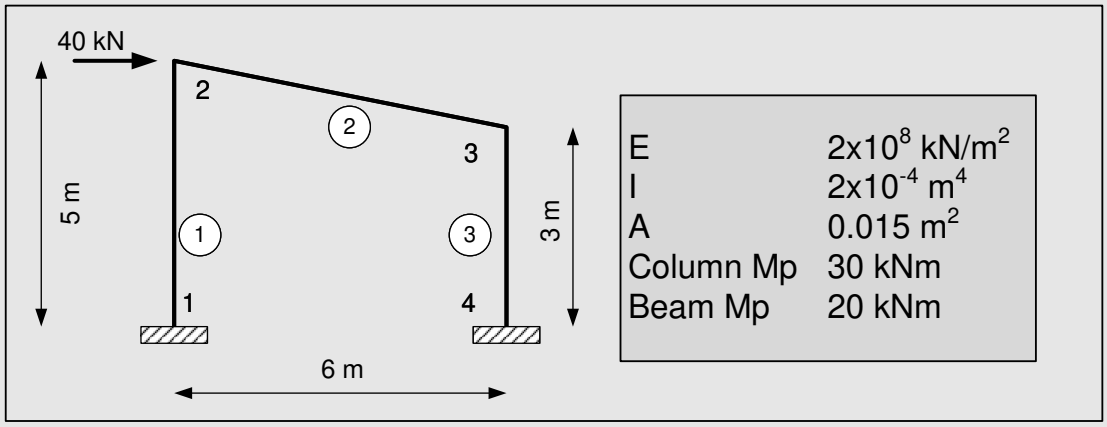


Beam Mechanism	$M_p(\theta+\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_1(2P)(0.5L\theta)$	$\Rightarrow \lambda_1 = 6\frac{M_p}{PL}$
Sway Mechanism	$M_p(\theta+\theta+\theta+\theta)=\lambda_2(P)(0.6L\theta)$	$\Rightarrow \lambda_2 = 6.67\frac{M_p}{PL}$
Combined Mechanism	$M_p(\theta+\theta+2\theta)+2M_p(2\theta)=\lambda_3\left(P(0.6L\theta)+2P(0.5L\theta)\right)$	$\Rightarrow \lambda_3 = 5\frac{M_p}{PL}$

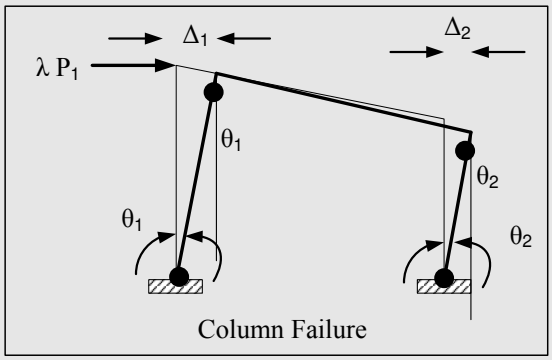
57.2.1.5 例题 57.5: 包含 框架

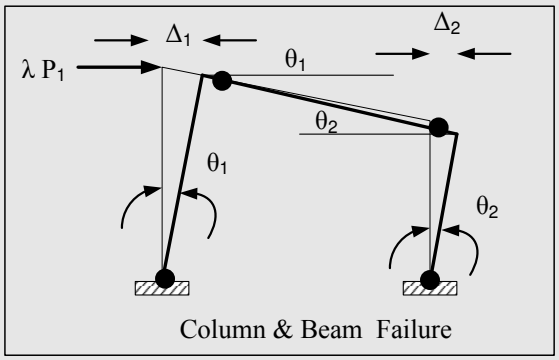
我们试图确定下一个框架的崩溃负载, 使用动态上限方法。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



首先, 我们将发现潜在的塑料粘贴





然后分别考虑每个失败模式:

列中的失败

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_1 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_2) \\
\lambda_1 &= \frac{16}{15}\frac{M_p^c}{P} = \frac{16}{15}\frac{30}{40} = 0.8
\end{aligned}$$

混合失败

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_2 \\
5\theta_1 &= 3\theta_2 \\
\theta_1 &= 0.6\theta_2 \\
\lambda_2 P(5\theta_1) &= M_p^c(\theta_1+\theta_2) + M_p^b(\theta_1+\theta_2) \\
&= \frac{8}{3}M_p^c\theta_1 + \frac{8}{3}M_p^b\theta_1 \\
\lambda_2(40)(5) &= \frac{8}{3}(30) + \frac{8}{3}(20) \\
\lambda_2 &= \frac{2}{3} = 0.67
\end{aligned}
$$

因此, 第二个案例规定和 $P_{crit} = (0.67)(40) = 26.8\text{kN}$

57.2.2 静态; 下限

定义 57.2: 下限理论

一个结构不会崩溃, 或者将处于崩溃的时刻, 如果可以建立一个平衡内部力量分配, 平衡所应用的负担, 并在整个结构中保持或低于产量限制。

18 低线理论, 也被称为 **静态或安全 荷载 理论**, 提供一个方法来估计结构的崩溃荷载通过确保内部力量和时刻在平衡与外部负载, 而不超过产能。

19 这种理论保证了荷载载体容量的安全、保守的估计, 因为它只考虑到在弹性塑料范围内留下的分布, 并且不承认形成超越严格需要的额外机制。

20 这个理论与 **补充 虚功 的原则**, §48.3.1 基于对外负载的内部力量, 并遵守产量条件的 平衡 建立。在静态方法中, 我们专注于寻找可行的力量分布, 在平衡中, 避免任何过度压力材料, 从而为崩溃的荷载提供较低的界限。

下限方法的假设

21 在应用下限方法时, 以下假设是必不可少的:

- **平衡 内部和外部力量**應用的負擔必須在 平衡 中, 內部力量和時刻在構造的所有點。这需要力量和时刻平衡, 没有任何净不平衡的力量或时刻在结构的任何部分。
- **形成足够的塑料灵**内部的力量和时刻应该允许形成足够的塑料粘贴, 使一个倒塌机构形成。崩溃机制发生时, 结构达到一个配置, 在那里它不能再抵抗额外的负担, 经常标志着在特定的位置的弯曲的发展。

22 这个方法计算的荷载是基于假设分配时刻, 即:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 保持 平衡 与应用充电。
- 确保内部时刻不超过塑料时刻容量。M_p.

[23] 这种方法本质上提供了一个保守的估计, 因为它只专注于瞬间分布, 防止产量超过所指定的产量限制, 从而产生负担低于或相当于实际崩溃负担。

静态解决方法

[24] 静态 (或下限) 确定最终 荷载 的方法包括以下详细步骤:

1. **选择 Redundant 时刻:** 识别结构内的转折时刻, 这有助于整体平衡。在静态不确定的结构中, 这些时刻是必须解决的额外内部时刻, 以保持平衡由于超越静态决定的限制。此选项过程包括识别时刻可能有所不同的地方, 而不会干扰整体平衡。
2. **创建静态定义时刻图:** 首先, 将结构简化到静态定义的配置, 通过概念上删除其折叠。在应用加载下绘制该结构的特定版本时刻图。这个基础图表代表了如果结构没有额外的限制或折扣, 会存在的时刻分布。
3. **超级强制定义时刻图上的缩小时刻:** 确定确定的时刻图后, 下一步是将沉重的时刻转移到它。这些微妙的时刻被添加到基线时刻分配, 以实现在完全限制的时钟分配。(未定) 结构。通过这种超级位置, 您可以获得合并或全部时刻分布, 代表在应用的荷载下真正的内部时刻。
4. **设置顶峰时刻到塑料时刻容量 M_p:** 调整旋转时刻, 以确保总时刻图中的顶峰时刻不会超过塑料时刻容量。M_p 在结构的任何部分。这个步骤是关键的, 因为它尊重收益条件, 确保没有部分过度压力。把峰值等于 M_p 作为标志着弹性和塑料行为之间的过渡的边界, 识别已达到其完整的荷载运载能力的部分。
5. **检查一个机制的形成:** 确认塑料相关术语的数量形成在时刻到达的地方 M_p 就足以创造一个机制。一个机制发生时, 结构可以经历额外的变形, 而不会增加荷载, 有效地使其不稳定。机制的形成表明结构处于崩溃边缘, 因为荷载的任何进一步增加都会导致未经控制的变形。
6. **使用 平衡 條件計算 Ultimate 荷载:** 最终分配时, 使用 平衡 方程式来计算最终的 荷载 , 该结构可以 支座 不违反产量条件。这个最终 荷载 相当于所应用的 荷载 尺寸, 根据下限方法, 结构达到崩溃状态。荷载 是结构的真实容量的保守性估计, 确保结构的一部分不超过塑料限制。

下限方法的概述

[25] 较低的界限方法提供了一个系统的方式来评估一个结构的荷载负载能力, 通过:

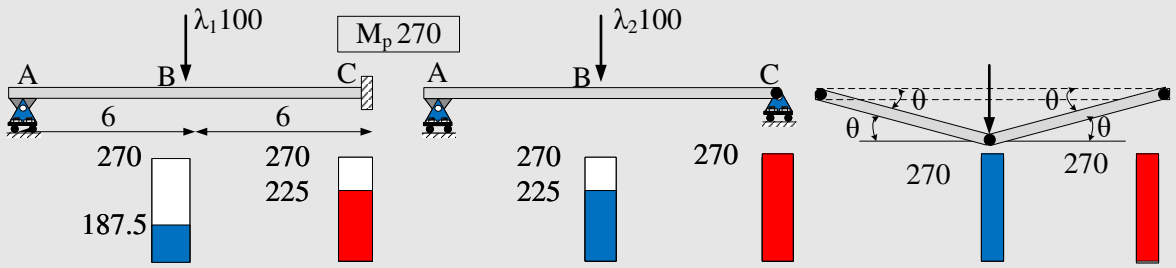
- 平衡的内部和外部力量。
- 通过精心分配时刻, 遵守收益条件。
- 避免关于曲线形成序列的假设, 从而提供一个安全的估计, 可能会低估实际崩溃荷载.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

[26] 这种方法在结构工程中特别有用, 因为它保证了安全性, 通过产生一个崩溃的荷载 , 最糟糕的是, 相当于或低于真正的最终荷载.

[27] 通过使用 平衡 和单独的产量限制, 低调方法避免了关于特定崩溃机制的假设, 并提供了一个坚实的方式来评估结构安全。

57.2.2.1 例题 57.6: 提交的 Cantiliver I

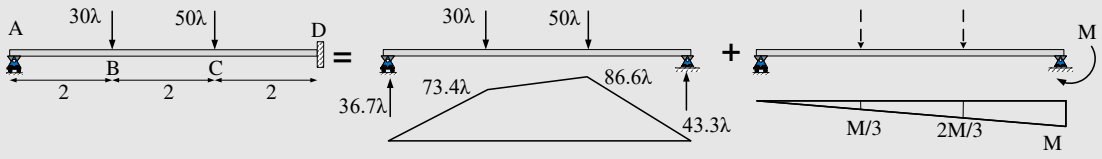


- 表演一 增長 分析。
- 第一阶段: 我们有一个 静态不确定 结构受 P=100 (尺寸是无关紧要的, 可能有 1、10 等。) 经过分析, 我们得到了;

$$\begin{array}{rcl} M_C = \frac{3}{16}PL = 225 & \Rightarrow & \lambda_1^C = \frac{270}{225} = 1.2 \\ M_B = \frac{5}{32}PL = 187.5 & \Rightarrow & \lambda_1^B = \frac{270}{187.5} = 1.44 \end{array}$$

  因此, 该 第一种形状在 C, 和 $P = 1.2(100) = 120$, $M_C^{total} = 1.2(225) = 270$, 和 $M_B^{total} = 1.2(187.5) = 225$
- 第二阶段: 在 C 中形成了一个环 ($M_C = 0$) 我们现在有一个 静态定义 梁 與點中間 荷载 再次 P=100 和 $M_B = PL/4$=300. 其余的 塑料时刻容量 在 B is 270-225=45, $\Rightarrow \lambda_2 = 45/300$=0.15
- 添加两个负载 (到现在 M_C^{total} 第 270 章 和 M_B^{total}=225+0.15(300)=270) 而且, 总体 $\lambda_C = \lambda_1 + \lambda_2 = 1.2 + 0.15 = 1.35$ 因此, 该 荷载 是 $1.35(100) = 135$

57.2.2.2 例题 57.7: 提交的 Cantiliver II



- 静态不确定结构。而不是进行分析, 以确定第一个相关术语子发生在哪里, 我们做两个假设。
- 首先要考虑形成 C 和 D 等。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M^D & = & M_p \\ M^C = 86.6\lambda - \frac{2}{3}M^D & = & M_p \end{array} \right. \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{52}$$

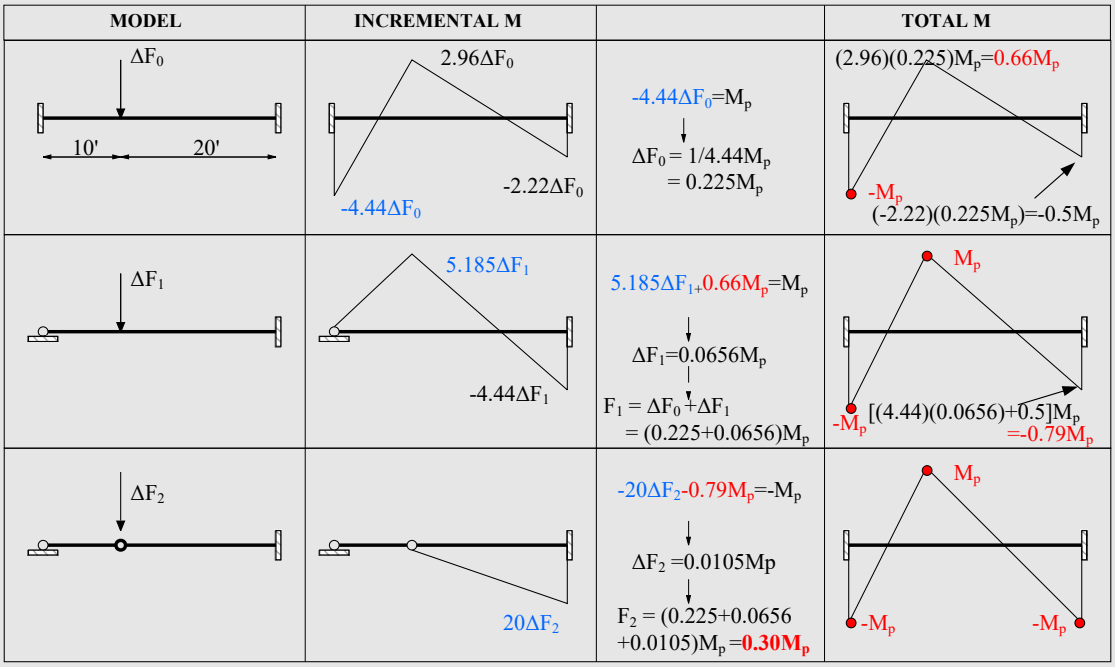
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 另一个可能性 在 B 和 D 中

$$\left\{\begin{array}{lllll} M^D & & = & M_p & \\ M^B & = 73.4\lambda - \frac{1}{3}M^D & = & M_p & \end{array}\right. \Rightarrow \lambda = \frac{M_p}{55}$$

- 因此,The 第二案 政府.

57.2.2.3 例题 57.8: 固定 梁



1. 首先, 我们要考虑 原始结构
   (a) 應用 荷载 F_0 确定相应的时刻图表。
   (b) 识别的 最大的时刻 (-4.44F_0) 和 把它等同于 M_P. 这是一个塑性铰将形成的第一点。
   (c) 我们重新编写时刻图表, 以 M_P.
2. 接下来我们将考虑结构与塑性铰在左侧的支座。
   (a) 應用一 增長 荷载 ΔF_1.
   (b) 将相应的时刻图绘制为 ΔF_1.
   (c) 确定最高点 **全集** 时刻作为点在荷载下 $5.185\Delta F_1 + 0.666M_P$ 把它当成平等的 M_P.
   (d) 解决为 ΔF_1, 并确定外部应用的 荷载 的总量。
   (e) 创建更新的全瞬间图表。现在我们有两个塑料轴承, 我们仍然需要一个第三个, 以便有一个导致崩溃的机制。

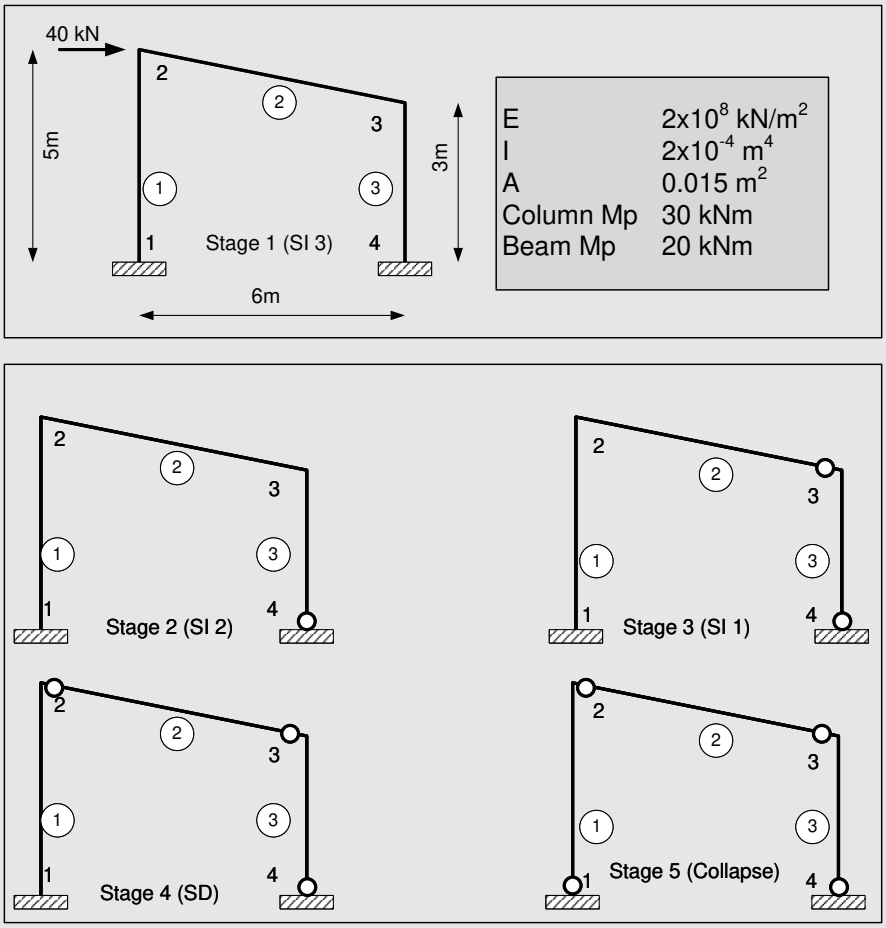
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 最后, 我们分析了修订的结构, 用两条塑料粘贴。

   (a) 應用增長 荷载 ΔF_2.
   (b) 将相应的时刻图绘制为 ΔF_2.
   (c) 将总瞬间节点设置在右边等于 M_P.
   (d) 解决为 ΔF_2, 并确定整体外部 荷载. 此 荷载 将符合结构的 荷载 故障。

57.2.2.4 例题 57.9: 包含 框架

现在我们正在寻求通过静态较低的连接方法重新分析以前倾斜的框架。



我们将不得不考虑各个阶段, 从第一到第四阶段开始。(崩溃) 二、二、三是静态不定义的第三、第二和第一等级相应, 阶段 4 是静地定义; 最后阶段 5 是倒塌机构。因此, 我们将使用一个简单的计算机程序进行第一 3 个分析, 第四个手动。M_p 这是塑料时刻。M_i 是每一个团结的时刻 (初始值相当于一个), M_0 这是从每个阶段结束时获得的结构分析时刻。

阶段 1 进行分析, 并确定 α 因子:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

成员 1:

$$\begin{array}{lll} \text{J1} & M_0 = 27.21 & \alpha = \dfrac{M_P - M_1}{M_0} = \dfrac{30}{27.21} = 1.103 \\ \text{J2} & M_0 = -21.75 & \alpha = \dfrac{M_P - M_2}{M_0} = \dfrac{-30}{-21.75} = 1.379 \end{array}$$

會員 2:

$$\begin{array}{lll} \text{J2} & M_0 = -21.75 & \alpha = \dfrac{M_P - M_2}{M_0} = \dfrac{-20}{-21.75} = 0.916 \\ \text{J3} & M_0 = 31.00 & \alpha = \dfrac{M_P - M_3}{M_0} = \dfrac{20}{31} = 0.645 \end{array}$$

第三名:

$$\begin{array}{lll} \text{J3} & M_0 = 31.00 & \alpha = \dfrac{M_P - M_3}{M_0} = \dfrac{30}{31} = 0.968 \\ \text{J4} & M_0 = -59.62 & \alpha = \dfrac{M_P - M_4}{M_0} = \dfrac{-30}{-59.62} = 0.503 \end{array}$$

我们注意到, 柱的右底有最小的 α 因此, 第一个环必须在右底形成。更新时刻:

成员 1:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1 + \alpha M_0 = 0.503 \times 27.21 = 13.69 \\ M_2 &= M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94 \end{aligned}$$

會員 2:

$$\begin{aligned} M_2 &= M_2 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-21.75) = -10.94 \\ M_3 &= M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59 \end{aligned}$$

第三名:

$$\begin{aligned} M_3 &= M_3 + \alpha M_0 = 0.503 \times 31.00 = 15.59 \\ M_4 &= M_4 + \alpha M_0 = 0.503 \times (-59.62) = -30 \end{aligned}$$

阶段 2 进行另一个分析, 并确定 α 因子:

成员 1:

$$\begin{array}{lll} \text{J1} & M_0 = 65.09 & \alpha = \dfrac{M_P - M_1}{M_0} = \dfrac{30 - 13.69}{65.09} = 0.251 \\ \text{J2} & M_0 = -47.24 & \alpha = \dfrac{M_P - M_2}{M_0} = \dfrac{-30 + 10.94}{-47.24} = 0.403 \end{array}$$

会员 2

$$\begin{array}{llll} \text{J2} & M_0 = -47.24 & M_2 = -21.75 & \alpha = \dfrac{M_p - M_2}{M_0} = \dfrac{-20 + 10.94}{47.24} = 0.192 \\ \text{J3} & M_0 = 52.61 & M_3 = 31.00 & \alpha = \dfrac{M_p - M_3}{M_0} = \dfrac{20 - 15.59}{52.61} = 0.083 \end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

成员 3

$$\begin{array}{lll} \text{J3} & M_0 = 52.61 & \alpha = \dfrac{M_P - M_3}{M_0} = \dfrac{30 - 15.59}{52.61} = 0.273 \\ \text{J4} & M_4 = 0 & \end{array}$$

这一次, 最小的 α 相应于梁的右端。这将是第二个环体形成的位置。更新时刻: 更新时刻

成员 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 13.69 + 0.083 \times 65.09 = 19.09$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$

会员 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -10.94 + 0.083 \times (-47.24) = -14.86$$
$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.08 \times 52.61 = 20$$

成员 3

$$M_3 = M_3 + \alpha M_0 = 15.59 + 0.083 \times 52.61 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

阶段 3 进行分析, 并确定 α 因子:

成员 1

$$\begin{array}{lll} \text{J1} & M_0 = 129.70 & \alpha = \dfrac{M_p - M_1}{M_0} = \dfrac{30 - 19.09}{129.70} = 0.084 \\ \text{J2} & M_0 = -70.31 & \alpha = \dfrac{M_p - M_2}{M_0} = \dfrac{-30 + 14.86}{-70.31} = 0.215 \end{array}$$

会员 2

$$\text{J 2} \qquad M_0 = -70.31; M_2 = -70.31 \qquad \alpha = \frac{M_\rho - M_2}{M_0} = \frac{-20 + 14.86}{-70.31} = 0.073$$

更新时刻

成员 1

$$M_1 = M_1 + \alpha M_0 = 19.09 + 0.073 \times 129.70 = 28.56$$
$$M_2 = M_4 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$

会员 2

$$M_2 = M_2 + \alpha M_0 = -14.86 + 0.073 \times (-70.31) = -20$$
$$M_3 = M_3 = 20$$

成员 3

$$M_3 = M_3 = 20$$
$$M_4 = M_4 = -30$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

阶段 4 环必须在左底形成 柱

成员 1

$$\mathrm{J1}M_0 = 40 \times 5 = 200 \qquad \alpha = \frac{M_p - M_1}{M_0} = \frac{30 - 28.56}{200} = 0.007$$

最终

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ &= 0.503 + 0.083 + 0.073 + 0.007 = 0.666\end{aligned}$$

荷载的崩溃将是这样

$$F_{cr} = \alpha F = 0.666 \times 40 = 26.64\mathrm{KN}$$

这些分析的结果最好通过下表显示。

Member	Joint	Moment M_0 (kNm)	Moment M_i (kNm)	Residual Plastic Moment M_p-M_i (kNm)	Load Factor $\alpha=(M_p-M_i)/M_0$	Critical Load Factor α_{cr}	Cumulative Load Factor α_{cum}	Cumulative Moment $M_{j+1}=M_j+\alpha_{cr}M_0=\alpha_{cum}M_0$ (kNm)	Plastic Moment M_p (kNm)	Critical Load $P_{cr}=P*\alpha_{cr}$ (kN)
Stage 1										
1	1	27.21	0.00	30.00	1.10	0.50	0.50	13.69	30	20.13
	2	-21.75	0.00	-30.00	1.38			-10.94	-30	
2	2	-21.75	0.00	-20.00	0.92			-10.94	-20	
	3	31.00	0.00	20.00	0.65			15.60	20	
3	3	31.00	0.00	30.00	0.97			15.60	30	
	4	-59.62	0.00	-30.00	0.50			-30.00	-30	
Stage 2										
1	1	65.09	13.69	16.31	0.25	0.08	0.59	19.14	30	23.47
	2	-47.24	-10.94	-19.06	0.40			-14.90	-30	
2	2	-47.24	-10.94	-9.06	0.19			-14.90	-20	
	3	52.61	15.60	4.40	0.08			20.00	20	
3	3	52.61	15.60	14.40	0.27			20.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 3										
1	1	129.70	19.14	10.86	0.08	0.07	0.66	28.55	30	26.38
	2	-70.31	-14.90	-15.10	0.21			-20.00	-30	
2	2	-70.31	-14.90	-5.10	0.07			-20.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
Stage 4										
1	1	200.00	28.55	1.45	0.01	0.01	0.67	30.00	30	**26.67**
	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	
2	2	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-20	
	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	20	
3	3	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	30	
	4	0.00	0.00	0.00	0.00			0.00	-30	

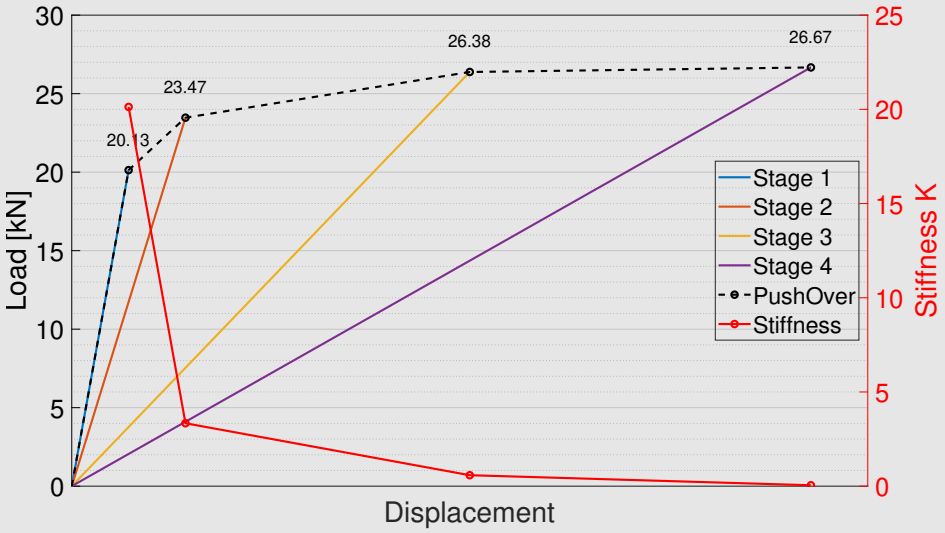
因此, $P_{crit} = 26.67$ kN M_p 这是塑料时刻。M_i 每一个节点的时刻, M_0 是每个节点在每个单元的时刻, 在每个阶段。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

注意事项

虽然每个阶段的转移可能已经确定, 但他们没有报告。但是, 如果我们喜欢它们, 我们会有一个类似的图表。



我们注意到, 随着荷载的增加, 我们有更多的塑料粘贴, 因此硬度下降到零失败。

57.3 编程 单元 (弱点)

[28] 这里 代码: 板的设计可以通过基于线性弹性连续性的经典解决方案的组合使用实现, 数值解决方案基于差异化的单元或 成果线分析.

[29] **屈服线 理论** (雅特) 研究最终的 极限状态 的失败机制。它很简单, 但需要熟悉失败模式 (即了解弱点如何失败的知识).

[30] 當一個相关术语在崩溃的邊緣 (足够的实体或塑料轴承, 形成一个机制) 转角的轴 将沿着支座线或超越点支持, 如列。弱部分可以被认为是旋转为 坚固的身体 在太空中, 这些轴的转角。

[31] 二种类型的 YL: 积极 (克拉克下方) 和负 (克拉克在顶部).

[32] 制定 YL 模式的指南:

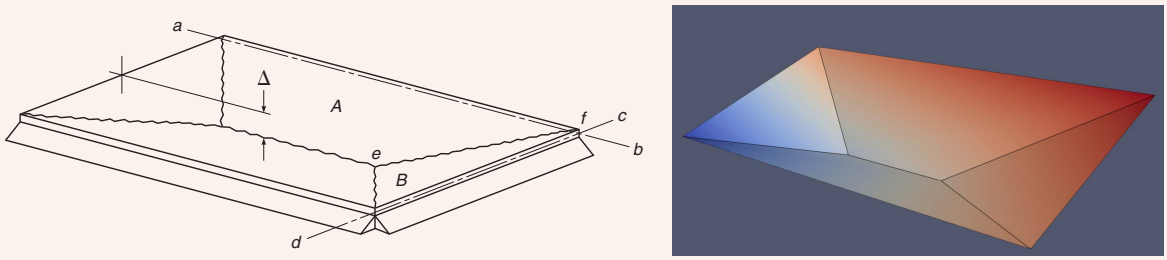
1. YL 是直线 (两架飞机的交叉).
2. YL 是 转角 的轴。
3. 支持的板块边缘也会建立转角的轴。假如是自由的, 就没有限制。
4. 不断支持反复和简单的支持吸引积极或消化 YL。
5. 旋转轴通过任何列支持。方向取决于其他考虑。
6. YL 形成在集中负载下, 向外放射。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

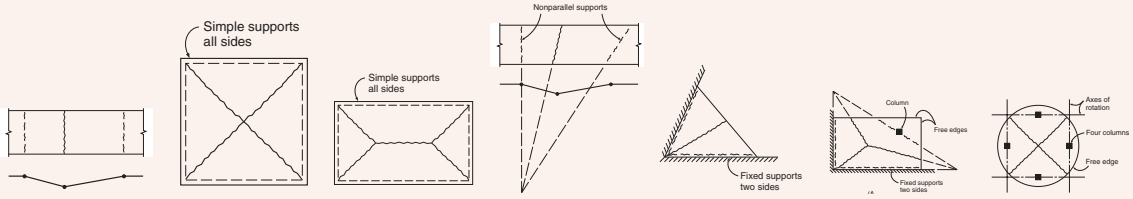
7. YL 两个粘膜部分必须通过接近粘膜分区的 转角 轴的交叉点。

例如, 在直角板上, 仅支持四侧, 图 57.1a 将有其分区 A 和 B 旋转关于 ab 和 cd.

研究 YL 模式的目的是找到提供最少荷载容量的一个模式。).



(a) 直角



(b) 其他人

图 57.1: 利点线在滑板上

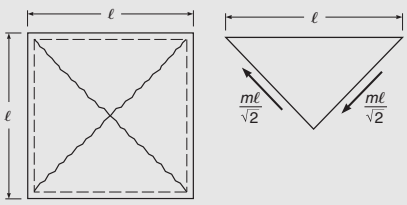
57.3.1 标签: 下限

较低的边缘方法是粗糙的, 但不是不可能的, 用于滑板。下面是简单的例子。

57.3.1.1 例题 57.10: 广场弱点

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

一个平方板仅支持四侧, 并以隔离方式加强。以塑料时刻为线脚 m_P 确定制服 w_{ult}. 注意, 这种方法很少用于弱点分析。由于同步,YL 模式如示。考虑到 平衡 的四个粘膜部分中的任何一个时刻, 关于它的 支座:



$$M_{ext} = w \underbrace{\frac{l^2}{4}}_{\text{area}} \underbrace{\frac{L}{6}}_{\text{moment arm}}$$

$$M_{int} = 2 \underbrace{\frac{m_p l}{\sqrt{2}}}_{\text{moment}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{Hor. component}}$$

$$M_{ext} = M_{int} \Rightarrow w_{ult} = \frac{24 m_p}{l^2}$$

57.3.2 主条目: 上限

36 首先, 定义在板块中的产量线的背景下的工作:

外部工作

$$W_{ext} = \sigma(N_i \delta_i)$$

哪里 N 是由此产生的力量, δ 相应的垂直 位移. 为了便于确定外部工作, 可能有意把板块分成各种元素, 图。57.2 并确定与单位相应的转移 $\delta = 1$ 在中心。

内部工作:

$$W_{int} = \sum ml\theta$$

其中，m 为板每米宽度的内弯矩，l 为屈服线长度或其在相应区域转轴上的投影长度，θ 为该区域绕其轴线的转角。

37 至于程序, 它与用于闪电的相同: 能量储存。

请注意，本节包含必须在下一节之前排出的浮动对象（插图和/或表格），因此此处可能出现空白或间隙。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

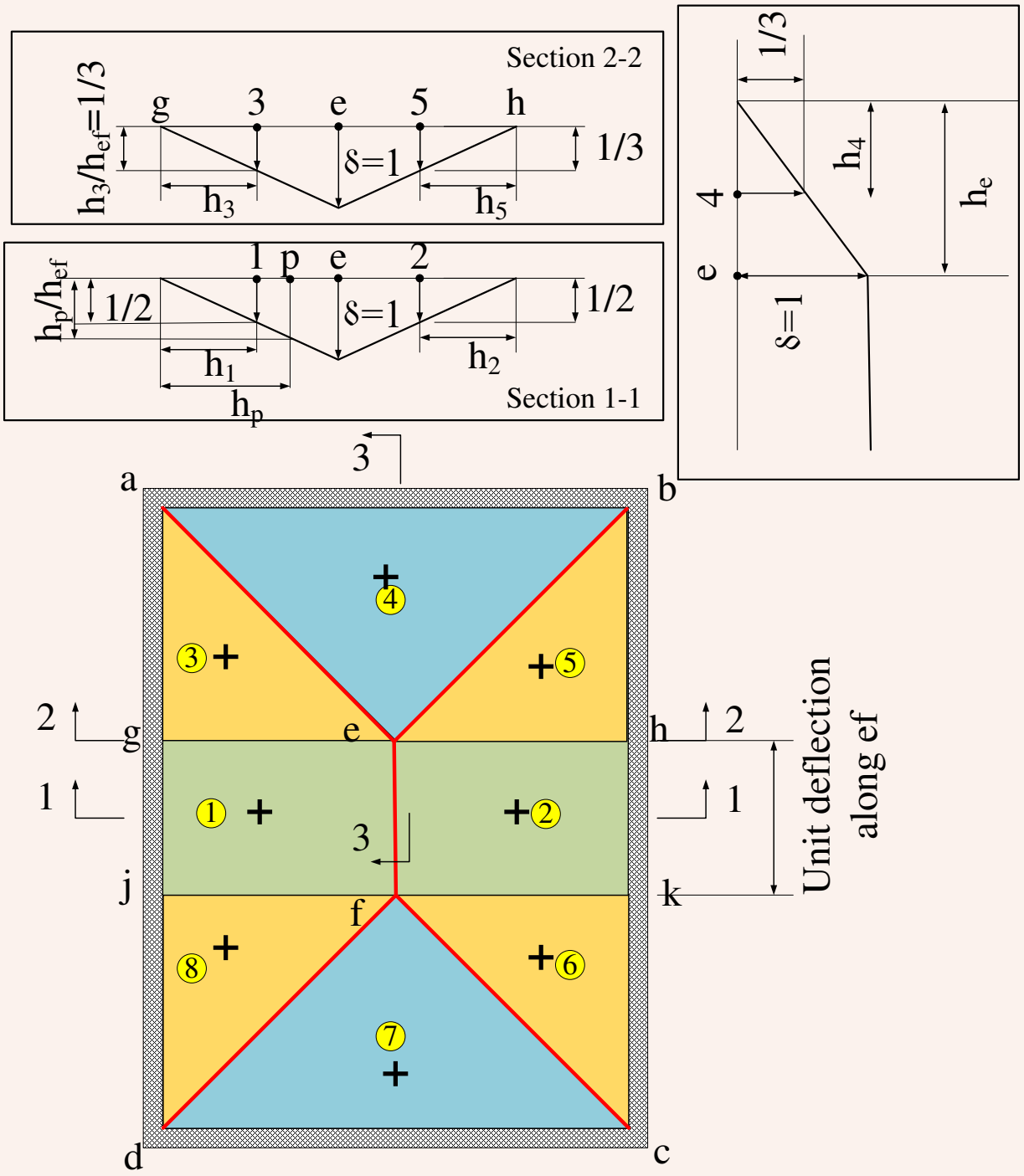
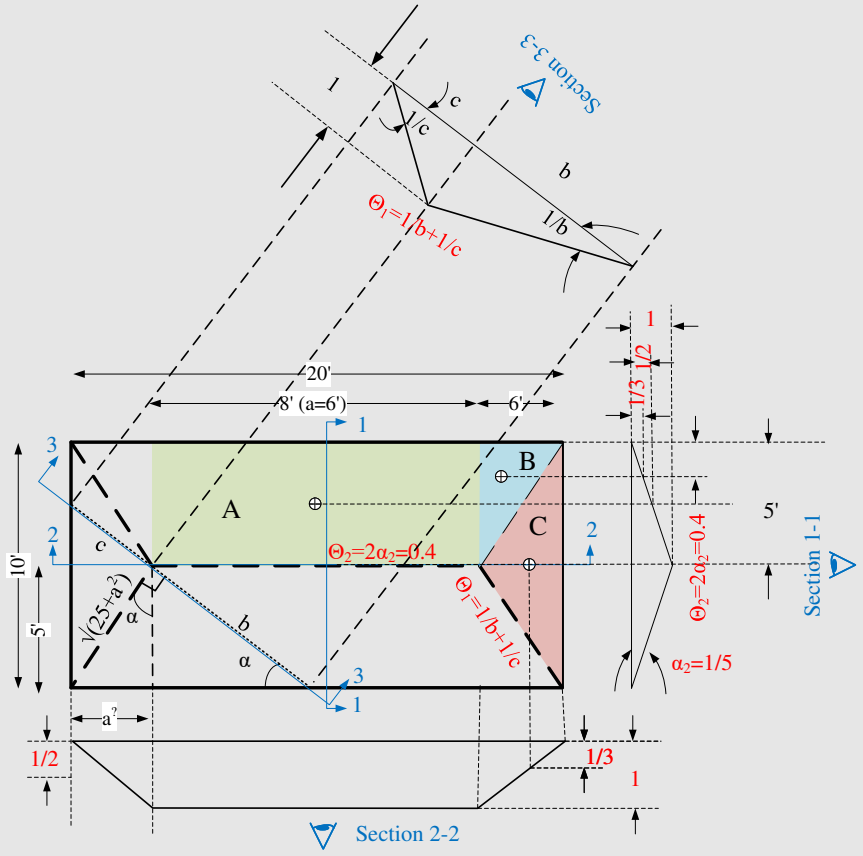


图 57.2: 定义直角板的产量线

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

57.3.2.1 例题 57.11: 直角弱点

下列两种方式的板只是在四个侧面支持, 并支持一个统一的荷载 w. 我们试图确定对滑板所需的抵抗力。



- 如表明的 +ve YL 形式, 尺寸 a 是未知的。
- 从地质: 长度的图形 $=\sqrt{25+a^2}$ 形成相似的三角形

$$\frac{b}{5}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}\Rightarrow b=5\frac{\sqrt{25+a^2}}{a}$$
$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}\Rightarrow c=a\frac{\sqrt{25+a^2}}{5}$$

- 相应于单位分裂, 塑料环在直径 YL 的旋转是

$$\theta_1=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{5\sqrt{25+a^2}}+\frac{5}{a\sqrt{25+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{25+a^2}}\left(\frac{a}{5}+\frac{5}{a}\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 转角 的 屈服线 与板的长边平行

$$\theta_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.40$$

- 假设 $a = 6$ ft, 然后 diagonal YL 的长度是 $\sqrt{25+36} = 7.81$ ft.
- 相应的 转角 的 diagonal YL 是:

$$\theta_1 = \frac{1}{7.81}\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6}\right) = 0.261$$

- 转角 中央 YL 角: $\theta_2 = 0.4$.
- 内部工作是

$$W_{int} = 4(m_p \times 7.81 \times 0.261) + (m_p \times (20-6-6) \times 0.4) = 11.36 m_p$$

- 外部工作

$$W_{ext} = \underbrace{2\left(10 \times 6 \times \frac{1}{2} w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{A}} + + \underbrace{4\left(6 \times 5 \times \frac{1}{2} w \times \frac{1}{3}\right)}_{\text{B}} + \underbrace{2\left(8 \times 5w \times \frac{1}{2}\right)}_{\text{C}} = 80w$$

- 平等 $W_{int} = W_{ext}$ 给予 $w_{ult} = \frac{11.36 M_P}{80} = 0.14 m_P$

随后的审判

a	W_{int}	W_{ext}	w_{ult}
6.0	11.36 m_P	80.0 w	0.142 m_P
6.5	11.08 m_P	78.4 w	0.141 m_P 控制
7.0	10.87 m_P	76.6 w	0.142 m_P
7.5	10.69 m_P	75.0 w	0.143 m_P

- 请注意, 如果一个单位宽带被考虑到, 则

$$m_p = \frac{w_{ult} L^2}{8} \Rightarrow w_{ult} = \frac{8 m_p}{L^2} = \frac{8 m_p}{10^2} = 0.08 m_p$$

相反,0141m_p.

57.4 静力推覆分析

38 静力推覆分析 是一种非线性静态程序, 通常用于地震设计。

39 它在这里简要介绍 (在章节中详细讨论 69.4.1) 要强调其与下限分析的相似性, 这将在下一部分讨论。

40 静力推覆分析 适用于不断增加的侧负载, 以模拟结构在 地震 类似条件下的反应:

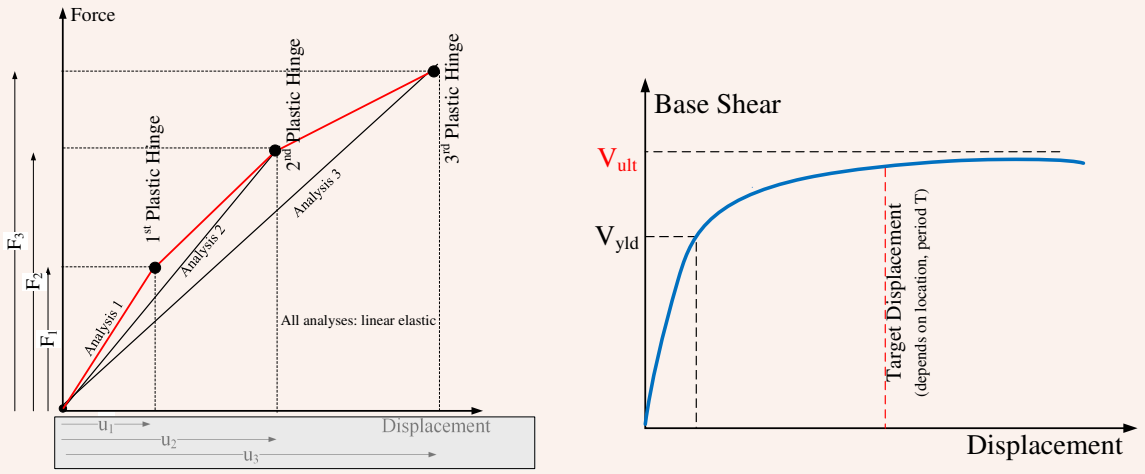
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **增加负载**在 静力推覆分析 中, 负载被加剧应用, 直到结构开发失败机制, 达到其最终容量。负载分布通常代表在地震中预期的侧面力量。
- **进展性不弹性行为**: 随着 荷载 的增加, 结构开始在关键点上表现 (塑料手相关术语), 通过荷载-位移曲线捕获, 代表结构反应到和超越弹性界限。
- **机制形成**静力推覆分析 识别崩溃机制, 提供结构在严重负载下如何变形的洞察力, 并揭示弱点和整体双重性。
- **非线性材料行为**分析捕获非线性, 无缝的变形, 在地震设计中至关重要, 因为它反映了后弹性行为和失败模式。

57.5 低边界分析与

57.5.1 静力推覆分析

41 在 结构工程 中, 低界分析和 静力推覆分析 之间存在强烈的对比, 在 图 中 57.3.



(a) 下限分析 (b) PushOver

图 57.3: 静态低线解决方案 五 *S* 静力推覆分析

42 虽然两种方法都旨在确定一个结构的荷载负载能力, 但它们在方法和应用背景上有所不同。

下限分析与静力推覆分析之间的关键相似之处

43 虽然应用不同, 但两项分析都有基本相似之处:

- **最终 荷载 容量定义**两者都旨在确定最终的荷载容量, 尽管较低的界限分析提供保守估计, 而静力推覆分析则提供现实估计。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **重点在极端负载下结构安全**两种方法在极端条件下评估荷载容量, 但与不同类型的荷载. 较低的边缘分析适合静态负载, 而静力推覆分析则常用于侧面、地震负载。
- **无线物质行为**兩種方法都包含塑性理論, 低結合分析集中在平衡和成果, 而静力推覆分析觀察進步的塑性铰形成。

下限分析与静力推覆分析之间的关键差异

44 两种方法之间的差异是显著的:

- **接近 平衡 和机制**下限分析确保平衡通过安全的力量分配, 而不需要倒塌机构. 静力推覆分析 涉及逐步加载, 以观察负载增加的机制形成。
- **应用背景**低线分析通常用于塑料设计中的静态负载, 而静力推覆分析则用于地震设计, 模拟侧重负载。
- **非线性变形的考虑** Pushover 分析明确表示不弹性变形, 并产生负载交换曲线, 而较低的边缘分析仅确保产量和平衡, 而无需模拟变形。
- **倒塌机构 视觉**静力推覆分析允许可视化崩溃机制和弱点, 这对于地震性能评估至关重要, 与较低的边缘分析不同, 不模型崩溃。
- **充电自然与应用**下限分析适用于静态荷载没有增加进展。相比之下, pushover 分析会逐渐增加侧负载, 直到崩溃, 使其适合动态负载背景。

45 简而言之:

- **下限分析**提供 荷载 容量的保守估计, 通过找到符合 平衡 的力量分配和产量条件。它不需要倒塌机构或非线性变形分析, 专注于安全的荷载分布。
- **静力推覆分析**提供最终 荷载 的现实估计, 通过增加侧载到 倒塌机构 表格。它捕获非线性, 无缝的变形, 并视觉化结构失败模式, 使其在地震设计中特别有用。

46 基本上, 两者分析, 表 57.2 使用塑性理论的原则来评估荷载容量, 但它们的差异反映了不同的方法和应用: 较低的界限分析是平衡焦点和保守性, 而静力推覆分析是变形焦点的和现实性的, 强调在逐步加载下崩溃机制。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 57.2: 比较低界限分析与静力推覆分析

视角	下限分析	静力推覆分析
目标	提供最终 荷载 容量的保守估计, 通过确保 平衡 并产生满意度。	提供最终 荷载 的现实估计, 通过不断应用侧负载, 直到出现故障机制。
平衡 要求	重点是寻找能量分配, 满足平衡和收益条件而不需要崩溃机制。	观察到塑性铰形成的进展, 直到倒塌机构出现。
应用背景	通常在塑料设计中用于静态负载, 特别是钢材和混凝土结构。	主要用于地震设计, 应用侧负载来模拟地震效果。
物质行为	它认为由于产量条件而进行不弹性物质行为, 但并没有明确模拟非线性变形。	捕获非线性, 无缝的变形, 产生一个荷载-位移曲线来评估后弹性行为。
机械视觉化	它不视觉化崩溃机制或位移模式, 专注于实现平衡。	允许可视化崩溃机制, 有助于在增加负载下识别弱点和整体双重性。
充电自然	静态 荷载 应用, 没有增加进展; 定义一个安全的 荷载 级别。	增加侧 荷载 应用于模仿 地震 引发的力量, 直到崩溃发生。
出口	安全 荷载 水平, 满足 平衡 和产量条件, 没有详细的变形行为。	负载配置曲线显示结构的逐步反应, 包括塑料环形成和最终容量。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

57.5.2 彩色 塑性

47 最后, 与闪烁的塑性相似之处 (§62.3) 是罢工。事實上,<塑性模型可以被視為低結合理論的簡化表現。在 塑性 模型中, 塑料变形集中在分散的塑料区域或粘膜内, 可以被视为塑料变化机制。通过在这些区域内采取完美的塑性, 该模型专注于捕捉与塑料机制形成相关的荷载。

48 塑性 模型 (§62.3) 虽然为结构分析的不同方面开发, 但较低的利润线理论分享了他们如何处理塑料化和收益的深刻概念类似性。

49 在两种模型中, 假设产生或塑造是高度定位的, 专注于结构的具体、限制区域的变形和能量分散。这种方法特别有用于简化但有效的最终结构性行为评估模型。

Lumped Plasticity Model: 塑料环形成的浓度

50 在塑性模型中, 所有塑料化都假设发生在被称为塑料轴承的差异性位置, 通常是在最大旋转时刻。

51 这种方法假设弹性行为在其余结构中保持, 这使得后期行为的简化分析能够实现。

52 塑料绳子的形成表明, 该成员在那个位置已经达到其瞬间能力, 从而在这些绳子中发现不弹性变形。随着荷载的增加, 结构形成额外的塑料粘贴, 直到创建一个机制, 允许预测崩溃负载。

53 这种塑料化定位减少计算复杂性, 并将分析集中在关键部分上, 使其成为评估结构的最终荷载运载能力的有价值方法, 而不需要整个结构上详细的非线性分析。

低链 屈服线 理论: 利息线的位置

54 较低的链接屈服线理论, 类似地专注于分离线或区域 - 叶尔线 - 在那里的板被认为遭受塑料变形。

55 这个理论在假设下运作, 结果线沿着最小工作路径形成, 以便崩溃, 创造一个机制。

56 利率线理论使用虚拟工作的原则来估计崩溃负载, 假设塑料变形被限制在这些线上, 而剩余的粘贴保持硬。

57 就像被推翻的塑性模型一样, 屈服线理论通过发现塑性, 从复杂性下降中受益。这使得工程师能够以相对简单的计算来接近板块和板块的最终负载, 与整个表面上的详细塑料分析相比。

概念类似性: 不弹性行为的定位

58 两款模型都利用了这种观念, 即无情的行为可以限于特定的区域, 从而减少全面塑性分析的需求, 并简化崩溃机制的预测。

59 塑性 模型在塑料轴承上发现了塑化, 而 屈服线 理论则发现了沿线的产量。通过在这些定

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

位点或线上集中变形, 两种方法都允许对结构的能力进行低调估计, 从而使复杂结构系统更容易管理分析。

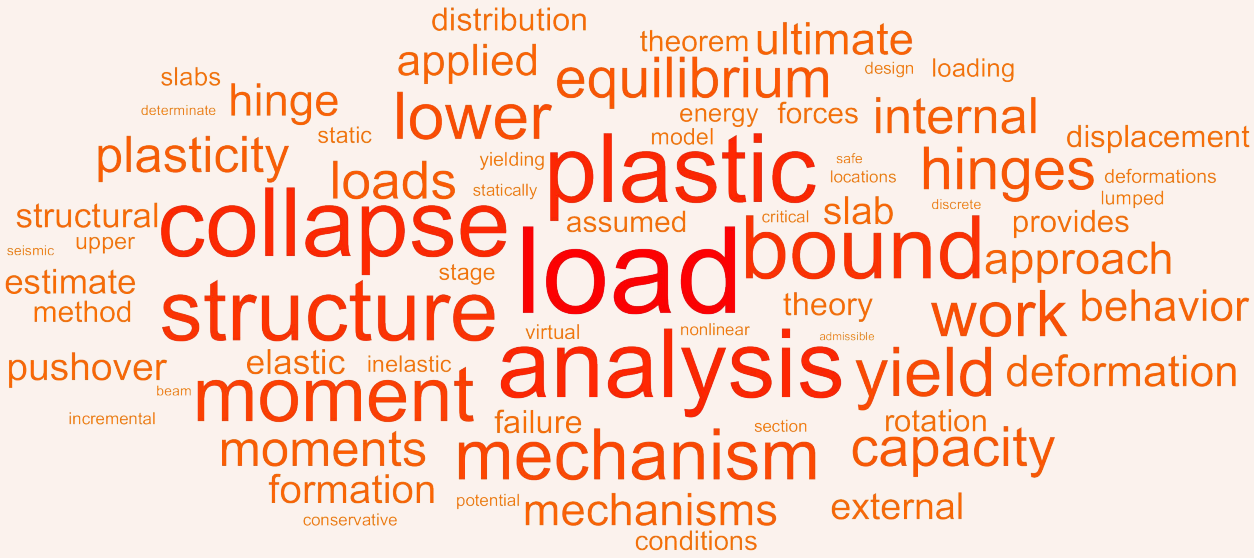
60 桌子 57.3 描述两种方法之间的相似之处。

表 57.3: 塑性 和较低的界限分析

视角	塑性 模型	低链接 屈服线 理论
结构类型	框架、插图和类似的线性单元	板块和滑板
无线行为的定位	塑料的 (差异点)	到达收益线 (差异线路)
居住区域外的行为	假设保持弹性	假设保持坚固
倒塌机构	形成多种塑料粘贴, 直到创建一个机制	形成创建一个倒塌机构的产量线
分析方法	通过专注于塑料粘着形状的关键部分来简化	通过假设产量在产量线上进行的简化
最终荷载预测	通过地形塑料粘贴在最大时刻	通过所得线, 代表最低工作路径
使用下限原则	提供较低的边缘估计崩溃荷载	提供较低的边缘估计崩溃荷载
初级应用	最终 荷载 带容量的分析	分析最终的荷载带容量, 用于板块和盘子

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

58 损伤力学

此章节将随后由损伤力学的著名专家撰写。

58.1 由 ChatGPT 提供

58.1.1 动机与物理基础 (~1.5 页)

從實驗圖像開始: 微滑作為主導的破壞機制在幾乎碎片材料, 並需要區分損害與塑性。一个或两个象征性实验曲线 (混凝土的单轴紧张和压缩) 即时将对观察理论进行调整。

58.2 热力框架 (~2 页)

克劳西斯 - 杜赫姆不平等, 损害变量 D (首先是滑雪), 有效的应力 $\tilde{\sigma} = \sigma/(1-D)$, 以及损坏材料的弹性应变能。这个框架规定, 损伤力学不是一个 ad hoc 构造, 但属于同样的热动式形式主义作为塑性 —这对于读者已经熟悉后者的必不可少。

58.3 斯卡拉的异常损害: 马扎尔模型 (~4 页)

这就是章节的核心。相同的 应变 $\tilde{\varepsilon}$ 损害标准 $f(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa \leq 0$ 二分支进化法 (D_t, D_c 结合通过 α_t 和 α_c). 标准测试中的参数识别。一个数值例子沿着单轴充电路的步骤跟踪将对学生特别有价值。

58.4 压力 - 压缩无形和单方面效果 (~2 页)

压缩和部分恢复硬度 - 在循环负载或结合弯曲下模型结构的最重要的细节之一。单方面状态及其在模型中的处理。

58.5 破坏 - 塑性 结合 (~2 页)

简短的模型 - 不可逆转的线条和硬度衰退 - 对 混凝土 在压缩下和 钢材 至关重要。Lemaitre 的有效 应力 概念及其在现代结合式格式中的作用 (格拉斯尔 - 吉拉塞克, Desmorat).

审阅稿

58.6 规律和客观性 (~3 页)

这是一个最终的单元观众最重要的部分。當地緩解導致病理性麻疹依賴。克拉克乐队模型 (关心) 作为一个实用的方法 — 根据 单元 尺寸调整调节分支 h 保留破裂能量 G_f. 综合非本地损害和随机格拉迪恩 表述作为更严格的替代品。数值 描述问题及其解决方案将非常有指导性。

58.7 應用於 梁 和 柱 单元 (~3 页)

这是将章节与书的其他部分联系在一起的部分。输入损害变量到部分硬度 — 减少 EI 和 EA 作为破坏领域的功能, 整合在十字架上。一个射线元素中的特征长度的概念。如果空间允许的话, 一个强化混凝土喷雾或列的例子描述了渐进的硬度衰退和其结构性后果将是理想的描述。

58.8 参数识别和实用指南 (~1.5 页)

Mazars 模型参数表, 具有常规和高性能 混凝土 的典型范围。標準測試的識別程序 (巴西测试, 单轴压缩, 三点弯曲).

58.9 图书馆笔记及进一步阅读 (~0.5 页)

创始人参考 — Mazars 1984/1986, Lemaitre 1985, Pijaudier-Cabot & 1987 年, 巴格达 & 哦 1983 —和一些最近的评论文章, 让读者想进一步探索。

—

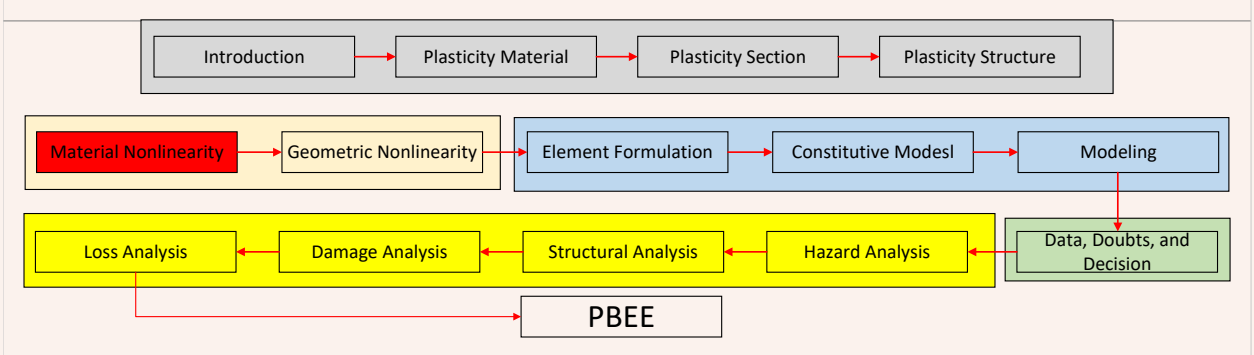
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

59 非线性分析; 材料

摘要

经过简短的介绍到非线性分析在 §54.1 本章讲述了结构工程中的物质行为的非线性分析, 重点是数字模型技术及其应用。从非线性方程式的根基寻找方法的一般概述开始, 包括纽顿的方法、分裂方法和明确方案, 这章节强调了解决复杂结构方程的各个方法的强度和限制。随后, 基于牛顿的方法的增加荷载控制方法被引入分析结构反应在应用力量下。最后, 该章节探讨了位移控制技术, 提供了一个稳定的和准确的方法捕捉后峰和软化反应, 在分析闪光和应变软化材料中至关重要。通过这些方法, 该章节提供了一套全面的解决结构分析中的非线性问题工具集, 强调在先进工程应用中具有重定向性解决方案的重要性。

59.1 数值 根找到 1693
59.1.1 纽顿方法 1694
59.1.2 秘密方法 1700
59.1.3 解释 1701
59.2 与 结构力学 的关系; 随机 1702
59.3 集成方法 1703
59.3.1 荷载 控制 1704
59.3.2 位移 控制 1711



59.1 数值 根找到

1 在非线性分析中, 根查找方法对于解决传统解析解可能不存在的方程式至关重要。

2 数值 技术提供对这些解决方案的接近, 这在非线性 结构分析 中至关重要。

3 此部分介绍了几个关键方法的根发现, 重点是纽顿的方法, 分裂方法和明确的根搜索技术。

4 每个方法都有独特的优势, 适用于不同的场景。纽顿的方法, 例如, 利用衍生品来实现快速 convergence, 使其适合具有良好的功能和可用的衍生物的问题。相反, 切割方法将衍生品数字接近, 这可能是有用的, 当解析衍生物难以或不可能获得时。

5 我们将探讨这些根寻找方法对材料非线性的应用, 并研究它们如何在结构工程更广泛的背景下合适。

审阅稿

59.1.1 纽顿方法

59.1.1.1 引入

6 牛顿的方法是一种广泛使用的, 高级命令的 iterative 技术, 用于找到非线性方程式的根源, 利用函数衍生品逐步接近解决方案。

7 这种方法以每一个 iteration 进行接近, 在初始猜测接近实际根时, 旨在快速相匹配。与更简单的方法不同, 纽顿的方法特别有效, 由于其四方接近率, 在有利条件下每一步都会显著减少错误。

8 在 结构工程 应用中, 牛顿的方法特别有用于 非线性分析, 在那里它可以帮助解决在负载条件下出现的 平衡 方程式。对于线性问题, 牛顿的方法将迅速转向独特的解决方案。

9 对于非线性方程式, 接近可能更具挑战性, 因为解决方案可能并不总是存在, 或者可能有多种可能的根。在这些情况下, 纽顿的方法提供了一个有效的路径到一个接近的解决方案, 如果它存在, 使它在实际工程问题中无价值, 在那里准确的解决方法往往是错误的。

10 牛顿的根探测方法, 与尤勒的方法相矛盾。(§53.3.4) 用来预测基于初始值和管理差异方程式。

11 对于线性问题, 总会有一个独特的解决方案; 但是对于非线性的问题, 我们不能保证一个解决方案的存在, 也不能确保它的独特性。(例如, 一个平凡不能跨越 x 轴, 而一个圆形聚合物总是会).

12 当一个解决方案存在时, 我们最好可以获得一个大约的数值解决方案。

13 最常用的 数值 解决方案类: “纽顿方法”, or “纽顿近”. 其他方法可能包括方法 (只有线性转向).

59.1.1.2 泰勒系列和线性化

14 泰勒系列扩展是一种基本的数学工具, 用来接近非线性功能, 通过表达它们作为一个无限的序列围绕着选择的点。

15 通过把这个系列推到仅包含前几个术语, 我们可以获得函数的线性形式。这种线性接近特别有用于像纽顿的方法这样的异端方法, 每个连续步骤都依赖于解决一个简化、线性方程式。

16 在根探应用中, 线性化提供了一个可管理的方式来接近复杂、非线性功能的行为, 靠近初始猜测, 使其能够有效地对解决方案进行比较。

17 以方法为本, 寻求解决 $f(x) = 0$ 通过对当前接近的方程式进行线性化 x_n 解决下一个接近的线性方程式 x_{n+1}.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

18 就像 Euler 的方法一样。(Eq. 53.6) 纽顿的方法开始于泰勒的系列, 在那里我们表达了一个功能作为一个无限的系列与点 $\overline{x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{(x-\overline{x})^2}{2!}f''(\overline{x}) + \dots \\ &= f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x}) + O(\underbrace{|x-\overline{x}|^2|}_{\xi^2}) \end{aligned}$$

忽略更高的顺序条款, 提供线性功能

$$L(x) = f(\overline{x}) + (x-\overline{x})f'(\overline{x})$$

19 若 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为二元函数，则 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$，且 $\mathbf{x} = \lfloor\ x_1 \quad x_2\ \rfloor^T$。在固定点 $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ 附近的泰勒级数展开为

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \tag{59.1}$$

忽略了更高的顺序条款, 我们再次线性化了方程式。

20 如果我们设置 $f(x) = 0 \Rightarrow x \simeq \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$ 这是一个接近的解决方案, 在 $\overline{x}$ 假设我们也有 $f'(x)$, 图 59.1.

21 以 iterative 程序, 这个方程式可以重写为

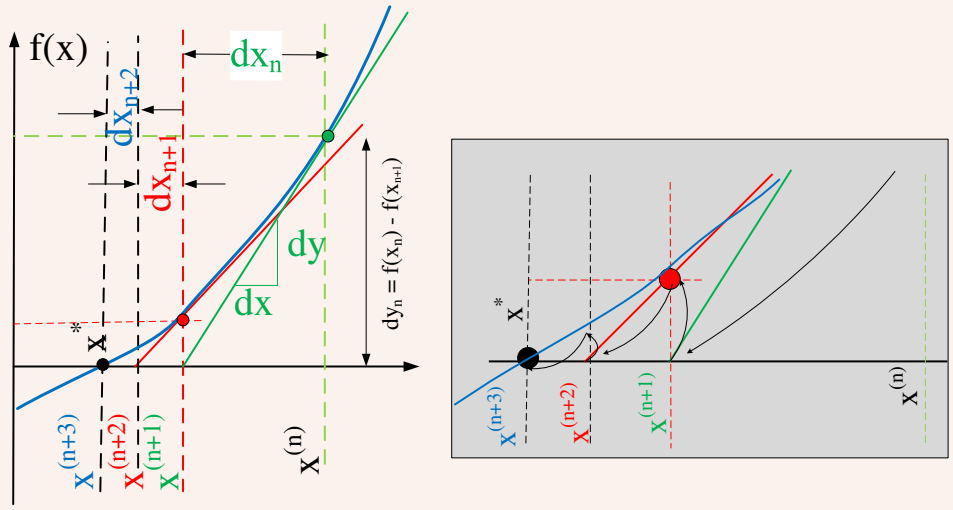


图 59.1: 纽顿方法

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_n) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f'(x_n)} = \frac{\overbrace{f(x_{n+1})}^{0} - f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\Rightarrow x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{- \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n}$$

将确保转型, 当

$$|\delta x_n| \leq \varepsilon_\delta \text{ or } |f(x_{n+1})| \leq \varepsilon_f$$

1: **procedure** 纽顿 ($f(x), f'(x), x_0$ 托尔)
2: $x \leftarrow x_0$
3: **while** $abs(f(x)) > tol$ **do**
4: $x \leftarrow x - f(x)/f'(x)$
5: **end while**
6: **end procedure**

59.1.1.2.1 例题 59.1: 纽顿的方法, 斯卡拉

解决 $f(x) = Tan(x) - x = 0$ 相应于一个倾斜的列的统治性泡沫方程式 (§29.3.2.1.3, Eq. 29.23).

```
clear
xn = 4.3;n = 0;epsi=1e-4;maxiter = 20;
disp("           ");disp("    n          xn                   norm")
xn_m1=0.;
for i = 1:maxiter
    f_x=tan(xn)-xn;df_dx=sec(xn)^2-1;
    xn = xn - f_x/df_dx;
    my_norm = abs(xn-xn_m1);
    disp(sprintf( "%5i  %16.15e  %16.15e",i, xn,my_norm"))
    if my_norm <epsi
      break
  end
  xn_m1=xn;
end

```

请注意, 这是一个特别敏感的问题, 因为 $\tan x$ 是不停的, 初步猜测中的微小的变化可能会导致解决方案的差异。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

22 一个单一变量

$$x_{n+1} \simeq x_n \underbrace{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\delta x_n} \Rightarrow f(x) + f'(x)(x_2 - x_1) \simeq 0$$

23 这个方法可以显然扩展到两个功能。$f_1(\mathbf{x})$ 和 $f_2(\mathbf{x})$ 兩個未知的

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

或

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \\ f_2(\overline{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}(x_1 - \overline{x}_1) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}(x_2 - \overline{x}_2) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

哪里 $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})$ 是 雅可比矩阵

$$\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{59.2}$$

和 $\mathbf{J}\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ 是 矩阵 向量 产品;

24 请注意, 该 i^{th} 序列相匹配于格拉迪恩的 i^{th} 组件功能 f_i (∇f_i.), 而斯卡拉衍生品已被替换为 2×2 雅可比矩阵 部分衍生品。

25 我们可以将这个问题转化为一个 m 非线性方程式与 m 未知

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix} \text{ and } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}$$

雅可比矩阵的评论 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 对于这个矩阵将是一个 $m \times m$ 矩阵 與 (i, j) 与函数部分衍生相匹配的输入 i 至于变量 j 或 $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$

26 在纽顿方法的每一个步骤中, 我们都有一个大约值。$\mathbf{x}_n$ 到准确的解决方案 $\mathbf{x}^*$ 非线性方程式 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 因此, 我们决定 $\mathbf{x}_{n+1}$ 通过解决线性方程式系统

$$\begin{aligned} L^{(n)}(\mathbf{x}_{n+1}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

注意相似之处与 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = f'(x)$ 為 $m = 1$.

27 在每一步, 我们都应该在一个新的点上评估雅可比矩阵 , 然后用这个新更新的矩阵来解决线性方程式系统。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

28 将确保转型, 当

$$\| \delta \mathbf{x}_n \| \leq \varepsilon_\delta \quad \text{or} \quad \| \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}) \| \leq \varepsilon_f$$

哪里 $\| \mathbf{v} \|$ 是的, **欧克利迪亚规范** 由 $\mathbf{v}$ (说实话, 应该写作如 $\| \mathbf{v} \|_2$) 计算为 向量 组件平方的总值的四角根,

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$$

在一 N 尺寸空间。

```
1: procedure 纽顿 (f, J, x0 马克思, max_伊特)
2:     x ← x0
3:     i ← 0
4:     while i < max_iter|norm(f(x) < tol do
5:         fx ← f(x)                          ▷ 目前的功能评估
6:         Jx ← J(x)                          ▷ 评估 Jacobian 在当前时刻
7:         p = solve(Jx, −fx)                 ▷ 使用 Jacobian 的搜索方向计算
8:         x = x + p                          ▷ 更新当前点
9:         i ← i + 1                          ▷ 加重 iteration counter
10:    end while
11:    回归 x                                 ▷ 最后的 iterate
12: end procedure
```

59.1.1.3 转型和错误估计

29 我们必须确保方法的相匹配, 错误的顺序

30 给予 $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 定义一个相应因素 $\rho^{(n)}$ 作为错误的比例 x_{n+1} 在错误中 x_n. 接近准确的解决方案 (x^*, 在哪里 $g(x^*) = x^*$) $\rho^{(n)} \simeq g'(x^*)$ 它被称为无形的转变因素。

31 定义 $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

if $f'(x^*) \neq 0$ 和 $f''(x^*)$ 结束了, 然后 $g'(x^*)$=0 和我们得出结论, convergence 因子倾向于为零, 当和如果 $x_n \to x^*$.

32 要确定错误 $x^* - x_n$,

$$x^* - x_{n+1} = x^* - x_n - \frac{f(x^*) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, 如果伊特拉化与 x^* 在那里, 跟随

$$\underbrace{x^* - x_{n+1}}_{\text{error at } n+1} \simeq -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \underbrace{(x^* - x_n)^2}_{\text{error at } n} \text{ as } n \to \infty$$

只要有 $f'(x^*)$ 和 $f''(x^*)$ 既是终端, 又是非零。

33 错误往往与错误的四分之一相比例。x_n 如 n 倾向于无限。

34 其他方法 (如同 Bisection。) 它将有一个线性相匹配。

59.1.1.4 最后评论

纽顿的方法:

1. 需要一个 解析 衍生品的表达
2. 如果初始值远离正确值, 接近不能保证 (因此, 你必须在数字的数量上设定一个顶部限制。).
3. 失败, 如果 斯洛普接近零 (如周围的峰值荷载).
4. 最好用低曲线的曲线工作。
5. 转型是四方的。

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leq c \| x_n - x^* \|^2$$

但是, 在 实践 我们不知道什么 c 是

59.1.1.4.1 例题 59.2: 纽顿的方法; 向量

Solve $f(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9 \\ x_3 - x_2 \sin(x_1) \\ 3x_2 + 4x_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ -x_2 \cos(x_1) & -\sin(x_1) & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

```
f = @(x) [x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-9
x(3)-x(2)*sin(x(1))
3*x(2)+4*x(3)] ;
% The Jacobian mat r i x :
J = @(x) [2*x(1) 2*x(2) 2*x(3)
-x(2)*cos(x(1)) -sin(x(1)) 1
0 3 4] ;
% i n i t i a l guess :
x = [-1;-2;1] ;
maxiter = 10;
tol = 1e-12;
disp(' ')
disp('iteration x(1) x(2) x(3) norm(delta) ')
for n=1:maxiter
delta = -J(x)\f(x);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
x = x + delta ;
disp(sprintf( '%5i %10.5e %10.5e %10.5e %8.3e',...
n, x(1), x(2) , x(3) ,norm(delta, inf))) ;
if norm(delta, inf) < tol
break
end
end
if n==maxiter
disp("Warning: may not have converged  tolerance not satisfied")
end
```

59.1.2 秘密方法

35 序列方法是一种根寻找算法, 它以无线方程式的根为近, 以便更好地接近一个函数的根。$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 通过在两个初始猜测之间建立连续的分裂线。

36 与新顿的方法不同, 需要函数衍生品, 切割方法使用终端差异接近, 使其特别有价值, 当衍生物是挑战性的或无法计算。

37 在每次迭代中，割线法利用最近两个近似值所确定的割线斜率进行外推，以近似求得方程的根。此列表提供衍生品的估计, 允许该方法在根上仅用功能评估相匹配, 而不是明确的衍生计算。

38 虽然切割方法通常比牛顿的方法更慢, 但缺乏依赖衍生品可能会使其在复杂的应用中成为偏好选择, 包括结构分析和材料模型, 在那里可能没有准确的衍生物。

39 可被认为是牛顿方法的终极差异接近。然而, 干燥方法偏见了牛顿的方法。

40 当几乎不可能计算 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, as $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (无法分析的定义), 我们将根据简单的接近数字确定雅各比人。

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_{n+1}) \simeq \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}$$

替代为 $\mathbf{J}\mathbf{x}_n)^{-1}$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \underbrace{\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})}}_{\simeq J^{-1}(\mathbf{x}_n)} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

41 与牛顿的方法相反, 我们将需要两个初步猜测。$\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{x}_1$ 要启动方法。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
procedure 秘密_方法 (f, x_0, x1 马克思, max_伊特)
    fx0 ← f(x0)
    初步价值观
    fx1 = (x1)
    i ← 0
    直到接近或达到最大数的接近
    while abs(fx1) > tol  &  i < max_iter do
        接近根的新接近
        x2 ← x1 − fx1 ∗ (x1 − x0)/(fx1 − fx0)
        fx2 ← f(x2)
        更新值为下一个 iteration
        x0 ← x1
        fx0 ← fx1
        x1 ← x2
        fx1 ← fx2
        i ← i + 1
    end while
    返回根和使用的 iterations 的数量
    回归 x1, i                                          ▷ 最后的 iterate
end procedure
```

59.1.3 解释

42 在一 明确的整合 计划 (也被称为 “步骤一步”), 荷载 被应用于加剧性, 并在每个加剧的结束时, 图 59.2:

1. 计算的 坦克特性 基于当前的转移, 这是负载转移曲线的节点。);
2. 转换 刚度矩阵 并将其加倍为荷载以获得相应的位移;
3. 将 位移 增加到前者的总额, 以获得与实际 荷载 相匹配的真实 位移. (所有前增负的总额).

43 大好处: 解决方案总是会找到

44 主要缺点: 在每个增幅结束时, 我们不确认平衡在内部和外部力量之间是否满意。这可能导致一个分离的解决方案, 因为荷载增加。然而, 一些先进的程序检查能源平衡而不是平衡.

45 对这个问题的一部分麻烦, 是采用非常小的荷载增加以尽量减少错误。

46 这种方法应该非常谨慎地使用, 因为解决方案总是会得到的, 无论模型和其参数是多么好或坏。

47 不幸的是, 有些构成模型在 implisit integration 计划内运行时非常脆弱, 因此它们被使用。(或误用) 在一个明确的

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

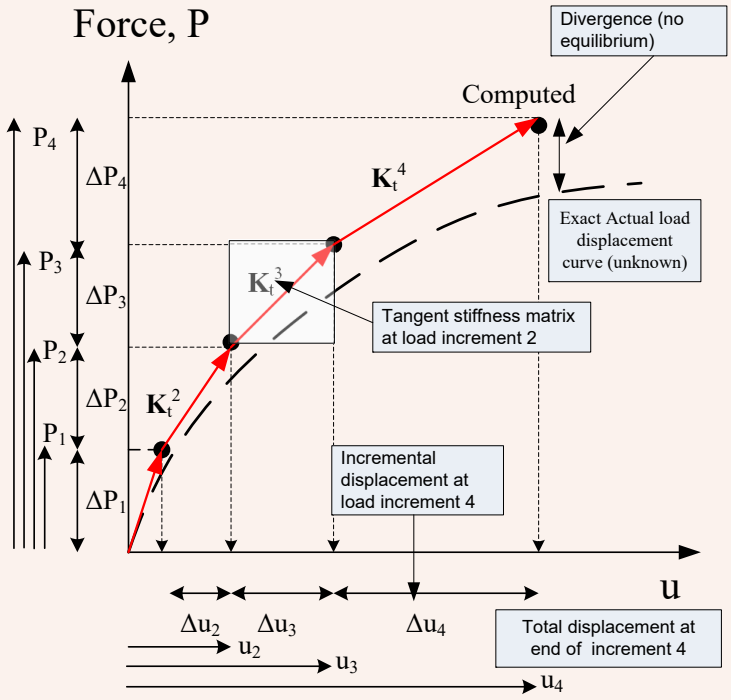


图 59.2: 清晰的整合方案

59.2 与 结构力学 的关系; 随机

48 强制性的方法是结构力学的角石, 尤其是分析非线性问题时, 平衡需要在荷载下保持。

49 在结构分析, 达到平衡意味着在结构的节点上平衡内部和外部力量。这种平衡被表达为非线性方程, 其中内部力量向量依赖于转移, 使问题本质上不线。

50 在本节中, 我们探讨了暗示方法的使用, 特别是纽顿的方法, 以解决平衡在增加荷载分析。每一步, 剩余的力量 (外部和内部力量的区别) 必须接近零, 意思是平衡的状态。

51 通过对移动进行异常更新, 随机方法提供了一个系统的方法来实现这种平衡, 确保解决方案在整个充电过程中保持稳定和准确。

52 这种方法对保守主义系统至关重要, 在那里力量是独立的转移, 使我们能够简化复杂的结构行为同时保持可靠的准确性。

53 再一次, 我们试图解决平等。50.11 如

$$\underbrace{\mathbf{k}\overline{\boldsymbol{\Delta}} - \overline{\mathbf{F}}^{o}}_{\mathbf{P}^{int}} - \underbrace{\overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}^{e}}_{\mathbf{P}^{ext}} = 0$$

$\mathbf{P}_n^{ext}$ 和 $\mathbf{P}_n^{int}$ 均由虚位移原理确定。由于内部节点力向量 $\mathbf{P}_n^{int}$ 是节点位移 $\mathbf{u}_n$ 的函数，因此该问题是非线性的。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

54 对于荷载的增加分析, 其中平衡是 (几乎) 满足于上涨的结束 n 我们有

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n^{ext} - \mathbf{P}_n^{int} = 0$$

什么是剩余力量 (要接近零, 以日益增加的 iterations。n).

55 因此, 我们将使用牛顿的方法来解决问题。

$$\mathbf{R}_n(\mathbf{u}) = 0$$

56 请注意, 我们假设部队是独立的驱逐 **保守制度** 忽略 $P-\Delta$ 效果。

57 荷载控制算法和非线性分析之间的平行性显示在表中 59.1.

表 59.1: 数学中 quasi-newton 方法与 结构力学 的暗示分析之间的平行性

视角	几乎纽顿方法 (数学)	结构力学 (综合分析)
目标	寻找非线性功能的根 $f(x) = 0$	在非线性结构系统中实现平衡
平等	$f(x) = 0$	$\mathbf{P}^{ext} - \mathbf{P}^{int} = 0$ (强度 平衡)
初步猜测	根源的初始值 x_0	初始 位移 猜测 $\mathbf{u}_0$
线性化	线性 $f(x)$ 接近 x_n 使用 $f'(x)$	线性化 平衡 $\mathbf{u}_n$ 以坦克的坚定性 $\mathbf{K}_T$
更新规则	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_n)$
Iteration 标准	错误减少, 例如 $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq \epsilon$	剩余力量减少, 例如 $\lVert \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) \rVert \leq \epsilon$
转型要求	衍生品 $f'(x)$ 不应该是零	坦格的坚定 $\mathbf{K}_T$ 不应该是独特的
计算需求	计算函数及其衍生品在每个步骤	每一步计算内部力量和坦根 刚度矩阵
转变率	四方交往 (理想条件)	在理想的 平衡 条件下进行四方接近
结果	接近的根 $f(x) = 0$	接近 平衡 在应用负载下配置

59.3 集成方法

58 取决于我们是否应用一个增加 荷载 或增加的 位移, 算法将略有变化。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

59.3.1 荷载 控制

59.3.1.1 Newton-raphson / 压力硬度方法

59 在我们进入细节之前, 两步方法可以通过图解释。59.3.

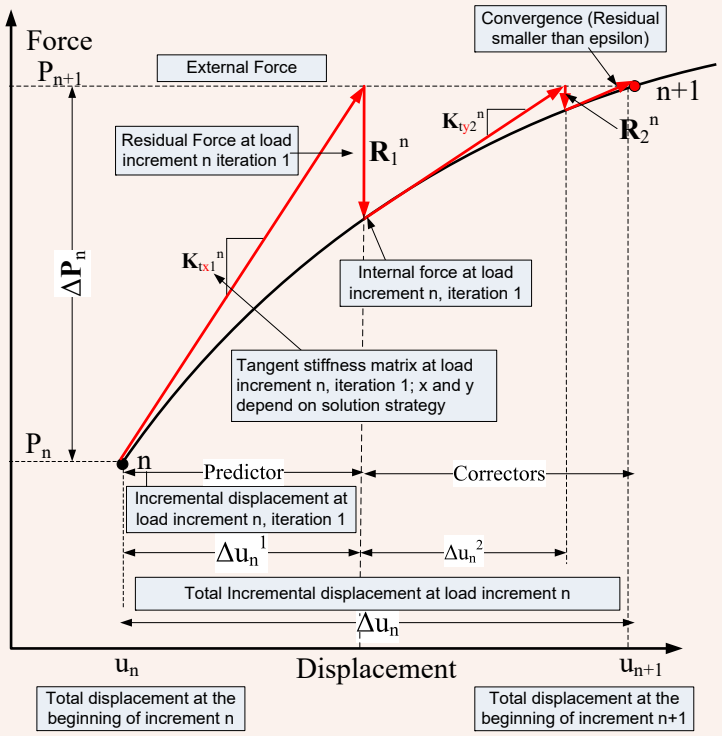


图 59.3: 纽顿的方法解释了 (荷载 控制)

预言者 (与 荷载 的增加有关) 以明确方法确定 位移 的增值, 这基于初始的 刚度矩阵 指数。

修正 我们检查平衡的阶段。

1. 基于预测的驱逐, 计算相应的内部力量 (未经明确方法评估).
2. 计算剩余力量, 是外部和内部力量之间的区别。(如果达到 平衡 就应该是零。).
3. 如果剩余值大于用户指定的相匹配标准, 则更新 位移 通过倍数反向的 刚度矩阵 (更多关于此后) 其余的力量。
4. 更新全 位移 向量。因此, 对于每个荷载增加, 我们将有多个 iterations, 直到平衡在数值宽容范围内满足。

60 每次加载的结束时, 内部力量必须与外部力量保持平衡。因此, 向量的剩余力量 $\mathbf{R}_n^k$ 是

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{P}}^{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{P}}^{ext} = 0 \tag{59.3}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 $\overline{\mathbf{P}}^{int}$ 是内力向量，通常也称为反力向量 。

61 在每一步的开始时 $n+1$ 我们从转移开始。$\overline{\mathbf{u}}_n$ 以前的步骤是通过平衡计算的。$\mathbf{R}_n^k \approx 0$ 或 $\overline{\mathbf{P}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_n^{ext}$.

62 目前, 外部力量正在增加。

$$\overline{\mathbf{P}}_n^{ext} \longrightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{P}}^{ext}$$

我们要确定相应的转移。$\overline{\mathbf{u}}_{n+1}$ 平衡 會滿意

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0 \Rightarrow \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

63 在目前的步骤中 (通过订阅标识 n) 我們將以色列 (通过超级编辑 k) 以实现 平衡。

64 作为一个初步猜测 $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0$ 我们将它成为 $\overline{\mathbf{u}}_n$ 基于这个原始状态的线性化, 我们

$$\overline{\mathbf{P}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{ext}$$

哪里 $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^1$ 是未知的位移增加的第一个接近, $\Delta\overline{\mathbf{u}}_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1} - \overline{\mathbf{u}}_n$.

65 否则, 我们从方程式的线性化开始。59.3, 图 59.4,

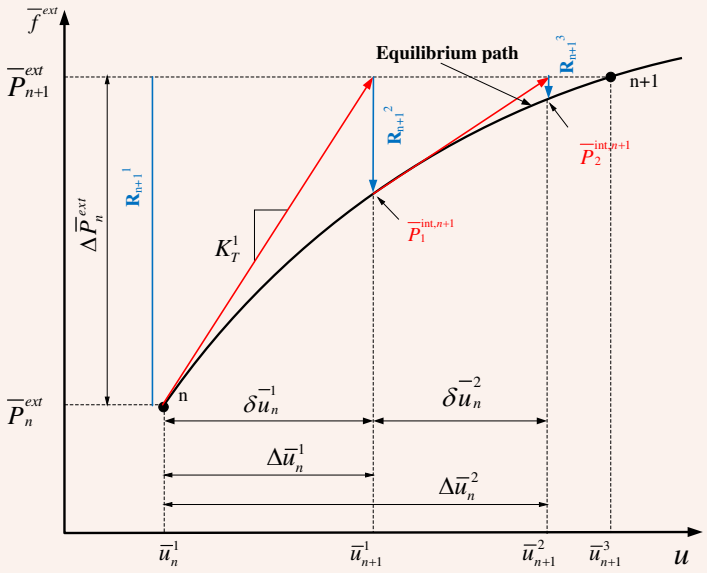


图 59.4: Newton-raphson 荷载 控制方法

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{u}}}\right)_{n+1}^i \delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = 0 \tag{59.4}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 i 这是一个从 $\overline{\mathbf{u}}^1_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_n$. 我们观察到这

$$\frac{\partial \mathbf{R}^k_n}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{P}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_T$$

66 假定 $\overline{\mathbf{P}}^{ext}$ 为常量，$\mathbf{K}_T$ 为切线刚度矩阵，则式 59.4 给出

$$\mathbf{K}^i_T \delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = -\mathbf{R}^i_{n+1}$$

或

$$\delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = -(\mathbf{K}^i_T)^{-1} \mathbf{R}^i_{n+1} \tag{59.5}$$

67 一系列连续的接近结果

$$\overline{\mathbf{u}}^{i+1}_{n+1} = \overline{\mathbf{u}}_n + \Delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = \overline{\mathbf{u}}^i_{n+1} + \delta \overline{\mathbf{u}}^i_n$$

与

$$\Delta \overline{\mathbf{u}}^i_n = \sum_{k \le i} \delta \overline{\mathbf{u}}^k_n$$

68 值得注意的是, 每次 iteration 都包含三个计算成本昂贵的步骤:

1. 内部力量的评估 (或反应), $\overline{\mathbf{P}}^{int}$
2. 评估全球坦根 刚度矩阵, $\mathbf{K}_T$
3. 解决线性方程式的系统

69 虽然这种方法将使用最少的 iterations 进行转换, 但它可以计算成本昂贵。(由于每次增加所需的矩阵分解). 因此, 可以修改, 表 59.2.

表 59.2: 纽顿 • 拉夫森方法的变化

方法	Tangent 刚度矩阵 计算在			
	预言者 (x 在 K^n_{txi})		修正 (y 在 K^n_{tyi})	
	增加	伊特拉	增加	伊特拉
纽顿 • 拉夫森	n	1	n	i
改造 Newton-Raphson	n	1	n	1
初步性	1	1	1	1

.

70 请注意, 几乎不可能确定 **初步** 哪种方法最适合一个特定的问题。可能需要尝试很多 (有些人可能会遇到冲突问题。).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

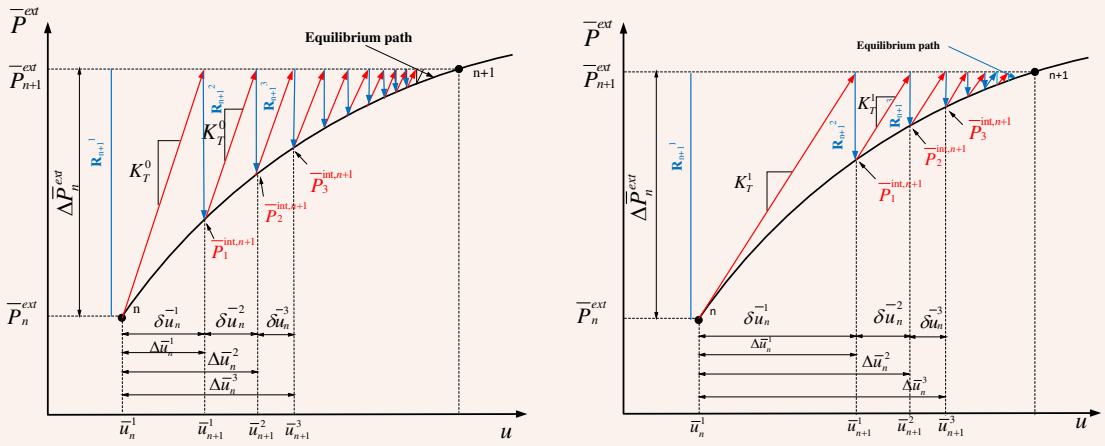
59.3.1.2 改造新顿拉夫森

71 这种方法基本上与纽顿 • 拉夫森相同; 然而, 在平衡中 59.5, $(\mathbf{K}_T^i)$ 被替换为 $\overline{\mathbf{K}}_T$ 什么是刚度矩阵的第一个字符串:

- 第一增 $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_{T,0}^1$, 形象 59.5a
- 目前增幅 $\overline{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_n^1$, 图 59.5b.

和

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$



(a) 在分析中　　(b) 增加的

图 59.5: 改造新顿拉夫森方法, 初始坦根

72 一般情况下,CPU 需要额外的 iterations 的时间以这种方法, 比收集和分解所节省的时间少。每個字符的 刚度矩阵。值得一提的是, 刚度矩阵的坦根不必然要是真正的坦根硬度矩阵; 即真正的泰根硬性矩阵或甚至初始的固度矩体的接近, 通常会产生令人满意的结果, 尽管在额外的成本上。以色列。

59.3.1.3 西安 • 纽顿

73 这种方法是前两者之间的妥协。首先, 我们寻找两个转移的两个循环改变纽顿-拉夫森; 然后在两点之间建立一个曲线, 并沿着它迈出一步。形象 59.6.

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\overline{\mathbf{K}}_T)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$

74 随后, 每个步骤将沿着连接前两点的分区进行。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

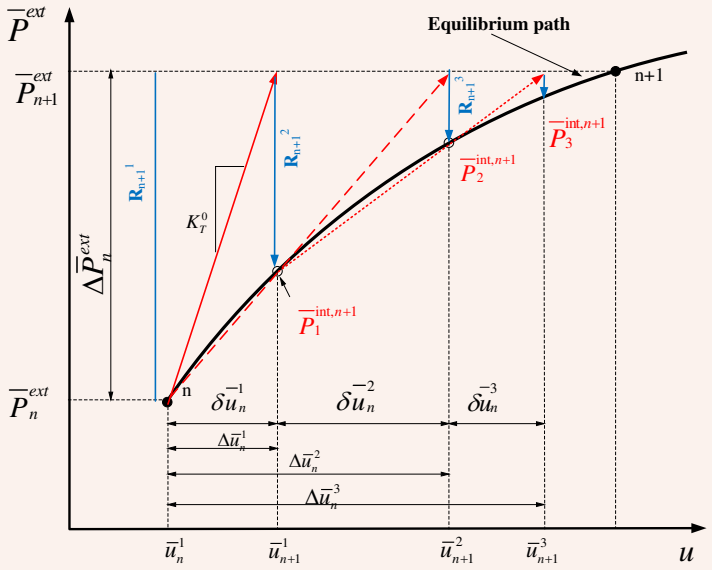


图 59.6: 加重干燥, quasi-newton 方法

75 开始与

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^1 = -\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^1$$

可定义的分布率

$$(\mathbf{K}_S^2)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}_n^1}{(\mathbf{R}_{n+1}^1 - \mathbf{R}_{n+1}^2)}$$

然后

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^2 = -(\mathbf{K}_S^2)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^2$$

这个过程可以普遍化为

$$\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i = -(\mathbf{K}_S^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$
$$(\mathbf{K}_S^i)^{-1} = -\frac{\delta\overline{\mathbf{u}}_n^i}{(\mathbf{R}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{R}_{n+1}^i)}$$

59.3.1.4 转型标准

76 在所有先前的方法中, 进行 iterations 直到满足一个或所有不同 convergence 标准。相对接近标准可选地适用于转移、负载和/或增加能量, 以确定终止条件。

77 非常重要的是要注意, 缺乏接近意味着结构的本地或全球失败。换句话说, 峰值 荷载 相当于与最后增幅相关的 荷载.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

78 相应的 位移 标准是根据 位移 修正的定义, $\delta\overline{\mathbf{u}}^j$, 以及更新的加剧流离失所, $\delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1}$, 如

$$\varepsilon_u = \frac{\| \delta\overline{\mathbf{u}}^j \|_2}{\| \Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1} \|_2}$$

哪里 $\| \dots \|_2$ 这是欧克利德的规则。

79 欧克利德规范, 也被称为 L_2 標準, 一個 向量 $\mathbf{v}$ 被定义为

$$\| \mathbf{v} \|_2 = \left[\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \right]^{1/2}$$

哪里 N 是它的尺寸 $\mathbf{v}$.

80 相应的 荷载 标准在更新剩余负载方面定义, $\mathbf{R}^{j+1}$ 和反应, $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$ 如同

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_2}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_2}$$

或

$$\varepsilon_r = \frac{\| \mathbf{R}^{j+1} \|_\infty}{\| \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int} \|_\infty}$$

哪里 $\| \dots \|_\infty$ 这是无限的规则。$\mathbf{v}$ 定义为

$$\| \mathbf{v} \|_\infty = \max \left(\sum_{i=1}^{N} |v_i| \right)$$

哪里 N 是它的尺寸 $\mathbf{v}$.

81 相对增量能量准则由位移修正量 $\delta\overline{\mathbf{u}}^j$、更新后的残余荷载 $\mathbf{R}^{j+1}$、更新后的增量位移 $\Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1}$ 以及更新后的反力 $\overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}$ 定义为

$$\varepsilon_W = \frac{\delta\overline{\mathbf{u}}^j \cdot \mathbf{R}^{j+1}}{\Delta\overline{\mathbf{u}}^{j+1} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{j+1}^{int}}$$

指数器是对 iteration 的 incremental 能量的变化 j 其名称是加剧能量。

59.3.1.5 总结表

82 桌子 59.3 在非线分析中比较各种负载控制算法。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 59.3: 负载控制算法在非线性分析中的比较

视角	纽顿 • 拉夫森	改 造 Newton-Raphson	秘密方法	解释方法
目标	寻找非线性函数的根, 使用坦格硬度矩阵; 平衡	类似于纽顿-拉夫森, 但通过重新使用刚度矩阵简化	找出根, 没有明确的衍生品, 使用点之间的分裂线	加重使用简单的坦根硬度负载
依赖衍生品	需要衍生品 (直播刚度矩阵)	需要初始坦根硬度, 但不更新每次 iteration	接近衍生品, 使用最终差异	无所需衍生品
准确性	高 (四方交往)	适度 (比纽顿 • 拉夫森更慢, 但往往足够)	适度 (比牛顿-拉夫森更慢, 但避免明确的衍生品)	低准确性; 解决方案可能有所不同
计算效率	计算成本昂贵, 因为每个字符串的刚度矩阵 重新计算	适度, 重新使用初始 刚度矩阵	适度; 避免硬度重新计算, 比 Explicit 少提取	有效但需要小 荷载 增值准确性
伊特拉化过程	预测器 - 修复器周期与 平衡 检查每个增幅	使用初始 刚度矩阵, 少重新计算	兩個初始猜测和次要基於序列的接近	步骤计算, 没有按荷载步行进行 iteration
转型标准	四方接近正确的初始猜测; 需要不接近零的折叠	缓慢的接近, 但适用于硬度重新计算成本昂贵的问题	线性接近, 对没有明确衍生品的情况有好处	转变不适用; 可以分离
共同应用	非线性结构问题与可用的衍生品	适合非线性问题, 适度硬度重新计算成本	未知或难以计算的衍生品的情况	明确时间集成优先的情况
优点	快速接近, 以少数 iterations	减少计算 荷载 与适度相匹配	避免衍生计算	总是提供解决方案
缺点	高计算成本每 iteration	需要更多的引用与纽顿-拉夫森相比	缓慢的接近, 需要良好的初步猜测	由于缺乏 平衡 执行而产生不准确的解决方案

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

59.3.2 位移 控制

83 荷载 控制方法, 上面描述, 实际上是一个非常强大的一个, 一个很容易视觉。然而, 有时, 溶液会波动或分离明显的迹象表明平衡没有恢复。59.7. 在大多数情况下, 这与 “失败” 以 荷载 的顶点。失败可能是结构性的, 或者只是在一个子区定位。

84 在非线性结构分析中, 荷载控制方法经常被用来不断地应用负载并跟踪结构的反应。但是, 在涉及润滑材料的情况下 [1] 或后峰行为, 传统的荷载控制技术可能会变得有问题。随着结构接近其顶级负载容量, 负载 - 转移反应可能会表现出特征, 如瞬间或瞬间后不稳定性, 使基于负载的 convergence 具有挑战性甚至不可能。

85 为了解决这些问题, 位移控制方法提供了一个有价值的替代方案。而不是不断地应用负载并寻求结果的驱逐, 驱逐控制技术不断地强加驱逐和计算相应的内部力量。这种方法确保分析过程的稳定性, 通过保持转移控制, 即使在负载转移曲线显示复杂而非单调行为的地区。

86 位移 控制在捕获后峰和软化反应方面特别有利, 这些反应往往对结构的完整双重性或失败模式至关重要, 尤其是具有薄薄或 应变 软化材料如 混凝土 的操作。通过控制移动实现平衡, 这种方法提高了超越顶部负载的结构反应跟踪能力, 为结构耐力、残余容量和双重性提供了基本知识。

87 位移 控制下 (如下所解释) 恢复力量总是可以确定。(除非有 Snapback).

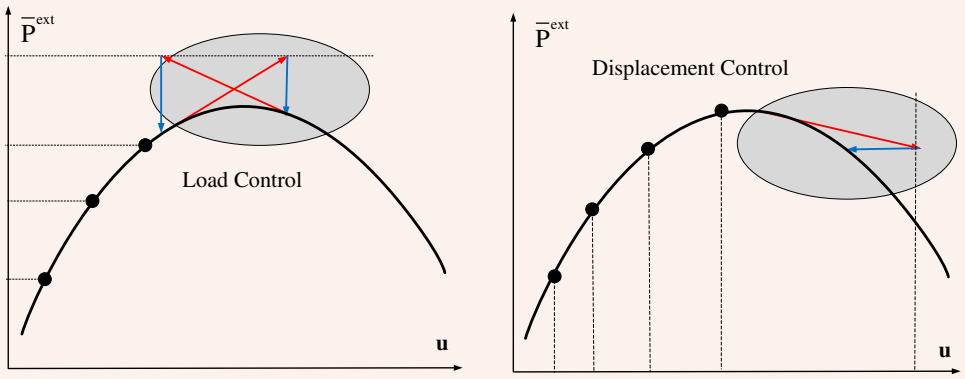


图 59.7: 纽顿的方法; 荷载 与 位移 控制

88 对于位移控制，将残余位移向量 $\mathbf{R}_n^k$ 定义为

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) = \overline{\mathbf{u}}^{int}(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}) - \overline{\mathbf{u}}^{ext} = 0 \tag{59.6}$$

注意与平等的区别 59.3.

89 因此, 要捕获后峰会反应, 我们需要数字化采用位移控制算法。

90 在每一步的开始时 $n+1$ 我们从力量开始。$\overline{\mathbf{P}}_n$ 以前的步骤是通过平衡计算的。$\mathbf{R}_n^k \approx 0$ 或 $\overline{\mathbf{u}}_n^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$ 图像 59.8.

[1] 注意与图像相同的模拟 O.11 由于剩余的确定变得不可能接近峰值。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

91 外部位移现由 $\overline{\mathbf{u}}_n^{ext}$ 增加到 $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext} + \Delta\overline{\mathbf{u}}^{ext}$，并通过平衡条件求相应的力 $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}$，$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx 0$ 或 $\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{int} \approx \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$. 在目前的步骤中 (通过订阅标识 n) 我們將以色列 (通过超级编辑 k) 以实现 平衡, 图 59.8

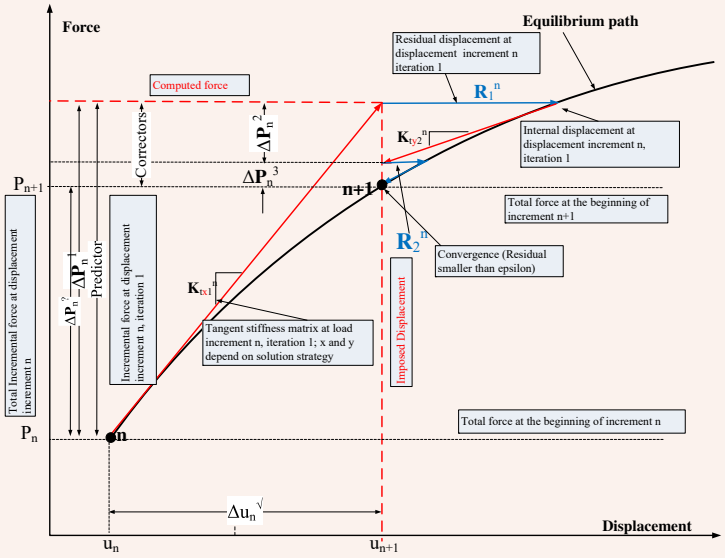


图 59.8: 纽顿的方法; 位移控制 (与数字比较 59.3)

92 作为一个初步猜测 $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0$ 我们将它成为 $\overline{\mathbf{P}}_n$ 基于这个原始状态的线性化, 我们

$$\overline{\mathbf{u}}_{int}(\overline{\mathbf{u}}_{n+1}^0) + \mathbf{K}_T(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^0)\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{u}}_{n+1}^{ext}$$

哪里 $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1$ 是未知的位移增加的第一个接近, $\Delta\overline{\mathbf{P}}_{n+1} = \overline{\mathbf{P}}_{n+1} - \overline{\mathbf{P}}_n$.

93 否则, 我们从方程式的线性化开始。59.6, 图 59.9

$$\mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}_n^k(\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{P}}}\right)_{n+1}^i \delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = 0 \tag{59.7}$$

哪里 i 这是一个从 $\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^1 = \overline{\mathbf{P}}_n$. 我们观察到这

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n^k}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{int}}{\partial \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{K}_T$$

94 假定 $\overline{\mathbf{u}}^{ext}$ 为常量，$\mathbf{K}_T$ 为切线刚度矩阵，则式 59.7 给出

$$\mathbf{K}_T^i \delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = -\mathbf{R}_{n+1}^i$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

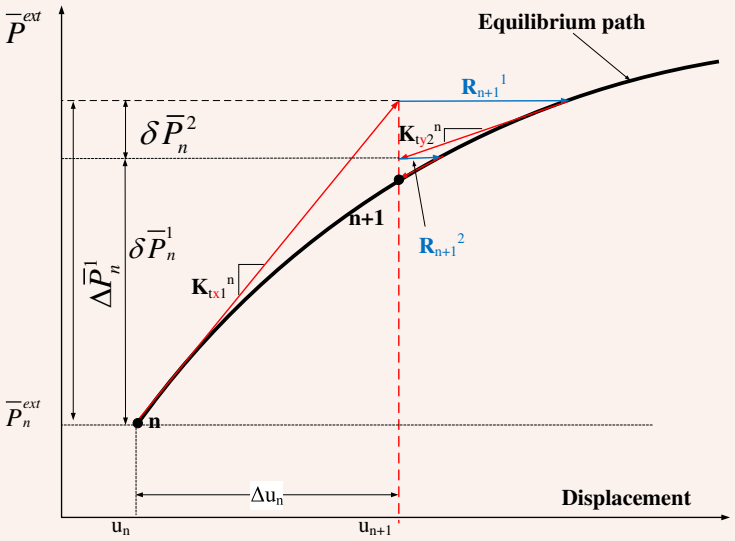


图 59.9: 纽顿 - 拉夫森方法; 位移 控制

或

$$\delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1}\mathbf{R}_{n+1}^i$$

95 因此, 一系列连续接近的结果

$$\overline{\mathbf{P}}_{n+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{P}}_n + \Delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = \overline{\mathbf{P}}_{n+1}^i + \delta\overline{\mathbf{P}}_n^i$$

与

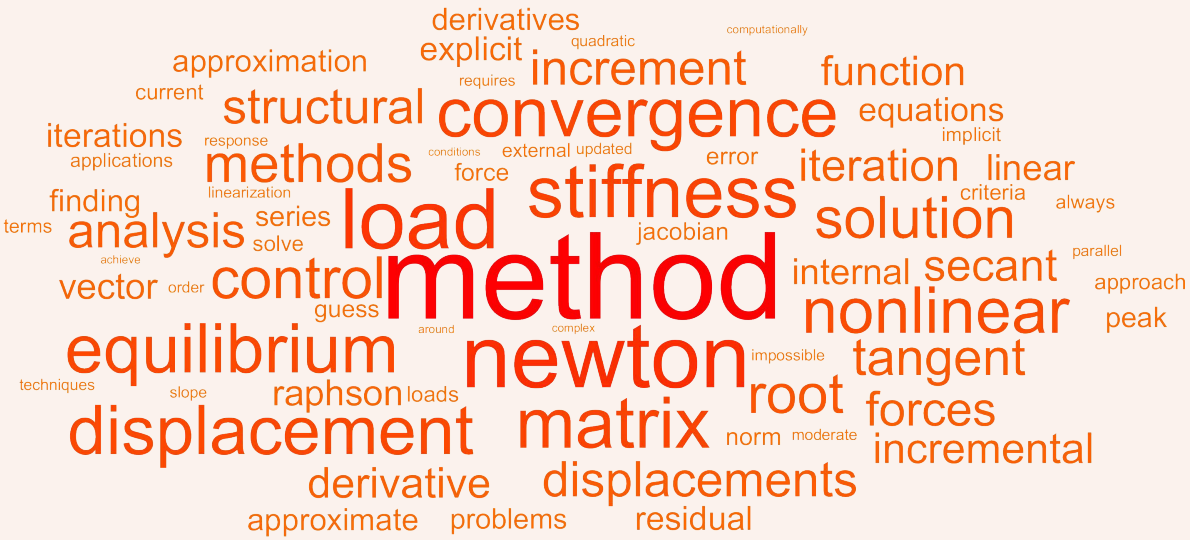
$$\Delta\overline{\mathbf{P}}_n^i = \sum_{k\le i}\delta\overline{\mathbf{P}}_n^k$$

非常快。

96 值得注意的是, 每次 iteration 都包含三个计算成本昂贵的步骤:

1. 内部迁移的评估 $\overline{\mathbf{u}}^{int}$
2. 评估全球坦根 刚度矩阵, $\mathbf{K}_T$
3. 解决线性方程式的系统

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

60 非线性分析; 地质

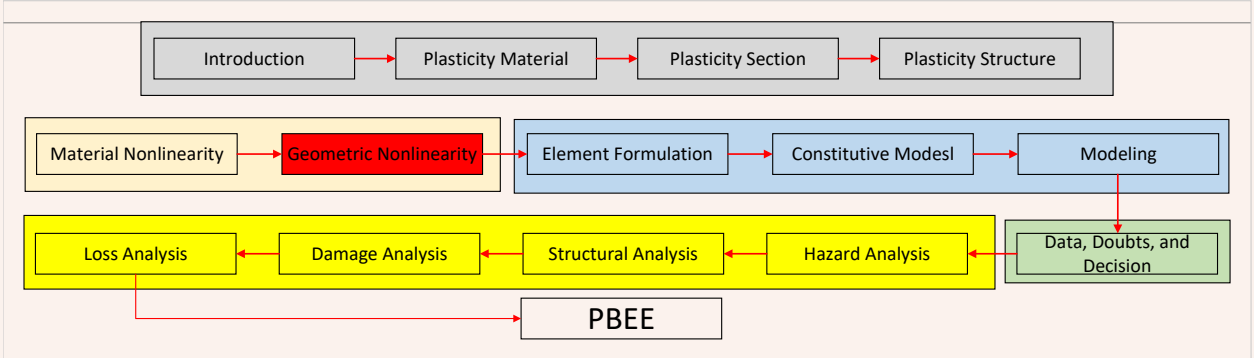
摘要

地质非线性, 在结构分析中的一个基本考虑, 发生在涉及大带和/或大型转移的情况下, 每个需要独特的分析方法。大线需要对弹性刚度矩阵进行调整, 导致 $P-\delta$ 分析, 而大型转移涉及二次变形, 需要 $P-\Delta$ 分析。这些非线性效果共同影响一个结构的荷载容量、稳定性和坚固性, 在精确的结构模型方面提出了额外的挑战。

本章开始于地质刚度矩阵的全面衍生。$\mathbf{k}_g$, 补充弹性刚度矩阵以计算由大线条和转移引起的地质非线性。这种矩阵对于精确预测结构元素的冲动负载至关重要, 以及对硬度和内部力量的侧重负载的影响进行评估。接下来的部分探讨了侧负载可能对结构施加的软化或硬化效果, 影响不同负载情况下的稳定性和变形特征。

引入了增加算法, 以解决非线性结构行为的异端性质。这一步骤的方法在每个阶段重新计算结构硬度, 捕捉结构的动态反应, 因为它们遭受变形。实用的应用通过章节内嵌入的许多 *MATLAB* 代码突出, 而替代数学文本可供那些喜欢小型编程的人提供。这些例子允许读者将理论原则应用到现实世界案例中, 涵盖类似于屈曲列和框架的分析以及大分裂在直径线上, 其中几何非线性扮演关键角色。通过这些例子, 读者获得了几何非线性如何影响结构性能的实用理解, 使他们能够有效地解决复杂、现实世界工程挑战。

60.1 地质 刚度矩阵 1715
60.1.1 衍生品 1716
60.1.2 弹性不稳定性; 二进制分析 . 1718
60.2 增加明确分析 1727
60.2.1 例题 60.5: Cantilever Beam 的大漏洞 1729
60.3 $P-\Delta$ 重定向 1733
60.3.1 例题 60.6: 包装负载无 $\mathbf{K}_{geom}$ 1734



60.1 地质 刚度矩阵

1 地质刚度矩阵是对大型应变的结构分析的重要组成部分。(标签: 大迁移).

2 我们首先将其衍生, 然后将其应用到数字计算结构的冲动负载, 然后评估其对元素的硬度的影响。(即柔软或硬).

审阅稿

60.1.1 衍生品

3 在这个第一部分, 我们将从所谓的 **地质 刚度矩阵** 谁是一个 “添加” 以 刚度矩阵 衍生的弹性 (§50.2.4) 只为大而负责任。(以前被忽视).

60.1.1.1 弱形

4 最终元素的原始格式 (微小的假设) 覆盖在 §50.2 现在必须重新审查, 以便考虑到大条线。

5 如前所述, 要解开问题。(通过 finite 单元), 我们首先需要获得统治差异方程的弱形, 然后应用虚拟应变能原则。再次, 与以前相反, 应变的表达将通过额外更高的订单条款丰富。(首先被忽视).

60.1.1.2 应变

6 泡沫列中的绳子可以分成两部分:

轴心: 对大型迁移的会计 (来自 EQ。O.6)

$$\varepsilon_{xx} = \underbrace{u_{,x}}_{\text{First Order}} + \underbrace{\frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2)}_{\text{Second Order}}$$

哪里 u 和 v 分别是轴和跨方向的转移。第二条命令期限是 “对手” 以 解析解 的形状编写 平衡方程 (或者只是为大算。).

福克斯: 关于 Euler Bernoulli 的假设 (§22.2)

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{d^2v}{dx^2} & = & \frac{M}{EI} \\ \sigma_{xx} & = & -\frac{My}{I} \end{array}\right\} \varepsilon_{xx} = -y\frac{d^2v}{dx^2}$$

7 重新安排, 总 应变 变成

$$\varepsilon_{xx}(x,y) = \underbrace{\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{Axial}} \underbrace{- y\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)}_{\text{Flexure}}}_{\text{Small Deformation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}_{\text{Large Deformation}} \tag{60.1}$$

8 注意, 第二个术语是负的, 因为对积极 y (顶部) 我们有压缩压力, 第一和第二个术语是相应的轴和灵活线的熟悉组成部分, 而第三个则 (是非线性) 它是从大分裂的线路转移中获取的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

60.1.1.3 内部 应变能

9 和 (弹性) 虚拟 应变能 的 单元 (原来是 Q。50.4) 现在变成

$$\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega E\varepsilon_{xx}\delta\varepsilon_{xx}d\Omega$$

10 取代 EQ。60.1 进入 $U_i^{(e)}$ 我们获得

$$\delta U_i^{(e)} = \frac{1}{2}\int_L\int_A \left[\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx} + y^2\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\left(\frac{d\delta v}{dx}\right)^2 - 2y\left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx} - y\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right)\right]E\,dA\,dx$$

11 回忆这 $\int_A dA = A$, 和 $\int_A ydA \overset{\text{def}}{=} 0$ 和 $\int_A y^2dA \overset{\text{def}}{=} I$, 排除最高订单期限, 并在独立预备分析的假设下进行轴充电

$$P^{(e)} = EA\frac{du}{dx} \Rightarrow A\frac{du}{dx} = \frac{P^{(e)}}{E}$$

我们获得

$$\delta U_i^{(e)} = \delta U_i^{(e,a)} + \delta U_i^{(e,f)} \tag{60.2}$$

$$\delta U_i^{(e,a)} = \frac{1}{2}\int_L EA\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}dx \tag{60.3}$$

$$\delta U_i^{(e,f)} = \frac{1}{2}\int_L \left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right]dx \tag{60.4}$$

60.1.1.4 $\mathbf{K}_g$

12 再一次, 我们遵循相同的程序, 如上所覆盖的 §50.2.4 要衍生一支受大绳索的泡沫列的硬度矩阵。采用四个联合转移的角度对跨转移进行功能代表

$$v = \mathbf{N}\overline{\mathbf{u}}$$
$$\frac{dv}{dx} = \mathbf{N}_{,x}\overline{\mathbf{u}}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \mathbf{N}_{,xx}\overline{\mathbf{u}}$$

格式函数由 eq 提供。49.3.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

13 内部虚拟 应变能 必须与外部 虚功 相同

$$\begin{aligned}
\delta U_i^{(e,f)} &= \frac{1}{2}\int_L \left[EI \frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} + P^{(e)}\frac{dv}{dx}\frac{d\delta v}{dx}\right] dx \\
\delta W_e &= P^{(e)}\int_0^L \left[\left(\frac{d\delta u}{dx}\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx}\right)\right] dx \\
\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]\mathbf{u}_e &= \mathbf{P} \\
\left[\mathbf{k}_e^{(e)}\right] &= \left[\int_L EI \underbrace{\{\mathbf{N}_{,xx}\}}_{\mathbf{B}^T}\underbrace{\lfloor \mathbf{N}_{,xx}\rfloor}_{\mathbf{B}} dx\right] \\
\left[\mathbf{k}_g^{(e)}\right] &= \left[P^{(e)}\int_L \{\mathbf{N}_{,x}\}\lfloor \mathbf{N}_{,x}\rfloor dx\right] \quad \text{Geometric Stiffness Matrix}
\end{aligned} \tag{60.5}$$

请注意, 刚度矩阵的地质术语仅取决于地质参数。(长度).

14 替换形状功能:

$$\mathbf{k}_g^{(e)} = \frac{P}{L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{60.6}$$

15 平衡的关系是

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}\bar{\mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{P}} \\
\mathbf{k}^{(e)} &= \mathbf{k}_e^{(e)} + \mathbf{k}_g^{(e)} \\
\mathbf{K} &= \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g
\end{aligned}$$

我们注意到, 结构变得更加强大为紧张的荷载 P 通过应用 $\mathbf{K}_g$ 更弱于压缩。

60.1.2 弹性不稳定性; 二进制分析

16 有了衍生地质硬度矩阵, 让我们看看它如何用来确定结构的泡沫负载。因此, 我们将努力确定多元化 λ 初始负载 vector $\overline{\mathbf{P}}^*$ (什么可以是团结) 從第一個順序的線形柔軟分析中獲得, 這將導致 屈曲,

$$\overline{\mathbf{P}}_{cr} = \lambda\overline{\mathbf{P}}^*$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

17 由于地质刚度矩阵是与内部力量的比例,

$$\mathbf{K}_g = \lambda \mathbf{K}_g^*$$

哪里 $\mathbf{K}_g^*$ 符合参考负载的地质密度矩阵 $\overline{\mathbf{P}}^*$ (通常是统一的。).

18 以灵活的刚度矩阵 $\mathbf{K}_e$ 保持稳定, 我们可以写作

$$(\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)\overline{\mathbf{u}} - \underbrace{\lambda \overline{\mathbf{P}}^*}_{\overline{\mathbf{P}}_{cr}} = 0$$

19 其次, 流离失所是由

$$\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*)^{-1} \lambda \overline{\mathbf{P}}^*$$

以便他们向无限的方向倾斜。(i.e 屈曲 / 二重性 / 不稳定性) 然后,

$$|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0 \Rightarrow |\mathbf{K}_g^{*-1} \mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{I}| = 0$$

这是一个特征值问题, 我们可以解决自己的价值 λ.

20 但是, 自从 $\mathbf{K}_g^*$ 有几条零字在图表上 (Eq. 60.6), 我们使用替代表述

$$|\mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_g^* + \frac{1}{\lambda}\mathbf{I}| = 0$$

但是, $\mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{K}_g^*$ 可能不是相同的。

21 最低的价值 λ, λ_{crit} 将为结构提供泡沫负担, 而泡沫的负担将由

$$\overline{\mathbf{P}}_{crit} = \lambda_{crit} \overline{\mathbf{P}}^*$$

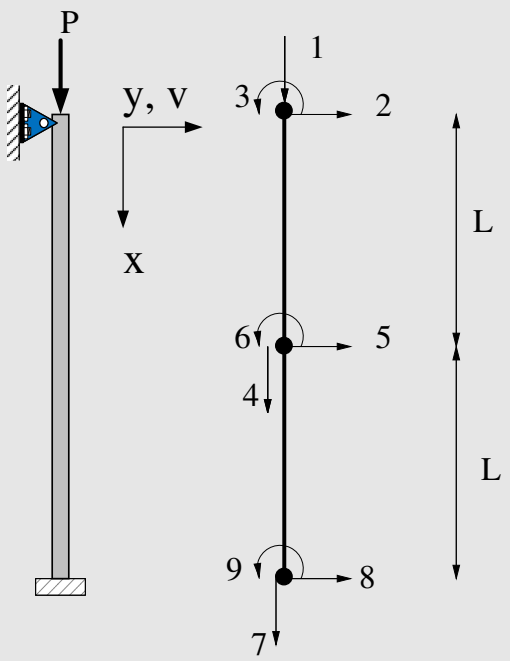
60.1.2.1 例题 60.1: 柱 屈曲

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们试图数字地确定固定曲线列的泡沫负载, 并将结果与分析解决方案进行比较。§29.3.2.1.3. 灵活和地质密度矩阵是由

$$\mathbf{k}_e^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_g^1 = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$



结构的坚固性矩阵 $\mathbf{K}_e$ 和 $\mathbf{K}_g$ 现在可以从 单元 硬件中收集。排除 2、7、8、9 列和列, 相当于柱中零分散, 我们获得

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -6L & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K}_g = \frac{-P}{L} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15}L^2 & \frac{-L}{10} & \frac{-L^2}{30} \\ 0 & 0 & \frac{-L}{10} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{4}{15}L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

要注意, 在此情况下 $\mathbf{K}_g^* = \mathbf{K}_g$ 为 $P = 1$, 行列式 $|\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^*| = 0$ 导致

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{AL^2}{I} & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AL^2}{I} & 2\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 - \frac{2}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} \\ 0 & 0 & -6L + \frac{1}{10}\frac{\lambda L^3}{EI} & 24 - \frac{12}{5}\frac{\lambda L^2}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 2L^2 + \frac{1}{30}\frac{\lambda L^4}{EI} & 0 & 8L^2 - \frac{4}{15}\frac{\lambda L^4}{EI} \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

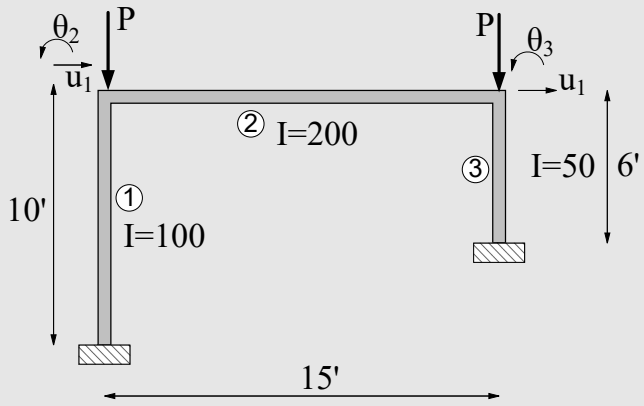
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在他的点上, 我们可以以数或算法的方式解决。让我们有勇气, 然后再加上第二个: 引入 $\phi = \frac{AL^2}{I}$ 和 $\mu = \frac{\lambda L^2}{EI}$, 行列式 变成

$$\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & \phi & -\phi & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\phi & 2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2\left(2-\frac{\mu}{15}\right) & -6L+\frac{\mu}{10} & 2+\frac{\mu}{30} \\ 5 & 0 & 0 & -6L+\frac{\mu}{10} & 12\left(2-\frac{\mu}{5}\right) & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2+\frac{\mu}{30} & 0 & 4\left(2-\frac{\mu}{15}\right) \\ \end{array} = 0$$

通过扩展 行列式, 我们获得了圆形方程式。$\mu\ 3\mu^3 - 220\mu^2 + 3,840\mu - 14,400 = 0$ 这个方程式的最低根是 $\mu = 5.1772$. 因此, 长度列的泡沫负载 $2L$ 是 $P_{cr} = \lambda = \frac{5.1772EI}{L^2}$ 对于长度柱的准确解决方案 L 是 $P_{cr} = \frac{(4.4934)^2}{L^2}EI = \frac{(4.4934)^2}{(2L)^2}EI = 5.0477\frac{EI}{L^2}$ 因此, 数值 的值大约为 2.6

60.1.2.2 例题 60.2: 框架 屈曲; Matlab 解决方案



最小 屈曲 荷载 增强因素 λ 等同于 2,017 吉普赛

马特拉布解决方案

```
% Main Function
% zero the matrices
k=zeros(6,6,3) ; K=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Structural properties units : in^2 , in^4 , and ksi
A=[24.5 34.6 18]; II=[100 200 50];EE=29000;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [k(:,:,1),K(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff(EE, II(1),A(1),i, j
    ) ;
% Element 2
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
i =j ;      j =[180,120]; [k(:,:,2),K(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff(EE, II(2),A(2),i ,j
    ) ;
% Element 3
i =j;       j =[180, 48]; [k(:,:,3),K(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=stiff(EE, II(3),A(3),i ,j
    ) ;
% Define ID matrix % Note that this is the transpose of what we use
ID=[-4 5 -6; 1 -7 2;1 -8 3; -9 -10 -11] ;
% Determine the LM matrix
LM=[-4 -5 -6 1 -7 2; 1 -7 2 1 -8 3; 1 -8 3 -9 -10 -11];
% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
      for r=1:6
            lr=abs(LM(elem,r)) ;
            for c=1:6
                  lc=abs(LM(elem,c)) ;
                  Kaug(lr , lc )=Kaug(lr ,lc)+K(r,c ,elem ) ;
            end
      end
end
Ktt=Kaug (1:3 ,1:3 );
P=[1 0 1];
% zero the matrices
g=zeros(6,6,3) ; G=zeros(6,6,3) ; Gamma=zeros(6,6,3) ;
% Element 1
i =[0,0]  ; j =[0,120] ; [g(:,:,1),G(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=gstiff(P(1),i, j ) ;
% Element 2
i =[0,120]; j =[180,120]; [g(:,:,2),G(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=gstiff(P(2),i ,j ) ;
% Element 3
i =j;       j =[180, 48]; [g(:,:,3),G(:,:,3),Gamma(:,:,3)]=gstiff(P(3),i, j ) ;
% Assemble augmented geometric stiffness matrix
Gaug=zeros(11) ;
for elem=1:3
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r)) ;
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c)) ;
         Gaug(lr,lc)=Gaug(lr,lc)+G(r,c,elem) ;
      end
   end
end
Gtt=Gaug (1:3,1:3);
I=eye(3);
M=inv(Gtt).*Ktt           % try this first if not workable go to  M=inv(Ktt).*Gtt
[V,pcrit]=eig(M,-I)
%Stiffness Function
function [k ,K,Gamma]= stiff(EE, II ,A, i , j )
% Determine the length
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)   0            0          0  0 ;
      -sin(alpha)  cos(alpha)   0            0          0  0 ;
                0           0   1            0          0  0 ;
                0           0   0  cos(alpha) sin(alpha)  0 ;
                0           0   0 -sin(alpha) cos(alpha)  0 ;
                0           0   0            0          0  1 ] ;
% form element stiffness matrix in local coordinate system
EI=EE*II ; EA=EE*A;
k= [EA/L,          0,          0 , EA/L,          0,         0 ;
      0 , 12*EI/L^3,   6*EI/L^2,    0, -12*EI/L^3,  *EI/L^2 ;
       0,  6*EI/L^2,     4*EI/L,    0,  -6*EI/L^2,   2*EI /L;
   -EA/L,          0,          0, EA/L,          0,         0;
       0, 12*EI/L^3, -6*EI /L^2,    0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
       0,  6*EI/L^2,     2*EI/L,    0, -6*EI /L^2,     4*EI/L ] ;
% Element stiffness matrix in global coordinate system
K=Gamma'* k*Gamma;
end
% Geometric Stiffness Function
function [ g,G,Gamma ]= gstiff(P,i,j)
% Determine the l ength
L=sqrt ((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2) ;
% Element  geometric stiffness matrix in local  coordinate  system
g=-P/L*[0     0         0    0      0       0  ;
        0   6/5      L/10    0   -6/5      L/10;
        0  L/10  2*L^2/15    0  -L/10   -L^2/30;
        0     0         0    0      0       0   ;
        0  -6/5     -L/10    0    6/5     -L/10;
        0  L/10   -L^2/30    0  -L/10   2*L^2/15 ];
% Compute the angle alpha
alpha=atan2 (j(2)-i(2),j(1)-i(1)) ;
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[ cos(alpha)  sin(alpha)  0            0            0  0 ;
       -sin(alpha)  cos(alpha)  0            0            0  0 ;
                 0           0  1            0            0  0 ;
                 0           0  0   cos(alpha)   sin(alpha)  0 ;
                 0           0  0  -sin(alpha)   cos(alpha)  0 ;
                 0           0  0            0            0  1 ] ;
%Element  geometric stiffness matrix in global  coordinate  system
G=Gamma'* g*Gamma;
end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

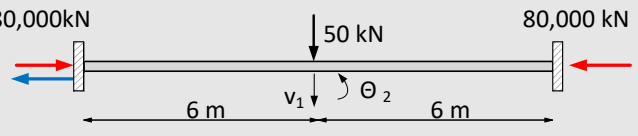
60.1.2.3 例题 60.3: 框架 屈曲; 数学解决方案

数学解决方案

```
(* Initialize constants *)
a1=0 a2=0 a3=0 i1=100 i2=200 i3=50 l1=10 12 l2=15 12 l3=6 12 e1=29000 e2=e1 e3=e1
(* Define elastic stiffness matrices *)
ke[e_,a_,l_,i_]:={
{e a/l  , 0           , 0          , -e a/l , 0           , 0          },
{0      , 12 e i/l^3  , 6 e i/l^2  , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2  },
{0      , 6 e i/l^2   , 4 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l    },
{-e a/l , 0           , 0          , e a/l  , 0           , 0          },
{ 0     , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
{ 0     , 6e i/l^2    , 2 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l    } }
ke1=ke[e1,a1,l1,i1]; ke2=ke[e2,a2,l2,i2]; ke3=ke[e3,a3,l3,i3]
(* Define geometric stiffness matrices *)
kg[l_,p_]:=p/l{
{0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  ,  l/10    , 0 , - 6/5  ,
     l/10     },
{0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0        , 0 , 0      ,
     0        },
{0 , -6/5 , - l/10   , 0 ,  6/5   , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30 , 0 , - l/10 ,
     2 l^2/15 } }
kg1=kg[l1,1]
kg3=kg[l3,1]
(* Assemble structure elastic and geometric stiffness matrices *)
ke={
{ ke1[[2,2]]+ke3[[2,2]] , ke1[[2,3]]            , ke3[[2,3]]             },
{ ke1[[3,2]]            , ke1[[3,3]]+ke2[[3,3]] , ke2[[3,6]]             },
{ ke3[[3,2]]            , ke2[[6,3]]            , ke2[[6,6]]+ke3[[3,3]]  } }
kg={
{ kg1[[2,2]]+kg3[[2,2]] , kg1[[2,3]] , kg3[[2,3]]  },
{ kg1[[3,2]]            , kg1[[3,3]] , 0           },
{ kg3[[3,2]]            , 0          , kg3[[3,3]]  } }
(* Determine critical loads in terms of p (note p=1) *)
p=1
keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen]]; modshap=N[Eigensystems[
    keigen]]
```

60.1.2.4 例题 60.4: 荷载对灵活性变形的影响

在这个例子中, 我们试图评估压缩或紧张的轴力对一支丝柱的硬度的影响。这个问题在分析中得到解决。§29.2.2.



由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使用两种元素为泡沫列, 唯一的自由度是中间旋转和分裂。(我们忽略了轴形变形。).

马特拉布

```
clear; close all;clc;
%% Initialization for a 2 element structure
% zero the matrices
k=zeros(6,6,2);K=zeros(6,6,2);kg=zeros(6,6,2);Kg=zeros(6,6,2);Gamma=zeros(6,6,2);
% Structural properties m^2, m^4, and Pa
A=1;II=2e-3;EE=2e9;
% Elements' axial loads
Fax=-8e4*[1,1];
%% Call the function stiff to compute the element stiffness matrices and the
    rotation ones
% Element 1
i=[0,0];j=[6,0];
[k(:,:,1),K(:,:,1),kg(:,:,1),Kg(:,:,1),Gamma(:,:,1)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,Fax(1));
% Element 2
i=j;j=[12,0];
[k(:,:,2),K(:,:,2),kg(:,:,2),Kg(:,:,2),Gamma(:,:,2)]=stiff_1(EE,II,A,i,j,Fax(2));
%% Determine the LM matrix
LM=[
4 5 6 1 2 3;
1 2 3 7 8 9];
%% Assemble augmented stiffness matrix
Kaug=zeros(9);Kgaug=zeros(9);
for elem=1:2
   for r=1:6
      lr=abs(LM(elem,r));
      for c=1:6
         lc=abs(LM(elem,c));
                  Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
                  Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
            end
   end
end
%% Extract the structures Stiffness Matrix
Ktt=Kaug(1:3,1:3);Kgtt=Kgaug(1:3,1:3);
%% Find buckling load multiplier
B=inv(Ktt)*Kgtt;lambda=-1*eye(3,1)./eig(B);
%% Assemble the load vector for the unrestrained node
P=[0,-50,0];
%% Solve for the Displacements in meters
Displacements=inv(Ktt+Kgtt)*P'
%% Solve for the internal forces and do not forget to include the fixed end actions
dis_global(:,:,1)=[0,0,0,Displacements(1:3)'];dis_global(:,:,2)=[Displacements
    (1:3)',0,0,0];
for elem=1:2
  dis_local=Gamma(:,:,elem)*dis_global(:,:,elem)';
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
  int_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local
end
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
\red{from above exampes}
```

数学

```
  (* Initialize constants *)
  OpenWrite["mat.out"]; a1=1; a2=1; i1=1 l^3/12;i2=i1; l1=12;l2=12; e1=200000;e2=e1
    ;e3=e1;
  theta1=N[Pi/8];theta2=Pi-theta1; load i1=i i2=i1 l=6 l1=l l2=6 p=-80000 load
    ={-50,0}
  (* Define elastic stiffness matrices *)
  ke[e_,a_,l_,i_]:={
    {e a/l  , 0           , 0          , -e a/l , 0           , 0          },
    {0      , 12 e i/l^3  , 6 e i/l^2  , 0      , -12 e i/l^3 , 6 e i/l^2  },
    {0      , 6 e i/l^2   , 4 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 2 e i/l    },
    {-e a/l , 0           , 0          , e a/l  , 0           , 0          },
    { 0     , -12 e i/l^3 , -6 e i/l^2 , 0      , 12 e i/l^3  , -6 e i/l^2 },
    { 0     , 6e i/l^2    , 2 e i/l    , 0      , -6 e i/l^2  , 4 e i/l    } }
  ke1=N[ke[e,a1,l1,i1]]; ke2=N[ke[e,a2,l2,i2]]
  (* Assemble structure elastic stiffness matrices *)
  ke=N[{
    { ke1[[5,5]]+ke2[[2,2]], ke1[[5,6]]+ke2[[2,3]]},
    { ke1[[6,5]]+ke2[[3,2]], ke1[[6,6]]+ke2[[3,3]]} }]
  WriteString["mat.out",MatrixForm[ke1]]; WriteString["mat.out",MatrixForm[ke2]];
  WriteString["mat.out",MatrixForm[ke]]
  (* Define geometric stiffness matrices *)
  kg[p_,l_]:=p/l {
    {0 , 0    , 0        , 0 , 0      , 0        }, {0 , 6/5  ,  l/10    , 0 , -
    6/5  , l/10     },
    {0 , l/10 , 2 l^2/15 , 0 , - l/10 , - l^2/30 }, {0 , 0    , 0        , 0 , 0
       , 0        },
    {0 , -6/5 , - l/10   , 0 ,  6/5   , - l/10   }, {0 , l/10 , - l^2/30 , 0 , - l
    /10 , 2 l^2/15 } }
  kg1=N[kg[p,l1]]; kg2=N[kg[p,l2]]
  (* Assemble structure geometric stiffness matrices *)
  kg=N[{
    { kg1[[5,5]]+kg2[[2,2]], kg1[[5,6]]+kg2[[2,3]]},
    { kg1[[6,5]]+kg2[[3,2]], kg1[[6,6]]+kg2[[3,3]]} }]
  (* Determine critical loads and normalize wrt p  *)
  keigen=Inverse[kg] . ke; pcrit=N[Eigenvalues[keigen] p]
  (* Note that this gives lowest pcrit=1.11  10^6, exact value is 1.095 10^6 *)
  (* Add elastic to geometric structure stiffness matrices *)
  k=ke+kg
  (* Invert stiffness matrix and solve for displacements *)
  km1=Inverse[k] dis=N[km1 . load]
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
(* Displacements of element 1*)
dis1={0, 0, 0, 0, dis[[1]], dis[[2]]}
k1=ke1+kg1
(* Member end forces for element 1 with axial forces  *)
endfrc1=N[k1 . dis1]
(* Member end forces for element 1 without axial forces  *)
knopm1=Inverse[ke]; disnop=N[knopm1 . load]; disnop1={0, 0, 0, 0, disnop[[1]],
  disnop[[2]]}
(* Displacements of element 1*)
endfrcnop1=N[ke1 . disnop1]
```

转换合并的硬度和地质矩阵:

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.00012123 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.0001125 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} -0.000104944 \\ 0 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

成员终端力量为单元 1

$$\left\{ \begin{array}{c} P_{lft} \\ V_{lft} \\ M_{lft} \\ P_{rgt} \\ V_{rgt} \\ M_{rgt} \end{array} \right\} = \left[[\mathbf{k}_e^1] + [\mathbf{k}_g^1] \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{lft} \\ v_{lft} \\ \theta_{lft} \\ u_{rgt} \\ v_{rgt} \\ \theta_{rgt} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 79.8491 \\ 0. \\ -25. \\ 79.8491 \end{array} \right\}}_{P=-80{,}000} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 75. \\ 0. \\ -25. \\ 75. \end{array} \right\}}_{P=0} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 25. \\ 70.8022 \\ 0. \\ -25. \\ 70.8022 \end{array} \right\}}_{P=80{,}000}$$

压缩力量增加了移动和终点时刻, 而一个紧张的人通过减少它们来压缩结构。

60.2 增加明确分析

22 与不同类型的非线性分析, 图的参考 54.5 (再次向这里展示, 为清晰度) 现在我们专注于增加分析。(类型 3).

23 开始与

$$\left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right] \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$$

解决这种非线性方程式的一个简单的程序是使用一步一步或增加程序。相应的线性增值表述可以通过应用一个增值运营商获得 Δ

$$\{\Delta \overline{\mathbf{u}}\}_i = \left[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g\right]_i^{-1} \{\Delta \overline{\mathbf{P}}\}_i$$

24 该方法在图中描述 60.2 (这是一个简化版本的相应在图 59.2).

25 程序非常简单, 可以轻松编程:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

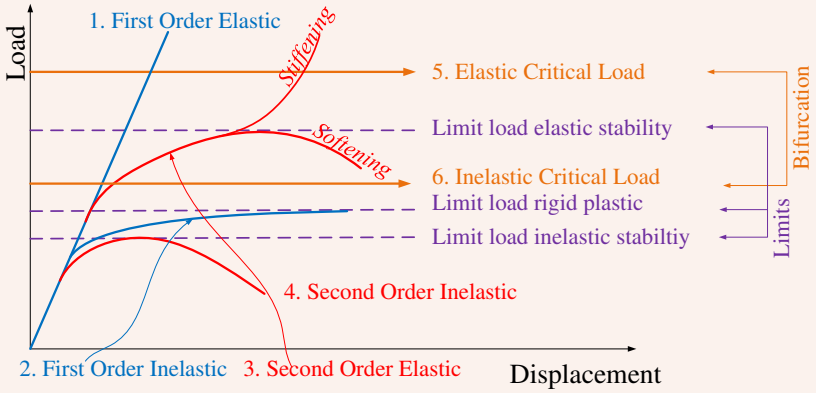


图 60.1: 结构分析 级别

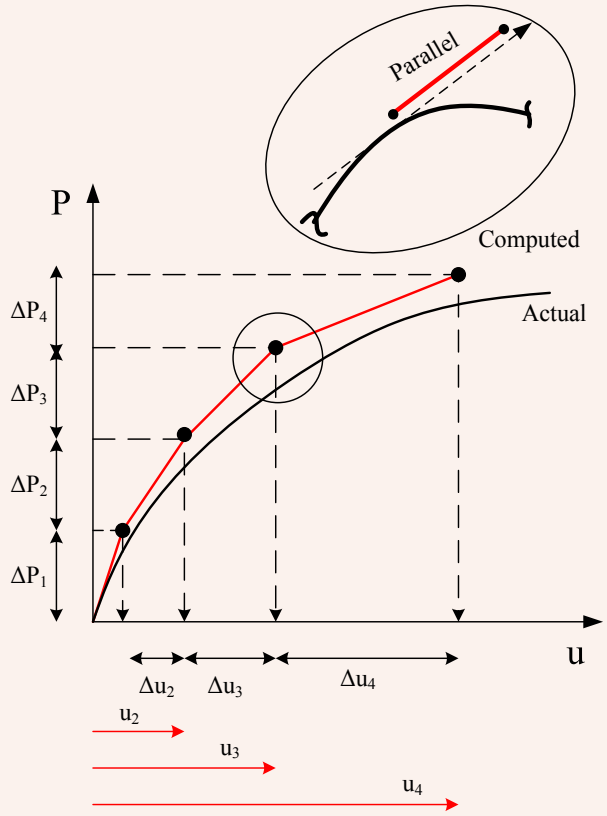


图 60.2: 对几何非线性的明确增进方法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 應用增長 荷载 ΔP_i 每次增幅 i.
2. 每次增加结束时:
   (a) 更新全 位移 $u_i = u_{i-1} + \Delta u_i$.
   (b) 更新地质学 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta \mathbf{u}_i$ 得到新的长度。
   (c) 更新 变换矩阵。
   (d) 更新灵活和地质 刚度矩阵
3. 请注意, 我们在每次增量结束时不检查 平衡 (更多关于此后) 如果我们采取足够小的步骤, 解决方案不应该太差异。
4. 地质学的更新也应照顾 $P-\Delta$ 效果。

26 请记住, 这是一个增加分析, 每个分析都与荷载的增加有关。每個增長的数字:

$$\begin{array}{rll} \text{Displacements} & \Delta \mathbf{u}^i; & \mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \\ \text{Nodal coordinates} & & \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \\ \text{Internal forces} & \Delta \mathbf{F}^i; & \mathbf{F}^i = \mathbf{F}^{i-1} + \Delta \mathbf{F}^i \\ \text{Total Reactions} & \Delta \mathbf{R}^i; & \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-1} + \Delta \mathbf{R}^i \end{array}$$

每次增加的开始, 我们都需要重新计算:

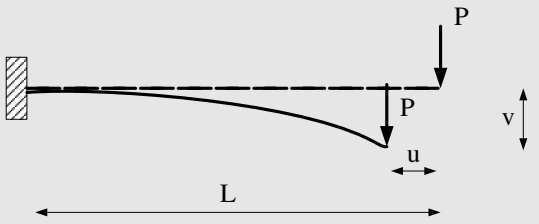
- 长度、方向同位素、变换矩阵。
- 元素密度矩阵基于更新的节点坐标和转型矩阵。
- 基于更新总值 轴力 的地质 刚度矩阵 (从 单元 内部力量) 每個 单元.

使用 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}_g$ 要计算内部力量。

60.2.1 例题 60.5: Cantilever Beam 的大漏洞

对大分裂的解决方案不能从基本分裂理论中获取, 因为基本假设不再有效。具体而言, 基本理论忽略了曲线公式中的第一个衍生品的四分之一, 并且没有为瞬间手臂的缩短提供任何纠正, 因为泡沫漏洞的负载结尾。对于大型终端负载, 它会给出更长的梁的长度! 第一批衍生和纠正因素的四分之一, 即时手臂缩短成为解决大型挠度问题的主要贡献。解析解 是由 §29.2.3, 我们在此寻找一个数值解决方案。我们承认 $E = 800\ kN/mm^2$, $L = 4{,}000$ mm, $I_z = 1e7\ mm^4$, A=50 mm^2, P 五千克。我们将排序栏分为 5 个成员的平等长度, 并使用增加 10kN 和 x 轴从自由终点走 (左向),. 我们将假设弯曲不会改变梁的长度 (不可扩展). 我们正在寻找自由终端正常化节点转移 (u 和 v) 至于无尺寸的荷载.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。




```
% Load increment
dP=10000;
stepNo=5000000/dP;
% zero the matrices
nodeCoord=zeros(6,2);
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);kg=zeros(6,6,5);Kg=zeros(6,6,5);Gamma=zeros(6,6,5);
P=zeros(1,stepNo);dis_global=zeros(15,stepNo);deltaDis_global=zeros(5,6);
int_forces=zeros(6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
A=50e-6;II=1e7*1e-12;EE=800e9; % convert to meters
% Determine the LM matrix
LM=[
16 17 18 13 14 15;
13 14 15 10 11 12;
10 11 12  7  8  9;
 7  8  9  4  5  6;
 4  5  6  1  2  3];
% Assemble the load vector for the unrestrained node
deltaP=[0 (-1*dP) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Initial elements axial forces
axF=zeros(5,1);
% Initial node coordinates
for node=1:6
  nodeCoord(node,:)=[(node-1)*0.8,0];
end
%% Incremental analysis
for step=1:stepNo
   P(step)=step*dP;
% Call the function stiff_1 to compute the element stiffness matrices and the
    rotation ones.
   for elem=1:5
      i=nodeCoord(elem,:);
      j=nodeCoord(elem+1,:);
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),kg(:,:,elem),Kg(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)]=stiff_1(
    EE,II,A,i,j,axF(elem));
   end
% Assemble augmented stiffness matrix
   Kaug=zeros(18);Kgaug=zeros(18);
%
   for elem=1:5
```

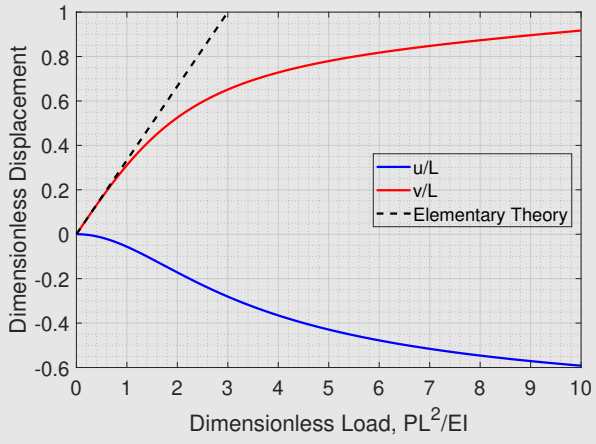

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
      for r=1:6
         lr=abs(LM(elem,r));
         for c=1:6
            lc=abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem);
            Kgaug(lr,lc)=Kgaug(lr,lc)+Kg(r,c,elem);
         end
      end
   end
% Extract the structures Stiffness Matrix
   Ktt=Kaug(1:15,1:15);Kgtt=Kgaug(1:15,1:15);
% Solve for the Displacements in meters
   deltaDis=inv(Ktt+Kgtt)*deltaP';
% Update nodal displacements
   if step==1
      dis_global(:,step)=deltaDis;
   else
      dis_global(:,step)=dis_global(:,step-1)+deltaDis;
   end
% Solve for the internal forces
   deltaDis_global(1,:)=[0,0,0,deltaDis(13:15)'];
   for elem=2:5
      deltaDis_global(elem,:)=[deltaDis((15-(elem-1)*3+1):(15-(elem-2)*3))',
    deltaDis((15-elem*3+1):(15-(elem-1)*3))'];
   end
%
   for elem=1:5
      dis_local=Gamma(:,:,elem)*deltaDis_global(elem,:)';
      deltaInt_forces=(k(:,:,elem)+kg(:,:,elem))*dis_local;
      int_forces(:,elem)=int_forces(:,elem)+deltaInt_forces;
   end
% Update axial forces
   for elem=1:5
      axF(elem)=int_forces(4,elem);
   end
% Update node coordinates
   for node=2:6
      nodeCoord(node,:)=nodeCoord(node,:)+deltaDis((15-3*(node-1)+1):(15-3*(node
    -1)+2))';
   end
end
%
plot(P*4^2/(EE*II),(4+dis_global(1,:))/4);
hold on
plot(P*4^2/(EE*II),(-dis_global(2,:))/4,'r--');
xlabel('Dimensionless Load, PL^2/EI');
ylabel('Dimensionless Displacement');
legend('u/L','v/L');
%+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
function [k,K,kg,Kg,Gamma]=stiff_1(EE,II,A,i,j,P)
% Determine the length
L=sqrt((j(2)-i(2))^2+(j(1)-i(1))^2);
% Compute the angle theta
alpha=atan2(j(2)-i(2),j(1)-i(1));
% form rotation matrix Gamma
Gamma=[cos(alpha) sin(alpha) 0 0 0 0;
-sin(alpha) cos(alpha)  0 0 0 0;
0 0 1 0 0 0;
0 0 0 cos(alpha) sin(alpha) 0;
0 0 0 -sin(alpha) cos(alpha) 0;
0 0 0 0 0 1];
%form stiffness matrix
EI=EE*II;EA=EE*A;
k=[EA/L,          0,          0, -EA/L,           0,          0;
0,     12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2;
0,      6*EI/L^2,     4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,     2*EI/L;
-EA/L,           0,          0,  EA/L,           0,          0;
0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2;
0,    6*EI/L^2,     2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,     4*EI/L];
% Stiffness matrix global
K=Gamma'*k*Gamma;
% Form geometric stiffness matrix
kg=(P/(30*L))*[0, 0,    0,       0, 0,     0;
0, 36,  3*L,     0, -36,  3*L;
0, 3*L, 4*L^2,   0, -3*L, -1*L^2;
0, 0,    0,       0, 0,     0;
0, -36, -3*L,    0, 36,    -3*L;
0, 3*L, -1*L^2, 0, -3*L, 4*L^2];
% Geometric stiffness matrix global
Kg=Gamma'*kg*Gamma;
end
```



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

60.3 $P-\Delta$ 重定向

27 我们必须区分:

$P-\Delta$ 它指的是由一个结构中的轴负载和变形引起的第二命令效应。这种效果是因为在负载下结构的缺陷创造了额外的时刻, 这反过来会导致额外变形。这种效果可能在高或滑板结构中显著, 缺陷相对较大。

$P-\delta$ 它指的是由结构本身的迁移引起的结构的地质非线性。这种效果与结构的硬度随着结构变形而发生变化有关, 这反过来影响了内部力量和压力的分布。在这种情况下, 我们必须使用地质刚度矩阵.

28 如果很多 (终结) 单元 模型一个 柱, 在限制中, 一个人可以忽略 $\mathbf{K}_g$ 最后, 并执行一个 $P-\Delta$ 分析和捕捉相应的 “屈曲 荷载” 需要的, 必然是 $P-\delta$ (因此 $\mathbf{K}_g$) 分析, 图 60.3.

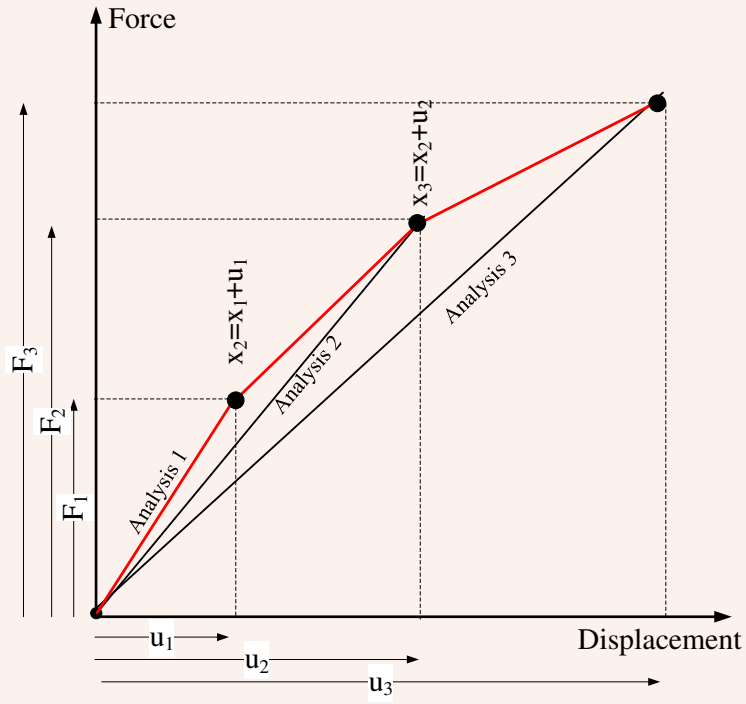


图 60.3: 定义 屈曲 荷载 没有地质 刚度矩阵

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

60.3.1 例题 60.6: 包装负载无 $\mathbf{K}_{geom}$

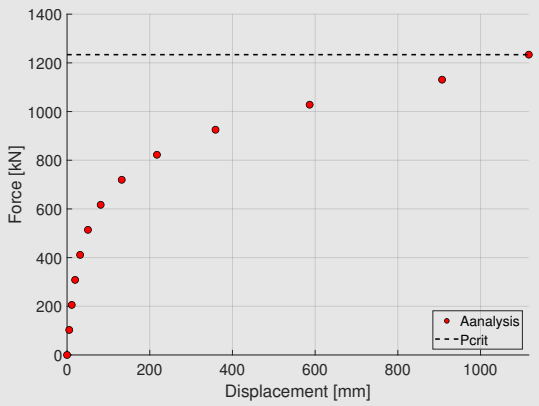
我们正在寻求估计的预订荷载 P_{cr}^{est} 一个柱固定在一个端, 免费在另一个通过执行 10 **序列序列第一命令** 分析 (即不使用 $\mathbf{k}_g$ 只有 $\mathbf{k}_e$). 在每个分析结束时, 我们将调整节点坐标以反映地质学的变化。因此, 分析的荷载 i 想 $P = i.\Delta P$. 我们应该采取 $\Delta P = P_{cr}^{exact}/20$. 每一个分析 i 请注意, 不稳定/屈曲突然发生。

```
%% Initialization for a 5 element strcture
% zero the matrices
k=zeros(6,6,5);K=zeros(6,6,5);Gamma=zeros(6,6,5);
% Structural properties mm^2, mm^4, and kN/mm^2
EE = 800;LL = 4000;II = 1e7;A=50;a=50;
% Number of iternations
nincr = 12;
%% Determine the buckling load analytically
initialdispl = LL/a;
Pcrit = EE*II*pi^2/(2*LL)^2;
  ID = [16 17 18;
        1  2  3;
        4  5  6;
        7  8  9;
        10 11 12;
        13 14 15];
  % elements going from left to right 1 2 3 are at the free end far right
  LM=[16 17 18  1  2  3;
      1  2  3  4  5  6;
      4  5  6  7  8  9;
      7  8  9 10 11 12;
      10 11 12 13 14 15];
  % Initialize matrices for storage
  u = zeros(6,2);
  %% Begin Iteration Analysis
  y=initialdispl;% itintial displacement at fee end
  theta = atan(y/LL);
  %% Goemetry and coordinates
  % Initialize global coordinates in meters
  coord = [0        0;
  LL/5    LL/5*tan(theta);
  2*LL/5  2*LL/5*tan(theta);
  3*LL/5  3*LL/5*tan(theta);
  4*LL/5  4*LL/5*tan(theta);
  LL      LL*tan(theta)];
  deltaP = Pcrit/nincr ;
  Pt(1)=0;delta(1)=0;
for iter=1:nincr
   for elem=1:5
      i=[coord(elem,1),coord(elem,2)];j=[coord(elem+1,1),coord(elem+1,2)];
      [k(:,:,elem),K(:,:,elem),Gamma(:,:,elem)]=stiff(EE,II,A,i,j);
    end
   Kaug=zeros(18);
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
    for elem=1:5
       for r=1:6
          lr=abs(LM(elem,r));
          for c=1:6
            lc=abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc)=Kaug(lr,lc)+K(r,c,elem); % NO kg here +Kg(r,c,elem);
         end
      end
    end
   Ktt = Kaug(1:15,1:15); Pt(iter+1)=iter*deltaP;
   P=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -Pt(iter+1) 0 0 ];
   Displacements = inv(Ktt)*P';
   delta(iter+1)=Displacements(14,1);
   for inode=2:6 % loop from the second node (first is fixed) to the end
      for dof=1:2 % loop for x and y
          coord(inode, dof)=coord(inode,dof)+Displacements(ID(inode,dof),1);
      end
    end
end
%
xx(1)=0;xx(2)=max(delta);yy(1)=Pcrit;yy(2)=yy(1);
scatter(delta,Pt,60,'o','MarkerFaceColor','r','MarkerEdgeColor','k','LineWidth',1);
hold on
plot(xx,yy,'k--','LineWidth',2);grid
legend('Aanalysis','Pcrit','Location','SouthEast');
xlabel('Displacement [mm]');ylabel('Force [kN]');
xlim([0 inf]);
```



我们看到负载转移曲线不同情地接近 P_cr. 这一点是实现的, 而没有引用 $\mathbf{K}_g$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

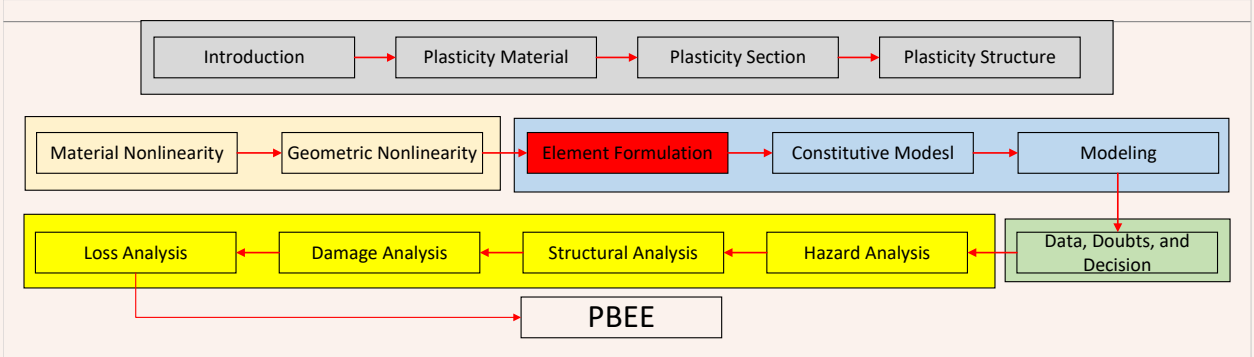
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

61 非线性; 单元表述

摘要

當章節 *50* 在简化线性弹性分析的背景下覆盖了 *1D* 射线弹性射线元素的衍生, 这将为非线性材料分析进行衍生。我们将从简单的特鲁斯元素开始, 然后继续到泡沫列。二种不同的定义将由一个基于传统的固态方法, 另一个基於灵活性一来解决第一部分的一些限制。层或纤维部分 (类似于 *§56.3.2*) 将被处理为那些允许逐步塑造截面。最终, 零长度单元和部分单元将被覆盖。每个元素的衍生将通过三个基本: 兼容性, 宪法法和平衡高峰在茶元素硬度矩阵。最后, 考虑到许多符号, 章节将以详细的分区结束。

61.1 引入 1737
61.2 桁架 单元 1738
61.2.1 协调系统 2D 桁架 单元 . . . 1739
61.2.2 国家决心 1739
61.3 Beam 列元素的定义 1740
61.3.1 基于 Stiffness 的 2D Beam 列元素 1740
61.4 层/纤维部分 1750
61.4.1 灵活性方法 2D beam-column element 1753
61.4.2 精力 *vs.* 基于灵活性 单元 . . 1771
61.5 零长度 2D 单元表述 1775
61.5.1 协调系统在零长度 2D 单元 . 1775
61.5.2 单元 状态定义 1776
61.6 零长度部分 单元 1779
61.6.1 刚度矩阵 1779
61.6.2 协调系统 1780
61.6.3 单元 状态定义 1780
61.7 数值积分 1783
61.8 单元 力量 1783



从博士论文 “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation” 由 Kang, 2010.

61.1 引入

1 章节 50 由 1D 单元 在线弹性分析的背景下产生了 单元 硬度矩阵。不幸的是,QD 的评分 (主要订阅) 未借给非线性分析的通用化, 以及本章题为纤维部分。

2 因此, 我们将从最简单的 单元: 桁架 的硬度矩阵重新衍生。

61.2 桁架 单元

让我们从一个信托元素的简单考虑开始。

刚度矩阵

在经典硬度方法的背景下, 特鲁斯硬度矩阵的衍生是简单的。我們將它重新傳播為 “温柔” 引入新的评分, 你应该熟悉自己。

就像所有最终的单元一样, 刚度矩阵衍生品依赖于三个要求。

1. **变形协调** 流浪和驱逐。

   转移 位移 向量 部分之间的通用关系 $\mathbf{d}_s(x)$ 和 单元 节点 位移 向量 $\overline{\mathbf{d}}_e$ 通过 位移 interpolation 函数表达 (形状功能), $\mathbf{N}_d(x)$ 如

$$\mathbf{d}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} u(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{x}{L}+1 & \frac{x}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{N}_d(x)} \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \overline{u}_{x1} \\ \overline{u}_{x2} \end{array} \right\}}_{\overline{\mathbf{d}}_e} \tag{61.1}$$

   歪曲 转移: 假设转移小, 部分变形 向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ 与 单元 节点相关的 位移 向量 由

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_d(x)} \cdot \overline{\mathbf{d}}_e$$

   哪里 $\mathbf{B}_d(x)$ 是矩阵与位移相关的应变通过衍生品 $\mathbf{N}_d(x)$.

2. **宪法法** 被表达为

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$$

   哪里 $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ 是的, 部分 [1] 强度 向量, 和 $\mathbf{k}_s(x)$ 是的, **部分 刚度矩阵**. 线性弹性分析 $\mathbf{k}_s(x)$ 只是一个平等的尺寸。$\mathbf{k}_s(x) = \left[\begin{array}{c} E(x) \cdot A(x) \end{array} \right]$ 在哪里, $E(x)$ 和 $A(x)$ 是弹性模量和跨部分区域。

3. **平衡** (其弱形状) 通过 虚功原理 (位移). 假设一个力量分布在平衡, 与单元节点力量之间的关系在本地参数向量 $\overline{\mathbf{f}}_e$ 部分变形 向量 源于虚拟 位移 的原则:

$$\underbrace{\delta \overline{\mathbf{d}}_e^T \cdot \overline{\mathbf{f}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^{L_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T . \boldsymbol{\sigma}_s(x) \, \mathrm{d}x}_{\text{Internal}}$$

[1] 部分的概念不必理解 表述 的 桁架 单元 刚度矩阵. 然而, 它被引入是一致的后来的布列表格。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

替代会导致

$$\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e = \int_0^{L_e} \delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \bar{\mathbf{f}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x}_{\bar{\mathbf{k}}_e} \cdot \bar{\mathbf{d}}_e$$

或 $\bar{\mathbf{f}}_e = \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{d}}_e$ 单元 刚度矩阵 在本地参考中是由

$$\bar{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \mathbf{B}_d(x)\, \mathrm{d}x$$

61.2.1 协调系统 2D 桁架 单元

6 元素节点力量和转移是与全球参考,Fig 表达的。61.1 $\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ N_{X2},\ V_{Y2} \rfloor^T$; $\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ u_{X2},\ v_{Y2} \rfloor^T$

7 单元节点力量和转移也可以表达与当地参考有关,

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{N}_{x2} \rfloor^T; \qquad \bar{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{u}_{x2} \rfloor^T$$

8 旋转矩阵将全球参考转化为本地参考, 由 $\boldsymbol{\Gamma}_e$ 这样的那

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e; \qquad \bar{\mathbf{d}}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e; \qquad \mathbf{K}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

在哪里, $\mathbf{K}_e$ 是元素密度矩阵在全球参考中, 旋转矩阵是

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{N}_{x2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N_{X1} & V_{Y1} & N_{X2} & V_{Y2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \end{array}$$

61.2.2 国家决心

9 在热动态中, 材料的现状可以独特地由一个适当选择的组合来定义。**国家变量**也就是说, 我们需要预测系统的未来状态。

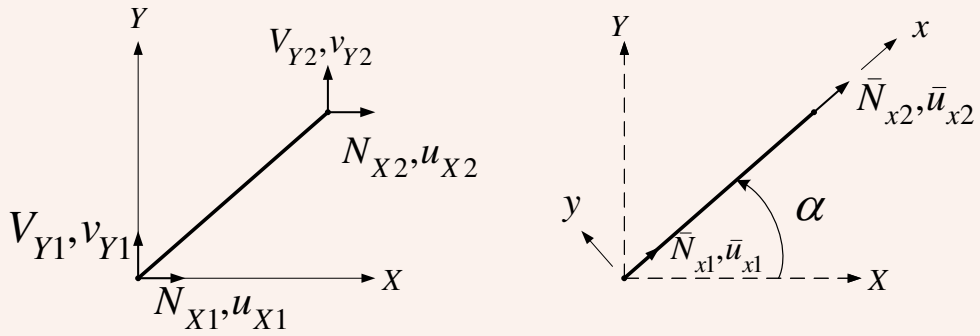
10 在结构分析的背景下, 状态定义是确定一组元素节点转移的过程:

刚度矩阵 直播 (§59.3.1.1) 为了应用纽顿的方法解决非线性系统, 在那里刚度矩阵的坦根与雅各比亚相匹配。(Eq. 59.2).

内部力量 然后确定剩余的力量, 应该几乎相当于零。

需要预测国家 $n+1$ 从国家 n. 将讨论在 §61.3.1.2 和 §61.3.1.4.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

图 61.1: 协调系统 2D 桁架

61.3 Beam 列元素的定义

11 使用纤维元素的非线性框架结构的制定可以通过基于固度的结构实现。(位移基于) 方法或基于灵活性的方法 (基于力量) 方法。在我们的覆盖范围内, 两种方法都将假设变形是小而飞机部分在充电历史期间仍然飞行。

12 基于密度的方法采用位移交叉功能, 沿着单元。这个假设将需要足够的单元来实现准确的答案。另一方面, 基于灵活性的方法将在单元沿线具有强度间隔功能, 而比基于密度的方法需要少数单元才能达到相同的准确度。

13 但是, 单元表述在基于灵活性的方法中 (章节 25) 它比基于坚固的方法更复杂, 因为要求以 iteration 方法获得 ε 物质构成模型通常作为功能提供 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, 适合基于固态的方法 (Lee and Mosalam, 2004).

14 此外, 基于固度的方法中的单元表述更简单, 并且在常规的有限元法中广泛使用。在这项研究中, 基于固度和灵活性的方法将用来制定与伯诺利梁理论的分布非线型模型。

15 单元 将由位于 数值积分 点的多个交叉部分, 特别是 Gauss-Legendre 基于密度的方法四方规则或 Gauss - Lobatto 基於灵活性方法四方法则的集成点。此外, 每个部分将有适当的层/纤维数量, 其中每一个在应力的单轴状态下。

61.3.1 基于 Stiffness 的 2D Beam 列元素

16 基于密度的方法假设, 轴转移是由线性聚合物交换功能描述的, 而跨转移则是由圆形聚合体交换函数模型。基于密度的 2D be 列元素制成由三个主要要求组成:

变形协调

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

位移 部分转移是通过形状功能从单元节点转移确定。部分 位移 向量 之间的普遍关系 $\mathbf{d}_s(x)$ 和 单元 节点 位移 向量 $\overline{\mathbf{d}}_e$ 可以表达为

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(x) &= \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ v(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{N}_d(x) \cdot \underbrace{\lfloor\, u_{x1}^{(e)},\ v_{y1}^{(e)},\ \theta_{z1}^{(e)},\ u_{x2}^{(e)},\ v_{y2}^{(e)},\ \theta_{z2}^{(e)} \,\rfloor^T}_{\overline{\mathbf{d}}_e}\end{aligned}$$

哪里 $\mathbf{N}_d(x)$ 是 矩阵 的 位移 交叉功能。

$\mathbf{N}_d(x)$ 是矩阵的线性间隔功能为轴转移和圆形间隔函数为跨转移:

$$\mathbf{N}_d(x) = \left[\begin{array}{cccccc} \psi_1(x) & 0 & 0 & \psi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \phi_2(x) & 0 & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{array} \right]$$

与

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -\tfrac{x}{L_e} + 1 & \qquad \psi_2(x) &= \tfrac{x}{L_e} \\ \phi_1(x) &= 2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} - 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} + 1 & \qquad \phi_2(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - 2\tfrac{x^2}{L_e} + x \\ \phi_3(x) &= -2\tfrac{x^3}{{L_e}^3} + 3\tfrac{x^2}{{L_e}^2} & \qquad \phi_4(x) &= \tfrac{x^3}{{L_e}^2} - \tfrac{x^2}{L_e} \end{aligned}$$

歪曲 假设移动是小而飞机部分仍然平面, 部分变形向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ 与 单元 节点相关的位移 向量 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\} \\ &= \mathbf{B}_d(x) \cdot \overline{\mathbf{d}}_e\end{aligned} \tag{61.2}$$

哪里 $\mathbf{B}_d(x)$ 矩阵 是由 位移 交叉功能衍生。

$$\mathbf{B}_d(x) = \left[\begin{array}{cccccc} \psi_1'(x) & 0 & 0 & \psi_2'(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & 0 & \phi_3''(x) & \phi_4''(x) \end{array} \right]$$

与

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) &= -\tfrac{1}{L_e} & \qquad \psi_2'(x) &= \tfrac{1}{L_e} \\ \phi_1''(x) &= \tfrac{12x}{{L_e}^3} - \tfrac{6}{{L_e}^2} & \qquad \phi_2''(x) &= \tfrac{6x}{{L_e}^2} - \tfrac{4}{L_e} \\ \phi_3''(x) &= -\tfrac{12x}{{L_e}^3} + \tfrac{6}{{L_e}^2} & \qquad \phi_4''(x) &= \tfrac{6x}{{L_e}^2} - \tfrac{2}{L_e} \end{aligned}$$

宪法法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

宪法条款如:

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\, \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \tag{61.3}$$

哪里 $\boldsymbol{\sigma}_s(x)$ 是部分力量 向量, 和 $\mathbf{k}_s(x)$ 是刚度矩阵的部分。

If $\mathbf{k}_s(x)$ 不是由 截面 的层/纤维分辨而产生的, 然后为线性弹性分析 $\mathbf{k}_s(x)$ 只是等于

$$\mathbf{k}_s(x) = \left[\begin{array}{cc} E(x) \cdot A(x) & 0 \\ 0 & E(x) \cdot I_z(x) \end{array} \right] \tag{61.4}$$

在哪里, $E(x)$, $A(x)$, 和 $I_z(x)$ 是 弹性模量, 部分区域, 和 惯性矩在部分区域。

平衡

假设一个力量分布在平衡, 与单元节点力量之间的关系在本地参数向量 $\bar{\mathbf{f}}_e$ 部分变形 向量 源于虚拟 位移 的原则:

$$\underbrace{\delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^L \delta\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x)\, \mathrm{d}x}_{\text{Internal}} \tag{61.5}$$

这是一个弱的形式平衡. 替代 EQ。61.2 和 EQ。61.3 在 EQ。61.5 因为后者必须以任何自愿的 $\delta\bar{\mathbf{d}}_e$ 引导到

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_e &= \int_0^L \delta\bar{\mathbf{d}}_e^T \cdot \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \varepsilon_s(x) x \\ \bar{\mathbf{f}}_e &= \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \bar{\mathbf{d}}_e \qquad (61.6) \\ \bar{\mathbf{k}}_e &= \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \mathbf{k}_s(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x)\, \mathrm{d}x \qquad (61.7) \end{aligned}$$

哪里 $\bar{\mathbf{k}}_e$ 是 单元 刚度矩阵 在本地参考。

61.3.1.1 基于密度的 2D 射线列与伯诺利射线理论的协调系统

[17] 元素节点力量和转移是与全球参考,Fig 表达的。61.2(a) as: 单元 节点强度 向量 在全球参考

$$\mathbf{F}_e = \lfloor N_{X1},\ V_{Y1},\ M_{Z1},\ N_{X2},\ V_{Y2},\ M_{Z2} \rfloor^T$$

单元 节点 位移 向量 在全球参考

$$\boldsymbol{\delta}_e = \lfloor u_{X1},\ v_{Y1},\ \theta_{Z1},\ u_{X2},\ v_{Y2},\ \theta_{Z2} \rfloor^T$$

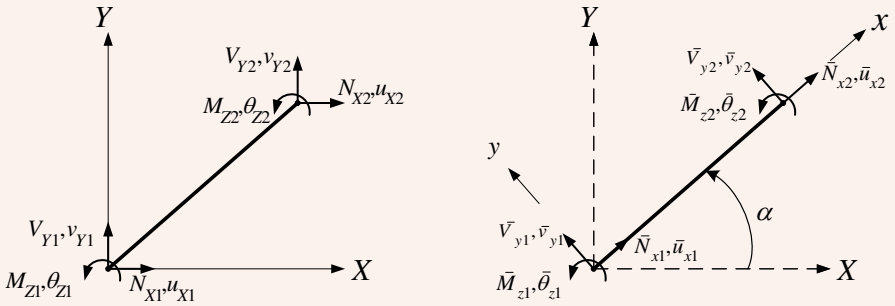
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

18 此外, 元素节点力量和元素的转移可以根据图表所示的本地参考表达。61.2(b): 单元 节点强度 向量 在本

$$\bar{\mathbf{f}}_e = \lfloor \overline{N}_{x1},\ \overline{V}_{y1},\ \overline{M}_{z1},\ \overline{N}_{x2},\ \overline{V}_{y2},\ \overline{M}_{z2} \rfloor^T$$

单元 节点 位移 向量 在本地参考

$$\bar{\mathbf{d}}_e = \lfloor \overline{u}_{x1},\ \overline{v}_{y1},\ \overline{\theta}_{z1},\ \overline{u}_{x2},\ \overline{v}_{y2},\ \overline{\theta}_{z2} \rfloor^T$$



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

图 61.2: 内部力量和相应的移动在全球和局部坐标系为基于密度的 2D 梁-柱 单元

19 转角 矩阵 将全球参考转化为 图 61.2(a) 到本地参考 图 61.2(b) 被授予 $\boldsymbol{\Gamma}_e$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \mathbf{F}_e \\ \bar{\mathbf{d}}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \boldsymbol{\delta}_e \\ \mathbf{K}_e &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_e \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e \end{aligned} \tag{61.8}$$

在哪里, $\mathbf{K}_e$ 是全球参考中的元素密度矩阵。

20 转角 矩阵 已定义。

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

61.3.1.2 国家决心

21 在非线性结构分析中, 每个步骤的节点强度向量相当于结构的额外外节点力量向量. 由增量外部节点力向量求得结构相应的增量节点位移向量，再为各单元提取其节点位移向量。单元 nodal 位移 vectors 用于确定内部部分强度 vectors。

22 向量 与 单元 节点 位移 vector 相匹配的内部节点强度的确定过程被称为状态定义。状态定义过程由三阶段组成, 如图中所示。61.3a:

部分国家决策 内部部分强度 vectors 由每个元素节点转移 vector,Fig 所定义的部分变形 vectors 计算。61.3a(c)

单元 状态定义 各元素的元素密度矩阵和内部元素节点强度 vectors 由每个元素内部部分强度 vectors 确定, 这些元素因其而计算为元素部分变形 vectors(Fig)。61.3a(b).

结构国家决策 每个 单元 的 单元 坦根密度矩阵和内部 单元 强度 vectors 聚集在一起, 形成增强坦根 刚度矩阵。$\mathbf{K}_S^{tan}$ 和内部节点力量 向量 $\mathbf{P}_S^{int}$ ($\mathbf{P}_S^{int} = \mathbf{P}_t^{int} + \mathbf{P}_u^{int}$) 由结构, 图 61.3a(a). 哪里, 签名 t 意思是, 在那里的力量被认识和签名 u 已知或零的转移。签名 t 和 u 它在 SEC 中被描述。59.

23 一旦结构状态确定完成, 内部节点力量向量 ($\mathbf{P}_{t,n}^{int}$) 是 比较 使用的外部节点强度 向量 ($\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$) 和 The 差异 ($\mathbf{P}_{t,n}^{R}$), 是剩余的节点力量向量 , 然后重新应用到结构 以色列的立法解决方案, 直到合并 (平衡) 满意, 桌子 61.1.

表 61.1: 多层国家决策

水平	内部力量	刚度矩阵 直播	“位移”
Section	$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \mathbf{k}_s(x)\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$	$\mathbf{k}_s(x) = \begin{bmatrix} E(x)A(x) & 0 \\ 0 & E(x)I_z(x) \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_d(x)\bar{\mathbf{d}}_e$
单元 地点	$\bar{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_{d,e}(x)^T \boldsymbol{\sigma}_{s,e}^{int}(x)\mathrm{d}x$	$\bar{\mathbf{k}}_e = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_d(x)^T \mathbf{k}_s(x) \mathbf{B}_d(x)\mathrm{d}x$	$\boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{\Gamma}_e^t \cdot \bar{\mathbf{d}}_e$
单元 全球	$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e^T \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \boldsymbol{\Gamma}_e$	$\boldsymbol{\delta}_e$
结构	$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \Sigma_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$	$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \Sigma_e \mathcal{A}_{b,e}^T \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \mathcal{A}_{b,e}$	$\boldsymbol{\delta}_e$

$\mathcal{A}_{b,e}^T$ 是武力集合运营商, 以及 $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ 四个字符串, $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$, 和 $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$

24 状态定义程序对基于密度的 2D be 列元素是简单的。部分变形向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)$ 由 单元 节点 位移 向量 定义 $\bar{\mathbf{d}}_e$ 正如式中所示。61.3. 相应部分的坦根密度矩阵 $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ 和内部部分力量向量 $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ 根据《宪法》的规定。单元 坦根硬度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$ 它是从 eq 获得的。61.7, 而内部单元节点强度向量 $\bar{\mathbf{f}}_e^{int}$ 基于虚拟位移的原则:

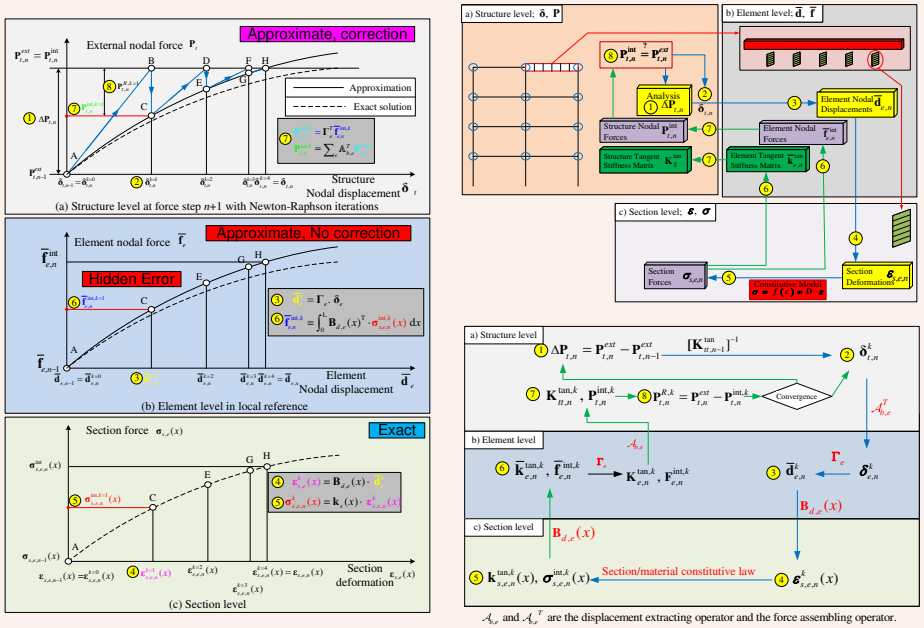
$$\bar{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_0^L \mathbf{B}_d(x)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)\mathrm{d}x \tag{61.9}$$

25 值得注意的是, 这种方法在非线性情况下导致错误的单元反应。这个问题是由 图 描述的

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

61.3a 显示结构的进化, 单元和部分状态在一个增加的外部力量向量在免费的自由度 $\Delta\mathbf{P}_{t,n}$ 需要多种 iterations k (Spacone, Ciampi, and Filippou, 1992). 哪里, 签名 n 或 $n-1$ 是当前或以前的外部力量步骤, 超级 k 是 k^{th} 标签和订阅 t 意思是, 在哪里有力量。

26 Newton-Raphson 引用方法在全球 自由度 中使用。在每一个纽顿 - 拉夫森字符串中, 在结构层面上确定了增加节点转移 vector, 并为每个元素提取了元素节点迁移 vectors。



(a) (b)

图 61.3: 国家定义基于固态的方法

27 在 k^{th} 在牛顿—拉夫逊迭代中，局部坐标系下的单元节点位移向量 $\bar{\mathbf{d}}_{e,n}$ 以 位移 向量 的节点 $\mathbf{u}^k_{S,n}$ ($\mathbf{u}^k_{S,n} = \mathbf{u}^k_{t,n} + \mathbf{u}^k_{u,n}$) 每个 单元 的结构级别为 自由度。哪里, 签名 u 表示已知或零的转移。

28 使用 EQ。61.3 部分变形 vector $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,n}(x)$ 每個 单元 的計算。这是单元状态定义的第一个接近, 因为 $\mathbf{B}_d(x)$ 它仅在一个偏见成员的线性弹性案例中是准确的。

29 假设部分宪法法是明确的, 该部分坦格密度矩阵 $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,n}(x)$ 和内部部分力量 vectors $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,n}(x)$ 易于计算的 $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,n}(x)$. 然后, 使用 Eq。61.7 和 EQ。61.9 单元 固定性矩阵在本地参考中 $\bar{\mathbf{k}}^k_{e,n}$ 和内部单元节点强度 vectors 在本地参考 $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ 是决定的。

30 因为 $\mathbf{B}_d(x)$ 只有接近, 在本地参考中对元素坦格密度矩阵的两个组成部分以及本地参数中的内部元素节点强度 vector 都产生了接近结果。接近的 $\mathbf{B}_d(x)$ 导致在 图 中显示的解决方案 61.3b (a) 和 (b). 请注意, 曲线标记为 “准确的解决方案” 只有在部分宪法的假设和问题的动态接近, 如假设变形是小而飞机部分在充电历史期间保持平面。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

31 要克服从接近的 数值 错误 $\mathbf{B}_d(x)$ 分析师们利用细微的结构, 特别是在框架地区, 这些区域遭受高度非线性行为, 如成员的结尾。然而, 数值 convergence 问题仍然存在。这就是为什么基于灵活性的单元会带来更好的结果。

请注意，本节包含必须在下一节之前排出的浮动对象（插图和/或表格），因此此处可能出现空白或间隙。

61.3.1.3 “隐藏” 错误

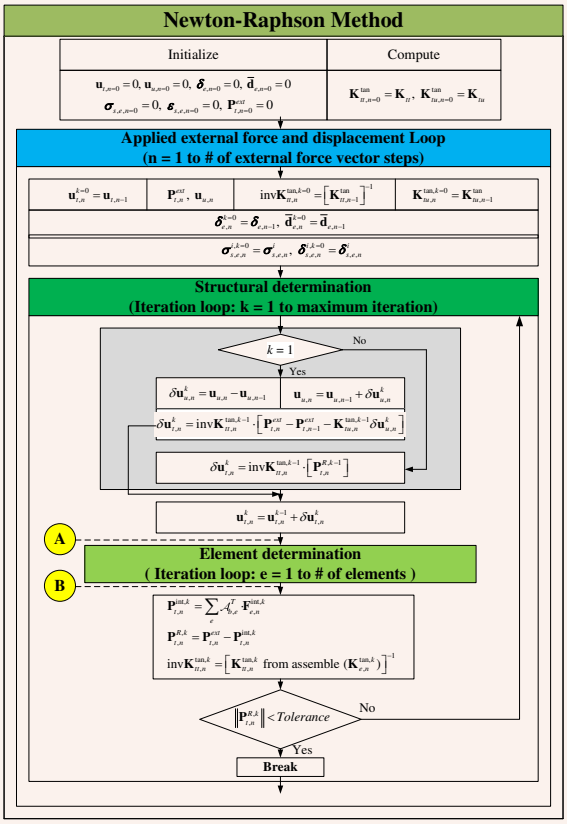
32 a “隐藏的错误” 我們的解决方案。注意到, 纽顿-拉夫森的调节方法在 全球协调 (结构级别) 系统, 图 61.3a, 错误是通过以下解释:

- 在 k^{th} 伊特拉: $\bar{\mathbf{d}}_{e,n} \rightarrow \mathbf{d}_{s,n}(x)$ (部分转移从单元节点转移在本地参考,Eq。61.1) (③).
- 每个部分: $\mathbf{d}_{s,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x)$ (单元 转移 Eq 的部分变形, 61.2) (④) 因为 $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ 它仅在线性弹性情况下是准确的。
- 假设《宪法条款》明确已知, $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}(x)$ Eq. 61.4 (刚度矩阵 从部分变形); $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}(x) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ (由截面变形求得截面内力向量，见式 61.3 (⑤).
- 单元 硬度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ 地点参考 (Eq. 61.7) 和内部单元节点强度 vectors 在本地参考 $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (Eq. 61.6) 决定下一个 (⑥).
- 在全球硬度矩阵的组合期间, 结构的坦根硬度模型和内节力量的 vector 被确定 (⑦), 在剩余的计算之前 (⑧) 为了 convergence。
- 因为 $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ 只有近距离, 然后 单元 硬度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^{k}_{e,n}$ (Eq. 61.7) 和内部 单元 节点强度 vectors $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ (Eq. 61.6) 它也接近了。

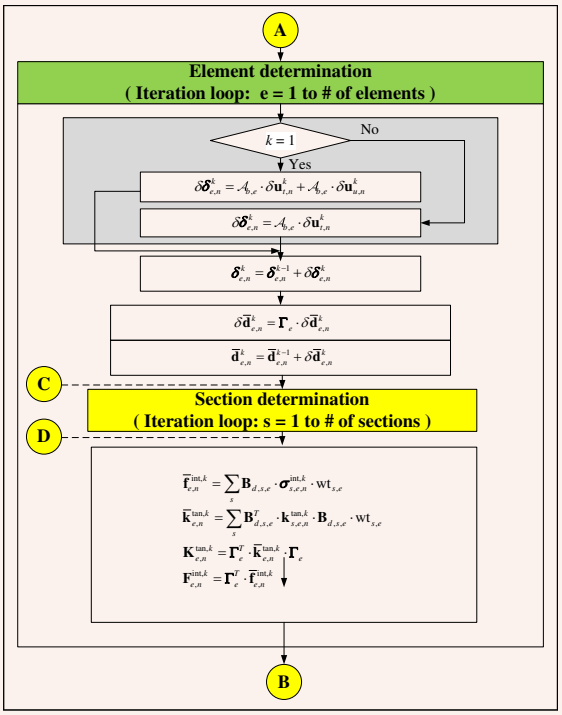
33 接近的 $\mathbf{B}_{d,e}(x)$ 导致解决方案。请注意, 曲线标记为 “准确的解决方案” 只有在宪法条款的假设和动态接近中, 是准确的, 变形小而平面部分仍然平面。

34 要解决这个问题, 我们可以) 使用更精致的 MESH 差异化 结构, 特别是在框架地区, 受高度非线性行为的行为, 如成员端; 或 b) 使用 基于灵活性 单元 下面提到。

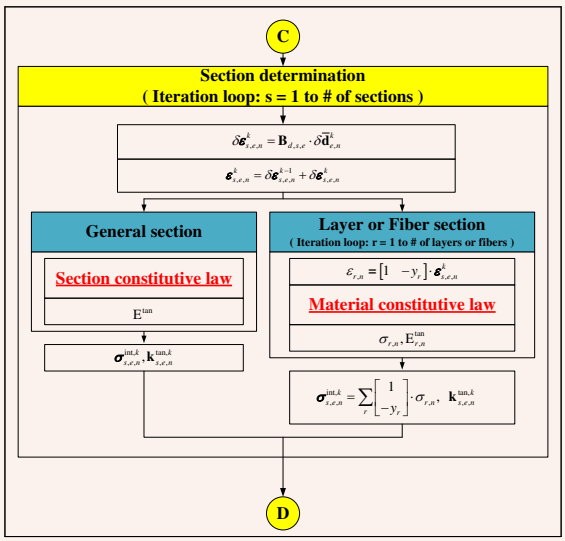
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a)



(b)



(c)

图 61.4: 非线性分析的流图使用基于固态的方法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

61.3.1.4 非线性分析 使用基于固态的方法

35 与图的参考 61.4a, 图 61.4b, 和 图 61.4c, 我们将探讨纽顿 - 拉夫森的单一步, 用于非线性分析, 使用基于硬度的方法与部分宪法法律由于强力和驱逐控制。强度和位移控制在 Sec 中讨论。59. 纤维或层部分程序在 图 61.4c 将被列入 Sec。61.4.

步骤 1: 接收增量节点 位移 $\delta \mathbf{u}_{t,n}$ 和总节点 位移 $\mathbf{u}_{t,n}$ 在结构层面。起初, iteration 从 Eq 开始。61.10 和 $k = 1$.

If $k = 1$,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^{k}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\ \mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta \mathbf{u}^{k}_{u,n} \\ \delta \mathbf{u}^{k}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k-1}_{tt,n}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1} - \mathbf{K}^{tan,k-1}_{tu,n} \delta \mathbf{u}^{k}_{u,n}] \\ \mathbf{u}^{k}_{t,n} &= \mathbf{u}^{k-1}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k}_{t,n} \end{aligned} \tag{61.10}$$

否则, 我们使用的 iteration

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} &= \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{int,k}_{t,n} \\ \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= [\mathbf{K}^{tan,k}_{tt,n}]^{-1} \cdot \mathbf{P}^{R,k}_{t,n} \\ \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} = \mathbf{u}^{k}_{t,n} + \delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n} \end{aligned} \tag{61.11}$$

在哪里, 超级 k 是以色列的反对者, $\mathbf{P}^{R}_{t}$ 其余的节点力量向量在结构层面, $\Delta \mathbf{u}^{k+1}_{t,n}$ 从最后一步转换的总额转移向量, 以及 $\delta \mathbf{u}^{k+1}_{n}$ 最后一个增进转移向量。

在 EQ。61.10, 需要描述解释强度/位移控制和增加的刚度矩阵 $\mathbf{K}_S$ 与 $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$, 和 $\mathbf{K}_{uu}$ 在细节中。它在 SEC 中显示。44.2. 在那里, 增加的 刚度矩阵 分为两个组, 有相应的字幕 'u "在哪里被驱逐出境已知或零, 并且" t "在那里, 力量是已知的。

步骤 2: 跳过所有 单元 并确定其状态。

步骤 3: 确定 单元 节点 位移 向量。

If $k = 1$,

$$\delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^{k}_{t,n} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^{k}_{u,n}$$

否则, 我们使用的 iteration

$$\delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}^{k}_{t,n}$$

在哪里, $\mathbf{A}_{b,e}$ 是 位移 提取运营商。

$$\boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} = \boldsymbol{\delta}^{k-1}_{e,n} + \delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n}$$

在哪里, $\boldsymbol{\delta}^{0}_{e,n}$ 相应的 $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.

$$\begin{aligned} \delta \overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e} \cdot \delta \boldsymbol{\delta}^{k}_{e,n} \\ \overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} &= \overline{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta \overline{\mathbf{d}}^{k}_{e,n} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里, $\bar{\mathbf{d}}^{0}_{e,n}$ 相应的 $\bar{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

步骤 4: 通过旋转单元的部分来启动部分状态定义。部分的总数可能从 单元 到 单元. 因此, 在 单元 中, 部分的总数是 nIp_e. 它取决于加斯传奇四角规则的整合点数量。

步骤 5: 确定部分变形 向量。对于部分状态的确定, 我们首先需要将部分分为一般部分和纤维部分, 如 Sec 中所描述。61.4. 在这里, 我们只考虑一般部分。每个部分的状态定义在路径中进行 i. i 意思 i^{th} 部分。

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \delta\bar{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$$

在哪里, $\mathbf{B}^{i}_{d,e}$ 是 矩阵 从 位移 交叉功能中产生的 i^{th} 部分在 e^{th} 单元.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$$

在哪里, $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,0}_{s,e,n}$ 相应的 $\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{s,e,n-1}$.

步骤 6: 确定部分坦根 刚度矩阵 和内部部分力量 向量. 如果我们假设宪法条款是明确的, $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}$ 被定义为 $\boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n}$. 但是, 在弹性部分, 我们不需要计算 $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ 再次, 因为它与初始部分相同 刚度矩阵 $\mathbf{k}^{i}_{s,e}$.

如果我们有弹性部分,

$$\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{i}_{s,e} \tag{61.12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n} = \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{i,k}_{s,e,n} \tag{61.13}$$

在哪里, $\mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n}$ 是部分坦根 刚度矩阵 在 k^{th} 伊特拉。

步骤 7: 确定内部 单元 节点强度 向量 和 单元 坦根 刚度矩阵. 来自 EQ。61.9 和 EQ。61.7 我们决定 $\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$ 和 $\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$.

$$\bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{int,i,k}_{s,e,n}\, \mathrm{wt}^{i}_{e}$$

在哪里, wt^{i}_{e} 重量因子与雅各比因子相结合 i^{th} 部分的 e^{th} 单元.

$$\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = \sum_{(i,e)} {\mathbf{B}^{i}_{d,e}}^{T} \cdot \mathbf{k}^{tan,i,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{B}^{i}_{d,e} \cdot \mathrm{wt}^{i}_{e} \tag{61.14}$$

在哪里, $\bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ 是 单元 坦根在本地参考中的 刚度矩阵。

来自 EQ。61.8 我们决定 $\mathbf{F}^{int,k}_{e,n}$ 和 $\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n}$.

$$\mathbf{F}^{int,k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}^{T}_{e} \cdot \bar{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

$$\mathbf{K}^{tan,k}_{e,n} = \boldsymbol{\Gamma}^{T}_{e} \cdot \bar{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{e}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

步骤 8: 确定内部节点强度 向量 和增强坦根 刚度矩阵.

$$\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^{T} \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} = \sum_{(e)} \mathbf{A}_{b,e}{}^{T} \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathbf{A}_{b,e}$$

在哪里, $\mathbf{A}_{b,e}{}^{T}$ 是强制集会运营商, 以及 $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ 它是由 $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$, 和 $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

步骤 9: 计算剩余的节点力量 向量 在结构级别从 Eq。61.11. 接下来, 我们满足了与剩余的节点力量向量相匹配。

查看接近:

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ 在所指定的宽容范围内, 走到下一个强度增加。
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ 它不符合所规定的宽容。k 已更新到 $k+1$ 下一篇: 纽顿 • 拉夫森的重定向以克。61.11 在 **步骤 1** 通过 **步骤 9** 重复, 直到结构层面发生相匹配。

61.4 层/纤维部分

36 到目前为止, 我们已经假设一个部分是由时刻曲率关系的特点, 即当时刻达到塑料 / 黄色时刻, 全部分 塑料。但是, 这只是一个 接近正如事实上, 有一个 逐步塑料化 从外部纤维开始, 这种塑造区域逐渐蔓延到内部, 直到整个部分最终变成塑料。

37 因此, 基于 塑性 的最佳模型 (钢材 或 钢筋混凝土 单元) 是基于层/纤维部分的 (§56.3.2) 因为它可以捕获截面的逐步塑化。在层/纤维部分中, 该部分分为长度层/繊維, 如图所示。61.5.

38 层/纤维的地质特征是其在本地位置 y, z 参考系统和层/纤维区域 $A_{ir}(x)$ 在哪里签名 ir 是 ir^{th} 纤维 / Fiber 部分的构成关系不明确说明, 但由层/纤维的反应集成而产生的, 基于特定材料的单轴压力线关系, 图。61.5.

39 层/纤维压力不能从部分的 轴力 和 弯矩 确定, 因为在三或多个未知压力的情况下, 单轴旋转情况中只有两个 平衡 方程式。一个可能的解决方案是采取压力分布在部分内, 但问题是, 然后延迟到层/纤维状态定义阶段的算法, 因为层 / 纤维压力线关系通常被表达为明确的线功能。

40 因此, 层/纤维压力和硬度由层/繊維压力压力关系决定。内部部位强力 vectors $\boldsymbol{\sigma}_s^{int}(x)$ 由层/纤维 应力 分布和部分坦根密度矩阵计算 $\mathbf{k}_s^{tan}(x)$ 它们是由层/纤维坦根的固体组成的。

41 最终目标仍是推导 $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$，使其满足

$$\left\{ \begin{array}{c} N(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\} = \mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{array} \right\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

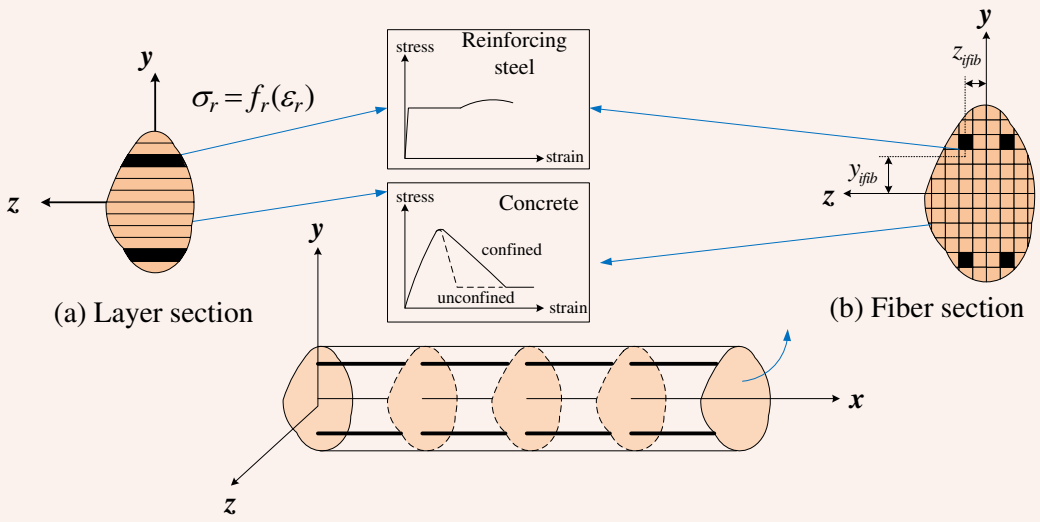


图 61.5: 纤维分区 - 控制部分的分布和分区分为纤维

42 忽略转折的叶形变形, 因此 采用应变线性分布 (Euler-Bernouilli 梁) 但 A **非线性 应力 保持行为**, 应力分布是

$$\sigma_t(x) = \frac{N_x(x)}{A(x)} \pm \frac{M_z(x)}{I_z(x)} y$$

43 此分類上一篇: 图 61.6, 从位移节点, 我们可以确定部分变形 (轴 应变 $\varepsilon(x)$ 和 曲率, $\phi(x)$) (因此, 线性应变分布) 因为我们有一个非线性材料, **中性轴的确切位置尚不清楚**, 而在 每个纤维的高度, 我们都有不同的 $E_r^{tan}(x)$. r 是纤维订阅。

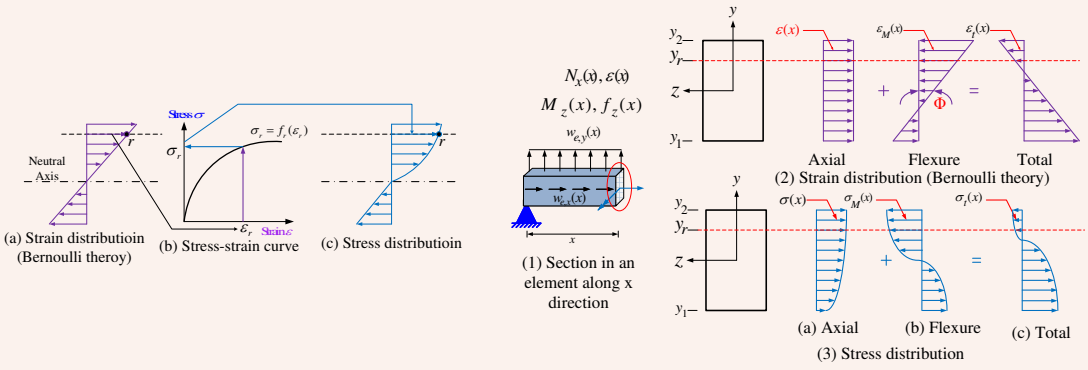


图 61.6: 非线性交叉分区 应力 分布

44 我们知道 ε 和 Φ 必须确定 N 和 M, 将有两组术语: 初级和次要:

首要条款 这些是由于纯的轴和灵活性:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

轴心 由于 $\sigma(x)$ 它只是由

$$N_x(x) = \int_{-y_1}^{y_2} \sigma(x) dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x)}_{\sigma(x)} dA \simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot \varepsilon(x)$$

灵活 由于 $\sigma_M(x)$ 接下来的, 又一次, 我们就把 $(M(x))$ 对于曲率和 $E_r^{tan}(x)$ 并提醒这 $I = \int y^2 dA$ 和 $\sigma_M(x)_{@y_r} = E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y_r$

$$\begin{aligned} M_z(x) &= \int_{-y_1}^{y_2} \sigma_M(x) \cdot y dA = \int_{-y_1}^{y_2} \underbrace{E_r^{tan}(x) \cdot \underbrace{\phi_z(x) \cdot y}_{\varepsilon} \cdot y}_{\sigma} dA \\ &= \phi_z(x) \int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot y^2 dA \\ &\simeq \sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r^2 \cdot \phi_z(x) \end{aligned}$$

二级条款 因为他们是 **混合** 它将导致 非零离线图 在刚度矩阵中使用。请注意, 这在线性弹性分析中取消了。

轴力 因 曲率 因为没有理由, 非线性灵活应力分布必然会产生与零等的力量总结。

$$\begin{aligned} dN_x(x) &= -E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon_M(x) dA = -E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y dA \\ N_x(x) &= -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot \phi_z(x) \cdot y dA \\ &\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r \cdot \phi_z(x) \end{aligned}$$

哪里是应变 $(\varepsilon_M(x))$ 從 曲率 獲得 $(\phi_z(x))$.

瞬间由于轴应变 因为没有理由, 为什么中性轴的位置确实是正确的, 结果是一个相当于零的时刻总结。

$$dM_z(x) = -E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot y \cdot dA \tag{61.15}$$

$$M_z(x) = -\int_{-y_1}^{y_2} E_r^{tan}(x) \cdot \varepsilon(x) \cdot y dA \tag{61.16}$$

$$\simeq -\sum_r E_r^{tan}(x) \cdot A_r(x) \cdot y_r \cdot \varepsilon(x) \tag{61.17}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

45 在 矩阵 中的集成, $\mathbf{k}_{s,e}^{tan}(x)$ 采取形式:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c} N \\ M \end{array}\right\}}_{\sigma_S} = \underbrace{\sum_{ir} \begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \kappa(x) \end{array} \overbrace{\left[\begin{array}{cc} E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x) & -E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir} \\ -E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir} & E_{ir}^{tan}(x)\cdot A_{ir}(x)\cdot y_{ir}^2 \end{array}\right]}^{\begin{array}{cc} N_x(x) & M_z(x) \end{array}}}_{\mathbf{k}_s^{tan,n}} \left\{\begin{array}{c} \varepsilon(x) \\ \phi_z(x) \end{array}\right\} \tag{61.18}$$

61.4.1 灵活性方法 2D beam-column element

46 基于灵活性的 2D 线列元素是 “不符合” 最终元素, 因为它们提供了元素灵活性矩阵而不是经典硬度矩阵, 并且基于平衡的方程式而不是假设的移动领域。然而, 他们提供了一些重要的优点。

47 我們來源的 单元 柔度矩阵 $\tilde{\mathbf{c}}_e$ 没有固体模式, 然后转换它以获得相应的元素硬度矩阵 $\tilde{\mathbf{k}}_e$ 没有固体模式 (§46.4.2). 这特别有趣的是, 在基于密度的方法的定义是接近和基于灵活性方法的定義是准确的例子一个部分沿着单元和单元与材料非线性不同。

48 我们将通过常见的三个主要步骤使用补充虚功的原则。

平衡 我们从平衡方程式的强大形式开始,Fig。61.7:

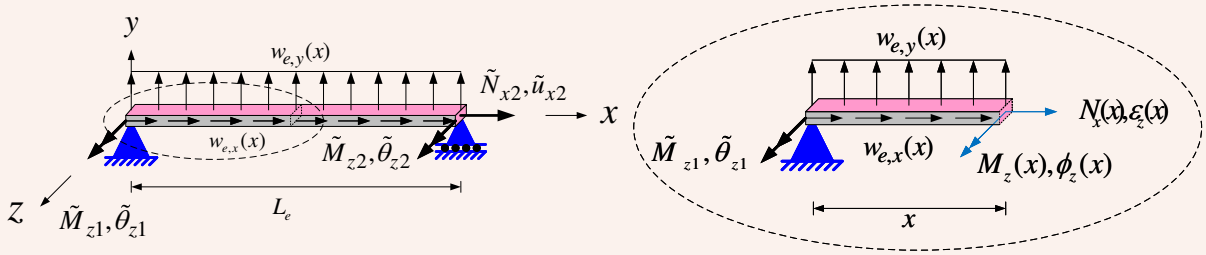


图 61.7: 2D 框架元素没有固体模式

$$\begin{array}{c} \underbrace{\mathbf{w}_e(x)}_{\text{External}} + \underbrace{\mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\sigma}_s(x)}_{\text{Internal}} = \mathbf{0} \\ \left\{\begin{array}{c} w_x^{(e)}(x) \\ w_y^{(e)}(x) \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{cc} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array}\right\} = \mathbf{0} \end{array} \tag{61.19}$$

在哪里, $\mathbf{w}_e(x)$ 是外部 单元 力量 向量 和 $\mathbf{L}_f$ 是力量差异操作员。

首先, 我们假设没有外部 单元 强度 向量, 即 $\mathbf{w}_e(x) = \mathbf{0}$. 选择强力干扰功能, $\mathbf{N}_f(x)$ 结

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

果是要求 平衡, 如在 Eq 中表达。61.19 必须在强烈的形状中满足。因此, 对于 Euler-Bernoulli 梁:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

哪些收益

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_x(x)}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 M_z(x)}{\mathrm{d}x^2} &= 0 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} N_x(x) &= c_3 \\ M_z(x) &= c_1 x + c_2 \end{aligned} \tag{61.20}$$



图 61.8: 签署条约关于部分力量

應用 图 的邊界條件 61.7 与签名条约的部分强度, 图 61.8,

$$\begin{aligned} N_x(L) &= N_{x2} \\ M_z(0) &= -M_{z1} \\ M_z(L) &= M_{z2} \end{aligned}$$

我们得到了:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{M_{z1} + M_{z2}}{L_e} \\ c_2 &= -M_{z1} \\ c_3 &= N_{x2} \end{aligned} \tag{61.21}$$

取代 EQ。61.21 到 eq。61.20,

$$\begin{aligned} N_x(x) &= N_{x2} \\ M_z(x) &= \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) M_{z1} + \frac{x}{L_e} M_{z2} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} N_x(x) \\ M_z(x) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\sigma}_s(x)} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{array} \right]}_{\mathbf{N}_f(x)} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{array} \right\}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e} \tag{61.22}$$

在哪里, $\tilde{\mathbf{f}}_e$ 是单元节点力量向量没有硬体模式。

最后, 从 EQ。61.22, 我们提取了矩阵的强力中断功能。

$$\mathbf{N}_f(x) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{L_e} - 1 & \frac{x}{L_e} & 0 \end{array} \right]$$

宪法法 使用的经典本构关系的逆转在 Eq 中显示的基于硬度的方法。61.5 如今已由:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(x) = \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x) \tag{61.23}$$

在哪里, $\mathbf{c}_s(x)$ 是柔度矩阵的部分。如果 $\mathbf{c}_s(x)$ 它不源于在 Sec 中讨论的纤维部分。61.4, 然后为线性弹性分析 $\mathbf{c}_s(x)$ 是简单的。

$$\mathbf{c}_s(x) = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{E(x) \cdot A(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E(x) \cdot I_z(x)} \end{array} \right]$$

变形协调 我们通过补充虚功的原则在弱形状中获得变形协调的方程式 (与 虚功 相反, 对于基于固态的方法).

$$\underbrace{\delta \tilde{\mathbf{f}}_e{}^T \tilde{\mathbf{d}}_e}_{\text{External}} = \underbrace{\int_0^L \delta \boldsymbol{\sigma}_s(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \mathrm{d}x}_{\text{Internal}} \tag{61.24}$$

在哪里, 以及 $\tilde{\mathbf{d}}_e$ 是元素节点转移 vector, 没有固体模式。

取代 EQ。61.22 和 EQ。61.23 到 eq。61.24 因此, 他必须为任何仲裁。$\delta \tilde{\mathbf{f}}_e$ 我们得到了

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{f}}_e{}^T \tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \delta \tilde{\mathbf{f}}_e{}^T \cdot \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x) \, \mathrm{d}x \\ \tilde{\mathbf{d}}_e &= \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_s(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \mathbf{N}_f(x) \, \mathrm{d}x}_{\tilde{\mathbf{c}}_e} \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\ \tilde{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\mathbf{c}}_e \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \end{aligned} \tag{61.25}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

单元 没有固体模式的 柔度矩阵 在本地参考中, 因此由:

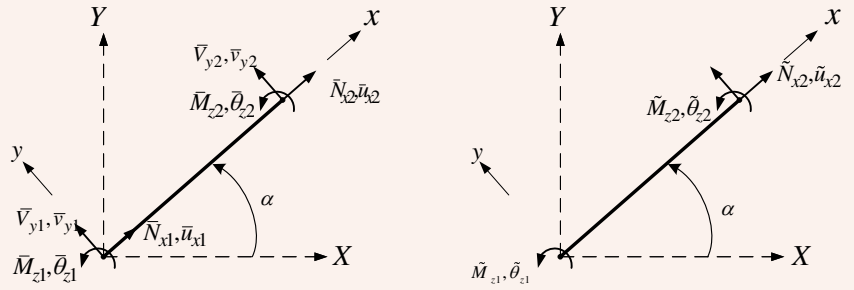
$$\tilde{\mathbf{c}}_e = \int_0^L \mathbf{N}_f(x)^T \cdot \mathbf{c}_s(x) \cdot \mathbf{N}_f(x)\, \mathrm{d}x \tag{61.26}$$

相应的 单元 刚度矩阵 在本地参考中没有固体模式是

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = [\tilde{\mathbf{c}}_e]^{-1}$$

61.4.1.1 以灵活性为基础的 2D 射线列元素与伯诺利射线理论的协调系统

49 与图基于密度的方法的参考系统相反 61.2, 我们需要考虑强度和转移在当地参考与和没有硬体模式的图 61.9.



(a) Local reference in an element

(b) Local reference in an element without rigid body modes

图 61.9: 内部力量和相应的转移在当地协调系统中, 有或没有硬体, 以灵活性为基础的 2D be 列元素

50 单元 节点强度 向量 没有固体模式在本地参考是

$$\tilde{\mathbf{f}}_e = \lfloor \tilde{M}_{z1},\ \tilde{M}_{z2},\ \tilde{N}_{x2} \rfloor^T$$

和元素节点转移 vector 没有固体身体模式在本地参考是由

$$\tilde{\mathbf{d}}_e = \lfloor \tilde{\theta}_{z1},\ \tilde{\theta}_{z2},\ \tilde{u}_{x2} \rfloor^T$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

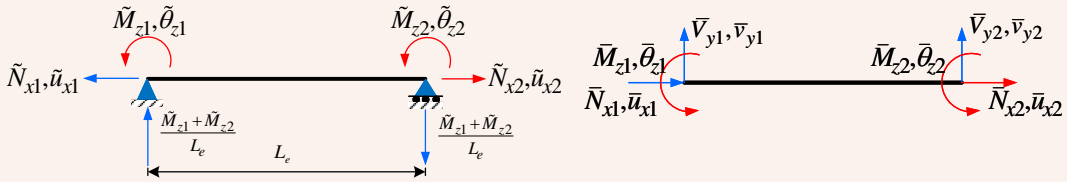


图 61.10: 固体模式与没有固体状态之间的关系

51 硬體模式與沒有硬體狀態之間的關係是通過 平衡 在 图 獲得的。61.10.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{N}_{x1} \\ \bar{V}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{N}_{x2} \\ \bar{V}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{L_e} & \frac{1}{L_e} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_e} & -\frac{1}{L_e} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ N_{x2} \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{f}}_e}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_e \\ \bar{\mathbf{d}}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{d}}_e \\ \mathbf{K}_e &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \end{aligned} \tag{61.27}$$

52 最后, 元素硬度矩阵可以从 Eq 恢复。46.22

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{d}^{-1} & \mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \\ \hline \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1} & \mathcal{B}\mathbf{d}^{-1}\mathcal{B}^T \end{array}\right]$$

哪里 $\mathcal{B}$ 是静态 矩阵 (§46.2.1.2)

61.4.1.2 国家决心

53 研究重点是基于灵活性的方法的好处 Zeris and Mahin, 1988 未能提供一个明确和一致的方法来计算元素变形的内部元素强度 vectors。原因是基于灵活性的单元 (由补充 虚功原理衍生) 它没有形状功能, 与元素内部的变形领域与元件节点转移 vector 相联系, 但 **形状函数与节点力量相关联**.

54 和 全球 表述 基于 坚定性 (位移) 表述 和 单元 基于 A 灵活性 (力量) 表述; 这两者必须和解 (在内部 单元 强度 vector 的确定中).

55 在 单元 水平上, 基于灵活性的 单元 将提供 **必然不兼容与来自附近的单元的节点转移** 正如基于强度的表述一样, 在单元级别上没有相容的力量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

56 我们必须 保留点 位移 变形协调 (同樣的方式, 我們在基於堅固的表達中確保了 nodal 平衡。这一点可以以异常的方式实现。

57 请注意, 在基于坚固的方法中, 在节点力量中存在不停性。

58 有两种算法为 基于密度和灵活性的混合 方法: (a) 与新顿-拉夫森在单元级别的异常, 以确定单元状态 (Spacone, Ciampi, and Filippou, 1992), (b) 没有在 单元 级别的异常, 以确定 单元 状态 (Carol and Murcia, 1989).

61.4.1.2.1 没有单元级别的调节

59 例如, 在非线性结构分析中, 基于密度的 2D be 列的状态确定, 单元 级别的状态定义过程, 以基于密度和灵活性为基础的混合方法, 无调节为基础, 由 3 个阶段组成, 如在 图 中所示。61.11 对于部分, 单元和结构。

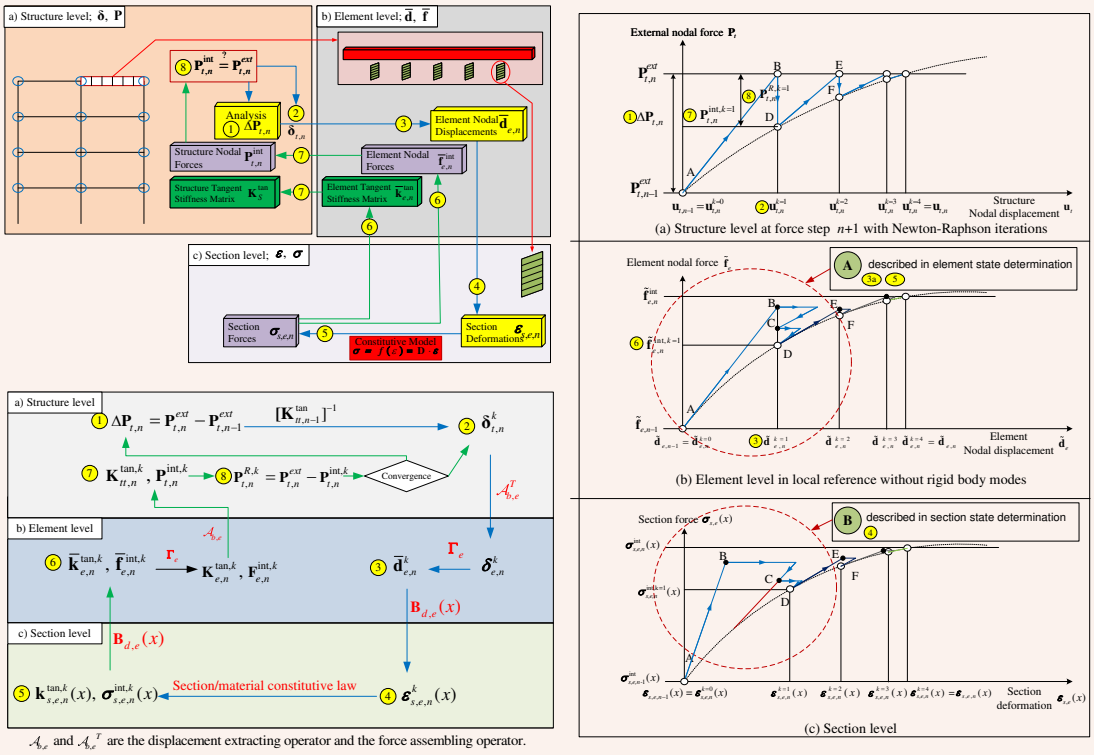


图 61.11: 以灵活性为基础的方法的状态确定, 没有单元字符串

60 一旦结构状态定义完成, 内部节点强度为向量 k^{th} 伊特拉 $\mathbf{P}_{t,n}^{int,k}$ 与应用的外部节点强度相比较 向量 $\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$ 和差异, 如果有, 产生剩余的节点力量向量 $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ 随后在以色列解决方案过程中重新应用到结构, 直到适用的外部强度向量和内部节点强度 vector 的总差异在确定的宽容范围内满足。

61 状态定义程序对于基于灵活性的 2D 射列元素, 没有元素 iteration, 如基于密度的 3D 射

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

柱元素是简单的。单元 节点 位移 向量 $\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}$ 没有固体模式 k^{th} 以 EQ 的定义。61.27, 和单元节点力量向量 $\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}$ 没有固体模式, 由 Eq 决定。61.25

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} \\ \tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^k_{e,n} \\ \tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} &= \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}\end{aligned} \tag{61.28}$$

62 部分强力 vectors 在 k^{th} 伊特拉 $\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)$ 由 单元 节点强度 向量 定义 $\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n}$, 然后部分变形 vectors 在 k^{th} 伊特拉 $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)$ 由部位强度 vector 定义 $\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x)$ 正如 EQ 中所示。61.29.

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) &= \mathbf{N}_{f,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} \\ \boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^{tan,k-1}_{s,e,n}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)\end{aligned} \tag{61.29}$$

63 假设部分宪法法是明确的, 部分坦根灵活性矩阵 $\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$ 和内部部分力量 vectors $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x)$ 易于计算的 $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}(x)$.

64 在这种方法中, 剩余部分强度和变形 vectors 首先由部分灵活性矩阵确定。$\tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\sigma}^k_{s,e,n}(x) - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}(x) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x) &= \tilde{\mathbf{c}}^k_{s,e,n}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}(x)\end{aligned}$$

65 剩余部分变形 vectors 沿着 单元 集成, 使用虚拟力量的原则来获得剩余 单元 节点 位移 向量 。

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n}(x)$$

66 单元 柔度矩阵 没有固体模式 $\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}$ 它是由 eq 定义的。61.26 然后, 剩余的单元节点力量向量确定了剩余单元节点的形状位移 向量.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^k_{e,n}]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} \tag{61.30}$$

67 内部的单元节点力量向量没有硬体模式, 由 Eq 确定。61.28 和 EQ。61.30.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^k_{e,n} - \tilde{\mathbf{f}}^{R,k}_{e,n}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

68 在那里, 内部的单元节点力量向量从 Eq 获得。61.27.

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = [\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e]^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n}$$

69 基于灵活性的 2D 射线列元素, 没有在元素级别中调节, 以确定元素状态是对国家定义程序的简单方法, 与基于柔软性的 3D 射線列元格与新顿-拉福森在元件级别的调节不同。

70 这个元素的定义使用力量交叉函数, 没有任何假设, 不像基于硬度的元素与转移交叉功能。

71 由于强度交叉功能的准确性质, 没有内在的错误存在于基于灵活性的 2D 梁-柱 单元表述没有在单元级进行引用。除此之外, 还有 **没有限制** 到 单元 的尺寸, 如果 单元 沿着长轴保持一致的部分, 因此 (Carol and Murcia, 1989)

61.4.1.2.2 与纽顿-拉夫森在单元级的直径

72 在非线性结构分析中, 与基于密度的 2D 射列的状态定义一样, 基于柔软和基于灵活性的混合方法的状态确定过程与元素级别的纽顿 - 拉夫森字符串组成三个阶段, 如图所示。61.12 对于部分, 单元和结构在哪里, 超级编写 j 在 图 61.12(b) 在 单元 状态定义过程中, 在 单元级的 iteration scheme 表示。这种调节曲线是必要的, 以确定内部单元节点强度向量 $\tilde{\mathbf{f}}^{int,k}_{e}$ 相匹配的单元节点位移 向量 $\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$ 在此期间, k^{th} Newton-Raphson 字符串

73 为了解释这种方法, 纽顿-拉夫森用于结构层次的 iteration 过程。结构层次的调节过程不会影响在单元级的调解过程策略, 这决定了内部单元节点力量向量。$\tilde{\mathbf{f}}^{int}_{e}$ 為所提供的 单元 點位移 向量 $\tilde{\mathbf{d}}_e$.

74 在基于灵活性的 2D 梁-柱 单元中, 第一步是确定单元节点强度向量。$\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$ 从现有元素节点转移 vector 使用元素坦根硬度矩阵 $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j-1}_{e,n}$ 最后一节的结束时, 和力量交叉功能 $\mathbf{N}_{f,e}(x)$ 接下来, 将分区强度 vectors $\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x)$ 在单元中。

75 第一個問題是決定部分變形向量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}(x)$ 从特定部分的力量向量, 因为非线性部分的强度变形关系通常被表达为一个明确的功能的部分变形向量. 第二个问题是由于部分坦根硬度矩阵的变化。$\mathbf{k}^{tan}_{s,e,n}(x)$ 产生一个新的元素紧密的硬度矩阵, 这反过来改变了元素节点强度向量 为该元素的节点转移向量。

76 这些问题是通过一个特殊的非线性解决方法解决的。在此方法中, 剩余元素 节点位移向量 $\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j}_{e,n}$ 它在每一个迭代 中都被定义。结构层次的转移兼容性需要修复该残留元素节点转移向量。这一点在元素级别上实现, 通过基于现有元素坦根密度矩阵的修正元素节点强度向量 应用。

77 相应的部分力量 vectors 由强度交叉功能确定, 以便平衡始终在元素中满足。这些部分强度引导器不能在部分状态定义期间改变, 以保持元素沿着平衡。

78 最后, 部分力量变形关系的线性接近关于剩余部分变形向量 的现状结果 $\boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n}(x)$. 这些将随后整合到元素沿着, 以获得新的残留元素节点转移向量, 整个过程重复, 直到接近发生。

79 重要的是要强调, 元素节点转移 vector 的兼容性和沿着元素的平衡在这个过程中总是满意。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

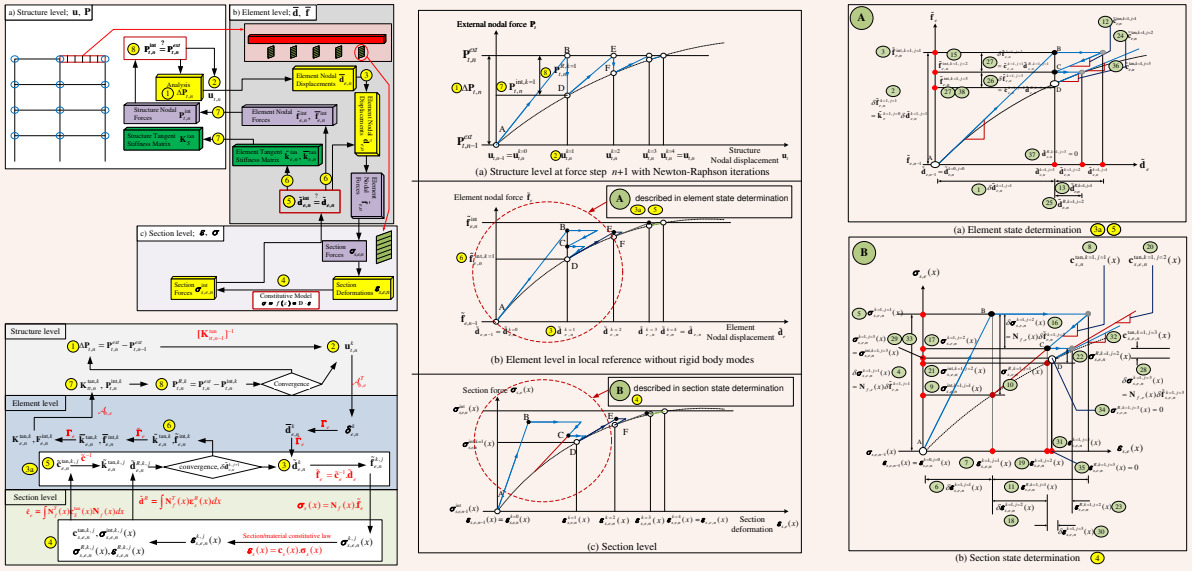


图 61.12: 基于灵活性的 2D 线列元素的状态定义 (Taucer, Spacone, and Filippou, 1991a)

80 对元素和部分状态定义的非线性解决方案程序如图所示。61.13a 和 61.13b 纽顿 • 拉夫森一词 k. 转向路径 j 它在三种 iterations 中实现。

81 单元层面牛顿—拉夫逊迭代循环的目标，是针对当前单元节点位移向量确定单元内部节点力向量，位于 k^{th} Newton-Raphson 字符串

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} = \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}$$

82 单元 lever 的 iterative 过程, 通过超级字体标记 j 引入在内 k^{th} Newton-Raphson 字符串

83 第一個 iteration 相同於 $j = 1$. 单元的初始状态, 由点代表 **A**, 和 $j = 0$ 和 $k = 0$ 在 图 61.13a 相应于国家在结构层面上最后的转变结束时。与初始 单元 tangent 刚度矩阵 提供:

$$\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k=1,j=0} = \tilde{\mathbf{c}}_{e,n-1}^{tan}$$

与此相同的 单元 节点 位移 向量

$$\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1,j=1} = \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$$

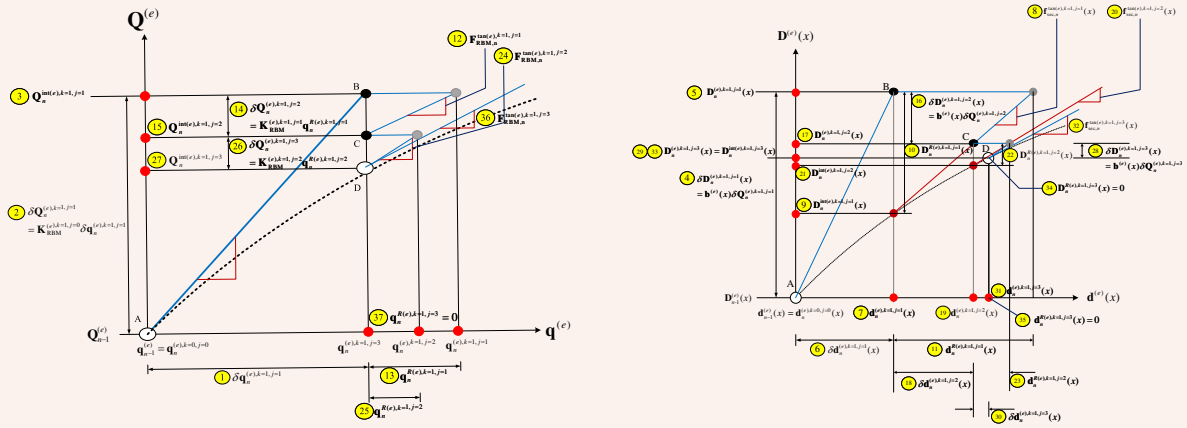
因此, 相应的增值单元节点强度向量是

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} = \left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k=1,j=0}\right]^{-1} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1,j=1}$$

84 现在可以从强度交叉功能中确定增加部分力量 vectors。

$$\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 单元 级别　　(b) 部分级别

图 61.13: 基于灵活性的 2D 列元素与元素级别中的 Newton-Raphson 调节曲线的元素和部分状态确定

与部分坦根灵活性矩阵在最后的结构层次的结尾

$$\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n-1}^{tan}(x)$$

部分强度变形关系的线性化产生了增加部分变形 vectors。

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=0}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

85 部分变形 vector 更新到符合点的状态 **B** 在 图 61.13b.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=0}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$$

假设部分力量变形关系是明确的, 因为简单, 然后部分变形 vectors $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x)$ 将符合内部部分强度 vectors $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$ 和一个新的部分 Tangent 灵活性矩阵 $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x)$ 在图 61.13b 可以定义。在这种方法中, 剩余部分的强度 vectors 首先确定

$$\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) - \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{int,k=1,j=1}(x)$$

然后转化为剩余部分变形 vector。$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) = \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$$

86 因此, 剩余部分变形 vectors 是部分强度变形关系的线性接近中所做的变形错误。(图 61.13b). 虽然任何适当的部分灵活性矩阵可以用于计算剩余部分变形 vectors, 但该部分坦格灵活度矩阵提供最快的相匹配率。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

87 剩余部分变形 vectors 沿着 单元 集成, 使用虚拟力量的原则来获得剩余 单元 节点 位移 向量 。

$$\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} = \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)\mathrm{d}x$$

88 此时此刻, 第一批 $j = 1$ 相应的 迭代循环 是完整的。最后的 单元 和部分规定为 $j = 1$ 相应点 **B** 在 图 61.13a 和 图 61.13b. 剩余部分变形向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x)$ 其余的 单元 节点 位移 向量 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ 它们在第一次调节中确定, 但相应的元素节点转移向量 不更新。相反, 它们构成在 迭代循环内剩下的步骤的起点。j. 剩余元素 节点位移向量 的存在 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1}$ 违反 变形协调, 因为 单元 共享一个常见的节点现在会有不同的 单元 节点 位移 向量.

89 为了恢复元素间兼容性, 纠正力 vector $\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ 必须按 Eq 的 单元 端应用。61.31.

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1}\right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=1} \\
\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=1} &= \int_0^L \mathbf{N}_{f,e}(x)^T \cdot \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \mathbf{N}_{f,e}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{61.31}$$

因此, 在第二个字母中 $j = 2$, 单元 节点强度 向量 已更新到

$$\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} = \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=1} + \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2}$$

部分强度和变形 vector 已更新到

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k=1,j=2} \\
\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=1}(x) + \tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=1}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=1}(x) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{k=1,j=2}(x)
\end{aligned}$$

90 二、第二次引用结束时的 单元 和 单元 中部分的状态 $j = 2$ 相应点 **C** 在 图 61.13a 和 图 61.13b. 新探险灵活性矩阵 $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ 和新剩余部分变形 vector $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k=1,j=2}(x)$ 计算为所有部分。

91 其余部分变形 vector 然后集成, 以获得其余 单元 节点变形 向量 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k=1,j=2}$ 和新 单元 切线 柔度矩阵 $\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{k=1,j=2}$ 由部分灵活性矩阵的集成决定 $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e,n}^{tan,k=1,j=2}(x)$ 根据式。61.31. 这完成了第二个字符串内 j.

92 第三次和随后的 iterations 遵循相同的程序。接近是当选择的接近标准满足时实现的。以 iteration loop 的结尾 j 由给定的单元节点位移向量求得单元节点内力向量 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k=1}$ 所设立, 如所代表的 **D** 在 图 61.12, 图 61.13a, 和 图 61.13b. 纽顿-拉夫森的调节过程现在可以步骤进展 $k + 1$.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

93 单元 节点 位移 向量 $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j=1}_{e,n} = \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$ 添加到 单元 节点 位移 向量 $\tilde{\mathbf{d}}^{k-1}_{e,n}$ 在之前的纽顿 - 拉夫森字符串结束时, 重要的是要确定元素节点转移 vector $\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e,n}$ 除第一节外, 不要改变。$j = 1$ 在 iteration loop 中 j

94 平衡 沿着 单元 始终是严格满意的, 因为部分强度 vectors 由 单元 节点强度 向量 由力量 交叉功能根据:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} \quad \text{and} \quad \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}(x) = \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

95 变形协调 也满意, 不仅在 单元 端口, 而且沿着 单元 。

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} &= -\left[\tilde{\mathbf{c}}^{k,j-1}_{e,n}\right]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j-1}_{e,n} \\
\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x) &= \mathbf{N}_{f,e}(x) \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} \\
\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}(x) &= \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x) + \tilde{\mathbf{c}}^{tan,k,j-1}_{s,e,n}(x) \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}(x)
\end{aligned}$$

二是 EQ 的第二个词。61.32 表达部分变形向量和元素节点转移向量之间的关系。剩余部分变形向量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ 不要严格满足这个 变形协调 条件。可以通过集成剩余部分变形向量来满足这一要求。$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ 要得到 $\tilde{\mathbf{d}}^{R,k,j-1}_{e,n}$. 然而, 由于从计算角度来看, 这是相当不有效的, 所以在计算剩余部分变形向量 的小 变形协调 错误 $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n}(x)$ 被忽略了。

96 虽然 平衡 和 变形协调 在每个旋转中满足 单元 时 j, 部分力量变形关系和单元强度变形比例仅在特定宽容范围内满足, 当在图中达到相应时。61.13a 和 图 61.13b.

61.4.1.3 非线性分析 使用基于灵活性的方法

97 与图的参考 61.15a 到 图 61.15c 对于新顿-拉夫森在 单元 级和 图 的方法 61.14a 到 图 61.14c 对于《没有因元素级别的异化方法》中, 我们将研究纽顿-拉夫森方法在结构层面的一个单步, 用于非线性分析, 使用基于灵活性的方法与由于强力和驱逐控制而构成部分法律。强度和位移控制在 Sec 中讨论。59. 层/纤维部分程序在 图 61.4c 将被列入 Sec。61.4.

61.4.1.3.1 没有单元级别的调节

98 与图的参考 61.14.

步骤 1 接收振动节点力量 向量 $\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n}$.

$$\Delta\mathbf{P}^{ext}_{t,n} = \mathbf{P}^{ext}_{t,n} - \mathbf{P}^{ext}_{t,n-1}$$

步骤 2 接收增量节点 位移 向量 $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ 和总节点 位移 向量 $\mathbf{u}_{t,n}$ 在结构层面。起初, iteration 从 Eq 开始。61.32 和 $k = 1$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

If $k = 1$,

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}_{u,n}^{k} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta \mathbf{u}_{u,n}^{k} \\
\delta \mathbf{u}_{t,n}^{k} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k-1}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext} - \mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k-1} \delta \mathbf{u}_{u,n}^{k}] \\
\mathbf{u}_{t,n}^{k} &= \mathbf{u}_{t,n}^{k-1} + \delta \mathbf{u}_{t,n}^{k}
\end{aligned} \tag{61.32}$$

If $k \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{R,k} &= \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n}^{int,k} \\
\delta \mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}]^{-1} \cdot \mathbf{P}_{t,n}^{R,k} \\
\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta \mathbf{u}_{t,n}^{k+1} = \mathbf{u}_{t,n}^{k} + \delta \mathbf{u}_{t,n}^{k+1}
\end{aligned} \tag{61.33}$$

其中，上标 k 为迭代计数，$\mathbf{P}_{t}^{R}$ 为结构层面的节点残余力向量，$\Delta \mathbf{u}_{t,n}^{k+1}$ 为自上一步收敛状态起的总增量位移向量，$\delta \mathbf{u}_{n}^{k+1}$ 为最近一次增量位移向量。

步骤 3 跳过所有 单元 并确定其状态。

- 在全球参考中确定元素节点转移 vector。

  If $k = 1$,

  $$\delta \boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}_{t,n}^{k} + \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}_{u,n}^{k}$$

  If $k \neq 1$,

  $$\delta \boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} = \mathcal{A}_{b,e} \cdot \delta \mathbf{u}_{t,n}^{k}$$

  在哪里, $\mathcal{A}_{b,e}$ 是 位移 提取运营商。

  $$\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} = \boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k-1} + \delta \boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k}$$

  和 $\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{0}$ 相应的 $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.
- 确定 单元 节点 位移 向量 在本地参考中。

  $$\begin{aligned}
  \delta \bar{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \boldsymbol{\Gamma}_{e} \cdot \delta \boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} \\
  \bar{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \bar{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta \bar{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}
  \end{aligned}$$

  和 $\bar{\mathbf{d}}_{e,n}^{0}$ 相应的 $\bar{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.
- 确定 单元 节点 位移 向量 在本地参考中没有固体模式。

  $$\begin{aligned}
  \delta \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{e} \cdot \delta \bar{\mathbf{d}}_{e,n} \\
  \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k}
  \end{aligned}$$

  和, $\bar{\mathbf{d}}_{e,n}^{0}$ 和 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{0}$ 相应的 $\bar{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ 和 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

步骤 4 确定 单元 节点强度 向量 没有硬体模式

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$

和, $\tilde{\mathbf{f}}^{k=0}_{e,n}$ 和 $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k=0}_{e,n}$ 相应的 $\tilde{\mathbf{f}}_{e,n-1}$, 和 $\tilde{\mathbf{k}}^{tan}_{e,n-1}$.

步骤 5 通过旋转单元的部分来启动部分状态定义。部分的总数可能从 单元 到 单元. 因此, 在 单元 中, 部分的总数是 nIp_e 它取决于加乌斯洛巴托四角规则的整合点数量。

- 确定部分强度 向量.

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$

在哪里, $\mathbf{N}_{f,s,e}$ 矩阵是由强度交互功能产生的。s^{th} 部分的 The eth 单元, 和 $\boldsymbol{\sigma}^{k=0}_{s,e,n}$ 相应的 $\boldsymbol{\sigma}_{s,e,n-1}$.

步骤 6 确定部分变形 向量。我们再次采取一个总体部分。每个部分的状态定义在路径中进行 s.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$$

和, $\mathbf{c}^{tan,k=0}_{s,e,n}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{k=0}_{s,e,n}$ 相应的 $\tilde{\mathbf{c}}^{tan}_{s,e,n-1}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n-1}$.

步骤 7 确定部分坦根 柔度矩阵 和内部部分力量 向量. 如果我们假设宪法条款是明确的, $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ 两者都由 $\boldsymbol{\varepsilon}^{k}_{s,e,n}$. 但是, 在弹性部分, 我们不需要计算 $\mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n}$ 再次, 因为它与初始部分相同 柔度矩阵 $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.

- 确定剩余部分强度 向量.

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k}_{s,e,n} - \boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$$

步骤 8 确定剩余部分变形 向量.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k}_{s,e,n}$$

步骤 9 确定更新 单元 柔度矩阵 和剩余的 单元 节点 位移 向量 。

沿单元对截面残余变形向量和截面切线柔度矩阵进行积分，并采用虚功余原理，得到单元节点残余位移向量和单元切线柔度矩阵。

$$\tilde{\mathbf{d}}^{R,k}_{e,n} = \sum_{s} \mathbf{N}^{T}_{f,s,e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k}_{s,e,n} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k}_{e,n} = \sum_{s} \mathbf{N}^{T}_{f,s,e} \cdot \mathbf{c}^{tan,k}_{s,e,n} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e}$$
$$\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n} = [\tilde{\mathbf{c}}^{tan,k}_{e,n}]^{-1}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里, $\mathrm{wt}_{s,e}$ 重量因子与雅各比亚因子相结合。s^{th} 部分的 The eth 单元.

步骤 10 确定内部 单元 节点强度 向量 和 单元 坦根 刚度矩阵.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k} \\
\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{k} - \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{R,k} \\
\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\
\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \\
\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e
\end{aligned}$$

步骤 11 确定内部节点强度 向量 和增强坦根 刚度矩阵.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\
\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \, \mathcal{A}_{b,e}
\end{aligned}$$

在哪里, $\mathcal{A}_{b,e}^T$ 是强力集合运营商。

步骤 12 计算剩余的节点力量 向量 在结构级别从 Eq。61.35. 接下来, 我们满足了与剩余的节点力量向量相匹配。

查看 convergence

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ 在所指定的宽容范围内, 走到下一个强度增加。
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ 它不符合所规定的宽容。k 已更新到 $k+1$ 下一篇: 纽顿 • 拉夫森的重定向以克。61.33 在 **步骤 2** 通过 **步骤 12** 重复, 直到结构层面发生相匹配。

61.4.1.3.2 与新顿-拉夫森在单元级的振动曲线

99 与图的参考 61.15.

步骤 1 计算增节力 向量 $\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext}$.

$$\Delta\mathbf{P}_{t,n}^{ext} = \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext}$$

步骤 2: 接收增量节点 位移 $\delta\mathbf{u}_{t,n}$ 和总节点 位移 $\mathbf{u}_{t,n}$ 在结构层面。起初, iteration 从 Eq 开始。61.34 和 $k=1$.

If $k=1$,

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}_{u,n}^{k} &= \mathbf{u}_{u,n} - \mathbf{u}_{u,n-1} \\
\mathbf{u}_{u,n} &= \mathbf{u}_{u,n-1} + \delta\mathbf{u}_{u,n}^{k} \\
\delta\mathbf{u}_{t,n}^{k} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k-1}]^{-1} \cdot [\mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n-1}^{ext} - \mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k-1} \delta\mathbf{u}_{u,n}^{k}] \\
\mathbf{u}_{t,n}^{k} &= \mathbf{u}_{t,n}^{k-1} + \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k}
\end{aligned} \tag{61.34}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

If $k \neq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t,n}^{R,k} &= \mathbf{P}_{t,n}^{ext} - \mathbf{P}_{t,n}^{int,k} \\ \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= [\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}]^{-1} \cdot \mathbf{P}_{t,n}^{R,k} \\ \mathbf{u}_{t,n}^{k+1} &= \mathbf{u}_{t,n-1} + \Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} = \mathbf{u}_{t,n}^{k} + \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1} \end{aligned} \tag{61.35}$$

其中，上标 k 为迭代计数，$\mathbf{P}_t^R$ 为结构层面的节点残余力向量，$\Delta\mathbf{u}_{t,n}^{k+1}$ 为自上一步收敛状态起的总增量位移向量，$\delta\mathbf{u}_n^{k+1}$ 为最近一次增量位移向量。

在 EQ。61.34, 需要描述解释强度/位移控制和增加的刚度矩阵 $\mathbf{K}_S$ 与 $\mathbf{K}_{tt}$, $\mathbf{K}_{tu}$, $\mathbf{K}_{ut}$, 和 $\mathbf{K}_{uu}$ 在细节中。它在 SEC 中显示。59. 在那里, 增加的 刚度矩阵 分为两个组, 有相应的字幕 ‘u “在哪里被驱逐出境已知或零, 并且” t “在那里, 力量是已知的。

步骤 3: 跳过所有 单元 并确定其状态。

- 确定茶 单元 节点 位移 向量 在全球参考 If $k = 1$ If $k = 1$,

$$\delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k} + \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{u,n}^{k}$$

  If $k \neq 1$

$$\delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} = \mathbf{A}_{b,e} \cdot \delta\mathbf{u}_{t,n}^{k}$$

  在哪里, $\mathbf{A}_{b,e}$ 是 位移 提取运营商。

$$\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} = \boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k-1} + \delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k}$$

  和 $\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{0}$ 相应的 $\boldsymbol{\delta}_{e,n-1}$.
- 定义 单元 节点 位移 向量 在本地参考中

$$\begin{aligned} \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \delta\boldsymbol{\delta}_{e,n}^{k} \\ \overline{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \overline{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} \end{aligned}$$

  在哪里, $\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^{0}$ 相应的 $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.
- 确定 单元 节点 位移 向量 在本地参考中没有硬体模式

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \cdot \delta\overline{\mathbf{d}}_{e,n} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} &= \tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k-1} + \delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k} \end{aligned}$$

  在哪里, $\overline{\mathbf{d}}_{e,n}^{0}$ 和 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{0}$ 相应的 $\overline{\mathbf{d}}_{e,n-1}$ 和 $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n-1}$.

步骤 3A: 启动 单元 状态定义。超越所有 单元 在结构中。每个 单元 的状态定义在旋转中进行 j.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 确定 单元 节点强度 向量 没有硬体模式

$$\delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j-1}_{e,n} \cdot \delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n} = \tilde{\mathbf{f}}^{k,j-1}_{e,n} + \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$

在哪里, $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k,j=1}_{e,n}$, $\tilde{\mathbf{f}}^{k,j=0}_{e,n}$, 和 $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k,j=0}_{e,n}$ 相应的 $\delta\tilde{\mathbf{d}}^{k}_{e}$, $\tilde{\mathbf{f}}^{k-1}_{e,n}$, 和 $\tilde{\mathbf{k}}^{tan,k-1}_{e,n}$.

步骤 4 通过旋转单元的部分来启动部分状态定义。部分的总数可能从 单元 到 单元. 因此, 在 单元 中, 部分的总数是 nIp_e 它取决于加乌斯洛巴托四角规则的整合点数量。

- 确定部分强度 向量.

  对于部分状态的确定, 我们首先需要区分一般部分和层/纤维部分如 Sec 中所描述。61.4. 为了这个描述, 我们只考虑一般部分。每个部分的状态定义在圆圈内进行 s 其次, 该字符符合 s^{th} 部分。

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \delta\tilde{\mathbf{f}}^{k,j}_{e,n}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$

  在哪里, $\mathbf{N}_{f,s,e}$ 矩阵 是由强度交叉功能产生的 s^{th} 部分的 e^{th} 单元, 和 $\boldsymbol{\sigma}^{k,j=0}_{s,e,n}$ 相应的 $\boldsymbol{\sigma}^{k-1}_{s,e,n}$.

- 确定部分变形 向量.

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j-1}_{s,e,n} + \mathbf{c}^{tan,k,j-1}_{s,e,n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\varepsilon}^{k,j-1}_{s,e,n} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}$$

  和, $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j=0}_{s,e,n}$ 和 $\mathbf{c}^{tan,k,j=0}_{s,e,n}$ 相应的 $\boldsymbol{\varepsilon}^{k-1}_{s,e,n}$ 和 $\mathbf{c}^{tan,k-1}_{s,e,n}$, 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j=0}_{s,e,n} = 0$.
- 确定部分坦根 柔度矩阵 和内部部分力量 向量. 如果我们假设宪法条款是明确的, $\mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{int,k,j}_{s,e,n}$ 两者都由 $\boldsymbol{\varepsilon}^{k,j}_{s,e,n}$. 但是, 在弹性部分, 我们不需要计算 $\mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n}$ 再次, 因为它与初始部分相同 柔度矩阵 $\tilde{\mathbf{c}}_{s,e}$.
- 确定剩余部分的强度和变形 向量.

$$\boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n} = \boldsymbol{\sigma}^{k,j}_{s,e,n} - \boldsymbol{\sigma}^{int,k,j}_{s,e,n}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{R,k,j}_{s,e,n} = \mathbf{c}^{tan,k,j}_{s,e,n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{R,k,j}_{s,e,n}$$

步骤 5 确定更新的元素灵活性矩阵和剩余元素节点转移 vector。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

沿单元对截面残余变形向量和截面切线柔度矩阵进行积分，并采用虚功余原理，得到单元节点残余位移向量和单元切线柔度矩阵。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j} &= \sum_s \mathbf{N}_{f,s,e}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s,e,n}^{R,k,j} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\ \tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k,j} &= \sum_s \mathbf{N}_{f,s,e}^T \cdot \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \cdot \mathbf{N}_{f,s,e} \cdot \mathrm{wt}_{s,e} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j} &= [\tilde{\mathbf{c}}_{e,n}^{tan,k,j}]^{-1}\end{aligned}$$

在哪里, $\mathrm{wt}_{s,e}$ 重量因子与雅各比亚因子相结合。s^{th} 部分的 The eth 单元.

元素级别的转变必须满足剩余元素节点转移 vector。

- If $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ 在一定的宽容范围内, 走向 **步骤 6**.
- If $\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ 它不符合所规定的宽容。j 和 $\delta\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{k,j+1}$ 被更新到 $j+1$ 和 $-\tilde{\mathbf{d}}_{e,n}^{R,k,j}$ 接下来的纽顿-拉夫森字母开始了。我们重复了 **步骤 3A** 通过 **步骤 5** 直到接近发生在 单元水平。

步骤 6 确定内部 单元 节点强度 向量 和 单元 坦根 刚度矩阵.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k,j} \\ \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} \\ \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k} &= \mathbf{c}_{s,e,n}^{tan,k,j} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k,j} \\ \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} &= \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e^T \cdot \tilde{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \\ \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} &= \boldsymbol{\Gamma}_e^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e\end{aligned}$$

步骤 7 确定内部节点强度 向量 和增强坦根 刚度矩阵.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{t,n}^{int,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{F}_{e,n}^{int,k} \\ \mathbf{K}_{S,n}^{tan,k} &= \sum_e \mathcal{A}_{b,e}^T \cdot \mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} \cdot \mathcal{A}_{b,e}\end{aligned}$$

在哪里, $\mathcal{A}_{b,e}^T$ 是强制集会运营商, 以及 $\mathbf{K}_{S,n}^{tan,k}$ 它是由 $\mathbf{K}_{tt,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{tu,n}^{tan,k}$, $\mathbf{K}_{ut,n}^{tan,k}$, 和 $\mathbf{K}_{uu,n}^{tan,k}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

步骤 8 计算剩余的节点力量 向量 在结构级别从 Eq。61.35. 接下来, 我们满足了与剩余的节点力量向量相匹配。

- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ 在所指定的宽容范围内, 走到下一个强度增加。
- If $\mathbf{P}_{t,n}^{R,k}$ 它不符合所规定的宽容。k 已更新到 $k+1$ 下一篇: 纽顿 • 拉夫森的重定向以克。61.35 在 **步骤 2** 通过 **步骤 8** 重复, 直到结构层面发生相匹配。

61.4.2 精力 *vs.* 基于灵活性 单元

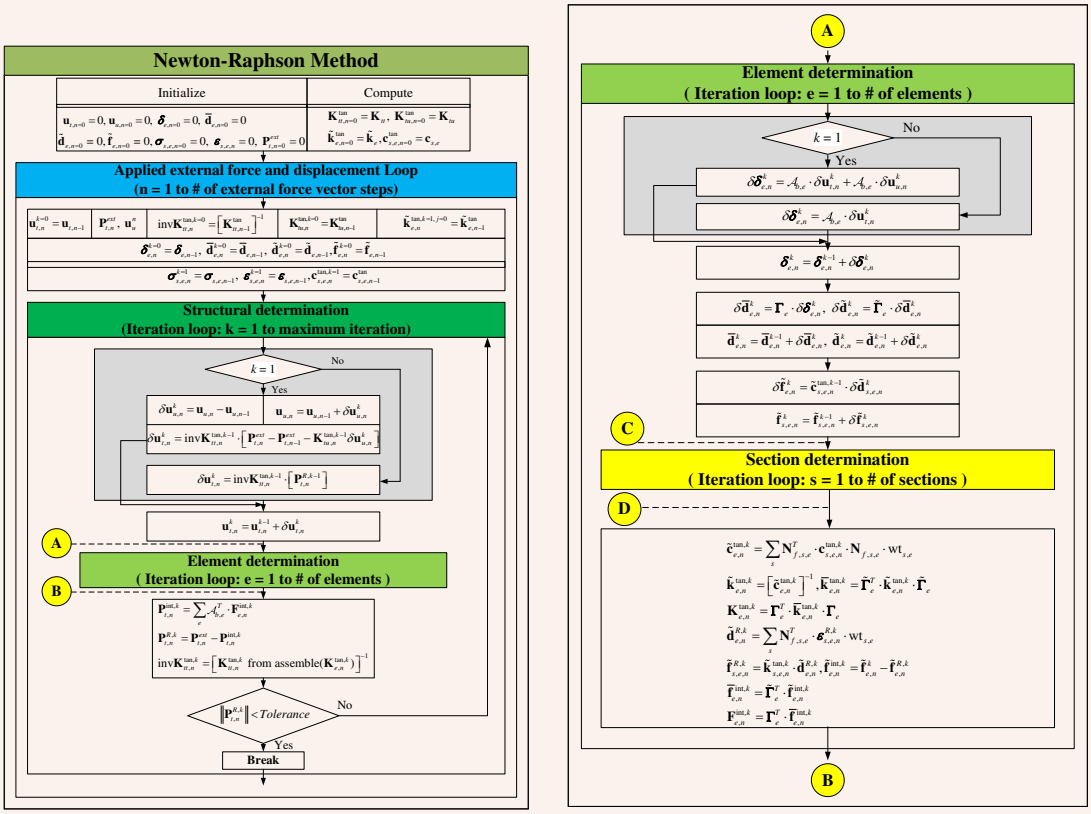
100 桌子 61.2 和 图 61.16 强调基于 单元 的固度和灵活性之间的差异。

表 61.2: 灵活性与基于固度的单元比较

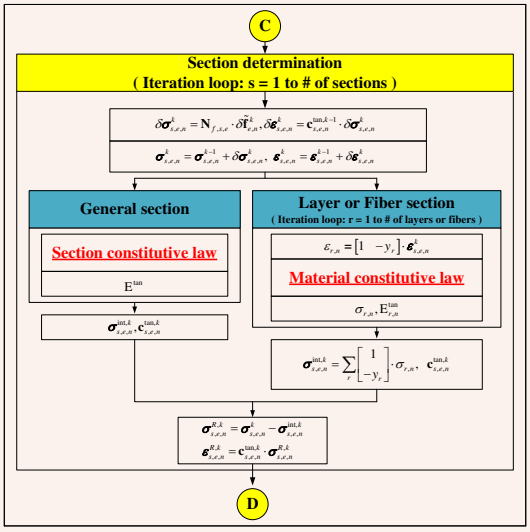
	灵活性	**精力**
原则	附加 虚功	虚功
不确定性	静态	电影
强大形式	电影	平衡
弱形	平衡	电影
插值函数	力量领域 (准确)	位移 字段 (假设)
宪法法	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x)\mathbf{d}(x)$	$\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x)\mathbf{D}(x)$
初级未知	单元 终端力量	单元 终端转移
差异化	$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\mathbf{Q}$	$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x)\overline{\mathbf{q}}$
矩阵	$\mathbf{F} = \int_0^L \mathbf{b}(x)^T \mathbf{f}(x)\mathbf{b}(x)\mathrm{d}x$	$\mathbf{k}_{(ele)} = \int_0^L \mathbf{B}(x)^T \mathbf{k}(x)\mathbf{B}(x)\mathrm{d}x$

请注意，本节包含必须在下一节之前排出的浮动对象（插图和/或表格），因此此处可能出现空白或间隙。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) (b)



(c)

图 61.14: 非线性分析的流动图, 使用基于灵活性的方法, 没有在元素级别的 iteration

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

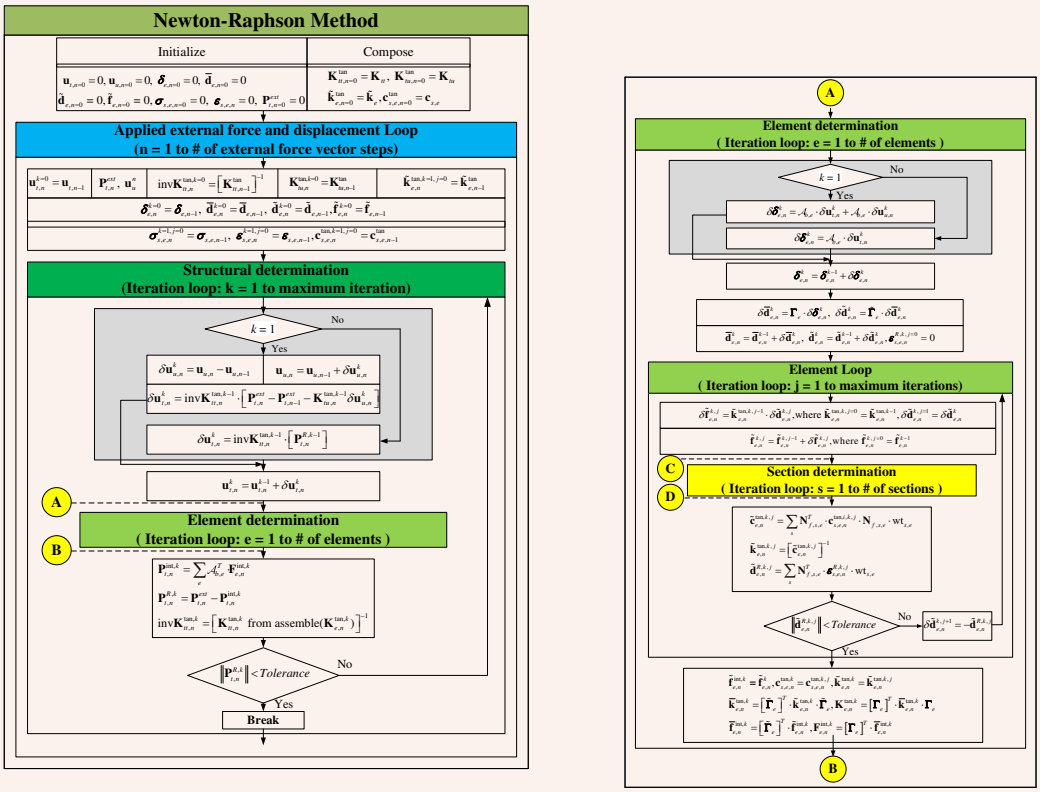


图 61.15: 使用基于灵活性的方法的非线性分析流图与元素级别的新顿-拉夫森字体

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

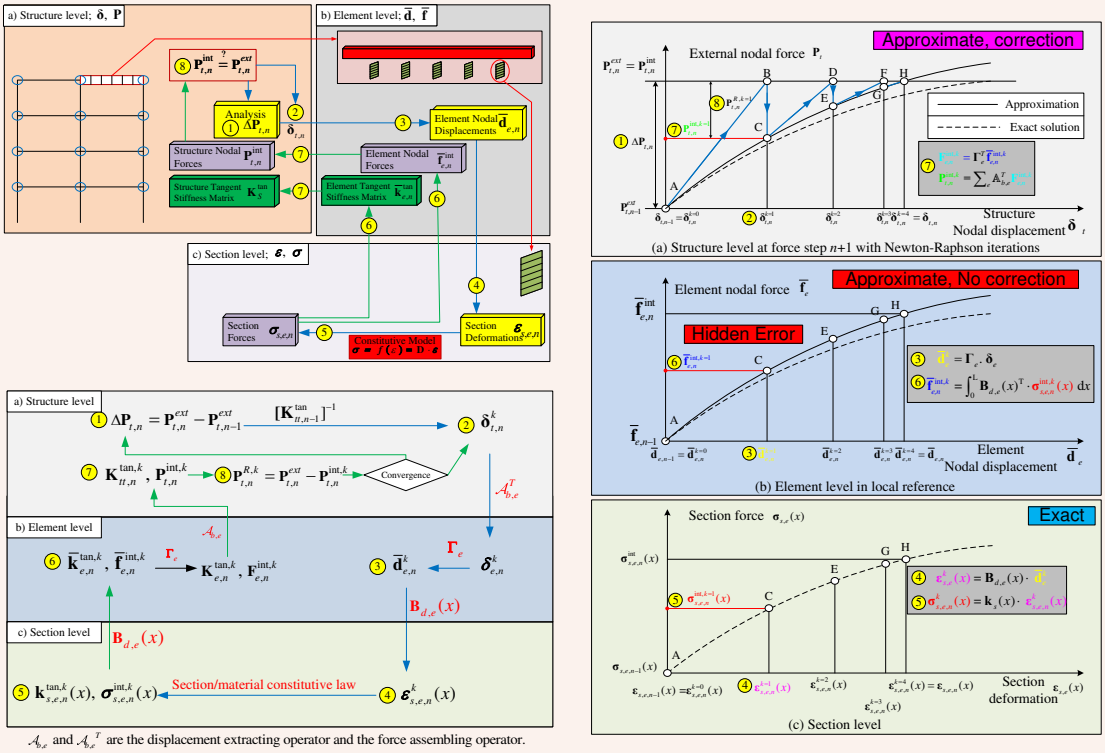


图 61.16: 基于固态的比较 *vs.* 基于灵活性 表述

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

61.5 零长度 2D 单元表述

101 具有集中力量的结构性单元或单元的关节可能有塑料粘膜或非线性。在這些情況下, 集中力量的終端節或節需要幾個折叠塑性組成型號 (§62.3).

102 一般情况下, 零长度元素被用在泡沫或泡沫列元素的结尾重复额外旋转或叶片故障, 如条滑图。61.17a.

103 单元 的 表述 基于 图 61.17. 在此 单元 中, 部分力量的结合效应被忽略。

宪法法 宪法条款如:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ V_y \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EIz^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_{sec}^{tan}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{x2} - u_{x1} \\ v_{y2} - v_{y1} \\ \theta_{z2} - \theta_{z1} \end{Bmatrix}}_{.\mathbf{d}} \tag{61.36}$$

在哪里, EA^{tan}, GA^{tan} 和 EIz^{tan} 它们是与轴、轴和时刻相关的紧密性。

平衡 单元 节点力量与 位移 向量 的关系,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \bar{\mathbf{k}}_e^{tan} \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ \overline{v}_{y1} \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ \overline{v}_{y2} \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

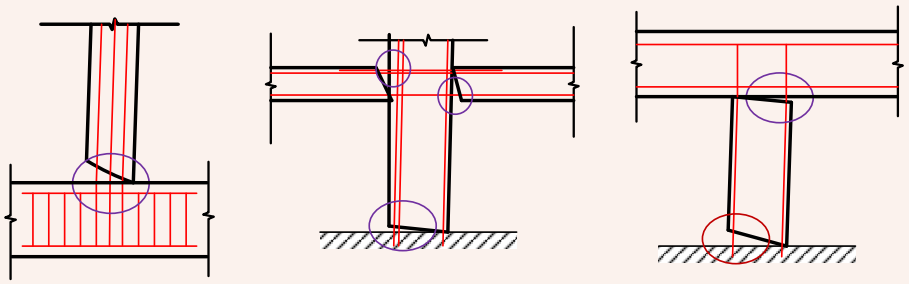
在哪里, $\bar{\mathbf{k}}_e^{tan}$ 是 单元 刚度矩阵 在本地参考。

$$\bar{\mathbf{k}}_e^{tan} = \begin{bmatrix} EA^{tan} & 0 & 0 & -EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan} & 0 & 0 & -GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & EI_z^{tan} & 0 & 0 & -EI_z^{tan} \\ -EA^{tan} & 0 & 0 & EA^{tan} & 0 & 0 \\ 0 & -GA^{tan} & 0 & 0 & GA^{tan} & 0 \\ 0 & 0 & -EI_z^{tan} & 0 & 0 & EI_z^{tan} \end{bmatrix} \tag{61.37}$$

61.5.1 协调系统在零长度 2D 单元

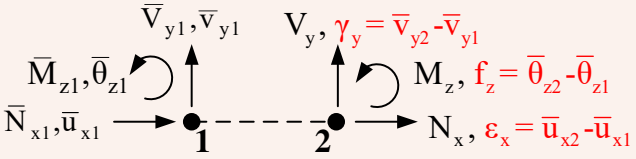
104 0D 单元的协调系统与 Sec 相同。61.3.1.1.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

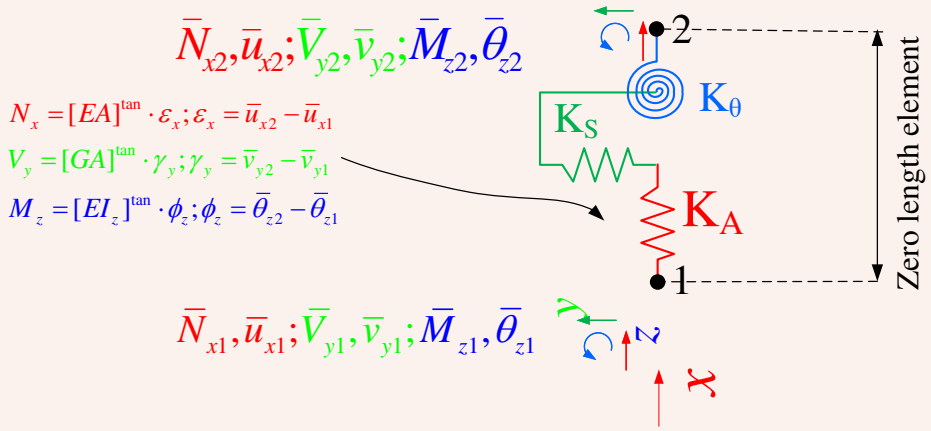


(1) Wall (2) Frame (3) Bridge

(a) 应用



(b) 连接



(c) 平衡

图 61.17: 零长度 2D 单元

61.5.2 单元 状态定义, 分为 2 个尺寸和 3 自由度 每个节点

105 与参考 图 61.18, 我们将对零长度 2D 元素进行非线性分析的单步审查。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

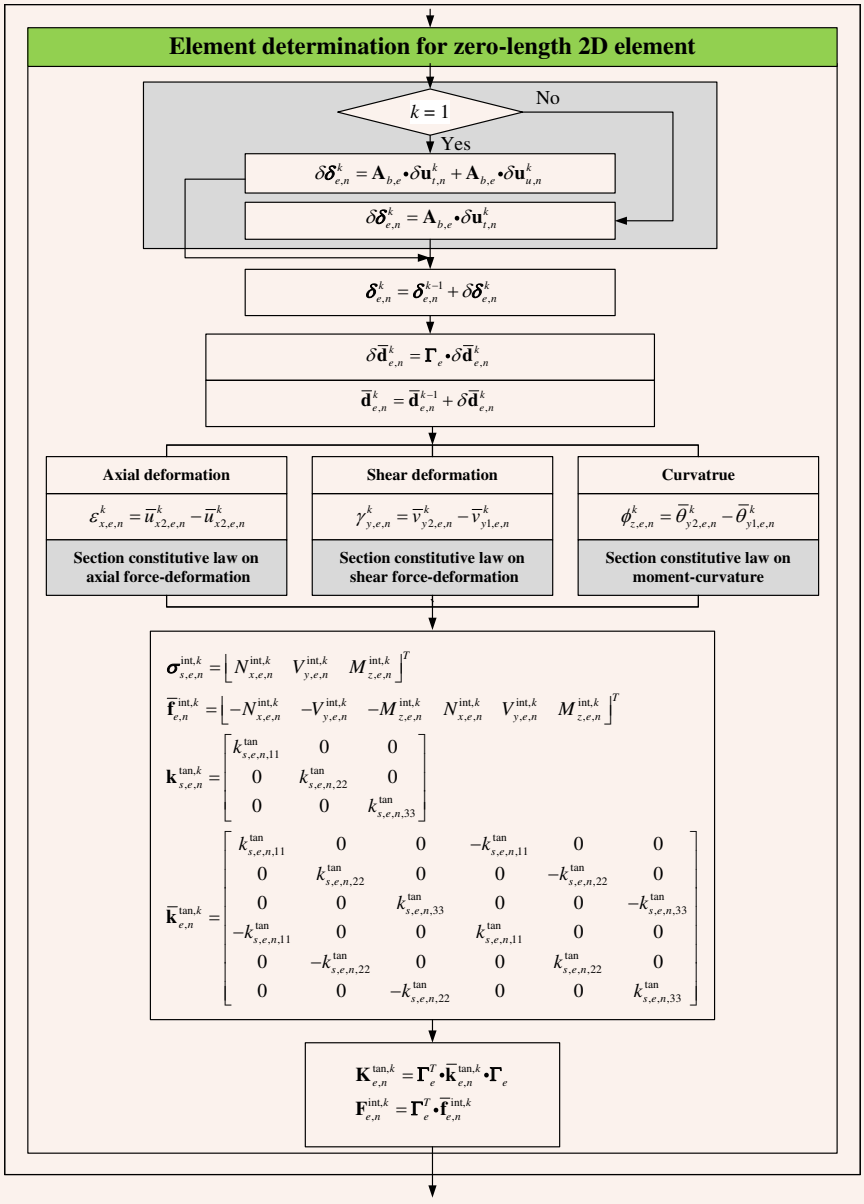


图 61.18: 零长度 2D 元素的流图, 以确定元素状态

步骤 1: 确定部分变形 vector、轴变形、叶形变形和曲线。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

对于每个变形, 我们将相关组件从 $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,n},\ \gamma^k_{y,n},\ \kappa^k_{z,n} \rfloor^T \\ \varepsilon^k_{x,n} &= \overline{u}^k_{x2,n} - \overline{u}^k_{x2,n} \\ \gamma^k_{y,n} &= \overline{v}^k_{y2,n} - \overline{v}^k_{y2,n} \\ \kappa^k_{z,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,n} - \overline{\theta}^k_{z2,n}\end{aligned}$$

第二、第三和第四方程相应于轴部分变形、叶片变形和曲率。

步骤 2: 确定与轴力变形、剪力变形和时刻-曲率在宪法部分相关的部分密度, 这样做; 我们可以使用部分宪法法修改与多个变量在函数的物质宪法法律相关的统一应力-应变关系 (Ch. 62). 然后确定内部部分力量 向量. 如果我们假设宪法条款是明确的, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ 被定义为 $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$. 但是, 在弹性部分, 我们不需要计算 $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ 再次, 因为它与初始部分相同 刚度矩阵 $\mathbf{k}_{s,e}$.

如果我们有弹性部分,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} &= \mathbf{k}_{s,e} \\ \underbrace{\begin{Bmatrix} N^k_x \\ V^k_y \\ M^k_z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} &= \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon^k_{x,n} \\ \gamma^k_{y,n} \\ \kappa^k_{z,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}}\end{aligned}$$

在哪里, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ 是部分坦根 刚度矩阵 在 k^{th} 伊特拉。

步骤 3: 根据式 61.37 确定单元内部节点力向量和单元切线刚度矩阵。

$$\overline{\mathbf{f}}^{int,k}_{e,n} = \lfloor N^k_x, V^k_y, M^k_z, -N^k_x, -V^k_y, -M^k_z \rfloor^T$$

$$\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e} = \begin{bmatrix} EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & -EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 \\ 0 & GA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & -GA^{tan,k}_{e,n} & 0 \\ 0 & 0 & EI^{tan,k}_{z,e,n} & 0 & 0 & -EI^{tan,k}_{z,e,n} \\ -EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & EA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 \\ 0 & -GA^{tan,k}_{e,n} & 0 & 0 & GA^{tan,k}_{e,n} & 0 \\ 0 & 0 & -EI^{tan,k}_{z,e,n} & 0 & 0 & EI^{tan,k}_{z,e,n} \end{bmatrix}$$

在哪里, $\overline{\mathbf{k}}^{tan,k}_{e,n}$ 是 单元 坦根在本地参考中的 刚度矩阵。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们决定 $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ 和 $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

61.6 零长度部分 单元

106 单元 零长度部分与零长 单元 相似, 但是它使用层/纤维。此 单元 允许我们 **模型在转角部分中间的转变, 可能发生** (例如, 在 Slip). 单元 是基于 轴力和瞬间, 图 61.19.

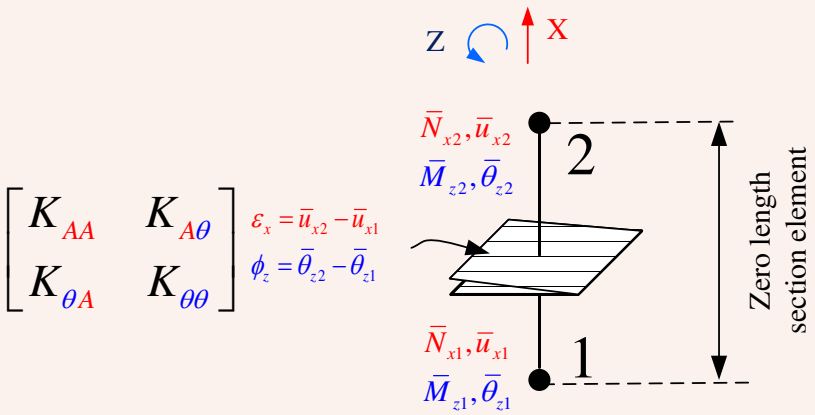


图 61.19: 零长度部分 单元, 平衡

61.6.1 刚度矩阵

宪法法 宪法条款如:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ M_z \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,11}^{tan} & \mathrm{k}_{s,12}^{tan} \\ \mathrm{k}_{s,21}^{tan} & \mathrm{k}_{s,22}^{tan} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_s^{tan}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{u}_{x2} - \bar{u}_{x1} \\ \bar{\theta}_{z2} - \bar{\theta}_{z1} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_s}$$

在哪里, $\mathbf{k}_s^{tan}$ 是从层/纤维状态定义中获取的 刚度矩阵 部分坦根。

平衡 零长度部分元素是基于伯诺利喷雾理论的。考虑平衡 点 A 和 B 之间的方程式。

$$\overline{N}_{x1} = k_{s,11}^{tan} \cdot (\overline{u}_{x1} - \overline{u}_{x2}) + k_{s,12}^{tan} \cdot (\overline{\theta}_{z1} - \overline{\theta}_{z2})$$
$$\overline{M}_{z1} = k_{s,21}^{tan} \cdot (\overline{u}_{x1} - \overline{u}_{x2}) + k_{s,22}^{tan} \cdot (\overline{\theta}_{z1} - \overline{\theta}_{z2})$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

同样在 B 点和 C 点之间,

$$\overline{N}_{x2} = k^{tan}_{s,11} \cdot (\overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1}) + k^{tan}_{s,12} \cdot (\overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1})$$
$$\overline{M}_{z2} = k^{tan}_{s,21} \cdot (\overline{u}_{x2} - \overline{u}_{x1}) + k^{tan}_{s,22} \cdot (\overline{\theta}_{z2} - \overline{\theta}_{z1})$$

107 重写这些两组方程式在矩阵形式, 元素节点力量和转移 vector 之间的关系是由

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{N}_{x1} \\ 0 \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ 0 \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_e} = \overline{\mathbf{k}}^{tan}_e \underbrace{\begin{Bmatrix} \overline{u}_{x1} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z1} \\ \overline{u}_{x2} \\ 0 \\ \overline{\theta}_{z2} \end{Bmatrix}}_{\bar{\mathbf{d}}_e}$$

在哪里, $\overline{\mathbf{k}}^{tan}_e$ 是 单元 刚度矩阵 在本地参考。

$$\overline{\mathbf{k}}^{tan}_e = \begin{bmatrix} \mathrm{k}^{tan}_{s,11} & 0 & \mathrm{k}^{tan}_{s,12} & -\mathrm{k}^{tan}_{s,11} & 0 & -\mathrm{k}^{tan}_{s,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}^{tan}_{s,21} & 0 & \mathrm{k}^{tan}_{s,22} & -\mathrm{k}^{tan}_{s,21} & 0 & -\mathrm{k}^{tan}_{s,22} \\ -\mathrm{k}^{tan}_{s,11} & 0 & -\mathrm{k}^{tan}_{s,12} & \mathrm{k}^{tan}_{s,11} & 0 & \mathrm{k}^{tan}_{s,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}^{tan}_{s,21} & 0 & -\mathrm{k}^{tan}_{s,22} & \mathrm{k}^{tan}_{s,21} & 0 & \mathrm{k}^{tan}_{s,22} \end{bmatrix}$$

61.6.2 协调系统

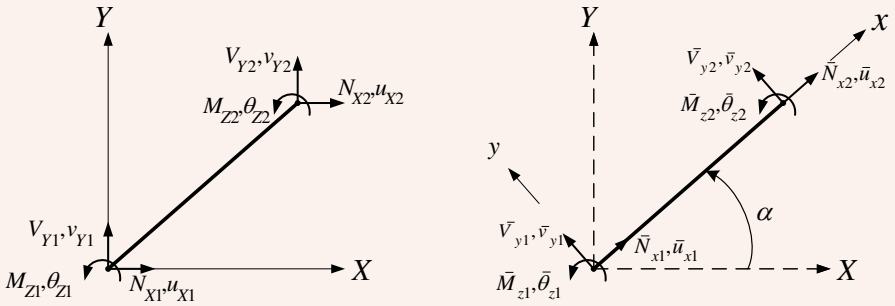
107 0D 单元的协调系统与 2D 密度相同 单元, 图 61.20

$$\boldsymbol{\Gamma}_e = \begin{array}{c} \\ \overline{N}_{x1} \\ \overline{V}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{N}_{x2} \\ \overline{V}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{X1} & V_{Y1} & M_{Z1} & N_{X2} & V_{Y2} & M_{Z2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

61.6.3 单元 状态定义

108 状态定义为零部分 单元, 图 61.21 是如下:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) Global reference in an element

(b) Local reference in an element

图 61.20: 协调系统为零长度部分 单元

步骤 1: 确定部分变形 向量、轴变形和 曲率。对于每个变形, 我们将相关组件从 $\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{d}}^k_{e,n} &= \lfloor \overline{u}^k_{x1,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z1,e,n}\ \overline{u}^k_{x2,e,n}\ 0\ \overline{\theta}^k_{z2,e,n} \rfloor^T \\
\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n} &= \lfloor \varepsilon^k_{x,e,n},\ \phi^k_{z,e,n} \rfloor^T \\
\varepsilon^k_{x,e,n} &= \overline{u}^k_{x2,e,n} - \overline{u}^k_{x2,e,n} \\
\phi^k_{z,e,n} &= \overline{\theta}^k_{z2,e,n} - \overline{\theta}^k_{z2,e,n}
\end{aligned}
$$

步骤 2: 确定与轴力变形和时刻曲线相关的部分坦根硬度, 使用层/纤维状态定义为层/繊維。接下来确定内部部分的强度 向量. 如果我们假设物质立法是明确的, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}$ 被定义为 $\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}$. 但是, 在弹性材料的部分中, 我们不需要计算 $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ 再次, 因为它与初始部分相同 刚度矩阵 $\mathbf{k}_{s,e}$. 如果我们有弹性材料的部分, 那么

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} &= \mathbf{k}_{s,e} \\
\underbrace{\begin{Bmatrix} N^{int,k}_{x,e,n} \\ M^{int,k}_{z,e,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}^{int,k}_{s,e,n}} &= \mathbf{k}^{tan}_{s,e,n} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon^k_{x,e,n} \\ \phi^k_{z,e,n} \end{Bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^k_{s,e,n}}
\end{aligned}
$$

在哪里, $\mathbf{k}^{tan,k}_{s,e,n}$ 是部分坦根 刚度矩阵 在 k^{th} 伊特拉。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

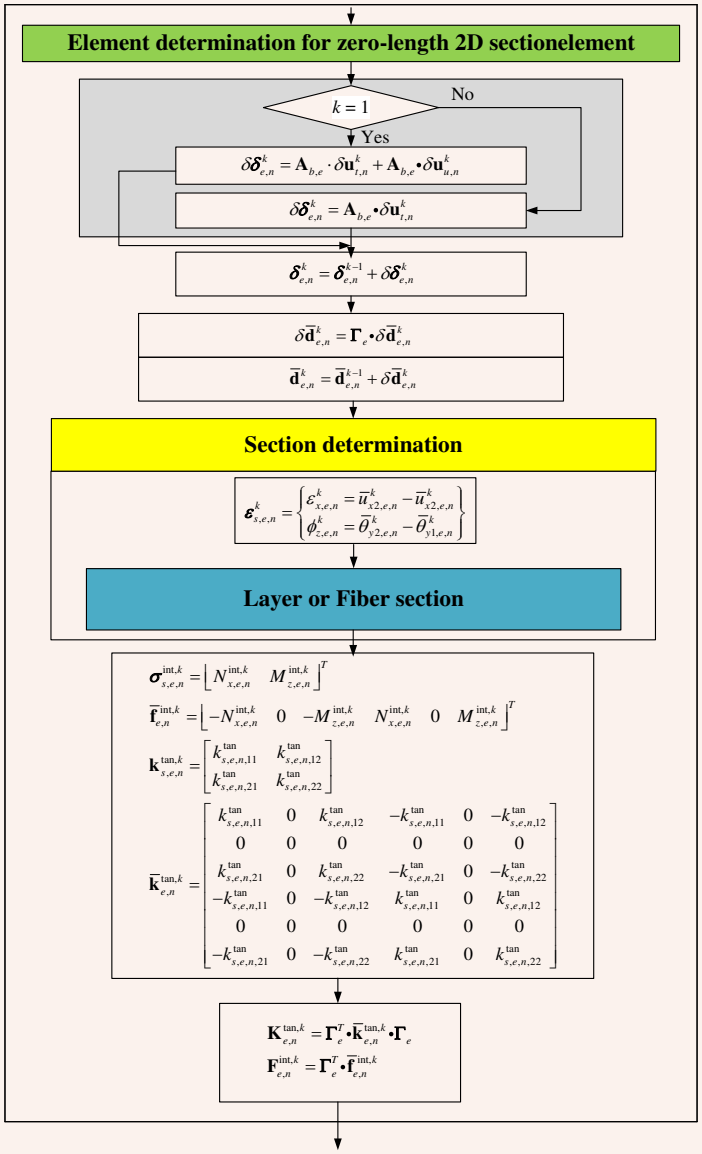


图 61.21: 流图为零部分 单元

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

步骤 3: 确定的 内部 单元 节点力量 向量 和 单元 坦根 刚度矩阵

$$\bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k} = \lfloor N_{x,e,n}^{int,k}, 0, M_{z,e,n}^{int,k}, -N_{x,e,n}^{int,k}, 0, -M_{z,e,n}^{int,k} \rfloor^T$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} & -\mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} & -\mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} \\ -\mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,12e,n,}^{tan,k} & \mathrm{k}_{s,e,n,11}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,12}^{tan,k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & -\mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} & \mathrm{k}_{s,e,n,21}^{tan,k} & 0 & \mathrm{k}_{s,e,n,22}^{tan,k} \end{bmatrix}$$

在哪里, $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ 是 单元 坦根在本地参考中的 刚度矩阵。

109 我们决定 $\mathbf{F}_{e,n}^{int,k}$ 和 $\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k}$.

$$\mathbf{F}_{e,n}^{int,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{f}}_{e,n}^{int,k}$$
$$\mathbf{K}_{e,n}^{tan,k} = \boldsymbol{\Gamma}_e{}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_e$$

61.7 数值积分

110 集成点: 通常 3 (盖斯) 基于强度, 和 5 (加斯 - 洛巴托) 基于灵活性 (§51.3).

61.8 单元 力量

111 单元 节点力量被定义为 §51.4.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

62 分布式和折叠式塑性的宪法模型

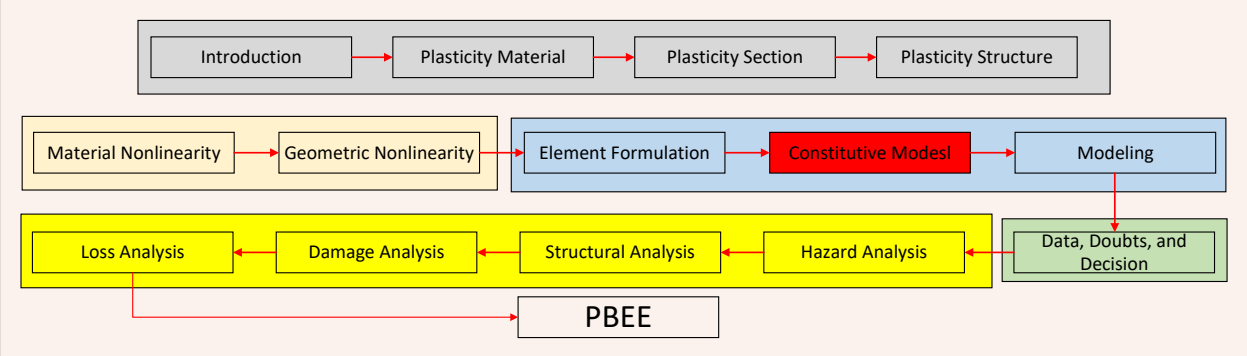
摘要

本章讲述了对基于性能的地震工程至关重要的先进非线性分析模型的开发和应用。(章节 72). 这些模型旨在模拟结构的行为, 从损害开始到完全崩溃, 提供与损害措施相关的工程需求参数。适当模型强度和硬度损坏, 以及 $P-\Delta$ 效果, 是关键的精确代表动态反应。

该章节提供了一个详细的探索, 分布和流行的塑性方法。对于分布式塑料性, 纤维或涂层元素被检查以发展非线性压力带关系, 而折叠的塑料是由非线性的时刻曲线关系所特征。讨论扩展到钢材和混凝土的组成模型, 突出关键方面如循环负载、密度下降、紧张压缩以及限制对混凝土属性的影响。显著的材料模型, 包括改造的 *Kent* 和 *Park* 模型和 *Menegotto-Pinto* 钢材模型被分析, 因为它们能够捕获复杂的非线性反应。

虽然海里主义和现象学模型占主导地位, 但该章节承认了它们的限制, 并引入了对特定场景的精致方法, 包括无神经损伤模型。这个全面的框架提供了预测和评估极端条件下的结构性能所需的理论和实践工具, 如地震事件, 确保现代结构工程应用关键的可靠和现实模拟。

62.1 引入 1785
62.1.1 线性热量弹性 1786
62.1.2 希腊模型 1787
62.2 分布 塑性 1787
62.2.1 钢材 模型 1787
62.2.2 混凝土 模型 1798
62.2.3 Anisotropic 损害模型与有效的损害和硬度恢复 1810
62.2.4 邦德斯利普 1824
62.2.5 零长度部分 单元 1825
62.3 彩色 塑性 1828
62.3.1 塑料长度 1828
62.3.2 Shear 失败模式 (极限状态材料) 1837
62.3.3 Ibarra 包含能源分散的歇斯底里模型 1840
62.3.4 Ghannoum 的模型 1858



62.1 引入

1 宪法模型是最终单元的核心 (材料) 非线性分析。最后的 单元 坚固 因为他们在评估 $\mathbf{K}^{(e)}$ (Eq. 50.12). 但是, 在我们非线性分析的背景下, 我们需要 $\bar{\mathbf{k}}_{e,n}^{tan,k}$ (Eq. 61.14) 或者更具体地说 E^{tan} (Eq. 61.18).

[2] “经典” (1D) 基于塑料的钢材模型在第一次塑料演讲中被覆盖, 所有其他模型都是 “希腊人” 基于他们最好捕捉非线性循环反应, 我们主要感兴趣。兩個部分, 图 62.1:

- 主要重点是纤维/层 单元 (这样 分布 塑性) 我们在哪里寻找 非线性压力 关系 [1].
- 彩色 塑性 要被描述为 非线性时刻曲率关系.

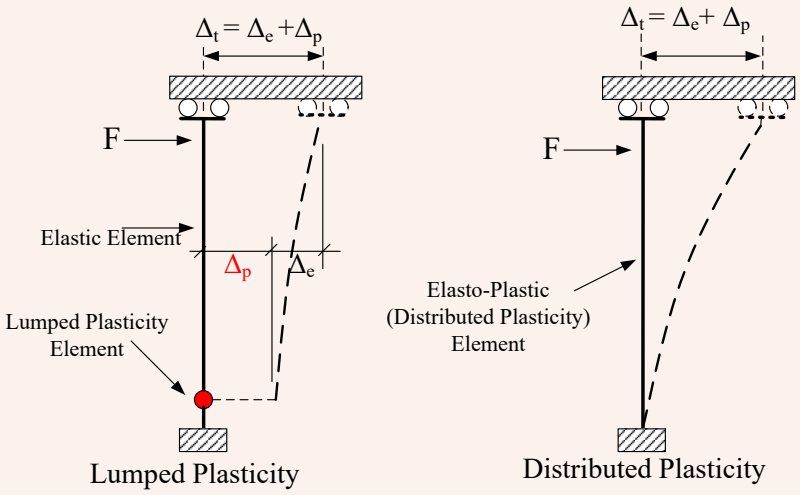


图 62.1: 塑性 模型

62.1.1 线性热量弹性

[3] 这就是它应该是这样。从 **连续介质力学**, 我们选择一个 convex **热力潜力** 对 应变张量 的组件有积极的定义四方功能。

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}\mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$$

根据定义 $\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a}{:}\boldsymbol{\varepsilon}$ 这是胡克的法律。

[4] 隔离和线性需要潜力 Ψ 是应变张量的四方变量, 即第一个变量的平面线性组合。$\varepsilon_I^2 = [\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})]^2$ 第二个不变的 $\varepsilon_{II}^2 = \frac{1}{2}\text{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$

$$\Psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\left(\lambda\varepsilon_I^2 + 4\mu\varepsilon_{II}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\varepsilon_I\right] - \frac{C_\varepsilon}{2T_0}\theta^2$$

哪里 λ 和 μ 是 拉姆的参数.

[1] 零长度元素也可能被非线性压力驱动关系所特征。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5 区分

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = & \quad \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\mathbf{I}\\ \sigma_{ij} = & \quad \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda+2\mu)\alpha\theta\delta_{ij}\end{aligned}$$

6 最终, 我们试图捕获钢材的复杂非线性反应和强化具体结构, 受回归循环负载的影响。(地震).

7 有很少的热动态根模型可以实现这种 (除了基于 损伤力学 的).

8 因此, 我们将依靠 **希里斯特模型**

62.1.2 希腊模型

9 基于实验室观察的模型, 导致实验性关系。

10 随后提交的所有模型 (数字 62.2) 它将属于这个类别, 并且 **现象** 模型

11 我们要抓住

衰退 混凝土的

强度 混凝土 或 钢材

- 紧张
- 压力和压缩

精力 因损害而减少的

克拉克关闭 以 荷载 逆转的结果。

12 我们将单独处理钢材和混凝土模型 (就像我们在 §55.2).

62.2 分布 塑性

62.2.1 钢材 模型

从博士论文的 “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation” 由 Kang, 2010.

62.2.1.1 引入

13 钢材模型为随机周期兴奋, 只有小困难。大多数模型是赫鲁主义的, 分析定义, 最成功的是具有变量的参数。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

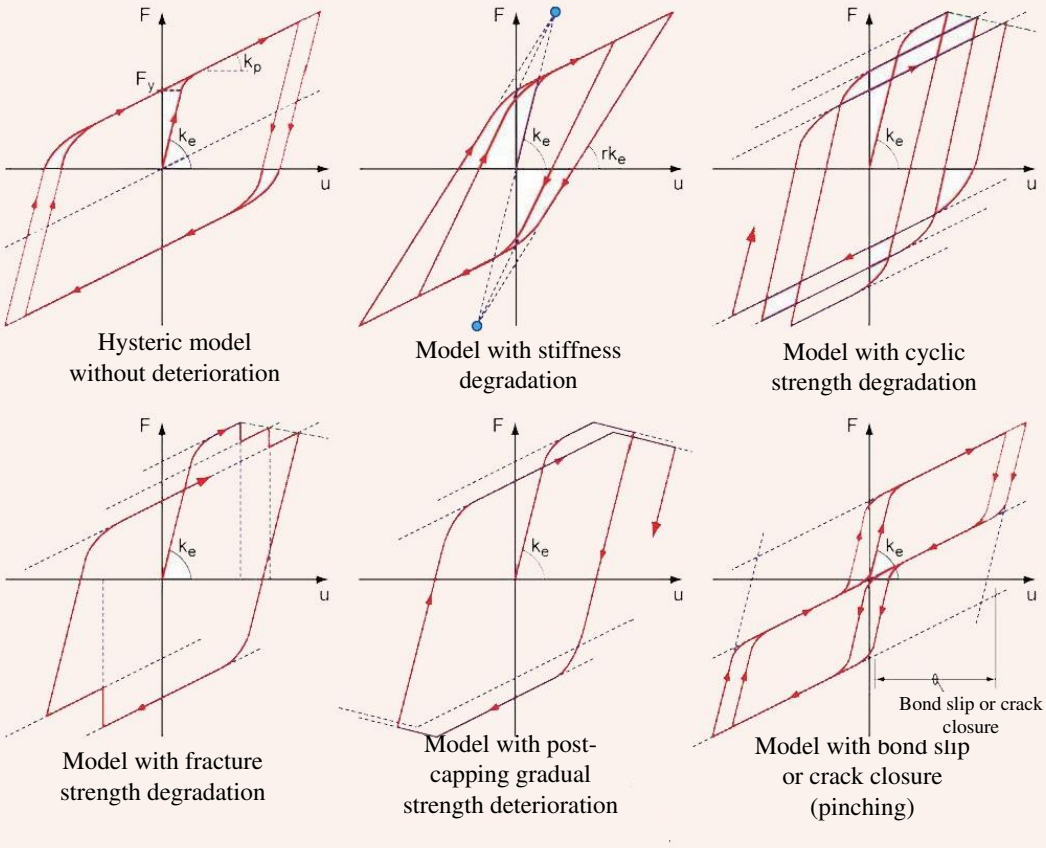


图 62.2: 催眠模型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

14 在这个组中, 我们区分三个不同的表达式:

阿尔及利亚解释 应力的方程式: $\sigma = f(\varepsilon)$.

含义算法 应力的方程式: $f(\sigma, \varepsilon) = 0$.

差异方程式 (第一命令): $\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = E^p = f(\sigma)$

15 一个常用的明确模式是:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = b\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \frac{(1-b)\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^R\right] 1/R}$$

哪里 σ_0, ε_0, b, 和 R 是 应力 和 应变 的功率, 是 应变 硬化参数, 以及对 Baushinger 效应负责的比例。(图 55.5b) 因行程大小而有所不同。ε_{max} 进入无线范围。

62.2.1.2 双向模型与以色列硬化

16 虽然前代模型根源于塑性理论, 但它的实施可能是有问题的。否则, 一个现象类似的模型可以基于 (Filippou, Popov, and Bertero, 1983) 正如在实施的 (Mazzoni et al., 2006).

62.2.1.2.1 紧张关系

17 而不是确定 E^{tan} 与 H 来自 EQ。55.12, 图 62.3a

$$E^{tan} = \frac{E.H}{E+H}$$

这个简化模型通过一个应变硬件率计算它 b 什么是 post-yield tangent modulus 的比例 E^{tan} 和初始 弹性模量 E, 并只考虑以色列硬化, 图 62.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$

18 要考虑以色列硬化中的弹性域的进化, 一个应力转换 σ_Δ 如下定义:

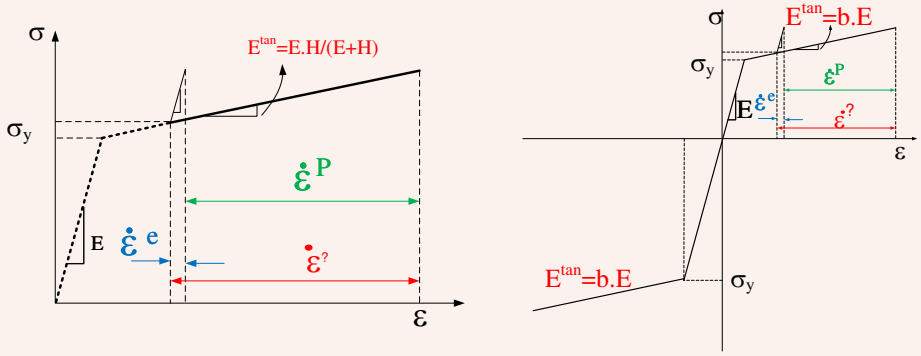
- 如果增值 应变 $\Delta\varepsilon$ 将一个积极的值转化为一个负面的值:

$$\begin{aligned} \Delta^N &= 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8} \\ \sigma_\Delta &= \Delta^N \cdot \sigma_y \cdot (1-b) \end{aligned} \tag{62.1}$$

- 如果增值 应变 $\Delta\varepsilon$ 将一个负值转换为一个积极的:

$$\begin{aligned} \Delta^P &= 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \cdot \varepsilon_y}\right)^{0.8} \\ \sigma_\Delta &= \Delta^P \cdot \sigma_y \cdot (1-b) \end{aligned} \tag{62.2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 塑性 模型　　(b) 双重 & Menegotto - Pinto 模型

图 62.3: 坦根模块比较; 塑性 vs. 梅内戈托 - Pinto

在哪里,

- a_1 和 a_3 是以色列硬化参数, 反映了压缩产量包装的增加, 通过塑料粘贴后产量强度的一部分。$a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$, 和压力产量包装作为产能强度的一部分后, 塑料线 $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$.
- a_2 和 a_4 是以色列的硬化参数, 与 a_1 和 a_3, 和 ε_{max} 和 ε_{min} 是 应变 在最大和最低的 应变 逆转点。这个模型的限制因素是 a_1, a_2, a_3 和 a_4 必须通过模型的曲线匹配与实验结果来确定。假设值是 $a_1 = 0, a_2 = 55, a_3 = 0$, 和 $a_4 = 55$ 在 (Mazzoni et al., 2006).

62.2.1.2.2 二进制模型的定义

图 62.4 顯示手順獲得單位应力

19 σ 即 Tangent Module E^{tan} 由 uniaxial 应变 ε.

62.2.1.3 Menegotto - 色彩模型

20 这个模型基本上是前一个的延伸。它引入顺利曲线, 因为它更好地捕捉实验数据的行为。此外, 中断可能会导致非线性分析中的转换问题。因此, 它已被精化为 Menegotto and Pinto, 1973 保持顺利曲线, 并通过修改 Filippou, Popov, and Bertero, 1983 包括以色列 应变 硬化 和 应变, 图 62.5b.

21 该模型是计算效率高, 非常符合强化钢材条线的循环测试实验结果。(Taucer, Spacone, and Filippou, 1991b).

22 再一次, 如同在二进制模型中一样, 而不是确定 E^{tan} 来自 EQ。55.12, 图 62.3a 它还通过应变硬化率计算。b 什么是 post-yield tangent modulus 的比例 E^{tan} 和初始 弹性模量 E, 并只考虑以色列硬化, 图 62.3b

$$E^{tan} = b \cdot E$$

23 我们将通过衍生品:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

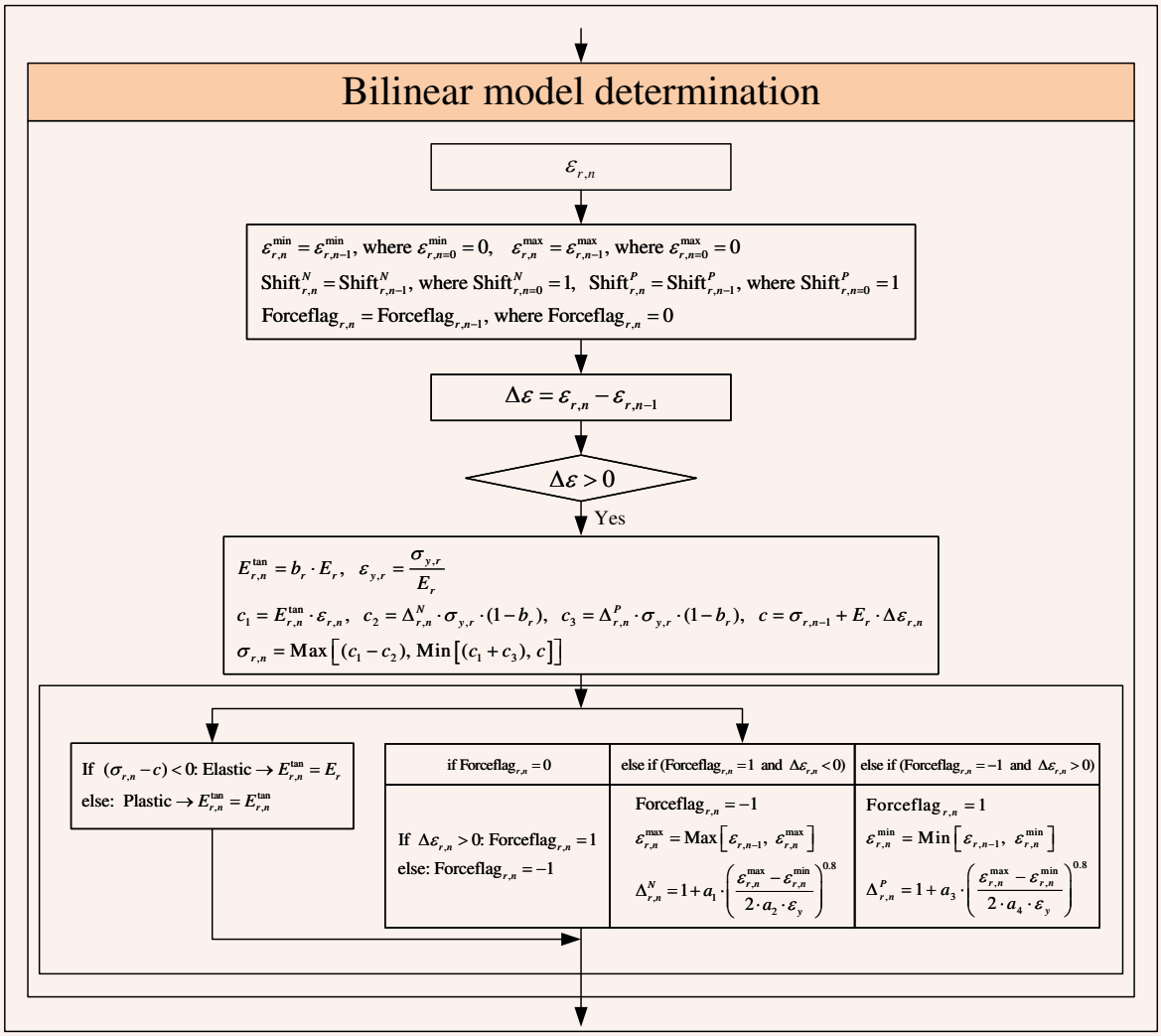
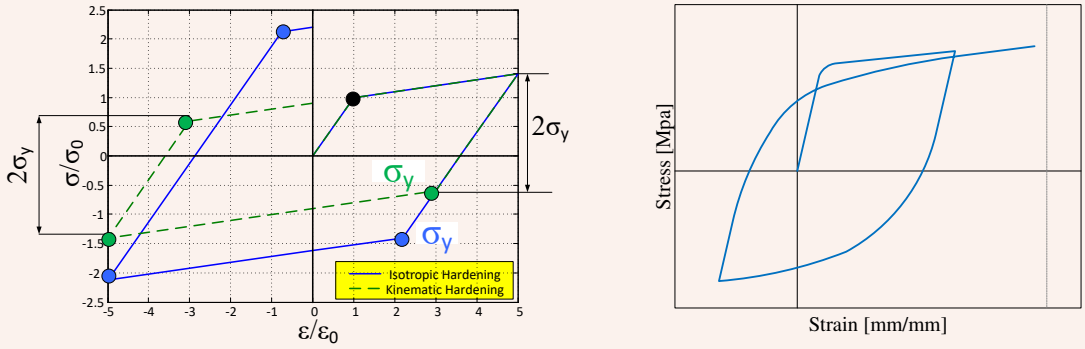


图 62.4: 二进制模型的定义

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 塑性 模型　　(b) Menegotto Pinto 钢材 模型

图 62.5: 逆循环 荷载 模型比较: 塑性 *vs.* 梅内戈托 - Pinto

1. 开始与 实验性压力 关系

$$\sigma^* = b \cdot \varepsilon^* + \frac{(1-b)\cdot\varepsilon^*}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}} \tag{62.3}$$

在哪里,

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_{rev}}{\sigma_0 - \sigma_{rev}}$$

2. σ_0 和 ε_0 是应力和应变在考虑分支的两个症状相遇时。(B); σ_{rev} 和 ε_{rev} 是应力和应变在当 应变 逆转 发生了 (A), 图 62.6.

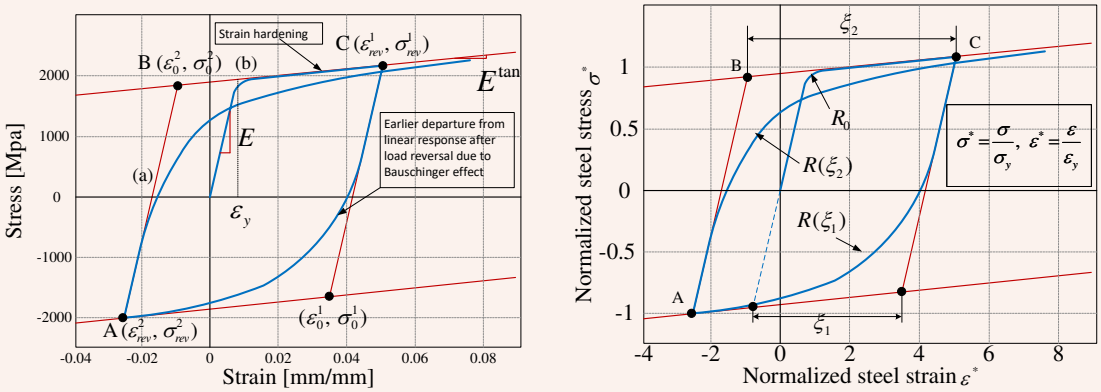


图 62.6: 梅内戈托 Pinto (Menegotto and Pinto, 1973) 钢材 模型

3. 坦根模块 E^{tan} 通过区分来实现

$$E^{tan} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sigma_0 - \sigma_{rev}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{rev}} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*}; \quad \frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\varepsilon^*} = b + \left[\frac{1-b}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}}\right] \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^{*R}}{1+\varepsilon^{*R}}\right]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 有一个曲折的过渡从直线的同步与滑板 E (a) 又一个同位素与斯洛普 E^{tan} (b).
5. $\sigma_{rev}, \varepsilon_{rev}$ 是的, 应力 和 应变 在 应变 逆转点 (点 A)，该点同时也是具有下列斜率的渐近线的起点 E (a).
6. σ_0 和 ε_0 是应力和应变在两个无症状的交叉点 (点 B).
7. b 是的, 应变 硬化比例 间斯洛普 E^{tan} 和 E, 和 R 是影响过渡曲线的 曲率 的参数 两者之间是无症状的, 并允许一个良好的代表性 Bauschinger 效果。
8. $\sigma_0, \varepsilon_0, \sigma_{rev}$ 和 ε_{rev} 每次 应变 逆转后更新。
9. R 取决于目前的同位素交叉点之间的绝对 应变 差异 (点 B) 以前的最大或最低 应变 逆转点 (点 C) 取决于当前的 应变 是否会增加或下降, 分别。
10. 有两种特殊的表达 $R(\xi)$:

    - Menegotto-Pinto 原始模型 $R(\xi) = R_0 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
    - 在 OpenSees 上提到的: $R(\xi) = R_0 \left(1 - \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}\right)$

    在哪里, R_0 是参数的价值。R 第一次充电时, 以及 cR_1 和 cR_2 实验定义的参数与 R_0. ξ 可以表达为

    $$\xi = \left| \frac{\varepsilon^m - \varepsilon_0}{\varepsilon_y} \right|$$

    在哪里, ε^m 压力在前的最大或最低压力逆转点, 取决于当前压力是否增加或下降。ε_0 是应变在两个无症状的当前交叉点。
11. 两者 ε^m 和 ε_0 相同的同位素和 ε_y 是初始收益 应变.
12. 到目前为止, 模型 非以色列硬化在逆循环 荷载. 菲利普提出了一项 交换 σ_0 和 ε_0 在线性产量中, 如下:

    - 如果增值 应变 $\Delta\varepsilon$ 改变积极价值 否定值:

    $$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
    $$\varepsilon_0 = \frac{-\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^N - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
    $$\sigma_0 = -\sigma_y \cdot \Delta^N + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o + \varepsilon_y \cdot \Delta^N)$$

    - 如果增值 应变 $\Delta\varepsilon$ 改变负值 有一个积极的价值,

    $$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon^{max} - \varepsilon^{min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$$
    $$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y \cdot \Delta^P - E^{tan} \cdot \varepsilon_y \cdot \Delta^P - \sigma_{rev} + E \cdot \varepsilon_{rev}}{E - E^{tan}}$$
    $$\sigma_0 = \sigma_y \cdot \Delta^P + E^{tan} \cdot (\varepsilon_o - \varepsilon_y \cdot \Delta^P)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里, a_1 和 a_3 是 以色列硬化参数 反映在塑料 应变 之后, 压缩产量包装的增加, 通过 屈服强度 的部分 $a_2 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$, 和压力产量包装作为产能强度的一部分后, 塑料线 $a_4 \cdot \frac{\sigma_y}{E}$. a_2 和 a_4 是以色列的硬化参数, 与 a_1 和 a_3, 和 ε_{max} 和 ε_{min} 是 应变 在最大和最低的 应变 逆转点。

13. 问题就是那 a_1, a_2, a_3 和 a_4 必须通过模型的曲线匹配与实验结果来确定. 假设值是 $a_1 = 0$, $a_2 = 55$, $a_3 = 0$, 和 $a_4 = 55$. 注意事项 相似之处 与前型号; 图 62.7,62.8, 62.9 和 62.10.

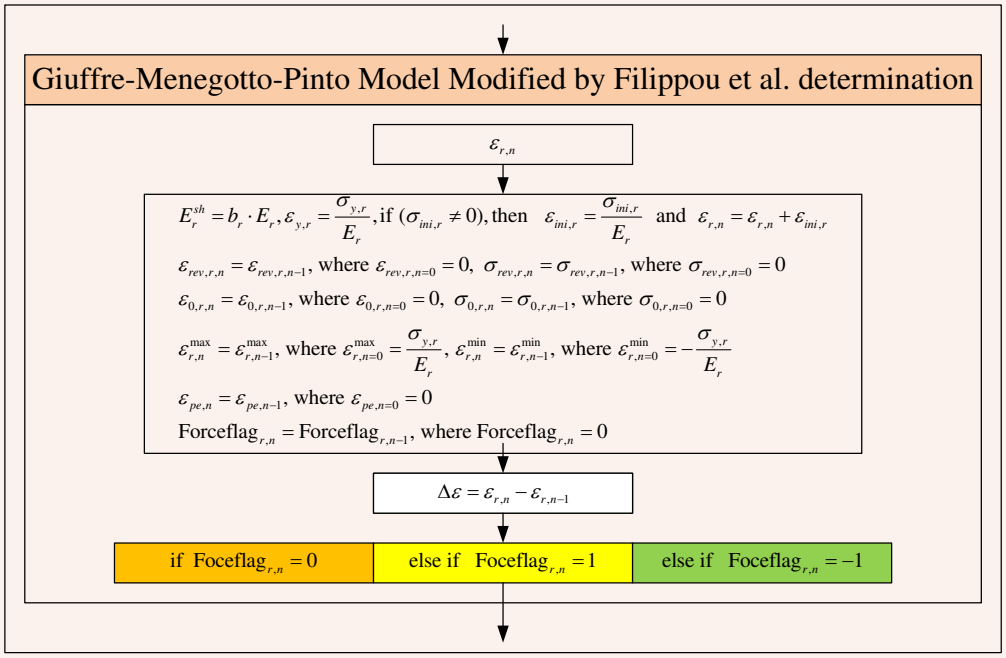


图 62.7: 定义 (1) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

if $\text{Foceflag}_{r,n} = 0$

if $\Delta\varepsilon = 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$	$\varepsilon_{rev,r,n} = 0$
$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$	$\sigma_{rev,r,n} = 0$
$\varepsilon_{0,r,n} = 0$	$\varepsilon_{0,r,n} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\sigma_{0,r,n} = 0$	$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r}$	$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \sigma_{y,r} / E_r$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = -\sigma_{y,r} / E_r$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 0$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{ini,r}$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$E_{r,n}^{\tan} = E_r$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$	$c_1 = 1 + \lvert\dot{\varepsilon}\rvert^R$
	$c_2 = c_1^{1/R}$	$c_2 = c_1^{1/R}$
	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{c_2}$
	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{c_1 \cdot c_2}$
	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$

图 62.8: 定义 (2) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = 1$

if $\Delta\varepsilon < 0$	else if $\Delta\varepsilon > 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$, $\varepsilon_{0,r,n}$, $\sigma_{0,r,n}$
$\Delta^N = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_2 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{-\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = -\sigma_{y,r} \cdot \Delta^N + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} + \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^N)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

图 62.9: 定义 (3) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

else if $\text{Foceflag}_{r,n} = -1$

if $\Delta\varepsilon > 0$	else if $\Delta\varepsilon < 0$
$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$	$\varepsilon_{rev,r,n}$, $\sigma_{rev,r,n}$, $\varepsilon_{0,r,n}$, $\sigma_{0,r,n}$
$\Delta^P = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{r,n}^{\max} - \varepsilon_{r,n}^{\min}}{2 \cdot a_4 \cdot \varepsilon_y} \right)^{0.8}$	$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\varepsilon_{0,r,n} = \frac{\sigma_{y,r} \cdot \Delta^P - E_r^{sh} \cdot \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P - \sigma_{rev,r,n} + E_r \cdot \varepsilon_{rev,r,n}}{E_r - E_r^{sh}}$	$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$
$\sigma_{0,r,n} = \sigma_{y,r} \cdot \Delta^P + E_r^{sh} \cdot (\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{y,r} \cdot \Delta^P)$	$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\min}$
$\varepsilon_{r,n}^{\max} = \text{Max}\left[\varepsilon_{r,n}^{\max}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\text{Forceflag}_{r,n} = -1$
$\varepsilon_{r,n}^{\min} = \text{Min}\left[\varepsilon_{r,n}^{\min}, \varepsilon_{r,n-1} \right]$	$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$
$\varepsilon_{pe,n} = \varepsilon_{r,n}^{\max}$	$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$
$\text{Forceflag}_{r,n} = 1$	$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\xi = \left\lvert \frac{\varepsilon_{pe,n} - \varepsilon_{0,r,n}}{\varepsilon_{y,r}} \right\rvert$	$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$
$R = R_0 - R_0^{nratio} \cdot \frac{cR_1 \cdot \xi}{cR_2 + \xi}$	$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$
$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$
$\text{c}_1 = 1 + \lvert \dot{\varepsilon} \rvert^R$	$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$
$\text{c}_2 = \text{c}_1^{1/R}$	$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$
$\sigma_{r,n} = b_r \cdot \dot{\varepsilon} + (1 - b_r) \cdot \frac{\dot{\varepsilon}}{\text{c}_2}$	$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$
$\sigma_{r,n} = \sigma_{r,n} \cdot (\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}) + \sigma_{rev,r,n}$	
$E_{r,n}^{\tan} = b_r + \frac{(1 - b_r)}{\text{c}_1 \cdot \text{c}_2}$	
$E_{r,n}^{\tan} = E_{r,n}^{\tan} \cdot \frac{\sigma_{0,r,n} - \sigma_{rev,r,n}}{\varepsilon_{0,r,n} - \varepsilon_{rev,r,n}}$	

图 62.10: 定义 (4) 适用于经 Filippou 等人修正的 Giuffré–Menegotto–Pinto 模型。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

62.2.2 混凝土 模型

从博士论文的 “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation” 由 Kang, 2010.

62.2.2.1 封锁的影响

24 在我们走向具体的构建模型之前, 重要的是要注意限制在茶压线曲线上的作用。

25 Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928 进行了一项最早和最全面的研究, 其中混凝土核在油压 Hooke 细胞内进行了测试, 图 62.11. 並發現, 限制 压力 實際上會增加強度 [2]

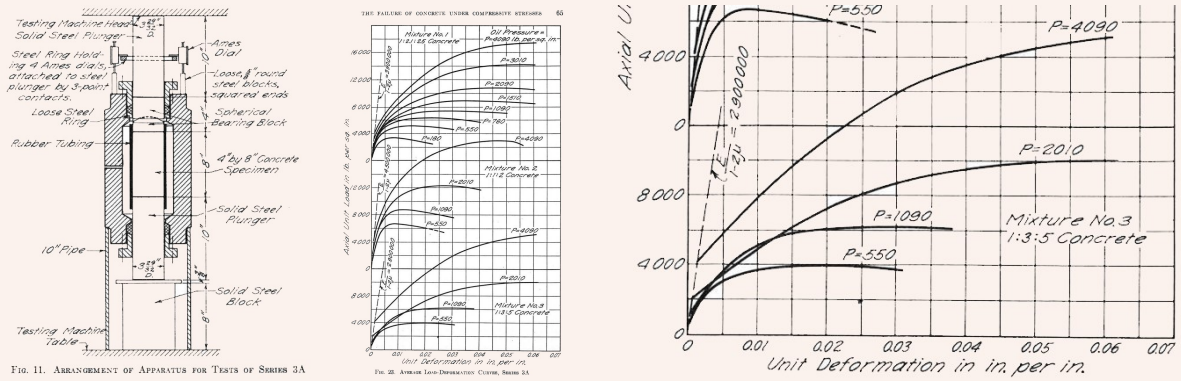


Fig. 11. Arrangement of Apparatus for Tests of Series 3A

Fig. 23. Average Load-Deformation Curves, Series 3A

图 62.11: 限制对混凝土强度的影响 (Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928)

26 自那时起, 许多模型已被提议对混凝土强度的限制影响, 尤其是 Mander, Priestley, and Park, 1988 谁发表了最有权威的总结研究关于封锁的影响。

27 这些结果对我们的研究非常相关, 因为在我们的情况下, 将通过连接/分裂提供限制。因此, 我们将不得不将不同的力量归咎于有限和无限的混凝土.

28 和 (Mander, Priestley, and Park, 1988) 模型, 图 62.12 定义下列值:

ε_0 混凝土 应变 最多不限的 应力
ε_{0c} $K\varepsilon_0$
ε_{20c} 混凝土 应变 在 20% 最多 应力
ε_{50U} $\frac{3+0.002f_c'}{f_c'-1000}$
K $1+\rho_s\frac{f_y}{f_c'}$
$Z_c f_c'$ $\frac{\Delta f_c}{\Delta \varepsilon_c}$

29 限制对强度的影响显示在 图 62.13

[2]这可以很容易地通过 Mohr 的圆形结构来验证, 并采取滑动故障模式。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

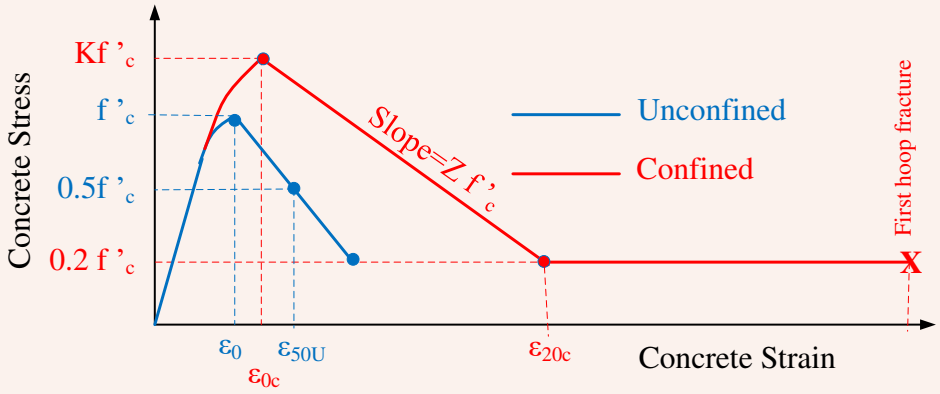


图 62.12: 限制 *vs.* 无限压缩 混凝土 强度 (Mander, Priestley, and Park, 1988)

.

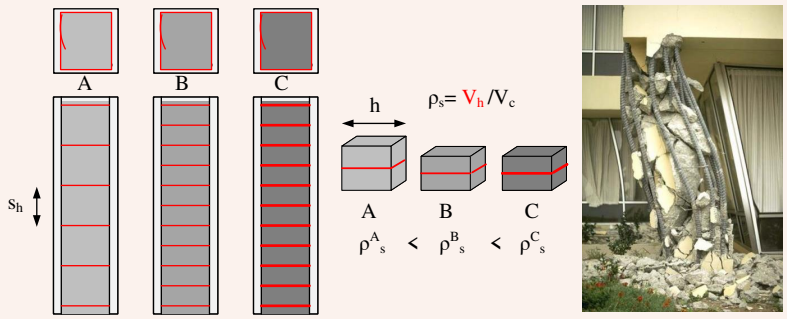


图 62.13: 冲突在提供混凝土限制中的作用

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

62.2.2.2 改造 Kent 和 Park 模型

62.2.2.2.1 紧张关系

30 具体模型描述了一个自愿的循环线历史下的具体压力线关系。具体而言，实施的模型考虑到四个重要因素:

1. 对单调包围曲线在压缩中的具体封锁的影响，图。62.12 (Mander, Priestley, and Park, 1988) (Richart, Brandtzæg, and Brown, 1928)
2. 随后降低下载和重新加载曲线的硬度，增加压缩应变的值
3. 紧张的影响
4. 在压缩中循环充电时的歇斯底里反应

31 压缩中的混凝土的单调包围曲线按照原始模型进行 Kent and Park, 1971 延伸到 Scott, Park, and Priestley, 1982. 尽管自此以来发布了更准确、更完整的模型，但所谓改造的 Kent 和 Park 模型提供了简单与准确之间的良好平衡。

32 紧张 是骨折之间的具体能力抵抗紧张压力，并有助于成员的灵活硬度。由于裂缝的差异性质，混凝土在裂缝之间仍然与强化有关，从而有助于成员的坚固。然而，随着负载的强度增加，在更接近的间隔形成额外的裂缝，从而减少可以在混凝土中发展的紧张压力。因此，紧张强化逐渐减少，因为荷载在破裂后阶段增加。

33 过去的调查人员通过修改具体压力和压力关系来考虑紧张，以便在达到紧张强度后 (克里奇) 随着 应变 的增量，紧张的 应力 逐渐下降到零。抗拉强度的逐步减少通常被定义为线性、多线性或异常。与线性减少率相似的方法正在采用。

34 然而，结果表明，在一个成员的所有纤维上施加压力会导致极限强度的显著过度估值。更紧张的强化是一个局部化的现象，影响混凝土在强化即时附近。在 解析 研究中，只有在强化周围有效区域内的 混凝土 纤维被分配为压力缓解。显然，有效区域的尺寸对会员的紧张强化行为产生重大影响。

35 改造的 Kent 和 Park 模型 1971 顯示在 图 62.14 在压缩中，单调的具体压力线关系是由三个区域定义的。承认压缩是积极的条约，三个地区是

- 区域 OA: $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot \left[2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]$$

- 区域 AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = K \cdot f_c \cdot [1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_0)]$$

- 区 BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$\sigma_c = 0.2 \cdot K \cdot f_c$$

36 相应的坦根模块由以下方程式提供

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

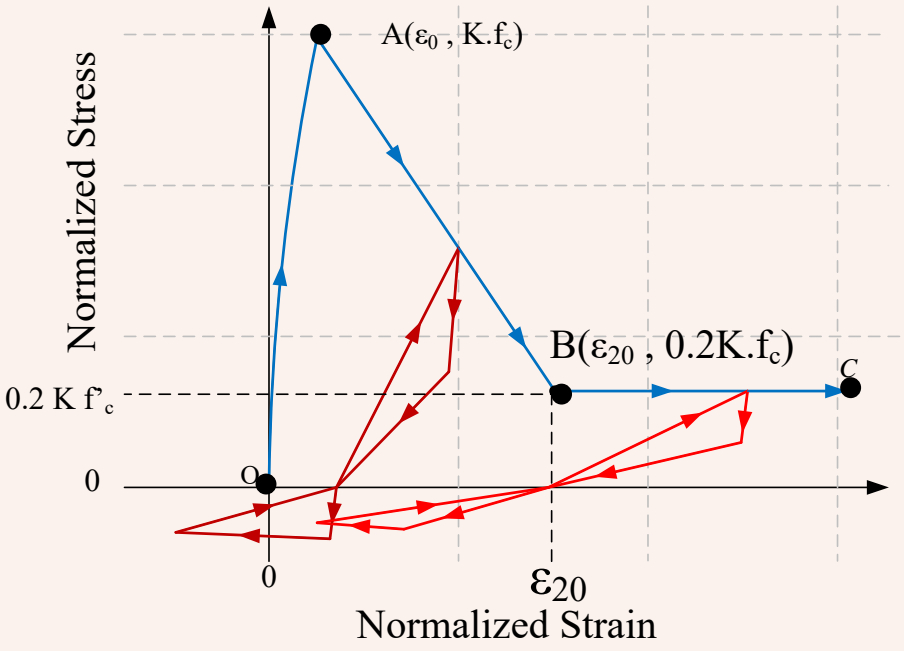


图 62.14: 混凝土 材料模型在压缩中
(Yassin, 1994)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- 区域 OA: $\varepsilon_c \leq \varepsilon_0$

$$E^{tan} = \frac{2 \cdot K \cdot f_c}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)$$

- 区域 AB: $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = -Z \cdot K \cdot f_c$$

- 区 BC: $\varepsilon_c > \varepsilon_{20}$

$$E^{tan} = 0$$

在哪里,

$$\varepsilon_0 = 0.002 \cdot K$$

$$K = 1 + \frac{\rho_s \cdot f_{ys}}{f_c}$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3+0.29 \cdot f_c}{145 \cdot f_c - 1000} + 0.75 \cdot \rho_s \cdot \sqrt{\frac{h}{s_h}} - 0.002 \cdot K}$$

哪里

ε_0 对应最大应力的混凝土应变

ε_{20} 应力降至最大应力 20%时的混凝土应变

K 约束作用引起强度提高的系数

Z 应变软化斜率

f_c 混凝土圆柱体抗压强度，单位为 MPa（1 MPa = 145 psi）

f_{ys} 箍筋屈服强度，单位为 MPa

ρ_s 箍筋体积与按箍筋外缘量取的混凝土核心体积之比

h 按箍筋外缘量取的混凝土核心宽度

s_h 箍筋或箍组的中心间距

37 循环上载和重新上载行为由一组直线代表。图 62.14 它表明, 歇斯底里的行为发生在紧张和压缩压力下。

38 虽然压缩和紧张的歇斯底里的漏洞是连续的, 但为了清晰度, 它们将单独讨论。

39 桌子 62.1 总结了有限和无限 混凝土 的关键弹性和强度特性。f_c 在 psi 为 f_t; 替代 Kent 和 Park 的剩余压力/压力是使用 $f_{c,res}^{conf} = 0.9 f_c$ 和 ε_{res}^{conf} 被授予 A “大型” 以确保逐步下降。这种组合确保稳定的分析 (Ghannoum, 2010).

压缩

40 在模型的压缩侧面, 有一个 **连续衰退** 二、下载和重新加载线的密度, 以提高最高值为应变, 如图所示。62.14. 硬度的下降是这样, 所有重新充电线的投影在图中的一个常见点 R 中

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 62.1: 限制 *vs.* 无限的 混凝土 弹性和强度特性

	ε_0	f_c	f_t	E_0	E_t	$f_{c,20}$	ε_{20}
无限	0.003	测试	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{unc}}{\varepsilon_0^{unc}}$	$\frac{E_0^{unc}}{5}$	$f_c^{unc}/3$	$3\varepsilon_0^{unc}$
限制	$0.002K$	Kf_c^{unc}	$7.5\sqrt{f_c^{unc}}$	$2\frac{f_c^{conf}}{\varepsilon_0^{conf}}$	$\frac{E_0^{conf}}{5}$	$0.2f_c^{conf}$	$\varepsilon_0^{conf} + \frac{Kf_c^{unc} - f_{c,20}^{confined}}{ZKf_c^{unc}}$

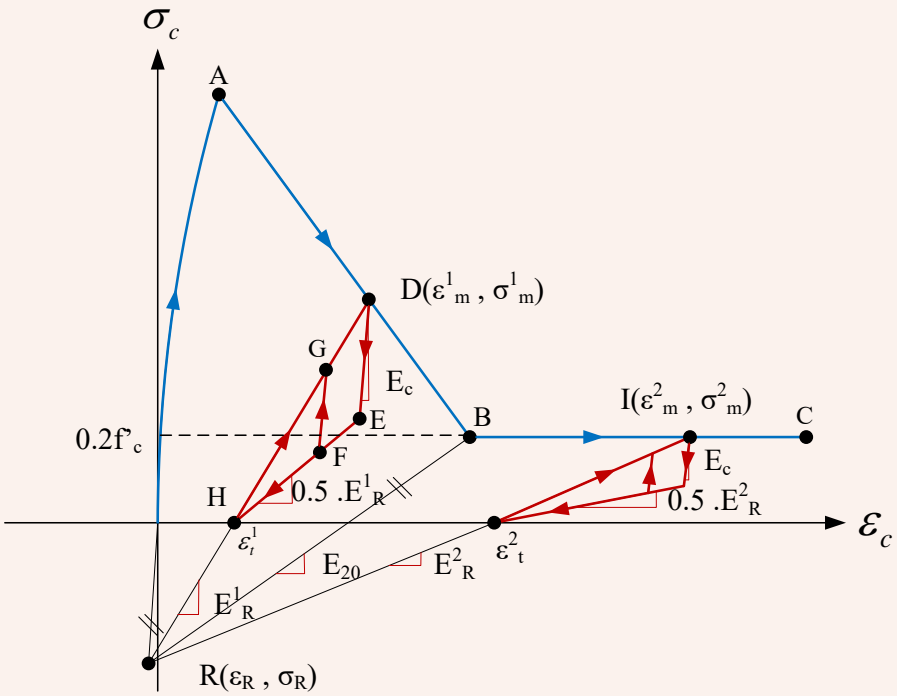


图 62.15: 混凝土 材料模型在压缩中循环充电 (Yassin, 1994)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

交叉。62.15. 点 R 它是由坦根的交叉到原来的单调封锁曲线和从 B 点的脱载线的投射, 相当于混凝土强度。$0.2 \cdot f_c$ (图 62.15).

41 交叉点的 应变 和 应力 是由以下表达式提供的。

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{0.2 \cdot K \cdot f_c - E_{20} \cdot \varepsilon_{20}}{E_c - E_{20}} \\ \sigma_R &= E_c \cdot \varepsilon_R \end{aligned} \tag{62.4}$$

哪里 E_c 它是原来的单调包围曲线的坦根模块, E_{20} 是单调包围曲线的 B 点的解载模块, 具有强度 $0.2 \cdot f_c$. 其大小 E_{20} 必须通过实验来确定。

42 从压缩单调包装上点下载后 (点 D 在 图 62.15), 并在达到零 应力 轴之前 (点 H 在 图 62.15), 模型答案是由以下方程式定义的两个较小的包装,

- 最大包装 (线 HD)

$$\sigma_{max} = \sigma_m + E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_m) \tag{62.5}$$

- 最小包装 (线上他)

$$\sigma_{min} = 0.5 \cdot E_R \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \tag{62.6}$$

在哪里,

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{\sigma_m - \sigma_R}{\varepsilon_m - \varepsilon_R} \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_m - \frac{\sigma_m}{E_R} \end{aligned} \tag{62.7}$$

σ_m 和 ε_m 应力 和 应变 在压缩单调包装上分别在下载点。因此, 两个较小的包装的位置取决于排放点的位置。

43 对于在较小的包装中部分充电和排放周期, 模型跟随直线与模块 E_c.

44 在 数值 实施中, 一个试验的 应力 和 tangent 模块是基于线性弹性行为的假设。E_c,

$$\sigma_{c,n}^{tr} = \sigma_{c,n-1} + E_c \cdot \Delta\varepsilon_{c,n} \tag{62.8}$$

哪里 $\sigma_{c,n}^{tr}$ 是更新试验 应力, $\sigma_{c,n-1}$ 是以前的 应力 状态和 $\Delta\varepsilon_{c,n}$ 是应变的增幅。以下规则用于确定实际的应力和模型的模块。

$$\begin{aligned} &\text{若} \quad \sigma_{min} \le \sigma_{c,n}^{tr} \le \sigma_{max} \quad \text{则} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{c,n}^{tr} \quad \text{且} \quad E^{tan} = E_c \\ &\text{若} \quad \sigma_{c,n}^{tr} < \sigma_{min} \quad \text{则} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{min} \quad \text{且} \quad E^{tan} = 0.5 \cdot E_r \\ &\text{若} \quad \sigma_{c,n}^{tr} > \sigma_{max} \quad \text{则} \quad \sigma_{c,n} = \sigma_{max} \quad \text{且} \quad E^{tan} = E_r \end{aligned} \tag{62.9}$$

45 规则规定模型在压缩中的歇斯底里的行为, 根据 Eq。62.4 到 62.9 以 图 的样品历史为图 62.15.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

46 如果从 D 点到 E 点进行下载，则将重新下载返回 D 的同一路径。如果下载达到 F 点，则 DEFGD 的歇斯底里路将导致重新下载。如果完成到 H 点的下载发生，则重新下载将导致 DHD 歇斯底里的旋转。值得注意的是，重新充电线在初始解载时将始终与压缩单调包装相匹配。对于当下载继续过去点 H，模型开始在紧张状态下重新加载时，不同的规则组合控制了歇斯底里的行为。但是，在压缩中重新加载时，模型将在完成解载时重新加密压缩区域到零应力轴点。(点 H) 无论发生在紧张区域什么都不会影响模型的行为，一旦它返回压缩区。

紧张

模型的紧张行为，如图中所示 62.16 考虑紧张强化，并在初步切割后增加最大紧张 应变 的值的下载和重新加载硬度的下降。最高 抗拉强度 的 混凝土 (分裂模块) 被认为是相同的，

$$f_t = 0.6228\sqrt{f_c} \tag{62.10}$$

哪里 f_t 和 f_c 在 MPA 中表达。

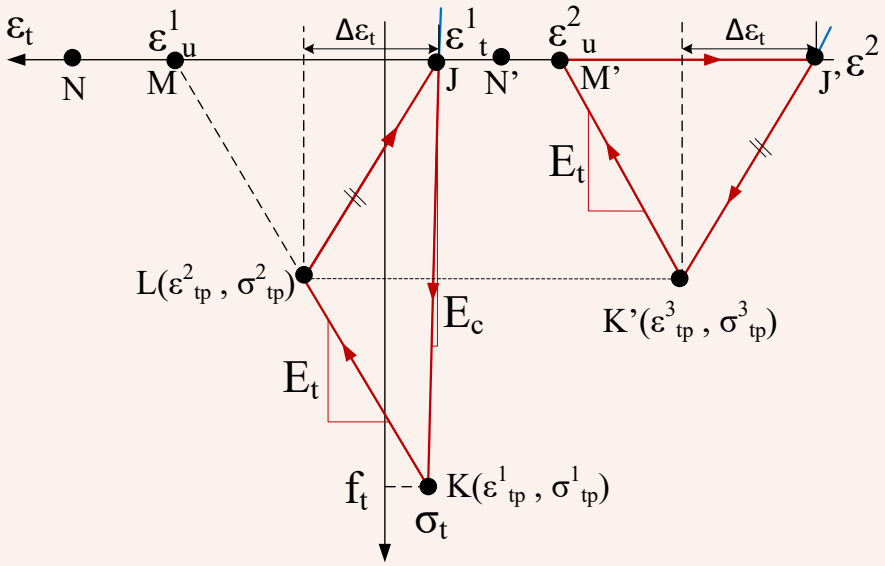


图 62.16: 混凝土 材料模型在周期充电时紧张
(Yassin, 1994)

47 图 62.16 显示了连续两次紧张的歇斯底里滑板，这是一个样本周期历史的一部分，其中还包括压缩压力。该模型假设紧张压力可以发生在紧张轴的任何地方，无论是由于初始紧张充电或由于从压缩状态中解载。在后者情况下，在压缩 应变 下发生一个紧张的 应力。紧张压力的关系由三个点与坐标定义 $(\varepsilon_t, 0)$, $(\varepsilon_{tp}, \sigma_{tp})$ 和 $(\varepsilon_u, 0)$，如在 图 中的 J、K 和 M 点所代表 62.16 相应。ε_t 是紧张的点，从压缩压力区域的脱载线穿过紧张轴。ε_t 由 EQ 提供。62.7 和最

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

大压缩 应变 的变化。ε_{tp} 和 σ_{tp} 是应变和应力在紧张的应力-应变关系的顶峰, 并由以下表达方式提供;

$$\begin{aligned}\varepsilon_{tp} &= \varepsilon_t + \Delta\varepsilon_t \\ \sigma_{tp} &= f_t \cdot \left(1 + \frac{E_t}{E_c}\right) - E_t \cdot \Delta\varepsilon_t\end{aligned} \tag{62.11}$$

哪里 $\Delta\varepsilon_t$ 是前面的最大差异, 在 应变 和 ε_t 如在 图 中所示 62.16.

48 初步打破之前, $\Delta\varepsilon_t$ 等同于 f_t/E_c. E_t 是依赖于 数值 和物理参数的紧张固定模块, ε_u 是 应变 在点上, 在那时的紧张性 应力 被减少到零, 并由表达所提供;

$$\varepsilon_u = \varepsilon_t + f_t \cdot \left(\frac{1}{E_t} + \frac{1}{E_c}\right) \tag{62.12}$$

49 鉴于这三个控制点, 紧密的应力-应变关系和坦根模块由以下方程式定义。(紧张是积极的),

- 区域 JK: $\varepsilon_t < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{tp}$

$$\sigma_c = E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_t), \quad E^{tan} = \frac{\sigma_{tp}}{\varepsilon_{tp} - \varepsilon_t} \tag{62.13}$$

- 区域 KM: $\varepsilon_{tp} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_u$

$$\sigma_c = \sigma_{tp} + E^{tan} \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}), \quad E^{tan} = -E_t \tag{62.14}$$

- MN 区: $\varepsilon_c > \varepsilon_u$

$$\sigma_c = 0, \quad E^{tan} = 0 \tag{62.15}$$

If $\varepsilon_{tp} \geq \varepsilon_u$ 然后 σ_{tp}, σ_c 和 E^{tan} 所有人都被认为是零。模块 E_t 控制紧张的程度, 通过控制 Eq 的节点。62.14. 越紧, 越小就会是压力加强的效果。电动充电和重新充电由 Eq 管理。62.13 它还包括硬度下降, 以增加应变差异值 $\Delta\varepsilon_t$. 价值的 $\Delta\varepsilon_t$ 每次改变 $\varepsilon_c - \varepsilon_{tp}$.

50 模型的紧张行为, 如 Eq 所描述。62.10 到 62.15, 可以更好地理解, 通过在 Fig 中遵循示例负载路径。62.16. 随着模型从压缩中脱下, 它在 J 点上穿过应变轴。然后在紧张状态下充电, 直到初始的切割发生在 K 点。超過點 K 的緩和開始, 直到 应变 逆點 L。从 L 点到 J 点的直线, 模型在压缩中重新加载。第二次模型进入紧张局势是 J 点。重新充电路 J'K' 正是以前的下载路 LJ 的重复, 该路已在 应变 轴沿着 JJ 的距离转移。在 K 点, 模型加入了软化分支, 直到 应力 的紧张量在 M 点下调为零。应力 保持零, 通过 应变 逆转点 N' 直到模型在 J 点重新加载。因此, 该型号的应力电压容量减少到零。

51 目前的具体模型在过去的压力流历史所需的记忆量方面相对经济。作为记忆所使用的参数可以如下列出:

1. 应力 和 应变 在相应的最后模型状态点

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 应变在压缩单调包装上最后的脱载点, ε_m
3. 差异性 $\Delta\varepsilon_t$ 最多前方直径 应变 和 ε_t

[52] 目前的 混凝土 损害是以解载和重新加载硬度下降的形式, 增加值为最大 应变。但实际的混凝土损害也包括在循环负载下减少单调包装。

62.2.2.2.2 改造的 kent 和 park 模型

图 62.17 和 62.18 顯示手順獲得 uniaxial 应力 σ 即 Tangent Module E^{tan} 由 uniaxial 应变 ε.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

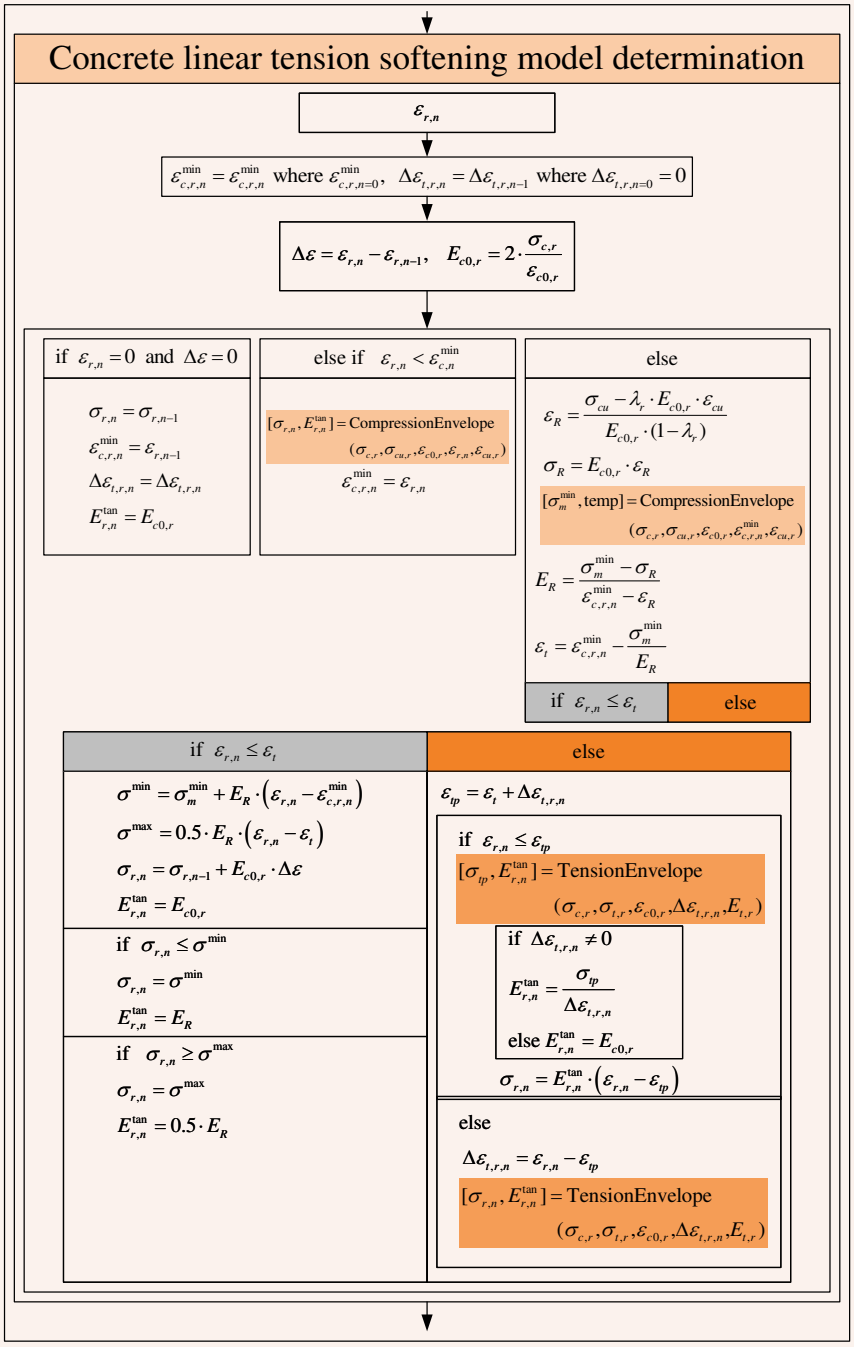


图 62.17: 定义 (1) 改造的 Kent 和 Park 模型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

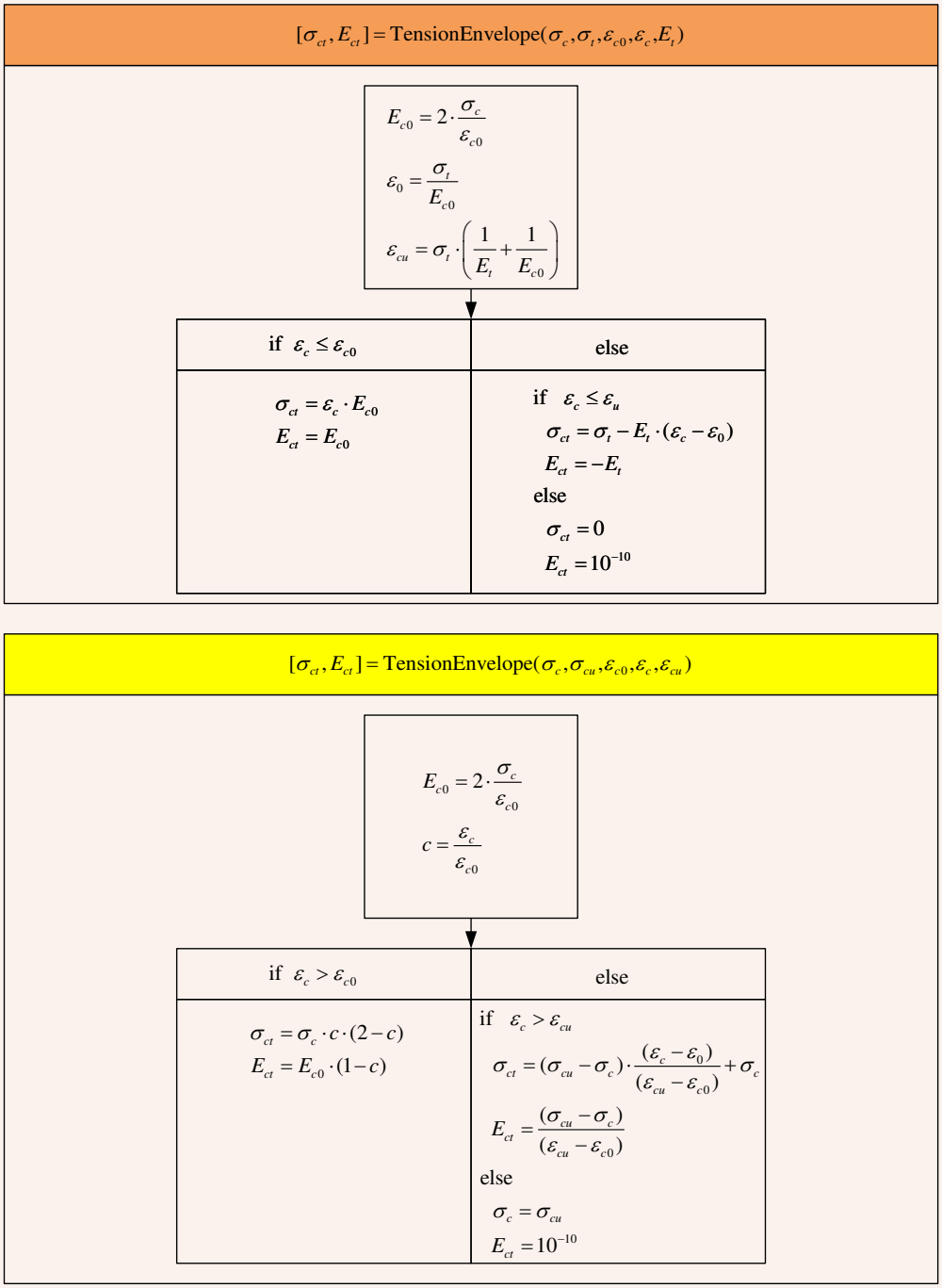


图 62.18: 定义 (2) 改造的 Kent 和 Park 模型

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

62.2.3 Anisotropic 损害模型与有效的损害和硬度恢复

从博士论文的 “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation” 由 Kang, 2010 以及教授的支持。拉格内奥和先生 来自 ENS/Cachan 的 Lebon。

[53] 虽然改造的 Kent-Park 模型已在 May 应用中成功使用, 但它仍然是一个精确性能可能无法在实时混合模拟与有限数量的 iterations 背景下保证的实验模型。为了解决这种可能的障碍, 更多 **严格和热动态正确的宪法模型** 对于 混凝土 实施。

62.2.3.1 宪法模型

热力潜力

[54] 吉布斯的潜力 (已讨论在 §62.1.1) $\rho \cdot \phi^*$ 基于 Ladeveze 的框架 (Ladeveze, 1983) 对 anisotropic 损害模型。应力张量分为偏离和水静化组件, 使我们能够考虑分别是叶子和水位部分。此后, 每个组件都重新分成另外有两种: 积极和消极, 以模拟单方面效应, 图 62.19. 损害仅通过损害影响积极部分 张量 $\mathbf{D}$.

$$\rho \cdot \phi^* = \frac{1+\nu}{2 \cdot E}\left[\mathrm{Tr}\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\right) + \mathrm{Tr}\left(\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\right)\right] + \frac{1-2\nu}{6\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_+^2}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_-^2\right] \tag{62.16}$$

哪里 ρ, ν 和 E 分别是密度、泊松比和 Young 模块。张量的 $\mathbf{H}$ 被定义为

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{\frac{1}{2}}$$

哪里 $(\cdot)^D$ 是偏见的 $(\cdot)$,

$$(\cdot)^D = (\cdot) - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\cdot)\cdot\mathbf{1}$$

$\langle\cdot\rangle_{+,-}$ 是积极或消极的部分 $(\cdot)$, 和 D_H 它是水晶部分的 $\mathbf{D}$,

$$D_H = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\mathbf{D}$$

在 Ladeveze 的框架中 (Ladeveze, 1983), $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ 这是一个不寻常的积极的一部分。$\boldsymbol{\sigma}^D$: if $\boldsymbol{\lambda}_I$ 是自己的价值观 $\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D$ 和 $\mathbf{T}^I$ 相应的自我引导者, $\boldsymbol{\sigma}_+^D$ 是

$$\boldsymbol{\sigma}_+^D = \sum_I \langle\boldsymbol{\lambda}_I\rangle_+ \left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)\left(\mathbf{H}^{-1}\cdot\mathbf{T}^I\right)^T$$

宪法法

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

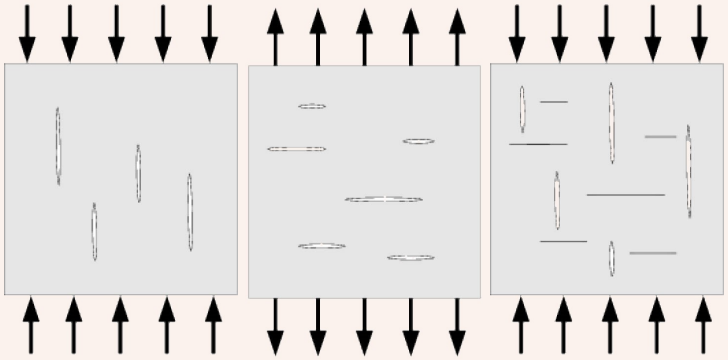


图 62.19: 由压缩、紧张、压力和压缩引起的裂缝

55 立法法源于基布斯的潜力, 使用 Eq。62.16:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \rho \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \frac{1-2\nu}{3\cdot E}\left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I} \\ &= \frac{1+\nu}{E}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\cdot\mathrm{Tr}\,(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\mathbf{I}\end{aligned}$$

哪里 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 是通过重写压力压力法则在有效的压力方面获得的有效压力:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\left(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}_+^D\mathbf{H}\right)^D + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-^D\right] + \left[\frac{\langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_+}{1-D_H} + \langle \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\rangle_-\right]\cdot\mathbf{I}$$

破坏进化法

56 损害进化法应考虑到循环负载。因此, 损害标准 f 必须依赖于有效的损害。d_ε (Ragueneau et al., 2006) 这样的那

$$\begin{aligned} f &= \hat{\varepsilon} - \kappa\,(d_\varepsilon) \\ d_\varepsilon &= \frac{\mathbf{D} : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}{\max\,(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}\end{aligned}$$

哪里 $\hat{\varepsilon}$ 是 Mazars 应变 (Mazars, 1986) 定义为

$$\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+}$$

和 κ 巩固功能,

$$\kappa\,(d_\varepsilon) = a\cdot\tan\left[\frac{d_\varepsilon}{aA} + \arctan\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right]$$

哪里 A 和 a 有两种损害率, 以及 κ_0 是初始 弹性 限界。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

57 因此, 如果损害标准是负的, 则材料处于线性弹性范围内, 并且积极, 损害在积极 应变 期间增加:

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda}\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+$$

在哪里损害 Lagrange 多元化器 $\dot{\lambda}$ 它是由 **库恩 · 图克的条件** ($f = 0$ 和 $f' = 0$).

62.2.3.2 多纤维 表述

58 基于 Euler-Bernoulli 泡沫理论的多纤维制作相当于单轴加载。因此, 压力压缩机和紧张压缩器被减少到

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

和,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

59 损害 张量 变成序列, 宪法可以重写为 (Desmorat et al., 2008),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\left(D_1, D_2\right) \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} \tag{62.17}$$

哪里 $\mathbf{B}$ 是张量的直径, 这取决于损害变量和负载, 以及 D_1 和 D_2 与紧张和压缩损害相应相关。

60 重新编写 EQ。62.17 以 矩阵 格式,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

so

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1\sigma}{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-D_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-D_2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \sigma \qquad D_H = D_1 + 2D_2$$

$$\varepsilon_e = \frac{1+\nu}{E}\left(\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+^D\boldsymbol{H}\right)^D + \boldsymbol{\sigma}_-^D\right) + \frac{1-2\nu}{3E}\left[\frac{\langle\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_+}{1-D_H} + \langle\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\rangle_-\right]\boldsymbol{Id}$$

61 因紧张 ($\sigma > 0$) 我们认为, 只有 D_1 增加了。

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^t} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^t & 0 \\ 0 & B_2^t \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$B_1^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1}+\frac{2}{1-D_2}\right)+\frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$
$$B_2^t = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1}-\frac{1}{1-D_2}\right)+\frac{1-2\nu}{3}\frac{1}{1-(D_1+2D_2)}$$

62 为压缩 ($\sigma < 0$) 我们认为, 只有 D_2 增加了。

$$\varepsilon_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E}\boldsymbol{B^c} = \frac{\sigma}{E}\begin{pmatrix} B_1^c & 0 \\ 0 & B_2^c \end{pmatrix}$$

$$B_1^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{4}{1-D_1}+\frac{2}{1-D_2}\right)+\frac{1-2\nu}{3}$$
$$B_2^c = \frac{1+\nu}{9}\left(\frac{-2}{1-D_1}-\frac{1}{1-D_2}\right)+\frac{1-2\nu}{3}$$

62.2.3.3 定义 anisotropic 损害模型

62.2.3.3.1 压力负载: $\varepsilon_{11} > 0$

宪法方程式

63 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ 和 $\eta_t = 1$ 然后:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{B_{11}^t}\varepsilon \\ \sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(\frac{4}{1-D_1}+2\right)+\frac{1-2\nu}{3\left(1-\frac{D_1+2D_2}{3}\right)}}\cdot\varepsilon \\ D_1 &= a\cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11}}{a}\right)-\texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right) \end{aligned} \tag{62.18}$$

在哪里, $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+} = \varepsilon_{11} \geq 0$,

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

64 D_2 它是恒定的, 而坦根模块则由 Eq 定义。62.18:

$$\dot{\sigma} = E^{tan}\cdot\dot{\varepsilon} \tag{62.19}$$

65 但是, 如果 $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$, tangent 模块相当于 secant 一。

$$E^{tan} = \frac{E}{B_{11}^t}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

密集的 Tangent Stiffness Modus 在 数值 实施

66 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ 和 $\eta_t = 1$, tangent 模块由 Eq 定义。62.18 和 62.19:

$$
\begin{aligned}
E_n^{tan} &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\
B_{11,n}^t &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1-D_{1,n}} + 2 \right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n}+2 \cdot D_{2,n-1})}{3} \right)} \\
D_{1,n} &= a \cdot A \left(\mathtt{atan}\left(\frac{\varepsilon_{11,n}}{a} \right) - \mathtt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right)
\end{aligned}
$$

哪里 n 是目前的兴奋阶段。

$$
\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(\frac{E}{B_{11,n}^t} \cdot \varepsilon_n \right) = \frac{E}{B_{11,n}^t} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B_{11,n}^t)^2} \cdot \frac{\partial B_{11,n}^t}{\partial \varepsilon_n}
$$

在哪里,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_{11,n}^t}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial B_{11,n}^t}{\partial D_{1,n}} \cdot \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} \\
C_1 = \frac{\partial B_{11,n}^t}{\partial D_{1,n}} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \frac{4}{(1-D_{1,n})^2} + \frac{1-2\nu}{9 \left(1 - \frac{D_{1,n}+2D_{2,n-1}}{3} \right)} \\
C_2 = \frac{\partial D_{1,n}}{\partial \varepsilon_n} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n} \left(a \cdot A \left(\mathtt{atan}\left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right) - \mathtt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \right) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\varepsilon_n}{a} \right)^2}
\end{aligned}
$$

67 最后, 我们获得 Tangent Module:

$$
E_n^{tan} = \frac{E}{B_{11,n}^t} - E \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B_{11,n}^t)^2} \cdot C_1 \cdot C_2
$$

62.2.3.3.2 压缩充电: $\varepsilon_{11} < 0$

宪法方程式

68 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ 和 $\eta_t = 1$ 然后:

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{E}{\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_2} + 4 \right) + \frac{1-2\nu}{3}} \cdot \varepsilon \\
D_2 &= \frac{a \cdot A}{2} \left(\mathtt{atan}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \varepsilon_{22}}{a} \right) - \mathtt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{B_{22}^c}{B_{11}^c} \cdot \varepsilon_{11}
\end{aligned}
\tag{62.20}
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里, $\hat{\varepsilon} = \sqrt{\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+} = \sqrt{2 \cdot \varepsilon_{22}^2} \geq 0$,

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} = \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

69 D_1 它是恒定的, 而坦根模块则由 Eq 定义。62.20:

$$\dot{\sigma} = E^{tan} \cdot \dot{\varepsilon} \tag{62.21}$$

70 但是, 如果 $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 < 0$, tangent 模块相当于 secant 一。

$$E^{tan} = \frac{E}{B_{11}^c}$$

密集的 Tangent Stiffness Modus 在 数值 实施

71 If $f = \hat{\varepsilon} - \kappa_0 \geq 0$ 和 $\eta_t = 1$, tangent 模块由 Eq 定义。62.20 和 62.21:

$$\begin{aligned} E_n^{tan} &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} \\ B_{11,n-1}^c &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1 - D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B_{22,n-1}^c &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1 - D_{2,n-1}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B_{11,n}^c &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(4 + \frac{2}{1 - D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \\ B_{22,n}^c &= -\frac{1+\nu}{9} \cdot \left(2 + \frac{1}{1 - D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3} \end{aligned}$$

哪里 n 是目前的兴奋阶段。

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{n-1} &= -\frac{B_{22,n-1}^c}{B_{11,n-1}^c}, \quad \varepsilon_{22,n}^{tr} = -\tilde{\nu}_{n-1} \cdot \varepsilon_{11,n} \\ \tilde{\nu}_n &= -\frac{B_{22,n}^c}{B_{11,n}^c}, \quad \varepsilon_{22,n} = -\tilde{\nu}_n \cdot \varepsilon_{11,n} \end{aligned}$$

在哪里, $\varepsilon_{22,n}^{tr}$ 是审查 应变 在 ε_{22}.

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(\frac{E}{B_{11,n}^c} \cdot \varepsilon_n\right) = \frac{E}{B_{11,n}^c} - E \cdot \varepsilon_n \frac{1}{(B_{11,n}^c)^2} \cdot \frac{\partial B_{11,n}^c}{\partial \varepsilon_n}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里,

$$\frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} \cdot \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n}$$

$$C_1 = \frac{\partial B^c_{11,n}}{\partial D_{2,n}} = \frac{2(1+\nu)}{9(1-D_{2,n})^2}$$

$$C_2 = \frac{\partial D_{2,n}}{\partial \varepsilon_n} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_n}\left(a \cdot A\left(\texttt{atan}\left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1}\cdot\sqrt{2}\cdot\varepsilon_{11,n}}{a}\right) - \texttt{atan}\left(\frac{\kappa_0}{a}\right)\right)\right)$$

$$= -\tilde{\nu}_{n-1}\frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{-\tilde{\nu}_{n-1}\cdot\sqrt{2}\cdot\varepsilon_{11,n}}{a}\right)^2}$$

最后, 我们获得 Tangent Module:

$$E^{tan}_n = \frac{E}{B^c_{11,n}} - E\cdot\varepsilon_n \cdot \frac{1}{(B^c_{11,n})^2}\cdot C_1 \cdot C_2$$

72 图 62.20 描述紧张和压力之间的关系, 在没有永久紧张的麻烦模型中。

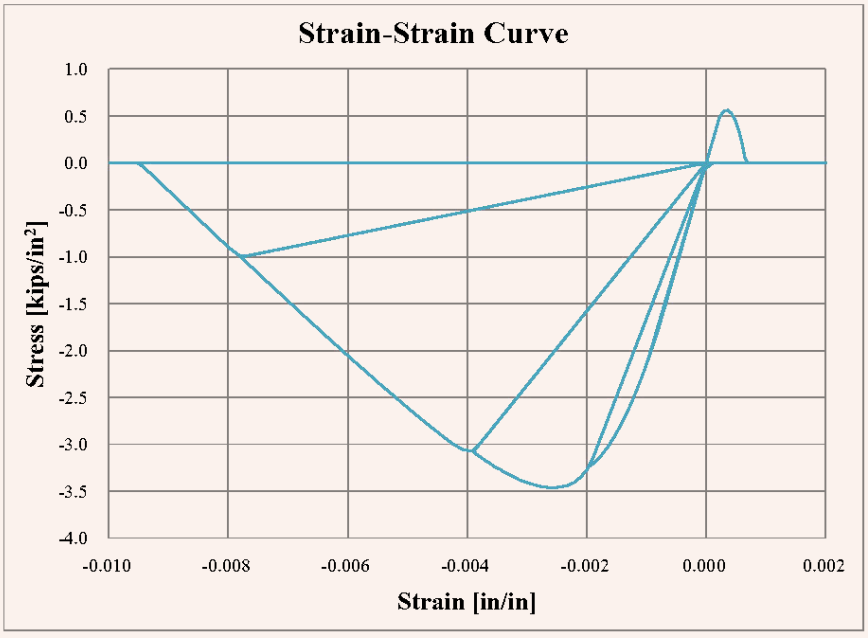


图 62.20: an 压力曲线为无永久紧张的麻醉损伤模型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

73 菲格 62.21 到 62.23 顯示手順獲得 uniaxial 应力 σ 即 Tangent Module E^{tan} 由 uniaxial 应变 ε.

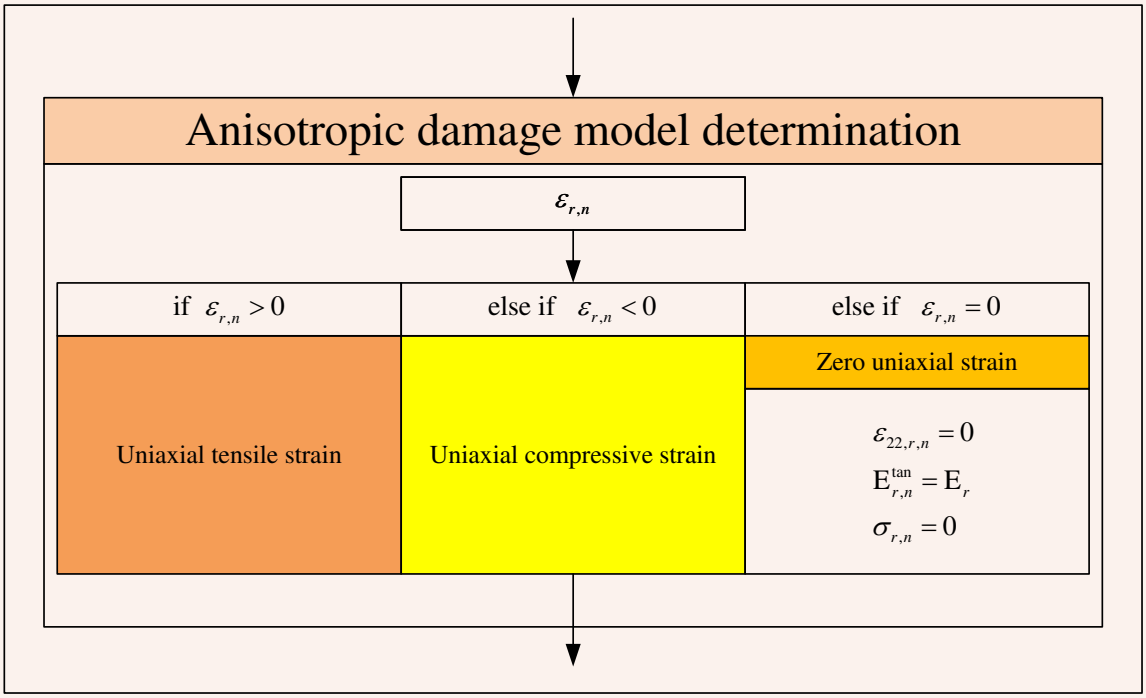


图 62.21: 定义 (1) 对 anisotropic 损害模型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

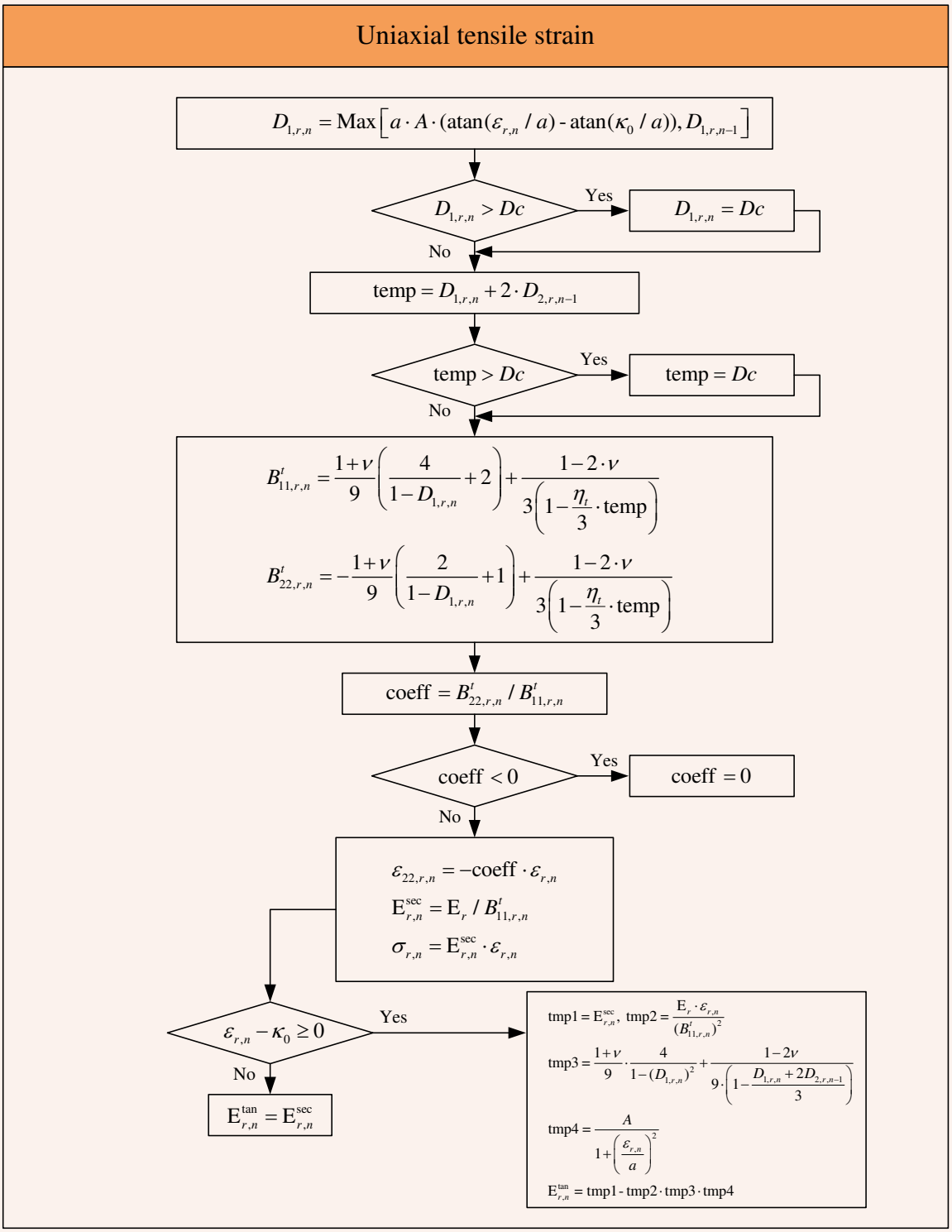


图 62.22: 定义 (2) 对 anisotropic 损害模型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

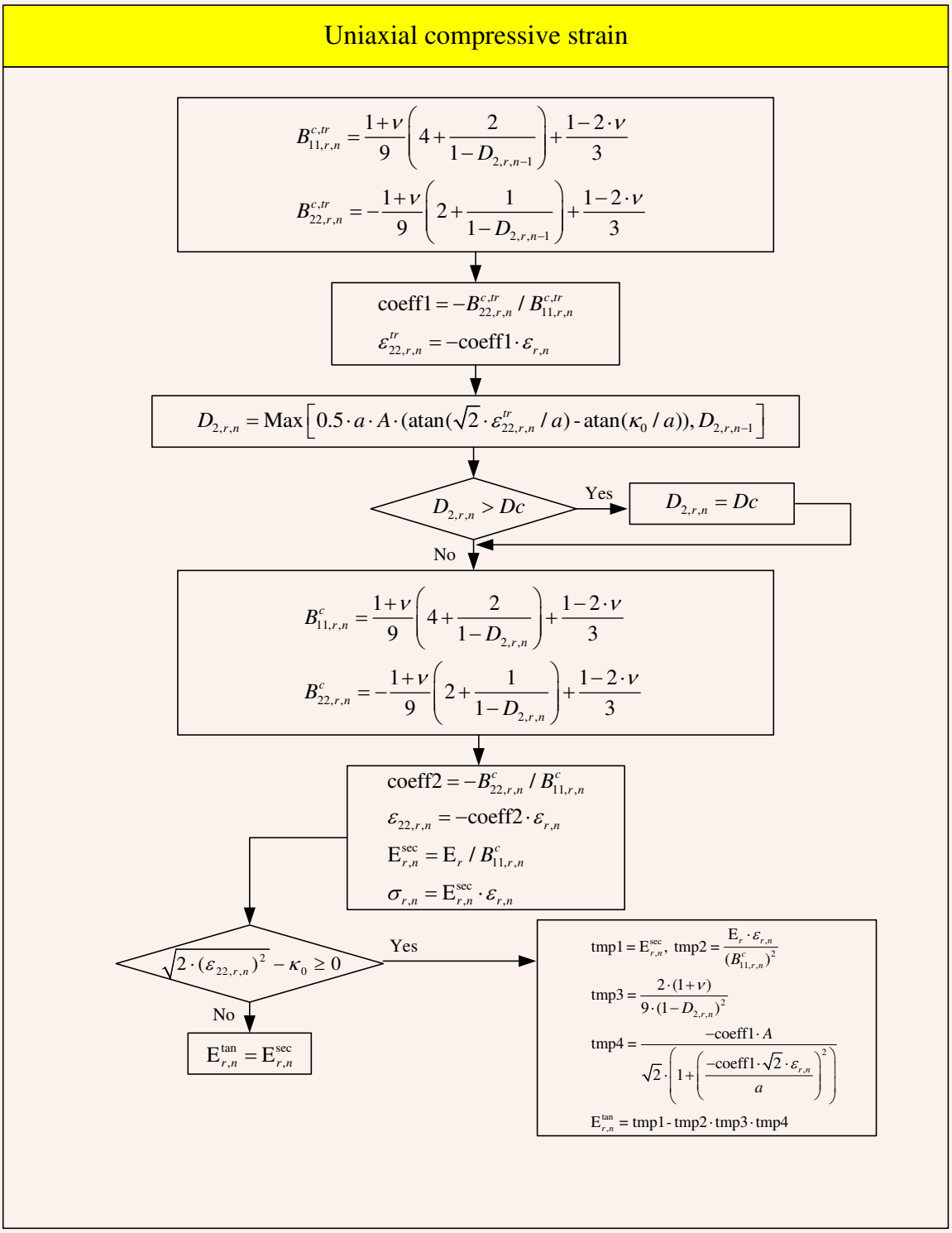


图 62.23: 定义 (3) 对 anisotropic 损害模型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

62.2.3.4 Anisotropic 损伤模型与有效的损伤, 固体恢复和永久性粘贴 ε_{an}

此前的麻醉性损伤模型不涉及永久变形。壳型号的下一个扩展解决了这个限制。这个模型是基于安尼斯特洛普损害模型 ψ_e^* 此前已确定为 ψ^*.

$$\rho\psi^* = \rho\psi_e^* + \rho\psi_{an}^*$$

对于损坏的模型部分, 巩固功能被修改以考虑到压缩中的弹性反馈:

$$\kappa\left(d_\varepsilon\right) = \frac{d_\varepsilon}{A} + \kappa_0$$

哪里 A 和 κ_0 有两个参数, 这取决于材料。损害标准将取决于弹性线条, 而不是整体线条:

$$f = \hat{\varepsilon_{el}} - \kappa\left(d_\varepsilon\right)$$

模型的分析部分是:

$$\rho\psi_{an}^* = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

这相当于整体应变的分为弹性和永久组件。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial\rho\psi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\rho\psi_e^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial\rho\psi_{an}^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{an}$$

永久性线的进化是由以下方程式产生的:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{an} = g_D\left(d_\varepsilon\right)\,\dot{\boldsymbol{D}}^D + g_H\left(d_\varepsilon\right)\,\dot{d}_\varepsilon\,\boldsymbol{Id}$$

与 $g_D\left(d_\varepsilon\right)$ $g_H\left(d_\varepsilon\right)$ 二是依照活动的功能损害对不平等压力的遵守。这里提出了两个连续双重功能:

$$\begin{array}{rcccccl} \text{if } d_\varepsilon < 1 & g_D\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_D}{K_D} d_\varepsilon & \text{else} & g_D\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_D}{K_D} + k_D\left(d_\varepsilon - 1\right) \\ & g_H\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_H}{K_H} d_\varepsilon & & g_H\left(d_\varepsilon\right) & = & \frac{k_H}{K_H} + k_H\left(d_\varepsilon - 1\right) \end{array}$$

62.2.3.4.1 统一数值系统

74 充电状态是由弹性应变的标志定义。以便在时间段确定负载状态 n, 应变的增加 $\Delta\varepsilon$ 与时刻线上的 应变 的弹性相比较 $n-1$:

75 If $\varepsilon_{n-1}^e < 0$ 和 $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$, 充电状态保持在压缩中, 否则它转向紧张。

76 If $\varepsilon_{n-1}^e > 0$ 和 $\Delta\varepsilon < -\varepsilon_{n-1}^e$, 充电状态保持紧张, 否则它交换到压缩。

紧张

- 灵活的预测: $\varepsilon_{1,n}^e = \varepsilon_{1,n-1}^e + \Delta\varepsilon_1$
- 损害标准测试: f

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- if $f < 0$ 灵活的行为:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon_{1,n}^{an} &= \varepsilon_{1,n-1}^{an} \\ \varepsilon_{2,n}^{an} &= \varepsilon_{2,n-1}^{an} \end{aligned}$$

- 其次, 有害的行为:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= A\left(\varepsilon_{1,n}^{e} - \kappa_0\right) \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon_{1,n}^{an} &= \varepsilon_{1,n-1}^{an} + \left(\frac{2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \\ \varepsilon_{2,n}^{an} &= \varepsilon_{2,n-1}^{an} + \left(\frac{-k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right) D_{1,n} \end{aligned}$$

- 计算的 σ 和 $\varepsilon_{2,n}^{e}$:

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{4}{1-D_{1,n}} + 2\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left(1 - \frac{(D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})}{3}\right)} \\ B_{2,n} &= \frac{1+\nu}{9} \cdot \left(\frac{2}{1-D_{1,n}} + 1\right) + \frac{1-2\nu}{3 \cdot \left[1 - \frac{\eta_t}{3} \cdot (D_{1,n} + 2 \cdot D_{2,n-1})\right]} \\ \sigma_n &= \frac{E}{B_{1,n}} \varepsilon_n^e \\ \varepsilon_{2,n}^{e} &= \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}} \varepsilon_{1,n}^{e} \end{aligned}$$

压缩

- 灵活的预测: $\varepsilon_{1,n}^{e} = \varepsilon_{1,n-1}^{e} + \Delta\varepsilon_1$
- 损害标准测试: f

  - if $f < 0$ 灵活的行为:

$$\begin{aligned} D_{1,n} &= D_{1,n-1} \\ D_{2,n} &= D_{2,n-1} \\ \varepsilon_{1,n}^{an} &= \varepsilon_{1,n-1}^{an} \\ \varepsilon_{2,n}^{an} &= \varepsilon_{2,n-1}^{an} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

– 其次, 有害的行为:
永久应变的进化必须估计:

$$\dot{\varepsilon}_{1,n}^{an} = \gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * d_{\varepsilon 2,n}$$
$$\dot{\varepsilon}_{1,n}^{an} = 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right) * \left(D_{2,n} - D_{2,n-1}\right)$$

损害进化变成:

$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon_{1,n-1}^{an} - \dot{\varepsilon}_{1,n}^{an}\right) - \kappa_0\right)}{2}$$
$$D_{2,n} = \frac{A\left(-\sqrt{2}\tilde{n}u_{n-1}\left(\varepsilon - \varepsilon_{1,n-1}^{an} + 2\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)D_{2,n-1} - \kappa_0\right)\right)}{2\left(\sqrt{2}A\tilde{n}u_{n-1}\gamma\left(d_{\varepsilon n-1}\right)\right)}$$
$$\varepsilon_{2,n}^{e\ \ trial} = \frac{B_{2,n-1}}{B_{1,n-1}}\varepsilon_{1,n}^{e}$$
$$D_{1,n} = D_{1,n-1}$$
$$\varepsilon_{1,n}^{an} = \varepsilon_{1,n-1}^{an} + \left(\frac{-2k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n}$$
$$\varepsilon_{2,n}^{an} = \varepsilon_{2,n-1}^{an} + \left(\frac{k_D}{3K_D} + \frac{k_H}{K_H}\right)D_{1,n}$$

- 计算的 σ 和 $\varepsilon_{2,n}^{e}$:

$$B_{1,n} = \frac{1+\nu}{9}\cdot\left(4 + \frac{2}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$B_{2,n} = -\frac{1+\nu}{9}\cdot\left(2 + \frac{1}{1-D_{2,n}}\right) + \frac{1-2\nu}{3}$$
$$\sigma_n = \frac{E}{B_{1,n}}\varepsilon_n^e$$
$$\varepsilon_{2,n}^{e} = \frac{B_{2,n}}{B_{1,n}}\varepsilon_{1,n}^{e}$$

图 62.24 描述了应变和应力之间的关系, 在永久的应变-中的麻醉损害模型中。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

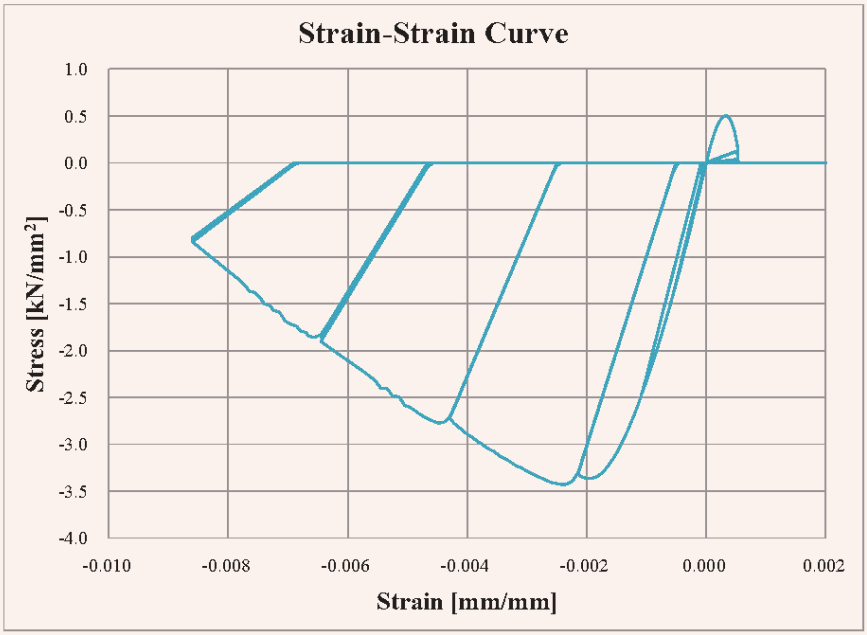


图 62.24: 应变-应力曲线, 用永久的应变为无神经损伤模型

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

62.2.4 邦德斯利普

77 如果提供不够的强化开发长度, 那么将有一个连接滑 (與 混凝土 之間). 此分類上一篇: 图 62.25.

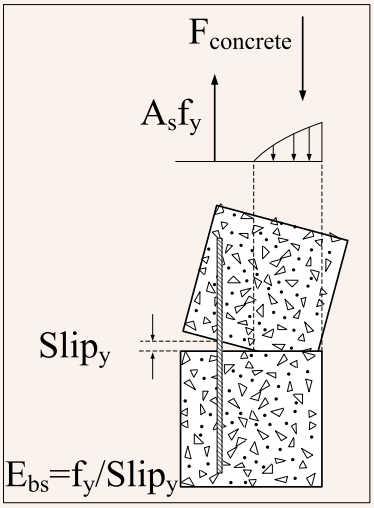


图 62.25: Slip 模型

78 由于柱附近的长度强化栏和从轴承可以轻松地确定, 如果我们采取一个统一的连接应力 u_b 沿着发展长度内的线条, 在脚踏板或螺旋列合体内。

79 從 平衡

$$u_b(\pi d_b)l_d = \frac{\pi d_b^2}{4} f_s$$

哪里 d_b 是酒吧直径, l_d 是发展长度, 在哪里的滑落发生, 解决 l_d,

$$l_d = \frac{d_b f_s}{4u_b}$$

80 假设这 最大 应变 发生在 柱 的结束时, 和 A 应变的线性变量在发展长度, 线曲线的整合将给脚柱界面或线柱界面的总条滑板, 是由

$$S = \frac{\varepsilon_s l_d}{2} = \frac{f_s l_d}{2E_s}$$

替代

$$S = \frac{\varepsilon_s d_b f_s}{8u_b}$$

81 假设 截面 旋转到其 中性轴 当滑动发生时 ($\phi_y = \varepsilon_y/(d-c)$), 位移与条滑在一个点上与距离相关 L 从 柱 基础将是

$$\Delta_{slip} = \frac{\phi_y d_b f_y L}{8u_b}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

82 在实际钢压方面, 一个简化的结合压力模型承认了连续的结合压。$u_e = 12\sqrt{f_c'}$ 在 钢材 输出之前, 以及另一个常规联盟 应力 的 $u_p = 6\sqrt{f_c'}$ 過去 钢材 發行

$$u_e = 12\sqrt{f_c'} \qquad \text{prior to steel yielding}$$
$$u_p = 6\sqrt{f_c'} \qquad \text{past steel yielding}$$

83 基于这个假设, 总条滑 S 在轴承的边缘, 通过将钢材线条整合到嵌入长度上获得。

84 这个模型被用来获得一个单调的关系, 以便在列基础上对线冲压。

85 需要足够的安卡拉:

$$S_1 = \frac{\varepsilon_s f_s}{8u_e} d_b;\ \varepsilon_s \le \varepsilon_y;\ S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e} d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p} d_b;\ \varepsilon_s > \varepsilon_y$$

哪里 d_b 是酒吧直径, u_e 是应力的弹性连接 $= 12\sqrt{f_c'}$ (狗狗), 和 u_p 是塑料连接 应力 $= 6\sqrt{f_c'}$. 数字 62.27

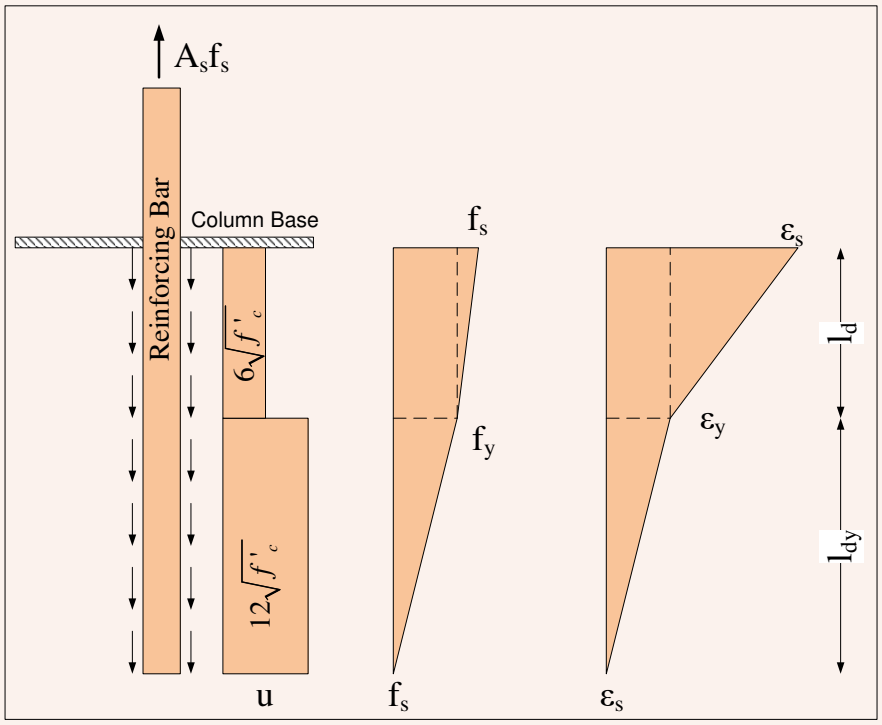


图 62.26: 简化债券模型

62.2.5 零长度部分 单元

此部分是 Ghannoum 的模型的一种适应

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

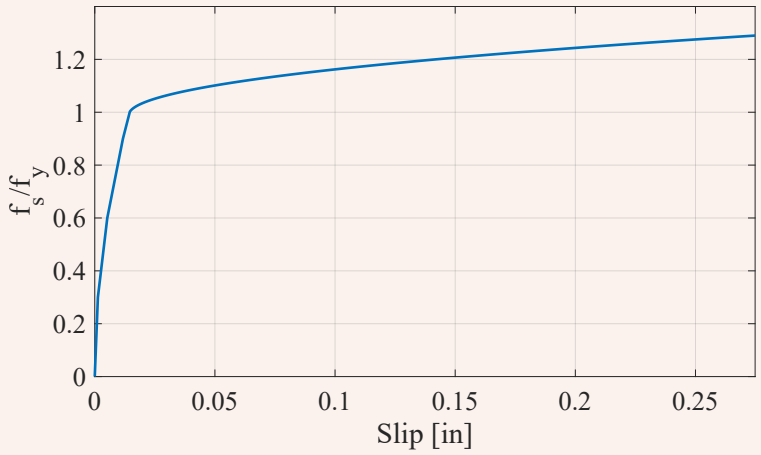


图 62.27: 波恩斯滑曲

86 零长度部分 单元 只能在使用纤维 单元 时使用, 如果我们想捕捉 混凝土 和 rebar 之间的连接滑板。

87 我们有一个非线性后峰反应的债券应力对债券滑动, 我们需要将其线性化, 然后解决 u_p (与此前所提供的价值不同。$6\sqrt{f_c'}$ 适合非线性硬化部分。

88 我们试图将线性分区跨越非线性一个。$1.25f_y$ 因此

$$\varepsilon_u = \varepsilon_y + 0.25\frac{f_y}{E_s/h} = \frac{f_y}{E_s} + 0.25h\frac{f_y}{E_s} = 0.26h\varepsilon_y$$

哪里 h 是硬化参数设置为 100。取代与

$$S_2 = \frac{\varepsilon_y f_y}{8u_e}d_b + \frac{(\varepsilon_s + \varepsilon_y)(f_s - f_y)}{8u_p}d_b;$$

我们获得

$$S_u = S_y + \frac{6.75\varepsilon_y f_y}{8u_p}d_b$$

89 我们可以合理地假设

$$S_u = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y}S_y = 26S_y$$

交换后, 我们可以:

$$u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$$

u_p 可以用在所谓的限制状态元素来评估债券滑动引发失败。

90 无论哪个钢模型在泡沫列中使用, 建议为此元素使用双线一。使用双重模型, 与 $h = 100$ 将等于有条滑曲线, 以便第二个部分交叉正确的一个 $f_s = 1.25f_y$ 与 $u_p = 3.24\sqrt{f_c'}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

91 在 钢材 双向模型中, 必须调整 杨氏模量 以反映连接粘贴, 通过替换 E_s 由 E_{bs};

$$E_{bs} = \frac{f_y}{S_y}$$

92 值得注意的是, 在这个假设中, 一个 单位长度 零长度 单元。

93 最后, 要保持在零长度部分元素中的条滑钢和框架元素中相同的材料硬度比例。(长度 钢材), 我们多元化栏滑 混凝土 材料线由 E_s/E_{bs}.

94 零长度部分元素的具体特性是这样, 以便中性轴在线列元素和零长纤维部分的位置相同, 图。62.28. 这样

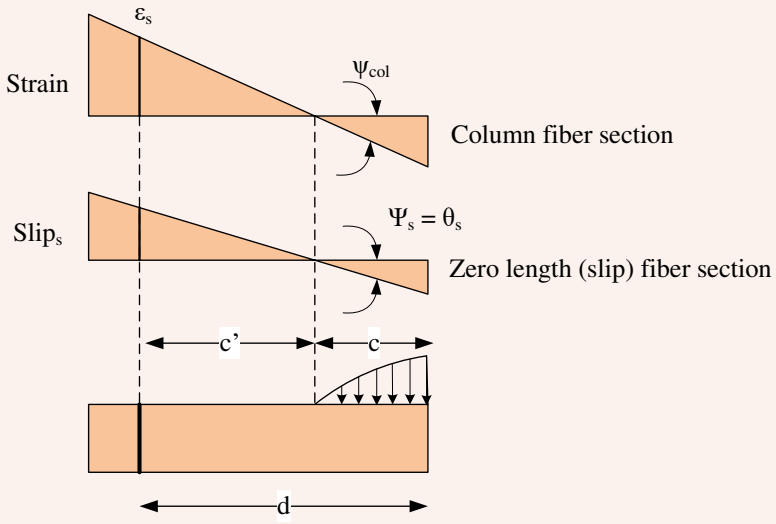


图 62.28: 中性轴的位置

$$\left.\begin{array}{rcl} \theta_s & = & \frac{S_s}{c'} \\ \Psi_{col} & = & \frac{\varepsilon_s}{c'} \end{array}\right\} \theta_s = \Psi_{col}\frac{S_s}{\varepsilon_s} \tag{62.22}$$

95 因此, 所有 纤维线 (相应于 钢材 和 混凝土) 在零长度的部分必须以 $\frac{S_s}{\varepsilon_s}$

96 可以轻松地实现, 通过更改材料输入数据, 如:

- 所有 应力 值均保持不变
- 天花板是由 $\frac{S_y}{\varepsilon_y}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

62.3 彩色 塑性

97 塑性模型将材料的行为接近, 考虑到塑料变形发生在被称为不同地区。**塑料手相关术语**或塑料区域 [3]. 这些塑料区域集中在结构中的特定位置, 通常在连接或支持的终点上发现。

98 该模型假设材料在这些塑料区域内服用塑料 转角, 而结构的剩余部分保持其 弹性.

99 可在屈服线理论中观察到一个值得注意的相似之处 (章节 57) . 然而, 值得注意的是, 底层和上层的边缘理论是包括塑料分析整体的更广泛原则, 而<塑性模型则是一个特定的接近技术在一个更大的框架内。底部和顶部的边缘理论作为塑料分析的关键理论基础, 而模型塑性为简化分析和设计提供了实用的工程工具。

100 在 塑性 中, 非线性反应由

1. 非线性长度 L_p 接近节点。
2. 非线性喷射被放置在合并中。

我们将单独处理这两项考虑。

101 首先, 重要的是要注意的是, 衍生性方法 L_p 这不是一个三重任务。这是一个全面和可理解的衍生物。L_p 需要重新审查已讨论的概念, 如曲率和挠度之间的关系 (引用 §22.3.4). 除此之外, 它还涉及考虑强化混凝土的无效时刻, 这可能在本书中没有被覆盖, 但通常是在基于增强混凝土地的基本文本中讨论。通过重新审视曲线分裂的概念, 并将强化混凝土泡沫的有效无效时刻纳入, 我们可以达到适当和可理解的衍生。L_p.

62.3.1 塑料长度

102 塑料环的长度将对塑料移植产生重大影响 (§62.3.1.4.1) 因此, 我们需要尽可能可靠地确定它。

103 对于塑料长度的确定, 序列将如下:

1. 塑料的位置。虽然许多参考引用一个分布式梁为解释, 我们将更准确地显示这些塑料长度在哪里, 以及如何在最简单的可能自由体图框架内考虑它们。
2. 曲率和变形之间的理论关系。
3. (破碎) 钢筋混凝土 单元 惯性矩 和相应的 曲率
4. 塑料长度定义

通过遵循这个系统的序列, 我们可以可靠地确定塑料长度, 这反过来对结构的塑料位移产生了巨大的影响。(引用 §62.3.1.4.1).

[3]注明对金属中裂缝的顶部或混凝土中的裂缝过程区周围的塑料区域的类似性

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

62.3.1.1 塑料粘贴的潜在位置

104 确定塑料长度 L_p 并识别潜在的塑料粘贴, 我们将从绘制一个自由体图开始。**代表性长度** 兩個點之間:A, 相接的矛盾點 (零瞬间或自由结局), 和 B, 关键部分。图表显示在图中 62.29.

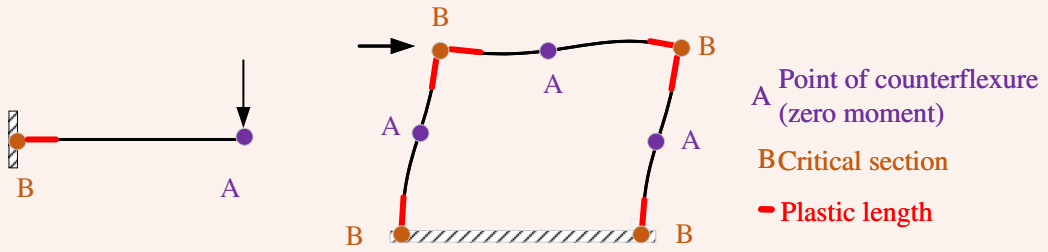


图 62.29: 塑料区识别

62.3.1.2 曲率的变形 ($\Delta(\phi)$)

105 要预测结构的双重性, 重要的是确定最终时刻发生的歪曲。这意味着了解成员在最终状态中的旋转和分裂。这些值可以通过分析结构内的实际曲率分布来获得。

106 会员的 转角 和 挠度 可以通过在会员长度上整合曲线来确定。曲率 (§22.3, Eq. 22.7) 被定义为 **转角 任何 2 分之間的速度**,

$$\phi(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

通过考虑不同地点的曲线, 并将它们集成起来, 我们可以量化会员的转角和挠度, 在最终条件下提供有关其行为的有价值信息。

$$\theta(x) = \int_A^B \phi(x) dx$$

哪里 dx 是会员长度的 单元。图 62.30

107 图 62.30 显示因旋转而出现变形的坎特利弗 $d\theta$ 超過 单元 的長度 dx 只有。转角的 $d\theta$ 是

$$d\theta = \phi dx$$

哪里 ϕ 是 单元 的 曲率。转型 挠度 $d\Delta$ 点 A 从 *Tangent* 到会员的轴在固定端 B, 由于转角 $d\theta$ 在单元的端口之间, 是

$$d\Delta = x d\theta = x\phi dx$$

因此, 从 A 点的 挠度 从 B 点中的会员的轴转向, 因为 曲率 在这些点之间的会员长度中将是

$$\Delta_{AB} = \int_A^B x\phi dx$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

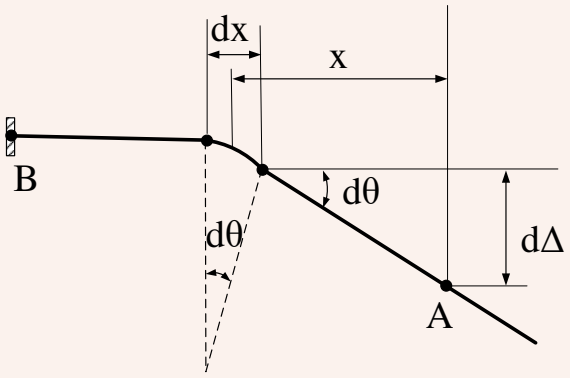


图 62.30: 一个元素的 flexural deformation

108 值得注意的是, 这些方程式代表了曲率区域理论的简单普遍化。它们适用于弹性和塑料曲线, 允许更广泛的概念应用。考虑到这些方程式, 我们可以分析结构的行为在弹性和塑料模式。.

109 然而, 值得一提的是, 这种方法忽略了影响力。**紧张**. 紧张强化是指由于混凝土携带裂缝之间的紧张性导致成员的硬度增加。这种现象在上述方程式中没有考虑到。紧张强化对结构的整体行为和反应有显著的影响, 在更先进的分析和设计中, 重要的是要考虑。

62.3.1.3 钢筋混凝土 有效的 惯性矩 和 曲率

110 要了解折叠塑料性模型, 重要的是要深入了解强化混凝土泡沫的曲线以及有效时刻的相应定义。

111 在均匀充电的情况下, 仅支持在图中描绘的增强混凝土闪光 62.31, 一个关键问题出现: 什么是真正的惯性矩 I 计算 挠度? 然而, 在这个具体的背景下, 我们的意图是强调与确定曲率分布相关的复杂性。

112 确定强化混凝土泡中的曲线分布涉及考虑各种因素, 如混凝土地的行为和强化钢, 裂缝的影响, 以及紧张和压缩区之间的相互作用。这些因素有助于计算曲率分布的迷人的性质, 并且对这种复杂性的全面理解对于精确分析结构行为至关重要。

113 在充电之前, 泡沫有一个连续的紧缩时刻, 相当于重量。(基于一个未破碎的部分) I_g. 随着荷载的逐步应用, (帕拉布里克) 瞬间图表升高, 直到达到峰值 $wL^2/8$.

114 在 梁 沿着某处, 瞬间到达, 然后超越当地的破碎 惯性矩 (中性轴 随着瞬间的增加而移动). 最终, 梁将有许多折叠。在这些地方, 惯性矩将是 I_{cr} 但是, 在一个简单的 I_g.

115 惯性矩的变量将转化为顺利的模拟时刻图 $M(x)$ 到一个粗 曲率 ($\phi(x) = M(x)/EI(x)$).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

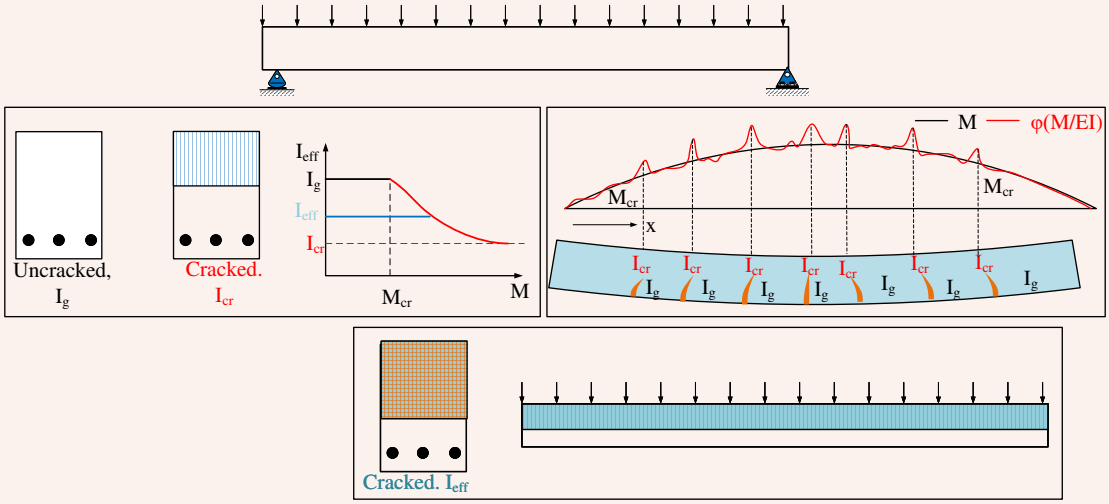


图 62.31: 有效 惯性矩 在 R/C

116 挠度 用途, 一 “同等” 惯性矩是必要的, 而 ACI, 基于原始建议 Branson et al., 1963 建议使用重量平均表达式 [4] 为 $I \rightarrow I_{\text{eff}}$

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{\text{cr}}}{M_a}\right)^3\right] I_{\text{cr}} \qquad \textbf{(ACI 9.5.2.3)}$$

哪里

$$I_{\text{eff}} \leq I_g$$
$$M_{\text{cr}} = f_r' \frac{I_g}{y_b}$$
$$f_r' = 7.5\sqrt{f_c'}$$

和 M_a 是最大 (服务) 时刻在挠度计算的阶段

117 挠度评估是一个非线性问题, 如 $w \nearrow M \nearrow \frac{M_{\text{cr}}}{M_a} \searrow I_{\text{eff}} \searrow$ 和一个连续的梁

$$\Delta = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}\left\{\begin{array}{ll} w \nearrow & \Delta \nearrow \\ I \searrow & \Delta \nearrow \end{array}\right.$$

然而, 我们经常忽略这种非线性。

62.3.1.4 塑性铰 长度的变形

62.3.1.4.1 钢筋混凝土

[4]这个方程式不会在本书中使用。其包含仅旨在与钢筋混凝土主题建立联系。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

118 如上所述, 增强的混凝土元素倾向于在负载条件下开发多种裂缝。这种情况需要引入有效的惯性矩以考虑破裂部分的减少硬度。

119 當一個 钢筋混凝土 構造因 重力 或側面力量的過充而經歷無線的柔軟性變形時, 這些變形通常集中在終端輪長之內。这意味着塑性变形及相应的弯矩重分布集中在该塑性铰区域内。

120 将 塑性铰 纳入一个 结构分析 提供了一个显著的优势, 允许 **瞬间重新分配**. 这种时刻的重新分配可以大大增加结构的强度, 超越灵活理论所预测的。

121 因此, 我们试图确定基于歪曲的表达方式。L_p.

122 对旋转和脱落的弹性贡献可以轻松计算。另一方面, 塑性铰将负责裂缝的存在, 由于混凝土在裂缝之间所带来的紧张局势而会增加成员的硬度, 以及由强化粘贴引起的额外变形。

123 鉴于在实践中准确确定实际曲率曲线的几乎不可能, 通常用双向来接近它。(Elasto 塑料或 Elasto 硬件) 模型 这种理想化简化分析, 代表曲率分布与两个不同的区域。

124 引用图像 62.32 二进制接近是由 A 点定义的。(影响点) 和 B, 在那里最终的曲率 (或关键部分) 已到达。这个模型将曲率的线性增加到 A 点, 随后是曲率, 在 A 点之外, 直到达到 B 点。

125 沿着成员曲线的分布在图表中被描述, 重要的是要注意的是, 直觉时刻的变化。(如图所示 62.31) 将导致曲率中的波动。曲率的每个峰值相应于会员内部的相应分裂。

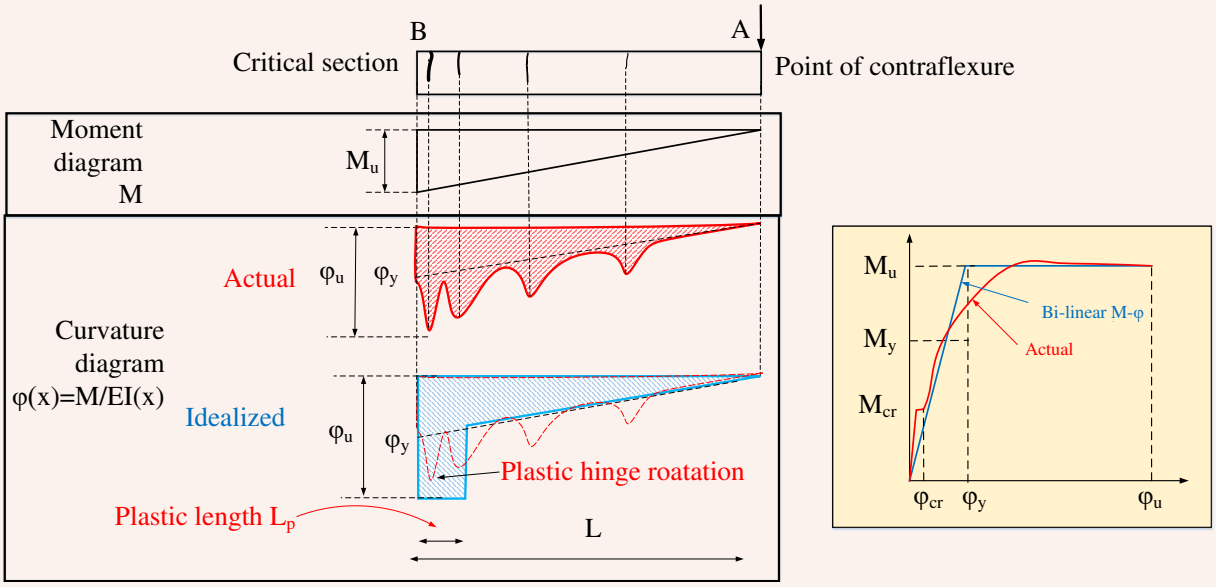


图 62.32: 塑料长度的位置 (Park and Paulay, 1991)

126 當時的圖表 (M) 是线性, 曲率图表 ($\phi = \frac{M}{EI}$) 是的不是。这种非线性是由于惯性矩的不同, 这可能受到结构中的裂缝的存在的影响。曲率 图表将显示在折叠地点的 曲率 的增加, 因为与折叠相关的 惯性矩 的下降。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

127 在分析中, 我们将确定两个不同的点相应的 ϕ_y 和 ϕ_u. 这两点之间 ($\phi_y < \phi < \phi_u$), 将有一个定位区域的无线转角, 引发形成一个 **塑性铰**. 这种无缝的转角有助于结构内的塑料变形的发展。

128 为了简化分析, 我们将确定一个 **相同的 塑性铰** 塑料 曲率 被认为是恒定的。这种简化使我们能够捕捉塑料变形的基本行为, 同时尽量减少分析的复杂性。

129 转角的 θ 被授予

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \begin{cases} \theta_e &= \int_A^B \dfrac{M}{EI} dx & \text{Elastic rotation} \\ \theta_p &= (\phi_u - \phi_y) L_p & \text{Inelastic rotation} \end{cases} \tag{62.23}$$

130 如果 A 中的外部 荷载 是 荷载 的点 θ_{AB} 由第一瞬間 曲率 理論提供 [5].

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi dx = \underbrace{\phi_y \frac{L}{2}}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p}_{\text{Plastic}}$$

131 位移 與 A 和 B, 图 62.33 由第二秒的曲率理论提供 [6]

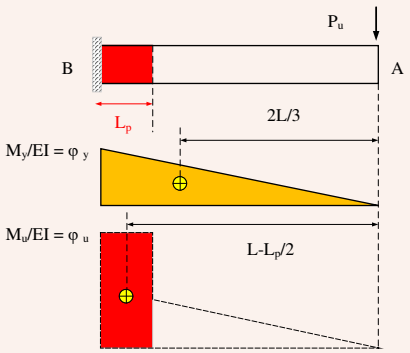


图 62.33: 提示 位移 的 R/C cantilevered 梁 与 Lumped 塑性 假设

$$\begin{aligned} \Delta^u_{AB} &= \int_A^B x \phi_{AB} dx \\ &= \underbrace{\left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(\phi_u - \phi_y) L_p \left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}} \end{aligned} \tag{62.24}$$

[5] 一个负载的灵活器成员的任何两个部分之间的曲线差异相当于 M/EI 这两点之间的图表, (Eq. 22.16)

[6] 一个负载的灵活器成员的第 2 点的坦根偏差, 从一个坦根到第 1 点的挠度曲线 (t_{21}) 等于 曲率 图表区域的 1 和 2 之间的时刻, 约为 2, (Eq. 22.3.4.3).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 x 是距离的 dx 从 A. 请注意, 如果我们在弹性组件中取代条款, 我们将恢复熟悉的条款。$PL^3/3EI$[7]. 或

$$\Delta^u_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{M_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(M_u - M_y)L_p\left(L - \frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.25}$$

132 要确定塑料长度, 在水晶板上进行测试 [8] 需要执行。这些测试包括测量强度位移和瞬间曲率的关系。从测试结果中, 可以产生双线弹性完美塑料模型。这个过程被转向为 **加密**

133 该程序涉及基于测试结果构建相当的双向曲线。原始曲线下的区域 (强度位移或瞬间曲率) 计算, 并通过起源引导一条线与曲线相同的初始绳子。随后, 一个垂直线被拖动以确保两条线下的区域与原始曲线下方的区域相等。两条线之间的交叉点代表了输出转移/曲线, 而无缝范围的最大值被认为是最终值。

134 使用方程式 62.24, 我们可以解决塑料长度 L_p 基于 位移/曲率 的结果和测试结果中获取的最终 位移/曲率。

135 缺少特定问题的定义 L_p 依赖于实验方程式变得必要。这些实验方程式为塑料长度提供了基于结构的特征和具体负载条件的估计。

无限 混凝土 一个这样的方程式是常用的模型。(Baker, 1956) 后来由民用工程师机构批准 (Bate et al., 1962)

$$L_p = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{Z}{d}\right)^{0.25} c$$

哪里

$$k_1 = \begin{cases} 0.7 & \text{for mild steel} \\ 0.9 & \text{for cold worked steel} \end{cases}$$

$$k2 = 1 + 0.5\frac{P}{P_u}$$

$$k_3 = 0.9 - \frac{0.3}{23.5}(f'_c - 11.7)$$

假设 $f'c$ = 0.85 x 混凝土 的圆形强度) 哪里 f'_c 在 MPA
z 关键部分距离对冲突点的距离
P 荷载在会员上
P_u 会员的最终容量在荷载轴下, 当没有弯矩行动时。

[7] 替代 ϕ_y 由 ϕ 然后, $\Delta^{el} = \left(\frac{\phi_y L}{2}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{ML}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{PL^2}{2EI}\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3EI}$.
[8] 请记住, 这个简化结构只是代表一个单元部分之间的关键部分和分裂点。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

限制 基于 (Baker and Amarakone, 1964)

$$L_p = 0.8k_1k_3\frac{z}{d}c$$

哪里 c 是中性轴在崩溃时的深度。

62.3.1.4.2 钢材

136 对于钢材, 提醒我们有 $M_y = SF_y$, 和 $M_u = ZF_u$, Eq. 62.25 可以重写为

$$\Delta^u_{AB} = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L-\frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right] \tag{62.26}$$

137 我们还需要确定塑料的长度。L_p. 要解决这一点, 假设塑性分布可以被视为线性, 如图所示。62.34. 要找到一个完全塑造的部分的同等长度, 我们考虑到两个三角区域下的区域代表塑性分布。通过与同一区域相同的长度找到, 我们可以建立一个有效的塑料长度。

138 这种方法使我们能够通过考虑与同等长度的集成塑料区域来简化分析。虽然这是一个接近, 但它提供了一个实用的和可行的方法来估计塑料长度在没有详细的解析解或实验数据的特定结构。

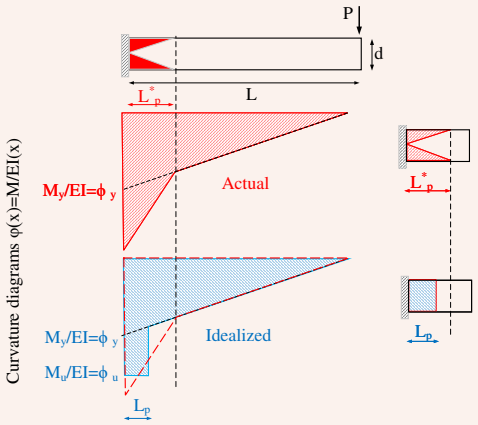


图 62.34: 提示 位移 的 钢材 cantilevered 梁 與 lumped 塑性 假設

139 相似的三角形

$$L^*_p = L\left(\frac{M_p - M_y}{M_p}\right) = L\left(1 - \frac{M_y}{M_p}\right)$$

但

$$\frac{M_y}{M_p} = \frac{S}{Z}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因此

$$L_p^* = L\left(1 - \frac{S}{Z}\right)$$

140 我们已经采取了塑造的线性变异, 为了简化, 我们试图确定相当的塑料长度。L_p 与前者相同的区域:

$$2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{2}L_p^*\right) = L_p d \Rightarrow L_p = \frac{L_p^*}{2} = \frac{S-Z}{2S}L$$

141 塑性铰的真实长度应该是 L_p 和 L_p^*.

142 至于位移, 我们重新审查 Eq。62.26

62.3.1.5 例题 62.1: 塑性铰 在一个 钢材 柱

如果我们考虑到一个 12 英尺的管道 (144 in) 柱 與 W14× 第 90 章 与下一个部分的属性 $S = 143$ 在 ^{3}, $Z = 157$ 在 ^{3}, 和 F_y36 李, $E = 29,000$ 李, 和 $I = 999$ 在 ^{4} 因此, 特征的长度将是

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{S-Z}{2S}L \\ &= \frac{157-143}{2\times 143}(144) = 0.049\times 12\times 7.0 \text{ inch} \end{aligned}$$

位移是从 Eq 获得的。62.26

$$\Delta_{AB}^u = \frac{F_y}{EI}\left[\underbrace{\left(\frac{S}{2}L\right)\left(\frac{2L}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(Z-S)(L_p)\left(L-\frac{L_p}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \frac{36}{29,000\times 999}\left[\underbrace{\left(\frac{143}{2}(144)\right)\left(\frac{2\times 144}{3}\right)}_{\text{Elastic}} + \underbrace{(157-143)(7)\left(2\times 144-\frac{7}{2}\right)}_{\text{Plastic}}\right]$$

$$= \underbrace{1.23"}_{\text{Elastic}} + \underbrace{0.017"}_{\text{Plastic}}$$

Hum, 看不出好, 三重检查方程式! 最终, 位移的双重性将是

$$\mu = \frac{\Delta^{(el)} + \Delta^{(pl)}}{\Delta^{(el)}} = \frac{1.23 + 0.017}{1.23} = 1.014$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

62.3.2 Shear 失败模式 (极限状态 材料)

来自 M.S. 论文 “Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code” 由 Segura, 2011.

62.3.2.1 引入

143 塑性模型仅包含灵活强度衰退, 并将硬线性弹性材料属性归分为叶和轴喷射。因此, 叶和轴失败模式在模型中没有被捕获, 尽管它们的影响是关键的, 因为结构反应的严重性在叶下以及轴失去强度。事实上, 列板故障是最严重的故障模式, 迅速导致因部分板抵抗力下降而损失轴负载容量。

144 能够预测结构故障的计算工具是工程师在基于性能的地震工程领域的重要工具。(章节 72) (PBEE). 这特别是在考虑到老 钢筋混凝土 结构的脆弱性, 因为叶和轴失败而崩溃。这些结构特别容易崩溃, 因为它们的光转强化不会在转载下促进双重行为, 这是老年问题。(1970 年代前) 钢筋混凝土结构设计之前到目前的地震设计规则。

145 作为预测这种结构行为的工具, Elwood and Moehle, 2002 开发了一个实验模型, 以捕捉失败的起源和随后的力量衰退导致崩溃。极限状态 模型, 既是叶和轴故障, 已根据 柱 间流动驱动, 在其中故障预期为故障模式的兴趣提出。

146 Shear 极限状态 模型已被选为在水星实施 (Saouma, Kang, and Haussmann, 2012) 如 A 以模拟钢筋混凝土列的表失败。该模型适用于分布式和折叠塑料模型, 尽管它毫无疑问是最有益的补充组成部分一个折叠的塑料模式。

62.3.2.2 Shear 极限状态 模型

147 表 极限状态 材料模型作为提供另一个工具, 除了强度衰退模型之外, 还可以研究结构损失的力量。值得注意的是, 模型在自然界是实验性的, 因此在应用中有限。该模型适用于具有低转强率的列 ($\rho'' \leq 0.002$) 预计在灵活产后会失败。

148 使用一张零长单元来定义一个表响应构建模型。開發 图 62.35 要包含表 极限状态 型号, 一款折叠的 塑性 型號將在 柱 的頂部附加零長度的 单元 型。(节点 3) 与水星的 **催眠** 模型分配给旋转的春天, 一个固定的线性弹性模型, 分配到轴式春天和边界状态模型。62.35.

149 Limit State Shear 模型将力量变形曲线定义为三行, 图。62.36: 初始的弹性分支 (0-1) 一个破坏 (软化) 力量分支 (1-2), 和一个残留的力量分支 (2-3).

150 失败 (驱动能力) 表面 (图 62.37) 以平等为定义, 由 Elwood and Moehle, 2002. 故障表面定义侧流 $\left(\frac{\Delta}{L}\right)$ 在此情况下, 柱预计将失败 **经过灵活性发育后**,. 它是跨逆强化比例的功能 (ρ'')

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

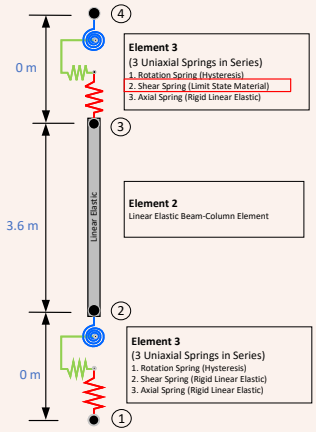


图 62.35: 塑性 模型与叶片故障

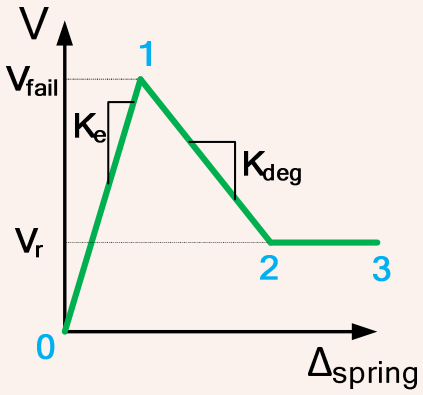


图 62.36: 极限状态 Shear 失败

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

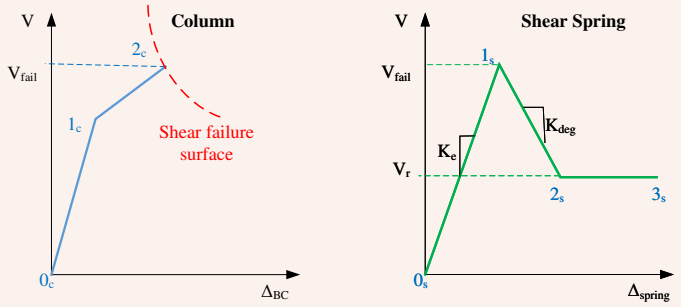


图 62.37: 春季回复

谢尔的力量 (v), 混凝土 抗压强度 (f_c), 轴 荷载 (P), 以及大部分区域 (A_g). 由于模型是实验性的, 故障表面为 S.I. 和英语单元分别定义。

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{40}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{S.I. Units}$$

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{3}{100} + 4\rho'' - \frac{1}{500}\frac{v}{f_c'} - \frac{1}{40}\frac{P}{A_g f_c'} \geq \frac{1}{100} \qquad \text{English Units Units}$$

哪里

Δ_s 柱 interstory 位移 在 页面故障
L 柱 高度
ρ" 转型强化比例
A_g 柱 横截面积 毫米 ^{2} 或在 ^{2}
v Shear 容量 (V/A_g [MPA 或 PSI]
f'_c 混凝土 抗压强度 MPa 或 psi
P = 柱 轴式 荷载

151 该模型通过比较剪力变形反应来运行顶部的柱 (图 62.35 节点 4) 到冲动容量表面。

152 图 62.37 柱 和 Shear 春季响应分开。柱的侧面变形 (Δ_{BC}) 是位移在节点 4 和春季变形 (Δ_{spring}) 是从节点 3 到节点 4 的水平位移。直到 柱 到达表面故障 (图 62.37 点 2_c) 春季反应是线性弹性。($0_s - 1_s$). 一旦到达失败表面, 叶春的坚固度就会下降。($1_s - 2_s$) 从峰点 (V_{fail}) 在哪个板块故障是由故障表面预测的。

153 图 62.38 详细介绍 柱 回复 (Δ_{BC}), 春天答案 (Δ_{spring}) 和整体反应 (Δ_{total}): a) 在失败表面满足之前,B) 在失败表面被满足时的步骤中,C) 當 Shear 坚定性正在下降。

154 蓝光列元素由元素 1、元素 2 以及元素 3 的轴和旋转喷射组成。(图 62.35). 如果初始的叶春硬度设置为非常高的值, 则预失总反应相当于柱。灵活反应 ($\Delta_{total} = \Delta_{BC}$). 在时间阶段, 当故障被表面检测到时, 叶春硬度变成负面, 总反应是柱灵活反应的组合和叶春反应的单轴, 因为叶春变形在模型中不再被忽视。当失败的表面满足, 叶春硬度变成负面时, 由于叶厚度下降导致侧形变异增加, 则允许列元素解载。因此, 随着春季变形的增加而减少柱灵活变形。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

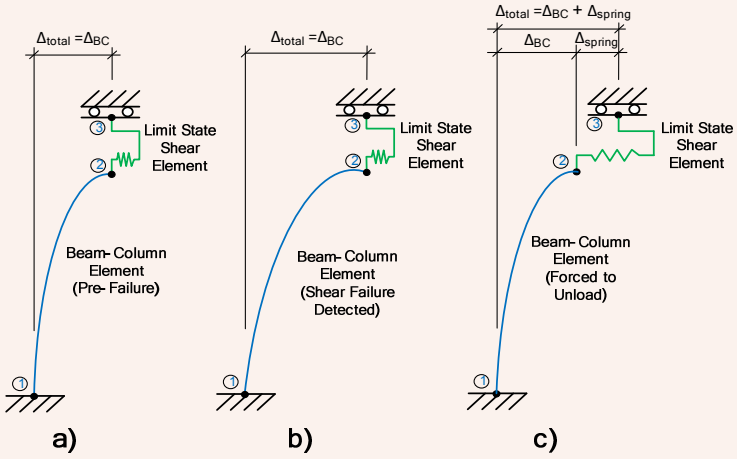


图 62.38: 限制国家列反应

155 预故障反应的状态定义, 以及当春季硬度衰退启动时的反应, 使用列元素和春季元素的结合硬度。

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{K_{spring}}$$

如果春天起初是非常坚固的, 那么总硬度相当于 K_{BC}.

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{BC}} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{K_{BC}}$$
$$K_t = K_{BC}$$

156 一旦失败启动, 春季的硬度下降。(K_{deg}) 柱 開始下載 ($K_{BC} = K_{unload}$). 其次, 总体衰弱的强度将成为这些人的组合 (图 62.39).

62.3.3 Ibarra 包含能源分散的歇斯底里模型

157 伊巴尔 伊巴拉 - Krawinkler 模型 (IKM) 这是一个广泛使用的歇斯底里模型, 用于模拟受循环负载的结构行为, 特别是在地震期间。

158 IKM 因其能够捕捉各种无情的行为而显著, 如强度衰退、粘贴和硬度恶化, 这些行为在地震事件期间经常被观察到实际结构中。

159 下面是这个广泛使用的模型的详细描述。

来自 M.S. 论文 “Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code” 由 Segura, 2011.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

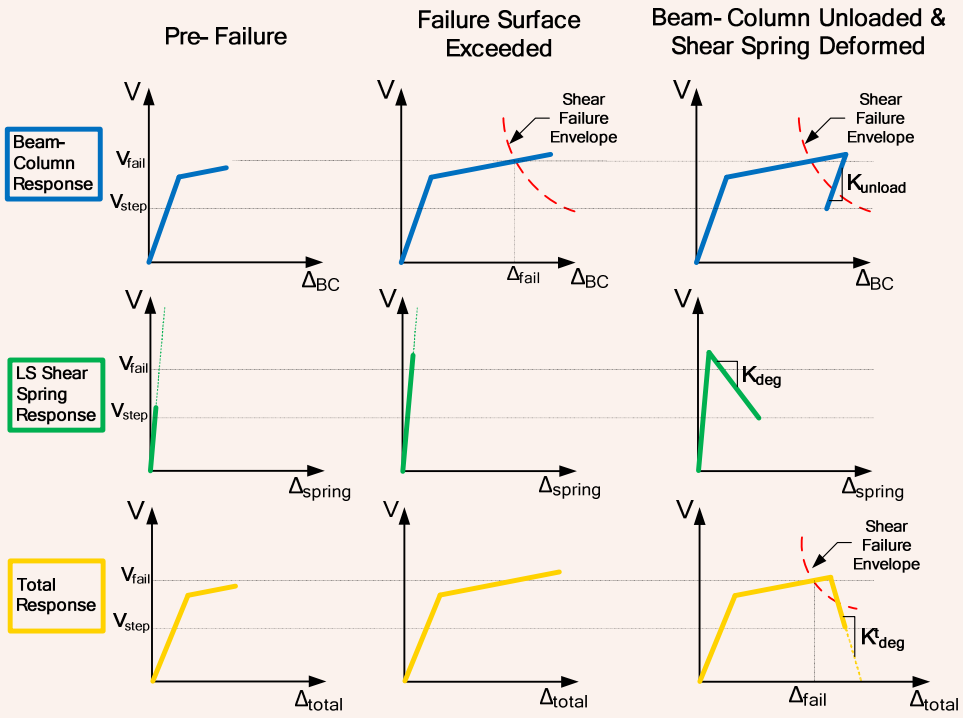


图 62.39: 极限状态 个别回复

160 一个歇斯底里的构造模型是捕捉某种材料的模型。一些理想化的歇斯底里反应包括: 弹性充电、应变硬化、弹性解载和弹性重新充电。例如, 一个应变硬化组成模型在单一充电周期内捕获了这些理想化的反应。

161 在图像中 62.40, 一个催眠周期显示为应变硬化材料。弹性充电显示在 0 点和 1 点之间, 随后是 应变 从 1-2 硬化, 然后是弹性解载。(2-3) 以 应变 的逆转。弹性重载 (3-4) 由 应变 硬化重新加载 (4-5) 弹性脱载 (5-6) 弹性重新充电 (6-7), 和应变硬化重新加载 (7-8).

162 注意与 Bauschinger 效应在 塑性 的相似性 §55.3.1 例如, 在 §55.5.2.3.

163 然而, 这种理想化的反应模式并没有捕捉大多数材料典型的歇斯底里的行为, 尤其是钢筋混凝土的行为。在一个或多个歇斯底里周期中, 例如弹性充电和弹性重新充电的理想化并不是一个准确的假设。

164 数值模拟的一个重要方面是捕捉一个结构方法崩溃时发生的行为反应。雖然大多數結構經歷了一些後線增強 (应变 硬化), 顶部强度点通常由强度衰退导致崩溃点跟随。这种类型的强度损失被显示为应变缓解分支, 图 62.41 从顶点 (点 2) 到失败点 (点 3), 由高无线单调充电产生的。一个有效的歇斯底里的构成模式应该能够捕捉这种行为。

165 研究表明, 强度能力衰退发生在逆循环负载历史的持续时间内, 无论材料如何, 这意味着能够捕捉这种歇斯底里的强度衰退的计算模型的重要性。这种类型的强度损失导致构建模型强度指标点 (i. 峰强点, 产量点) 在循环充电历史的过程中向起源翻译, 导致失败。形象 62.42 这个过程的细节, 指示在 X 点的弱势强度特性为 X 和 X。”. 值得注意的是, 收益点 (3

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

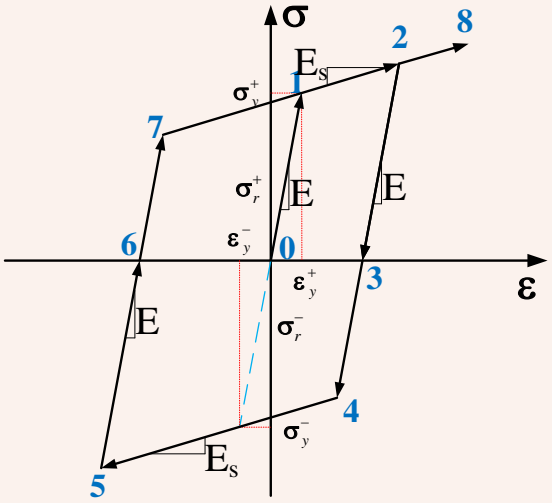


图 62.40: 代表性催眠周期

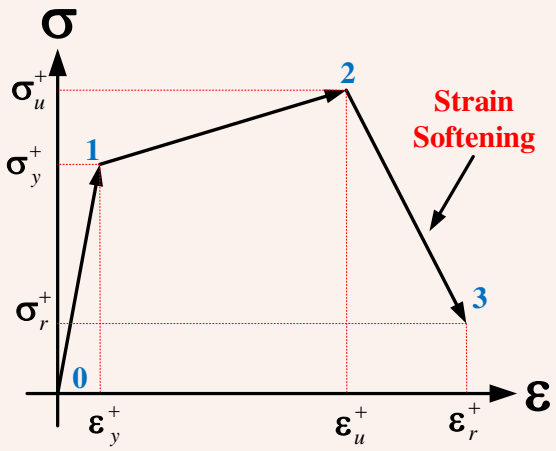


图 62.41: 应变 缓解强度损失

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

和 6) 峰值强度点 (3 和 8) 剩余的强度点 (4 和 9) 转换为导致失败点发生在一个值 应变 低于原始剩余的值 应变.

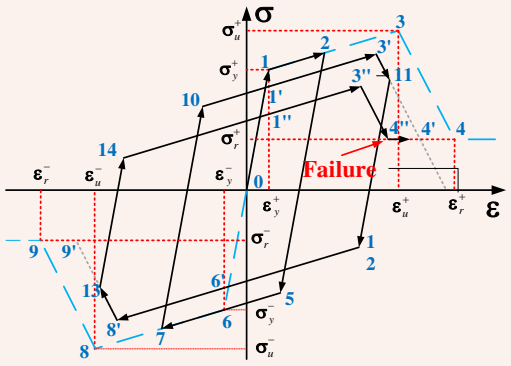


图 62.42: 逆循环强度衰退

166 多种模型已经开发, 以捕捉歇斯底里的强度损失。它们通常可以分为两个组: 部分线性模型。和顺利模型与不断变化的硬度。

167 双向和改造的 Kent 和 Park 模型是能够捕捉一些歇斯底里的行为特征的线性模型。然而, 双向型号不会捕捉后峰行为, 并且在逆转循环负载下没有强度损坏。改造的 Kent 和 Park 模型 是的 捕获后峰行为, 强度恶化不由模型负责。

168 提出的模型 Clough, 1966 和 Takeda, Sozen, and Nielsen, 1970 是线性模型, 这些模型重载密度和脱载密率, 分别基于最大变形在上载方向前经历循环。Wen-Buoc 模型 (Wen, 1976) 这是一个可靠的模型, 能够捕获硬度恶化。Wang et al., 2001 提出了一款包含强度和强度衰退的顺利模型; 但是, 该模型不包括后峰调节分支。每个模型都有效地捕获了结构测试中显而易见的特征, 这些特征的组合最终为水星实施的歇斯底里模型提供了基础。為了提供這些能力, 實施了兩個憲法模型, 基於研究 Ibarra, 2004 作为计算工具, 以预测结构响应为歇斯底里的能量的功能, 在充电周期的持续时间内分散。

169 伊巴拉介绍了三种歇斯底里的模型。第一個是改變的雙線模型, 遵循相似的歇斯底里的規則, 如同 双重 模型 其余两种模型是克劳的模型的改造, 被称为顶级模型, 仅通过将粘贴效果纳入所谓的粘贴模型而区分。

170 顶级和滑板模型都跟着类似的背部, 图 62.43 其强度恶化。背部跟随一个初始的弹性分支, 直到产量点。(0-1), 一个应变硬化分支到顶部 (最终) 强点 (1-2), 一个缓解分支到最终变形能力 (2-3), 和残留的强度分支超越变形能力点 (3-4).

171 背骨代表在单调负载下的加载路径, 当没有歇斯底里的强度损失发生时 (§62.3.4.1). 为了描述, 下列图表表达了构成模式在压力线的意义上; 然而, 描述也适用于强力转移和时刻曲线关系。订阅者 r, y, 和 u 相应于剩余、产量和最终相应的能力。签名 s 相应于应变 硬化分支和字幕 c 相应于封面后 (软化) 枝子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

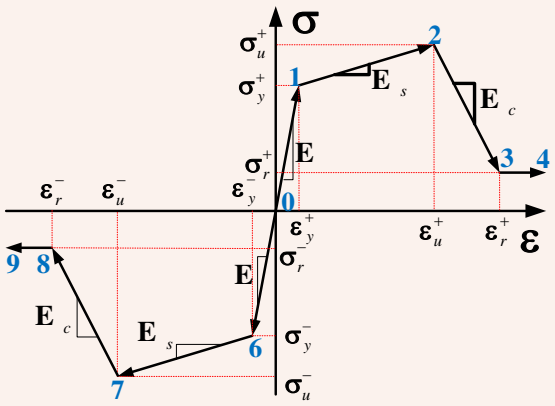


图 62.43: 甲状腺模型背部

172 压力线关系分为四个区域,对负面和积极的加载路径:一个弹性分支,一个硬化分支、一个缓解分支和一个残留的强度分支。单调背部的概述在表中呈现 62.2, 包括 Tangent Module 的定义。

表 62.2: 模块

路径	说明	正方向加载		负方向加载	
		$E_{\tan}$	Strain (ε)	$E_{\tan}$	Strain (ε)
$0-1\&0-6$	Elastic Loading	$E^{+}-\frac{\sigma_y^{+}}{\varepsilon_y^{+}}$	$0 \le \varepsilon < \varepsilon_y^{+}$	$E^{-}-\frac{\sigma_y^{-}}{s_y^{-}}$	$\varepsilon_y^{+} < \varepsilon < 0$
$1-2\&6-7$	Strain Hardening	$E_s^{+}-\frac{\left(\sigma_u^{+}-\sigma_y^{+}\right)}{\left(\varepsilon_u^{+}-\varepsilon_y^{+}\right)}$	$\varepsilon_y^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_u^{+}$	$E_s^{-}-\frac{\left(\sigma_u^{-}-\sigma_y^{-}\right)}{\left(s_u^{-}-\varepsilon_y^{-}\right)}$	$\varepsilon_u^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$2-3\&7-8$	Strain Softening	$E_c^{+}-\frac{(\sigma_r^{+}-\sigma_u^{+})}{(\varepsilon_r^{+}-s_u^{+})}$	$\varepsilon_u^{+} \le \varepsilon < \varepsilon_r^{+}$	$E_c^{-}-\frac{(\sigma_r^{-}-\sigma_u^{-})}{(s_r^{-}-\varepsilon_u^{-})}$	$\varepsilon_r^{-} < \varepsilon \le \varepsilon_y^{-}$
$3-4\&8-9$	Residual Strength	0	$\varepsilon \ge \varepsilon_r^{+}$	0	$\varepsilon \le \varepsilon_r^{-}$

173 请注意,在 图 中显示的背景 62.43 有其对手为叶和灵活性, 图 62.44.

62.3.3.1 催眠模型

174 图 62.45 显示了 Mercury 中采用的峰值导向模型和捏缩模型的基本循环路径。模型之间的共同部分以黑色箭头表示，差异部分分别以蓝色（峰值导向）和红色（捏缩）箭头表示。模型受单调骨架曲线约束。第一循环先经历弹性加载，随后进入应变硬化；应变反向后发生弹性卸载（2 至 3）。两种模型均采用目标重加载，重加载路径指向此前各循环中的最大

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

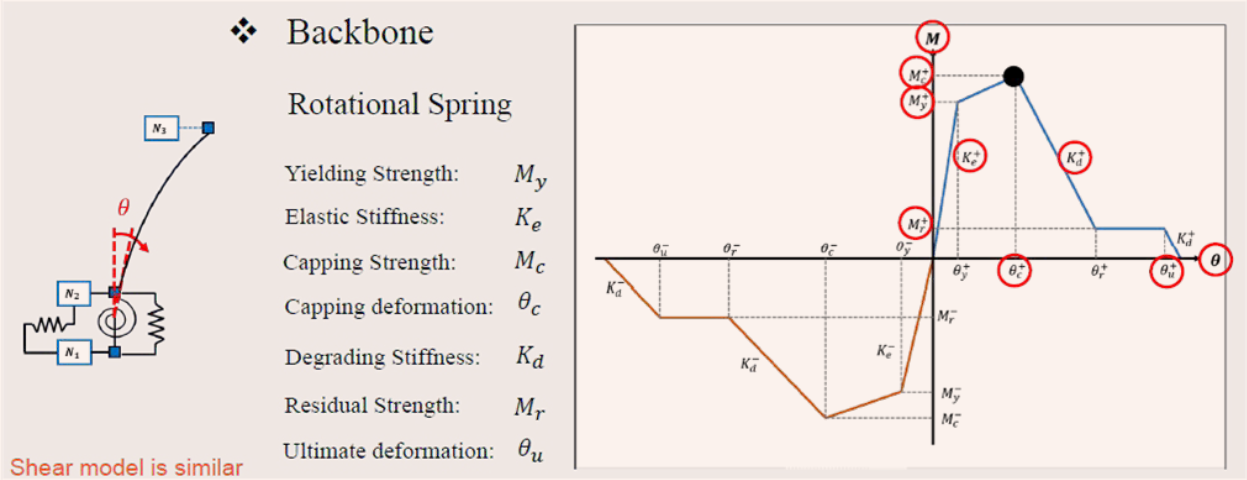


图 62.44: 背部曲线为灵活 (Ghannoum, 2020)

变形状态。由于负应力方向尚未发生变形，第一循环的目标加载指向负向屈服点（3 至 5）。峰值导向模型的重加载路径直接指向该最大变形状态（3 至 5）；捏缩模型则先指向捏缩“转折点”（4）。该转折点表示截面裂缝闭合、部分摩擦阻力恢复的位置。越过转折点后，重加载路径指向目标状态（4 至 5）。

175 繼續充電超過目標狀態, 应变 硬化發生 (5-6) 和 应变 逆转结果在弹性解载 (6-7). 目标重新加载在积极方面, 然后目标到前周期的最大变形点 (2). 对于顶级模型, 重新充电路线直接针对最大变形状态。(7-2). 对于重新充电的模型, 首先目标是突破点 (7-8) 然后向目标国家方向。(8-2). 关于分裂点的定义正在讨论中 §62.3.3.1.2.

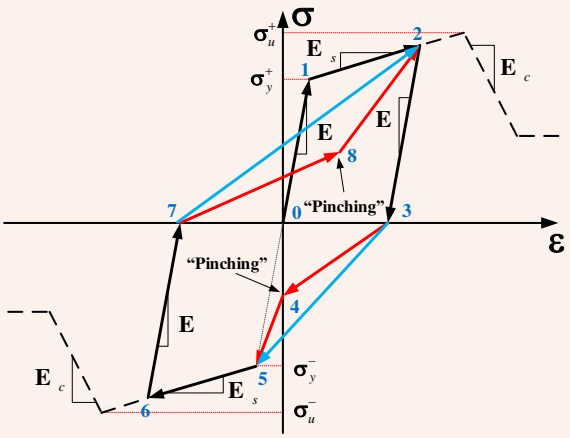


图 62.45: 顶级和滑板模型

62.3.3.1.1 顶级模型

176 顶级导向型号的基本循环充电路线规则显示在 图 62.46. 术语 “峰值指向” 指上载周期的

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

最大变形点 (第 2 和第 6 章 图 62.45. 在顶级模型中, 重新加载直接到这一点。提到图 62.46, 弹性加载从 0-1 发生, 随后沿着应变硬化分支从 1-11 进行加载。

177 应变 逆转结果在 11 至 5 之间的弹性排放。循环充电是指向一个目标状态代表的应力-应变状态, 在所有之前的周期经历的最大变形 (顶峰指向的最大变形点). 首先, 目标状态是收益点。因为收益发生在积极的负载方向 (点一), 在 应变 逆转时, 目标状态被保存为逆转发生的点。(点 11) **如果这一点超过了所有以前的加载周期的变形**. 重新充电, 在负载方向的第一次旅行中, 目标是收益点 (点 6). 加重重新充电发生在 5 至 6 之间, 显示了基于顶峰的模型的固度衰退。沿着 应变 硬化分支充电 (6-13) 随之而来的是 应变 逆转和弹性解载 (13-10).

178 在负载方向的目标状态存储在 13。接下来的循环的负载是针对这个目标状态。接下来的积极分支, 因此, 目标点 11。签名 t 与目标状态相匹配。值得注意的是, 目标充电模块 (E_t) 不要与坦根模块混淆。($E_{\tan}$) 但是, 当直接加载到目标国家, 他们是相同的。

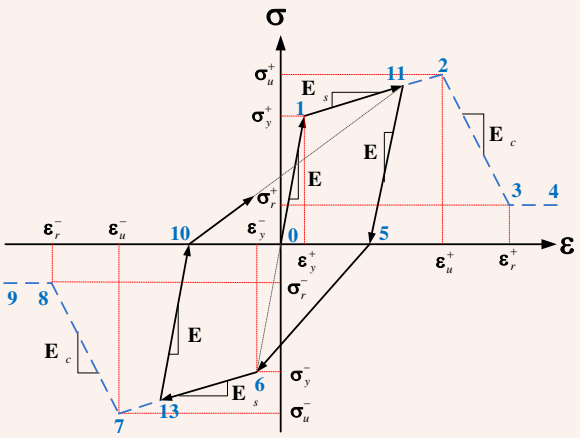


图 62.46: 顶级模型基本循环

179 引用图像 62.47, 当 应变 逆转发生在积极分支 (第 11 集 “) 积极的目标状态更新, 如果逆转的变形超过以前的最大变形状态。灵活的解载发生 (11’-5’), 而下降的重新加载发生到负面目标点 (13).

180 随着周期充电历史的规模增加, 顶级模型跟随单调背部向剩余应力分支显示在图中。62.48.

62.3.3.1.2 Pinching 模型

181 点击模型是指与 钢筋混凝土 相关的重新加载行为。在结构性测试中显而易见, 因为在无缝充电期间发生分裂切割, 由于切割保持开放时, 在充电方向提供较低的振动抵抗力。随着充电继续, 折叠被允许填补, 恢复了一些震动抵抗。这一结果在一 *pin* **强度** 重新充电分支, 由于压缩抵抗力下降。

182 粘贴模型跟随同样的单调背部, 如顶级模型和相同的 “峰值指向” 重新加载, 针对前周期的最大变形点。但是, 重新加载并不直接针对最大变形状态。相反, 当部分裂缝填满时, 坦根模块针对所谓的粘贴。“破点” (第 14 条和第 15 条在负面和积极的加载方向上, 分别). 断点

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

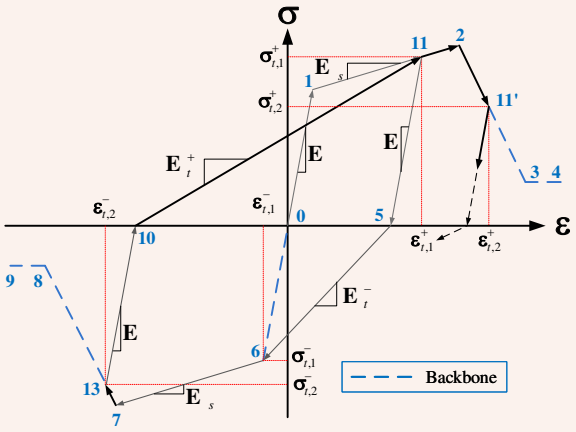


图 62.47: 荷载 逆向和目标状态更新

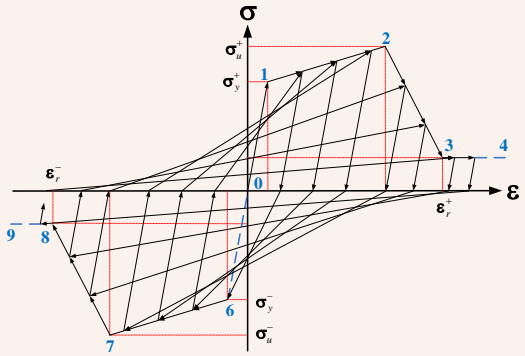


图 62.48: 按顶导向模型增加循环荷载历史

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

代表了分裂裂被填满并恢复了一些震动抵抗的点。超越分裂点, 坦根模块针对目标状态。与顶级模型相似, 弹性 (0-1) 和 应变 硬化 (1-11) 充电由 应变 逆转和弹性解载跟随 (11-5).

183 积极的目标状态存储在第 11 点。低下重新加载的第一目标是负面突破点 (14) 在哪个点, 某些原始的坚固性 (模块) 恢复和重新加载目标到目标点 (6), 在第一次旅行期间的收益点。

184 充电沿着 应变 硬化分支进行 (6-13) 如果 应变 逆转发生, 则更新了负面目标状态。(13) 灵活排放发生在 13 至 10 之间。重新充电在积极方向的目标是积极的分裂点 (10-15) 首先, 其次是强化重载到目标。(15-11).

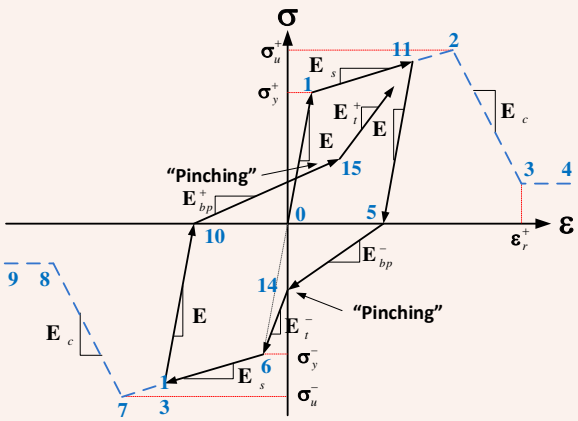


图 62.49: Pinching 模型基本循环

185 破点状态通过参数来确定 κ_f 和 κ_d 要因目标 应力 和 应变 在下载和下载之间的冲击点重定向相反方向 (ε_5 和 ε_{10}) 相应。突破点 应变 由目标 应变 直接确定

$$\varepsilon_{bp}^{+/-} = (1-\kappa_d)\varepsilon_{5/10}^{+/-}$$

突破点 应力 通过提取一个参考 应力 来确定。($\sigma_{ref,bp}^{+/-}$), 在目标 应变, 图 62.50. 参考值由

$$\sigma_{ref,bp}^{+/-} = \kappa_f \sigma_t^{+/-}$$

186 为了清晰度, 确定在积极的负载分支上的突破点值 (第 15 点) 首先解释了。应变 和 应力是由

$$\varepsilon_{bp}^{+} = (1-\kappa_d)\varepsilon_5^{+}$$
$$\sigma_{ref,bp}^{+} = \kappa_f \sigma_t^{+}$$

187 到正面分裂点的坦根模块 (E_{bp}^{+}) 被定义为

$$E_{bp}^{+} = \frac{\sigma_{ref,bp}^{+}}{(\varepsilon_t^{+} - \varepsilon_{10})}$$

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

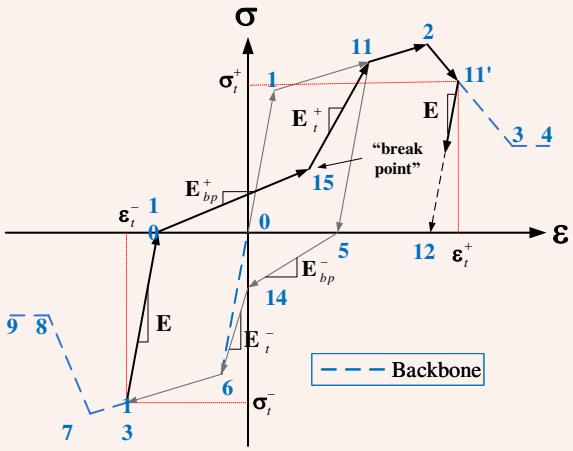


图 62.50: Breakpoint 定义

用来计算分裂点 应力 (σ_{bp}^+)

$$\sigma_{bp}^+ = E_{bp}^+(\varepsilon_{bp}^+ - \varepsilon_{10})$$

188 接下来, 目标状态的坦根模块是通过紧张状态在分裂点。

$$E_t^+ = \frac{(\sigma_t^+ - \sigma_{bp}^+)}{(\varepsilon_t^+ - \varepsilon_{bp}^+)}$$

189 确定负面分裂点状态值的过程是相同的; 但是, 重要的是再次指出, 分裂时值是目标状态的功能, 取决于在过去的周期中经历的最大方向变形。由于无线充电首次在积极的应力分支上实现 (点 11), 在负分支上尚未出现无线形变形, 因此目标状态是负产状况。(点 6) 直到产生变形在负方向上被超越。在这种情况下, 第一个分裂点为负载方向确定, 分裂點因此落在垂直轴上, 相当于零 应变.

190 使用此信息, 第一个分裂点压力线值是下面计算。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{bp}^- &= 0 \\
\sigma_{ref,bp}^- &= \kappa_f \sigma_t^- \\
E_{bp}^- &= \frac{\sigma_{ref,bp}^-}{(\varepsilon_t^- \varepsilon_5)} \\
\sigma_{bp}^- &= -E_{bp}^- \varepsilon_5
\end{aligned}$$

191 在接下来的周期, 图 62.52 当在 应力 积极分支上发生下载时 (11′-5′) 重新加载开始于负分支 (5′-14′), 分裂点值被定义为负目标状态的功能 (点 13) 按照所描述的过程来确定积极分裂点。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

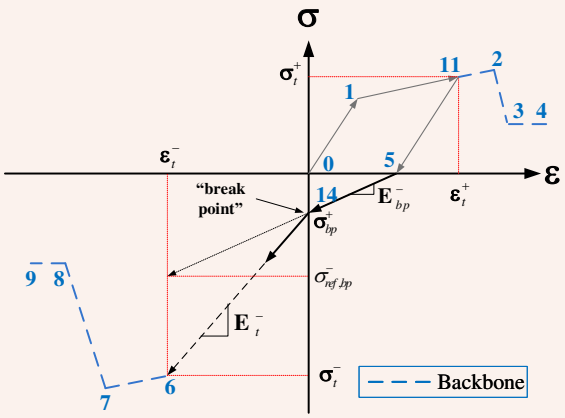


图 62.51: 确定第一分点

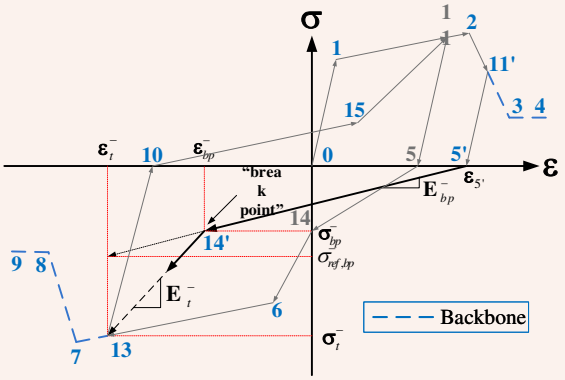


图 62.52: Breakpoint 更新

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{bp}^{-} &= (1-\kappa_d)\,\varepsilon_{10}^{-} \\
\sigma_{ref,bp}^{-} &= \kappa_f \sigma_t^{-} \\
E_{bp}^{-} &= \frac{\sigma_{rf,,bp}^{-}}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_5\right)} \\
\sigma_{bp}^{-} &= E_{bp}^{-}\left(\varepsilon_{bp}^{-} - \varepsilon_{5'}\right) \\
E_t^{-} &= \frac{\left(\sigma_t^{-} - \sigma_{bp}^{-}\right)}{\left(\varepsilon_t^{-} - \varepsilon_{bp}^{-}\right)}
\end{aligned}
$$

192 当应变逆转发生时, 沿着重新充电路径的图 62.53 灵活的解载 (16-10′) 导致重新充电超越断点 (15), 重新充电目标直接到目标国家 (11′).

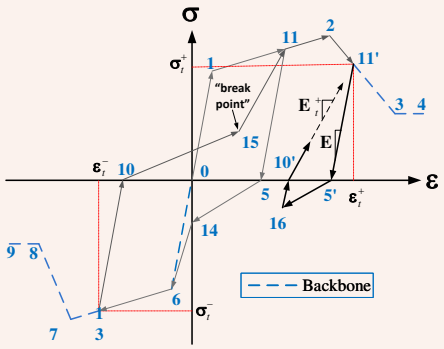


图 62.53: 超越 break-point

193 随着循环充电历史的规模增加, 粘贴模型跟随单调背骨向剩余应力通过 “pin 强度” 路径显示在 图 62.54.

62.3.3.2 强度衰退模式

194 希斯特里克模型介绍了上面的有效模型, 以模拟后发育行为。然而, 实验室结果表明, 由于结构受回归周期负载的影响, 结构会遭受强度损失, 而重载通常不会完全发生在单调背部。

195 以这种行为为主, 四个力量破坏模式是由 Ibarra, 2004. 值得注意的是, 本节所示的强度衰退模式旨在与歇斯底里的组成模型相结合使用, 而不是作为单独的模型。(s). 因此, 每一个这些四种衰退模式都包括在水星实施的顶级和滑板模型中。强度衰退模式因结构能力损失而计算 to:

1. 屈服强度 (基本力量) 衰退
2. 峰强 (封面后) 衰退

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

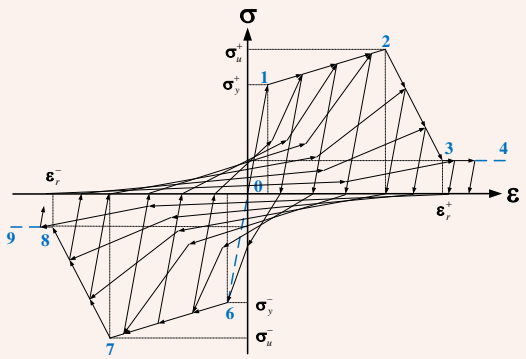


图 62.54: 按 pinching 模型增加循环 荷载 历史

3. 解除硬度 (模块) 衰退
4. 重新充电 (模块) 衰退

196 图 62.55 提供在加利福尼亚大学, 圣地亚哥进行的测试结果 (Ibarra, 2004). 蓝线显示单调负载测试的结果, 定义单调背部。逆循环测试结果以红色分布, 并包含指标来描述四种衰退模式中的每一个效果。衰退模式 1 显示一个下降的收益点, 因为结构承受循环旅行。模式 2 在缓解分支中显示一个翻译, 直接影响顶部强度。模式 3 显示不加载硬度的恶化 (模块) 模式 4 显示一个 应变 转换。

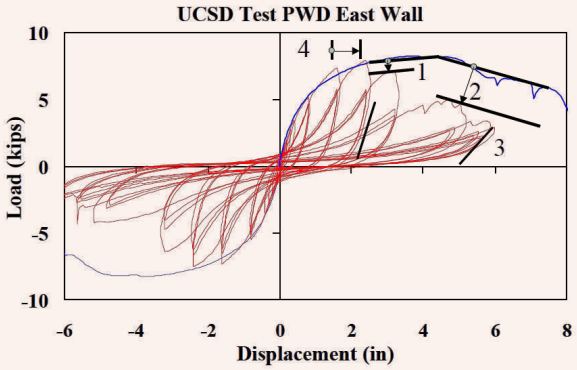


图 62.55: UCSD 结构实验室结果 (Ibarra, 2004)

197 四种衰退模式中的每一个都采用了歇斯底里的分散参数。β 由 Rahnama 和 Krawinkler

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

介绍 (慈悲 & Krawinkler 1993 年) 降低用户定义的歇斯底里的能量能力 (E_{hys}). 催眠能力它被定义为能量的因素, 以实现产量。

$$\beta_i = \left(\frac{E_i}{E_{hys} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$E_{hys} = \gamma \sigma_y \varepsilon_y$$

哪里

E_i 充电之旅中分散的歇斯底里能量 i
$\sum E_j$ 在所有之前的充电行程中分散的催眠能量
c 衰退率参数
γ 催眠能量能力因素

198 充電之旅開始時, 當水平軸相遇並結束時, 水平軸再次交叉。因此, 在 应力 分支上发生单独的负载行程, 并用于更新反对分支的强度参数。分散参数起初是一个小值 ($\beta_i \ll 1$), 随着能量在整个充电历史上消耗的增加。随着总分散的能量接近参考容量, 分散参数接近无限, 表明结构崩溃。在充电历史的长度上, 值 β 应该在范围内 $0 \leq \beta_i \leq 1$ 用于计算目的。低于零和超过一个值表明, 参考催眠能量已经耗尽了, 结构能力下降将导致结构性荷载的损失。携带能力。Rahnama 和 Krawinkler 提出一系列 $\leq c \leq 2$ 对恶化率参数。

199 衰退模式开始损坏结构能力, 一旦至少在一个方向实现成果。更新适用于每个模式, 除非下载硬度模式, 当模型的水平轴被交叉时进行更新, 相当于从积极到负的应力或相反的变化。更新是由各个 应力 州独立制作 (积极或消极) 充电时, 它穿越了水平轴, 并在充电的那个方向前进。例如, 当在积极分支上发生下载并在负分支开始下载时, 对基本强度、后加载能力和重新加载硬度进行更新。(模块) 在负面方面。更新不负载的硬度 (模块), 另一方面, 它们是在应变逆转发生时进行的。

200 对衰退模式提出的图表突出了模型, 尽管这个想法通过消除分裂点并直接重新加载到目标点扩展到顶级模型。

62.3.3.2.1 基本强度衰退模式

201 基本的强度衰退模式是指在重新加载时对应变硬化分支进行强度下降, 物理代表于图中的 1 模式。62.55. 它转换了应变硬化分支, 图 62.56, 向起源, 通过减少收益 应力 (1 to 1′) 和硬化模块 ($E^{\mp}_{s,o}$ 到 $E^{\mp}_{s,1}$) 使用分散参数 β_s.

202 更新到 应力 和硬化模块, 当横向轴被切断时进行。(第 5 条或第 10 条) 只为充电方向。再次, 在本节中详细介绍的数字将破坏模式纳入粘贴模型, 尽管它们在顶级模型中同样实施。唯一的差异是针对点裂点的额外重新加载分支。低估的值是由

$$\sigma^{+/-}_{y,i} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) \sigma^{+/-}_{y,i-1}$$
$$E^{+/-}_{s,i} = \left(1 - \beta_{s,i}\right) E^{+/-}_{s,i-1}$$

哪里

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

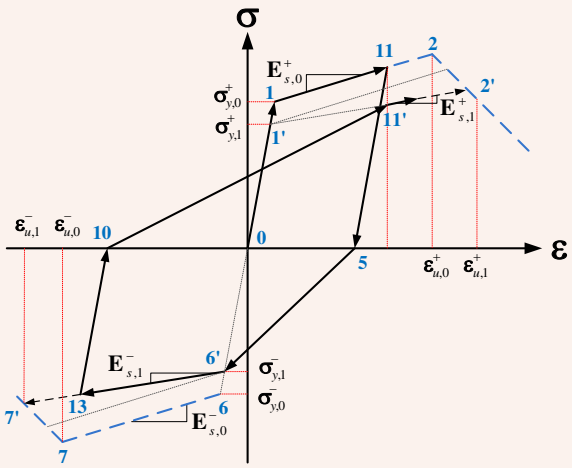


图 62.56: 基本强度衰退模式

$\beta_{s,i}$ 基本功率分散参数时间步骤 i
$\sigma^{+/-}_{y,i-1}$ 指向效益 应力 为时间步骤 i-1
$\sigma^{+/-}_{y,i}$ 指向效益 应力 为时间步骤 i
$E^{+/-}_{s,i-1}$ 方向性 应变 硬化模块为时间步骤 i-1
$E^{+/-}_{s,i}$ 方向性 应变 硬化模块为时间步骤 i

$$\sigma^{+/-}_{y,i} = \left(1-\beta_{s,i}\right)\sigma^{+/-}_{y,i-1}$$
$$E^{+/-}_{s,i} = \left(1-\beta_{s,i}\right)E^{+/-}_{s,i-1}$$

203 如上所述, 在步骤中对积极和负值进行独立的更新, 当加载跨越水平轴并以此方向开始时。基本强度分散参数 ($\beta_{s,i}$) 使用与基本强度相关的催眠能力, 由催眠容量因素决定 γ_s.

$$E_{hys,s} = \gamma_s \sigma_y \varepsilon_y$$
$$\beta_{s,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,s} - \Sigma_{j=1}^{i} E_j}\right)^c$$

204 注意，由于要求 $0 \leq \beta_{s,i} \leq 1$，屈服应力和硬化斜率均不会退化至零以下。屈服应力和硬化模量退化后，峰值应力（2 至 2′）和目标应力（11 至 11′）都会降低，加载路径将更快地循环趋近残余分支。

62.3.3.2.2 后覆盖强度衰退模式

205 接收后衰退模式会考虑到强度下降, 因为重新加载发生在接收后的方向。(软化) 分支, 物理代表模式 2 在图 62.55. 这种衰退模式将调节分支转向起源, 通过转换顶部强度点 (2 to

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2′). 这样做是通过降低一个应力参考值, 代表顶级应力值退缩到垂直轴。(即零点 应变) 通过软化模块。更新仅在横向轴交叉时进行, 以便充电方向。图 62.57 显示此强度衰退模式为 Mercury 终端 单元 编写的代码 (Saouma, Kang, and Haussmann, 2012). 应力 被降低的参

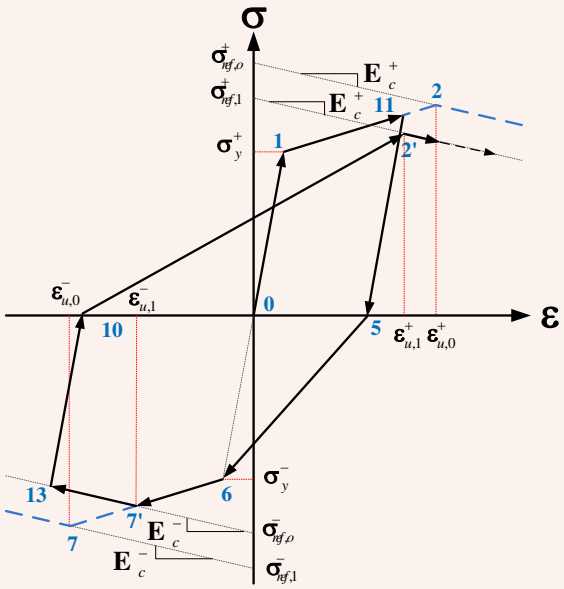


图 62.57: 后覆盖强度衰退模式

数通过分散参数确定 $\beta_{c,i}$ 相匹配的强度压缩模式。

$$\beta_{c,i} = \left(\frac{E_i}{E_{hys,c} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c$$
$$\sigma^{+/-}_{ref,i} = \left(1 - \beta_{c,i}\right) \sigma^{+1-}_{ref,i-1}$$
$$E_{hys,c} = \gamma_c \sigma_y \varepsilon_y$$

哪里

γ_c 催眠能量因素与吸收强度下降相关
$\beta_{c,i}$ 捕捉功率分散参数时间步骤 i
$\sigma^{+/-}_{ref,i-1}$ 方向参考 应力 为时间步骤 i-1
$\sigma^{+/-}_{ref,i}$ 方向参考 应力 为时间步骤 i

206 值得注意的是, 软化模块保持稳定, 峰值 应力 仅通过改变参考 应力. 一旦参考压力下降, 应对顶级压力、目标压力状态和剩余压力进行更新。随着时间的推移, 降低值将导致后续负载针对剩余分支。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

62.3.3.2.3 解除硬度衰退模式

207 下载硬度衰退模式会计在图中的衰退状态 3 62.55. 与其他衰退模式相比, 它是独一无二的。首先, 它不会独立更新应力的积极和负面分支。相反, 更新是为两方向进行的, 这意味着下载硬度下降可能发生比其他模式更快。

208 除此之外, 在加载跨越水平轴时不会出现衰退。更新到下载时的紧密度, 当发生冲动逆转时, 在下载第一次发生时的步骤,Fig。62.58. 这种模式通过使用下载模块来破坏下载相关分离参数 $\beta_{k,i}$.

$$
\begin{aligned}
E_{hys,k} &= \gamma_k \sigma_y \varepsilon_y \\
\beta_{k,i} &= \left(\frac{E_i}{E_{hys,k} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c \\
E_{u,i} &= \left(1 - \beta_{k,i}\right) E_{u,i-1}
\end{aligned}
$$

哪里

γ_k 混凝土能量因子与脱负密度下降相关
$\beta_{k,i}$ 解载密度分散参数时间步骤 i
$E_{u,i-1}$ 时间步骤下载模块 i-1
$E_{u,i}$ 时间步骤下载模块 i

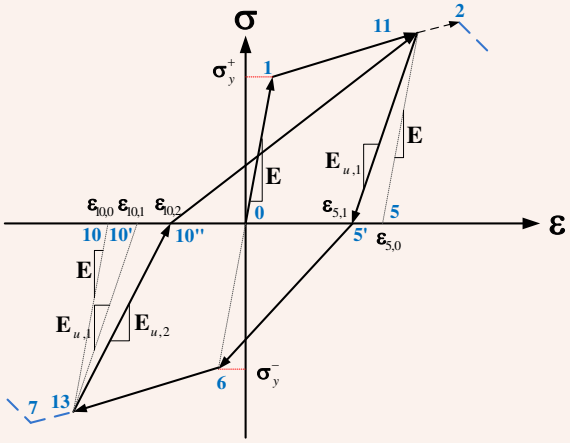


图 62.58: 解除硬度衰退模式

209 在一个完整的循环中, 下载模块从相当于初始 弹性 的值下降两倍。这样做, 第 5 点和第 10 点的 应变 值将转向起源。(5-5′ 和 10-10′-10″) 结果是加速下载。因为这种模式可以像其他模式那样更新两倍, 所以 γ 与此模式相关的值应高于其他模式的两倍, 如果在两个方向上预计可相似的能量排放 (Ibarra, 2004). 如果一个适当的 γ 值不被选择, 歇斯底里的容量将提前耗尽, 而价值 $\beta_{k,i}$ 将接近无限, 并在其他模式中发生歇斯底里的容量耗尽之前落下零。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

210 下载密度下降模式的另一个独特特点是, 只有在单个分支上完全发生下载时才会进行更新。(积极或消极) 重新加载已经开始在相反的分支, 图 62.59. 当下载未完成并在同一侧重新上载开始时, 则被视为中断和更新值。($E_{u,2a}$ 图 319) 被忽视。当另一个 应变 逆转发生时, 忽略的低估值被替换为新值。($E_{u,2b}$ 在 图 62.59) 基于新分散的能量。

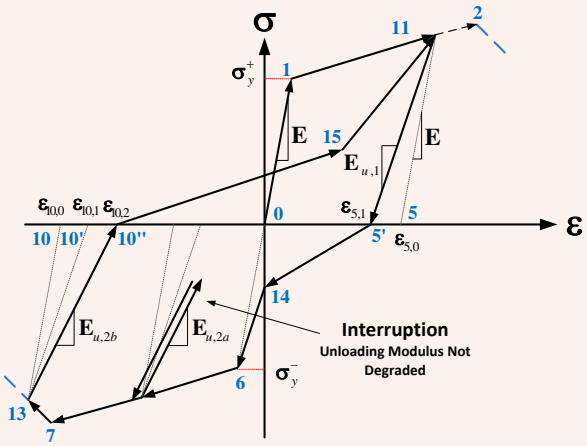


图 62.59: 解载中断

211 一旦完成下载发生, 则当前下降值在下一个应变逆转时存储和下降。由于脱负密度下降, 显然会出现增加的歇斯底里的能量分散, 导致其他模式的快速衰退。

62.3.3.2.4 加速重新充电强度衰退模式

212 加速重新充电的强度衰退模式在图中为模式 4 计算 62.55. 加速重新充电模式增加了方向目标值 应变 的绝对值。这样做, 目标点 (11-11′) 和分裂点 (15-15′ 和 14-14′) 移动远离起源, 导致重新充电模块下降。更新仅在横向轴交叉时进行, 以便充电方向。

213 目标 应变 通过使用加速重新充电分离参数调整值而转换 $\beta_{a,i}$.

$$
\begin{aligned}
E_{hys,a} &= \gamma_a \sigma_y \varepsilon_y \\
\beta_{a,i} &= \left(\frac{E_i}{E_{hys,a} - \sum_{j=1}^{i} E_j} \right)^c \\
\varepsilon_{t,i}^{+/-} &= \left(1 + \beta_{a,i}\right) \varepsilon_{t,j-1}^{+/-}
\end{aligned}
$$

哪里

γ_a	催眠能量因素与加速重新充电强度下降相关
$\beta_{a,i}$	加速重新充电分离参数时间步骤 i
$\varepsilon_{t,i-1}^{+/-}$	方向目标 应变 时间步骤 *i-1*
$\varepsilon_{t,i}^{+/-}$	方向目标 应变 时间步骤 i

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

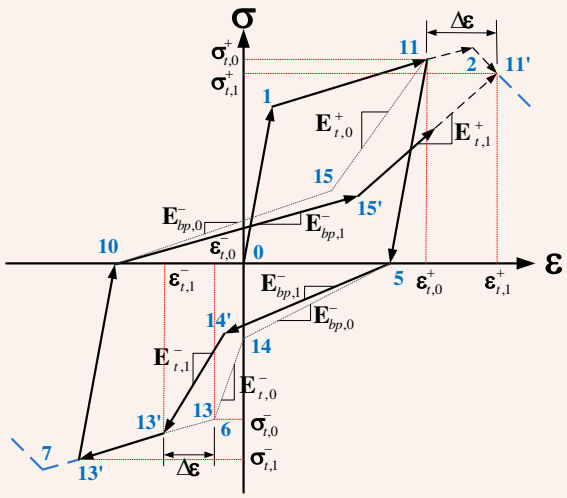


图 62.60: 加速重新充电强度衰退模式

214 由于目标 应变 转换, 重新充电加速, 充电路径以更快的速度瞄准剩余分支, 因为歇斯底里的能量分散增加。

62.3.3.3 总结

215 以顶级为导向的和粘着的歇斯底里结构模型讨论在 §62.3.3.1.1 和 62.3.3.1.2 相应地, 每个人都被选为在水星的实施。两款模型都遵循相同的单调背部, 其中包括一个弹性负载分支、一个应变硬化分支, 一个后切割分支和一个残留强度分支。每个模型都遵循顶级重载, 以达到以前的加载周期所经历的最大变形点, 唯一的区别是, 粘贴模型包含一个第二个重载分支, 在针对最多变形状态之前将粘贴切割点瞄准。以负担歇斯底里的强度损失, 在部分中显示的强度和硬度衰退模式 62.3.3.2.1-62.3.3.2.4 已被选中包括在实施的顶级导向和滑板模型。

62.3.4 Ghannoum 的模型

216 大多数先前在细体成员的歇斯底里循环行为的评估工作都受到有限的测试数据和简单的测量表明自行车时侧负载变形关系的曲线形状的困难的影响。

62.3.4.1 背部曲线

217 模型的骨架包络响应可定义为对称或非对称行为，如图 62.61 所示。每个加载方向的前四个分支分别表示弹性、硬化、退化和残余行为区间。对于两个残余分支，即荷载路径 4^+ 或 4^-，引入轻微负斜率以缓解数值收敛问题。第二退化分支，即荷载路径 5^+ 或 5^-，用于使强度逐渐降至零，其斜率与相应加载方向的第一退化分支（荷载路径 3^+ 或 3^-）相同。

218 这种破坏性折叠被选择为简单, 因为剩余强度范围中的实验数据是分散的。四十个用户输入参数需要总体定义背角曲线 (每个充电方向的七个参数). 这些参数是弹性硬度 (K_e) 交

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

付时刻 (M_y) 捕捉瞬间 (M_c), 切割 转角 (θ_c), 破坏分支的硬度 (K_d) 剩余的时刻 (M_r), 和最终转角 (θ_u).

219 背部参数可以被定义为单调反应或循环行为的包装, 这取决于实验 柱 数据集是否包含具有 pushover 行为或完全逆转的循环性行为的 柱 测试。

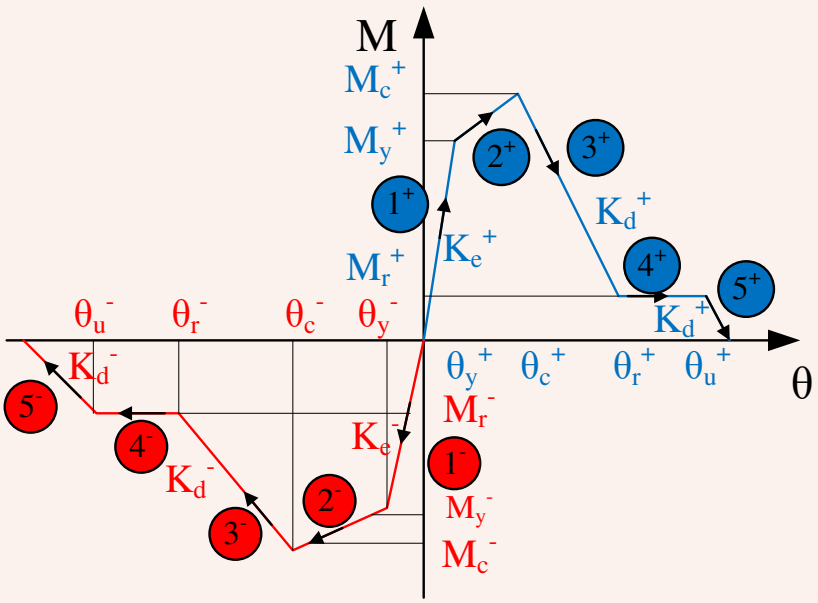


图 62.61: 背部曲线 (Ghorbani et al., 2022)

62.3.4.2 循环行为

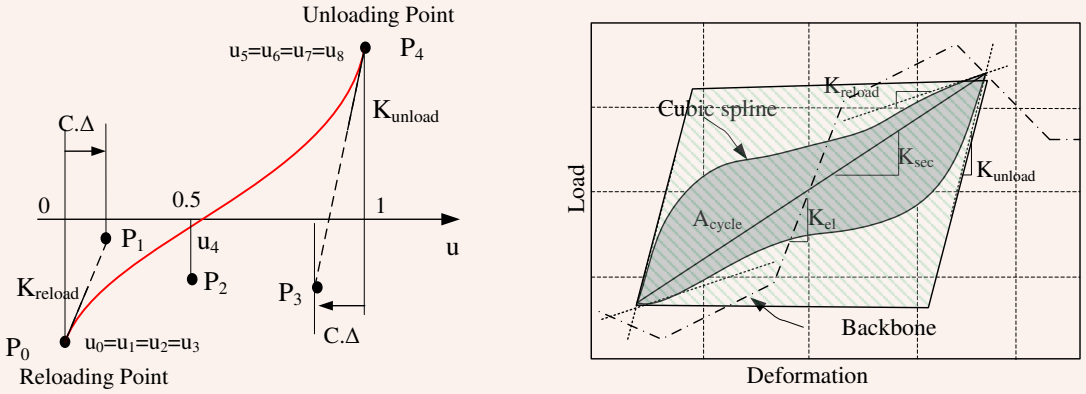
220 重点是通过全球参数, 如能量分散、强度和密度关系来定义混凝土列的侧面力量变形行为。(Suselo, 2021). 与柱的地质和细节特性以及其他相关边界条件有关的关键循环行为方面的关系, 由一个单独开发的数据库定义。(§63.3.2.3) 接近 700 柱 测试。

221 该模型的主要目标是引入一个数学表达式, 能够在整个下载到下载的荷载路线上复制这些特性。然而, 它仍然被相对少数参数定义, 可以从测试数据中客观地提取并容易与物理行为相似。这是通过第三级 B 层曲线实现的, 在计算模型中引入了五个控制点。

222 催眠曲线只需要三个物理意义的参数来定义, 图 62.62.

223 第三级 B 层曲线, 五个控制点需要九个节点。通过在 B 层曲线的终点设置一个解载和重新充电曲线, 第一个 $p+1=4$, 最后一 $p+1=4$ 点必须是相同的, 图 62.62. 最后和第一个控

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) (b)

图 62.62: 基于 Cubic spline 的歇斯底里模型 (Suselo, 2021)

制点代表着, 在开载开始的点 (下载点), 以及重载方向的目标点 (重定向点). 这些点是根据歇斯底里的规则确定的。控制点 P_1 和 P_3 与终点插曲和形状因素有关

$$P_1 = P_0 + K_{unload}(C.\Delta)$$
$$P_3 = P + 4 - K_{reload}(C.\Delta)$$

哪里 Δ 被定义为

$$\Delta = \frac{u_8 - u_0}{4}$$

和 C 是形状因素, 控制曲线的形状, 在 0 到 1 之间。经过多种替代品的评估后, 一 $C = 0.1$ 因子被采用, 因为它产生了一个旋转曲线形状代表了混凝土列的循环行为。

224 控制点 P_2 与能源比例有关 (ER) 通过

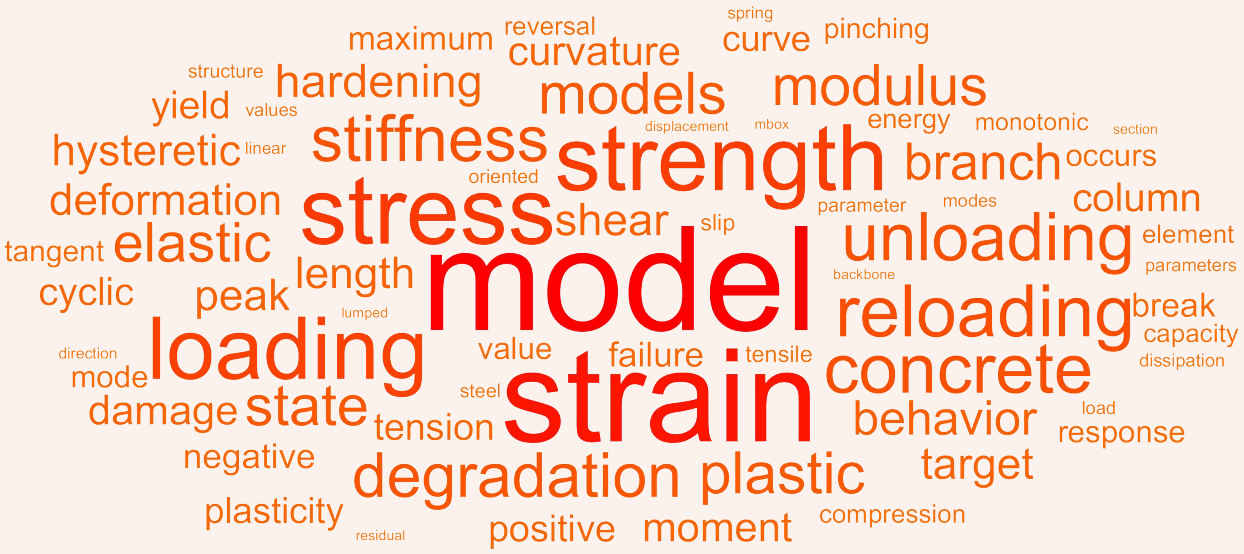
$$P_2 = (C.\Delta)(K_{reload} - K_{reload}) - \frac{1}{2}\frac{ER}{\Delta} + \frac{1}{2}(P_0 + P_4)$$

225 和 ER 它被定义为歇斯底里的能量。(灰色 Dash Hatched 区) 在 图 62.62b 由弹性塑料循环曲线内部的能量分裂, 从同一点开始和结束, 与相同的脱负密度 (绿色坚固地带). 这个参数与终点轴承相结合, 确定了粘贴水平或替代能源分散水平。模型展览在循环充电期间。

226 降低其价值 ER 增加这种模式中的粘贴行为水平。

227 因此, 用这个模型定义一个春天的循环行为所需的参数总数为五个: 脱载点、脱载节点、重新加载点和能源比例。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

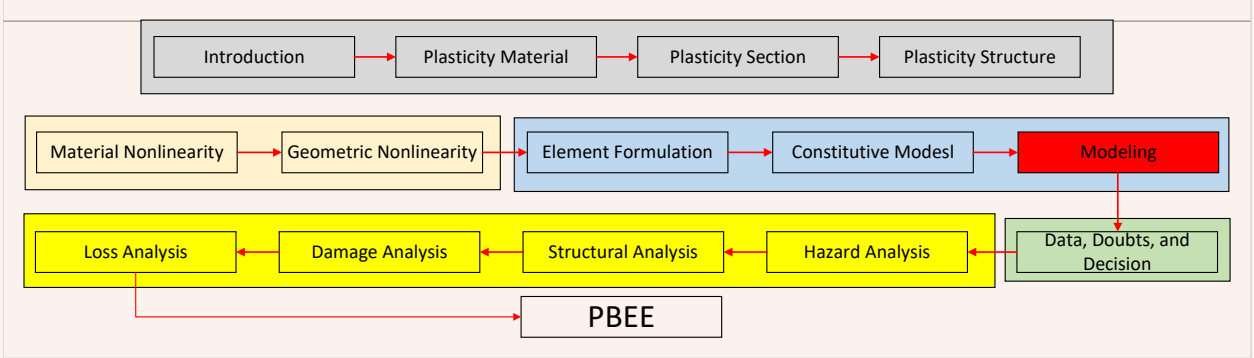
63 科学与艺术的终端单元模型

摘要

有限元分析的一个关键因素经常被忽略: 模型。正如本章所表明的那样, 这既是一种艺术, 也是一种科学, 其实践可以影响结果。

本章为读者提供基本建议, 在 任何 完成 单元 研究。更具体地说, 如何理解和编写, 然后数学定义问题, 如何从多个来源收集所需的数据并合成它们, 如何定义数学 (结尾 单元) 模型 具体而言, 它将对其进行模型。(在此背景下) 是科学和解决上述所有事物的艺术。

63.1 引入 1862
63.1.1 完成 单元 按摩/分析验证 . . 1865
63.1.2 模型验证和验证的概念 . . . 1865
63.2 混合 1866
63.2.1 马克思 单元 1867
63.2.2 截面 1873
63.2.3 “Pick 和 Stick” 1874
63.2.4 结论评论 1874
63.3 恶化参数定义 1875
63.3.1 定义 1875
63.3.2 数据库模型参数 1876



63.1 引入

1 正确的结构模型对成功分析至关重要。这种重要性在处理 非线性分析 时增加。

2 直观控制, 模型结构与 1D 单元 (如《章节》中所述 61) 它不像最初可能看起来那么简单。这个章节讨论了这些复杂性。

3 框架结构的非线性 有限元分析 最终是:

- 需要和计算时间限制,
- 正确了解问题和非线性分析原则
- 可用的计算工具和国内专业知识。
- 预期的结果质量。

分析过程

4 分析必须仔细规划、执行和评估。在最严格的方法中，它包括以下阶段 (图 63.1):

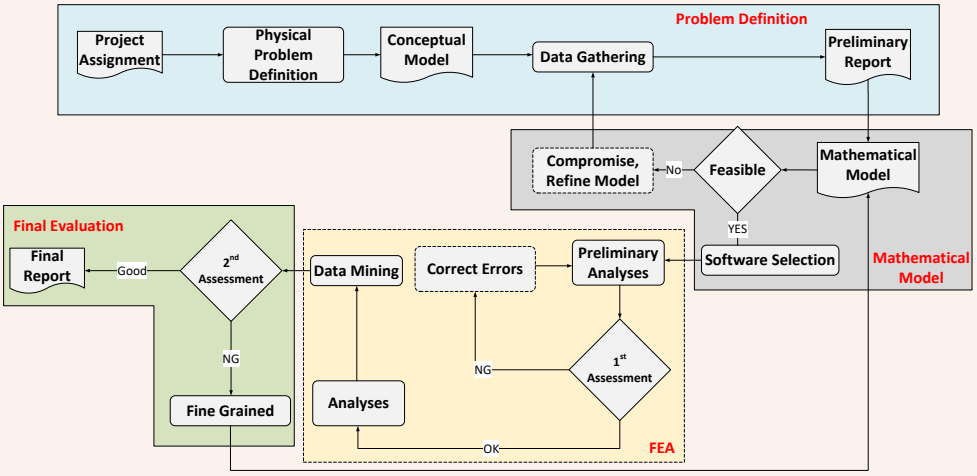


图 63.1: 完成 单元 过程 (被启发的 Bathe, 1996)

初步分析: 通常是线性弹性，这个步骤测试了物质属性、边界条件和负载的定义。

初步评估: 对结果进行“现实检查”。这些情况是否在合理的范围内，或者与初步报告中预期的情况有所不同？检查数据输入、混合单位或意想不到的结果中的漏洞。移动是否符合负载和边界条件？荷载路径是现实的吗？识别需要精炼的梅斯区，需要不同的增加或整合方案。接近标准太严格了吗？

正确的错误: 解决问题，导致不可接受的初步结果。

分析: 从最简单的模型到最复杂的模型的结构进行进一步分析。

数据采矿: 从产量中提取相关结果。有些软件允许特定数据出口，而其他则不。结果可能需要从图形后处理器或 ASCII 输出文件中获取并存储。最好将所有获取的数据集成到一个 Excel 表中，并使用 MATLAB 或 Python 等工具以根据需要编写数据。

5 常见，大规模失败源于小小的忽视细节，在后面可以和应该在模型中被考虑。与此同时，可能花费大量的努力来模拟其他不相关细节。需要仔细考虑，以区分什么是必不可少的和什么是不。

6 因此，注意细节必须在整个过程中均匀地应用。(形象 63.2). 低估特定模型方面的重要性可能会导致失败。例如，债券失败，虽然经常被忽视，在列基础上的地震负载下至关重要。

非线性分析 要求

7 依靠线性弹性分析，当需要 非线性分析 时，可以是昂贵的和危险的。这种依赖往往取决于高度保守的，自愿的。(和减少) “工程判断”.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

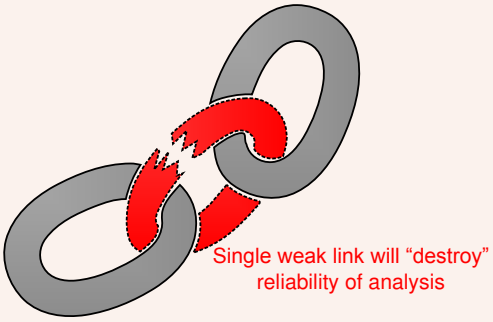


图 63.2: 统一分布的模型复杂性

8 无法准确识别 荷载 故障可能导致 “超射” 以英国超级设计为基础。线性分析也倾向于低估移动, 这可能构成重大危险。(图 63.3).

9 复杂问题有时可能需要复杂的分析。

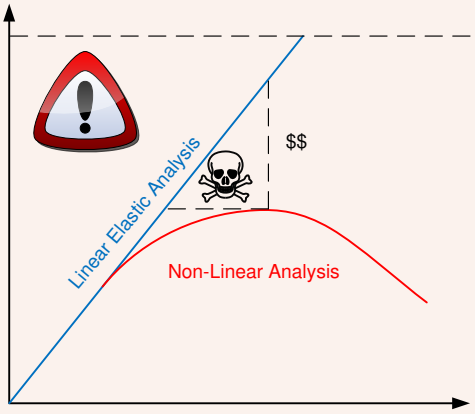


图 63.3: 与 非线性分析 相比的 线性分析 的差距

10 与线性弹性解决方案不同, 非线性分析提供多种可接受的解决方案。不同的软件、模型和分析师可能会产生不同的结果, 这并不一定意味着所有 “错误的” (雖然有些人可能) 但是, 他们必须正确地解释。

11 要小心, 非线性分析不是音频工程判断的替代品。它应该是最后一个解决方案, 仅在常见意义后使用, 线性分析, 并且简化方法已经耗尽了。

12 理想情况下, 非线性分析应该用于验证或量化一个有基础的假设。**此前** 到分析。

13 运行 非线性分析 需要大量的数据准备和结果解释。

14 结果首先要质量考虑, 应避免过度分析准确性或专注于微不足道的细节。“第三季度”.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

定义 63.1: 關於 Finite 单元 研究的角色

有限元分析 只是一个工具来确认或量化预期的反应, 通过适当的坚实工程判断。

专家选择

15 如果要进行非线性分析的, 则应在选择 “专家” 谁能做这样的分析。大多数咨询公司的工程师习惯于进行线性弹性分析和编码规定的设计。

16 另一方面, 在学术界有很少的研究人员, 他们对一个复杂结构的非线性分析的做法非常熟悉; 然而, 他们往往倾向于简化模型的周边方面, 并专注于狭窄的方面。

17 要记住, 非凡问题将需要非凡的技术来由非常熟练的分析师进行调查。

63.1.1 完成 单元 按摩/分析验证

一旦一个最终的单元面具被聚集在一起, 值得确认它的代表性。这可以通过比较最终的单元和实验式模型来评估。前者是由模型分析和最终 单元 型号的第一个 固有频率 的确定。后者可以通过强制振动的结构由一个以异端地放置的质量的冲击器获得。

18 非线性分析 的 Mesh 可以通过 A “普斯特” 分析是否能够复制预期的失败模式 (例如, 合体单元是否正确定义以允许预期的失败?). 最后, 非线性模型应根据具有已知实验反应的代表性结构组成部分独立验证。(下面看 §63.3.1 加密的。

63.1.2 模型验证和验证的概念

19 过于常见的非线性终端单元代码被认为是 “批准” 仅捕获实验观察的数据 (常见的转移). 很多时候, 这伴随着非常有色的数字和相关术语形。要记住, 非线性模型有足够的变量。“调整” 他们中的许多, 然后获得被视为一个可接受的模型。这种模型应该进行审查, 以确保所有假设都是合适和合理的, 并且采用的物质特性是现实的。换句话说, 一个简单的表面图像比较是不够的。

20 一般来说, 一个最终的 单元 代码必须被验证或验证。有几个定义是 (Thacker et al., 2004) (Stewart, 2009).

验证 确定一个模型实施的过程准确地代表开发人员对模型的概念描述和解决方案。它涉及通过比较 数值 解决方案与 解析 或非常准确的基准解决方案来识别和删除模型中的错误。简而言之, 验证处理与模型相关的数学。

批准 确定一个模型的程度是准确的代表性现实世界从模型的意图使用的角度。它涉及通过将 数值 解决方案与实验数据进行比较来量化模型的准确性。简而言之, 验证处理与模型相关的物理学。

定义 数值或物理模型参数在计算模式中的调整过程, 以改善与实验数据的协议。

代码验证 确定计算机代码是正确的, 并按照计划运作。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

计算机模型 数值 实施数学模型, 通常以 数值 分辨率、解决方案算法和接近标准的形式。

概念模型 收集假设、算法、关系和数据, 描述了数学模型和验证实验可以构建的兴趣现实。

信任 一个数值估计的概率将位于指定的范围内。

错误 是模型和模拟的任何阶段或活动中可识别的缺陷, 而不是由于缺乏知识。

忠诚 模拟与实验结果之间的差异。

不可减少 主条目: 信任区 与物理系统进行模型相关的内在变异。

数学模型 数学方程式、边界值、初始条件和模型数据需要描述概念模式。

模型 概念/数学/数值描述一个特定的物理场景, 包括地质、物质、初始和边界数据。

模型审查 改变模型的基本假设、结构、参数估计、边界值或初始条件的过程, 以改善与实验结果相匹配。

预言 使用模型以预测物理系统的状态, 在模型未被批准的情况下。

可减少 主条目: 信任区 潜在缺陷是由于缺乏知识, 例如不完整的信息, 物理过程的误解, 不准确定义或不具体描述失败模式等。

63.2 混合

21 被覆盖 (非线性) 单元表述和非线性构建模型, 我们现在准备把这两者聚集在一起, 讨论框架实际上是如何模型化的, 即。**混合**. 它主要是科学, 有少量艺术。

22 Mesh 影响模拟的准确性、相匹配性和速度。

23 模型将使一个 **数学模型**, 即相关术语, 材料属性, 负载后完成元素分析。重要的是要立即指出, 没有一个单一的和 “合适” 建造一个结构的方式, 模型是两者。科学与艺术.

24 在我们开始之前, 我们应该问自己: 一些重要问题

- 3D 还是 2D?
- 层部或部分力量?
- 极限状态?
- Damping: Rayleigh 和 / 或 歇斯底里?
- 严格的单一分析或 接近 多元分析 (蒙特卡洛)?
- 塑性 被打破或分发?
- 邦德斯利普?
- Pushover 或过渡分析
- 期待多少非线性?到顶峰?, 后顶峰?

25 它总是一个 **妥协** 之间:

- 期望和时间/成本限制。
- 我们了解问题和非线性分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- 可用的软件 / 专家
- 预期的结果质量。

63.2.1 马克思 单元

26 与基于连续的终端 单元 不同, 在 非线性分析 的背景下, 必须以双重方式使用 单元. (甚至是三重) 只是模拟一个连接或一支闪光列。这些个体的组合 单元 (在章节中提出的 61) 它将被称为 “马克思单元”[1].

27 我們所擁有的基本 单元 是顯示在 图 中的一些 63.4. 他们是 “原子” 它可以结合在 “分子是结构组成部分。

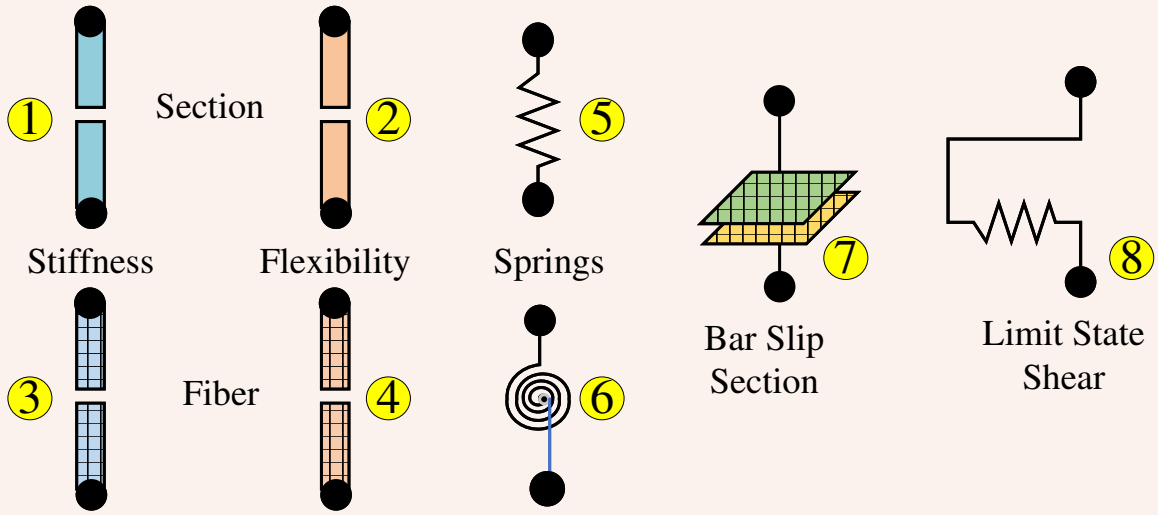


图 63.4: 完成 单元 为 非线性分析 的框架

28 要记住, 生命安全的主要担忧是列。

29 最重要的是柱终端连接。这些在 图 中顯示 63.5. 它们从最简单的 (二、什么都没有) 到最复杂的 (spr 和极限状态 sub-单元).

30 在折叠塑料模式中, 多轴零长元素涵盖材料模型并允许 DOF 结合, 只需要列材料和地质特性输入。桌子 63.1 进一步扩展到这个数字。

31 梁 列可以像个别的 单元 类型一样简单, 或者它们可能由 单元 的组成。(通常用于处理塑料损坏的位置, 即塑性铰).

32 可能的连接 (图 63.1) 和 单元 (图 63.6) 在桌子上显示 63.2.

[1]在古典终端元素中, 宏元素是多元素的组合在一个和内部自由度减少到少数连接到剩余的相关术语子。在这里, 不会有自由度的凝固, 因此可能有多个。(内部) 到一个节点。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

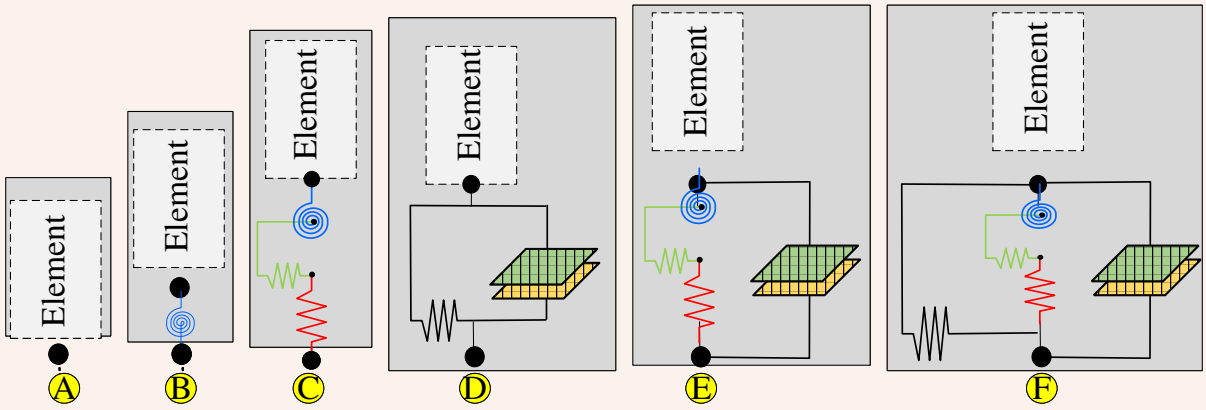


图 63.5: 柱 终端连接

表 63.1: 柱 连接

	A	B	C	D	E	F
简单的戒指	✓	✓	✓	✓	✓	✓
旋转的春天		✓	✓		✓	✓
旋转 & 翻译 Springs			✓		✓	✓
极限状态 Shear 标签				✓		✓
邦德滑雪					✓	✓

表 63.2: 连接单元兼容性

梁 柱	A	B	C	D	E	F	G	H
连接	1	3|1	3	2	4|2	4	[2|4],[1|3]	[1|3],[2|4]

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

[33] 对于连接, 我们无法将零长度单元连接到他们之间。此外, 直接连接单元防止独立的关节和旋转变形。(是的, 它是一个紧密的连接。). 可能的安排显示在 图 63.7.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

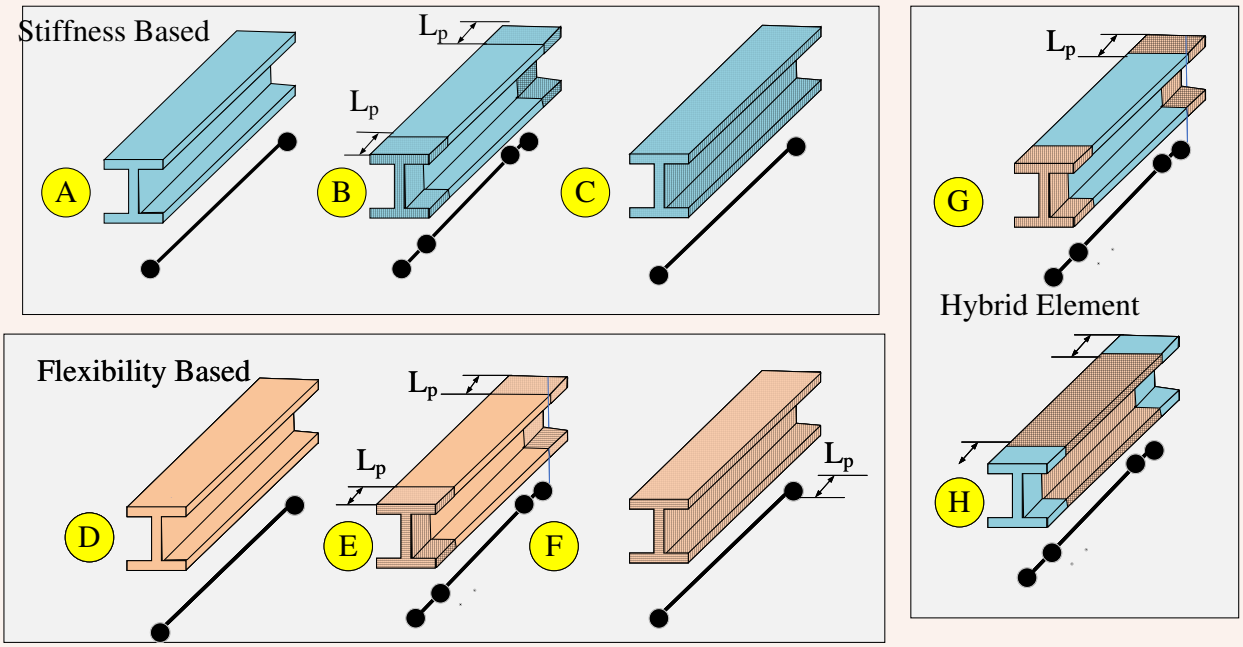


图 63.6: 梁 或 柱 单元

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

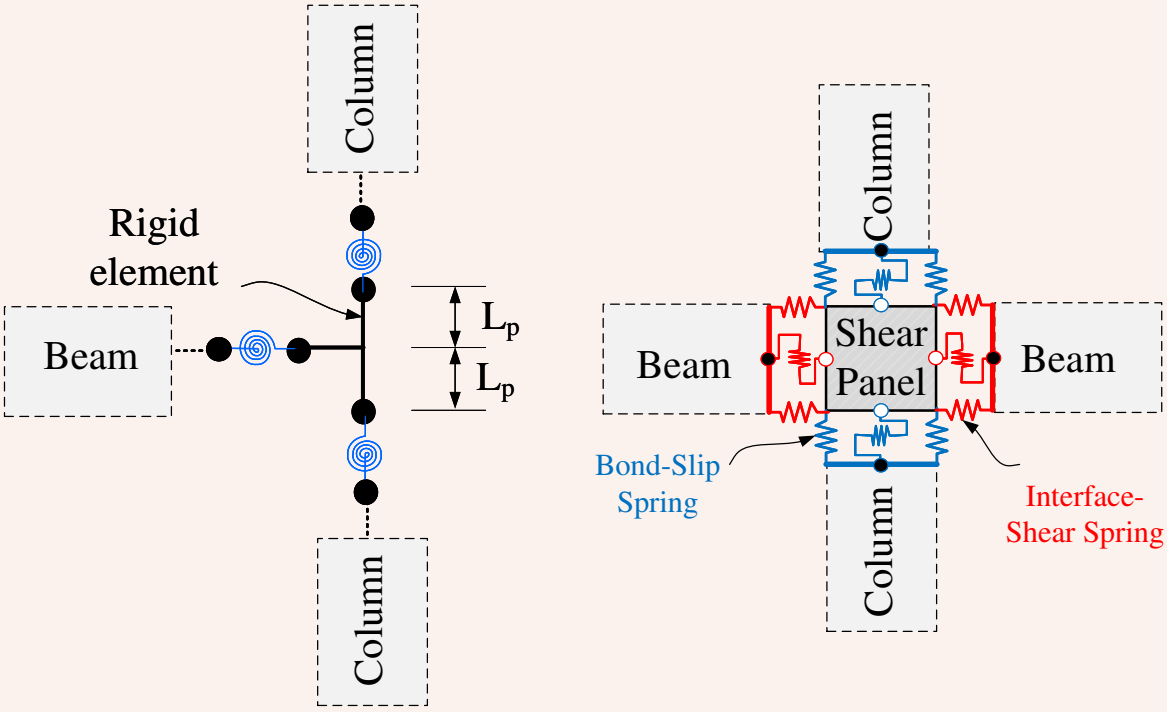
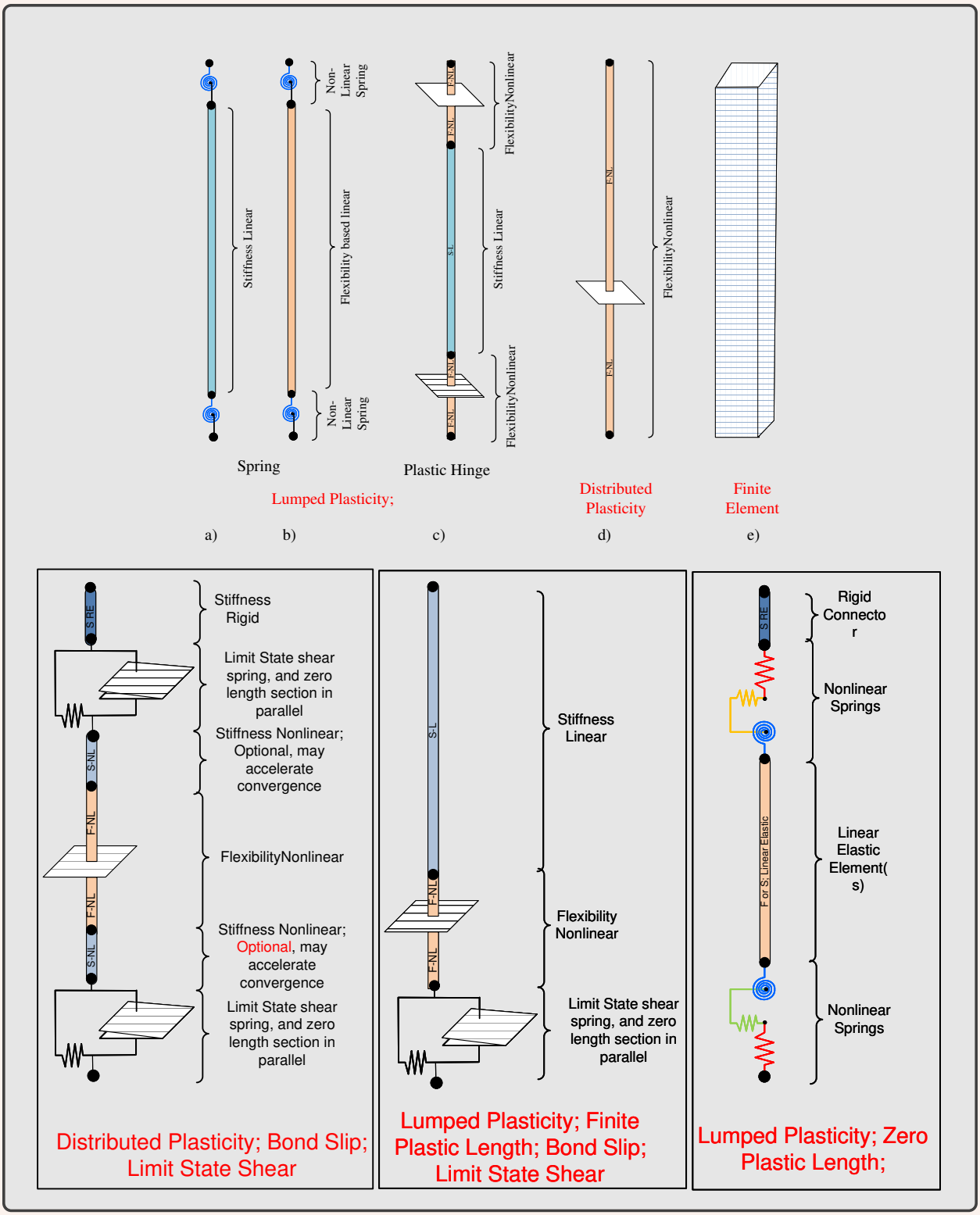


图 63.7: Column-beam 连接

审阅稿

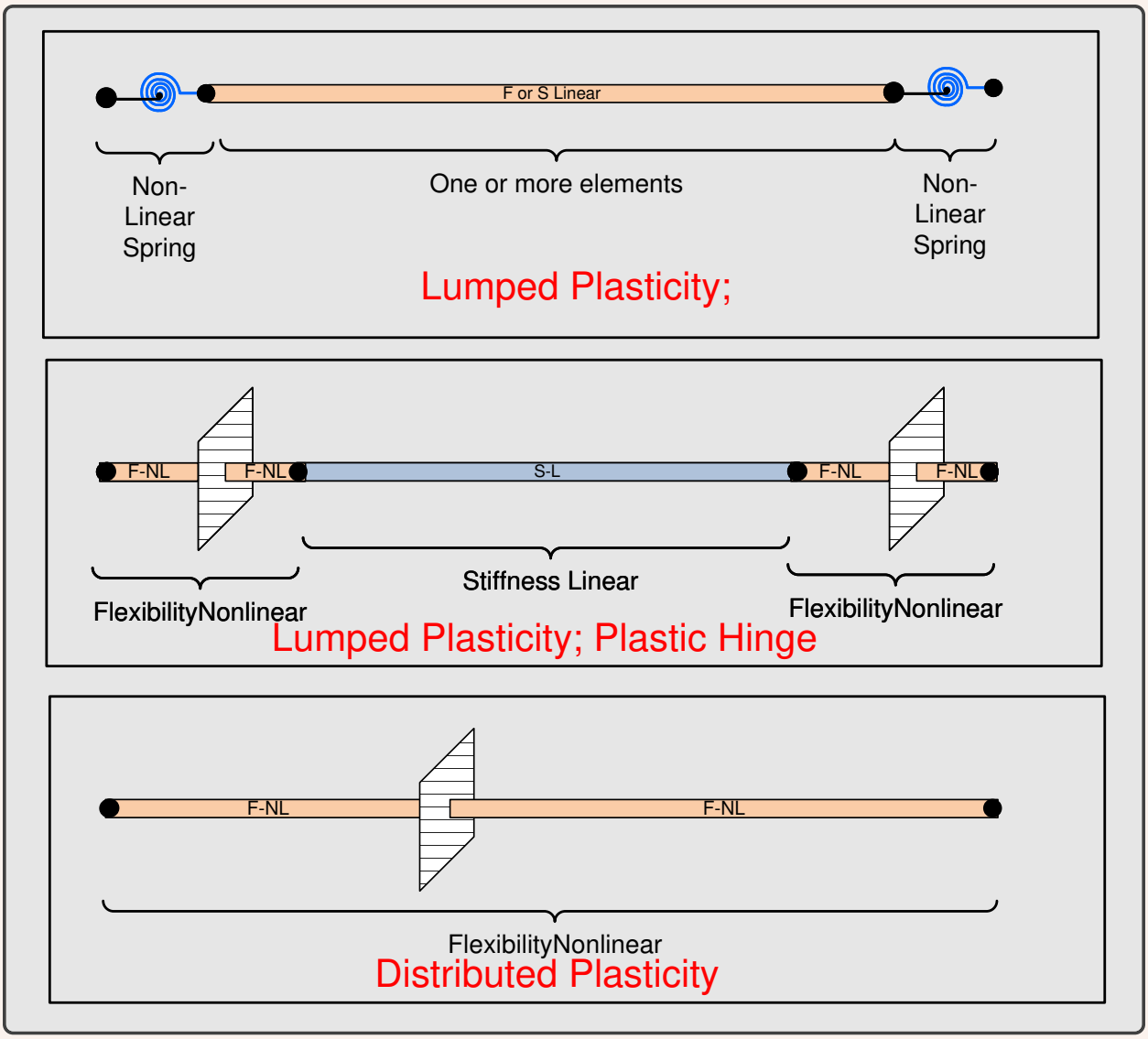
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

63.2.1.1 例题 63.1: 柱 模型



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

63.2.1.2 例题 63.2: 梁 模型



63.2.2 截面

34 交叉部分模型在分布式塑料方面特别重要。在 2D 分析中, 我们提到层, 而在 3D 中我们提到了纤维。

35 显然, 在 2D 中, z 层的位置不重要 (不需要说明), 图 63.8.

36 我们应该区分

- 无限 混凝土
- 定位 混凝土

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 强化

因为每一个将有不同的应力-应变特性, 图 62.12.

37 请注意, 我们可以在同一层有多个层。y 升高。

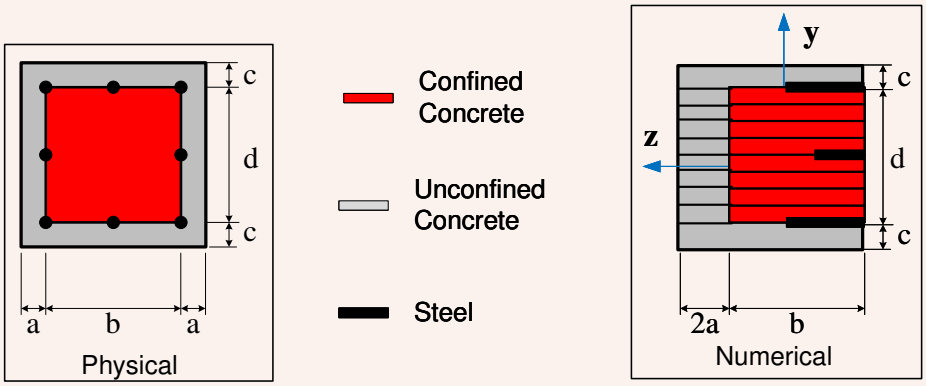


图 63.8: 截面 模型到层

63.2.3 “Pick 和 Stick”

38 基于连续的终端单元, 最多有两种类型的单元共存在: 连续, 和合体。

39 在分析框架时, 事情更复杂, 因为我们可以将不同类型的单元混合在一个 “马克思单元” 实现所需的模型。

40 使用以前的 单元 图书馆和连接, 我们可以有不同的转换为 框架

41 所有模型都可以从表中定义 63.3.

表 63.3: 模型 “点击和点击” 选项

边界条件	柱 图 63.5		连接	梁
图 63.7	底部	上方	图 63.7	图 63.6

63.2.4 结论评论

42 几条评论

1. 在折叠的塑性中, 旋转的春天可以是非线性或精致塑料。(EPP)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 如果有人预测分布式塑性模型的过度非线性变形, 则基于非线性的硬度的单元应添加到每个端。

[43] 基于灵活性的元素几乎永久使用与层化元素 (它也可以在部分力量方面定义。(N_x 和 M_z)).

3. 通常, 我们不包括带子弹的粘贴。
4. 如果要模型化, 可以将零长度单元部分与零长的单元平行。
5. 但是, 在轻微的非线性情况下, 一个单元的灵活性应该是足够的, 至少基于 3 到 4 的硬度的单元将是必要的。
6. 基于硬度的 单元 使用三 (盖斯) 整合点, 但是对于灵活性 单元 应该使用五个整合點 (Gauss-Lobatto 包含在每个端的集成点).
7. 单元 基于坚固或灵活性之间的选择并不明显。

63.3 恶化参数定义

[43] 分布 塑性 (纤维部分) 输入参数是通常与压力线曲线相关的参数。一般参数可以从 混凝土 抗压强度 和 弹性模量 得出结论。

[44] 塑性 模型 应该能够明确模拟混凝土分裂行为、紧张抑制和其他塑性传播效果。这些影响大多可以被独一无二的 $P-\Delta$ 或 $M-\theta$ 关系构成一个 “签名” 具体的柱设计, 从而捕捉到单元 “恶化参数”.

[45] 这些曲线是独一无二的每个字符列配置, 他们的签名必须被识别。有两种选择, 桌子。63.4:

1. 定义
2. 数据库

表 63.4: 恶化量化

方法	数值 参数	地点
定义	No	是的
数据库	是的	No

[46] 由于列是建筑物在地震时的稳定性最关键 单元 , 所以通常不会加密。

63.3.1 定义

[47] 加密含义

1. 在文学中寻找一个白色列类似 (尺寸, 增强, 混凝土属性) 分析的, 并报告实验室测试结果。请注意, 这些数据不包含相应的密度值。(这些数据将分开在数据库中报告, §63.3.2).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 完成一系列 数值 模拟和 “双子座” 输入参数, 直到预测曲线满意接近实验曲线。

48 因此, 模型参数基本上是 “双重” 以便预测反应尽可能接近实验定义的答案。

49 显然, 这样的 “手册” 定义可以是时间的, 并且可能不会导致几乎最佳参数。这个过程可以通过下面的参数识别方法进行自动化和改进。

63.3.1.1 参数识别

50 这个方法在章节中详细描述 65, 如适用于本书中讨论的其他主题。

63.3.2 数据库模型参数

63.3.2.1 伯利 / 伯里

51 加密的替代品是识别将列出柱规格和相应恶化参数的数据库。其中一些最广泛的 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004).

52 广泛使用的框架建筑数据库由 Berry, Parrish, and Eberhard, 2004 它包含数百个 RC 梁列的静态循环和单调测试的公布结果。对于每个测试, 数据库报告列的地质、强化和材料特性、力量部署历史、控制失败模式以及其他相关信息。

53 所有数据均以相同的分数配置为准, 如图中所示。63.9. 对于以 曲率 进行双重测试的列, 则将翻译为相当于 柱 的列由 Berry, Parrish, and Eberhard, 2004, 假设固定通胀点, 通常在柱中等高度。

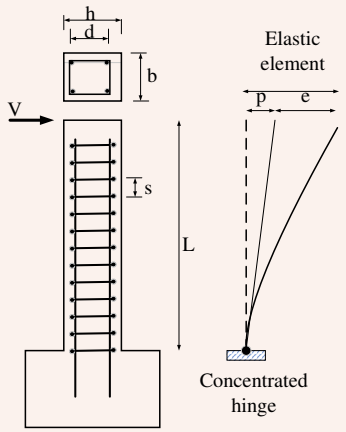


图 63.9: 理想化的彩虹模型 rc beam-column (Haselton et al., 2016)

54 数据库可以通过网格轻松访问, 图 63.11.

63.3.2.1.1 柱 属性

55 桌子从 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004) 描述通常在此和类似的数据库中发现的数据集 (桌子 63.5-63.7).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

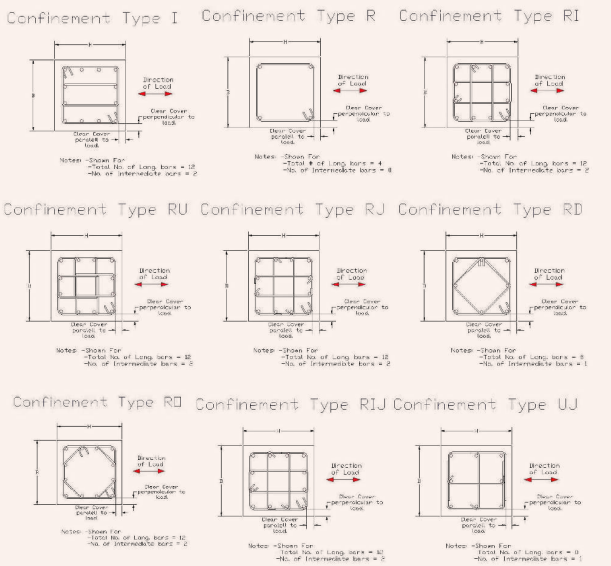


图 63.10: 限制的类型 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004)

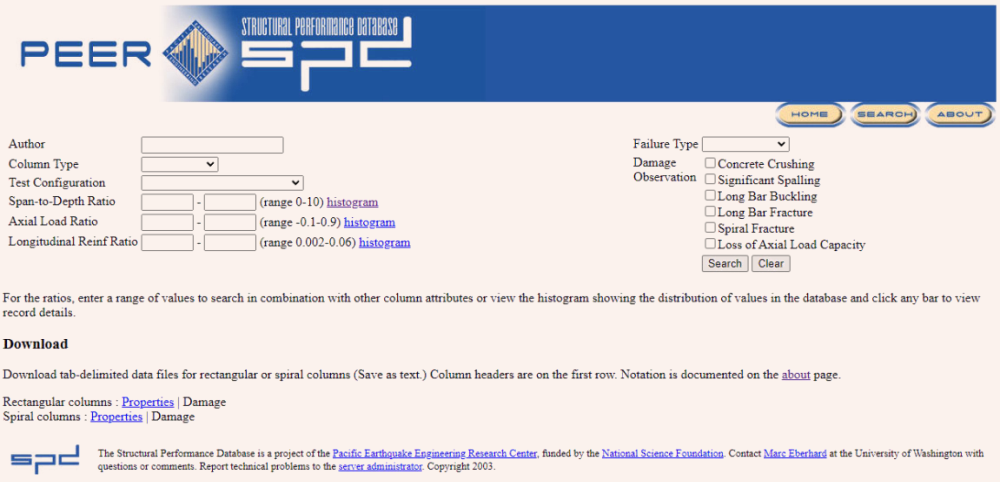


图 63.11: 对方结构性能数据库的图形用户界面 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 63.5: 材料属性

材料	评论	财产的描述	柱类型
混凝土	f_c'	特征性 抗压强度 的 混凝土 (MPA)	R、S
长度强化	f_{yl}	利息 应力 长度增强 (MPA)	S
	f_{su} 长久。	最终 钢材 强度为长度增强 (MPA)	S
	f_{yl} 角落	折扣 应力 的长角栏 (MPA)	R
	f_{yl} 内心。	折扣 应力 的长度中间条 (MPA)	R
	f_{su} 角落	最终 钢材 长角线的强度 (MPA)	R
	f_{su} 介入	最终 钢材 长度中间线的强度 (MPA)	R
转换强化	f_{yt}	利息 应力 转换增强 (MPA)	R、S
	f_{su} 转型。	最终 钢材 强度为转向增强 (MPA)	R、S

表 63.6: 跨部分分类

评论	跨部分形状	代码
O	八角形	2
C	循环	0
S	广场	3

表 63.7: 失败模式代码

失败	代码
灵活性	1
谢尔	2
灵活分享	3

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

表 63.8: 柱 地质学

	评论	描述	柱类型
总体柱尺寸	*H* 或 *D*	柱 深度 (mm)	R、S
	B	柱 宽度 (mm)	R
	区域 (A_g)	横截面积 或 柱 (mm^2)	R、S
	L	相当于 Cantilever 的长度 (mm)	R、S
长度强化	全集 # 酒吧	长度强化带的数量	R、S
	酒吧。	长度强化线的直径 (mm)	S
	酒吧 Dia.Corner	长度角栏的直径 (mm)	R
	酒吧, 中间。	直径长度终端线条 (mm)	R
	可口可乐	长度长度强化分裂	R、S
	雷恩。比例	长度强化比例 (计算).	R、S
转换强化	酒吧。	跨越强化的直径 (mm)	R、S
	空间	跨越强化空间 (mm)	R、S
	伏尔。转型	重量转型强化比例 (已报道)	R、S
	Nv	十字路口线条的数量 跨部分	R、S
	清晰覆盖 (正义)	从 柱 的外部表面到外边的距离转向强化 (mm)	R
	清晰覆盖 (螺旋)	从柱的外部表面到转向增强中心的距离 (mm)	S

表 63.9: 限制细节

评论	描述	定义代码
I	关闭链接	1
R	直角连接 (周围周边)	2
RI	直角和交锁联系	4
RU	直角连接和 U-bar	8
RJ	直角连接与 J 高	6
RD	直角和诊断联系	3
RO	直角和八角联系	7
里亚	直角和交锁连接, 与 J 高	5
UJ	与 J 高的 U-bar	9

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 63.10: 限制细节

描述	限制代码
坎特利弗	C
二重曲率	DC
双重结束	DE
灵活基础	CFB
哈姆雷特	HH

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

63.3.2.1.2 灵活能力的概述

56 计算的灵活能力总结在表中提供 63.11

表 63.11: 对直角增强列的测试总结 (Berry, Parrish, and Eberhard, 2004)

测试 #	参考	柱指定	评论	M_{max} (KN - M)	$\frac{M_{max}}{M_{ACI}}$	V_{max} (kN)	Δ_y (mm)	失败模式
1	吉尔和阿尔。(1979)	No. 1		838	1.22	657	7.12	1
2	吉尔和阿尔。(1979)	No. 2		953	1.05	764	7.13	1
3	吉尔和阿尔。(1979)	No. 3		817	1.20	642	4.85	1
4	吉尔和阿尔。(1979)	No. 4		903	1.44	697	4.09	1
5	阿尔及利亚和阿尔 (1981)	No. 3	带宽 120mm-75mm-120mm	337	1.24	192	9.61	1
6	阿尔及利亚和阿尔 (1981)	No. 4	带宽 120mm-75mm-120mm	298	1.14	169	12.19	1
7	苏西亚人和阿尔。(1986)	No. 1		354	1.17	200	10.36	1
8	苏西亚人和阿尔。(1986)	No. 2		481	1.18	279	9.16	1
9	苏西亚人和阿尔。(1986)	No. 3		474	1.17	277	8.77	1
10	苏西亚人和阿尔。(1986)	No. 4		457	1.19	265	9.59	1
11	扎恩和阿尔。(1986)	No. 7		398	1.35	213	11.88	1
12	扎恩和阿尔。(1986)	No. 8		554	1.44	269	10.27	1
13	沃森和公园 (1989)	No. 5		535	1.42	292	8.09	1
14	沃森和公园 (1989)	No. 6		528	1.41	295	6.19	1
15	沃森和公园 (1989)	No. 7		525	1.75	293	4.02	1
16	沃森和公园 (1989)	No. 8		523	1.81	295	4.16	1
17	沃森和公园 (1989)	No. 9		602	2.08	310	4.76	1
18	塔纳卡和公园 (1990)	No. 1	过渡强化管被焊接	290	1.14	167	13.81	1
19	塔纳卡和公园 (1990)	No. 2		291	1.14	168	13.04	1
20	塔纳卡和公园 (1990)	No. 3		302	1.18	175	11.37	1
21	塔纳卡和公园 (1990)	No. 4		292	1.15	170	12.35	1
22	塔纳卡和公园 (1990)	No. 5		704	1.15	386	13.55	1
23	塔纳卡和公园 (1990)	No. 6		717	1.17	409	11.96	1
24	塔纳卡和公园 (1990)	No. 7		1070	1.34	588	9.68	1
25	塔纳卡和公园 (1990)	No. 8		1090	1.36	619	8.39	1
26	公园与保罗 (1990)	No. 9		727	1.21	393	10.71	1
27	阿拉卡瓦和阿尔。(1982)	No. 102	灵活 支座	60	1.15	153	3.78	1
28	纳加萨卡 (1982)	HPRC10-63	从绘画中扩展的覆盖	27	1.02	87	2.74	3
29	纳加萨卡 (1982)	HPRC19-32	从绘画中扩展的覆盖	34	1.08	111	1.94	3
30	Ohno 和 Nishioka (1984)	L1	从绘画中扩展的覆盖	201	1.30	119	9.49	1
31	Ohno 和 Nishioka (1984)	L2	从绘画中扩展的覆盖	186	1.20	111	9.05	1
32	Ohno 和 Nishioka (1984)	L3	从绘画中扩展的覆盖	172	1.11	104	9.79	1
33	阿尔和阿尔。(1985)	2D16RS	覆盖从绘画, 分裂连接失败	41	1.08	98	4.55	3
34	阿尔和阿尔。(1985)	4D13RS	面板从绘画, 分裂 -	44	1.01	108	4.59	3

63.3.2.1.3 例子

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

57 PEER 数据库使用的例子是由 Haselton et al., 2008 寻找符合下列标准的泡沫列的人,

$$\rho_{sb}(\text{area confinement ratio}) > 0.006(\text{ACI 318-05 Eq. 21-4 requires } \rho_{sh} > 0.0075)$$
$$\frac{P}{A_g} f_c' < 0.30$$
$$f_c' < 40 \text{ MPa}$$

结果是 30 个符合标准的实验测试, 并显示在表中。63.12.

63.3.2.2 斯坦福 / 利格诺斯

58 Lignos and Krawinkler, 2013 开发了三个数据库, 用于模拟结构组件:

W 部分 钢材 点击: 钢材 W 部分数据库包含 316 个样本。大多数这些样本是宽旗灯。(W 或 H) 从 W43 到 W43× 第 13 章 W36×300. 收集的钢子组合的主要恶化模式是本地和侧面转折点, 因为重点在于现代钢结构中广泛使用的北方后线到列连接的循环行为。五十四个样本包括由于早期而失败的斑点 (非文学) 连接中断。由于连接中失败的样本不是下面的讨论的一部分, 因为重点是梁到柱连接, 它们以双向的方式恶化。

管洞平方 钢材 列 为 HSS 列开发了 120 个实验数据点 (44 个单调和 76 个循环测试). 这些列已被结合的轴荷载和单调或循环旋转时刻所处。应用的比例 N 以 荷载 为主 $N_y(N/N_y$ 收集的样品从 0 到 0.60。柱 深度 D 到厚度 t 比例 (D/t) 数据集的范围从 18 到 100。收益 应力 f_y 收集的 HSS 列范围为 276 至 500 MPa。

RC 打击: 只有包含不灵活的漏洞的子组被列入此数据集。数据库包含 cantilever, double 曲线、相关术语头和固定端样本。

59 所有三个结构组件数据库都包含以下信息:

甲板数据: 配置地质, 测量材料特性, 弱细节 (在合成样品的情况下), 增强配置和细节 (為 RC) 等等。

报告漏洞 包含子组和/或组件测试的概述。

报告结果 (即测试文件中所提到的测量和观察) 包括数字化历史的全球荷载-位移歇斯底里图表。

提取数据 在数字化格式 (即从金属数据中提取的信息, 并为解析模型的定义提供的数据) 包括数字化时刻 转角 歇斯底里图表和面板区域表的历史 V_{pz} 对 Shear 扭曲 γ 钢板到列子组合。这些数据是直接从个人调查人员获得的, 谁进行了实验 (如果信息是数字化), 或通过从实验报告中直接数字化上述歇斯底里图表。完整的数据集以及描述三个结构组件数据库的评级的全面文档, 可通过 NEES 中央仓库下载。

60 对于每个数据设置, 使用了一种恶化定义模型, 并且对恶化参数的累积分配功能被列入。(使用 Lognormal 分布).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 63.12: 30 个实验测试的定义研究结果 (Haselton et al., 2008)

物理 柱 属性							加密数据								与 Fardis 相比		
测试号码 (Eberhard 数据库)	$P/A_g f'_c$	P/P_b	ρ_{sh}	s (mm)	f'_c (MPA)	θ_y	EI_{eff}/EI_g	$st f2/EI_g$	α_c	$\theta_{cap,pl}$(拉德)*	如果注意到卡片*	λ	c	法迪斯 $\theta^{pl}_{u,mono}$ (拉德)	$\theta_{cap,pl}$ 与 Fardis 计算 θ^{pl}_u (拉德)	$\theta_{cap,pl}$ Fardis / 加利布
1	0.26	0.65	0.0071	80	23.1	0.008	0.25	0.47	0.01	–	0.028	0	136	1.0	0.032	0.010	0.36
6	0.21	0.55	0.0087	90	25.0	0.009	0.31	0.83	0.04	–	0.036	0	64	1.0	0.045	0.023	0.63
11	0.22	0.58	0.0067	117	28.3	0.010	0.34	0.75	0.07	–	0.078	0	74	1.0	0.046	0.024	0.31
18	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.010	0.30	0.65	0.02	–	0.083	0	114	1.0	0.050	0.028	0.33
19	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.33	0.77	0.02	–	0.069	0	89	1.0	0.050	0.028	0.40
20	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.34	1.92	0.02	–	0.065	0	41	1.0	0.050	0.028	0.42
21	0.20	0.58	0.0106	80	25.6	0.009	0.32	1.14	0.01	–	0.073	0	159	1.0	0.050	0.028	0.38
22	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.18	0.35	0.03	–	0.038	0	132	1.0	0.075	0.053	1.41
23	0.10	0.30	0.0075	110	32.0	0.010	0.19	0.40	0.03	–	0.070	0	145	1.0	0.075	0.053	0.76
24	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.010	0.28	0.79	0.04	–	0.050	0	105	1.0	0.057	0.035	0.69
25	0.30	0.89	0.0091	90	32.1	0.011	0.27	0.73	0.01	–	0.046	0	127	1.0	0.057	0.035	0.75
26	0.10	0.26	0.0106	80	26.9	0.008	0.27	0.61	0.04	–	0.055	0	200	1.0	0.079	0.057	1.03
88	0.10	0.27	0.0061	76	29.1	0.010	0.34	0.55	0.05	–	0.016	0	123	1.0	0.060	0.038	2.37
90	0.10	0.27	0.0061	76	29.2	0.010	0.30	0.54	0.06	–	0.022	0	127	1.0	0.060	0.038	1.73
92	0.20	0.56	0.0061	76	29.4	0.014	0.30	0.64	0.02	–	0.019	0	82	1.0	0.052	0.030	1.58
94	0.26	0.72	0.0061	76	33.3	0.012	0.36	0.61	0.06	–	0.026	0	44	1.0	0.047	0.025	0.98
96	0.28	0.76	0.0061	76	31.0	0.010	0.43	0.67	0.01	–	0.028	0	45	1.0	0.045	0.023	0.83
中间:	0.20	0.55	0.0078	76	29.2	0.011	0.27	0.50	0.04	-0.08	0.070	0.00	109	1.0	0.064	0.042	0.75
意思:	0.17	0.48	0.0079	76	30.0	0.013	0.25	0.59	0.05	-0.09	0.063	0.13	106	1.0	0.065	0.043	0.80
C.O.V 是:	0.45	0.45	0.21	0.24	0.16	0.32	0.32	0.59	0.76	0.37	0.46	2.59	0.39	0.00	0.27	0.41	0.57

* 塑料 转角 是低限度, 如果一个 (即应变软化插槽) 数据中没有注意到。

Victor E. Saouma
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；译文可能存在错误。
审阅稿

63.3.2.3 UTSA / 加诺姆

61 作为一部分开发一个新的粘贴塑料模型的泡沫列 (§62.3.4), Suselo, 2021, Chapter 3 开发了 UTSA 钢筋混凝土 柱 实验数据库, 以验证其模型。

62 一个有趣 (独特可能) 这个数据库的特点是它的治愈。它由两个部分组成:A) 初级数据 (原料:Raw “如是” 收集数据); 和 B) 计算和提取的次要数据, 其中包含原始数据产生的属性, 从两个或更多参数 (例如, 荷载的轴性比例) 或从 荷载 - 位移 数据中提取。).

63.3.2.4 终端 单元/Dolati

63 大多数混凝土列的实验, 从数据库模型中获取, 都使用完全逆转的循环加载协议进行。只有一小部分 柱 测试被测试不同的加载协议。上一篇 UTSA 柱 数据库 (也许现在最大的), 包含 689 柱测试, 其中只有 8 个探索负载协议而不是完全逆转的循环。因此, 虽然目前可用的模型捕获了柱属性和边界条件的影响, 但它们并没有捕获不同负载历史对柱容量的影响。

64 要填补实验数据中的漏洞, 关于负载历史对混凝土列的强度和变形能力的影响; Dolati, Matamoros, and Ghannoum, 2023 完成了单元的连续终端分析。

65 非线性连续终端单元模型被定义为实验测试,7 个列受不同侧载协议的影响。选择的列支持侧强度衰退的灵活切割模式。列被选中以覆盖一系列相关术语压、跨部分、轴负载、过渡强化空间和比例以及长度强化比例。所有测试的列都经历了由于侧载造成累积损坏后的轴崩溃。加密的柱模型随后受到一系列负载协议, 包括单调冲动和完全逆转的循环负载议定书, 具有不同数量的周期。侧负载协议对损害进展、强度和变形能力的影响正在讨论中。

63.3.2.5 ACI 437-A

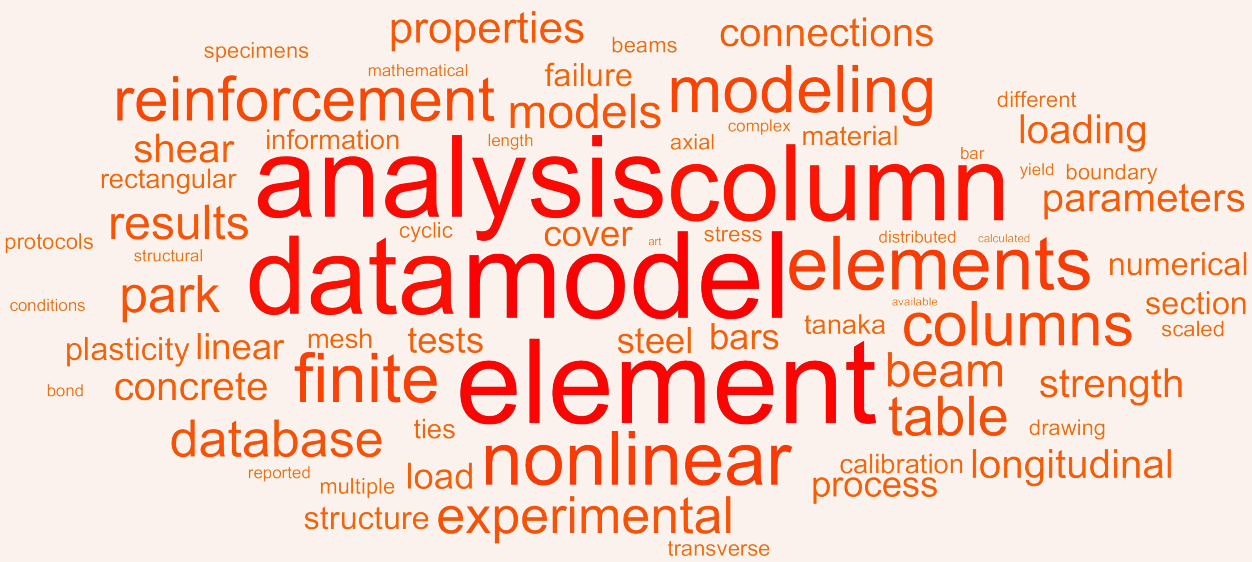
66 ACI437 (现有 混凝土 结构的强度评估) 最近成立了副委员会。(ACI 437A) 创建的任务是 (又一个) 数据库将收集有关实验室和现场测试数据的信息。

67 要收集的信息包括:

- 结构类型:RC、PC、PT
- 单元 描述: 年龄、类型、范围、深度、截面、强化、抗压强度、预期/计算容量
- 测试原因: 灵活, 叶子, 点板, 其他背景信息
- 测试协议: 单调或 CLT, 现场或实验室
- 加载和地质: 分布荷载, 点加载, 多条线等。
- TLM: 计算方法,DL/LL 比例, 应用的 TLM
- 代码: ACI 318 或 562, 出版年, 荷载 尺寸
- 修复或新结构

68 考虑到委员会的组成 (工业与学术) 其存在在一个大国家组织内 (这里) 它很快就会成为参考。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

Intermezzo: 从前进分析到参数识别

接下来的两个章节在不确定性下开发了结构分析的补充工具。章节 64 (**数据与疑问**) 定义如何代表、传播和分析输入中的前不确定性。章节 65 (**决策**) 逆转这个问题: 具体的测量, 数据支持哪些参数值, 以及我们应该如何定义计算模型?

章节 64 此分類上一篇: 前進分析

数据与疑问
|
+● 数据质量
|
+● 不确定性量化
| (演示、宣传)
|
+● 敏感性分析
| (莫里斯, 索博尔, 塔纳多)
|
+● 巴耶西安入侵
   (前、后、MCMC)

章节 65 反向分析

决策
|
+• 逆转问题
|
+● 应用程序框架
|
+● 数据强度
| (RANSAC 预处理)
|
+● 莱文伯格 - 马克瓦特
| (点评估)
|
+● 巴伐利亚人身份
| (下一篇: 参数)
|
+● MATLAB 实施
|
+● 混合工作流

补充性: C-10-A 提供前进分析工具套件: 代表前不确定性, 通过模型传播它, 识别重要参数。C-10-B 适用于对参数识别问题的逆转方法: 使用敏感性显示屏候选人, 从数据中匹配参数, 量化后续不确定性。他们一起完成周期: 前不确定性 → 传播 → 敏感度扫描 → 参数加密 → 支座预测。

审阅稿

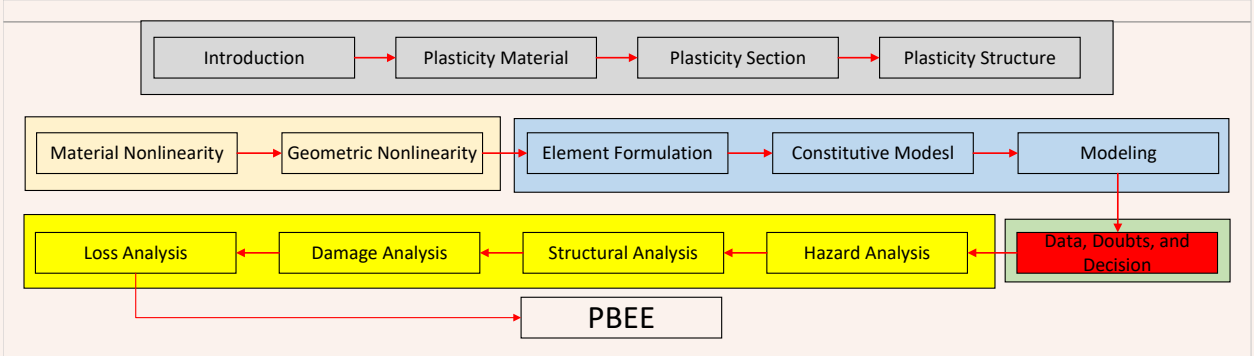
64 数据与疑问: 不确定性和敏感性分析

摘要

本章开发了从不完美的数据转移到可防御的结构预测所需的前进分析工具。它首先区分随机变异性、癫痫不确定性、测量错误和模型形状差异; 然后显示不确定性和通过计算模型的表现, 相互关系以及传播。蒙特卡洛模拟、拉丁超圆样本、线性和点估的接近以及多元混乱扩展都以其假设和限制为介绍。

第二部分是敏感性分析。當地一次測量、莫里斯檢查方法、基於差異的索博爾指數和暴風雨圖表被用來決定哪些不確定的入口控制反應, 以及哪些可以固定或分配低優先。章节结束, 展示了影响力参数如何成为身份候选人。章节 *65* 然后提出并解决相反的问题。

64.1 引入 1887
64.2 数据质量与疑问来源 1888
64.3 不确定性量化与分析 1888
64.3.1 输入不确定性特征化 1889
64.3.2 依赖与相关样品 1889
64.3.3 不确定性宣传 1892
64.3.4 输出不确定性解释 1899
64.4 敏感性分析 1900
64.4.1 莫里斯方法 1900
64.4.2 Sobol 基于变量的敏感性指数 1904
64.4.3 宣传和敏感性方法的比较 . . 1906
64.4.4 确定重要随机变量 1906
64.4.5 塔纳多图表 1910
64.5 从敏感性分析到参数识别 1911



64.1 引入

1 结构分析 很少以准确的输入开始。物质特性在一个成员和整个结构内有所不同; 负载和环境行动是随机的; 测量是不完整的, 噪音; 边界条件是理想化的; 每个计算模型都忽略了一些物理细节。因此, 核心问题不是是否存在不确定性, 而是是否已以足够的纪律向支座做出决定代表。

2 三个任务必须分开。首先, 可用的数据必须对相关性、一致性、偏见、缺席观察和外汇进行审查。其次, 剩下的不确定性必须通过模型呈现和传播, 以便知道可靠反应的传播。第三, 敏感性分析必须确定哪些输入对这种传播负责。单独处理这些任务, 防止大数据的体积被误导可靠信息。

3 此章题为前进问题

$$\mathbf{X} \longmapsto Y = g(\mathbf{X}),$$

不确定输入的位置 向量 $\mathbf{X}$ 通过一个结构模型地图到一个或多个数量的兴趣 Y. 章节 65 解决补充逆转问题: 给予的测量 Y 确定未知的组成部分 $\mathbf{X}$ 或参数 向量 $\boldsymbol{\theta}$.

64.2 数据质量与疑问来源

4 在分配概率分布之前, 分析师应该区分不确定性与错误数据。重复的观察可能包含随机测量错误、系统性偏差、传感器驱动、过字错误, 不一致的单位、审查值或缺少间隔。这些效果需要不同的治疗。随机错误可能被纳入一个概率或测量可见性矩阵; 比亚需要纠正或明确的比亚参数; 隔离腐败的观察可以证明坚实的估计; 缺失的数据不应静静地取代, 而无需文档征收规则。

5 同样重要的是区分 **参数不确定性** 和 **模型不一致**. 参数不确定性反映了在采用模型中存在的数量的不完整知识, 如弹性模量或衰退时间恒定。模型差异是物理系统和最好的反应之间的区别, 即使它的参数是最佳选择时, 采用的模型也可以产生。强迫参数来补偿系统的模型不一致性, 可以产生完美的合适但物理上误导参数值。

6 因此, 防御性分析记录: 每个观测的起源和单位; 测量准确性和重复性; 空间和时间样本; 数据排除; 用于填补差距的假设; 以及加密模型的范围将随后使用。这些记录成为不确定性模式的一部分, 而不是非正式的预处理步骤。

64.3 不确定性量化与分析

7 术语在各个学科上有所不同。在这本书中, **不确定性量化** (UQ) 描述完整的前进分析过程: 识别不确定性来源, 特征不确定输入及其依赖性, 通过模型传播它们, 总结产量不确定性和确定哪些输入物质。**不确定性分析** (UA) 以决策为导向的解释这些传播结果。区别是重点, 而不是严格的分离:UQ 产生和组织不确定性信息, 而 UA 解释了这些信息对工程决策意味着什么。

表 64.1: 本书中采用的术语不确定性量化和不确定性的分析

视角	**不确定性量化 (UQ)**	**不确定性分析 (UA)**
范围	从输入特征化到传播、敏感性和报告的完整工作流	模型输出的不确定性解释和报告
入口	边缘模型、依赖性、间隔、证据和模型形式假设	使用 UQ 研究所设定的输入和传播模式
出口	分布、时刻、量子、过度和失败的概率以及敏感性测量	决策相关的总结、间隔、尾巴概率和比较
角色	产生和组织不确定性信息	解释传播的不确定性对工程决策意味着什么

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

64.3.1 输入不确定性特征化

8 传播研究仅像其输入模型一样防御性。分析师必须确定每个不确定性的来源，决定是否有可能的描述是合理的，指定可靠范围或分布，并记录变量之间的任何依赖。测量不确定性和模型格式差异应在可用的信息允许时与物理变异性分开。

64.3.1.1 不确定性类型

不确定性: 即使有完美的知识，也存在着内在的变异性，例如事件到事件的地面动作变异性和物质属性的真实空间变异。它通常以概率形式呈现，并且不会通过收集有关特定实现的更多信息来消除。

神经不确定性: 关于系统、其参数或环境的不完整知识。它经常可以通过额外的测试，改进的测量或更好的物理模型来减少。

测量不确定性: 随机错误、终端分辨率、加密错误和观测中的偏差，用于描述或加密模型。测量不确定性通常是传感性的，尽管重复的测量噪音往往是概率模型。

模型形式不确定性: 因理想化、错过的机制、构成假设、歧视或数值接近而产生的差异。它不应该自动吸收到参数不确定性。

混合不确定性: 实际问题通常包含多个先前的来源同时。例如，地面动作变异是随机的，位置特征的不确定性是流行性的，记录加速包含测量错误，结构模型具有模型形状不一致。

64.3.1.2 数学代表性

概率分布: 适当的数据或防御性事先知识 支座 一个概率模型。边缘分布描述个别变量；当变量相互联系时，需要一个共同分配或依赖模式。共用分布在附件中总结 M.

间隔和 Fuzzy 套件: 有用，当限制是可靠的但频率或概率不存在时。一个间隔仅表明 $X \in [X_{\min}, X_{\max}]$. Fuzzy 描述添加了学位会员资格，并可能对语言或专家信息有用，但不应被解释为概率，没有进一步的假设。

时刻和量子: 中间、变量、可见性、偏差性和选择的量子总结分配。时刻适合线性传播，而量子和过度概率往往更为信息性的限制国家决策。统计时刻正在审查中 §M.4.1.

64.3.2 依赖与相关样品

9 边缘分布不定义一个共同的不确定性模式。当不确定的数量共享常见的物理原因、空间趋势、环境暴露或测量过程时，它们依赖性必须明确表达。忽略依赖性可以过度或抑制结构反应的变异和逆转概率。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

64.3.2.1 Covariance 和 Correlation

10 二种随机变量 X 和 Y,

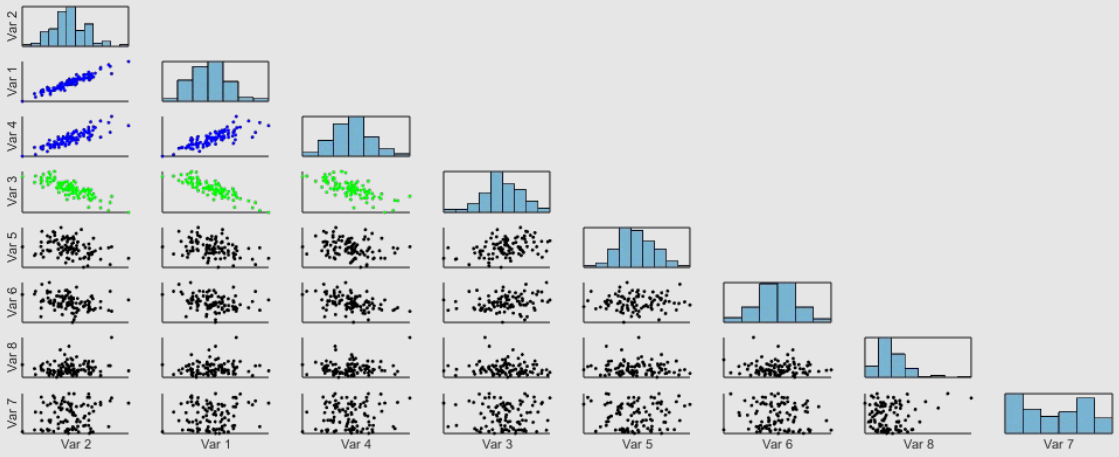
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big], \qquad \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{64.1}$$

相似率是无尺寸的, 并在 -1 和 $+1$. 零的值意味着缺乏 **线性** 相似之处, 不一定是独立。相互关系也不会确定原因, 外出者可能会强烈扭曲普通皮尔森因子。

64.3.2.1.0.1 例题 64.1: 相同性 矩阵

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

下面的 矩阵 字符串结合了边缘 histograms 和双式分散字符, 为 8 个变量。依赖是故意引入的, 当样品产生; 使用不同的边缘分布单独不会创造相互关系。此类图案有用于在正式的矩阵相匹配之前检测线性趋势、非线性依赖、集群和隔离观察。



数值 值 ρ 应在申请背景下解释。描述者如 “弱点” 或 “强大” 它们仅是虚拟的, 不应取代对依赖如何影响利息数量的工程评估。

表 64.2: 描述皮尔森相互关系因子的质量描述

大小	可能的描述术语
$0.0 \le \lvert\rho\rvert < 0.1$	不可思议或非常弱
$0.1 \le \lvert\rho\rvert < 0.3$	弱点
$0.3 \le \lvert\rho\rvert < 0.5$	适度
$0.5 \le \lvert\rho\rvert < 0.7$	强大
$0.7 \le \lvert\rho\rvert < 0.9$	非常强大
$0.9 \le \lvert\rho\rvert \le 1.0$	非常强大到完美的线性联盟

11 桌子 64.2 记录一个常用的描述公约。边界不普遍, 也不传达统计意义或工程意义; 这两者都取决于样品大小、数据质量以及所做的决定。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

64.3.2.2 太空科瓦里安

12 空间不同的属性被代表为随机领域 $X(\mathbf{s})$. 其可视性功能是

$$C_X(\mathbf{s},\mathbf{s}') = \mathrm{Cov}[X(\mathbf{s}), X(\mathbf{s}')]\,. \tag{64.2}$$

对于一个均匀的以色列区域, 隔离仅取决于分离距离。$h = \|\mathbf{s}-\mathbf{s}'\|$. 一个常见的模型是

$$C_X(h) = \sigma_X^2 \exp\left(-\frac{h}{\ell_c}\right), \tag{64.3}$$

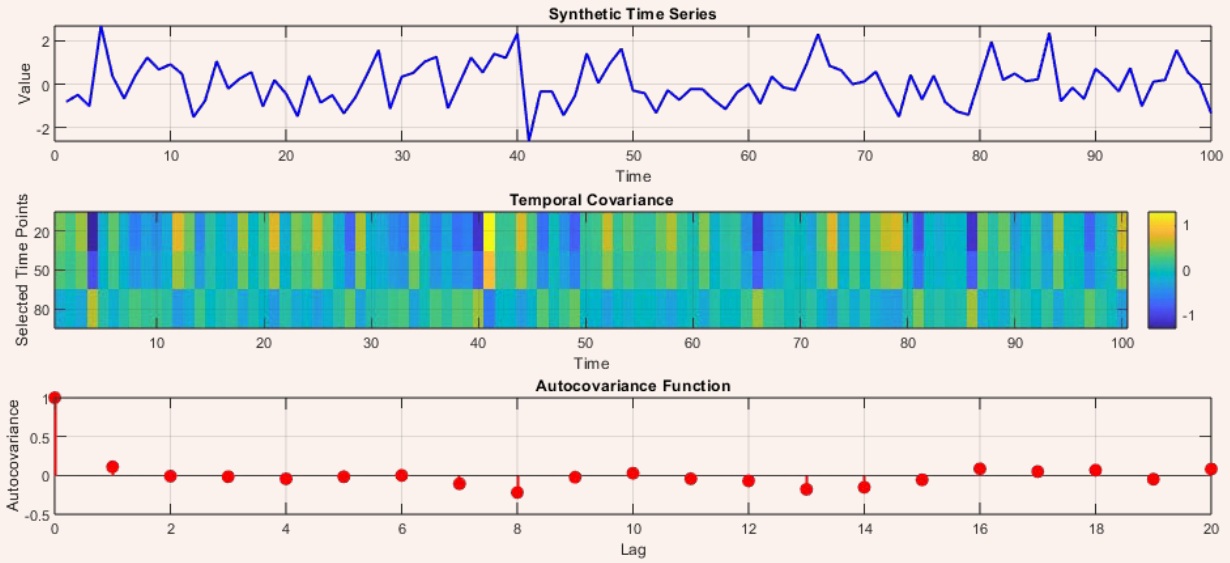
哪里 ℓ_c 这是一个相互关系的长度。小小 ℓ_c 产生快速空间变量; 大 ℓ_c 它产生了广泛的区域, 它们相互不同。可以通过允许不同的相互关系长度在不同的方向引入安尼斯特洛普。空间可视性在分配材料属性到终端单元时至关重要: 独立的单元-by-单元样品通常会产生不现实的粗糙领域。

64.3.2.3 暂时的封锁

13 以斯托卡斯特的过程 X_t,

$$C_X(t,s) = \mathbb{E}\big[(X_t-\mu_t)(X_s-\mu_s)\big]\,. \tag{64.4}$$

如果这个过程很不稳定, $C_X(t,s) = C_X(\tau)$ 取决于 LAG $\tau = |t-s|$. 例如, 静态第一命令自动侵略过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, 与 $|\phi| < 1$ 它有一个自我控制性, 与 Lag 相同地质分裂。白色噪音是理论自我控制率为每个非零的零的限制案例; 最终样品却显示小偶然估计在零左右。



14 图表描述了一个模拟的静态序列, 一个实验性可视化显示器, 以及估计的自我可视功能。一对观察的实验性产物本身不是一个可视性的估计; 可视性需要在静态假设下预期或重复实现或时间起源的平均值。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

64.3.2.4 生成相关样品

15 独立样本是不合适的, 当输入具有有意义的依赖。与矩阵相匹配的加西亚变量 $\mathbf{R}$ 可以计算一个可口可乐因素。$\mathbf{L}$ 这样的那 $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ 生成 $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, 并设置

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{D}_\sigma \mathbf{L}\mathbf{z}, \tag{64.5}$$

哪里 $\mathbf{D}_\sigma$ 包含边缘标准偏差。

16 对于非加西亚边缘, 一个加西安哥普拉结构经常被使用: 产生相关的标准正常变量。$\mathbf{z}_c = \mathbf{L}\mathbf{z}$ 把它们变成制服 $u_i = \Phi(z_{c,i})$ 最后, 设置 $x_i = F_i^{-1}(u_i)$. 所处方的相互关系是准确的, 在拉丁加西空间; 结果的皮尔森相互关系在物理空间可能有所不同, 并可能需要定义。更普遍的依赖可以由其他复合物或直接估计的共同分布所代表。

64.3.3 不确定性宣传

17 不确定性传播评估了联合输入模型如何影响结构系统的反应。所需的方法取决于模型成本、非线性、尺寸性、背部行为的重要性以及目标是否是完整的输出分配或仅选择时刻和量子。

64.3.3.1 蒙特卡洛模拟 (MCS)

18 蒙特卡洛模拟是一种直接的数值不确定性传播程序:

1. 展示合并输入模型 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 包括任何规定的依赖性;
2. 评估 $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 每一个实现;
3. 估计所需的输出分配、时刻、量子、超越率或失败率, 从结果样本中。

19 该方法是概念上简单而无形的普遍, 但其统计 convergence 缓慢, 计算成本在每个模型评估都昂贵时可能被禁止。因此, 样品错误应该被评估而不是从单一跑步中得出结论。

64.3.3.2 拉丁 Hypercube 样品 (LHS)

20 LHS 通过将每个边缘分布的格式化提高覆盖范围 (Olsson and Sandberg, 2002). 对于许多顺利的模型来说, 它减少了与同等尺寸的简单随机样品相比的样品变量, 尽管好处取决于响应功能以及输入之间的依赖方式。

LHS 是一種精製的採取技術。它将每个输入的 CDF 分为 N 平等概率层, 从每个边缘层中选择一个值, 并将值组成 N 输入 vector 在每个单维投影中, 分裂是准确的; 整个多维空间的覆盖取决于边缘样品的结合或转变。

21 LHS 通常提供有用的估计, 模型评估较少, 而不是平坦的随机样品, 但它本身并不保证准确性; 相似性仍然需要通过增加样品大小或重复设计来检查。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 分布输入分布: 每个输入变量 X 将其累积分配功能分开 (CDF) 进入 N 平等的概率:

$$X_1, X_2, \ldots, X_N, \quad \text{where } P(X_i) = \frac{1}{N}.$$

2. 序列样品: 从每个概率层中选择一个值。
3. 组合输入样本: 多输入变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 随机允许样品创建 N 独特的输入组合。
4. 运行模型模拟。对于每个输入 向量, 评估

$$Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

5. 量化输出不确定性: 使用输出来计算统计测量 (§M.4.1)

22 桌子 64.3 比较蒙特卡洛与拉丁 Hypercube 样品。

表 64.3: MCS 和 LHS 的比较

视角	蒙特卡洛样本	拉丁 Hypercube 样品 (LHS)
边缘覆盖	样品可以集成并留下漏洞。	每个边缘概率层都占据了一个点。
效率	基线方法与简单的 convergence 理论。	经常减少对顺利反应的变量, 但利润是问题依赖的。
依赖	直接从所指定的联合模型中提取。	需要依赖保留的建筑或重新安排, 当输入与相关时。
验证	增加 N 或重复独立跑步。	增加 N, 重复设计, 并检查对转换或优化设计的敏感性。

23 形象 64.1 描述古典蒙特卡洛样品之间的差异 (MCS) 拉丁 Hypercube 样品 (LHS) 二维数据。

1. 左边的草案 (MCS) 样品是随机分发的, 导致在某些地区显著分裂和其他地区差距。这种不平等的传播反映了 MCS 的本质随机性, 这并不在样品空间中实现统一覆盖。
2. 在正确的场景中 (LHS) 每个边缘层都代表一次。显示的转换也提供了一个更平衡的双维投影, 尽管每个 LHS 设计都没有保证这种多维统一度。
3. 顶部的分配相当于均匀分配, 下层则相当于正常分配。($\mu = 0, \sigma = 0.3$).

24 相比之下,LHS 的主要优点是: 有限样品控制边缘覆盖。准确性仍然取决于样品大小、依赖模型、响应功能和所选择的转换。

25 术语 **拉丁 *Hypercube* 样品** *(LHS)* 结合了拉丁方位的想法, 使用每个层次一次与一个多维输入域的超圆形代表性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

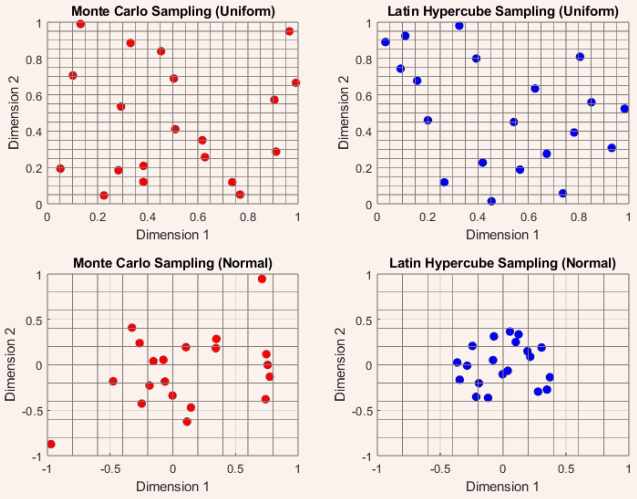


图 64.1: MCS 和 LHS 的比较

拉丁广场: 一个组合序列, 每个符号在每个序列中发生一次, 每一个柱。例如, 在 A 3×3 拉丁广场:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

每个行和柱都有一个发生的 A, B, 和 C 确保在广场上分布。

这个概念适应了更高层次的样品, 确保每个样品在每个尺寸沿着分裂。

混合物: 延伸一个间隔, 平方和圆的 n 尺寸; 它代表了正常化的样品空间 n 输入变量。

64.3.3.2.0.1 例题 64.2: 拉丁 Hypercube: 工作例子与两个变量

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

考虑一个简单的两个变量问题: 模型结构 位移 Y 作为 杨氏模量 的功能 E 使用 荷载 P. 我们假设:

$$E \sim \mathcal{N}\left(200\ \text{GPa}, (10\ \text{GPa})^2\right), \tag{64.6}$$
$$P \sim \mathcal{U}(10\ \text{kN}, 20\ \text{kN}), \tag{64.7}$$

我们希望能产生 $N = 4$ 使用 LHS 的独特输入组合。

步骤 1: 分配输入分布 为 E (正常分配) 我们将其 CDF 分成 $N = 4$ 平等的概率:

$$\text{Intervals}: \left[0, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

相应这些间隔的量子是:

$$\Phi^{-1}(0.125) \approx -1.150 \implies E_1 \approx 188.5\,\text{GPa}, \tag{64.8}$$
$$\Phi^{-1}(0.375) \approx -0.319 \implies E_2 \approx 196.8\,\text{GPa}, \tag{64.9}$$
$$\Phi^{-1}(0.625) \approx +0.319 \implies E_3 \approx 203.2\,\text{GPa}, \tag{64.10}$$
$$\Phi^{-1}(0.875) \approx +1.150 \implies E_4 \approx 211.5\,\text{GPa}. \tag{64.11}$$

为 P (统一分配), 间隔和相应的样品是简单的:

$$P_1 = 10 + 0.125 \times 10 = 11.25\,\text{kN}, \tag{64.12}$$
$$P_2 = 10 + 0.375 \times 10 = 13.75\,\text{kN}, \tag{64.13}$$
$$P_3 = 10 + 0.625 \times 10 = 16.25\,\text{kN}, \tag{64.14}$$
$$P_4 = 10 + 0.875 \times 10 = 18.75\,\text{kN}. \tag{64.15}$$

步骤 2 - 3: 结构化样品和转换 从每个间隔中抽出一个样本, 然后样品随机转移到变量之间形成独特的组合。指数的随机转换结果:

样品	E (GPA)	P (kN)	笔记
1	188.5	13.75	从间隔 1 和 2
2	196.8	18.75	从间隔 2 和 4
3	203.2	11.25	从间隔 3 和 1
4	211.5	16.25	从间隔 4 和 3

这种转换确保每个边缘间隔都正确一次样本。它不保证整个多维空间的统一空间, 因此替代转换或优化 LHS 设计可以提供更好的投影特性。

步骤 4: 运行模型模拟 对于每个组合, 模型进行评估。假设位移模型是:

$$Y = \frac{PL^3}{48EI}$$

哪里 $L = 2\,\text{m}$ 和 $I = 1 \times 10^{-5}\,\text{m}^4$ 是固定的。出口是:

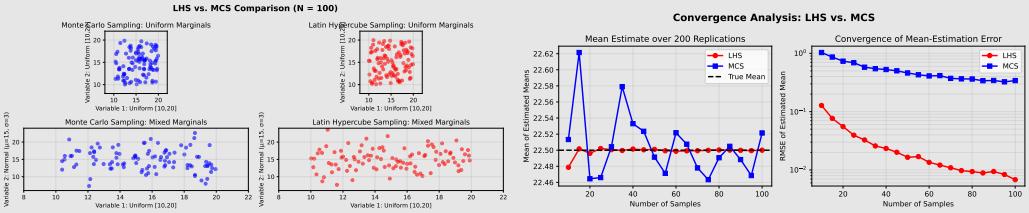
样品	E (GPA)	P (kN)	Y (mm)
1	188.5	13.75	1.216
2	196.8	18.75	1.588
3	203.2	11.25	0.923
4	211.5	16.25	1.281

步骤 5: 量化输出不确定性 从 $N = 4$ 出口:

$$\bar{Y} = \frac{1}{4}(1.216 + 1.588 + 0.923 + 1.281) \approx 1.252\,\text{mm}, \tag{64.16}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Y_i - \bar{Y})^2} \approx 0.236\,\text{mm}. \tag{64.17}$$

只有与 $N = 4$ 样品, 这个估计是大约的; 更大的样品尺寸提供更好的统计 convergence。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



MATLAB® 代码被授予 §I.5.7 • 看也 §64.3.3.2.

64.3.3.3 接近和超越直接样品采集的替代方案

26 蒙特卡洛模拟可能需要许多模型评估。以下两种接近将降低这些成本，通过用小组预订的评估替换随机样品。他们的经济是通过更强大的假设获得的，所以他们的准确性必须对问题的非线性、依赖性和尺寸性进行检查。

64.3.3.3.1 点估计方法 (PEM)

27 术语 **点估计方法** 它包含了几个相关的接近。这里使用的简单版本是两级角点设计：每个输入都分配了值。$\mu_i - k\sigma_i$ 和 $\mu_i + k\sigma_i$，模型在所有结果的角落进行评估。它不应该被更经济的时刻匹配点估算方案混淆，使用仅限数量重量点。

PEM 如下工作：

1. 每个输入变量 X_i 识别其中间 μ_i 和 标准差 σ_i.
2. 每个输入的两个值: $\mu_i - k\sigma_i$ 和 $\mu_i + k\sigma_i$.
3. 全般评估模型 2^n 输入值的组合，在 n 是输入变量的数量。
4. 根据模型评估，计算输出平均值、变量和其他统计时刻。

28 角形设计可以将答案曝光在规定的两级范围之外，但它通常不会重复原始输入或更高的命令输出时刻的概率分布。选择的价值 k 要说明点重量。它的成本也随着输入的数量而异常增加。

64.3.3.3.1.1 例题 64.3: 点估计方法例子

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

一个系统有两个输入变量:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: 平均 = 10, 标准差 = 2。
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: 中 = 20, 标准差 = 3。

系统输出由:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

目标: 使用点估计方法 (PEM) 估计中等和变量 Y.

步骤:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

1. 为每个输入变量设置两个值:

$$X_1 = \mu_{X_1} \pm \sigma_{X_1}, \quad X_2 = \mu_{X_2} \pm \sigma_{X_2}.$$

2. 评估功能 $Y = X_1^2 + 3X_2$ 在所有的组合中 X_1 和 X_2:

$$Y = f(X_1, X_2), \quad \text{for } (X_1, X_2) \in \{(8, 17), (8, 23), (12, 17), (12, 23)\}.$$

3. 在四个角落的平等重量, 计算接近的时刻:

$$\widehat{\mu}_Y = 164, \qquad \widehat{\text{Var}}(Y) = 1681.$$

相比之下, 在所说独立的正常输入下的准确时刻是 $\mu_Y = 164$ 和 $\text{Var}(Y) = 1713$. 该协议对这个四方例子很近, 但没有保证一般的非线性反应。

64.3.3.3.2 一时一刻— (泰勒的系列最终差异估计 TSFD)

[29] 这种简化的方法开始于 Taylor 关于输入工具的向量扩展, 只保留线性条款。(Benjamin and Cornell, 1970). 因此, 最可靠的是当答案是当地顺利而仅在利益范围内轻微无线时。

$$\mu_F \approx F(\boldsymbol{\mu})$$

哪里 $\boldsymbol{\mu}$ 向量是输入方式。这种平等是第一命令的接近; 对于非线性反应, $\mathbb{E}[F(\mathbf{X})]$ 不需要平等 $F(\mathbb{E}[\mathbf{X}])$. 对于独立的随机变量, 相应的第一命令变量接近是

$$\begin{aligned} Var(F) = \sigma_F^2 &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &\approx \frac{F_i^+ - F_i^-}{2\sigma_i} \\ F_i^+ &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i + \sigma_i, \cdots, \mu_n) \\ F_i^- &= F(\mu_1, \cdots, \mu_i - \sigma_i, \cdots, \mu_n) \end{aligned}$$

哪里 σ_i 是变量的标准偏差。因此,

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_i \left(\frac{F_i^+ - F_i^-}{2} \right)^2}$$

[30] 程序 (Bryant, Brokaw, and Mlakar, 1993) 可以如下总结:

1. 以其手段进行初步分析, 所有变量。结果的答案是第一命令接近产量。
2. 表演 $2n$ 分析, 其中所有变量均为其平均值, 除变量外。i 以相同的价值为主。$\mu_i + \sigma_i$, 然后 $\mu_i - \sigma_i$. 因此, 这种方法需要 $2n + 1$ 分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 对于每个变量 x_i, 计算签署的第一订单捐款 $c_i = (F_i^+ - F_i^-)/2$. 其大小为该变量提供当地敏感性指标。
4. 对于独立变量, 将贡献方形, 添加它们, 并采取方形根: $\sigma_F \approx \sqrt{\sum_i c_i^2}$. 对于相关变量, 应包括相应的交叉术语。
5. 排序结果以下降顺序, 形成所谓的 “雷锋图表”.

31 由于 TSFD 是本地的, 需要报告干扰规模和采用的概率模型。A $\pm\sigma_i$ 研究只有当 σ_i 这是一个防御性的不确定性, 在这个间隔内, 答案保持足够顺利。

64.3.3.3.2.1 例题 64.4: 泰勒系列 有限差分法 例子

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

使用相同的独立正常输入和响应, 如上例 PEM:

$$X_1 \sim N(10, 2^2), \qquad X_2 \sim N(20, 3^2), \qquad Y = X_1^2 + 3X_2.$$

在中间点,

$$\widehat{\mu}_Y = F(10, 20) = 160.$$

两种最终差异的贡献是

$$c_1 = \frac{F(12, 20) - F(8, 20)}{2} = \frac{204 - 124}{2} = 40,$$
$$c_2 = \frac{F(10, 23) - F(10, 17)}{2} = \frac{169 - 151}{2} = 9.$$

因此,

$$\widehat{\sigma}_Y = \sqrt{40^2 + 9^2} = 41, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 1681.$$

确切的时刻是 $\mu_Y = 164$ 和 $\mathrm{Var}(Y) = 1713$. 第一命令方法错过了由四方术语引起的中间纠正, 并轻微低估了变异; 比较显示其经济和本地线性限制。

64.3.3.3.3 多元化混乱扩张 (PCE)

32 多元化混乱扩张 (PCE) 不确定性量化中使用的方法, 以代表随机变量或斯托卡斯特功能作为一系列正方形聚合物。

33 PCE 的关键概念:

光学代表性 光谱表现是指在一系列基本功能方面表达一个函数, 类似于 Fourier 系列如何代表使用相关术语和同性函数的信号。在 PCE 中, 基本功能是 **正统多元化**, 适用于输入 随机变量 的 概率分布。

东方聚合物 正统多元体形成 PCE 的基本功能。这些聚合物是对一个特定的重量功能的正方形, 相当于概率分布的随机变量。例子包括:

- **传奇聚合物**用于随机变量, 均匀分布。
- **赫尔米特聚合物**: 用于随机变量与正常 (加西亚) 分布。
- **波利诺米亚**用于随机变量, 具有曝光分布。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

随机变量 和响应功能 A 随机变量 这是一个输入, 跟随一个特定的 概率分布 (例如, 均匀, 正常). 和 **回应功能** 是依赖于 随机变量 的系统的决定性输出。例如, 如果 x 是 随机变量, 答案函数可以是 $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$.

PCE 函数 PCE 的参数量化了每个多元术语对反应函数的贡献。这些方程式使用技术计算, 例如最小方程适合尽量减少实际功能与其多元接近之间的错误。

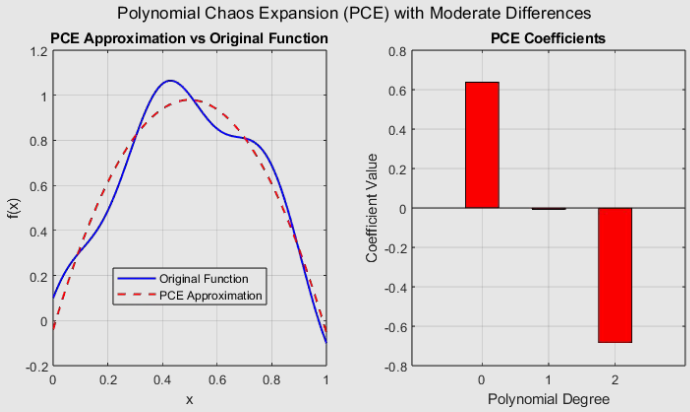
64.3.3.3.3.1 例题 64.5: 多元化混乱扩张

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

考虑答案功能 $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$, 在哪里 x 均匀分布 $[0,1]$. 我们接近 f 使用转换的 Legendre 多元, 相当于普通 Legender 多元评估在 $2x-1$, 以便基准为正确的, 与单一 密度 相比 $[0,1]$.

1. 随机变量: 一组均匀分布的随机样品 x 在范围内 $[0,1]$.
2. 构建基础功能: 使用转换的传奇多元化 $[0,1]$, 或相当于普通的 Legendre 聚合物评估在 $2x-1$ 到一定程度。
3. PCE Coefficients: 使用最小方位方法匹配扩展的方位。
4. 接近函数: 将基本函数与相应的坐标结合起来, 以接近 $f(x)$.

PCE 的结果可以如下视图:



比较字符串: 比较原始函数的字符 $f(x) = \sin(\pi x) + 0.1\cos(5\pi x)$ 和其 PCE 接近。原始函数显示为连续的蓝线, 而 PCE 接近则以红色线表示。接近是合理准确的, 但由于原始功能的复杂性和扩展中使用的有限多元度而略有偏差。这一点强调了计算简单与接近准确性在 PCE 之间的差距。

Coefficient Plot: 显示 PCE 的各个多元级别的比例的条形图。行列的高度表明每个术语在系列扩展中的相对重要性。对于这种特殊的反应和多元性程度, 低命令率主导。这种模式不普遍: 尖锐的格拉迪因、中断或波动可能需要显著更高的命令条款。

64.3.4 输出不确定性解释

[34] 一旦答案分布已传播, 不确定性分析将其转化为直接对工程问题的数量。出发不确定性不限于时刻。根据决策, 有用的总结包括概率密度和累积分配功能, 手段和变量, 预测或可靠间隔, 量子, 过度概率, 以及失败概率。平均答案可能适用于服务级别比较, 而评估极限状态通常需要注意分配的相关背部。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

35 该措施必须与其解释相匹配。一个信任间隔描述了估计人口数量的不确定性; 一个预测间隔在采用模型下描述未来的观察范围; 而一个可靠的巴伊西间隔, 描述了一个不确定的数量条件的后续概率在模型, 数据和以前的假设。这些间隔可以回答不同的问题, 不应以交换方式使用。

36 防御性 UA 还报告控制结果的假设: 采用边缘分布和依赖模式, 测量错误处理和模型不一致性, 数值或样品接近, 以及结论对替代可靠假设的敏感性。如果决策依赖于一个小失败的可能性, 分析师应该证明样品或接近方法以适当的准确度解决相关尾巴而不是仅依靠全球时刻。

37 宣传设立 **多少** 答案可能有所不同; 敏感性分析确定 **為什麼**. 因此, 下一部分将输出变量与不确定的输入之间进行比例, 并确定保证改进的特征性、随后的分析中明确保留或可能识别参数的人。

64.4 敏感性分析

38 不确定性传播问产量有多大可能有所不同。敏感性分析问为什么会有所不同。区别至关重要: 两种模型可能具有相同的输出变量, 但控制参数非常不同。

39 敏感性方法可以分为四组:

- **地方衍生品或一次性方法**, 描述答案靠近选择的基线点;
- **全球扫描方法**例如, 莫里斯 (Morris) 在整个域内有效地识别可忽视和影响的输入;
- **基于全球变量的方法**例如,Sobol 指数将输出变量分配给主要效果和相互作用;
- **图形总结**例如, 暴风雨图表显示由处方一次性干扰引发的范围。

40 没有一个方法是普遍最好的。扫描是合适的, 当模型有许多输入, 每个评估都昂贵。基于变量的指数提供更完整的分解, 但需要大量更多的评估。當地衍生品是廉價的, 但可能缺乏非線性行為和相互作用遠離基點。

64.4.1 莫里斯方法

41 莫里斯方法是一种全球性模型扫描技术, 具有许多不确定的输入和昂贵的评估。(Morris, 1991). 它分散一次性干扰, 在可接受的输入空间中, 从而保留了大部分本地终端差异的经济体, 同时检测敏感度的变化远离单一基线。其主要输出排列有影响力的变量和可能的非线性或相互作用的旗帜; 它们不构成完整的变量分解。

原始莫里斯方法

42 泰勒的系列最终差异 (TSFD) 估计方法干扰一个 随机变量 (RV) 在某个时候 (通常由 $\pm\sigma$) 如上所述。这个方法, 被称为 One-at-a-Time (奥特) 方法, 用作基础的延伸 **莫里斯方法**.

43 基本效应设计在每个轨道上同时改变一个 RV, 但收集效果是全球性的, 因为轨道在输入

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

空间的不同位置开始。莫里斯指数不会隔离个人相互作用的术语; 相反, 基本效果的大分散表明非线性, 与其他 RV 互动, 或两者。每个 RV 的影响总结为 **基本效应 (是的)**.

44 在莫里斯方法中,EES 为每 RV 计算并作为敏感度指标。大型 EE 值表示相应的 RV 对模型的产量产生重大影响。莫里斯方法的第一步是随机选择 RV 的差异超空间中的初始点。这些点被描述为图中黑色填满的圆圈 64.2.

45 常见的是, 一组 k 初始点的 RV 在量子超空间中代表, 其中:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m}, \tag{64.18}$$

与 X_i^j 为该 j^{th} 对其差异的价值 i^{th} RV, F_i 其累积分配功能 (CDF), $i = [1:k]$, $j = [1:m]$, 和 m 如在 CDF 中的差异级别的数量。

46 第二步是通过一个小增幅打扰一个 RV。Δ, 同时保持所有其他 RV 固定。

47 第三步适用相同的干扰 Δ 到另一个 RV, 重复过程直到全部 k RVs 曾经被打乱。这些步骤被描述为红色填满的圆圈在图 64.2. RV 被干扰的序列以及干扰方向 ($+\Delta$ 或 $-\Delta$) 被随机选择。

48 对于一个系统与 k RVs, 一个轨道需要 $k+1$ 模型评估 (由红色火箭在图中描绘 64.2). If r 路径是使用的, 总数评估成为 $r \times (k+1)$. 路径中的每个 RV 的 EES 以以下方程式计算:

$$EE_i = \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta, x_{i+1}, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_k)}{\Delta}, \tag{64.19}$$

哪里 EE_i 这是对其基本效应的 i^{th} RV 和 $f(x_i)$ 模型输出相当于 RV 值 x_i.

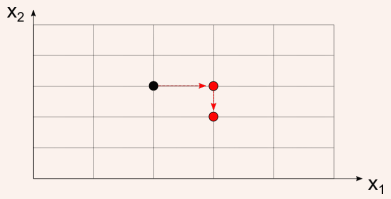


图 64.2: 一条路线的例子 $k = 2$.

49 莫里斯 (Morris, 1991) 提出了基于欧元区的两项敏感性措施:

- 和 **意思** 关于 EES (μ_i) 表明了整体影响的 i^{th} RV 出售。
- 和 **标准差** 关于 EES (σ_i) 它反映了其贡献。i^{th} RV 到非线性或与其他 RV 的相互作用。

50 应对可能的取消效应, 当欧元有积极和负值时, 欧元的绝对值中间 (μ_i^*) 一般使用, 而不是 μ_i. 这种修改确保敏感度测量保持稳定, 即使 EES 显示相反的迹象。

改进莫里斯方法

51 随机生成的莫里斯轨道可以超越或集成, 特别是在紧密的网。重复或密切进行的评估减少了所探索的输入空间的多样性, 并可能使估计指数在固定计算预算中不稳定。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

52 形象 64.2 一个单一的轨道。形象 64.3 显示了额外的兴趣现象: 独立生成的轨道可能会相匹配或集合, 从而减少探索入口空间的多样性。

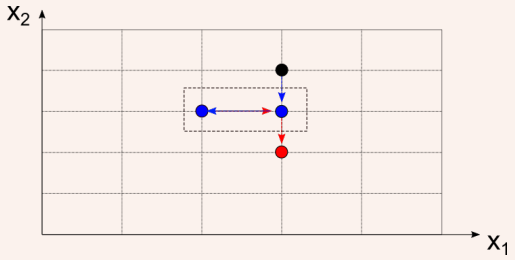


图 64.3: 来自不同莫里斯轨道的超越或密切分组点。

53 因此, 太空填充轨道和放射点变量已被提议 (Sohier, Farges, and Piet-Lahanier, 2014). 它们的目的是减少不可避免的过渡, 并改善覆盖; 它们不能保证每个非线性反应特征都被样品。

54 **将 RVs 转移到量子空间。**在改进的方法:

- 所有 k RV 转化为正常化的量子空间 $[0,1]$ 每个尺寸都符合累积分配功能。(CDF) $F_i(X_i^j)$ 是 RV。
- 和 j^{th} 量子价值的 i^{th} RV 是由:

$$F_i(X_i^j) = \frac{2j-1}{2m},$$

哪里 m 这是差异级别的数量。这种地图化确保在其范围内均匀的变量代表性, 无论它们的原始分布如何。

此地图处理过程在图中描述 64.4.

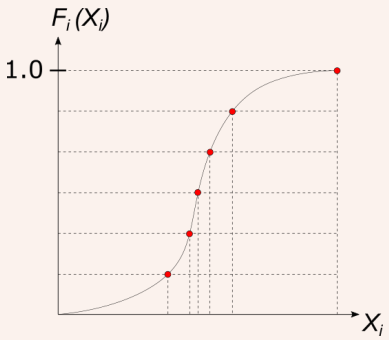


图 64.4: 随机变量及其累积分配功能 (CDF).

55 增强样品策略包括:

- **拉丁** *Hypercube* **样品** *(LHS):* 初步点是使用 LHS 选择, 以改善输入空间的覆盖范围, 并减少选择相同或超越的起点的可能性。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **固定步骤大小** (Δ): 固定步骤大小 ($\Delta = 0.5$) 在量子空间中, 确保在轨道上连续的干扰。故障被应用于 A **固定命令** 而不是偶然, 进一步防止过渡。

56 **替代步骤尺寸** Sohier, Piet-Lahanier, and Farges, 2015 引入替代步骤尺寸 ($\Delta = 0.5$ 和 $\Delta = 0.375$) 有效处理定期或振动反应。形象 64.5 显示一个例子, 固定步骤大小在定期模型响应中无法捕捉变量。

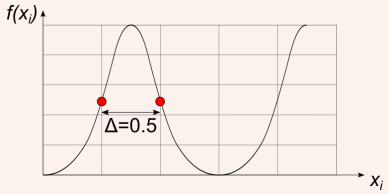
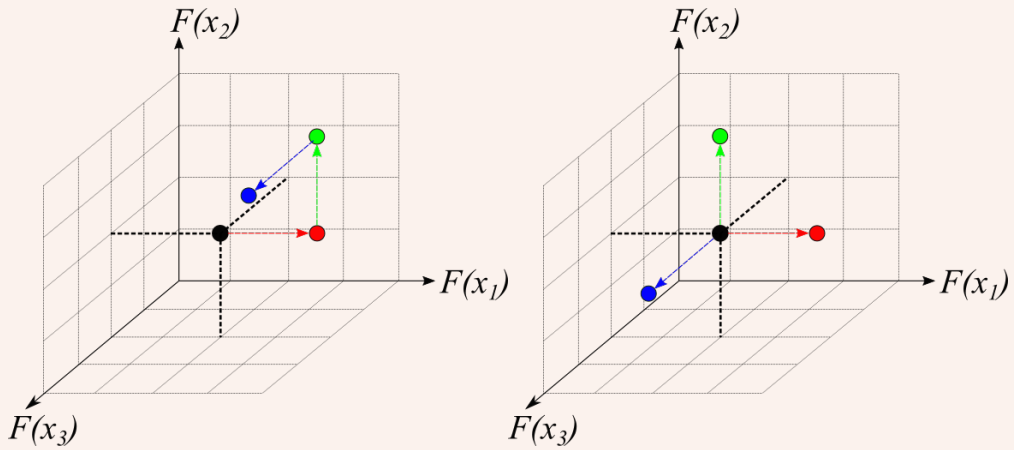


图 64.5: 随机变量的定期反应 x_i. 固定步骤尺寸可能无法检测定期变异。

57 **放射点设计。** 进一步的改进取代了每个轨道, 由一个常见中心的干扰:

- 而不是通过连续干扰变量构建轨道, 改进的方法使用量子空间中的一个中心点。
- 每个变量都独立于这个中心, 消除折扣和提高样品效率。

形象 64.6 比较传统基于轨道的方法 (a) 放射点方法 (b).



(a) 轨道　　(b) 放射点

图 64.6: 路线比较 (a) 放射点 (b) 方法为 $k = 3$ 量子超空间中的 RV。

58 简而言之, 改进的莫里斯方法包含以下关键改进:

- 地图到量子空间: 确保均匀的变量的代表性。
- LHS Initialization: 改善边缘覆盖, 可减少过度。
- 固定或替代步骤尺寸: 降低单步错过所选择的响应功能的风险。
- 放射点样本: 避免连续依赖轨道步骤, 并可能减少转折评估。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这些改进可以改善空间覆盖, 并减少对浪费的评估。他们的好处应对手动反应进行评估, 特别是当定期性、中断或强烈的相互作用是可行的时。

64.4.1.1 例题 64.6: 莫里斯方法

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

从前的例子中考虑相同的系统:

$$Y = X_1^2 + 3X_2$$

哪里有输入:

- $X_1 \sim N(10, 2^2)$: 平均 = 10, 标准差 = 2。
- $X_2 \sim N(20, 3^2)$: 中 = 20, 标准差 = 3。

目标是使用莫里斯方法来识别基本影响。X_1 和 X_2 关于产量 Y.

莫里斯方法的步骤

1. 正常化输入范围为 $[0, 1]$.
2. 创建基点 $\mathbf{X}_{\text{baseline}}$.
3. 按一步尺寸同时打破一个输入变量 Δ 同时保持其他人不停。
4. 计算每个变量的基本效应如下:
$$EE = \frac{f(\mathbf{X}_{+i}) - f(\mathbf{X})}{\Delta},$$
哪里 $\mathbf{X}_{+i}$ 这是干扰的输入。
5. 重复多个轨道和集成结果 (中和标准差 EE).

64.4.2 Sobol 基于变量的敏感性指数

59 Sobol 指数为一个模型提供全球产量变量的分解

$$Y = g(X_1, \ldots, X_k), \tag{64.20}$$

相互独立的输入。在标准方形集成条件下, 答案可以写作作为功能分析变量分解。

$$g(\mathbf{X}) = g_0 + \sum_i g_i(X_i) + \sum_{i<j} g_{ij}(X_i, X_j) + \cdots + g_{1\cdots k}(X_1, \ldots, X_k), \tag{64.21}$$

变量分解为正方形贡献,

$$V(Y) = \sum_i V_i + \sum_{i<j} V_{ij} + \cdots + V_{1\cdots k}. \tag{64.22}$$

这种分解是全球敏感性指数引入的基础。Sobol', 2001.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

64.4.2.1 第一命令指数

60 第一命令入口的贡献 X_i 是

$$V_i = \mathrm{Var}_{X_i}(\mathbb{E}[Y \mid X_i]), \tag{64.23}$$

其正常化索博尔指数是

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}. \tag{64.24}$$

这样 S_i 是输出变量的部分, 由变化解释 X_i 单独, 平均于所有其他输入的分配。如果 $S_i = 0.60$ 其主要影响是 X_i 算法 60% 产量变异。

64.4.2.2 相互作用与总效应指数

61 第二命令指数 $S_{ij} = V_{ij}/V(Y)$ 测量因相互作用而引起的差异 X_i 和 X_j 它既不属于任何主要效应。高级指标类似定义。对于独立入口,

$$\sum_i S_i + \sum_{i<j} S_{ij} + \cdots + S_{1\cdots k} = 1. \tag{64.25}$$

因此, $1 - \sum_i S_i$ 它是所有相互作用的组合贡献。

62 总效应指数收集了每个变异期限 X_i:

$$S_{T_i} = 1 - \frac{\mathrm{Var}_{\mathbf{X}_{\sim i}}(\mathbb{E}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}])}{V(Y)} \tag{64.26}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{X}_{\sim i}}\left(\mathrm{Var}_{X_i}[Y \mid \mathbf{X}_{\sim i}]\right)}{V(Y)}, \tag{64.27}$$

哪里 $\mathbf{X}_{\sim i}$ 除所有输入外 X_i. 区别 $S_{T_i} - S_i$ 测量到什么程度 X_i 参与互动。

64.4.2.3 解释

- 一大 S_i 表明有强烈的直接效果。
- 一大 S_{T_i} 与一个小 S_i 它表明, 变量主要是通过相互作用。
- If S_{T_i} 接近零, X_i 它通常可以在其规定的分布范围内的任何地方固定, 对产量差异的影响很少。
- 如果第一订单指数的总额接近一个, 则模型在调查域上特别有添加性。

64.4.2.4 计算与成本

63 Sobol 指数通常通过包装样品矩阵和 “冷冻 - freeze” 评估。经常使用的设计需要大约 $N(k+2)$ 模型评估, 以估计所有第一订单和总效应指数 k 输入; 估计所有第二订单指数通常会增加成本大约 $N(2k+2)$ (Saltelli, 2002). 由于指数本身是蒙特卡洛估计, 应检查相匹配和信任间隔应在可能时报告。

64 这种方法可以成为禁止的, 当每个非线性有限元分析是昂贵的。Surrogate 模型、多元混乱扩展或减少命令模型, 可先配备,Sobol 指数在预测准确性验证后评估到 surrogate。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

64.4.2.5 关于莫里斯的评论

65 莫里斯和索博尔的方法回答相关但不同的问题。莫里斯主要是一种筛查方法: 与 $r(k+1)$ 评估它排列入口使用 μ_i^* 指示可能的非线性或相互作用 σ_i. Sobol 分析是一种定量变量的分解: 它将直接和总贡献分开, 但通常需要更多的评估。因此, 一个实用的序列是使用 Morris 去除可忽视的输入, 然后将 Sobol 分析应用到减少的集合。

66 平等中的经典分裂 64.22 独立输入。与相关输入相结合, 主要和相互作用效应不再由经典 ANOVA 分裂单独分开。随后应考虑条件或集体指数, 或者分配措施如 Shapley 效应; 至少必须明确说明依赖模式。

64.4.3 宣传和敏感性方法的比较

67 桌子 64.4 区分不确定性宣传方法与敏感性传播方法。样品设计, 如 LHS 可以支座或任务, 但它们本身不是敏感度测量。

表 64.4: 不确定性宣传和敏感性方法的比较

方法	主要角色	典型成本	互动	主要限制
地板 蒙特卡洛	不确定性输出	N 评估	随意捕获	对于昂贵的模型, 缓慢的统计 convergence
LHS	样品设计 UQ 或 SA	N 评估	通过评估的模型	效率提高取决于反应和依赖性治疗
第一订单 TSFD/OAT	地方推广与排名	$2k+1$ 评估	未解决	只有靠近基线有效; 弱于强烈的非线性
二级角形设计	接近出售时刻	2^k 评估	包含在模拟角落	外观增长和原料二级代表性
莫里斯	全球扫描	$r(k+1)$ 评估	与非线性相结合的指示 σ_i	不分配单独的互动贡献
索博尔	全球变量分解	Roughly $N(k+2)$ 第一和总指数	通过第一、更高和总效应进行定量化	高计算成本; 经典形式承担独立输入

64.4.4 确定重要随机变量

68 标準莫里斯檢查通常由 μ_i^* 和 σ_i. 下面的例子中使用的改进的放射点程序引入了额外的边界规则。(Gakuhari, 2021). 因为这个规则是具体的这种程序, 它不应该作为普遍莫里斯方法的一部分。

69 让 M_i^* 是 RV 中观察到的最大绝对基本效应。i. 每次更新:

1. 排序 The M_i^* 值在上升顺序和定义附属差距 $d_j = M^*_{(j+1)} - M^*_{(j)}$.
2. 让 $d_{\max}^{(q)} = \max_j d_j$ 更新后 q. 继续启动, 直到连续三个值满足

$$\min\left(d_{\max}^{(q-2)}, d_{\max}^{(q-1)}, d_{\max}^{(q)}\right) \geq \frac{1}{2}\max\left(d_{\max}^{(q-2)}, d_{\max}^{(q-1)}, d_{\max}^{(q)}\right). \tag{64.28}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 启动后, 从低敏感度端扫描订单值并将边界放在第一个接近的差距上。$d_j \geq d_{\max}/10$. 限界以上的变量暂时被列为重要。
4. 重新考虑在边界以下的变量的基本效果。如果分类变更, 请恢复新增的变量并重复之前的更新。

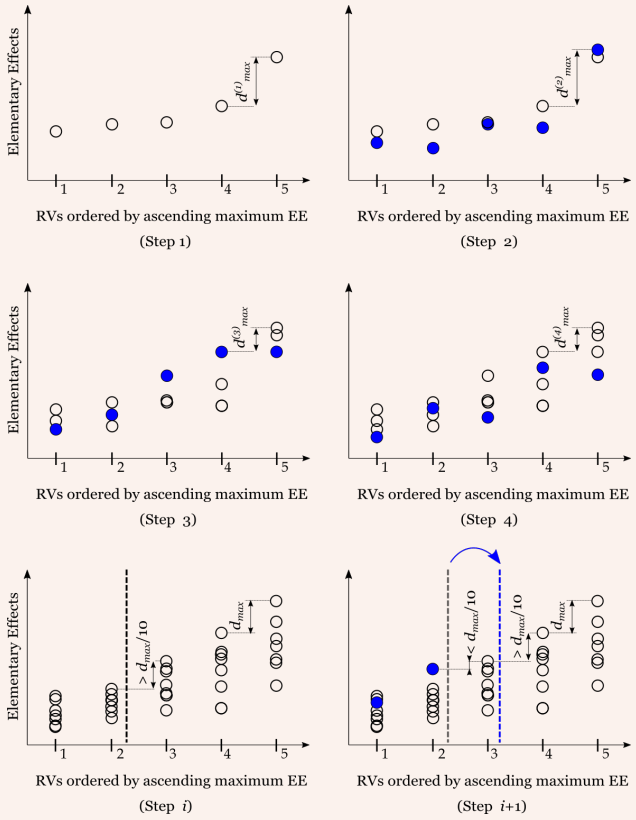


图 64.7: 在修改的放射点筛查程序中的启动和后启动

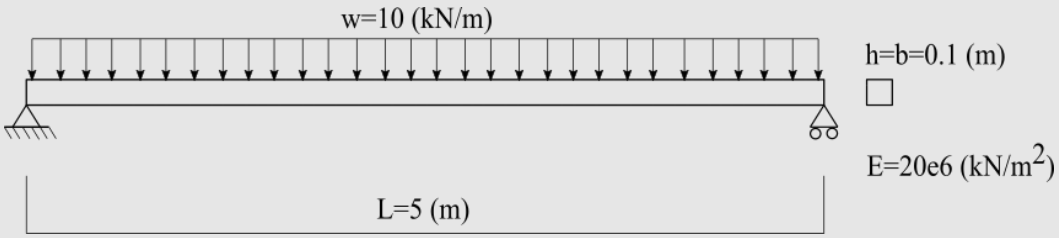
64.4.4.1 例题 64.7: 莫里斯方法; 重要变量的识别

从 Gakuhari, 2021

修正的放射点程序以单纯支持的闪光显示, 受均匀分布的负载。利率是垂直位移在中间的最高值。

制服 荷载 w, 梁 长度 L, 和部分高度 h 它们被视为 RV1、RV2 和 RV3。每个分配为正常的分配, 具有 10 个变量比例。%和运行最大 M_i^* 对绝对基本效应进行评估。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

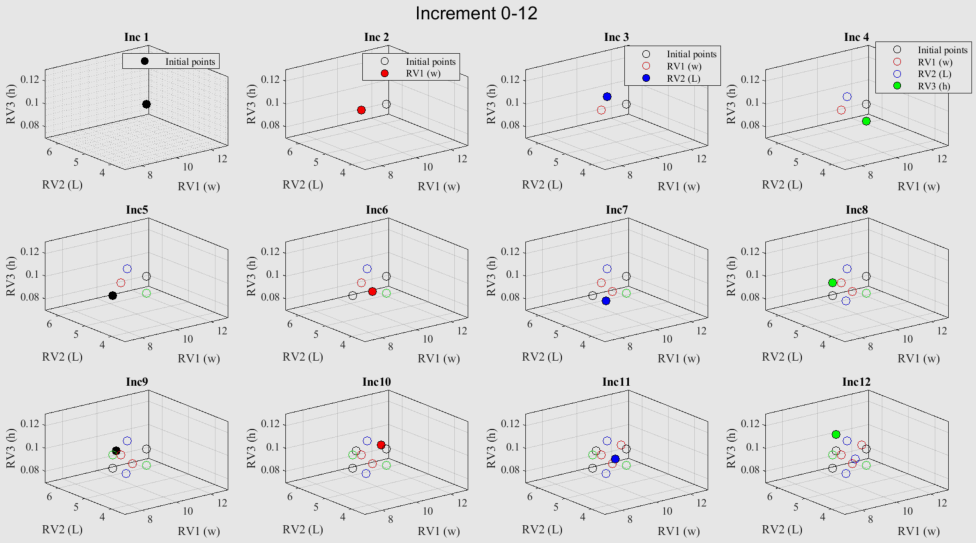


由于这一分析的结果是梁中心的垂直变形, 因此每个 RV 的影响可以通过以下方程来预先评估:

$$\begin{aligned} I &= \frac{bh^3}{12} \\ \delta &= \frac{5wL^4}{384EI} \\ &= \frac{5wL^4}{32Ebh^3} \end{aligned} \tag{64.29}$$

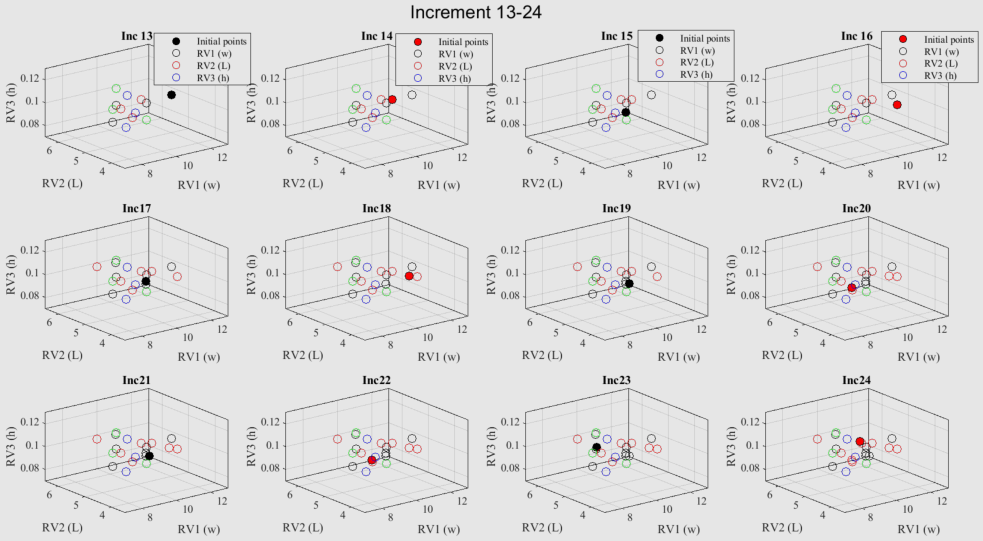
解析 展出者预测排名: L (RV2) 要主导, 因为 $\delta \propto L^4$, 随后由 h (RV3) 为什麼 $\delta \propto h^{-3}$. 荷载的评论 w (RV1) 进入线性。

下面的面板显示, 在量子空间 $[0,1]$, 在连续的基本效应评估中选择的点。每个启动行添加一个中心和三个射线点, 为每 RV 产生一个基本效果。三种更新提供 $d_{\max}^{(1)}$, $d_{\max}^{(2)}$, 和 $d_{\max}^{(3)}$. 因为平衡中的稳定性 64.28 满足, 初步化在增加 12 结束,RV2 和 RV3 暂时被列为重要。



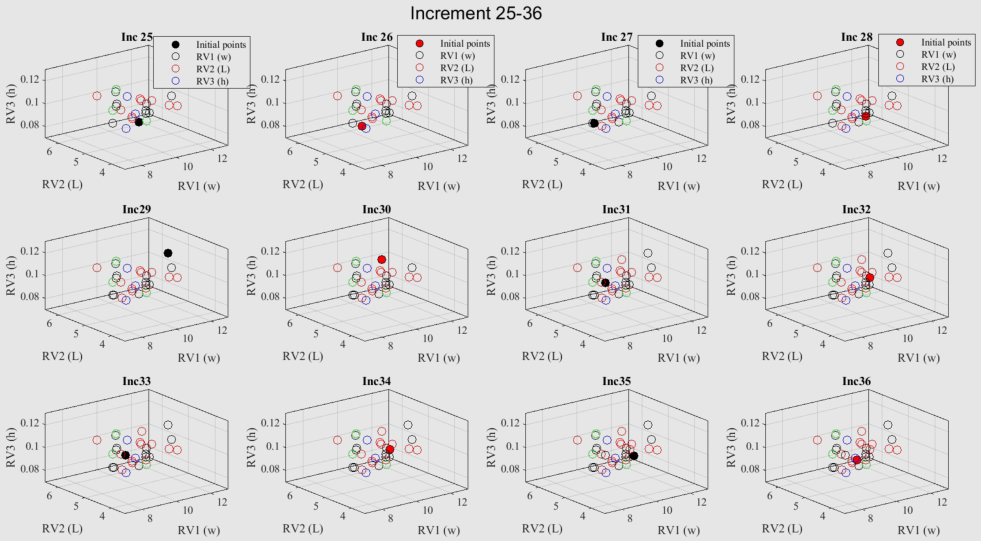
初步化

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



初步后 (*RV2* 和 *RV3* 已固定)

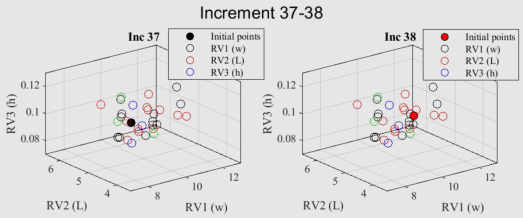
选择的 RV 在其量子空间中 (英格兰=0-24)



初步后 (*RV2* 和 *RV3* 已固定)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。



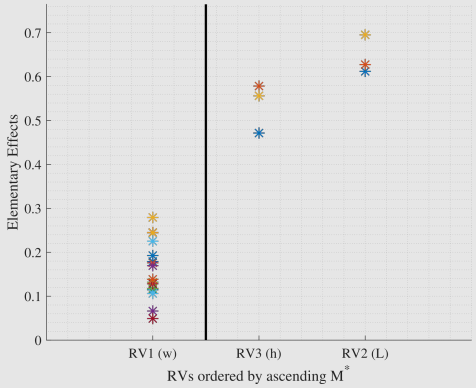
初步后 (*RV2* 和 *RV3* 已固定)

选择的 RV 在其量子空间中 (Inc = 25 - 38)

启动后,RV2 和 RV3 仍然在重要组合中; 随后的初步评估集中在 RV1 上, 以确定其分类是否会改变。

预算的规定是 $(n_{\mathrm{RV}}+1)\times 10 = 40$ 基本效应评估 (Sohier, Farges, and Piet-Lahanier, 2014). 由于最后两项计划的评估相当于 RV2 和 RV3 已经保留, 因此从这些评级中没有获得额外的分类信息, 并在增加 38 时停止描述的程序。

结果排行榜与平衡一致 64.29 泡沫长度对转移产生最大的影响, 其次是部分高度, 而均匀分布的负载在相似的相对范围上具有最小的暴露性影响。



简单梁测试结果。

64.4.5 塔纳多图表

70 暴风雨图表是指定的一次性研究的图形总结。对于每个输入, 模型在选择的低和高值中进行评估, 而所有其他输入都保持在一个基线上。结果的输出间隔将作为水平栏排列, 而条则按长度分类。

71 Tornado 图表很容易解释, 并且对初步扫描有用, 但它们是当地的选择基线和范围。他们不自行揭示相互作用, 当基线或干扰间隔变化时, 他们的排名可能会改变。莫里斯的结果更自然地显示在一个 μ^*–σ 图表, 而 Sobol 结果显示为第一订单和总效应指标; 一个条形图也可以总结, 但它应该根据基础测量标记。

72 形象 64.8 显示一个案例, 只有前六个变量在通过的干扰规则下具有物质影响。此类结果可能导致 支座 在逆分析开始之前设置的参数减少。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

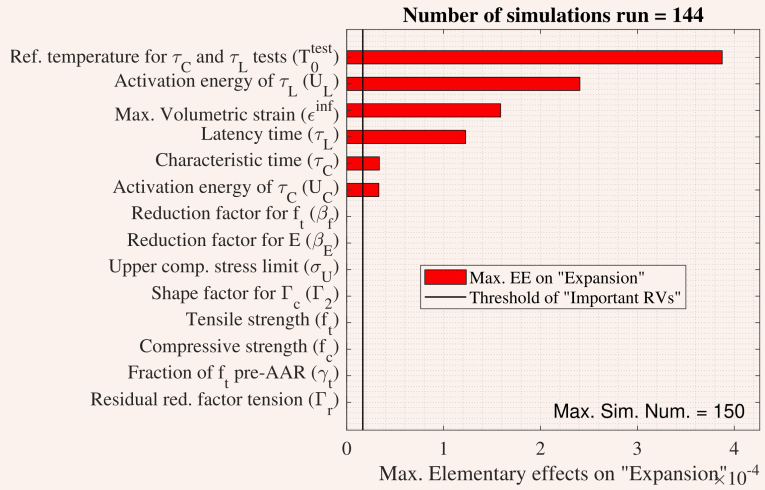


图 64.8: 敏感度排序例子 (Gakuhari, 2021)

64.5 从敏感性分析到参数识别

73 敏感性分析确定哪些参数可以改变预测; 参数识别要求这些参数的值受到测量支持。区别很重要。一个具有不可忽视的整体敏感性参数通常无法从所选择的反应中识别, 无论优化器有多复杂。相比之下, 一个非常敏感的参数可能仍然很难识别是否其效果与另一个参数 (图) 几乎不可分割。64.9.

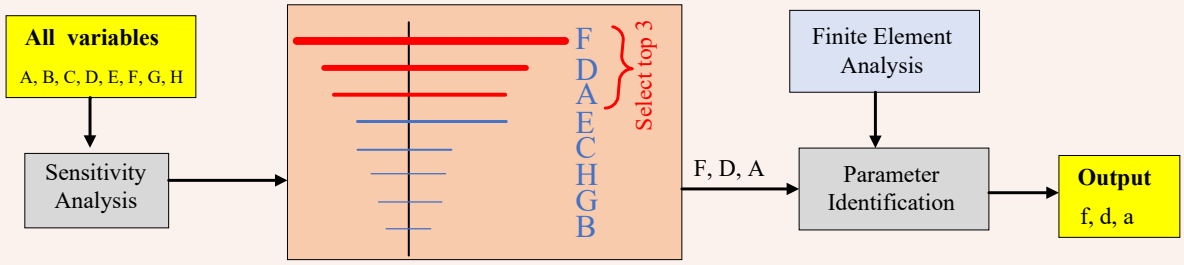


图 64.9: 敏感性分析确定候选人参数; 参数识别确定观察支持的值

74 因此, 实用的序列是:

1. 定义利息数量和可靠参数范围;
2. 扫描参数并保留具有物质影响的参数;
3. 检查是否保留的参数具有可区分的响应签名;
4. 只识别防御性子组, 同时固定、组合或调节其余。

75 章节 65 详细描述相反问题。它制定了重量化非线性最小二乘法, 检查了识别性和模型不

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

表 64.5: 敏感性分析和参数识别的独特但补充作用

视角	敏感性分析	参数识别
问题	哪些输入可以彻底改变所选择的输出?	哪些参数值被观察所支持?
使用的信息	可靠的范围或分布和前进模式	测量, 剩余模型和前进模型
主要结果	排名、扫描或变量分配	定义参数值及其不确定性或诊断
失败警告	一个不敏感的参数不能从所选择的反应中学习	敏感参数在影响被困时可能仍然不可识别

一致性, 并比较了 Levenberg-Marquardt、RANSAC 和 Bayesian 方法。因此, 本章的结局是决策问题开始的地方: 一个减少、物理上有意义的参数集以及剩下的不确定性明确描述。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

65 决策: 参数识别方法

摘要

章节 *64* 确定不确定的输入是如何通过计算模型描述和传播的, 以及它们的影响是如何在敏感性分析中排名。本章讨论了相反的问题: 确定观察支持的参数值, 并量化信任应该把它放在他们里面。

该章节提出重量化非线性最小二乘法并解释可识别、规模、边界、调节、模型不一致、定义和验证。然后, 它比较了 *Levenberg-Marquardt* 优化,*RANSAC* 数据被批发商污染,*Bayesian inference* 后参数不确定性。一个完整的 *MATLAB* - 有限元分析 程序手册将理论翻译成一个由分布式驱动的最终工作流 单元。最后一部分将 *A* 和 *B* 部分和桥梁集成到接下来的章节, 导致基于性能的地震工程 *(PBEE).*

65.1 参数识别作为逆转问题 1913
65.2 申请和决策框架 1914
65.2.1 从敏感性分析到参数识别 . . 1915
65.2.2 决策框架: 什么方法? 1915
65.3 数据质量与强度 1915
65.3.1 数据污染的来源 1915
65.3.2 强大的共识估计:RANSAC . 1915
65.4 莱文伯格 - 马克思算法 1919
65.4.1 模型方法与模型选择 1919
65.4.2 重量不线 最小二乘法 1919
65.4.3 莱文伯格 - 马库尔德更新步骤和算法直觉 1919
65.4.4 例题 65.1: 适合非线性超级模型 1920
65.4.5 扩展、限制和调节 1922
65.4.6 可识别 1922
65.4.7 模型差异 1923
65.5 巴伐利亚参数识别 1924
65.5.1 Bayesian 参数识别: 设置 . . 1924
65.5.2 地图估计与点估计 1924
65.5.3 后面样本和 MCMC 为参数 . 1925
65.5.4 例题 65.2: 巴耶西复兴与平方基和 Metropolis–Hastings 样品 1925
65.5.5 算例：退化参数的贝叶斯推断1926
65.5.6 什么时候使用 Bayesian 识别 1926
65.6 Levenberg - 马克思算法在实践中 . . 1927
65.6.1 最低四方实践 1929
65.7 混合工作流和最佳实践 1935
65.7.1 定义与验证 1935
65.7.2 结构性应用 1936
65.7.3 工作流决策框架 1936
65.8 桥到基于性能的地震工程 1936

审阅稿

65.1 参数识别作为逆转问题

1 参数识别对几个关键应用至关重要: (i) **模型加密**与实验室或现场测试中获得的实验结果相结合的最终单元模型; (ii) **结构性健康监测**优化最终的 单元 模型, 以便与传感器数据相匹配并随着时间的推移跟踪变化; 以及 (第三) **要求模型定义**建立基于性能的设计的地震需求模型 (看见 §68.5).

参数识别工作流

2 参数识别过程跟随图表中描述的以数据为导向的工作流。65.1. 关键步骤是:

1. **初始设置:** 获得实验室或现场结果 (测量), 并建立一个初始组的参数值 $\mathbf{x}_0$ 基于先前的知识、设计标准或文学。

2. **模型评估:** 执行一个终端 单元 (FE) 分析使用当前参数值来获得模型预测。
3. **错误评估:** 比较模型预测与实验室/现场测量计算废物 (错误). 剩余标准定量了当前参数适合数据的程度。
4. **转型检查:** 如果废物是可接受的微小 (模型比赛数据), 停止 - 参数被确定。否则, 继续步骤 5。
5. **参数更新:** 使用优化算法来计算改进的参数值 $\mathbf{x}_{new}$ 因此, 要减少废物。
6. **伊特拉特:** 回到步骤 2 与更新的参数, 然后重复到转换。

3 此反馈圈是参数识别的本质: 模型被视为函数 $f(\mathbf{x})$ 它将参数地图到预测, 并使用优化来找到最适合观察的参数值。

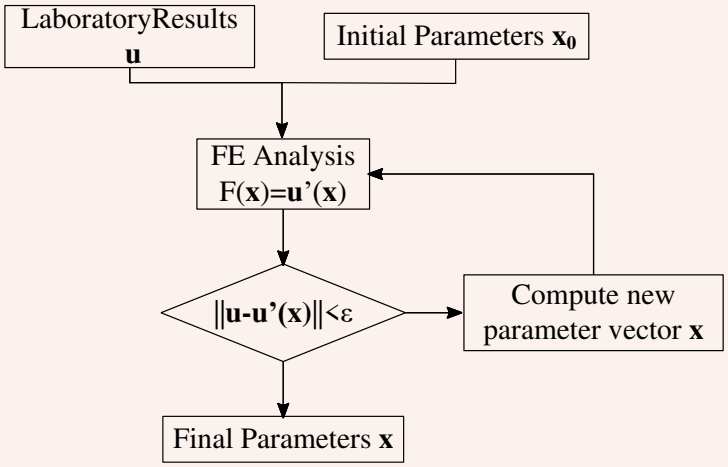


图 65.1: 系统识别方法的原则: 以色列参数进行重定向, 以尽量减少模型数据不一致性。

4 数学, 让 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 要把测量, 让 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ 包含相应的模型预测。剩余的 向量

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}. \tag{65.1}$$

5 相反问题是困难的, 当模型是不线性的, 数据是分散或相互联系的, 多个参数组合产生类似的反应, 或者观察包含外观或系统性不一致。

65.2 申请和决策框架

6 上列出的三个应用域 - 模型定义, 结构健康监测和地震需求确定 - 共享一个共同的结构: 观察必须通知未知的参数影响预测。使用哪些参数估计方法的选择取决于数据质量、模型非线性、计算预算以及不确定性的后果。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

65.2.1 从敏感性分析到参数识别

7 敏感性分析是识别的前提条件, 而不是替代品。章节 64 确定可能影响所选择的答案的参数。反向分析应该从这个减少的组开始。可忽视的整体敏感度的参数是固定的; 具有几乎不可分割效果的参标是通过额外的测量组合、调节或通知。这种减少提高了计算效率和解释性。

65.2.2 决策框架: 什么方法?

8 本章解释了三个方法:

莱文伯格 - 马库尔德 (部分 65.4): 对于大多数问题, 默认选择。快速、稳定的、计算效率高, 数据大多是加西语。产生一个点估计和约定参数不确定性。

拉纳克 (部分 65.3.2): 推荐当批发人被怀疑或确认时。在与 最小二乘法 重复之前, 确定一组合并的输入数据。耐受污染, 会误导 L-M。

巴伐利亚入侵 (§ 65.5): 至关重要的是, 在决策过程中需要完全后续不确定性。计算更昂贵, 但提供可靠的间隔、后续相互关系和对以前假设的敏感性。

9 一个实用的工作流可以结合这些: 使用 RANSAC 清理数据, 应用 L-M 初始加密和验证, 并使用 Bayesian 结论, 如果参数不确定性物质影响下流决策。

65.3 数据质量与强度

65.3.1 数据污染的来源

10 实验室和现场的实际测量包含各种错误和污染来源:

- **测量噪音:** 随机, 大约加西亚的错误在传感器和仪器内。
- **系统性混乱:** 因仪器定义或环境影响而在测量中进行一致的折扣或流动。
- **传感器故障:** 监测仪器的临时或永久性故障, 产生错误或冷冻阅读。
- **大型出售商:** 因数据输入错误、过渡干扰或设备故障而引起的隔离点。
- **模型不相同:** 模型预测与观察之间的系统性差异, 由于不模型物理或边界条件。

11 气体测量噪音由最小二乘法自然处理 (部分 65.4). 大型排泄物和系统污染需要预处理或坚固的方法。

65.3.2 强大的共识估计:RANSAC

12 随机样本共识 (拉纳克) 估计由批发者污染的数据模型 (Fischler and Bolles, 1981). 它最好被理解为一个外部共识搜索圈。候选人参数适用于最小或较小的随机子组; 所有观察都按剩余边界分类; 最强的共识集保持; 最终参数使用所有接受的输入进行重复。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

65.3.2.1 算法

1. 选择一个随机子组足够大, 以估计模型。
2. 适合该子组的候选人参数 向量。
3. 计算完整数据集的废物, 并使用指定的边界分类观察。
4. 通过在内数和, 如有必要, 根据合适的质量在共识设置中得分候选人。
5. 重复指定的或适当更新的测试数量。
6. 修复模型, 使用最佳共识组的所有插件。
7. 审查排除观察, 并测试独立数据的最终匹配。

[13] 如果中间分裂是大约 w 最小样品尺寸是 s, 并且所需的概率是绘制至少一个全内部子组。p 熟悉的规划接近是

$$N \geq \frac{\log(1-p)}{\log(1-w^s)}. \tag{65.2}$$

因为 w 最初是未知的, 样品假设可能是不完美的, 试验计算应该保守地更新, 因为更好的共识集被发现。

[14] 内限应与测量不确定性或强大的规模估计有关, 而不仅仅是为了最大限度地提高所接受的点数。RANSAC 处理大污染; 它不取代普通测量噪音的概率模型。

简单的线性回归例子

[15] 一个例子的 RANSAC 应用于简单的线性逆转显示在图 65.2. 算法以异常的方式选择随机子组, 匹配各个线条, 并计算数据点在用户定义的范围内多少。捕获最多输入者的线路被选为最佳模型。

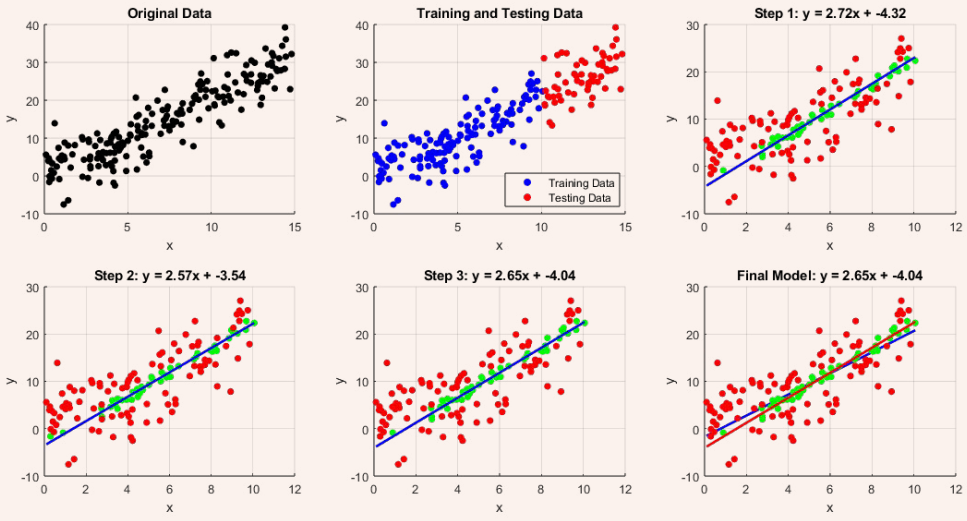


图 65.2: 与 RANSAC 线性回归的模范

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

混凝土 衰退的应用

16 一个更实用和详细的例子显示在图 65.3 显示,RANSAC 应用于从一个网站恢复的混凝土核心中的第一原则衰退模型。目标是估计由碱性合并反应导致混凝土恶化的分析功能的参数。(空气).

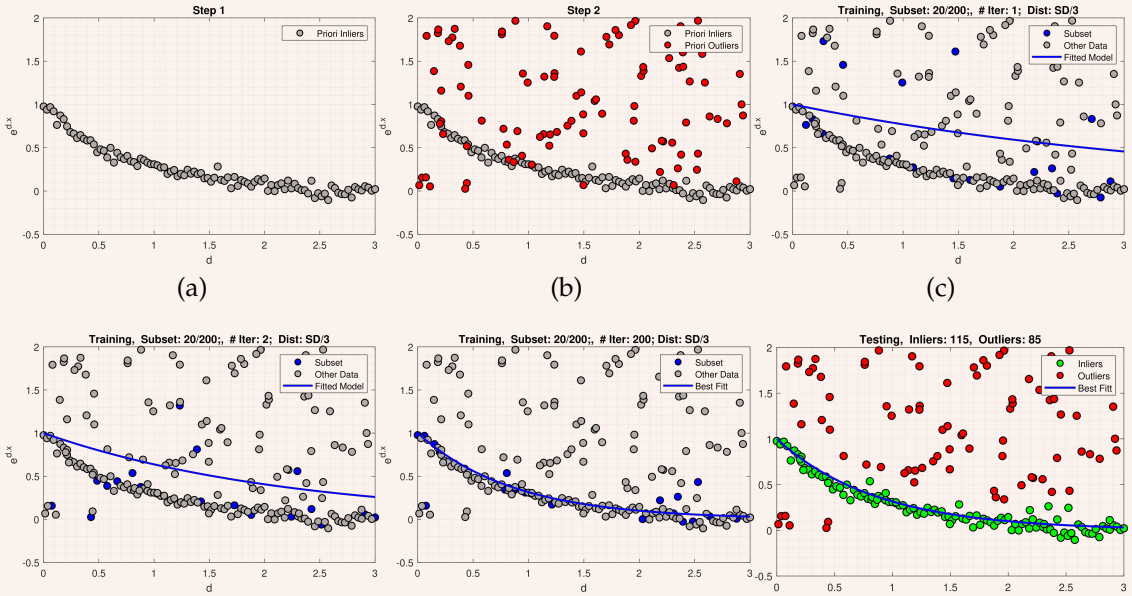


图 65.3: RANSAC 适用于 混凝土 衰退: 案例研究 (Gakuhari, 2021)

17 從 Seminoe Dam, 弹性模量 恢復的領域核心 (E), 抗拉强度 (f_t), 和 抗压强度 (f_c') 它们在不同年龄和深度上被测量。目标是将一项第一原则模型与这些破坏数据相匹配, 同时过滤测量噪音和实验输出。

18 利益的数量 (QI) 低 混凝土 属性, 如下:

$$\frac{\text{QoI}}{\text{QoI}_0}(d,t) = 1 - f(d) \cdot D(t) \tag{65.3}$$

哪里 QoI_0 是初步 (不受损害) 混凝土 属性值, $D(t)$ 正常化损害作为时间的功能 t, 和 $f(d)$ 是对深度依赖的损害变化的纠正因素。

19 深度因素是模型为:

$$f(d) = A \cdot d + B \tag{65.4}$$

与参数 A 和 B 代表深度依赖的损害进展。

20 对于时间依赖的损害, 两种竞争第一原则模型被认为是基于 AR 动态:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$D(t)|_{\text{Model 1}} = (1-\beta)\frac{(1-e^{-t/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L-t)/\tau_C}} \tag{65.5}$$

or:

$$D(t)|_{\text{Model 2}} = (1-\beta)\frac{\int_0^t \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L-s)/\tau_C}}ds}{\int_0^{t_{\text{end}}} \frac{(1-e^{-s/\tau_C})}{1+e^{(\tau_L-s)/\tau_C}}ds} \tag{65.6}$$

哪里 τ_C 是特征的时刻, τ_L 是延迟期, 以及 β 长期的无形损害。

21 **RANSAC 过程:**

22 由于从数据中进行的领域测量可以持续多年, 并在多个角落位置上进行多次测量, 因此数据必然包含测量错误, 并且可能包含输出。大多数点应该基本上符合第一原则 AAR 模型, 如果只有输出器才能被识别和移除。RANSAC 提出了根据规定的模型和限制设定的共识; 在被排除的点被视为无效之前, 工程审查仍然需要。

共识搜索阶段:
- **初步:** 用户指定 iterations 的数量 N 样品大小 n 因 iteration, 错误宽容限制 (是的).
- 域数据 (深度、年龄、混凝土属性) 被加载。
- 跳过 N 字符串: 每個字符, 随機選擇 n 数据点。
- 适合 AAR 衰退模式 n 点子。
- 得分: 计算总数据点的剩余大小在错误宽容限制以下多少 (是的).
- 之后 N 等式, 保持模型最高分数 (大多数入口者).

分类和回收阶段:
- 选择在共识搜索中获得的最高分数模型。
- 使用此最佳模型, 将所有数据点分类为输入或输出。
- 使用所有已识别的输入器修复参数, 并在永久排除它们之前检查被排除的观察。

23 **关键观点:** 对于这个混凝土的破坏应用程序, 一个基于物理的模型给了内部标准一个防御性的工程解释: 一个点被判断反对预期的破坏机制而不是反对自愿的灵活曲线。RANSAC 也可以应用于实验和数据驱动的模型, 但过度灵活的模型的吸收污染而不是暴露它, 而异化仍然特别危险。

24 一旦确定了最好的内置集, 则参数 $(A, B, \tau_C, \tau_L, \beta)$ 使用常规 最小二乘法 回归仅在内存数据上进行精炼, 从而产生由排除的总污染影响较少的估计。

25 RANSAC 在老化基础设施的结构健康监测中特别有价值, 因为真实传感器数据和实验测量经常包含刺激性阅读、传感机故障和过渡错误。通过为工程审查提出可重复的共识,RANSAC 可以减少大规模腐败的阅读的影响; 它并没有证明任何被排除的观察都是错误的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

65.4 莱文伯格 - 马克思算法

26 莱文伯格 - 马库尔特 (L - M) 算法是参数的工作组在实践中识别。它结合了 Gauss-Newton 的 单元 优化和格拉迪特降落, 使其在广泛的非线性上坚固同时保持计算效率。其适应性蒸汽参数自动调节快速接近解决方案和谨慎困难地面上的步骤 - 一个平衡, 使其成为默认选择对于结构工程中的非线性最小方位问题, 水学, 材料科学, 以及许多其他领域。

27 关于信任区方法和相近的完整算法理论分析, 参见附件 Q. 该部分开发了实用 表述: 如何设置重量目标, 处理规模和界限, 诊断可识别, 并提取参数不确定性地点可视性接近。一个成功的 Hyperbola 合适的例子描述行动中的算法。

65.4.1 模型方法与模型选择

28 参数识别以模型类的选择开始:

基于物理的模型: 由机械、热力学、运输或动态学产生的。它们的参数通常具有物理意义, 支持抽象和工程解释, 但模型差异可能仍然存在。

数据驱动模型: 从观察中得出一个功能性关系, 与有限的物理结构。它们可以有效地适应复杂趋势, 但对外分裂脆弱, 并可能需要更多的数据。

混合模型: 将基于物理学的核心与实验性纠正、超级或差异术语相结合。它们可以改善预测, 同时保持身体限制, 只要两组元素的角色是可识别的。

29 对于特定应用程序, 模型类的选择限制了哪些参数可从可用的数据中估计。与数据相关的自由度太多的模型会遭受可识别不佳; 过少的模型可能会忽略重要物理学, 并产生混乱。(模型不一致).

65.4.2 重量不线 最小二乘法

30 常规非线性最小二乘法最小

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}. \tag{65.7}$$

当测量具有不同的单位、变异或相互关系时, 防御目标重量为最小二乘法。

$$\Phi_W(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}, \tag{65.8}$$

哪里 $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ 是测量错误可视性 矩阵. 与标准偏差的独立观察 s_i, 这相当于减少正常化废物。r_i/s_i. 仲裁的数值重量应避免, 因为它沉默地改变了合适的工程意义。

65.4.3 莱文伯格 - 马库尔德更新步骤和算法直觉

31 与雅各比 $\mathbf{J} = \partial\mathbf{r}/\partial\boldsymbol{\theta}$,Levenberg-Marquardt 步骤解决

$$\left(\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{J} + \lambda\mathbf{D}\right)\Delta\boldsymbol{\theta} = -\mathbf{J}^T\mathbf{W}\mathbf{r}, \tag{65.9}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

哪里 λ 控制 Damping 和 $\mathbf{D}$ 提供扩展。

32 **算法直觉:** 蒸汽参数 λ 控制有效的信任区域, 但它本身不是信任区广径。有一大价值的 λ 产生一个强烈蒸发的短步, 质量相匹配于一个小信任区; 当 $\mathbf{D}$ 是直径和积极的, 方向在扩展后变成格拉迪特类似。如 λ 步骤下降, 接近加斯 - 纽顿步骤, 可以快速接近一个保持良好的最低。四方接近仅在额外有利的条件下是可能的, 不应一般假设。算法仍然是本地的, 可以从不同的起点转向不同的解决方案。

65.4.4 例题 65.1: 适合非线性超级模型

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

这个例子是故意小足以用手或用只需几行 MATLAB®，但其中一个未知量确实以非线性方式出现。参数 考虑模型

$$g(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{a}{b+x}, \qquad \boldsymbol{\theta} = [a,b]^T, \qquad a>0, \quad b>0. \tag{65.10}$$

与其比例线性的多元化不同, 这种模型是非线性 b 其雅各比因而改變, 如同引用进展。

合成数据和残留条约

对于审计可行性, 这些观察是由

$$\boldsymbol{\theta}_\star = [6,2]^T$$

在五个地方 $x_i \in \{0,1,2,3,4\}$. 因此,

x_i	0	1	2	3	4
$y_i = 6/(2+x_i)$	3.000000	2.000000	1.500000	1.200000	1.000000

在这个教学例子中, 没有测量噪音被添加, 因此最小目标在准确的算法中是零。真正的噪音数据, 最低方位估计通常不会与使用的参数来产生基本噪音无响应。

以此为例, 定义

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{y}, \qquad \Phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{r}, \tag{65.11}$$

因此, 这

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\theta}}.$$

每一个观察,

$$\frac{\partial g_i}{\partial a} = \frac{1}{b+x_i}, \qquad \frac{\partial g_i}{\partial b} = -\frac{a}{(b+x_i)^2}.$$

初步点和跳跃规则

从开始

$$\boldsymbol{\theta}_0 = [4,1]^T, \qquad \lambda_1 = 10^{-2},$$

使用 Marquardt Scaling

$$\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}\left(\mathbf{J}_k^T\mathbf{J}_k\right).$$

每一次审判, 解决

$$\left(\mathbf{J}_k^T\mathbf{J}_k + \lambda_k\mathbf{D}_k\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_k = -\mathbf{J}_k^T\mathbf{r}_k. \tag{65.12}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果审判点下降 Φ 接受它并设置 $\lambda_{k+1} = \lambda_k/10$ 否则拒绝, 保留当前的参数, 并设置 $\lambda_k \leftarrow 10\lambda_k$ 在重新计算之前审判步骤。这个简单的因素一规则只用来举例。透明。生产实施通常使用实际的比例预测减少, 以更顺利地更新蒸汽。

第一集 全集

在 $\boldsymbol{\theta}_0 = [4, 1]^T$,

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 4.000000 & 2.000000 & 1.333333 & 1.000000 & 0.800000 \end{bmatrix}^T,$$

因此

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 0 & -0.166667 & -0.200000 & -0.200000 \end{bmatrix}^T, \qquad \Phi_0 = 0.553888889.$$

雅各比人是

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.000000 & -4.000000 \\ 0.500000 & -1.000000 \\ 0.333333 & -0.444444 \\ 0.250000 & -0.250000 \\ 0.200000 & -0.160000 \end{bmatrix}.$$

所需的产品是

$$\mathbf{J}_0^T\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 1.46361111 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.28563086 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_0^T\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0.85444444 \\ -3.84392593 \end{bmatrix}.$$

因为 $\mathbf{D}_0 = \operatorname{diag}(1.46361111, 17.28563086)$ 和 $\lambda_1 = 0.01$ 第一种线性系统是

$$\begin{bmatrix} 1.47824722 & -4.74264815 \\ -4.74264815 & 17.45848717 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} -0.85444444 \\ 3.84392593 \end{bmatrix}.$$

解决給予

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0.99934608 \\ 0.49165043 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 4.99934608 \\ 1.49165043 \end{bmatrix}.$$

在接受的审判时,

$$\Phi_1 = 0.071941238 < \Phi_0,$$

因此, 步骤被接受, 下一个推值是 $\lambda_2 = 10^{-3}$.

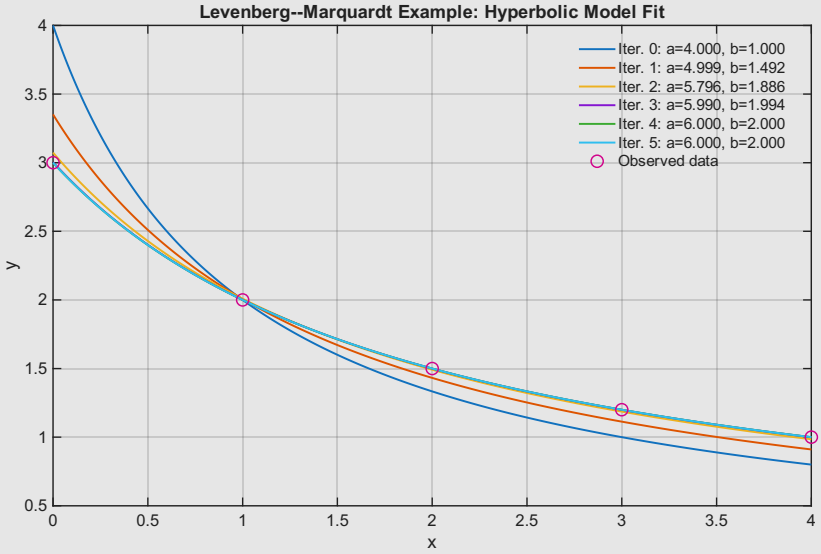
随后的伊特拉

重新评估剩余和雅各比在每个被接受的点给出接下来的序列。所有计算都以双重准确性进行; 特定值仅为显示而圆形。

接受的 iteration	λ_k	a_k	b_k	$\Phi_k = \frac{1}{2}\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k$
0	–	4.000000	1.000000	5.538889×10^{-1}
1	10^{-2}	4.999346	1.491650	7.194124×10^{-2}
2	10^{-3}	5.795603	1.885772	2.971964×10^{-3}
3	10^{-4}	5.990433	1.994207	8.259246×10^{-6}
4	10^{-5}	5.999974	1.999984	6.810857×10^{-11}
5	10^{-6}	6.000000	2.000000	2.295319×10^{-20}

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

雅各比的变化与 b 确认, 这是一个真正的非线性最小四方问题 接受的 iterates 接近准确的解决方案 $\boldsymbol{\theta}_\star = [6, 2]^T$ 以及客观的方法零到机器精度。被拒绝的试验将离开参数 向量未改變及增長 λ 在新步骤被计算之前。



A MATLAB® 重复 iteration 表的脚本在附件中提供 I.5.1. 它使用相同的剩余条约, 规模为矩阵, 和蒸发规则与衍生上方。

它将接受的以色应对者分开处理审判对象。因此, 被拒绝的审判增加了 λ 和重新计算步骤, 而不会错误地推进 iteration 表。

65.4.5 扩展、限制和调节

33 以非常不同的 数值 尺寸测量的参数首先应非维度化或分配代表性大小。限制可以防止物理上不可能的值, 但一个参数重复推到限制可能表明不够的数据, 差规模或模型不一致而不是成功的识别。

34 对于未确定或不确定的问题, 可以使用规律目标:

$$\Phi_R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{W}\mathbf{r} + \frac{\alpha}{2}\left\|\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)\right\|_2^2 . \tag{65.13}$$

第二期罚款从前或参考值退出。规范化选择了许多人中的一种解决方案; 它不创造信息, 而且它的强度。α 必须报告。

65.4.6 可识别

35 **结构性识别** 问是否准确, 无噪音的观察可以独特地确定原则上的参数。**实用识别** 询问是否可用的噪音和最终观察以可接受的准确性确定它们。

36 接近候选人解决方案, 从重大的雅各比安诊断实用识别性 $\mathbf{W}^{1/2}\mathbf{J}$:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **排序缺陷:** 排名低于参数的数量意味着至少一个参数组合是本地不可识别的。
- **小单一值:** 非常小的单一值指示弱知的方向; 相应的参数不确定。
- **大条件号:** $\kappa = \sigma_{\max}/\sigma_{\min} > 10^6$ 表明严重的恶性条件和弱识别能力。
- **雅各比亚列:** 几乎列表指示参数, 其影响不能与数据区分。
- **强烈的参数相互关系:** 估计的相互关系 > 0.95 指示补偿参数组合; 更改一个以匹配数据需要更改另一个。

[37] 因此, 一个小剩余标准是必要的, 但不够。一个模型可以几乎准确地匹配观察, 而单个参数仍然不独特。治疗方法包括添加独立的反应类型, 改变传感器位置或充电路径, 固定不敏感参数, 组合相关参数、使用调节或信息性预测, 并从多个起点重复分析。

[38] 对于实验室和实验数据, 这种过程可以通过坚实的共识估计来大大促进。(RANSAC, 部分 65.3.2), 在 L-M 参数估计之前移除总输出。

65.4.6.1 地方不确定性接近

[39] 如果剩余模型是合适的, 解决方案是内部的, 并且线性是合够的, 则一个地方的可视性接近是

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \approx c \left(\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}\right)^{-1}, \tag{65.14}$$

[40] 当时 $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon}^{-1}$ 是已知的绝对准确性 矩阵 (测量变量), $c = 1$ 可的, 是正确的。当时 $\mathbf{W}$ 只包含相对重量 (例如, 对称值的逆转), c 通常被认为是重量剩余变异:

$$c \approx \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{W} \mathbf{r}}{m - n_p}, \tag{65.15}$$

哪里 m 是观察的数量和 n_p 是参数的数量。这确保参数不确定性反映了数据符合质量和测量准确度。接近是不可靠的活跃限制, 明显的不线性, 弱识别能力, 多元目标或模型不一致。在这些情况下, 个人资料流量、bootstrap 分析或 Bayesian 后续更为有信息。

65.4.7 模型差异

[41] 有用的概念观察 [1] 是

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{65.16}$$

哪里 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 测量错误和 $\boldsymbol{\delta}$ 这是系统的模型差异。如果 $\boldsymbol{\delta}$ 被忽略, 优化器可能会扭曲物理意义的参数来补偿缺乏机制。巴耶西语定义可以明确地表明差异 (Kennedy and O'Hagan, 2001) 定义式加密应至少检查系统依赖荷载的剩余模式, 时间、位置或反应类型。

[1] 平等 (65.16) 正式相似于 Eq. (47.2) 引入变量衍生 Euler - Lagrange 方程式: 两者都表达了增加的参考量因添加性干扰。相似之处仅是结构性。在 Eq. (47.2), δu 可接受的变量, 在 EQ 中。(65.16), $\boldsymbol{\delta}$ 表示系统模型不一致性和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 指示测量错误。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

65.5 巴伐利亚参数识别

42 巴耶西的概述提供了一般更新前的框架与观察数据的知识。在参数识别中, 未知的模型参数被视为随机变量, 并将先前的组合具有概率功能的信息产生后续分配描述由两种信息来源支持的参数值。

43 莱文伯格 - 马克华特方法 (部分 65.4) 和 RANSAC (部分 65.3) 基本上是优化方法: 它们产生点估计, 由本地线性补充不确定性或共识信息。巴伐利亚身份代替生产完整的后续分配。它可以代表无形或多元化不确定性、参数相互关系、先前假设的影响以及参数不确定性传播到后来的预测和决策。

44 巴耶西的结论是最有价值的, 当后来的不确定性物质上影响安全边界、服务寿命预测、可靠性估计或风险信息的决定。这是自然的, 当信息从前考验、文学、物理限制或专家判断应影响识别, 以及当序列更新作为新数据需要时成为可用。

65.5.1 Bayesian 参数识别: 设置

45 巴伊斯的理论结合了关于未知参数的先前知识。观察中所包含的信息:

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y})}. \tag{65.17}$$

这里, $p(\boldsymbol{\theta})$ 是先前的分配, $p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta})$ 是可能的, $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ 是后续分配, 以及

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) \, d\boldsymbol{\theta} \tag{65.18}$$

是证据, 还是边缘概率。证据正常化后方。它不被 Metropolis–Hastings 明确要求样品, 因为它取消接受比例。

46 假设添加式加西亚测量错误与可视性 矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ 但是, 概率是

$$p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \left|\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))^T \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}))\right], \tag{65.19}$$

哪里 m 这是观察的数量。模型差异可以代表例如, 通过所引入的补充术语 Eq. (65.16). 如果不相同, 后续不确定性是假设模式的条件, 不应该被解释。作为模型形式错误的自动会计。

47 参数优点可以编码积极性、可接受的界限、文学或数据库值、伴侣测试结果或其他防御性信息。當事先資訊是弱的, 弱的信息優勢超過物理可靠的范围优先于自愿分散的偏见。预测模拟　从前的参数进行模拟, 运行模型, 以及对随意的答案进行审查　在数据之前是一个重要的诊断。被使用。

65.5.2 地图估计与点估计

48 如果需要单个参数 向量 , 则 **最多后期** (地图) 估计是后者模式:

$$\boldsymbol{\theta}^*_{\text{MAP}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}). \tag{65.20}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

49 对于加西亚的概率,MAP 估计相当于最小限度的重量, 由负面日志优先增加:

$$\boldsymbol{\theta}^{*}_{\mathrm{MAP}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})^{T} \mathbf{W} \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) - \log p(\boldsymbol{\theta}) \right]. \tag{65.21}$$

它是计算类似于重量 最小二乘法 (部分 65.4.2), 与 Log-prior 作为一个规律期限。与可接受区域前的统一,MAP 估计与最高概率估计相匹配。其他点摘要包括后中和后中; 也不能单独携带背部的形状或依赖结构。

65.5.3 后面样本和 MCMC 为参数

50 为了获得后续分布, 而不是点估计, 马尔科夫链 Monte Carlo (MCMC) 生成样品的方法 $p(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y})$ 不需要评估后续正常化。在 Metropolis–Hastings 算法, 一个审判向量 $\boldsymbol{\theta}'$ 由 密度 提议提取 $q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})$ 被接受与概率

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')q(\boldsymbol{\theta}^{(s)} \mid \boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})q(\boldsymbol{\theta}' \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.22}$$

对于一个相似的随机步行提议, 两项提议密度被取消, 因此

$$\alpha = \min\left[1, \frac{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}')p(\boldsymbol{\theta}')}{p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}^{(s)})p(\boldsymbol{\theta}^{(s)})}\right]. \tag{65.23}$$

被接受和重复的国家构成一个马尔科夫链, 其固定状态分配是后者, 在常规的正常条件下。

51 初步示例受到起点的强烈影响是常见的被烧毁的。随后的样品是相连的, 因此数量存储引力不是独立引力的数量。诊断应该包括跟踪插件、自我调节功能、有效样品大小及多种从分散点开始的链条。对于多链分析, $\widehat{R}$ 接近一个值提供证据 但不是证据..... 连锁已经达到了一个常见的站点分配。需要的链条长度是问题依赖的, 应从混合和有效样品中确定比起普遍的 iteration 计算而不是大小。

65.5.4 例题 65.2: 巴耶西复兴与平方基和 Metropolis–Hastings 样品

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

考虑回归模式

$$y_i = \theta_1 x_{1i}^{2} + \theta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{65.24}$$

哪里 θ_1 和 θ_2 是未知的。答案使用四方式基于 x_1 但模型在未知参数中是线性的。这个简单的结构是故意的: 与加西亚先例和已知 σ, 准确的后者可用于分析, 因此可以用来审查 MCMC 的实施。

合成观察是由

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{true}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^{T}, \qquad \sigma = 1, \qquad n = 50, \tag{65.25}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

独立的加西亚奖项被授予:

$$\theta_j \sim \mathcal{N}(0, 10^2), \qquad j = 1, 2. \tag{65.26}$$

使用一个相似的加西亚随机步行建议, 因此接受可靠性由 Eq 提供。(65.23). 剧本创造 10 万个州, 排除前 2000 作为燃烧, 计算后標準偏差,95% 可靠的间隔, 参数相互关系, 跟踪点, 自我调节功能和后预测反应乐队 它还比较了 MCMC 估计与准确的加西后方和一般最少四分之一的估计。

复杂的实施使用一个链条, 以便教育清晰度。A 生产分析应使用多种分散链和报告 $\widehat{R}$ 有效的样品尺寸。噪音 标准差 被处理如已知; 在更完整的分析中, 可以分配一个先前和结束的与 regression 参数相结合。

相应的 MATLAB® 代码被授予 § I.5.8.

65.5.5 算例：退化参数的贝叶斯推断

52 考虑到时间依赖的衰退模式引入部分 65.3.2:

$$\frac{\text{QoI}}{\text{QoI}_0}(d, t) = 1 - f(d) \cdot D(t),$$

哪里 $D(t)$ 遵循第一原则的 AAR 动态模型与参数 τ_C (特征时间), τ_L (延迟期), 和 β (无形损伤).

53 巴耶西分析将防御性优点分配给每个参数:

- $\tau_C > 0$: 特征性时间规模, 例如一个 Lognormal 前专注于文学价值观。
- $\tau_L > 0$ 延迟期, 此前可能已知的温度和碱性含量。
- $\beta \in (0, 1)$: 长期分裂损害, 代表如单一或比特币之前。

54 概率结合了像弹性这样的数量的领域测量多层和年龄的模块性和强度与其测量错误估计。MCMC 样品然后产生后拖, 允许:

- 每个参数的边缘后密度;
- 95% 基于量子或最高后端 - 密度 的可靠间隔区域;
- 后方参数相互关系和混乱的识别;
- 后预测衰退曲线与不确定性带。

55 如果后方显示两个参数之间的强烈相互关系, 则如 τ_C 和 τ_L 可用的数据可能不会分开其影响。额外的反应类型、不同时间或地点的测量, 或者此前可能需要更多信息。后预测检查比较观察回应与后续引导中产生的复制回应并帮助揭示系统模型的不适当性。

65.5.6 什么时候使用 Bayesian 识别

56 巴耶西参数识别特别有价值, 当:

- **提前信息是必不可少的:** 历史考验, 理论限制或专家知识应该影响定义。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **完全后续不确定性是关键的:** 决策取决于 ta 的概率或可靠的间隔, 不仅仅是点估计。
- **参数相匹配必须定量:** 分析必须透露是否由参数独立识别或混淆。测量设置。
- **需要连续更新:** 新观察到来时间, 从一个分析的后者变成了下一个分析的前者。
- **模型差异是显著的:** 明确的处理系统模型错误是必要的, 以避免将所有不一致归咎于参数

[57] 巴伐利亚方法在计算方面比 Levenberg-Marquardt 优化, 需要仔细的样品诊断。在返回, 它们提供可靠的间隔, 合并参数依赖性, 后预测不确定性, 透明代表前信息 - 在高跟随性结构中可能必需的数量决策。

65.6 Levenberg - 马克思算法在实践中

[58] 关于信任区方法的完整算法理论和莱文伯格 - 马克华特对立分析, 请参见附件 Q. 本节重点是将 Levenberg-Marquardt 算法与有限元分析相结合的 MATLAB 实用实施。

MATLAB® 代码 [59] 和 MATLAB® 代码在图中描述 Q.2 它是相对简单的跟踪。

[60] 请注意, 在这种情况下, 分析侧重于由碱性集成反应影响的相关术语。(空气). 目标是确定 AAR 模型的参数, 以便从 有限元分析 的切割转移密切相匹配的领域测量。

1. 现场测量被阅读和调整。
2. 控制输入文件被阅读, 并分为三个部分: 一个中央包含线条要由代码修改。(与 AAR 属性相关) 和两个接近的, 将保持不变。相应的分离器线号用于后续使用, 由最小化函数记录。
3. 用户定义的变量从外部 Excel 文件中阅读。
4. 优化参数设置
5. 和 **李克强** 功能 , §Q.3 然后被召唤。

功能定义 [61] 算法的一个关键部分是定义要尽量减少的功能。

1. 创建一个新的输入文件, 以 $\mathbf{x}$ 在第一個字符串中, 使用默认值 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. 这是通过控制文件的先前分割方便。
2. 以 有限元分析 进行 (在此情况下, 使用梅林).
3. 从输出文件中提取计算的转移, $\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$.
4. 计算剩余 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_{\text{fea}}(t) - \mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$.
5. 遵守规则 e 关于废物。
6. 将新剩余 向量 返回优化器。

[62] 计划的完成由 **李克强** 基于剩余 向量 和之前选择的选项 (§ Q.3). 因为客观功能需要数据, 除了参数向量, 额外的数量 (如如 $\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$) 经过的如 **全球** 这种实施中的变量。

[63] 和 MATLAB® 非线性最小方位优化的代码在 § I.6.1.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

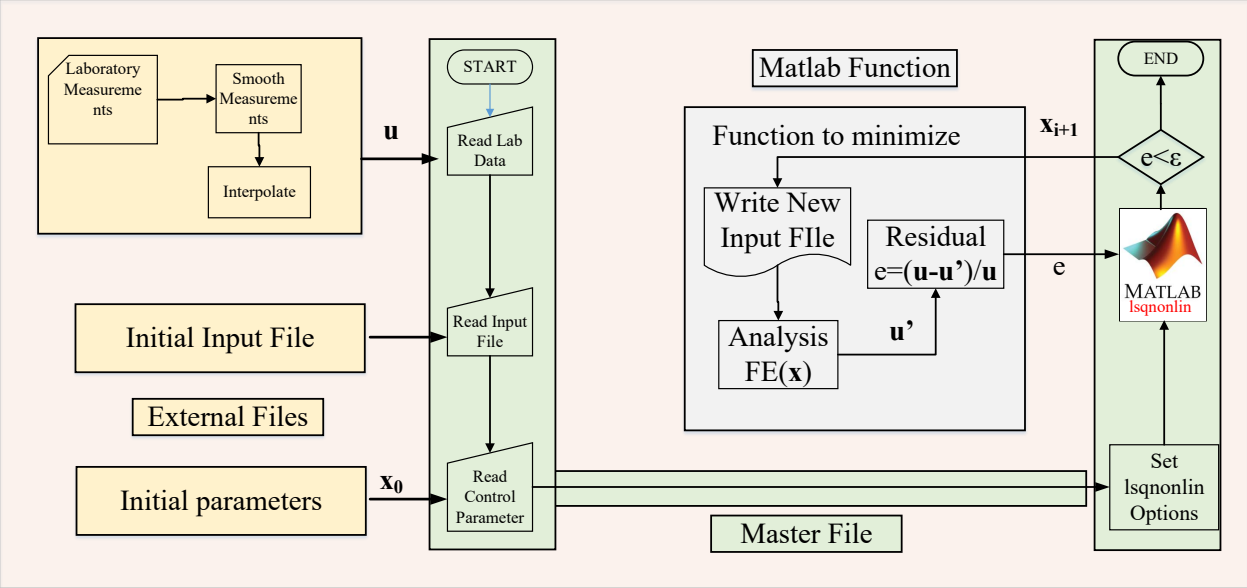


图 65.4: 参数识别程序流图

实时视觉化 [64] 由于非线性终端单元模拟复杂问题是计算成本昂贵的, 参数识别需要许多这样的分析, 整体过程是计算强度。

[65] 因此, 使用图形用户界面, 图 Q.3. 第一四角是中间移动的序列。($\mathbf{x}_{\text{fea}}(t)$) 与被测量的人相比 ($\mathbf{x}_{\text{meas}}(t)$). 其余三个四角形是要识别的选定的变量组合。($\varepsilon^{\infty}$, τ_l, 和 τ_c) 以 iteration 数字为准。

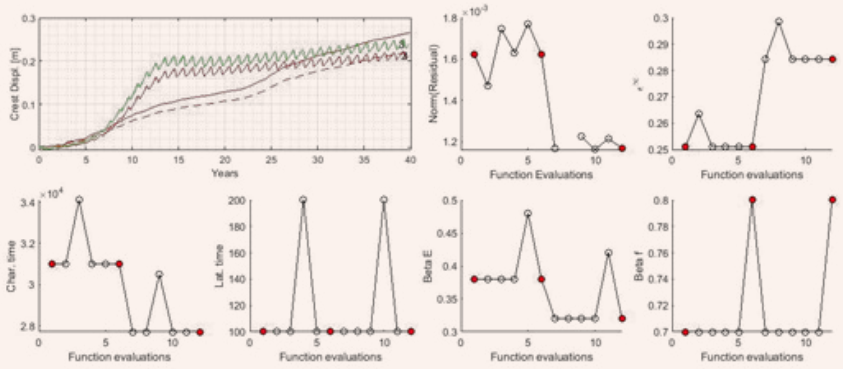


图 65.5: 图形用户界面为单个剩余函数和五个变量。查看 图 65.7 以更全面的例子。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

65.6.1 最低四方实践

66 对于常规终端单元定义, 推荐的序列是: 正常化或重量残留物; 屏幕参数; 检查雅各比亚排名; 选择物理防御的边界和起点; 从多个开始运行; 检查残留结构; 并独立验证。章节 Q 开发数值 算法, 并附件 I.4 包含相应的 MATLAB® 代码, 其完整描述如下。

65.6.1.1 MATLAB 参数识别计划: 描述

67 上一篇文章提供数学框架 此部分文档一个数据导向的实施, 这对 MATLAB 的夫妇 **李克强** 优化到外部终端 单元 溶剂。虽然这个版本与 ATENA 实施 (有限元分析 程序, FEAP), 该程序的模块化架构使它简单地适应代码到任何其他有限元分析包。实施更新所选择的材料参数, 启动溶剂, 阅读监控回复, 评估残留物, 并记录识别历史而不修改原始输入文件。

计划概述 68 所有问题特定的信息都从单一的分布表中阅读, **标签**:`xlsx`. 根据现场或实验室测量和一个 FEAP 模型, 其反应取决于未知的参数, 该程序执行以下顺序:

1. 阅读文件名、参数名、显示器名、集成表达式、目标值和解决方案选项。**入口** 叶片;
2. 阅读初始参数 向量 $\mathbf{x}_0$ 從 FEAP 输入檔案中推薦的範圍;
3. 创建输入文件的临时工作副本;
4. 创建一个新的序列明智的日志表名为 `PI #n`;
5. 做干燥的跑步 $\mathbf{x}_0$ 检查整个 MATLAB - FEAP 链;
6. 发射 **李克强**在每个函数评估时, 更新临时输入、运行 FEAP、分配输出、集成预测和返回剩余的向量;
7. 更新一个显示预测到目标的比率, 在逻辑规模上的剩余大小和参数进化;
8. 记录每个被检测到的优化器的直径, 其时间表、分布时间、参数值、预测到目标比例和剩余值;
9. 报告确定的参数、剩余标准、出口旗和 iteration 统计数据。

69 实施旨在保持问题独立。参数、预测、集成表达式和目标测量的数量可能都不同, 而没有对 MATLAB 来源的变化。单元转换是明确写在分布表表达式; 没有隐藏的应变到微线因素应用于代码。

文件夹结构

```
FEAP/
|-- Main.m                    <- entry point: ParIdentification()
|-- ParIdentification.m       <- main function and nested minfunc
|-- Log.xlsx                  <- control spreadsheet and PI logs
|-- input.dat                 <- original FEAP input (never modified)
|-- input_temp.dat            <- working copy (overwritten)
|-- output.dat                <- FEAP output (overwritten)
|
'-- functions/
    |-- createTempInputFile.m
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
|-- extractEvaluateValues.m
|-- initPISheet.m
|-- logIterationToSheet.m
|-- readInputSheet.m
|-- readModelPredValues.m
|-- runAnalysis.m
|-- runLSQnonlin.m
|-- updateEvaluateValues.m
|-- updatePlots.m
|
'-- private/
    |-- buildFieldAggFunctions.m
    |-- findKey.m
    |-- isMissingLike.m
    |-- normalizeText.m
    |-- readNumericVectorByKey.m
    |-- readScalarByKey.m
    |-- readTextVectorByKey.m
    '-- toText.m
```

[70] 前助理 `xlsColLetter.m` 等 目前不需要顺序的 PI 登记器。助手 **创建** `FigM` 编写正如经文所写的, 而无需指示规模因素。

控制扩展表: Log.xlsx [71] 和 入口 字符串, 图 65.6 使用基于关键词的布局。列 A 包含描述标签, 列 B 包含 MATLAB 的关键阅读, 而列 C 上方包含一个或多个值。

	A	B	C	D	E	F
1	**Analysis Options**					
2	Executable file name	exeName	"AtenaStudio.exe"			
3	Input file name	inpFile	PH_optim-vc2			
4	Output file name	outFile	monitors.csv			
5	Model parameters	modelPar	BE_xx	BE_yy	BW_xx	BW_yy
6	Model predictions	modelPred	SAB_74m_X	SAB_74m_Y	SAB_86m_X	SAB_86m_Y
7	aggregated field expressions	fieldAggExp	SAB_74m_X * 1000	SAB_74m_Y * 1000	SAB_86m_X * 1000	SAB_86m_Y * 1000
8	aggregated field measurement values	fieldAggValues	2.7	1.8	3.4	2
9						
10	modelPar	AE_xx	AE_yy	AW_xx	AW_yy	...
11	modelPred	SAC_76m_X	SAC_76m_Y	SAC_86m_X	SAC_86m_Y	...
12	fieldAggExp	SAC_76m_X * 1000	SAC_76m_Y * 1000	SAC_86m_X * 1000	SAC_86m_Y * 1000	...
13	fieldAggValues	3	2	4	1.6	...
14						
15	**Solver options**					
16	Algorithm	Algorithm	levenberg-marquardt			
17	Tolerance function	TolFun	1.00E-08			
18	Step Tolerance	StepTol	1.00E-08			
19	Max iterations	MaxIter	100,000			
20	Max function evaluations	MaxFunEval	100,000			
21	Display	display	iter			
22	Finite Difference Step Size	FiniteDifferenceStepSize	0.01			
23	Finite Difference Type	FiniteDifferenceType	central			

Input | PI #1 | PI #2 | PI #3 | PI #4 | PI #5 | PI #6 | PI #7 | PI #8 | PI #9 | PI #10

图 65.6: 输入数据文件为 Levenberg–Marquardt 非线性最小方位优化

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

代码按密钥搜索, 而不是固定序列号。

表 65.1: 代表性配置输入 标签:xlsx

配置	关键	代表性价值
执行文件	名称	D:\恐惧\阿特纳 Console.exe
输入文件	英格兰	PH_优化 vc2
输出文件	外表	监视器.csv
模型参数	模型	BE_二十、是_饰 BW_二、BW_yy, …
模型预测	模型	萨布_74m_X、SAB_74m_Y, …
集成表达式	天文学	萨布_74m_X*1000, …
目标测量	田野 AggValues	2.7, 1.8, 3.4, 2, …
算法	算法	马克思 - Marquardt
功能宽容	托尔文	1e-8
相对宽容的步骤	StepTol	1e-8
最大重定义	马克思	100000
最大评估	马克思	100000
终点差异步骤	终点	0.01
终点差异类型	终点	中央
展示	展示	伊特

[72] 每个分布式键的准确资本化和输入必须符合预期的版本。首頁 〉外文書 〉M. 内部, 读者可以正常化这些名称　例如, StepTol 可以存储为 S.TOLX 但是, 直播表本身必须使用实施的密钥。

单位和集成表达式 [73] FEAP 监测器的值在其本地单位中被阅读。如果 FEAP 输出 应变 而目标在微线中, 则转换属于分布表表达式, 例如:

```
fieldAggExp    = 1e6*(M02+M08+M12)/3
fieldAggValues = 136  237  228  132
```

这使得单位公约可见, 并阻止同一因素被应用两次。

PI 登记表 [74] 每个行创建下一个可用的表, PI #1, PI #2 等等等。顺序的头条是

```
Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
     <Pred/Target...> | <Residual...>
```

行 2 是 0 的 iteration, 并包含 $\mathbf{x}_0$ 以零的浪费时间。每个随后检测到的 iteration 都适用于 向量 参数, 预测到目标的比率和剩余。此格式可直接排序, 适合分布或独立后处理。

FEAP 输入和输出文件 [75] 要识别的参数在 评估 陈述。目前值提供初始猜测, 而可选评论则提供推荐范围:

```
EVALUATE "EcD1 = /*# EcD1 */ 62000"
         // Recommended range 10000 - 50000
```

原始文件永远不会过写; 所有更新都被写入临时副本。

[76] 输出配件扫描所需的显示器块, 并为每个显示器提取最后有效响应值。预言名称与列出的 suffixes 相匹配 模型. 缺失、未完成或不匹配的值应该停止干燥, 而不是沉默地转移到优化器。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

优化工作流和目标 [77] 让 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 是集体 FEAP 预测的 向量 和 $\mathbf{y}$ 目标 向量。节目回来

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \tag{65.27}$$

到 **李克强**最小限度的 $\mathbf{r}^T\mathbf{r}$. 如果目标有显著不同的单位或不确定性水平, 则应按照规定的方式正常化或重量。§65.4.2 否则, 最大的数值废物占主导地位。

重量和相关废物在实施中 [78] 目标可以转换为统计重量的最小二乘法, 而无需更改优化器。对于独立测量与标准偏差表示 s_i, 返回正常化废物:

```
res = (predicted - target) ./ sigmaMeasurement;
```

然后 **李克强** 最低限度 $\sum_i r_i^2/s_i^2$. 原料工程废物必须仍然保留在记录中, 以免正常化隐藏不适的尺寸或单位。

[79] 相应的测量错误与可视性 矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$, 计算一个较低的 Cholesky 因素 $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$ 返回预白化废物:

```
rawRes = predicted(:) - target(:);
L      = chol(SigmaMeasurement,'lower');
res    = L \ rawRes;
```

结果的四方标准是 $\mathbf{r}^T\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-1}\mathbf{r}$. 可行性矩阵必须是积极的定义, 并以与原子残留 vector 一致的单位表达。

干跑 [80] 在优化之前,`minfunc` 被评估一次 $\mathbf{x}_0$. 此验证文件更新、解决方案执行、输出分配、集成和剩余评估。结果在函数评估 0 中以 0 的 iteration 回复, 并且不计算为优化器的 iterations。

标签和功能评估 [81] 有了最终差异雅各比, 一个优化器的 iteration 可能需要大约 $n_{\text{par}}+1$ 对前进差异的功能评估和大约 $2n_{\text{par}}+1$ 对于中央差异, 除了被拒绝的审查步骤或其他内部评估。因此, 仅从固定函数计算模式提交真实的引用是一种接近。优化输出函数最好在需要准确的 iteration 事件时。

扩展、宽容和界限 [82] 代表性参数大小通过 **典型** x 代码使用中间范围值, 当最终推荐范围可用时。宽板步骤容忍是无尺寸的, 可以内在转换为绝对规模。非常小的宽容不保证更准确的解决方案, 并可能导致不必要的终端单元跑步。

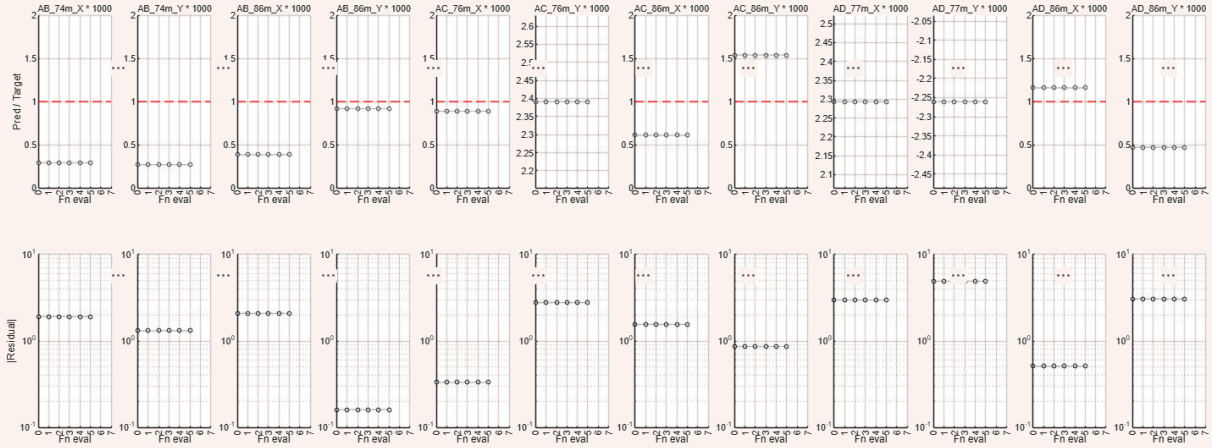
[83] 推荐的范围对检查有价值 $\mathbf{x}_0$, 检测到向不可取的值转动, 并配置执行限制的算法。分析师必须确认, 选择的 **李克强** 算法和 MATLAB 释放执行问题的尺寸的意图限制。一个不定义的匹配可以数字化, 同时保持非独特。

Dashboard 和诊断 [84] 磁盘将函数评估与接受的 iterations 和显示分开:

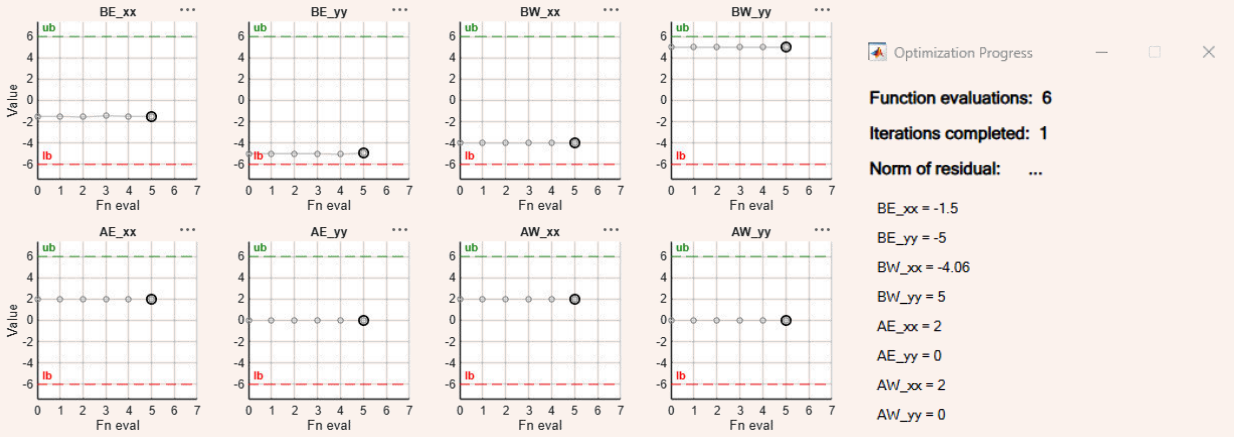
- 在线范围内预测到目标的比率;
- 绝对废物在逻辑规模;
- 每个参数的进化;
- 一个单独的标记为 0 的 iteration 和不同的标记可接受的 iterations。

[85] 转变不应仅根据剩余标准进行判断。最终审查应包括输出旗帜、参数与边界有关的位置、剩余模式、参标相互关系或雅各比单元值、对初始猜测敏感性以及对未用于定义的观察进行验证。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 12 个预测目标和相关废物



(b) 八种变量　　(c) Live Status 更新

图 65.7: Levenberg-Marquardt 非线性最小方位优化: 12 个预测目标和 8 个变量。

推荐后运行识别诊断 [86] 當被要求作為一種出口時, **李克强** 返回剩余的雅各比安到最后点。下列数量应以配备的参数存档:

- 数值 等级和重量或正常化雅各比亚的单一值;
- 其状态号, 与用于宣布近期缺陷的边界;
- 當地線形假設可防御時, 大約的参數相同性或相對性 矩阵;
- 根据替代初步猜测、终点差异步骤和可接受的限制, 解决方案的变化;
- 对可疑弱识别的参数进行个人资料插件或限制回复。

[87] 这些诊断是报告工作流的推荐延伸; 除非相关代码已实施并验证, 否则它们不应被描述为自动输出。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 65.2: 参数识别程序中的主要功能

功能	目的
阅读 `Input`	阅读所有基于关键词的配置和构建结构 *S*.
外文评估	阅读 $\mathbf{x}_0$, 下限, 和上限从匹配 **评估** 线路
创建 `TempInputFile`	创建工作副本与 **_温度** 在延伸之前提交。
更新评估	在临时输入中取代参数值; 在干燥运行期间使用可选的安静模式。
跑步分析	同时启动 FEAP 并返回其状态和控制台输出。
阅读 优点	输出和返回显示器值与 **模型**.
入口信	创建下一个顺序 `PI #n` 写字, 写字 0。
标签	添加 iteration 号、时间、参数、比例和剩余。
拉丁文	设置和执行 **李克强**.
更新	创建和更新剩余和参数板。

公共职能

表 65.3: 由 spreadsheet reader 和 aggregation layer 使用的私人助理功能

功能	目的
阅读 `ByKey`	找到一个密钥, 并将第一个不空的值返回其右侧。
阅读 `VectorByKey`	返回所有不空的文本值到一个密钥的右侧。
阅读 `VectorByKey`	返回所有不空的数字值到一个密钥的右侧。
创建 `AggFunctions`	将分布表集成表达式编译为功能操作, 而无需隐藏的规模。
查找	在原始工作表细胞中放置一个案例不敏感的密钥。
微笑	识别空白、缺失、空白或未完成的分布表输入, 如实施。
文本	将工作表值转换为文本, 以便进行正常比较。
正常化文本	正常化转换文本, 包括删除不破裂空间。

特殊助理功能

表 65.4: 配置结构的主要领域 `S`

田野	类型	目的
名称, 英格兰, 外表	文本	解决可执行和输入/输出文件名
模型	列表	参数名称必须在 FEAP 输入文件中更新
模型	列表	监控名称从 FEAP 输出中提取
天文学	列表	用于集成预测和执行单位转换的分布表表达式
田野 `AggValues`	向量	目标测量
田野 `AggFcn`	列表	整合函数符合集成表达式的操作
马克思, 马克思	滑雪	优化限制
托尔文, 托尔克斯	滑雪	功能和内部正常化步骤宽容
算法, 展示	文本	优化算法和显示模式
`lb`, `ub`	维克特	下和上方参数限制或推荐范围

主要数据结构和运行时间变量

添加一个新的识别问题

1. 取代或重新命名 ATENA 输入和输出文件。
2. 更新 **名称, 英格兰,** 和 **外表** 在 **标签**: `xlsx`.
3. 输入参数名称、监控表格、集成表达式和目标测量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 65.5: 选择的运行时间变量在 标识 M

变量	类型	目的
x0, lb, ub	维克特	初始参数和可接受的限制从输入文件中阅读
inpFileTemp	文本	临时 FEAP 输入文件在每个评估中过写
皮斯特名称	文本	现行顺序识别记录表
nFnEval, 尼特	整體	函数评估和检测到的以色列计算器
X	矩阵	参数历史
预测, 回归	维克特	最新集成预测和废物
x, 重定向, 没有什么	出口	最终参数、剩余标准和剩余 向量
出口旗, 出口	出口	终止原因和优化统计数据

4. 检查单位, 并明确包含每个转换 天文学.
5. 确保每个识别的参数在输入文件中都有防御性初始值和范围。
6. 进行干燥运行, 并检查所有废物之前允许未预期的优化继续。
7. 接近后, 重复从替代初始值的运行, 并独立验证加密模型。

88 在新问题跟随相同的输入和输出协议时, 不需要任何 MATLAB 代码更改。代码变更是必要的, 当溶剂格式、监控板、重量规则或优化逻辑变化。

设计决策和限制

Row-wise 登录: 每行一行比以前的柱类组织更容易过滤、编写和出口。

干跑以 0 的 iteration: 整个外部溶液链在优化之前进行, 结果与正式的优化器历史保持视觉差异。

明确单位规模: 每个转换都记录在 天文学; MATLAB 功能不附加隐藏的规模因素。

Spreadsheet 驱动的配置: 同一代码可以服务于不同的模型, 当其文件和监控协议兼容时。

伊特拉斯检测: 从函数评估计算中提取的异常是近似的, 尤其是与中央差异、拒绝步骤或算法变化。一个输出功能是长期实施的偏好。

外部过程可靠性: 每个 FEAP 运行都应检查输出状态、预期输出创建、文件新鲜度和终端显示值, 直到剩余被接受。

65.7 混合工作流和最佳实践

65.7.1 定义与验证

89 加密使用观察来估计参数。验证测试了对独立观测、充电路径、地点或时间段的加密模型。重复相同的数据为两项任务适用, 而不是预测能力。每当数据集小时, 应使用跨验证、阻止传感器或单独的实验阶段来曝光过量。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

65.7.2 结构性应用

90 参数识别方法适用于结构工程的整个生命周期:

- **宪法定义:** 将物理上有意义的参数匹配到实验室反应, 然后在不同的加载路径下进行验证。
- **结构健康监测:** 更新最终的 单元 型号, 从频率、模式形状、线条、转移或长期趋势, 同时考虑到传感器质量和环境影响。
- **老化基础设施:** 将领域数据与事先知识相结合, 以确定衰退的宽度、速度和空间变量。
- **地震需求和脆弱性:** 传播参数不确定性到需求模型, 限制状态的概率和脆弱性功能。
- **连续更新:** 通过使用拜西过滤器或重复集合加密来接到新的观测。

65.7.3 工作流决策框架

91 一个实用的混合工作流可以连续结合多个策略:

1. **数据清理:** 如果有漏洞或大量污染的疑似情况, 请使用 RANSAC。(部分 65.3.2) 要识别强大的共识数据集。
2. **初步加密:** 使用 Levenberg-Marquardt (部分 65.4) 在清洁的数据上, 以获得初始参数估计, 并为可识别问题显示屏。
3. **独立验证:** 测试加密模型对取消数据或不同的负载条件。
4. **后续不确定性:** 如果参数不确定性对下流决策产生重大影响, 请使用 Bayesian inference。(部分 65.5) 量化后续分布、可靠间隔和对前期假设的敏感性。
5. **审计路线:** 保留数据排除、重量、优点、模型版本和相似诊断记录, 以便进行复制性和对称审查。

92 每个阶段都应保留模型选项和结果的文件证据。该学科提高了与利益相关者的科学严格和实用沟通。

65.8 从数据、疑问和决策到基于性能的地震工程

93 最后一部分的目的是合成。章节 64 确定了不确定的输入和数据质量如何影响结构预测; 本章规定了从观察中得出的选择参数。他们一起为下列关于地震学章节提供方法桥梁 (章节 67) 先进的计算分析 (章节 69) 地震危险评估 (章节 70) 最后,PBEE (章节 72).

94 基于性能的地震设计出现了, 因为代码遵守本身并没有说明一个特定的结构应该如何进行, 什么损害是可能的, 或者随后的后果。(Hamburger et al., 2004). PBEE 需要一系列模型连接现场危险、结构反应、损害和后果。每个链接都包含不确定性, 并且多个链接包含必须从实验室或现场证据中加密的参数。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

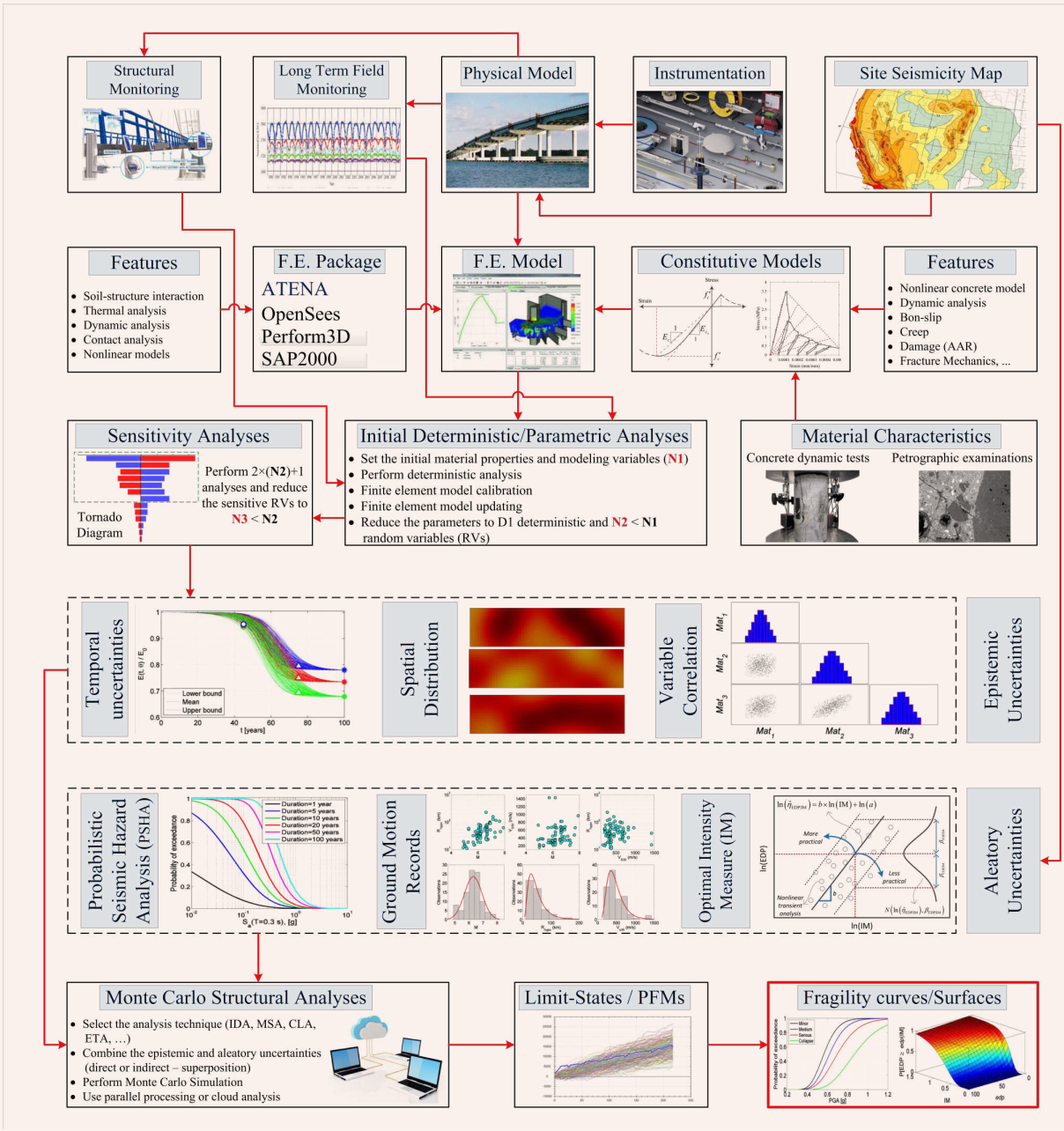


图 65.8: 网站特征化、模型开发、不确定性、参数识别、结构分析和脆弱性评估的集成

95 图中总结的工作流 65.8 is:

网站特征: 设定地点地震模式、物理特征、仪器、长期监测记录以及有用时强制振动测试数据。

单元 型号: 选择所需的分析特性、构成模型、材料描述、边界条件和计算平台。记录模型形式假设明确。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

初步定义分析: 检查 平衡, 单位, 边界条件和主导反应机制, 在引入斯托卡斯特输入或优化之前。

敏感度扫描: 将可靠的序列或分布分配给候选人输入。低成本的初步研究可以使用 $2N + 1$ 一次性评估和暴风雨图; 高尺寸非线性问题更好地与莫里斯进行扫描。如果在扫描后需要定量变量分配, 则将 Sobol 指数应用到减少的组。

参数识别: 使用测量来定义影响力和实际可识别的参数。根据测量不确定性, 检查雅科比亚排名和参数相匹配, 使用强大的方法, 当大输出是可靠的, 并独立验证加利布式模型。

神经不确定性: 代表物质属性、空间领域、边界条件、衰退状态、加密参数和模型不一致的无与伦比知识。保持依赖, 通过可视性模型或共同分配。

不确定性: 代表内在的变量, 特别是事件到事件和记录地面动作变量。有可能的地震危险性分析提供危险曲线; 随后选择适当的记录和强度测量 (PEER, 2014; Padgett, Nielson, and DesRoches, 2008).

可靠性 结构分析: 通过非线性分析传播传染性和随机不确定性, 使用蒙特卡洛、LHS、超级方法或其他验证的方法。计算经济不能通过忽略有影响力的不确定性来源来实现。

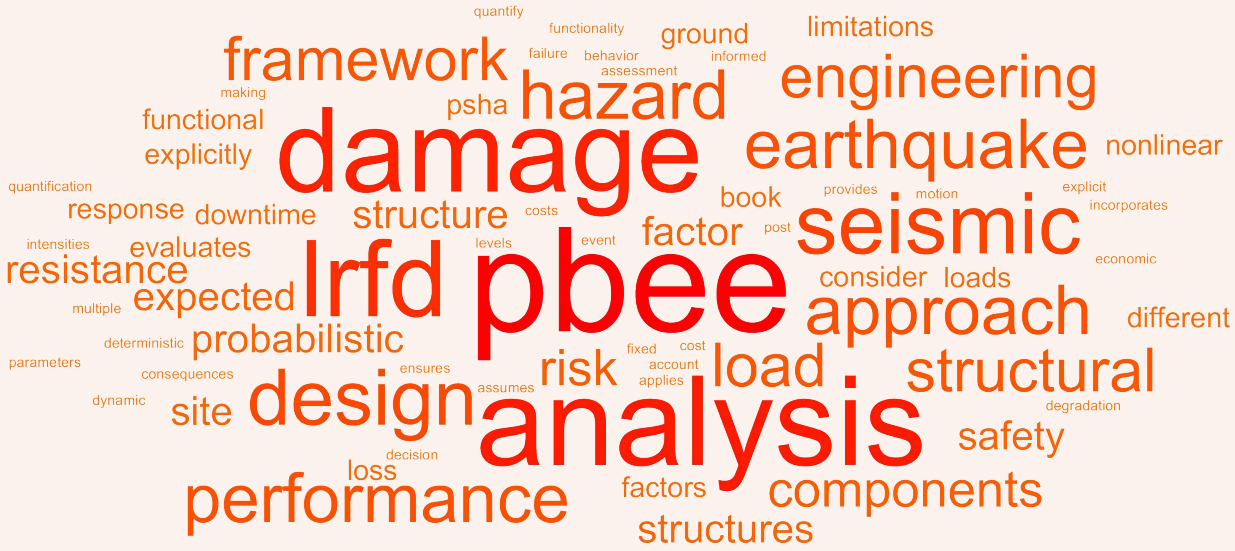
能力和损害功能: 定义限制状态和潜在失败模式, 使用机械、实验、观测和加密反应量。

脆弱性和性能: 构建脆弱性曲线或表面, 并将其与危险和后果模型相结合到 支座 风险信息的决策。

[96] 这个序列不是严格单一的。新的监测数据可能会引发重新加密; 敏感性分析可能表明需要额外的测量; 验证可能暴露模型不一致; PBEE 结果可能确定哪些不确定性最影响决定。接下来的章节提供了完成这个圈所需的危险和分析组件。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

66 间隔

摘要

本章节作为传统荷载和抵抗因素设计之间的过渡 *(LRFD)* 和 基于性能的地震工程 *(PBEE).* 虽然 *LRFD* 提供了一个确定性安全框架, 但它缺乏明确的损害评估和风险定量。

PBEE 通过将 危险性分析、结构反应评估、损害估计和损失评估集成到一个统一的风险信息方法来克服这些限制。

本章讲述了采用 *PBEE* 的动机, 并介绍了本书的结构, 系统地建立了一个全面的方向。"底部上" *PBEE* 框架

66.1 荷载和抵抗因子设计的限制 (LRFD) 1940
66.2 為什麼要移動到 基于性能的地震工程 (PBEE)? 1941
66.3 PBEE 的四个组成部分 1941
66.4 图书的结构 1941

66.1 荷载和抵抗因子设计的限制 (LRFD)

[1] 荷载 和抵抗因子设计 (LRFD), §37.3, 是结构工程设计中广泛使用的方法, 特别是钢材和混凝土设计。虽然它提供了一个概率性框架, 以应对负载和物质属性的不确定性, 但它有几个限制需要过渡到基于性能的地震工程。(PBEE):

单级安全检查 LRFD 确保结构在预定因素负载下保持安全, 但不明确考虑性能标准超越强度和可用性, 如后地震修复性或停车时间。

缺乏明确的损害考虑: LRFD 确保一个结构不会在最终限度状态下崩溃, 但不会在不同地震 强度下量化预期的损害。根据 LRFD 设计的结构可能在地震事件中遭受重大损害, 导致修复成本高或功能损失。

对复杂负载场景的不灵活性: LRFD 是基于线性因素的方法, 不明确考虑非线性行为、衰退或累积损害。它采用固定荷载组合, 而地震行动是动态的, 在强度、持续时间和频率内容上有所不同。

统一的安全边界, 而不是基于风险的设计: LRFD 适用于不特定位置或结构的基因抵抗因素。它不区分具有更高的失败后果的结构 (例如, 医院 vs. 仓库). 相同的设计哲学适用于具有极其不同的地震风险的地区。

无法计算 主条目: 信任区 在地面动作中: LRFD 采用了 荷载 因素的定义性组合, 而地震则产生高度变化的需求。它不包含 probabilistic seismic 危险性分析 (PSHA) 定量特定地点的危险变异性。

审阅稿

66.2 為什麼要移動到 基于性能的地震工程 (PBEE)?

2 基于性能的地震工程 (PBEE) 解决这些限制, 通过从规律的基于代码的方法转向一个风险信息框架, 评估结构在多种地震强度下。关键优点包括:

具体的性能目标: 而不是仅仅检查强度和服务性,PBEE 评估了多个性能水平:

- **运营 (O)**: 没有重大损害, 结构保持功能。
- **即时占领 (IO)** 小损坏, 可完全修复。
- **生命安全 (LS)**: 适度损坏, 可修复但不立即功能。
- **崩溃预防 (CP)** 严重损失, 但没有全球失败。

经济和功能影响的直接定量: PBEE 通过估计以成本为基础的决策:

- 预期的修复费用。
- 预期下跌时间。
- 预期的受害者。

基于风险的设计, 使用可靠性地震危险性分析 (PSHA): PBEE 包含特定地面动作危险曲线, 而不是使用固定 荷载 因素, 使设计能够反映实际的地震风险。

非线性分析和现实主义结构行为: PBEE 依靠非线性 时程分析 (NLTHA) 捕获损害的进展、产量和衰退, 而 LRFD 却不这样做。

以耐力为导向的方法; LRFD 不明确考虑后地震功能, 而 PBEE 允许工程师在事件发生后设计快速恢复。

66.3 PBEE 的四个组成部分

3 PBEE 由四个相互连接的组件组成, 如 图 中所示。66.1:

1. **危险性分析:** 衡量在特定地点经历不同水平的土壤冲击的可能性 可行性地震 危险性分析 (PSHA), chapter 67.
2. **结构分析:** 评估对地震负载的结构反应, 包括 非线性 动力分析 工程需求参数 (EDP), chapter 69.
3. **损害分析:** 使用反应参数来估计物理损害 结构和非结构组件, chapter 70.
4. **损失分析:** 翻译损害 经济损失、终止时间和事故估计以成本为基础的决策, chapter 71.

66.4 图书的结构

4 有两种可能的方法来引入 PBEE:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

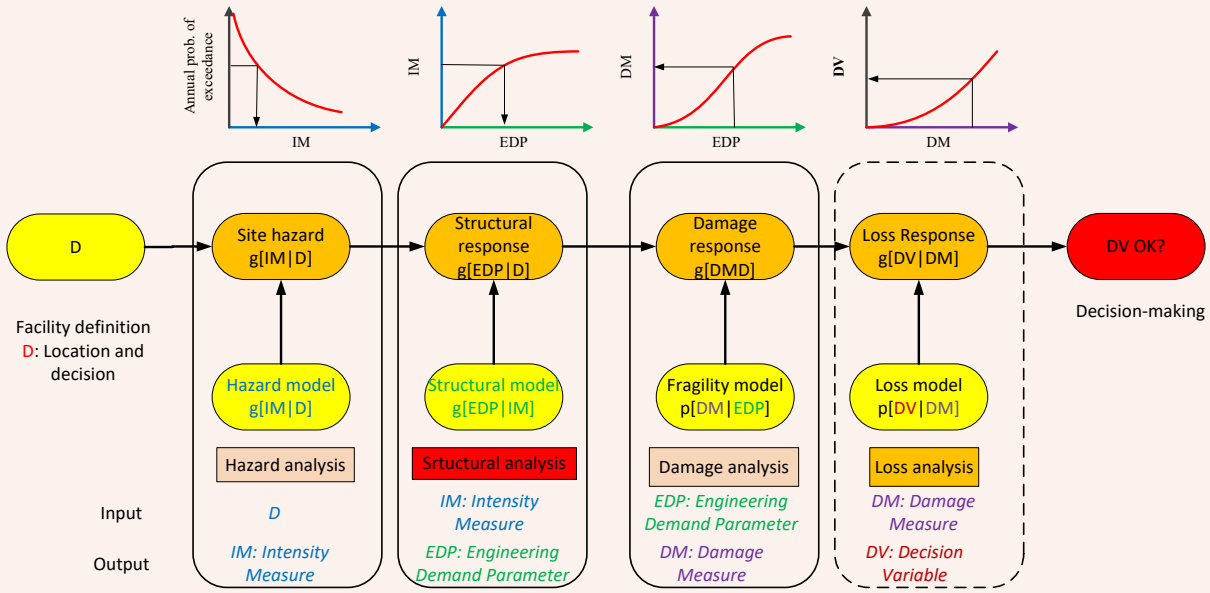


图 66.1: PBEE 的四个组成部分

1. 向上向下方法: 首先提供 PBEE 的总体概述, 然后单独讨论四个组件。
2. 底层方法: 首先详细探索每个组件, 然后在 PBEE 框架内合成。

5 本书采用了 **下向方法**. 因此, 接下来的四个章节将单独审查危险性分析, 结构分析, 损害分析和损失分析。最后一章将整合这些单元, 形成 PBEE 框架的 **culmination。

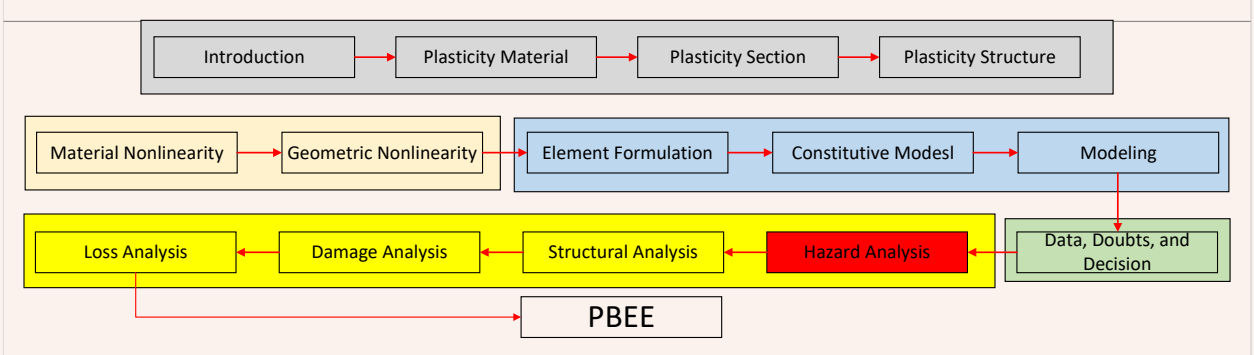
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

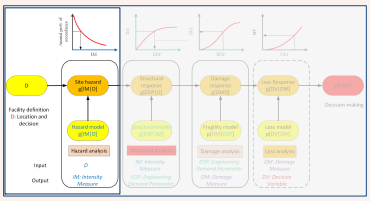
67 危险性分析

摘要

此部分解释了地震危险性分析作为地震工程的一部分的基础。根据 *Elnashai and Di Sarno, 2015* 地震工程是一项工程分支，涉及地震后果的估计和这些后果缓解。这是一个跨学科主题，涉及地震学家，结构和地质工程师，建筑师，城市规划师，信息技术人员和社会科学家。

67.1 引入 1944
67.2 重复关系 1944
67.3 注意模型 1946
67.3.1 基本 1946
67.3.2 Boore, Joyner 和 Fumel (1997) 1947
67.3.3 参数评估 1947
67.4 定位性地震 危险性分析 1948
67.5 可靠性地震 危险性分析 1950
67.6 事件时间 1952
67.7 地震危险曲线 1953
67.8 地震危险地图 1954
67.9 地震危险分裂 1954
67.10 目标反应视野 1955
67.11 斯托卡斯特地面动作模拟 1959
67.11.1 雷扎伊安和基乌里希安 (R-D) 模特 1959
67.11.2 Yamamoto 和 Baker (Y - B) 模型 1961
67.12 耐力时间刺激功能 1962
67.12.1 第一代 ETEF 1963
67.12.2 二世代 ETEF 1963
67.12.3 第三代 ETEF 1964
67.12.4 第四代 ETEF 1964
67.12.5 第五代 ETEF 1965
67.13 例题 67.1: 地震 危险性分析 1967





由 M 写的 阿明 • 哈里里 • 阿尔德比利 *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* 由 Saouma and Hariri-Ardebili, 2021

审阅稿

67.1 引入

与一个地区相关的地震风险取决于 1) 地震的可能发生, 导致一定水平的土壤震动 (地震危险) 和 2) 建筑物的结构性脆弱性。Seismic 危险性分析 需要两个单独的模型:

- 地震模型 (重复关系/法律) 描述潜在活性源区的地理分布 (塞西斯特克顿源) 各源的分布大小。
- 注意模型: 描述一个地震的效果, 源于某个特定地点, 在任何地方, 作为大小和来源到位置距离的功能。

67.2 重复关系

重复性关系表明, 在特定时间段, 例如一年内, 某种尺寸的地震发生在该来源的可能性。和 Gutenberg and Richter, 1954 频率与大小的关系被表达为图像 67.1:

$$\ln N_M = a - b\,M$$
$$\log N_M = a' - b'\,M$$

哪里 a 和 b 是模型恒定, 可以通过最小四方匹配来从地震学观测数据中进行评估。N_M 地震的重量大或等于 M 时间单位和区域单位。与之之间的关系 a 和 a' 而且 b 和 b' is:

$$a = 2.3025a', \qquad b = 2.3025b'$$

典型的价值观 a' 和 b' (Kaila and Narain, 1971):

- 西加拿大: $a' = 5.05$; $b' = 1.09$
- 日本的: $a' = 6.86$; $b' = 1.22$
- 西方美国: $a' = 5.94$; $b' = 1.14$
- 东方美国: $a' = 5.79$; $b' = 1.38$

有人可以注意到, 该 $\frac{1}{N_M}$ 代表回归期在时间单位。

记录事件与 $M < 4$ 虽然相当多, 但只剩下几年。这些数据通常在计算大度重复关系时被排除, 因为它们可能会给出误导性的偏见。因此, $M_{min} \approx 4$. 另一方面, 对于任何错误线, 有一个可实现的最大大小。M_{max} 因物理限制而产生的事件最大规模限制。因此, 重复性法则必须修改以捕获 M_{max}.

被限制的 (修改) Gutenberg-Richter 重复法可以写作为四方关系, 图 67.1:

$$N_M = N_{M_{min}} e^{-b(M - M_{min})} \; ; \quad M > M_{min}$$

哪里 $N_{M_{min}} = e^{a - b_{M_{min}}}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

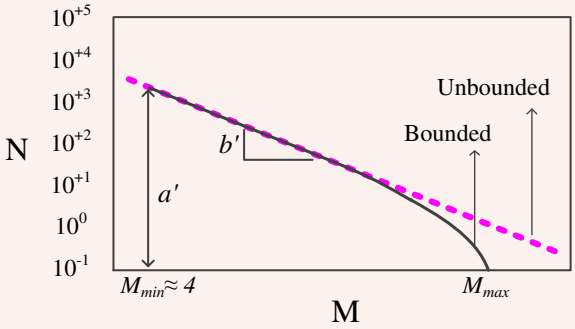


图 67.1: 和 (束缚) Gutenberg-richter 重复法

考虑到概率可以被解释为相对频率, 累积 概率分布 (与资本展示 F) 地震大小可以随后表达为:

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{M}}(M) &= P\left[\mathfrak{M} < M | \mathfrak{M} > M_{min}\right] \\ &= \frac{N_{M_{min}} - N_M}{N_{M_{min}}} = 1 - e^{-b(M - M_{min})} \end{aligned}$$

其相应的概率 密度 函数 (展示小 f) 将是:

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{d}{dM} F_{\mathfrak{M}}(M) = b e^{-b(M - M_{min})}$$

因此, 关联的 Gutenberg-Richter 通过应用上限进一步修改:

$$N_M = N_{M_{min}} \frac{e^{-b(M - M_{min})} - e^{-b(M_{max} - M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max} - M_{min})}}; \; M_{min} \leq M \leq M_{max}$$

相应的累积分配功能将成为

$$F_{\mathfrak{M}}(M) = P\left[\mathfrak{M} < M | M_{min} \leq M \leq M_{max}\right] = \frac{1 - e^{-b(M - M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max} - M_{min})}}$$

最后, 相应的概率 密度 函数是

$$f_{\mathfrak{M}}(M) = \frac{b e^{-b(M - M_{min})}}{1 - e^{-b(M_{max} - M_{min})}}$$

重复性法适用于特定 地震 来源的地质区域。因此, 地震来源的地质定义在地震危险分析中变得关键。一般来说, 一个地震来源可以被分类为下列模型之一。(Filiatrault, 2013) 图像 67.2:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

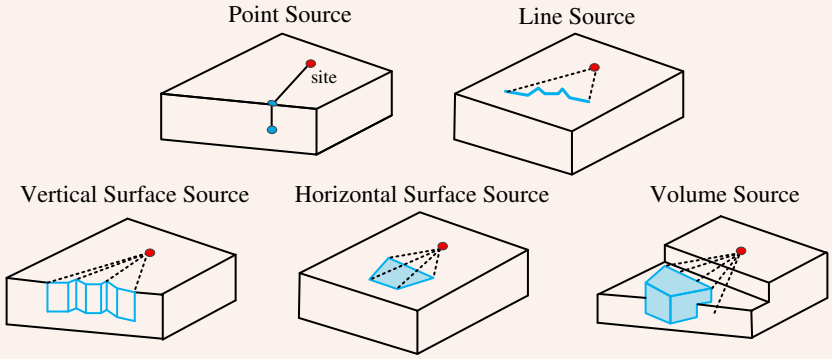


图 67.2: 地震源的分类

- 点来源: 由于火山活动而产生的地震通常发生在足够小区域, 以称为点来源。短断长的错误也可以被视为点来源。
- 线路来源: 向表面传播的故障飞机通常是精确定义的, 并在或靠近表面产生深度地震。这些来源可以被视为单维线源。
- 垂直表面来源: 可用于模拟具有定义但更深的地震区域。
- 地平线表面来源: 在地震错误的区域中不正确定义 (例如, 东北美) 个人错误不容易被确定。如果这些地区发生深度地震, 它们可以被分类为水平表面来源。
- 量来源: 在地震故障不良定义和深度地震发生的地区, 它们被大量来源所特征。焦点深度可以有所不同。

67.3 注意模型

67.3.1 基本

减轻关系是用来估计地面运动强度的不同测量, 作为大小和距离的函数。(Atkinson and Boore, 1995; Somerville et al., 1997; Youngs et al., 1997).

$$\text{IM} = f\left(M, R\right) \tag{67.1}$$

IM 是强度测量, 例如 PGA , $S_a(0.2s)$ 等等。

事实上, 有许多变量参与, 也难以正确评估。因此, 高水平的 主条目: 信任区 与缓解关系有关。注意关系有时被称为地面动作预测方程式。(GMP). **动作预测方程式** 平衡最著名的功能形式 67.1 is:

$$\begin{aligned}\log\left(\text{IM}\right) = \log(b_1) + \log\left[f_1(M)\right] + \log\left[f_2(R)\right] \\ + \log\left[f_3(M,R)\right] + \log\left[f_4(E_i)\right] + \log(\varepsilon)\end{aligned}$$

哪里 E_i 可能的源、地点和地质和地理结构的影响; ε 这是一个参数, 代表了 主条目: 信任区 还有错误。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

67.3.2 Boore, Joyner 和 Fumel (1997)

已提出数百个不同地区的 GMPE, 并为各种复杂性水平负责。Douglas, 2011 总结了所有这些关系, 从 1964 年到 2010 年。例如, 以下方程式是由 Boore, Joyner, and Fumal, 1997 对于岩石场所的光谱规则:

$$\ln(\mathrm{Y}) = b_1 + b_2(M-6) + b_3(M-6)^2 + b_5 \ln(r) + b_V \ln\left(\frac{V_S}{V_A}\right)$$

哪里

$$r = \sqrt{r_{jb}^2 + h^2}$$

$$b_1 = \begin{cases} b_{1SS} & \text{for strike-slip earthquakes} \\ b_{1RV} & \text{for reverse-slip earthquakes} \\ b_{1ALL} & \text{if mechanism is not specified} \end{cases}$$

变量 Y 是光谱 加速度 (5% 跳舞) 在 [g]; M 是瞬间的大小, V_S 是中间波速率。[m / s] 在所考虑的资料上方 30 米, 以及 V_A 是参考 Shear 波 速度 在 [m / s].

和 r_{jb} 最接近的水平距离 [km] 从地点到源的表面投影, 以及 h 是深度。各个因素都在 [km] 在桌子上列出 67.1.

和 V_S 可以从桌子上进行估计。67.2. 有人可以注意到 Y 是光谱 加速度 的平均值。因此, ln (Y) 将是预测的均值. 此外, $\sigma_{\ln(\mathrm{Y})}$ 是标准差的 ln (Y).

不同定义的位置到源距离是, 图 67.3:

- 打破距离: 从火车站到破裂表面最短的距离
- Joyner-Boore 距離: 最短的水平距离到垂直分裂的投影
- 地震性距离: 从一个地点到一个破裂表面的最短距离, 深于某些最低地震深度。
- 地震深度: 表面材料的深度 (假设近表面分裂在 sediments 是非地震性)
- 低中心距离: 从火车站到催眠中心的距离

67.3.3 参数评估

您可以从以下一般观察中获取 GMPEs, 图 67.4:

- 延伸距离减少强度测量 (Y).
- 增大度增加强度测量 (Y).
- 尺寸和距离不仅影响强度, 还影响光谱形状。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 67.1: 周期依赖的比例 Boore, Joyner, and Fumal, 1997 模型

期限	b_{1ss}	b_{1RV}	b_{1ALL}	b_2	b_3	b_5	b_V	V_A	h	$\sigma_{\ln(Y)}$
0	-0.313	-0.117	-0.242	0.527	0	-0.778	-0.371	1396	5.57	0.52
0.1	1.006	1.087	1.059	0.753	-0.226	-0.934	-0.212	1112	6.27	0.479
0.12	1.109	1.215	1.174	0.721	-0.233	-0.939	-0.215	1452	6.91	0.485
0.14	1.135	1.261	1.208	0.707	-0.23	-0.938	-0.228	1718	7.18	0.489
0.16	1.112	1.257	1.192	0.702	-0.226	-0.935	-0.248	1910	7.24	0.495
0.18	1.063	1.222	1.151	0.705	-0.216	-0.93	-0.27	2037	7.16	0.499
0.2	0.999	1.17	1.089	0.711	-0.207	-0.924	-0.292	2118	7.02	0.502
0.22	0.925	1.104	1.019	0.721	-0.198	-0.918	-0.315	2158	6.83	0.508
0.24	0.847	1.033	0.941	0.732	-0.189	-0.912	-0.338	2178	6.62	0.511
0.26	0.764	0.958	0.861	0.744	-0.18	-0.906	-0.36	2173	6.39	0.514
0.28	0.681	0.881	0.78	0.758	-0.168	-0.899	-0.381	2158	6.17	0.518
0.3	0.598	0.803	0.7	0.769	-0.161	-0.893	-0.401	2133	5.94	0.522
0.4	0.212	0.423	0.311	0.831	-0.12	-0.867	-0.487	1954	4.91	0.538
0.5	-0.122	0.087	-0.025	0.884	-0.09	-0.846	-0.553	1782	4.13	0.556
0.6	-0.401	-0.203	-0.314	0.928	-0.069	-0.83	-0.602	1644	3.57	0.569
0.7	-0.634	-0.452	-0.555	0.962	-0.053	-0.818	-0.639	1545	3.2	0.582
0.8	-0.829	-0.666	-0.76	0.992	-0.041	-0.809	-0.666	1476	2.98	0.593
0.9	-0.993	-0.848	-0.933	1.018	-0.035	-0.802	-0.685	1432	2.89	0.604
1	-1.133	-1.009	-1.08	1.036	-0.032	-0.798	-0.698	1406	2.9	0.613
1.1	-1.249	-1.145	-1.208	1.052	-0.03	-0.795	-0.706	1396	2.99	0.622
1.2	-1.345	-1.265	-1.315	1.064	-0.032	-0.794	-0.71	1400	3.14	0.629
1.3	-1.428	-1.37	-1.407	1.073	-0.035	-0.793	-0.711	1416	3.36	0.637
1.4	-1.495	-1.46	-1.483	1.08	-0.039	-0.794	-0.709	1442	3.62	0.643
1.5	-1.552	-1.538	-1.55	1.085	-0.044	-0.796	-0.704	1479	3.92	0.649
1.6	-1.598	-1.608	-1.605	1.087	-0.051	-0.798	-0.697	1524	4.26	0.654
1.7	-1.634	-1.668	-1.652	1.089	-0.058	-0.801	-0.689	1581	4.62	0.66
1.8	-1.663	-1.718	-1.689	1.087	-0.067	-0.804	-0.679	1644	5.01	0.664
1.9	-1.685	-1.763	-1.72	1.087	-0.074	-0.808	-0.667	1714	5.42	0.669
2	-1.699	-1.801	-1.743	1.085	-0.085	-0.812	-0.655	1795	5.85	0.672

表 67.2: 估计 V_S 基于网站类

NEHRP 网站类 B	1070 米/秒
NEHRP 网站 C 类	520 米/秒
NEHRP 网站类 D	250 米/秒
岩石	620 米/秒
土壤	310 米/秒

67.4 定位性地震 危险性分析

定位性地震 危险性分析 (DSHA) 使用地质学和历史地震性来识别地震来源并解释最强烈的地震 (最糟糕的情况) 每個來源都能無論時間如何生產。该程序涉及一个地震场景的开发和这个场景特征。DSHA 的应用需要四个单独步骤, 图 67.5:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

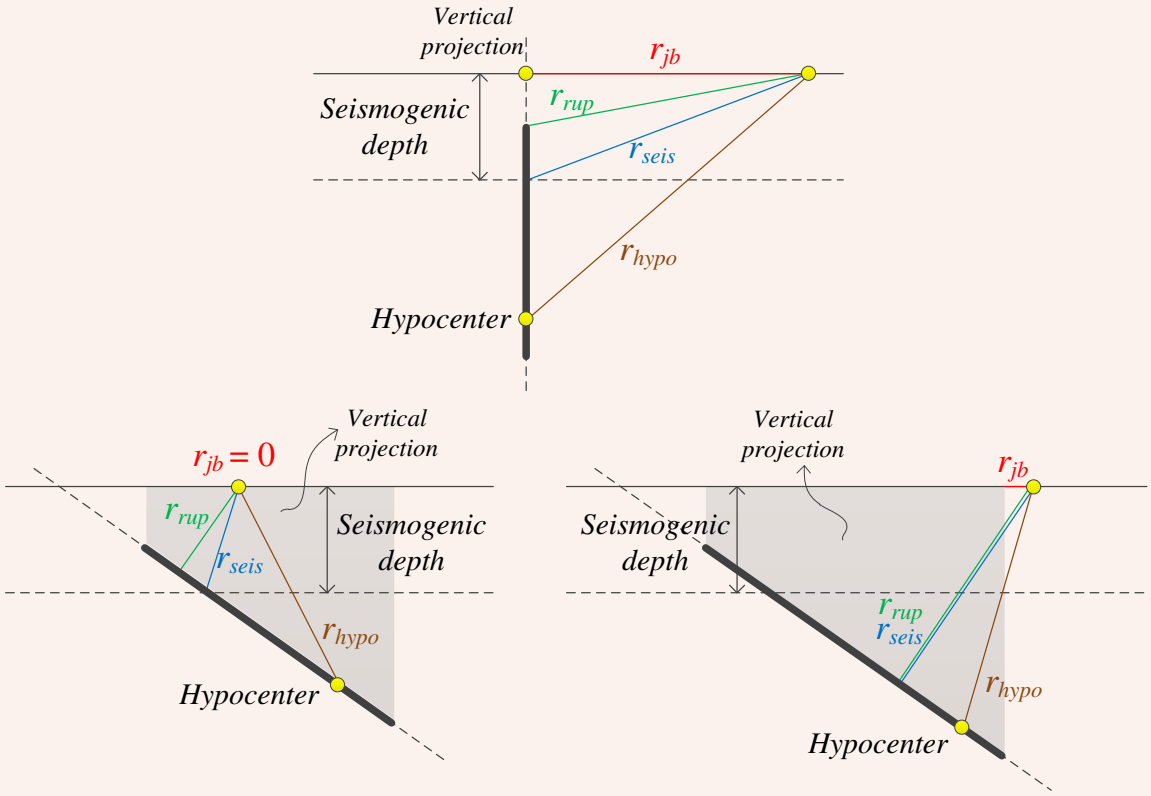
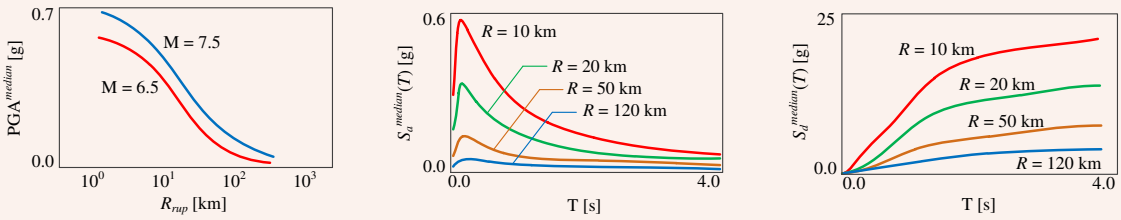


图 67.3: 区分网站到来源距离



(a) R 和 M 效应　　(b) 周期依赖的光谱进化

图 67.4: 关于 GMP 的参数调查

- 步骤 1: 识别和定义 (地质和最大大小) 所有 地震 来源能够在网站上产生显著的冲击。
- 步骤 2: 计算在步骤 1 中识别的每个来源的源到位置距离 (取决于减轻关系, 可以使用 epicentral 或 hypocentral 距离。).
- 步骤 3: 选择控制器 地震. 这就是地震将通过适当的减轻关系在网站上产生最大的震撼。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 步骤 4: 基于控制 地震 的位置设置危险。危险可以表达为光谱指数、最大地加速、最高地速度、最大的地移动等。

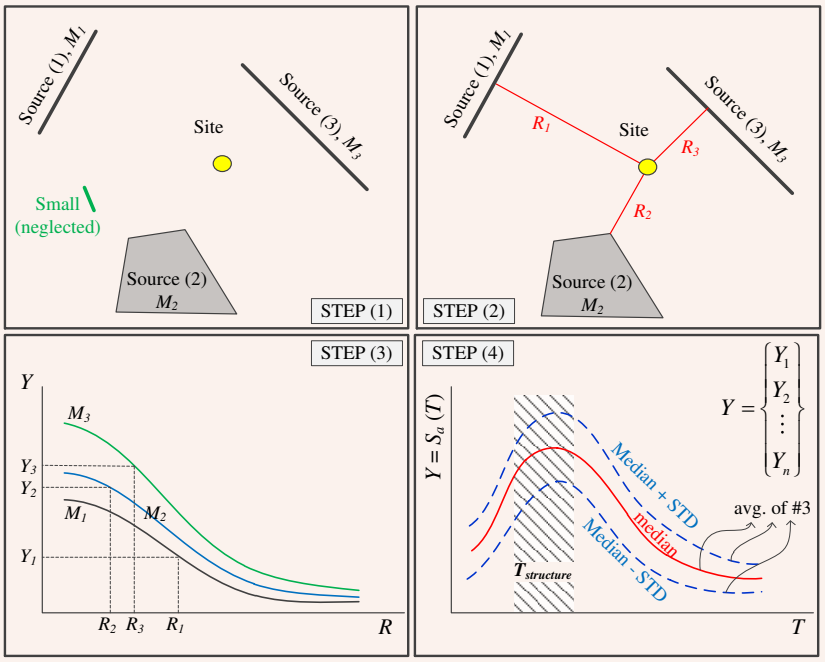


图 67.5: 定位性地震 危险性分析

- 优点:
  - 易于应用,
  - 保守的程序, 在那里特性精确定义 (线源).
- 缺点:
  - 难以应用于附近的分布式来源,
  - 主条目: 信任区 没有得到好处理,
  - 没有关于控制 地震 的概率的信息,
  - 没有关于可能在现场结构的寿命中经历的冲击程度的信息。

67.5 可靠性地震 危险性分析

可靠性地震 危险性分析 (PSHA) 由 CAA 提出。康奈尔 (1968), 用来确定美国所有地点的地震设计。它提供了一个相对的定量化设计地震, 为一个特定的位置, 在地震参数方面 (PGA、

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

PGV。$S_a(T_i)$). PSHA 考虑到与重大地震发生和影响相关的不确定性。它不能预测在活跃的地震区发生未来的地震日期、大小、地点或影响。

PSHA 方法使用 DSHA 的 单元，并添加了对某种程度的地面动作可能发生的评估。各大地震发生的可能性或频率，以及其中的任何重大地震来源和不确定性直接考虑到分析。源的任何部分可能发生的每个大小地震直接融入 PSHA。PSHA 方法的结果也可以用来确定哪些大小和距离组合是最大的危险因素。PSHA 的应用需要四个单独步骤，(形象 68.3) 下面再次显示:

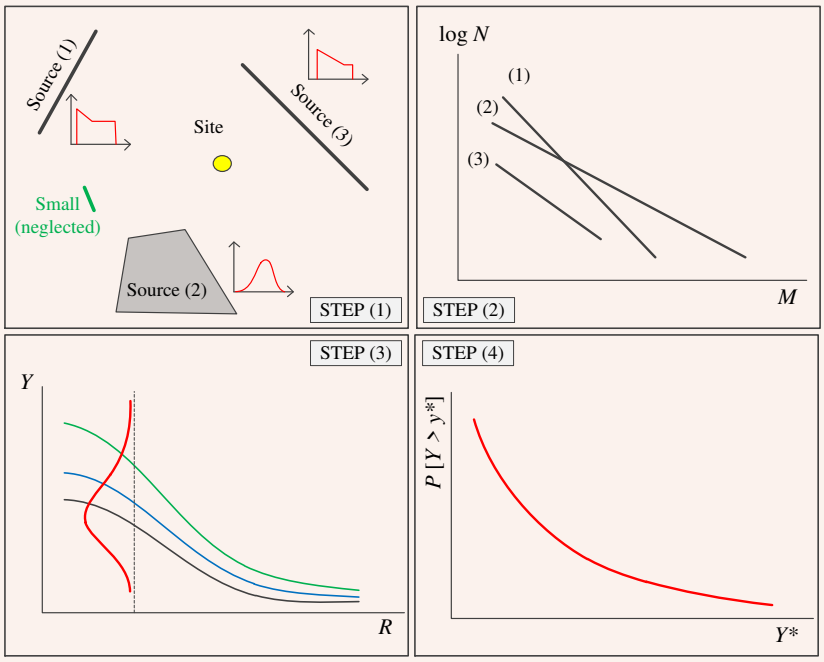


图 67.6: 可靠性地震 危险性分析

- 第一步: 定义地震源: 对于一个特定的地点，代表地震的地理区域被绘制。对于每个区域，假设地震发生的概率在整个表面区域上是相同的。(地震源).
- 步骤 2: 定义一个地震模式: 对于每个来源，类型的重复大小关系 $\ln N_M = a - b\,M$ 已定义。历史性地震被用来确定这种关系的参数。大小的切割，M_{max} 它也被定义为每个来源。
- 步骤 3: 定义减轻模式: 每个来源与一个特定地点之间确定了减轻关系。通常，同样的缓解关系适用于整个地区。
- 步骤 4: 对网站的危险曲线计算:
  - 步骤 4-1: 计算一个特定的地面运动水平的重复率: 减轻关系与大度重复关系相结合，以确定每年发生地震的数量导致在任何特定的地方选择的地面移动水平。
  - 步骤 4-2: 计算超过所选择的地面运动水平的年度概率: 用于计算在任何特定地点

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

超过所选地面移动水平的年概率, 使用理论概率分布。计算基于在步骤 4-1 中计算的重复率。

– 步骤 4-3: 持有恒定的年度过剩可能性的直线排序: 所有前一步 (1 to 4-2) 每個網站都會重複。接下来的转线为所选择的地面运动参数。这些直线是基于整个表面区域的同等年度过度可能性。

67.6 事件时间

重复率, N 又是回归期, T_R 它是从一个地区的历史性地震中获得的。预测可以通过假设地震发生的序列跟随一个理论概率分布模型来获得。

在 PSHA 中,Poisson 的概率模型 假设地震是空间和时间独立的。(地震模型) 通常是考虑的。概率, $P_n(y)_t$ 要有 n 地震产生一个值的地震参数的利率大或等于 y 在某个地方, 在一定时间内 t 被授予:

$$P_n(y)_{t|N} = \frac{(Nt)^n \; e^{-Nt}}{n!}$$

哪里 N 每年发生的地震数量 (重复率) 产生一个值的地震参数的利息比或等于 y 在网站上。

概率, $P_n(y)_{t|N}$ 至少有一個 地震 造成地震指数的利潤值高於或等於 y 在网站上, 在一定时间内 t 其次等于 1 minus 的概率, $P_n(y)_{t|N}$ 没有 地震 导致地震利率参数的值超过或相当于 y 在网站上, 图 67.7a.

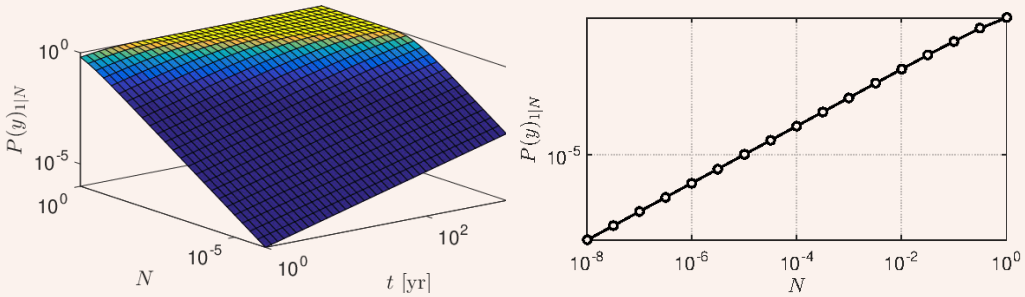
$$P(y)_{t|N} = 1 - e^{-Nt} \tag{67.2}$$

考虑到年度概率 ($t = 1$ 年), 方程式的结果为, 图 67.7b.

$$P(y)_{1|N} = 1 - e^{-N} \tag{67.3}$$

对于小价值的 N 简化模型是

$$P(y)_{1|N} = N$$



(a) 平等 67.2　　(b) 平等 67.3

图 67.7: 波士顿的概率模型

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

67.7 地震危险曲线

PSHA 的基本结果是地震危险曲线, 表明每年将超越特定地面运动水平的速度或概率。在任何危险曲线中, 垂直轴显示了年度过度的可能性。(或返回期), 和水平轴是强度测量 (IM) 参数 地震危险曲线通常是钻石和核结构风险分析的重要和有用的工具。形象 67.8 显示典型的地震危险曲线在 Pine Flat Dam 网站上。

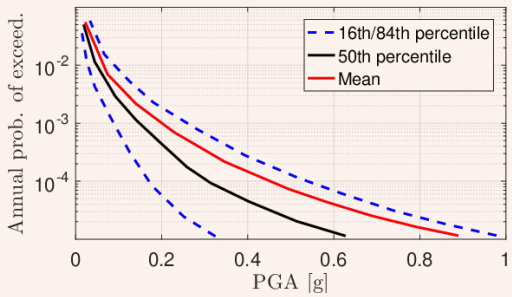


图 67.8: 中型和脆弱的地震危险曲线的样本

有不同的计算机代码, 以产生地震危险曲线。例如, *OpenSHA* **危险曲线计算机** 在 www.opensha.org/apps 它是最著名的在线代码之一。

基于 USBR 推荐 (USBR-manual, 2011), 最常见的强度测量在生成危险曲线的女士是 PGA; 然而, $S_a(T = 1sec)$ 通常用于存款, 更短的期限如 $S_a(T = 0.2sec)$ 或 $S_a(T = 0.4sec)$ 曲线通常用于混凝土女士。

有了地震分裂预测和地面动作预测方程的访问, 地震危险曲线估计如下: (Applied Technology Council, 2012a):

$$\lambda\left(Y \geq y\right) = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{m=M_{min}}^{M_{max,f}} \sum_{\varrho=1}^{N_{\varrho,f,m}} \left(\lambda\left(f, m, \varrho\right) - \lambda\left(f, m + \Delta m, \varrho\right)\right) \times \left(1 - F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)\right)$$

在哪里,

$$F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right) = \frac{1}{N_a} \sum_{a=1}^{N_a} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{exp\left(\mu_{\ln Y,a}\right)}\right)}{\sigma_{\ln Y,a}}\right)$$

- Y 是网站震动 IM 参数, 通常 $S_a(T_1, \xi = 5\%)$,
- y 这是一个特殊的价值 Y,
- $\lambda\left(Y \geq y\right)$ 是指网站可能经历强度震动的速度。y 或更大, 在这里称为地震危险,
- f 是 地震 分裂预测中的错误指数, $f = 1, 2, ..., N_f$,
- N_f 是 地震 分裂预测中的错误数量,

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- m 是瞬间的大小, 在 $\Delta m = 0.1$ 强度增加; $m = M_{min}, M_{min} + \Delta m, M_{min} + 2\Delta m, \ldots, M_{max,f}$,
- M_{min} 最小尺寸考虑, 如 5.0。
- $M_{max,f}$ 最大尺寸是错误的 f 据估计能够产生, 根据地震分裂预测,
- ϱ 是指数在错误轨道上分离的位置, 其中地震 epicenters 被分离; $\varrho = 1, 2, \ldots, N_{\varrho,f,m}$,
- $N_{\varrho,f,m}$ 错误地点的数量差不多 f 其中一个地震的尺寸 m 可以集中,
- $\lambda\left(f, m, \varrho\right)$ 是指频率的错误。f 可能造成大地震 m 或更大的位置 ϱ, 根据地震分裂预测,
- $F_{Y|f,m,\varrho}\left(y\right)$ 表示地震动强度 $Y \leq y$ 的概率，其条件为断层 f 上发生震级为 m、震中位于 ϱ 的地震，
- a 是这里使用的地面动作预测方程式的指数, $a = 1, 2, \ldots, N_a$,
- N_a 是使用的地面动作预测方程数量,
- Φ 是标准的正常累积分配功能, 按时在偏见中评估。本论文假设所有基动预测方程式都认为 Y 正常分布, 根据大小、距离、机制等。
- $\mu_{\ln Y,a}$ 自然的逻辑价值的预期 Y 下地动预测方程式 a.
- $\sigma_{\ln Y,a}$ 是自然的 Logarithm 的合计 标准差 Y 下地动预测方程式 a.

67.8 地震危险地图

国家地震危险地图通常是使用危险曲线制作的。%蒸发光谱 加速度 在 0.0 期限内排序 (PGA), 0.2, 0.3, 0.5, 0.75, 1.0 和 2.0 秒。年度重复率 $N = 0.00211$, 0.00103 和 0.00040 每年使用, 以获得相应值为 10%, 5% 和 2% 五十年内过度的可能性。过度的概率通常通过 Poisson 计算。(时间独立) 概率模型 对于美国的危险地图, 被认为是统一的坚岩位置条件, 在十字架上 30 米的平均波速为 760 米/秒。

示例地震危险地图为美国显示在图中 67.9. 美国地质调查 (乌斯格斯) 国家危险地图显示了地震震动水平的分布, 在美国发生的一些可能性。可以使用 USGS 在线应用程序创建自定义的危险地图 [1]

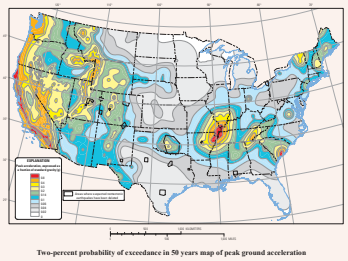
67.9 地震危险分裂

地震危险分裂区是有用的, 因为它们可以提供对不同参数在记录选择过程中的贡献的清晰视觉。此外, 它们也可以用于识别控制危险的源头。

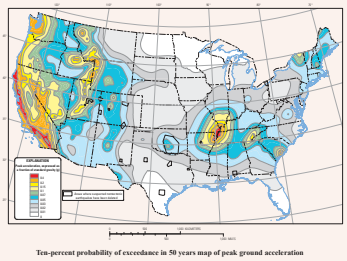
一个分裂图表显示了大小和距离的组合, 这将最为危险曲线做出贡献。它有用用于选择 地

[1] USGS Custom Hazard Map

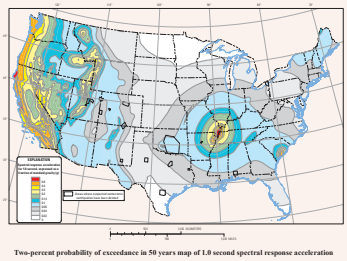
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



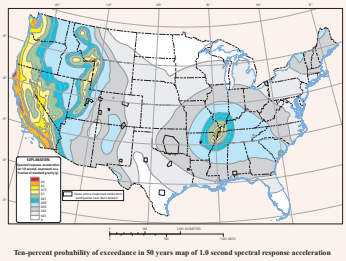
(a) 2%五十元;PGA



(b) 10%五十元;PGA



(c) 2%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$



(d) 10%/50yr; $S_a(T = 1.0s)$

图 67.9: 样品我们危险地图

震 时间历史的回应历史分析。一个分裂计划取决于兴趣的强度和超越的可能性。在实践中，分裂是通过小规模增加的数量获得的。Δm 和距离，Δr.

$$C(M,R) = \frac{N(m \le M < m + \Delta m\,;\; r \le R < r + \Delta r)}{N_{total}}$$

哪里 $N(M,R)$ 地震重复率有大小和距离周围 m 和 r，和 N_{total} 总重复率在网站上。

形象 67.10 显示科罗拉多大学布尔德的地震分裂点与不同强度测量和岩石中回归期 (USGS, 2003). 模型距离、大小和事件间的术语可以在每个案例中找到。

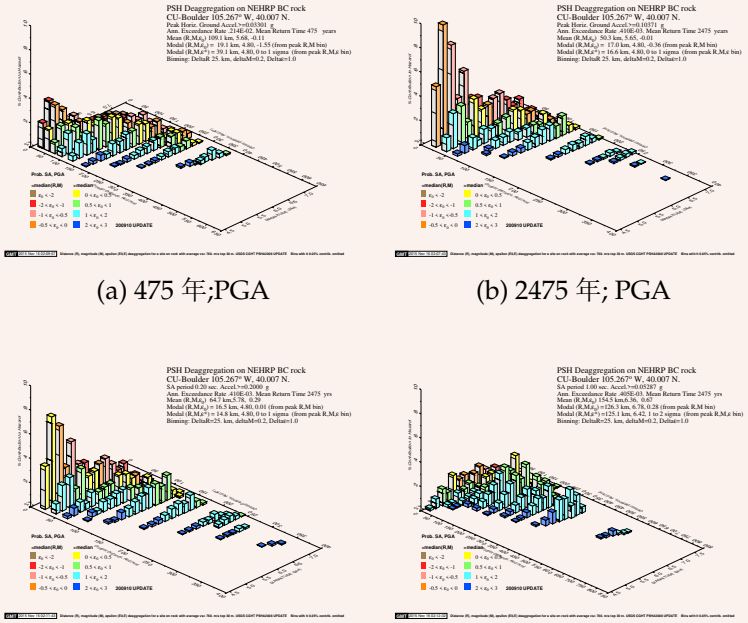
67.10 目标反应视野

每一个用于分析的几种地震危险间隔都需要一个频谱，这些频谱从地点地震危害曲线中选择。三种常见光谱是:

- 统一危险视野 (UHS)
- 条件光景 (CS)
- 视野的条件 (CMS)

UHS **统一危险视野** 它们是从地震危险曲线计算的。通过开发几次振动期间的危险曲线来

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

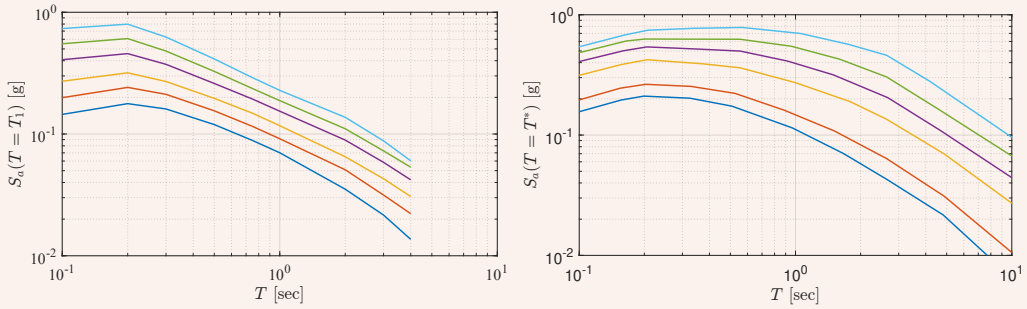


(a) 475 年;PGA (b) 2475 年; PGA

(c) 2475 年。$S_a(T = 0.2s)$ (d) 2475 年。$S_a(T = 1.0s)$

图 67.10: 彩色大学的地震分裂区样本

定义响应光谱。然后, 对于一个特定的过度概率或回归期, 指数从危险曲线为每个光谱加速度取出, 并将 “平等危险 反应谱” 被生成。因此, 反应光谱曲线为指定的利率回报期生成, 通常是 10 万年和 5 万年, 但往往在较低、中等或更高的回报期间。形象 67.11a 显示 UHS 仅在假设的 dam 地点的水平方向。



(a) UHS ($T_1 = 0.3$ s) (b) CMS ($T^* = 2.5$ s)

图 67.11: 不同反应光谱的比较

另一方面,CS 条件光谱是反应谱 , 指定不同光谱加速的概率分布在一个期范围内, 条件为光谱加速度在一个特定的 (条件) 时间, T^* (Lin and Baker, 2014). 条件光谱计算不同时期的频谱加速之间的相互关系, 以计算预期的光谱和其变量。(Baker and Jayaram, 2008). 形象 67.11b 展示不同危险级别的 CMS 样本, 为一个结构提供 $T^* = 2.5$ s.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

对于频繁的事件,UHS 和 CMS 应该有相似的形状。对于不常发生的事件,CMS 的宽度在某些时期会比 UHS 小, 因为条件中间频谱量为一个单一地震的更少保守和更现实的频谱。CS 与 CMS 的区别仅在它认为 主条目: 信任区 在光谱值中。使用 CMS 或 CS 将提供更准确的反馈估计, 对于一个特定的强度的地震震动比 UHS, 但需要额外的努力来产生这些类型的光谱。

CMS 的扩展版本, 考虑到与响应频谱以外的地面运动参数, 是通用条件强度测量。(GCIM) (Bradley, 2010). 这种方法主要是基于任何地面动作 IM 组的多变分布的构建, 条件为特定地面运动 IM 的出现。(通常是由 PSHA 获得的).

计算一个 CMS 的基本步骤, 从 (Lin and Baker, 2014), 可以如下总结:

- 确定 地震 的输入参数, 包括目标光谱 加速度。$S_a(T^*)$ 在条件期间, T^* 使用 PSHA 和相关的平均因果 地震 大小, M 距离, R, 破裂机制, 以及位置条件, θ.
- 算出逻辑的含义, $\mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i)$, 和 标准差, $\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)$, 在各个时期的加速度光谱, T_i 使用 GMPE 模型。
- 计算 Epsilon, $\varepsilon(T_i)$, (標準偏差的数量 $\ln S_a(T_i)$ 不同于由特定 GMPE 预测的平均光谱) 对于任何 $S_a(T_i)$ 价值:

$$\varepsilon(T_i) = \frac{\ln S_a(T_i) - \mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i)}{\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)}$$

- 计算条件平均逻辑光谱 加速度, $\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$ 使用相似模式 (Baker and Jayaram, 2008) (二) 在两个期间确定 epsilon 值对夫妇之间的相互关系率; $\rho\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)$, as:

$$\mu_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \mu_{\ln S_a}(M,R,\theta,T_i) + \rho\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)\sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)$$

- 计算条件 标准差 $\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)}$, as:

$$\sigma_{\ln S_a(T_i)|\ln S_a(T^*)} = \sigma_{\ln S_a}(M,\theta,T_i)\sqrt{1-\rho^2\left(\varepsilon(T_i),\varepsilon(T^*)\right)}$$

- 条件标准偏差和条件平均值的组合在所有时期确定了逻辑光谱加速值的完整分配。结果的频谱分布被称为 CS, 要与不考虑变量的 CMS 区分。

基于强度的性能评估 (IBPA)

这种方法评估了一个结构的性能, 假设它受到某种特定的冲击强度。在框架结构的情况下, 冲击强度由 5 定义。% 加速度反馈光谱。这种评估通常用于当结构受地震震动的特殊反应频谱时。(如設計 反应谱) (Applied Technology Council, 2012b) 图像 67.12.

基于场景的性能评估 (SBPA)

该方法评估结构的性能, 假设它受于与结构位置相关的特定位置发生的特定大小 地震 的影响。场景评估可能对决策者有用, 其中一个或多个已知的活跃缺陷附近的结构。基于场景的评估非常相似于基于强度的评论, 除非 主条目: 信任区 在 地震 强度中, 考虑到情况下 (Applied Technology Council, 2012b) 图像 67.12.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

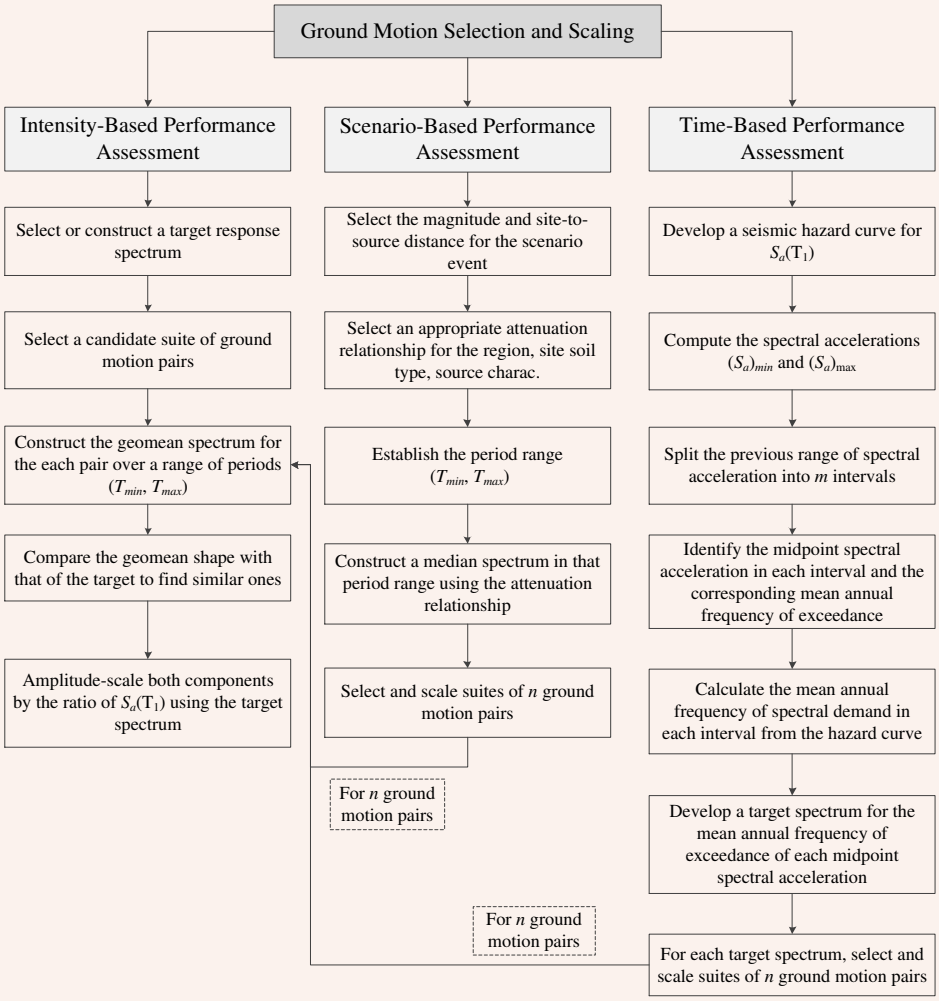


图 67.12: 比较 IBPA、SBPA 和 TBPA 的地面运动选择和规模

基于时间的性能评估 (TBPA)

该方法在一段时间内评估一个结构的性能, 考虑到可能发生在那个时期发生的所有地震以及每个事件的可能性。基于时间的评估 主条目: 信任区 在未来的地震的规模和地点以及这些地震产生的运动强度。基于单年的评估对成本效益评估有用, 用于决定替代性能标准之间。(Applied Technology Council, 2012b).

形象 67.12 比较基于上述三种方法的地面运动选择和规模步骤程序。值得注意的是, 在 TBPA 中, 图中引入的参数推荐值 67.12 是如下: $(S_a)_{min}$ = 0.05 g, 和 $(S_a)_{max}$ 与年度过度频率为 0.00002 相关。$/yr$ (也就是说, 在五万年内发生了一次事件。). 间隔的数量 m 通常推荐 8。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

67.11 斯托卡斯特地面动作模拟

虽然使用真实的地面动作记录是地震结构评估的一个标准方法, 但它可能患有有限数量的记录地面运动。(可能覆盖一个狭窄和差异化的地震危险范围) 可能需要在 PBEE 背景下使用的额外地面动作记录进行模拟。

大多数地面动作模拟技术能够基于特定的地震危险场景创建一个加速度时间系列, 使其成为 SBPA 中使用的优秀选项。(Rezaeian and Der Kiureghian, 2010), (Yamamoto and Baker, 2013). 一般来说, 这些技术可以分为两组。(Yamamoto, 2011; Taborda and Roten, 2014; Rezaeian and Sun, 2014):

- 基于物理学的模型通过明确模拟错误分裂、波传播和近面地点增强来模拟地形运动。他们需要准确的信息, 以便提供真实地面动作的良好估计。这种方法一般是昂贵的实施, 并且对于高频动作来说不太准确。(Pitarka et al., 1998; Taborda and Roten, 2014).
- 斯托卡斯特模型直接模拟地面运动时间序列, 并基于现有数据集进行实验性调节。这种方法一般是计算机上廉价的。斯托卡斯特模型可以使用下列方法之一进行构建 (Rezaeian and Der Kiureghian, 2010): 1) 通过过滤器的白色噪音 (Shinozuka and Sata, 1967), 2) 通过 Poisson 的列车脉冲通过线性过滤器 (Cornell, 1964), 3) 自我侵略的移动平均模型 (Hoshiya and Hasgur, 1978), 和 4) 进化式光谱模型 (Priestley, 1965). 要得到真正的地面动作的良好估计, 同时也需要暂时不稳定性。(宽度随着时间的推移而变化) 光谱不稳定性 (频率随着时间的变化) 在模型中应考虑。

在本节中, 解释了两种最近开发和广泛使用的斯托卡斯特地面运动模型。

67.11.1 雷扎伊安和基乌里希安 (R-D) 模特

Rezaeian 和 Der Kiureghian 开发了一款基于模块化过滤白噪音过程的完全非静态地面动作模式, 具有时间变化的参数。(Rezaeian and Der Kiureghian, 2008), (Rezaeian and Der Kiureghian, 2010). 在此模型中, 临时和光谱非站式特征完全分开, 这使得模型的参数易于识别。模型具有少数参数, 物理解释。加速度 地面运动的时间序列可以表达为:

$$\hat{x}\left(t|\boldsymbol{\theta},\mathbf{W}\right)=\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{h\left[t-t_i,\boldsymbol{\theta}(t_i)\right]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k}h\left[t-t_j,\boldsymbol{\theta}(t_j)\right]^2}}w\left(i\Delta t\right),\quad k\Delta t<t<(k+1)\Delta t$$

哪里 $\mathbf{W}=\left[w\left(i\Delta t\right);i=1,2,...,N_T\right]$ 这是一个加西亚白色噪音序列, Δt 是选择的差异化间隔, $\boldsymbol{\theta}$ 是一个 n_θ 尺寸模型参数 向量 (伊。$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,...,\theta_{n_\theta}]$), $\beta\left(t,\boldsymbol{\theta}\right)$ 是时间模块化功能, 以

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

及 $h\left[t-\tau, \boldsymbol{\theta}(\tau)\right]$ 是由于 SDOF 线性 oscillator 的 pseudo-加速度 响应而产生的单位冲动功能, 与时间依赖的 固有频率 $\omega_f(\tau)$ 和 阻尼比 $\zeta_f(\tau)$ 在哪个 τ 指示脉冲的时间。

$$h\left[t-\tau, \boldsymbol{\theta}(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{\omega_f(\tau)}{\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}} \exp\left[-\omega_f(\tau)\zeta_f(\tau)(t-\tau)\right] & \\ \qquad \sin\left[\omega_f(\tau)\sqrt{1-\zeta_f^2(\tau)}(t-\tau)\right] & \tau \leq t \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

时间依赖的频率函数采取线性形式, 而蒸发函数被认为是恒定的:

$$\omega_f(\tau)=\omega_{mid}+\omega'\left(\tau-t_{mid}\right) \; ; \qquad \zeta_f(\tau)=\zeta_f$$

哪里 ω_{mid} 指的是中央频率。ω' 是频率的变化, 以及 t_{mid} 是强烈运动时间的中期 (阿里亚斯的强度达到 45% 其最终价值).

对于模块化功能, 选择一个由三个参数控制的伽马型函数:

$$\beta\left(t, I_A, \alpha_2, \alpha_3\right)=\underbrace{\sqrt{I_A \frac{(2\alpha_3)^{2\alpha_2-1}}{\Gamma\left(2\alpha_2-1\right)}}}_{\text{intensity}} \underbrace{t^{\alpha_2-1}}_{\text{shape}} \underbrace{e^{-\alpha_3 t}}_{\text{duration}}$$

哪里 $\Gamma(.)$ 是 Gamma 功能。I_A 是大阿里亚斯的强度, 以及 α_2 和 α_3 是形状和长度控制参数, 可以通过有效的长度与问题的物理学联系起来。$D_{5-95}=I_A^{95\%}-I_A^{5\%}$, 和 t_{mid} 相应。最后, 模拟函数是高通过滤以确保零余 速度。

地面运动模型参数 向量 可以总结为
$\boldsymbol{\theta}=\left\{I_A, D_{5-95}, t_{mid}, \omega_{mid}, \omega', \zeta_f\right\}$. 预测性关系已经为每个模型参数开发, 通过将斯托卡斯特模型匹配到下一代减轻的子组。(吉他) 强大的动作数据库。这些预测模型描述了 $\boldsymbol{\theta}$ 在以下地震和网站特性方面: 1) 瞬间大小 (M_w), 2) 最接近分裂的距离 (R_{rup}) 在 [km], 3) 速度的顶部 30 米土壤 (V_{S30}) 在 [m / s], 和 4) 错误机制 (F_{mech}) 或者是旋转或逆转。实验方程式采取以下一般形式:

$$\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right]=\mu\left(M_w, R_{rup}, V_{S30}, F_{mech}, \mathbf{c}\right)+\eta+\sigma$$

哪里 θ 这是一个模型参数。$\Phi[.]$ 是标准加西累积分配功能。(CDF), 和 F_θ 是 CDF 的 θ (以实验性为定义的). 随后, $\Phi^{-1}\left[F_\theta(\theta)\right]$ 将模型参数从物理空间转化为标准正常空间。μ 是预测的值作为地震和网站特征的一个功能, 以及 $\mathbf{c}$ 代表 向量 的回归率。此外, η 和 σ 通常分布为零的随机变量, 并参考事件间和事件内错误。回归率、错误术语的变异和模型参数之间的相互关系可在 (Rezaeian and Der Kiureghian, 2010).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

67.11.2 Yamamoto 和 Baker (Y - B) 模型

Yamamoto 和 Baker 使用 wavelet 包转型 (WPT) (这是 DWT 的分离波转换的扩展版本。) 以量化时间和频率特征的时间序列, 以产生斯托卡斯特地动作 (Yamamoto, 2011), (Yamamoto and Baker, 2013). WPT 增加了时间和频率域的分辨率控制的灵活性。此外, 基本功能是正角的, 这使得时间序列可以轻松重建。

前方和逆 WPT 被定义为:

$$c^i_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^i_{j,k}(t)dt \; ; \quad x(t) = \sum_{i=1}^{2^j}\sum_{k=1}^{2^{N-j}} c^i_{j,k}\psi^i_{j,k}(t)$$

哪里 $x(t)$ 是时间序列, 2^N 是时间序列中的数据点数量, $c^i_{j,k}$ 标志着 i^{th} 各式各样的包装在 j^{th} 尺寸参数和 k 是翻译参数, 以及 $\psi^i_{j,k}$ 是 WPT 功能。

WPT 以时间序列为结果, 有少数大宽的瓦莱特包量和许多小宽。Yamamoto 和 Baker 利用此优势, 并定义了两组主要 (包含大约 70% 地球运动中的全部能量) 和小 (其余的 30 个% 关于能源) 加密包的定量。因此, 总瓦雷特包量是这两个组的组合:

$$\left|c^i_{j,k}\right|^2 = \left|c^i_{j,k,maj}\right|^2 + \left|c^i_{j,k,min}\right|^2$$

在哪个 $c^i_{j,k,maj}$ 和 $c^i_{j,k,min}$ 是主要和小型瓦莱特包的比例。

该模型需要 13 个参数, 以充分定量加速度时间系列的时间和频率特性。这些参数在这里被分类, 但是, 对于详细的表述读者提到 (Yamamoto and Baker, 2013).

- 主要群体: 1) 时间中心 $E(t)_{maj}$, 2) 时间变异 $S^2(t)_{maj}$, 3) 光谱中心 $E(f)_{maj}$, 4) 光谱变量 $S^2(f)_{maj}$, 5) 时间与频率之间的关系 $\rho(t,f)_{maj}$, 6) 平面宽度的平均值 瓦莱特包量 $E(a)_{maj}$,
- 小型小组: 7) 时间中心 $E(t)_{min}$, 8) 时间变异 $S^2(t)_{min}$, 9) 光谱中心 $E(f)_{min}$, 10) 光谱变量 $S^2(f)_{min}$, 11) 时间与频率的关系 $\rho(t,f)_{min}$,
- 12) 瓦莱特包的宽度随机性 $S(\xi)$, 和 13) 集成四方 加速度 E_{acc}.

大组的瓦莱特包与小组的包相比, 非常随机。因此, 瓦莱特包的平面宽度和时间频率位置分别模型。

$$a_{maj} \sim \text{Exponential}\left[E\left(\left|c^i_{j,k,maj}\right|^2\right)\right]$$
$$\left[t_{k,maj}, f_{i,maj}\right] \sim \text{Lognormal}\left[M_{maj}, \Sigma_{maj}\right]$$

哪里 a_{maj} 是主要组中的瓦莱特包因子的平方宽度, $t_{k,maj}$ 和 $f_{i,maj}$ 是主要波线因子的时间和频率位置的中心, 以及 M_{maj} 和 Σ_{maj} 被定义为:

$$M_{maj} = \begin{bmatrix} E\left(\ln t_{k,maj}\right) & E\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$
$$\Sigma_{maj} = \begin{bmatrix} S^2\left(\ln t_{k,maj}\right) & Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) \\ Cov\left(\ln t_{k,maj}, \ln f_{i,maj}\right) & S^2\left(\ln f_{i,maj}\right) \end{bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

另一方面, 小组的瓦雷特包可以根据时间、频率和废物的异常正常功能进行估计。(只需要五个参数来控制):

$$\left|c^{i}_{j,k,min}\right|^{2} = \frac{1}{2\pi S\left(\ln t_{k,min}\right) S\left(\ln f_{i,min}\right)\sqrt{1-\rho^{2}\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)}}$$
$$\times \frac{1}{\ln t_{k,min}.\ln f_{i,min}} \exp\left[-\frac{W_1^2 - 2\rho\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right) W_1 W_2 + W_2^2}{2\left(1-\rho^{2}\left(\ln t_{k,min}, \ln f_{i,min}\right)\right)}\right] \times \xi_{k,i}$$

哪里 $t_{k,min}$ 和 $f_{i,min}$ 它们是小波线因子时间和频率位置的中心, ρ 是相似的比例, $\xi_{k,i}$ 是用来定义的 Lognormal 随机变量 , 并且有两个中间变量被定义为 $W_1 = \frac{\ln t_{k,min} - E(\ln t_{k,min})}{S(\ln t_{k,min})}$ 和 $W_2 = \frac{\ln f_{i,min} - E(\ln f_{i,min})}{S(\ln f_{i,min})}$.

最后, 为了为一个特定的地震场景创造一个地形动作,13 个参数通过两阶段退缩分析与这些场景参数相连。从 NGA 数据库中记录的大量地面动作被用来估计参数, 使用最大概率估计和以下功能形式:

$$Y = \alpha + \beta_1 M_w + \beta_2 \ln M_w + \beta_3 \exp M_w + \beta_4\left(R_{hyp} - R_{rup}\right) + \beta_5 \ln\sqrt{R_{rup}^2 + h^2} + \beta_6 \ln V_{S30} + \eta + \sigma$$

哪里 Y 是模型参数的自然逻辑, 并且 σ 和 η 分别是内部和间事件的废物。参数 h 要避免预测极大的价值。Y 对于小值的 R_{hyp} (催眠距离), 以及参数 α 和 β_i 这些是可见的回归率。(Yamamoto, 2011) 和 (Yamamoto and Baker, 2013).

67.12 耐力时间刺激功能

实用使用耐力时间 (ET) 方法需要适当的耐力时间刺激功能 (艾特夫) 因此, 结果是一致的分析。本节强调了不同 ETEF 世代, 以及其生产的客观功能。[2]. 在耐用时间方法中,ETEF 作为动态 荷载 输入功能使用。在 ET 方法中, 所有强度水平都以单一的刺激功能覆盖。换句话说, 每一次耐力时的兴奋都与某个特定的强度水平相匹配。ETEF 通常是以便它们与所需的设计光谱或地面动作和强度集合相匹配, 随着时间的推移而增加。变形协调 具有地面动作和强化, 是 ETEF 的两个主要特征, 在模拟这些人工功能时必须考虑。ETEF 的强化属性通过应用 amplitude 增幅配置来获得。宽度增加的配置可以采取各种形式。在初始耐力时间的兴奋, 线性配置 (在其中最大 加速度 是直接与时间相对的) 被采用了。Exponential 形式也被认为是模拟累积绝对 速度 一致的耐久时间刺激。(Mashayekhi et al., 2018b).

变形协调 具有地面动作, 是耐久性时间刺激的另一个重要特征。地面动作有三个主要特征: 强度, 频率内容和持续时间。为了模拟有效的耐力时间兴奋, 这三个特点必须考虑。由于频率内容和动作宽度在响应光谱中适当反映, 因此在模拟过程中考虑响应风格意味着宽度和频率含量适当考虑。

上述要求被称为模拟限制。模拟限制的数量通常远高于变量的数量, 无论使用哪种变量定义方法, Mashayekhi, Estekanchi, and Vafai, 2019a; Mashayekhi, Estekanchi, and Vafai, 2019b. 由于 解析 方法不提供实用的 ETEF 模拟程序, 因此采用优化方法。

[2]此篇文章与教授合作编写 H 和 E 斯特丹和博士 先生 R 马歇克。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在本节中, 我们解释了 ETEF 的产生。现有 加速度 荷载 函数在目标频谱、期限范围、客观函数、时间步骤、长度和优化算法方面有所不同。这些兴奋通过耐力时间方法在线可用 website. 在 ETEF 生产的进展途径中, 可以区分五代耐久时间刺激。

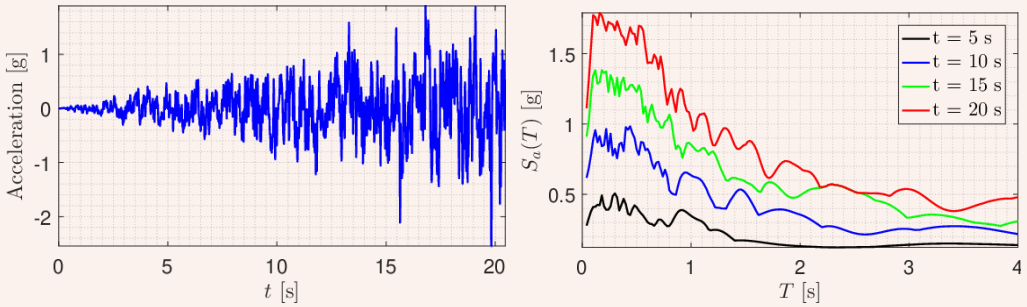
67.12.1 第一代 ETEF

第一代兴奋只产生, 以引入 ET 方法的基本概念。此代的 ETEF 不适合实用使用。在模拟第一代兴奋时, 在宽度和频率内容中使用了非站式随机模式的概念。在这种方法中, 刺激功能是通过总结一个最终数量的和谐功能表达为:

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

哪里 N 是和谐功能的数量, ω_i 和 ϕ_i 是角频和阶段天使 i^{th} 其功能, 以及 A_i 是频率宽度。

考虑到一个随机的兴奋与零平均和标准差的加西分布。加速数据点的数量选择为 2048, 最大加速率为 1.0 g。采用适当的调节功能。为了消除不必要的频率范围, 激动被反向 Fourier 转换技术过滤。目标是模拟一个符合特定频谱的兴奋。目标频谱是一种典型的地震代码设计频谱。该信号被修改, 以适应加速度光谱功能, 通过调整其 Fourier 光谱宽度。此程序重复, 直到获得可接受的通讯。结果的静态加速图随后通过应用线性配置函数来修改, 使其在不同时间间隔上加速至顶峰。这些加速图很好用来展示耐久时间分析的概念。样品 加速度第一代时间史显示在图中 67.13a.



(a) 加速度 时间史; ETA20ac01 (第一代)　　(b) 回复光谱; ETA20a01 (第二代)

图 67.13: 模型 ETEF

67.12.2 二世代 ETEF

在第二代中, 加速度和位移光谱在模拟过程中被考虑。目标光谱可以是地面动作集的平均光谱, 或符合代码的光谱。在第二代, 优化技术首次用于模拟新的 TEF。在优化背景下, 方程式在客观功能方面表达。该系列的目标功能显示在方程式中 67.4. 加速和移动光谱在客观功能中被考虑。

$$F(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \left[S_a(T_j, t_i) - S_{aC}(T_j, t_i) \right]^2 + \alpha \left[S_u(T_j, t_i) - S_{uC}(T_j, t_i) \right]^2 \right\} \tag{67.4}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 a_g 是耐力时间的兴奋正在寻找, 以及 α 是相对重量参数, 可以根据加速与目标值的偏差调整被归咎于转移偏差的有效罚款。高值的 α 使目标功能对 位移 反应差异更敏感, 低值 α 使目标功能对加速度光谱差异更敏感。$S_{aC}(T,t)$ 是目标 加速度 响应光谱及时 t 和时间 T 可以编码设计加速度频谱或地面动作套件的平均频谱。$S_{uC}(T,t)$ 是目标 位移 响应光谱及时 t 和时间 T. $S_u(T,\tau)$ 和 $S_a(T,\tau)$ 是 位移 和 加速度 响应光谱的耐力时间刺激在期间 T, 和时间 τ. t_{target} 是目标时间, 即耐力时间兴奋产生目标频谱的时间。选择适当的目标时间也应考虑。在一般非线性情况下, 如果目标时间太低, 结构可能没有时间通过合理数量的非线循环。另一方面, 如果目标时间太高, 则周期数量将变得不现实。

非线性响应匹配不包括在产生二代耐力时间刺激。但是, 通过在第二代刺激模拟中包含长时间, 它们可以用于非线性动力分析的合理准确度。ETA20a01 的 加速度 光谱, 这是第二代第一系列, 显示在图中 67.13b. 可以看到, 这种兴奋的加速度光谱是线性增加的。

67.12.3 第三代 ETEF

在第三代模拟中, 还考虑了非线性反应的变形协调。类似于模拟第二代耐力时间刺激的表述, 第三代通过定义强度因素进行模拟。R 如下所述:

$$S_u(T,t,R) = \max\left(|u(\tau)|\right); \quad \tau \in [0,t]$$

$$S_{uT}(T,t,R) = \frac{t}{t_{target}} \times S_{uT}(T,R) \times \frac{T^2}{4\pi^2}; \quad \tau \in [0,t]$$

$$F(a_g) = \sum_{T_k=0}^{T_k=T_{max}} \sum_{R_j=0}^{R_j=R_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_u(T_k,R_j,t_i) - S_{uT}(T_k,R_j,t_i)\right]^2$$

与第二代相反, 每个时期的计算目标功能都需要一个单一的动态分析, 每时期的第三代计算目标函数都需要单独的动画分析。这个事实使模拟第三代耐力时间兴奋变得更加复杂。

67.12.4 第四代 ETEF

在第四代中, 与寿命相关的参数也包括在模拟程序中。虽然加速和移动光谱是地面动作的强度和频率内容的好代表, 但为了正确量化地面运动, 必须考虑不仅强度与频率含量, 而且长度特征。雖然在文學中提出了多種定義的持續性, 但地震工程 (O'Hara and Jacobson, 1991; Wang et al., 2016; Bommer and Martinez-Pereira, 1999; Bolt, 1973), 累积绝对 速度 (卡夫) 它被列入了第四代 TEF 的模拟。Campbell and Bozorgnia, 2012 建议 CAV 可以用来快速评估对传统结构的一般类型的潜在损害。CAV 是数学上代表的 $CAV = \int_0^{t_{max}} |a(t)|\, dt$, 在哪里 $a(t)$ 是 加速度 时间历史, 以及 t_{max} 是长度。

平衡的客观功能 67.5 被用来模拟 "第 40 章" 系列 第一三個條件以相對的方式計算剩余物品, 其餘三個則以絕對的方式计算剩余。Mashayekhi et al., 2018b 它表明, 绝对和相对的术

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

语的组合会导致更有效的耐久性时间兴奋。这些目标功能整合了整个时间和期限范围内的废物。值得注意的是，加速光谱、线性移动光谱和 CAV 在这些客观功能中被考虑。

$$F_{CAV-M}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{S_a(T_j,t_i)-S_{aC}(T_j,t_i)}{S_{aC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{S_u(T_j,t_i)-S_{uC}(T_j,t_i)}{S_{uC}(T_j,t_i)}\right]^2 \\ + \left[\frac{CAV(t_i)-CAV_C(t_i)}{CAV_C(t_i)}\right]^2 \\ + \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ + \alpha_{S_u}\left[S_u(T_j,t_i) - S_{uC}(T_j,t_i)\right]^2 \\ \alpha_{CAV}\left[CAV(t_i) - CAV_C(t_i)\right]^2 \end{array} \right\} \tag{67.5}$$

哪里 a_g 是加速度时间历史。

这些客观功能 a_g 作为入口；α_{S_u} 和 α_{CAV} 重量因素是控制与位移光谱和 CAV 相应相关的废物的贡献。

随着时间的推移，控制加速度光谱的形状的强化配置不需要线性。对于这个系列，使用了一个模糊的个人资料。ETA40lc01 的 CAV 与图中的目标相比 67.14 他们之间发生了相当大的冲突。

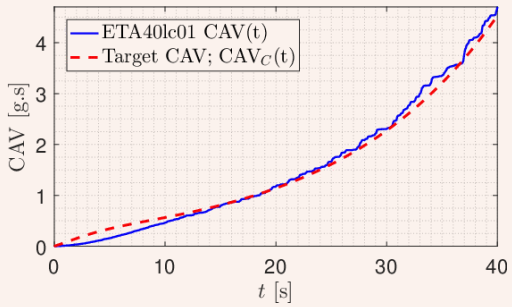


图 67.14: 以太 40lc01 对目标

67.12.5 第五代 ETEF

在第五代，吸收的歇斯底里能量也被纳入生成过程。值得一提的是，吸收的歇斯底里的能量需求被用作累积损害相关参数的指标。采用加速光谱的线性增强功能，并数学计算非线性移动光谱和歇斯底里能量的相应增强功能。计算非线性位移和歇斯底里的能量需求增强功能

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

的详细程序可以找到在 Mashayekhi et al., 2018a. 平等 67.6 是对象函数, 计算耐力时间刺激的动态特征和目标地面动作之间的方形差异:

$$F_{ETEF}(a_g) = \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left[S_a(T_j,t_i) - S_{aC}(T_j,t_i)\right]^2 + \sum_{\mu_k=1}^{\mu_k=\mu_{max}} \sum_{T_j=0}^{T_j=T_{max}} \sum_{t_i=0}^{t_i=t_{max}} \left\{ \begin{matrix} \alpha_{u_m} \left[u_m(\mu_k,T_j,t_i) - u_{mC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \\ +\alpha_{E_H} \left[E_H(\mu_k,T_j,t_i) - E_{HC}(\mu_k,T_j,t_i)\right] \end{matrix} \right\} \tag{67.6}$$

哪里 $a_g(t)$ 是 加速度 时间历史, $S_a(t,T)$, $u_m(t,T,\mu)$ 和 $E_H(t,T,\mu)$ 具有耐久性时间刺激的动态特征, 以及 $S_{aC}(t,T)$, $u_{mC}(t,T,\mu)$ 和 $E_{HC}(t,T,\mu)$ 是地面动作的动态特征。E_H 它是催眠能量, 而且 u_m 是非线性反应 位移. 形象 67.15 ETA20kd01 的歇斯底里能量与目标在四个不同的时期进行比较。

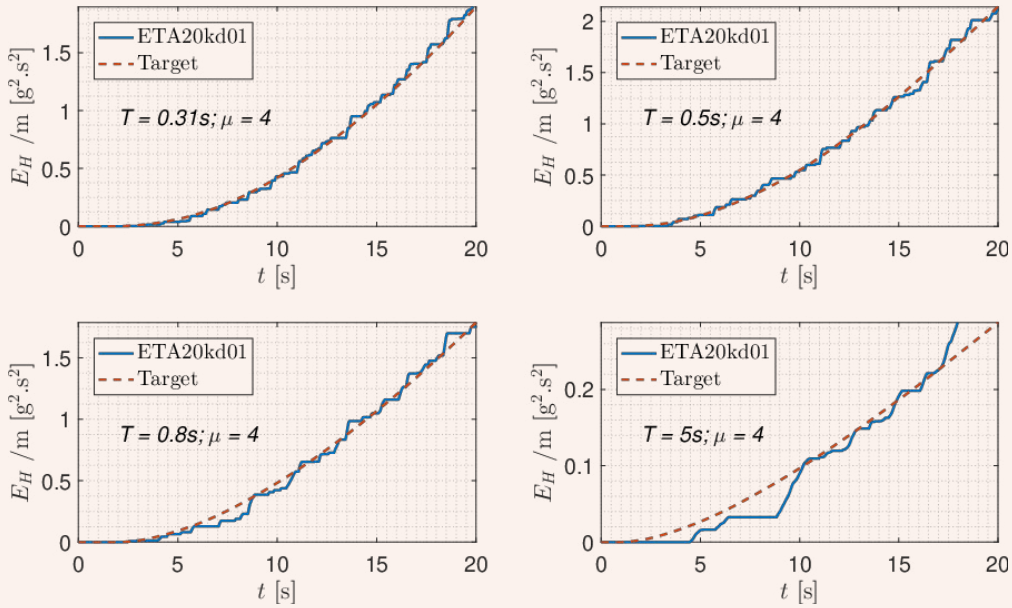


图 67.15: 天体能量 eta20kd01 vs 目标

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



波佩安地震,*Fernando Botero*,*1999* 年 博地罗博物馆, 哥伦比亚

67.13 例题 67.1: 地震 危险性分析

本例由 *OpenAI*, *2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

此示例显示一个概率性地震 危险性分析 (PSHA) 加利福尼亚州洛杉矶的 30 层高楼发生地震衰退。目标是估计不同峰地水平的年度过度可能性 加速度 (PGA) 并确定有影响地震风险的地震场景。

Seismotectonic 定位

建筑地点位于距离圣安德烈斯错误 50 公里, 这是一个主要的罢工漏洞与产生 M7.8 - 8.2 地震的历史。额外的适度错误 (M5.5 – 6.5) 它在 20 公里的位置。该地点被列为坚固的土壤 (网站 C 级) 平均波速率 $V_{S30} = 600 \text{ m / s}$ 。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

地震模型 (重复关系)

根据《古滕贝格法》:

$$\log N_M = a' - b'M \tag{67.7}$$

在哪里:

- 区域地震性参数:
  - 加利福尼亚: $a' = 6.2, b' = 1.1$
- 最小尺寸: $M_{min} = 4.5$
- 最大尺寸: $M_{max} = 8.0$
- 重返一个大小的时期 $M \geq 7.5$ 活动:200 年
- 年度发生率 $M \geq 6.0$ 地震: 0.03 事件/年

注意模型 (GMP)

使用 Boore, Joyner 和 Fumal (1997) GMP 的:

$$\ln \text{PGA} = b_1 + b_2(M - 6) + b_5 \ln(r_{jb} + h) \tag{67.8}$$

在哪里:

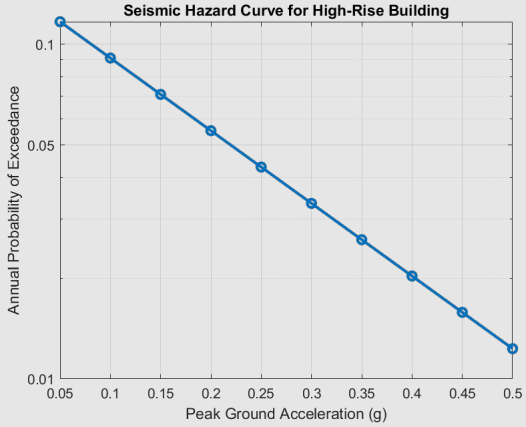
- $M = 7.5$
- Joyner-Boore 距離: $r_{jb} = 50$ km
- 深度时间: $h = 5.0$ km
- 预测 PGA: $0.22g$ (平均值)

地震 危险性分析

地震危险曲线描述了不同高地水平的超越可能性 加速度 (PGA) 在网站上。危险曲线是通过一个外观的分裂模式来产生, 以便超越概率:

$$P(Y \geq y) = \lambda_0 e^{-by} \tag{67.9}$$

哪里 λ_0 是基于超越的概率和 b 这是衰退率。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

下表显示不同地面运动水平的年度过度可能性。

PGA (g)	年度过度可能性
0.05	0.12
0.1	0.06
0.2	0.015
0.3	0.003

地震危险分裂

地震危险分裂识别最有可能的地震场景, 在特定的频谱加速水平上为危险做出贡献。这种分析对于选择结构设计的代表性地面动作至关重要。

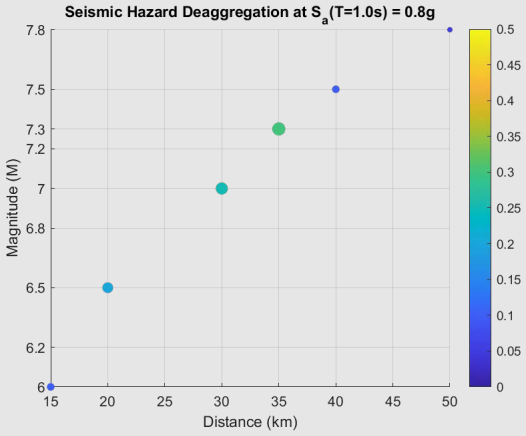
为 $S_a(T = 1.0s) = 0.8g$, 最有可能的地震场景是:

- **尺寸:** $M = 7.3$
- **距离:** $R = 35$ km
- **破裂类型:** 罢工 Slip

对危险的额外贡献包括:

- $M6.5$ 在 20 千里贡献 20%
- $M7.8$ 在 50 千里贡献 30%
- $M7.0$ 在 40 千里贡献 50% (主导场景)

下面的分裂图表显示不同大小距离对危险水平的相对贡献。



讨论和工程影响

危险曲线和分裂分析的结果为地震设计提供了有价值的洞察力:

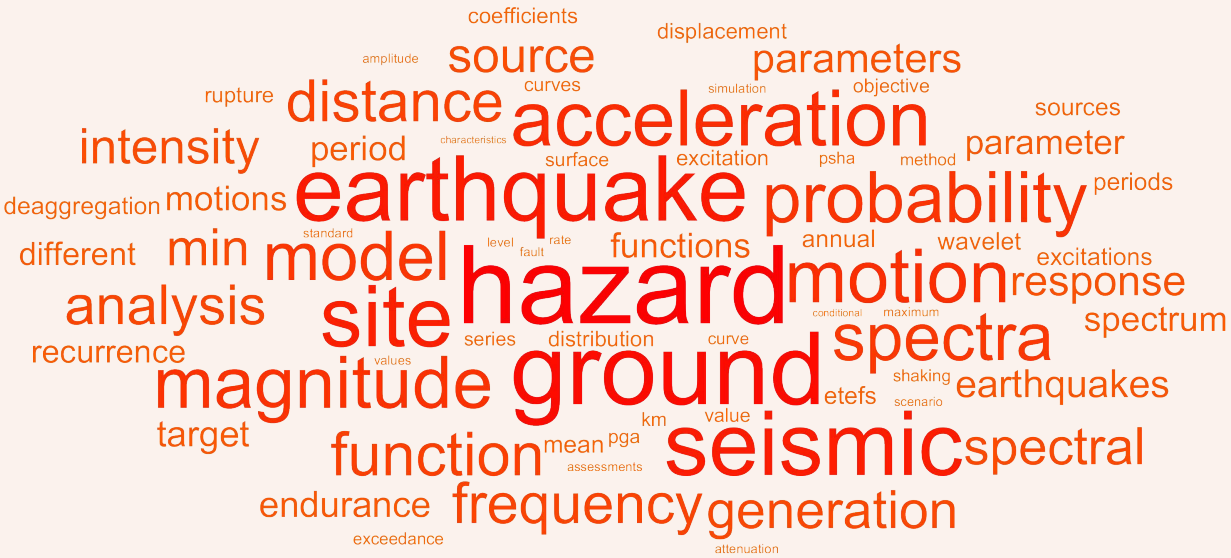
- 最关键的 地震 场景相当于一个 $M7.3$ 事件发生在 35 公里, 表明附近地区的地震影响必须考虑。
- PGA = 0.2g 的年度过剩概率为 1.5%, 可能影响基于目标风险水平的地震设计决策。
- 解体结果有助于选择非线性时程分析的地面动作记录, 以确保现实的结构反应预测。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

结论

PSHA 的结果表明, **最严重的危险** 建筑物的高级别是从 $M7.3$ 地震发生在距离 35 公里。这些结果帮助工程师确定适当的 **地震设计参数** 结构性安全。危险曲线为评估不同地面动作强度的概率提供了基础, 而分裂分析则确定了主导的地震场景, 有助于地震风险。

MATLAB® 代码在 §I.7.1.



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

68 地震 危险性分析 II

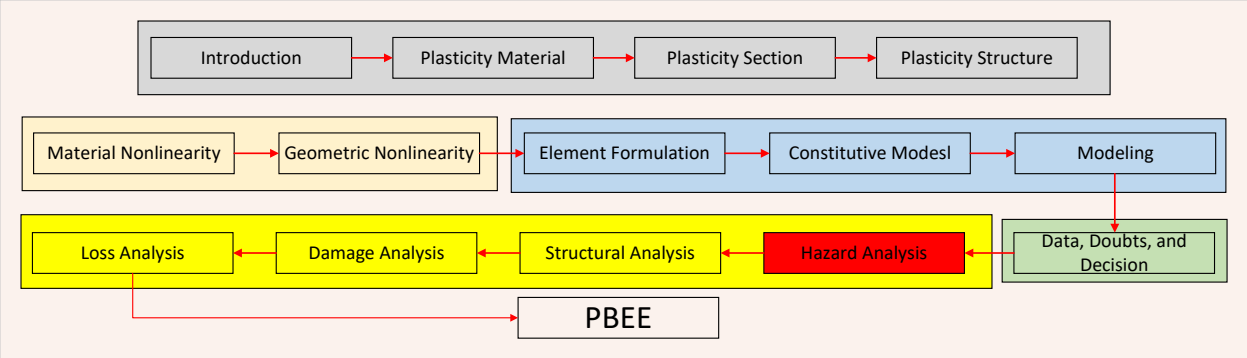
摘要

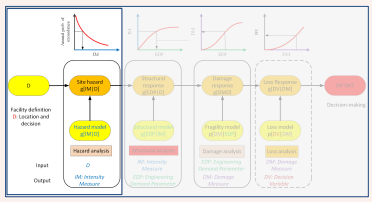
基于地震危险性分析的基本概念介绍在章节 67 该章节将讨论的延伸, 通过处理全面风险评估所必需的关键方面。

它介绍了用于量化地面运动强度的年度过度率的概率框架, 并探讨危险曲线的建设和解释。

此外, 它还包括工程地震风险分析 *(ESRA)* 评估地震危险对结构性能和耐力的影响。该章节还审查了回归时期在地震设计中的作用, 逻辑树的应用 主条目: 信任区 量化, 以及概率性地震的交叉点 危险性分析 *(PSHA)* 与基于性能的地震工程。这些先进的方法提供了对能够抵抗地震事件的结构设计的关键洞察力, 同时有效地管理风险。

68.1 引入 1971
68.2 年度超越率 1972
68.3 危险曲线 1972
68.4 工程地震风险分析 (ESRA) 1973
68.4.1 例题 68.1: 返回期计算 1974
68.5 可行性地震 危险性分析 (PSHA) 如 SHA + ESRA 1975





68.1 引入

虽然地震危险性分析在大细节中被覆盖 67 某些方面仍然不受解决, 尤其是与实用应用和概率框架的扩展相关的。本章节基于前一章所建立的基础, 进一步探索危险曲线、回报期和工程地震风险分析等关键组成部分。此外, 它将概率方法与结构性能评估集成在一起, 提供对地震危险量化更全面的视野。通过扩展这些主题, 我们将理论危险模型与工程设计和风险减轻的实际影响之间的差距桥梁。

1 虽然地震危险性分析在大细节中被覆盖 67 有些方面仍然不受解决。[1].

2 尽管“下层”的方法, 但这里的缺席部分被覆盖。

3 地震 危险性分析 (SHA) 是评估地震冲击和其他与地震相关影响的潜力在某个特定的位置的过程, 由于地震活动。该计划旨在量化地震事件的概率和强度, 提供结构设计、风险评估和地震耐用的关键信息。

68.2 年度超越率

4 在 可能的地震 危险性分析 (PSHA)，该 **年度过度率** (λ) 特定的地面动作强度 (IM) 这是一个基本措施。它量化了土壤运动在一年内将超过一定的强度水平的可能性:

$$\lambda(IM) = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} P(IM > x \mid m, r) f_M(m) f_R(r) \, \mathrm{d}m \, \mathrm{d}r,$$

在哪里:

- $P(IM > x \mid m, r)$: 强度测量超过的可能性 x 以 地震 的尺寸为 m 远程 r.
- $f_M(m)$ 概率 密度 函数的 地震 尺寸, 由重复模型如 Gutenberg-Richter 关系产生的。
- $f_R(r)$ 概率 密度 源到地点距离功能, 负责区域地震和缓解效果。
- $m_{\min}, m_{\max}, r_{\min}, r_{\max}$: 尺寸和距离的限制, 选择捕获所有相关的地震来源。

5 年度过度率 (λ) 表明, 平均而言, 地面运动强度是多少次 (IM) 预计将在一年内在某个特定地点超过。它结合了所有可能的地震场景的概率, 重量每个场景以其发生的可能性和其对地面运动强度的贡献。这项措施提供了一个概率框架, 以量化地震危险。

6 概率 $P(IM > x \mid m, r)$ 通常是基于 Ground Motion Prediction Equations 的。(吉普赛), 模型估计的冲击强度, 基于大小、源到地点的距离和地点特定的条件, 如土壤属性。

7 PSHA 经常使用逻辑树来捕捉地震源特征、重复模式和 GMPEs 的流行不确定性。树的每个分支都代表着不同的模型或假设, 分配的重量反映了对每个选项的信心。这些重量化贡献将结合起来, 以产生全面的概率风险估计。

68.3 危险曲线

和 **危险曲线** 代表了关系 λ (年度过剩率) 和 IM (强度测量, 如峰地 加速度 (PGA) 或光谱加速度 (SA)), 如在 图 中显示 68.1:

$$\lambda(IM) = \text{场址处超过特定地震动水平的频率。}$$

8 危险曲线被用来:

[1]我选择不修改 Amin Hariri-Ardebili 写的章节 *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 估计在建筑物的寿命中经历有害地面动作的可能性, 这对基于性能的地震工程至关重要。
- 选择符合特定返回期间的地面运动水平 (例如,10% 五十年或二年之内% 五十年内超越) 它通常用于地震设计代码。
- 在不同 地震 场景下评估建筑反应和安全边缘, 有助于结构设计和风险减轻。

9 危险曲线在地点之间显著不同, 反映了当地地震的差异, 与故障的近距离和特定地点的土壤条件。例如, 靠近活性缺陷的场所通常显示较高的年过度率与较少活性地区相比相同强度水平。

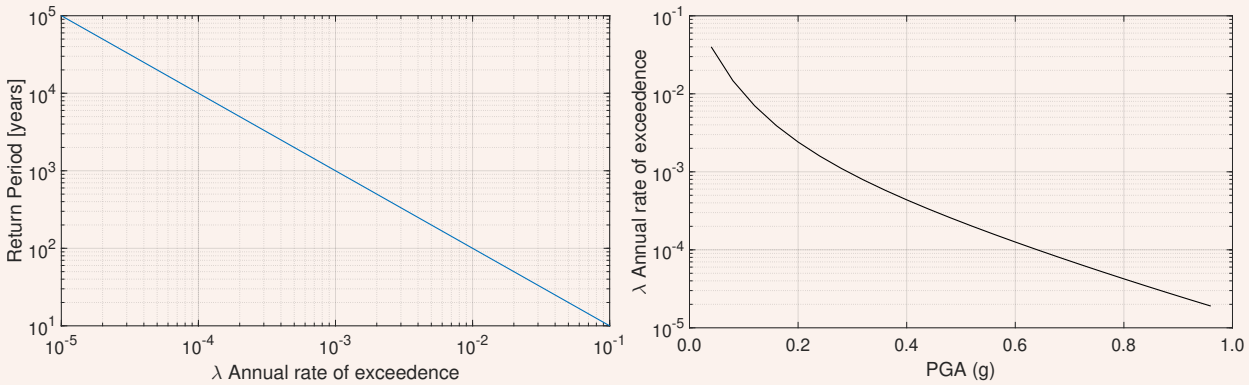


图 68.1: 危险曲线 左曲线描述了返回期的概念, 而右曲线显示了一个特定位置的危险曲线。

10 在最简单的形式中, 返回期之间的关系 (T) 年度超越率 (λ) 是关键的。返回期是某个地点发生特定地面运动强度的事件之间的平均时间间隔。这种关系被表达为:

$$T = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{or equivalently,} \quad \lambda = \frac{1}{T}.$$

11 例如, 返回期为 475 年相当于每年过剩的概率约为 0.0021。(0.21%), 而返回期为 2475 年, 相当于 0,0004 的概率。(0.04%). 这些值广泛用于普通和关键结构的地震设计。

12 值得注意的是, 返回期并不意味着具体事件将在这些间隔发生。相反, 它代表了平均重复间隔, 其概率在多个时间框架上计算。例如,475 年的回归期意味着 10 年。% 五十年内过度的可能性。

68.4 工程地震风险分析 (ESRA)

13 工程地震风险分析是指对建筑结构、基础设施和社会的地震相关潜在风险的评估和定量化过程。

14 它扩展地震 危险性分析 (SHA) 通过集成 **脆弱性** (一个结构可能受到损害的程度) 和 **曝光** (受影响基础设施的价值或重要性). 这些因素共同决定了地震事件的预期后果。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15 如果我们采取 Poisson 分配 代表地震事件作为随机和独立的时间, 然后在时间期间至少超过一个地面运动水平的可能性。t 被授予:

$$P_E = 1 - e^{-\lambda t}.$$

解决过度率 λ 我们得到:

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - P_E)}{t}.$$

在返回期定义中使用此类:

$$T_R = \frac{t}{-\ln(1 - P_E)}.$$

16 简化方程式 $T_R = 1/\lambda$ 承认恒久的年度过剩率 λ 这是对小过度概率的有效接近。(P_E) 时间之内 t. 这种接近是当 λt 它很小, 导致:

$$e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t.$$

17 因此, 我们可以表达 λ 至于 P_E:

$$P_E \approx \lambda t \quad \Longrightarrow \quad \lambda \approx \frac{P_E}{t}.$$

18 从此:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{t}{P_E}.$$

但是, 对于更大的 P_E, 逻辑关系应该用于更高的准确性。

68.4.1 例题 68.1: 返回期计算

考虑过度的典型概率范围:

- 设计基级 (DBL): $P_E \in [20\%, 64\%]$,
- 最大设计级别 (MDL): $P_E \in [10\%, 20\%]$.

对于一个设计寿命的 DAM $t = 100$ 年, 我们计算过剩率和回报期如下:

1. 为 $P_E = 0.20$ (DBL,20% 超越的可能性):

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - 0.20)}{100} = -\frac{\ln(0.80)}{100} \approx 0.00223.$$

使用此过度率, 估计回报期为:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00223} \approx 450\,\text{years}.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 为 $P_E = 0.10$ (MDL 10% 超越的可能性):

$$\lambda = -\frac{\ln(1-0.10)}{100} = -\frac{\ln(0.90)}{100} \approx 0.00105.$$

使用此过度率, 估计回报期为:

$$T_R = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{0.00105} \approx 1,000 \text{ years}.$$

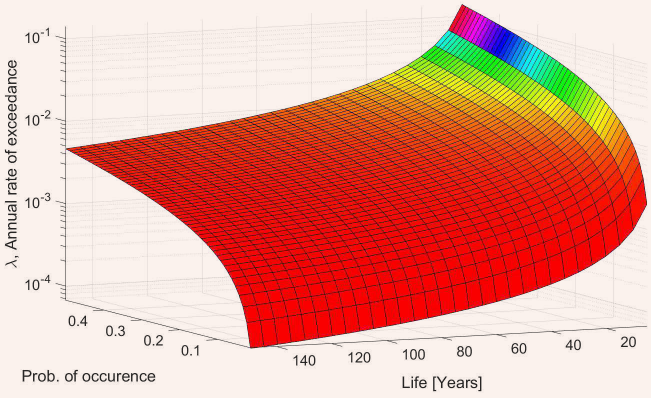


图 68.2: 工程地震风险分析表面

68.5 可行性地震 危险性分析 (PSHA) 如 SHA + ESRA

19 工程地震风险分析 (ESRA) 年度超越率 λ 代表至少在某一生命中发生的一件事的概率。t (形象 68.3).

20 地震 危险性分析 (SHA) 每年超越率的关系 λ 一个强度测量 (IM).

21 可行性地震 危险性分析 (PSHA) 整合 ESRA 和 SHA 以估计在特定地点的不同水平的土壤冲击在一个特定的时期。

22 与特定地震场景的定义性地震危险评估不同,PSHA 对地震发生、大小、位置和地面运动的不确定性负责, 提供地震危害的概率测量。

23 方法跟随一个结构化的过程, 如图所示 68.3:

1. 定义: (a) 兴趣的寿命 (年代) 和 (b) 发生的可能性。
2. 获取 λ 从 ESRA 表面 (形象 68.2).
3. 使用 SHA 曲线来确定相应的顶级地板 加速度 (PGA) (形象 68.1).

24 一旦 PGA 确定, 一组 n 地面动作 加速度 时间历史已选择 (或生成) 多种分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

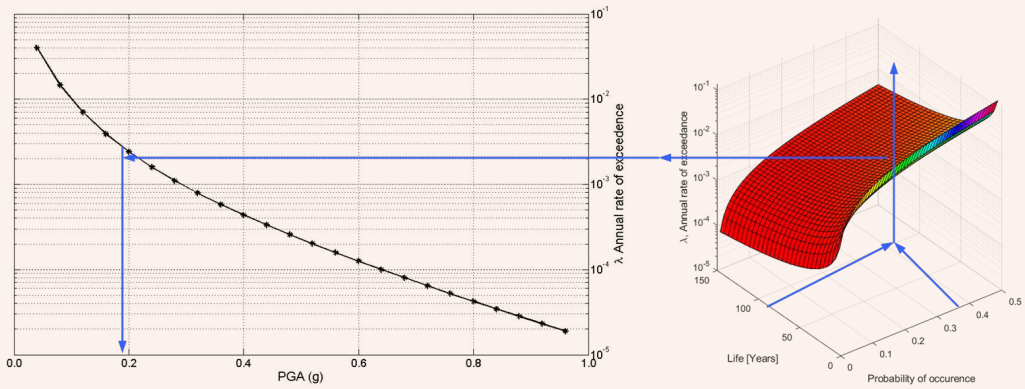


图 68.3: 可行性地震 危险性分析 (PSHA).

25 从这些分析中, 关键响应参数被提取和分配:

密度测量 (IM) 地面运动特征的定量代表性, 通常是顶级地面加速度 (PGA) 或光谱 加速度.

工程需求参数 (EDP) 对安全评估相关的结构反应量, 如基板、间隔冲动或地板加速度。

26 这个过程重复了。m 不同强度水平的时间, 以发展概率性地震需求模型。

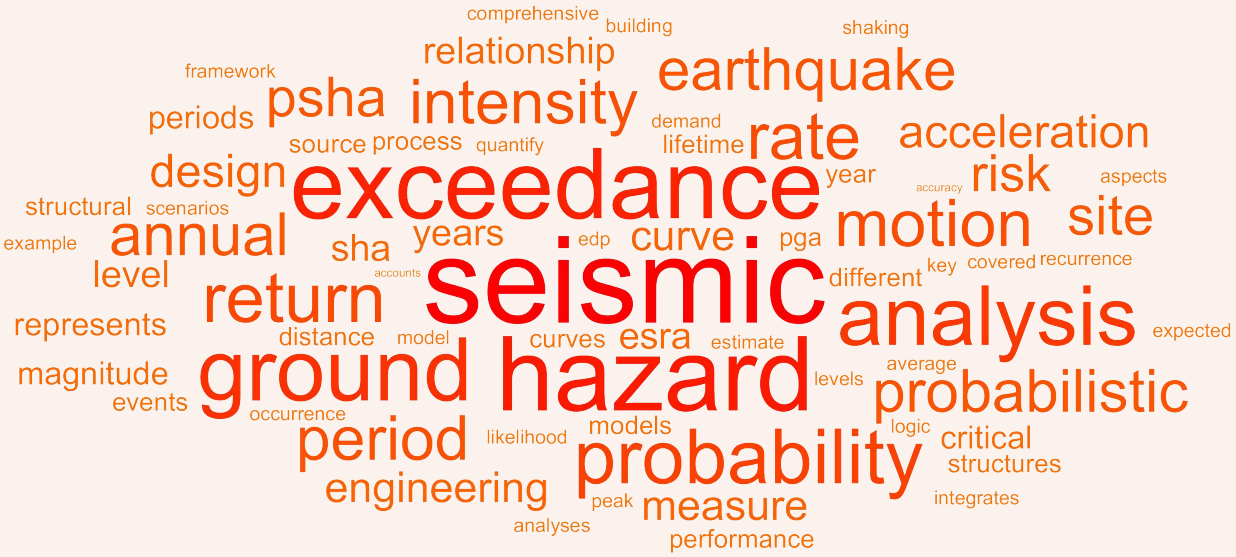
27 在任何情况下, 我们都会为 EDP *vs* 我, 那是哪个 **地震需求模型** 经常被代表为

$$EDP = a.IM^b$$

哪里 a 和 b 非线性动态分析中获得的回归率 (看章节 53)

28 谨慎,PSHA 的结果很大程度上取决于输入模型的准确性, 包括源特征; 它可能对罕见、极端事件有有限的历史数据; 并且概率性结果可能对非技术利益相关者具有挑战性的解释。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

69 结构分析

摘要

本章介绍了地震分析的先进方法, 涵盖了多种方法来评估建筑物和桥梁等结构的地震能力。各种方法的理论基础和实践应用, 包括静力推覆分析 (波) 多条线分析 (MSA), 增長 动力分析 (伊达) 云分析 (克拉) 耐力时间分析 (艾特), 被研究, 突出其各自的优点和限制。

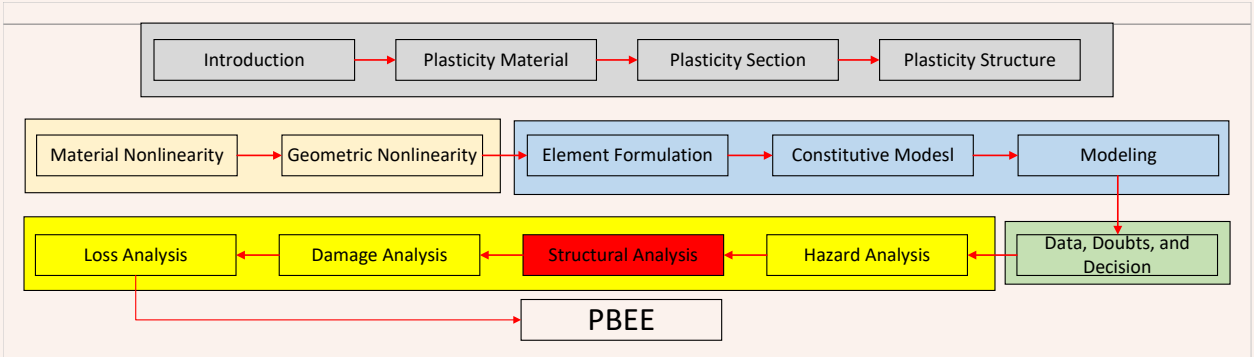
静力推覆分析 被广泛讨论为一个广泛使用的静态非线性程序, 在不断应用侧载下提供无线结构行为的洞察力。关键输出, 如容量曲线和性能点, 被分析以便在地震力量下理解结构耐力。此外, 包括能力功能、压力反应关系和工程需求参数等基本定义也被引入, 以建立地震分析的全面概念框架。

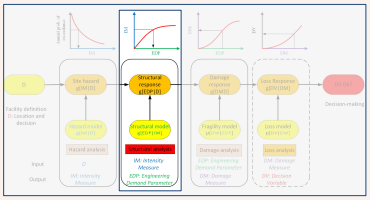
每种方法都以其理论基础、实施考虑和实用应用为准。该章节系统地讨论模型方法、荷载模式定义、加重负载程序以及结构反应数据的解释。各种荷载模式, 包括逆三方、直角和初级荷载分布, 被分析以描述其对分析结果的影响。

关于桥梁理论和实践, 提出了两项详细案例研究。第一個例子包括一個鋼鐵框架受地震分析, 顯示塑料相关术语的識別, 基板容量和變形限制。第二个例子提供了一个真实世界桥梁设计的深入评估, 包括反应谱分析、塑料时刻计算和基于性能的评估标准, 基于 AASHTO 地震桥梁設計指南。

该章节通过重申这些方法在基于性能的地震工程和结构耐力评估中的重要性。通过提供结构化方法和实用案例研究, 本章作为工程师参与地震评估和设计结构的关键资源。

69.1 引入 1979
69.2 基本定义 1979
69.3 能力与需求 1980
69.3.1 需求能力关系 1980
69.3.2 需求估计方法 1980
69.3.3 能力设计原则 1981
69.4 地震分析方法 1982
69.4.1 Push Over 分析 (波) 1982
69.4.2 增長 动力分析 (伊达) 2015
69.4.3 多条线路分析 (MSA) 2017
69.4.4 云分析 (克拉) 2019
69.4.5 耐力时间分析 (艾特) 2020
69.4.6 总结 2022
69.5 什么是下一个 2023





69.1 引入

1 对地震事件的结构反应的准确评估是地震工程的一个关键方面。多年来, 各式各样的解析和数值方法都被开发来评估建筑物、桥梁和其他基础设施的地震性能。

2 这些方法, 从简化静态方法到全面的动态模拟, 为工程师提供了一系列工具来预测结构性行为并缓解地震风险。

3 地震分析方法可以广泛分为线性和非线性方法, 静态和动态技术之间的进一步区别。传统的线性弹性分析, 虽然计算效率高, 往往无法捕捉结构在强烈地震期间所经历的无弹性变形和损害机制的全部范围。另一方面, 非线性方法通过考虑材料和几何非线性来提供结构性能的更现实的表现。

4 本章介绍了关键地震分析方法的深入讨论, 重点是提供对结构耐用的非线性技术的深入了解。其中, 静力推覆分析, 一个静态非线性程序, 已获得了其能力以相对较低的计算需求接近无缝行为的突出。其他先进的方法, 如增量动力分析 (伊达) 多条线分析 (MSA), 和耐力时间分析 (艾特), 提供在不同地震刺激下对结构性能的动态前景。

5 地震分析的一个关键方面是对关键反应参数的解释, 包括容量曲线、需求参数和失败机制。这些指标报告设计决策、背景策略和风险评估。此外, 现代计算工具如 SAP2000、ETABS 和 OpenSees 显著提高了这些方法的准确性和可应用性, 从而促进复杂结构模拟, 并提高效率。

6 该章程通过系统地描述地震分析技术的理论基础、方法框架和实践应用。通过比较讨论和案例研究, 旨在为工程师和研究人员提供对每个方法的好处和限制的全面理解, 最终支持有意识的决策, 以地震抵抗设计和评估。

7 在下一章中 (70) 我们将涵盖本文所覆盖的非线性地震分析的定量评估。

69.2 基本定义

8 首先, 让我们来区分有关不同类型的术语。“能力” 关于结构体系。

能力曲线: 在其原始定义中, 这个概念指的是非线性力量曲线位移。(Freeman, 1978) 它是通过静态加载结构来计算天花板 位移 *vs.* 基板 Shear 此曲线也指的是 *pushover* **曲线** (Freeman, 1998). 在实验室中, 负载转移曲线可以通过设置负载控制或转移控制协议来记录, 这取决于设施的可用性。但是, 使用 位移 控制测试, 后故障可以被捕获。常规容量曲线也可以在分散的能量方面被插入, 称为 **基于能源的容量曲线** (D'Ambrisi and Mezzi, 2015).

能力图: 这个概念是指 pseudo-加速度 *vs.* 常规频谱变形 (Chopra and Goel, 1999) 它是通过在基本振动模式中分为有效的质量基板和位移峰值, 由质量-参与因素分为。这个图标也被称为 **容量频谱**.

能力功能: 这个概念被定义为一个外在的关系。(或内部) 对结构能力影响的参数, 也称为 “压力” (S) 和 “答案” (R) 在宏观层面上。与传统的容量曲线相反, 容量功能是一种更普遍的概念, 可以由介绍中解释的任何启动者产生; 此外, 它不限于仅仅是地震行动。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

压力: 可以是 1) 增加的单调、周期或时间依赖性荷载 (或 位移, 加速度, 压力); 2) 抵抗性参数或强度特征的下降; 或 3) 一个系统中的分歧增加/下降关键参数导致失败。在 PBEE 中,S 通常被称为强度测量。(IM) 参数 然而, 在本文中,S 是更普遍的定义, 并指的是任何数量的变量。(连续或差异性) 它可能导致系统的进步失败和最终崩溃。

答案: 代表系统行为在不同压力器下。它在绝对或相对的意义上被描述。R 可能是: 1) 单一损害变量 (DV), 如流动或能源分散; 2) 多种 DV 的组合在损害指数方面 (DI)； 或 3）任何安全监测指数 (Wang, Gu, and Bao, 2013). 在 地震工程 的领域,R 通常被称为工程需求参数。(EDP) (Vamvatsikos and Cornell, 2004).

69.3 能力与需求

69.3.1 需求能力关系

9 在 结构分析, 了解能力与需求之间的相互作用是确保安全、功能和成本效益至关重要的。

10 能力与需求之间的关系确定一个结构是否能够在典型和极端条件下按照意图进行。结构必须有足够的能力, 超越预期的要求, 包括安全边界, 以应对物质行为不确定性、负载估计、地震发生、大小、地形运动和建筑质量。这种平衡通常通过安全系数或需求能力比例表达。

11 容量和需求都通常由加西的概率分布, 图特征。69.1, 反映材料、建筑和环境因素的内在变异性。这些分布使工程师能够通过分析容量和需求曲线之间的过渡来定量失败的可能性。

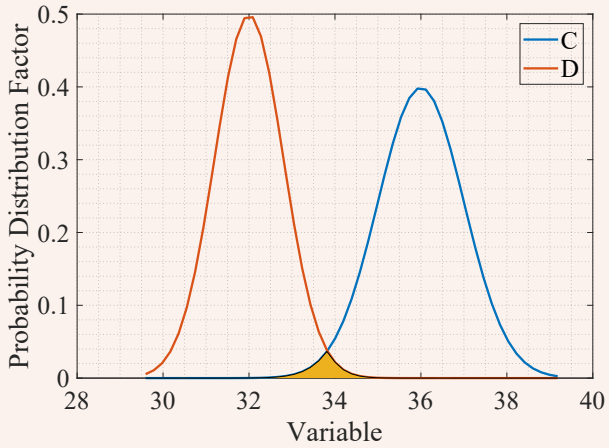


图 69.1: 可靠性质能力和需求

69.3.2 需求估计方法

12 要求, 代表负担和压力一个结构在其生涯中受到影响, 包括重力, 风, 地震和其他环境或运营力量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

13 在我们的背景下, 我们将需要确定具体的工程需求参数 (EDP) 适当的接受标准, 以定量评估性能水平。

14 EDP 是可测量的反应量 (典型上峰 (谢尔), 力量和变形, 跨场冲动, 或结构和非结构组件的地板加速。

15 性能被检查 计算要求与接受标准的比较 (能力) 以所需的性能水平.

16 EDP 是由

结构模型发展: 结构的详细模型在结构分析软件中创建。该模型捕获物质特性、地质学、边界条件和蒸发特性。

地面动作的选择: 基于地震的地面动作是根据地震的危险性分析选择的。这些动作可以是真实的地震记录或合成产生加速图。

地震危险: 它指的是由于地震造成的地面冲击的潜力。危险量化在超越特定地面运动水平的可能性方面, 如峰地 加速度 (PGA) 或光谱 加速度 (SA).

动力分析: **非线性 时程分析:** 这是 PBEE 中最常见的方法来确定 EDP。结构受选地面动作的约束, 每次步骤计算响应。

静态 静力推覆分析: 对于一些更简单的研究,EDP 是用非线性静力分析接近。

线性分析: 在某些情况下, 可以使用线性反应谱分析, 但对于 PBEE 来说, 它不那么准确。

记录 EDP: 分析结果为每个地面动作的 EDP 的时间历史或峰值。这些结果的统计分析 (例如, 中等、中等或 90

17 根据结构配置, 非线性分析的结果可能对假设输入参数和使用的模型的类型敏感。

18 一个人必须有 关于结构的那些部分, 预计会遭受无线变形的明确期望 然后使用分析

1. 确认无线变形的位置
2. 特征:

   - 变形要求产生单元。
   - 强度要求在不发射的单元。

19 能力设计概念可以提供可靠的性能。

69.3.3 能力设计原则

20 容量设计是地震工程的基本概念, 旨在确保地震力量下的结构的双重和可预测性行为。这一原则优先考虑了结构中的失败机制的控制, 旨在最大限度地提高能量分散, 并防止大规模失败模式。通过强调双重性和强度的序列, 容量设计确保结构在地震时安全运行。

21 能力设计的核心想法是建立结构组件之间的强度层。例如, 在瞬间抵抗框架中, 闪电故意设计为在列之前发射。这确保结构能够通过塑料粘膜的形成分散地震能量, 而列则保持弹性

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

和稳定性。这种方法经常被称为“强柱, 弱点”的概念, 减少崩溃风险并促进可预测的结构行为。

22 Ductility 是能力设计的中心 单元。结构组件详细描述, 以免失去其荷载载荷能力。这种塑料变形能力使结构能够在地震期间吸收和分散能量。为了实现这一点, 设计仔细避免了巨大的故障机制, 如叶片故障、屈曲或连接故障。这些故障模式被认为是不必要的, 因为它们突然发生, 没有警告。

23 压力因素也被用来确保强度的意图层次。例如, 列和基础的设计比射击更强大, 防止关键组件的不故意失败。同样, 在包装框架系统中, 手臂被设计以产生紧张, 同时保持压缩稳定, 确保能量分散发生如有意。

24 容量设计的原则扩展到各种结构系统。在 钢筋混凝土 时刻抵抗框架中, 塑料粘贴在地震事件期间的喷雾末端形成。这些粘贴允许泡沫经历大旋转, 有效地分散能量, 同时保护列和结构的其他部分。在相关术语墙上, 容量设计确保灵活的产生发生在相关术语板失败之前, 增强了墙壁的杜克特性行为。

25 容量设计的主要好处之一是它在地震时提供的结构性能可预测性。通过控制故障的位置和序列, 工程师可以确保结构以控制和安全的方式行事。这种方法还通过防止突然崩溃来提高安全性, 并为居民提供足够的疏散时间。此外, 容量设计是成本效益的, 因为它在特定地区集中了杜克特行为, 减少了结构的其他部分需要过度设计。

26 容量设计原则包含在现代地震设计代码中, 如美国的 ASCE/SEI 7、欧洲的 Eurocode 8 和日本建筑标准法。这些代码包含了双重性、力量和能量分散的基本理念, 确保结构能够抵抗地震势力, 同时保护生命和财产。

69.4 地震分析方法

69.4.1 Push Over 分析 (波)

理论

27 静力推覆分析 是一种静态非线性程序, 用于估计结构的地震容量。它特别受欢迎在结构工程评估建筑物和桥梁的性能在地震负载下。

28 与动态地震分析不同, 静力推覆分析提供了一个结构的无缝行为, 包括其失败机制的详细概述, 通过模拟其对逐步增加的侧重负载的反应。随着负载大小的增加, 弱链接 (塑料合金) 并且发现了结构的故障模式。

29 静力推覆分析的关键输出是 **能力曲线** 或 *pushover* **曲线**, 代表基板和天花板之间的关系位移. 这种曲线允许工程师确定结构的地震能力, 并评估它是否在各种危险水平下满足性能目标。

30 ATC40 (ATC-40, 1996) 和 FEMA-273 (FEMA, 1997b) 文件已经开发了模型程序, 接受标准和分析程序为静力推覆分析. 这些文件定义了在 pushover 分析中使用的粘贴的强度变形标准。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

31 该方法允许跟踪成员和结构级别的成果和失败序列以及结构总容量曲线的进展, 图 69.2. 这基本上定义了对结构的需求。

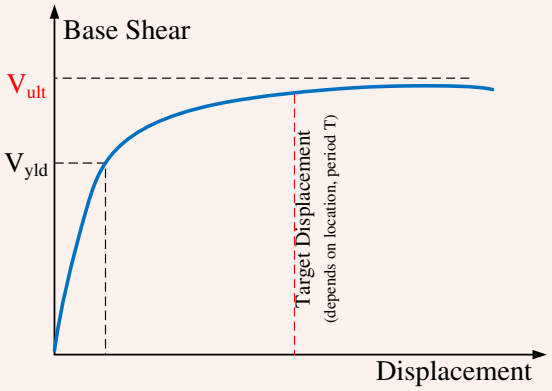


图 69.2: 能力曲线

关键目标

32 静力推覆分析 提供多种关键目的:

- 结构性能评估: 评估结构的无缝反应。
- 识别弱点: 检测潜在失败点和关键组件。
- 定义地震容量: 估计基板、天花板位移和双重性要求。
- 评估 Retrofit 需要: 了解加强和回归策略, 以提高地震性能。

假设和限制

33 虽然有效, 但 静力推覆分析 基于具体假设, 可能限制其可用性:

- 分析表明, 答案是由 **基本振动模式**, 使其主要适合低楼和中楼建筑。
- 固定支座条件通常是假设的, 并且 **高潮效应** 被忽略, 除非有不同的 荷载 模式进行多次 pushover 分析。
- 动态效应如长度、频率内容和土-结构相互作用不被捕获。

步骤在 静力推覆分析

模型结构

- 使用 A **非线性结构模型** 代表地质、物质属性和边界条件。
- 定义塑料粘贴在关键位置, 如泡沫列连接、柱子基础或泡沫中间板。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- 代表物质行为使用 A **强力变形关系** (二元或三元模型).

應用 重力 充電 静态 重力 负载, 包括死负载和活负载的一部分, 用于确保结构在侧负载之前处于 平衡 中。

定义 荷载 侧面模式 常见的 荷载 模式包括, 图 69.3:

- 逆三角负载: 从基地到顶部线性上增加的负载模式, 代表一个逆转三角分布。
- 直角负载: 在结构的高度上应用的均匀负载分配。
- 第一模式 荷载: 一个与结构的基本 振型 比例的 荷载 模型。
- 模式动态负载: 由动态分析的模型贡献产生的负载分配, 代表更高的模式效应。

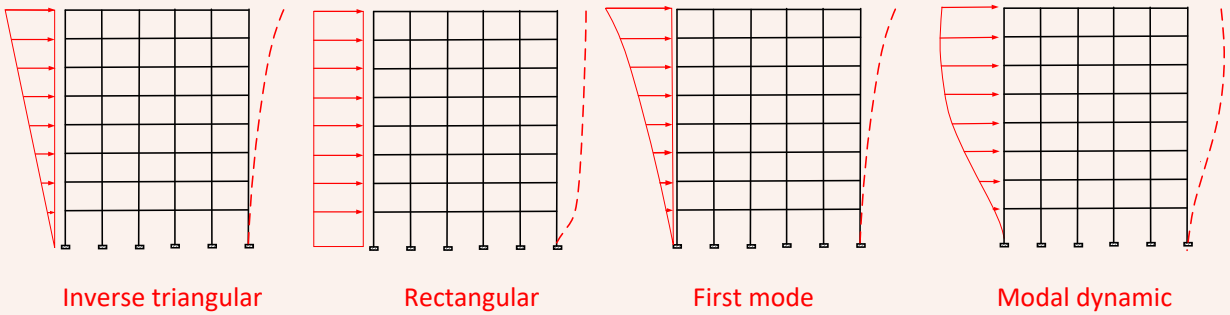


图 69.3: 侧重负载 push-over 分析

增加负载

- 加重应用侧面力量或转移到目标值。目标 位移 可以从 反应谱 确定

$$\Delta = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)C_s$$

  哪里 Δ 是位移的光谱, T 这是时间, 而且 C_s 以色列的弹性地震因子。
- 在每个步骤中进行平衡和兼容性检查。
- 直到全球或地方失败发生。(例如, 塑性铰形成, 过度的位移).

监测结构性反应 关键反应参数包括:

- 基板: 由结构抵抗的整体侧面力量。
- 天花板 位移: 测量结构的变形能力。
- 塑性铰形成: 不弹性行为的位置和序列。

开发能力曲线 将基板插入对天花板 位移 以创建 *pushover* **曲线**, 代表结构的全球无线反应。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

输出解释

能力曲线 pushover 曲线分为:

- 灵活区域: 初始反应。
- 无线区域: 非线性反应显示逐步的硬度衰退。
- 崩溃点: 最大基板或位移容量的点。

性能点 十字路口之交 **需求频谱** (地震分析) 能量曲线定义了 **表现点**, 代表预期的位移在一个地震期间。

Hinge 形成模式 塑料轴承提供对失败机制和潜在的弱链接的了解。使用曲线形成序列来检查结构是否显示 **二元性行为** (偏好) 或 **英格兰行为** (不必要的).

Drift 和 Ductility 计算历史间流动率和整体双重性需求, 以确保结构符合设计性能目标。

应用

- 基于性能的设计: 在不同地震危险水平下评估性能 (即时占领、生命安全、崩溃预防).
- Retrofit 设计: 评估结构强化技术的有效性 (例如, 添加手相关术语、粘墙).
- 损害评估: 对现有结构的灾难应对规划潜在损害进行估计。

先进考虑

- 高模式效应: 以多种 荷载 模式进行多次推翻分析, 以便对更高的模式负责, 特别是在高或不规则的结构中。
- 适用 静力推覆分析: 在旋转形状和硬度变化时, 动态更新 荷载 分布模式。
- 软件工具: SAP2000、ETABS 和 OpenSees 等工具为 静力推覆分析 提供内置功能, 用于塑料粘贴模型和非线性行为。
- 非线性材料模型: 包含物质特定的模型 (例如, 有限 混凝土, 钢材 产量) 更好地模拟现实世界行为。

与地震分析相比

34 静力推覆分析和地震分析在表中进行比较 69.1.

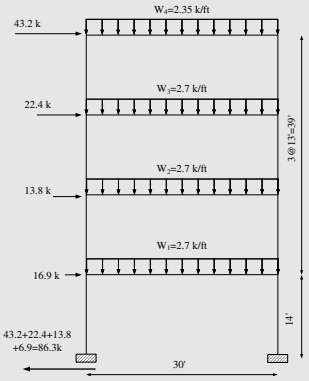
69.4.1.1 例题 69.1: 请求曲线的例子

适应从 **基于性能的塑料设计: 地震耐钢结构** 由 Goel 和 Chao 提出

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 69.1: 静力推覆分析和地震分析的比较

视角	静力推覆分析	地震分析
自然	非线性静态程序	非线性动态程序
动态效应	忽略动态特性 (例如, 时间依赖的无与伦比力量)	直接考虑动态特性, 包括地面运动效果
行为模型	专注于不弹性反应和失败机制	通常限于弹性反应, 除非使用 非线性分析
高潮效应	除非进行多次分析	完全捕获在动力分析
复杂性	计算更简单, 需要少资源	更强的计算, 特别是非线性动力分析
出口	容量曲线、弯曲形成模式、双向性要求	时间历史回应, 模式贡献, 能源分散
可用性	适合低至中等结构, 有常规配置	需要高、不规则或关键结构

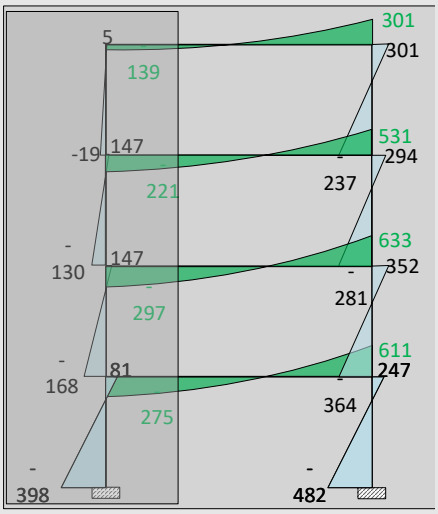


我们试图确定下列 框架 的需求曲线 F_y 五十字, $E$30,000 ksi、axical 和 shear deformation 被忽略。 灵活完美塑料时刻 曲率 假设。

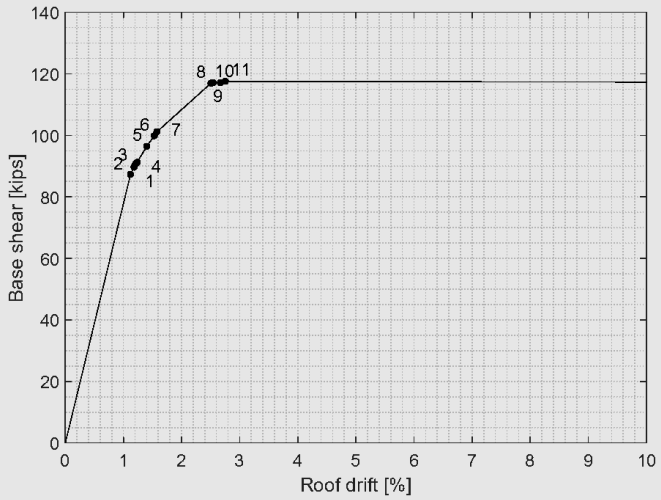
- 首先进行弹性分析, 所有成员都满意。$M_{max} < M_p = F_y Z_x$.

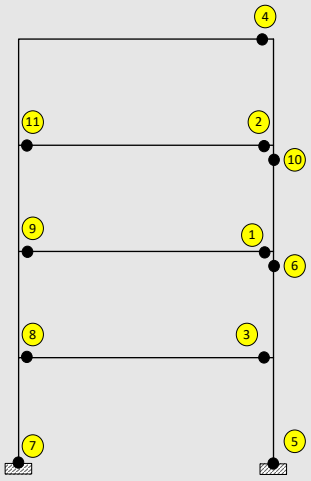
楼层	$M_{u,req}$ (K - 五)	梁 部分	M_p (K - 五)	$M_{u,req}$ (K - 五)	柱 部分	M_p (K - 五)
4	301	W16x40	304	301	W16x40	304
3	531	W24x55	558	294	W16x40	304
2	633	W24x62	638	364	W21x44	398
1	611	W24x62	638	482	W21x55	525

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



- 基地 Shear (全侧力量) 与天花板冲动比例 (天花板 位移/高度) 塑料粘贴的位置和形成序列如下所示。
- 第一個 塑性铰 形狀時的柔軟限度的側面強度為 87.6 基普, 略高於設計值為 86.3 基布。
- 从那时起, 瞬间的重新分配发生在塑料粘膜形成序列, 而框架达到其 117.5 基普的 极限强度 在天花板旋转比例为 2.7。%.
- 结果机制证明是一个部分的旋转机制, 在梁端和列的基础上以及第二和第三故事的顶部有塑料粘贴。
- 二元性比例 (V_{ult}/V_y) is 1.36.





审阅稿

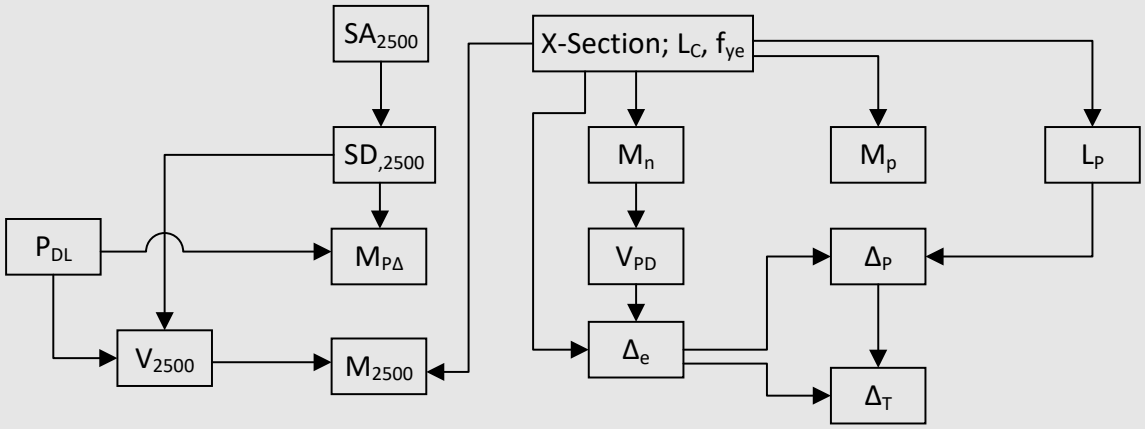
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

69.4.1.2 例题 69.2: Push-over 分析; 实用例子

主持人:Marilyne Lefebvre (Kiewit 工程公司)
解决方案:Marilye Lefebvre,Victor Saouma, 科迪 • 哈林顿, 穆罕默德 • 萨尔奇, 穆哈迈德 • T。尼古拉姆

问题 表述

此写作将分为多个部分。首先, 这个问题是由 §69.4.1.2. 然后, 您将不得不对网站进行 反应谱 分析, 以确定该设计的 位移 必须适用, §69.4.1.2. 在此时, 您可以通过手动计算来确定容量。(根据 AASHTO 条例), §69.4.1.2. 这将包括塑性铰的长度、塑料时刻和相应基板的计算, 最后是弹性和塑料转移。



问题声明

以下主工作任务是基于由 Kiewit 进行的分析。它会给你一个感觉, 什么通常在设计公司做。

Goethals Bridge 位于纽约市外。超越 Arthur Kill (Staten Island 音效) 与 Staten Island, NY 和 Elisabeth 之间, NJ, 图 69.4. 新桥的主要范围是索站立的桥梁, 而两种方法都是准确的分区盒旋转器。新桥将取代在 Roaring 20 年代建造的钢材 cantilever 桥。在此练习中, 您将分析新泽西侧面对设计地震负载的接近范围的皮尔设计。一个字符被选择为代表性部分, 并在其中进行静力推覆分析。

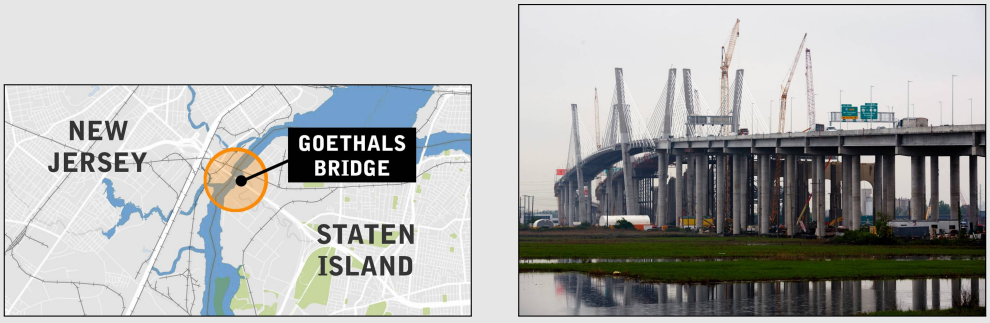


图 69.4: 桥梁的位置和图像

柱 长度 (L_c) 是 40 ft; shaft 长度到固定点 (L_S) 是 60 英尺; 钻井的直径 (d_s) 是 8 英尺; f_{cc} 為 柱 5,000 psi 並最終切割 f_{cs} 是 4000 psi。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

第一部分: 反应谱分析

网站的设计 反应谱 在表中总结 69.2 哪里 C_S 是弹性地震因子。选择 2500 年网站类 F。

表 69.2: Nj 方法结构设计 反应谱

1000 yr 班 A			2500 yr 班 A			1000 yr 类 F			2500 yr 等級 F		
T (塞克)	C_s	Δ (ft)	T (塞克)	C_s	Δ (ft)	T (塞克)	C_s	Δ (ft)	T (塞克)	C_s	Δ (ft)
0.00	0.072	0	0.00	0.244	0	0.00	0.270	0	0.00	0.520	0
0.04	0.144	0.000217	0.04	0.578	0.000754	0.04	0.379	0.000495	0.04	1.144	0.001493
0.05	0.144	0.000294	0.05	0.566	0.001155	0.05	0.407	0.000829	0.05	1.300	0.002651
0.10	0.144	0.001175	0.10	0.508	0.004143	0.10	0.543	0.004432	0.10	1.300	0.010603
0.15	0.144	0.002643	0.15	0.451	0.008277	0.15	0.680	0.012479	0.15	1.300	0.023857
0.20	0.144	0.004698	0.20	0.394	0.012854	0.20	0.680	0.022185	0.20	1.300	0.042413
0.22	0.144	0.005531	0.22	0.381	0.01503	0.22	0.680	0.026844	0.22	1.300	0.05132
0.30	0.104	0.007634	0.30	0.328	0.024053	0.30	0.680	0.049917	0.30	1.300	0.095429
0.45	0.069	0.011446	0.45	0.228	0.037685	0.45	0.200	0.033033	0.45	0.813	0.134198
0.50	0.062	0.012724	0.50	0.195	0.039762	0.50	0.167	0.033985	0.50	0.650	0.132541
0.60	0.056	0.01649	0.60	0.177	0.051914	0.60	0.100	0.029363	0.60	0.552	0.162083
1.00	0.031	0.025448	1.00	0.104	0.084826	1.00	0.040	0.032625	1.00	0.160	0.130502
2.00	0.025	0.081237	2.00	0.050	0.163127	2.00	0.016	0.052201	2.00	0.055	0.17944
3.00	0.019	0.136537	3.00	0.040	0.293629	3.00	0.013	0.092982	3.00	0.035	0.256925
4.00	0.012	0.160517	4.00	0.030	0.391505	4.00	0.009	0.121802	4.00	0.025	0.326254
5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818	5.00	0.006	0.122345	5.00	0.020	0.407818
									6.00		0.5

任命

1. 绘制该 C_s 反应谱.
2. 放下曲线, 并说明什么是 C_S T = 6 秒。
3. 将 位移 反应谱 插入。
4. 排除曲线, 并指定什么是位移为 T = 6 秒。

二、能力 (手指计算为皮尔)

您将需要访问附件副本的第 2 版 *AASHTO* 指南 *LRFD* 地震桥设计规格 (AASHTO, Seismic, 2011). 和 electronic copy 可以从 CU 图书馆网站访问。

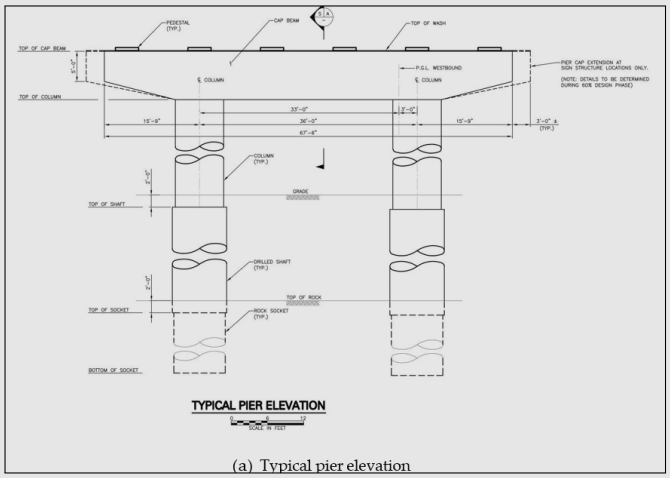
底部的本特性如下:

1. 长度 柱 = 40 英尺
2. 长度的钻井<60 英尺
3. 直径 柱 = 7 英尺
4. 钻井的直径 = 8 英尺
5. 抗压强度 的 柱 和 Pier Cap (f'_c) 五 KPI
6. 压缩强度的磨损 (f'_c) 四 KPI
7. 假设皮层是直角 梁 的深度为 7’ -0” 和一个宽度为 8’ -6” 只集中在列之间的部分。在分析皮尔时, 忽略皮尔盖的延伸和脚踏板。的特性是:
8. 柱 部分: 假设雷巴的空间大约为 6 英寸。
9. 布拉格沙特部分: 忽略了钢材加密。清晰的覆盖范围为 4 英寸。假设雷巴空间大约为 6 英寸 #14 条和 9 英寸为 # 18 巴。

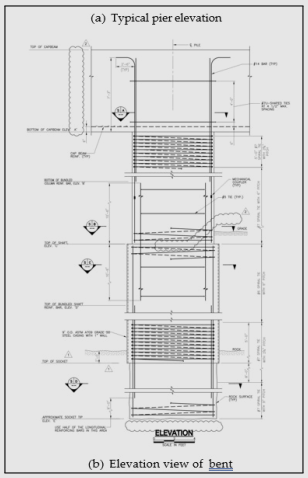
审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

典型的岩石升高和接近延伸的计划在图中显示 69.5 和 69.6



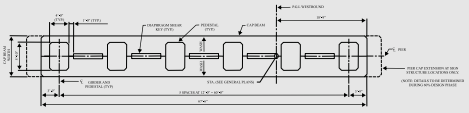
(a) 典型皮尔高度



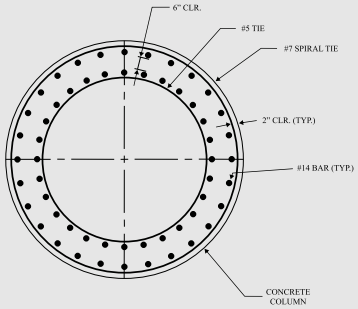
(b) 升高视野

图 69.5: 列和皮层尺寸

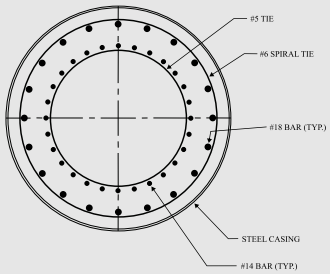
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



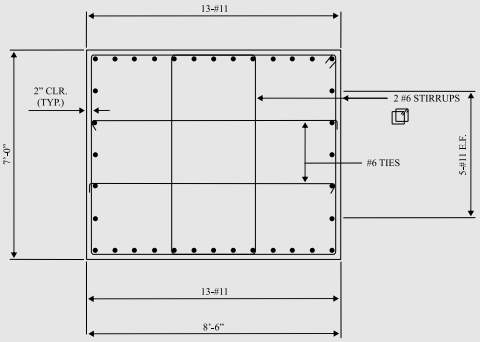
(a) 典型皮尔高度



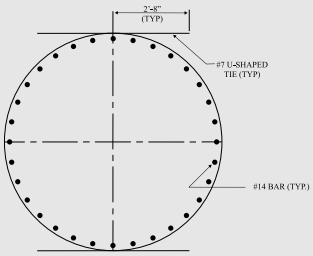
(b) SB 区



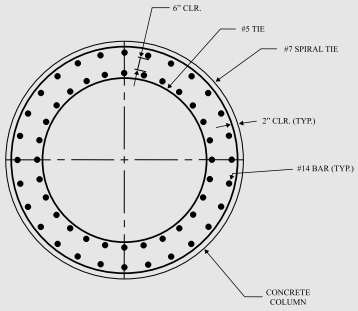
(c) SC 部分



(d) 其部分



(e) 柱 部分在字幕上 梁



(f) 柱 部分在基础上

图 69.6: 柱子和切割十字部分

为什麼要做一根相关术语子?

在 (AASHTO, Seismic, 2011), 你需要设计一个磨损的相关术语子作为容量保护的成员在地震区 B-D (你希望它在地震期间保持弹性。). 因此, 任何损害柱可以看到和修复。

任命

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 根据计划, 确定 地震抵抗系统如下所述 (AASHTO, Seismic, 2011, chap. 3) (是的, 它是类型 1、类型 2 等吗?).
6. 查找 柱 的名义时刻容量。奖金点将被授予, 如果你能找到 M_{ne} 使用 Mander 应力 分布 (Mander, Priestley, and Park, 1988), 图 69.7 取代 Whitney 应力区块。

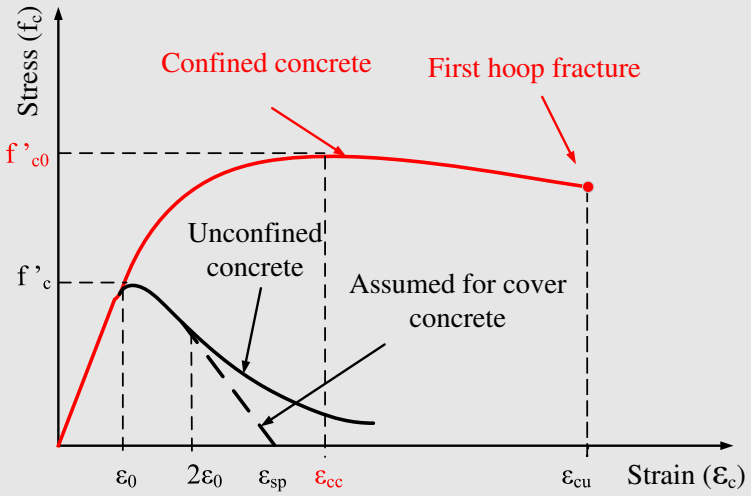


图 69.7: 压力压力关系为有限和无限混凝土的单调充电 (Mander, Priestley, and Park, 1988)

威特尼, M_n 620 KIP-FT (±10%); 命令, M_n = 8,551 kip-ft (±10%)

7. 使用 (AASHTO, Seismic, 2011, chap 8), 确定预期的 屈服强度 f_{ye} 除此之外, 如果雷巴是 ASTM A706 钢材 (注意事项: f_y 60 公元).
8. 定义 解析 塑性铰 的长度 L_p 以 柱 的。标签: 检查 (AASHTO, Seismic, 2011, §4.11).

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl} \quad (4.11.6\text{-}1)$$

哪里

L	柱的长度从最大时刻点到时刻分裂点 (in.)
f_{ye}	预期 屈服强度 的长度 柱 增强 钢材 条 (基)
d_{bl}	长度柱的名称直径, 强化钢材条 (in.)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

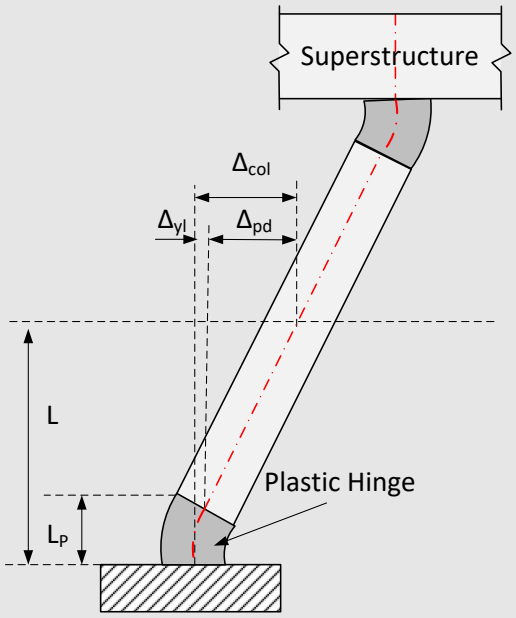
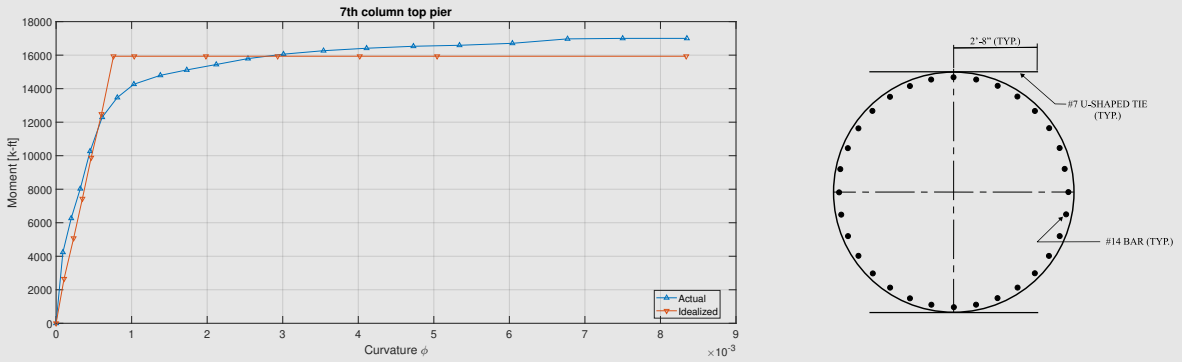


图 69.8: 皮革形状和曲率图表; 适用于 AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

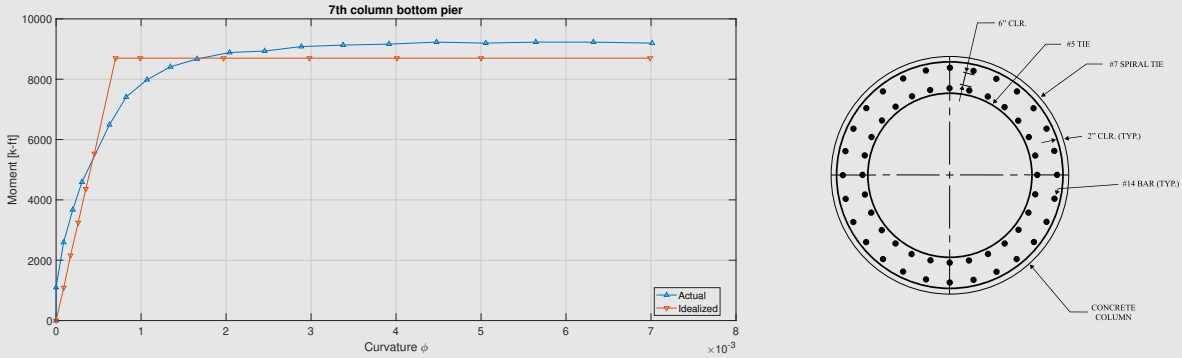
9. 使用数据在 `P-M - 图表.xlsx` 确定塑料时刻 M_p 在列的顶部, 列的基础, 并在切割的相关术语。插入这些理想化的瞬间 - 曲率 曲线 (看见 (AASHTO, Seismic, 2011, figures 8.5.1 and C4.9.1) 哪个国家是最小的时刻 (我们将使用它来比较我们的结果在第三部分). 目前, 假设设计轴荷载在柱上是 P_{DL} 二千五百基普 (这包括皮尔的自我重量。). 塑料时刻应该与图中显示的时刻相同 69.9.

审阅稿

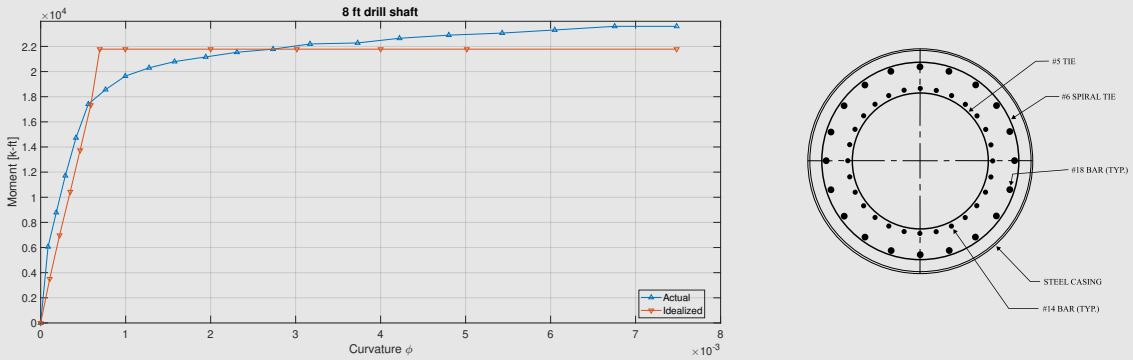
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 7ft 直径 柱 在皮顶; M_P=15839 kip-ft (± 10%)



(b) 7 英尺直径的瞬间曲线, 在皮层底部; M_P8662 KIP-FT 等 (± 10%)



(c) 直径 8 英尺的瞬间曲线; M_P= 21786 kip-ft (± 10%)

图 69.9: 瞬间曲线和塑料时刻

10. 什么是 Shear V_p 塑料时刻需要发展吗?
11. 查找 柱 的弹性 位移 Δ_e. **提示:** 提到 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. C4.9-2, 并应用时刻区域。
12. 查找 柱 的塑料 位移 Δ_{pd}. 假设塑料 曲率 Φ_{pd} 是 0.005 /ft。
13. 查找 位移 的总数在 柱 的顶部 (Δ_{total}).

第三部分: 确定需求负载

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

该列的设计轴负载是 P_{DL} 二千五百基普.

任命

14. 什么是基于柱的时刻 $P\Delta$ 效果? 是 $M_{P\Delta}$ 小/大/等于 $0.25M_P$?
15. 什么是 Shear V_{2500} 基于柱?
16. 什么是时刻 M_{2500} 基于柱从这个剪力? M2500 小/大/等于 $0.25M_P$?
17. 请求时刻是否更大/较小/相当于第 2 部分所发现的允许时刻? 在阿什托, 该 Φ 振动因子为 0.9 如果部分是压力控制或 0.7 如果部分被压缩控制。

第四部分: 静力推覆分析

根据 AASHTO 代码确定了大约的 位移 的总值, 现在我们正在寻求实现一个 静力推覆分析 并获得更准确的值。

我们需要使用软件来进行各种分析。(RISA、SAP 或其他弹性代码).

形象 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 4.8-2 描述了假设的 塑性铰 序列, 为一个 框架 的皮。为了简单, 我们将假设皮层是硬的 - 这就是为什么, 我们只需要处理列的位移。记住这个序列, 当我们通过静力推覆分析.

任命

18. 提供模型的描述, 确保您清楚地标记了 单元 和节点评分 (数字是可接受的). 模型既是皮尔, 又是磨碎的相关术语子。假设磨损的毛巾固定在您的模型的底部。
19. 正如第 2 部分一样, 确定塑料时刻。M_P 在列的顶部, 列的基础, 并在切割的相关术语。表明结果从 P 0 点 到 P 五千基普 (ΔP 五百基普). **要从中提取 饰演** `P-M.xlsx` **文件可用**).
20. 将 1 千克的水平力量放在 柱 的顶部。将 轴力、时刻和 位移 设置在您的模型的每个节点上。
21. 逐步增大剪力，直至形成塑性铰。塑性铰在多大的力作用下、于何处形成?
22. 表明你的结果。在每个节点上, 指定 轴力、时刻和 位移.
23. 把一根绳子放在节点上 (确保在环节上有零时刻。). 再一次, 将 1kip 的水平力量放在柱的顶部。将 轴力、时刻和 位移 设置在您的模型的每个节点上。
24. 逐步增大剪力，直至形成塑性铰。塑性铰在多大的力作用下、于何处形成?
25. 再一次, 表明你的结果。
26. 把一个环放在节点上, 然后继续按一下柱。(换句话说, 两次。).
27. 从四个场景中增加地平线力量。此外, 在每个节点上添加 轴力, 时刻和移动。
28. 在哪里, 我们会看到失败? 它是否符合 AASHTO 中所述的失败标准?
29. 什么是位移在柱的顶部失败?
30. 将 静力推覆分析 与第 2 部分的手动计算进行比较。你认为哪个分析更保守?
31. 皮革的设计是否合适? (换句话说, 计算的表和时刻是静力推覆分析大/小/等于我们从第 3 部分计算的设计负载。)?

帮助

结构分析

为了方便您的任务, 框架已被序列分析, 结果显示在表中。69.3.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 69.3: 对 静力推覆分析 的序列分析

V (K)	诺德	P_{eq} (K)	M^i_{EQ} (K - 五)	Δ (在)
1	N1	-0.81	28.84	0.00
	N2	-0.81	-1.17	-0.01
	N3	-0.81	-21.17	-0.01
	N4	0.81	28.82	0.00
	N5	0.81	-1.17	-0.01
	N6	0.81	-21.17	-0.01
1	N1	-0.56	28.15	0.00
	N2	-0.56	11.23	-0.01
	N3	-0.56	0.00	-0.02
	N4	0.56	43.47	0.00
	N5	0.56	0.37	-0.01
	N6	0.56	-28.37	-0.02
1	N1	-0.75	0.00	0.00
	N2	-0.75	0.00	-0.02
	N3	-0.75	0.00	-0.03
	N4	0.75	60.61	0.00
	N5	0.75	0.63	-0.02
	N6	0.75	-39.38	-0.03

Hinge 形成的定义

每次分析后, 你将不得不确定下一个环在哪里。(s) 形式。你必须完成一個表, 如下:

V (K)	诺德 (K - 五)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K - 五)	Δ (在)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K - 五)	M_p (K - 五)	塑料 英雄?	$M_P/M_{eq,Tot}$
40	Ni	-	-	-	-	-	-	-	-
	Nj	-	-	-	-	-	-	-	-

- P_{EQ}, M^i_{EQ}, 和 Δ 是从以前的分析结果中获得的。(桌子 69.6) 由 剪力 加倍在 柱 1 (一分钟内更多关于它).
- P_{total} 这是总的 P_{DL} (2500 千里) 和 P_{eq}.
- $M_{EQ,total}$ 它只是相当于所有先前的值和当前的值的总额。例如, 在桌子上 69.9, $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ 对于 N1

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- M_P 需要特别注意, 因为部分的轴力变化随着水平力量在顶部增加, 因此瞬间能力也发生变化。因此,Excel 表使用 **趋势** 需要最少的四方接近的函数 **线性** 两个终点之间的功能, 如:

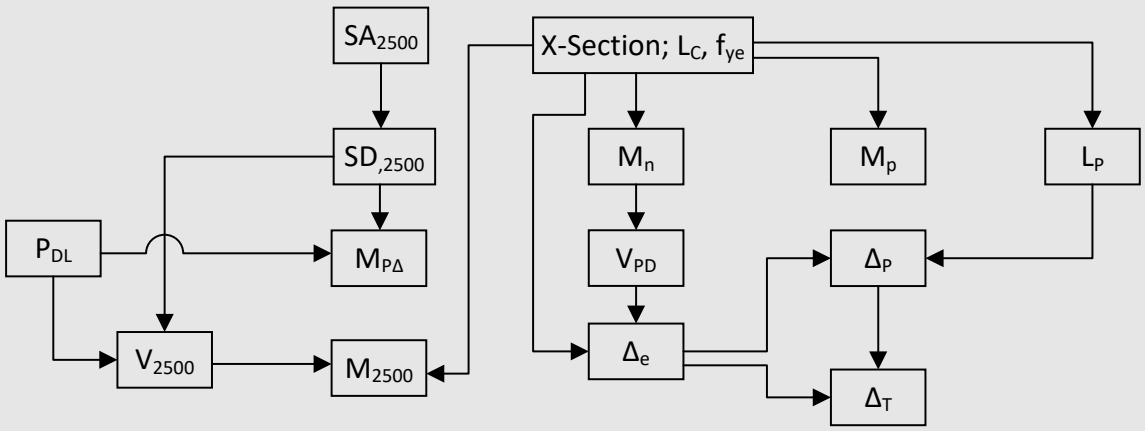
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

= 趋势 ('P vs Mp'!$D$3:$D 五十三, 'P vs Mp'!$A$3:$A$53,F10)
在目前的分析中, $0 < P_{total} < 5,000$.

- 我们认为下一个塑性铰将形成当 $M_{eq,Tot} \geq 0.95 M_p$

然而, 问题是真正的非线性, 因为形成一个环的条件取决于在这个阶段的叶子的大小。因此, 我们将增加其价值。V (10 基普) 直到一根形状。在这种情况下, 它是 40。

任务之间的互动

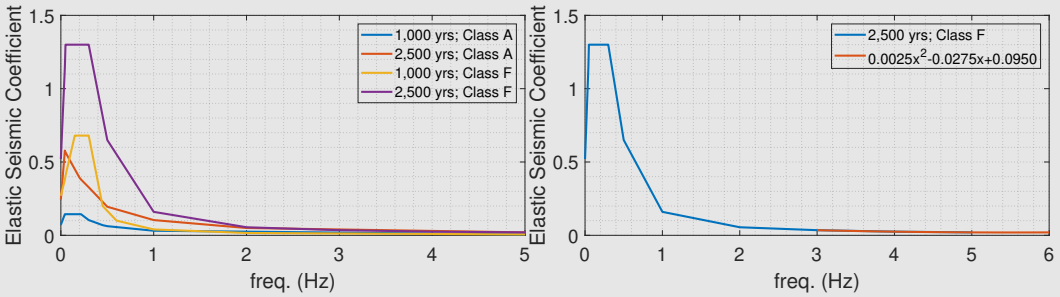


解决方案

第一部分: 反应谱分析

C_s 指定的位置和 1000、2500 年类 A 和 F 的比例在表中显示 69.2

① 地点 C_s 和 位移 反应谱 (与 6 秒的外观相结合。) 顯示在 图 69.10.



(a) 所有 (b) 2,500 years, Class F

图 69.10: 反应谱 分析 (C_S)

弹性地震因子 (C_S) 可以转化为光谱转移 (Δ) 通过

$$\Delta = g \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 C_S \tag{69.1}$$

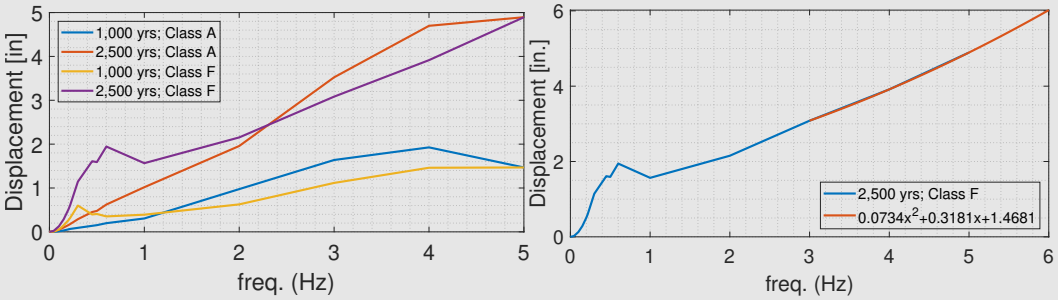
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

② 四方匹配过去三个数据点的结果

$$C_S = 0.0025f^2 - 0.0275f + 0.0950 \tag{69.2}$$

替代 EQ。69.2 为 $T = 6$ 千, C_s=0.02 (也来自图 69.11b)

③ 位移 反应谱 显示在 图 中 69.11.



(a) 所有　　(b) 2,500 years, Class F

图 69.11: 位移 反应谱 分析

④ 谁将付出 C_S 到 T 六秒的功率, Δ =6 in.

二、能力 (手指计算为皮尔)

地震抵抗系统

AASHTO, Seismic, 2011, §3.3 表示 地震抵抗系统 (是的) 桥梁应提供可靠而不间断的荷载路径, 以便将地震引发的力量传输到周围的土壤, 并有足够的能源分散和/或限制, 以可靠地控制地震引导的流动。桥梁的所有结构和基础元素均能够实现预期转移, 符合选择的地震抵抗设计策略和其他结构要求的要求。设计应基于以下三个全球地震设计策略, 这些指南规格基于桥梁系统的预期行为特征, 图 69.12:

类型 1 具有基本弹性超结构的杜克特子: 此类别包括传统塑料粘贴在柱子和墙壁和废物中, 通过被动土壤抵抗的充分移动限制无缝力量。此外, 还包括可以通过在地面上倾斜限制内性力量的基础, 如电池带沙子集成废物在电池。

类型 2 基本上具有双重超级结构的弹性子结构: 本类仅适用于直线、非滑动、钢材 I 部分合成旋转器超级建筑, 在支持层上有双重交叉框。本策略的使用由主持人批准, 并基于具体案例设计标准和方法。

类型 3 灵活的超结构和子结构与两者之间的冲动机制: 这类包括地震隔离的结构和结构, 在其中使用额外的能量分散设备, 如蒸汽器, 以控制超结构与子结构之间传输的无情力量。

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

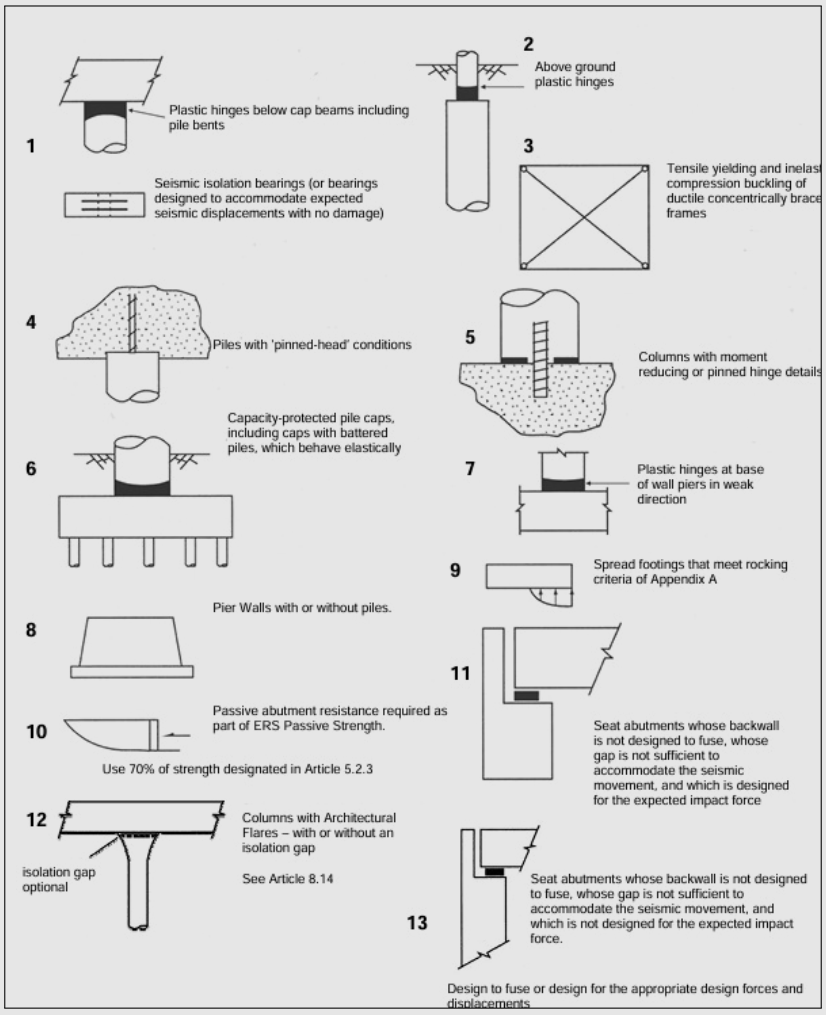


图 69.12: 可用 地震 抵抗 单元 (你是) (AASHTO, Seismic, 2011)

⑤ 从图像 69.5a 考虑的超结构是强化混凝土喷雾, 桥梁不被地震隔离, 没有额外的能源分散装置使用, 因此桥梁的地震抵抗系统 类型 1.

名称时刻能力

⑥ 请注意, 名称时刻的计算并未在这里报告, 并且由 `Kiewit` 提供。

AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 定义预期的名称时刻容量, M_{ne}, 在混凝土和强化钢的强度方面, 当混凝土地线达到 0.003 的大小或强化鋼线达到表中定义的减少最终压力线时 69.4.

基 柱 在图中显示 69.6b, 我们试图使用 Whitney 应力区块或 Mander 的模型计算名称时刻容量。[a]

使用 Whitney 应力 区块, 在基地上发现的 柱 的名称时刻容量是: M_{ne} 620 KIP-FT (± 10%) (威特尼).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在 Mander 的模型 (Mander, Priestley, and Park, 1988) 图像 69.7, 整个压力线曲线是由 3 参数方程描述的

$$\frac{f_c}{f'_{cc}} = \frac{n\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)}{(n-1)+\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}\right)^n} \tag{69.3}$$

$$n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \tag{69.4}$$

$$E_c \text{ (MPa)} = 5,000\sqrt{f'_c \text{ (MPa)}} \tag{69.5}$$

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\varepsilon_{cc}} \tag{69.6}$$

ε_{cc} 是 应变 在限制的 抗压强度 的最大 混凝土:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{c0}\left[1+5\left(\frac{f'_{cc}}{f'_c}-1\right)\right]$$

和 f'_{cc}, 限量 混凝土 的 抗压强度 如下:

$$f'_{cc} = f'_c\left(-1.254+2.254\sqrt{1+\frac{7.94f'_t}{f'_c}}-2\frac{f'_t}{f'_c}\right)$$

在哪个 f'_t 被授予:

$$f'_t = \frac{1}{2}k_e\rho_s f_{yh}$$

在哪个 ρ_s = 交叉限制 体积 的 钢材 至 体积 的 混凝土 核心的比例, f_{yh} = 屈服强度 转向增强, k_e = 限制率。循环的:

$$k_e = \frac{\left(1-\frac{s'}{2d_s}\right)^2}{1-\rho_{cc}}$$

循环螺旋

$$k_e = \frac{1-\frac{s'}{2d_s}}{1-\rho_{cc}}$$

哪里 ρ_{cc} = 长度强化区域与部分核心区域的比例, s' = 螺旋或希望线之间的清晰空间, d_s = 螺旋的直径。

使用 Mander 的模型来定义应力-应变曲线, 在基地上发现的柱的名称瞬间容量是:

$$M_{ne} = 8,551(\pm 10\%) \text{ (kip-ft; Mander)} \tag{69.7}$$

⑦ **期待的 屈服强度** f_{ye} AASHTO, Seismic, 2011, §8.4.2 表明, 强化钢应以压力线的关系模型, 显示初始弹性部分、产量板和压力硬化范围, 压力与压力增加。69.13 (AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.4.2-1).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

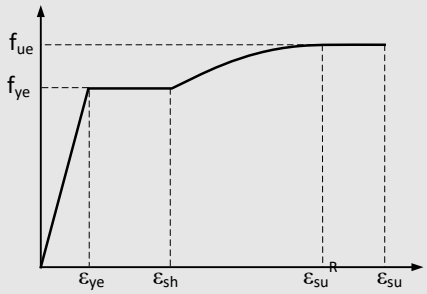


图 69.13: 强化钢压力线模型

而不是具体数据, 表中所示的钢材增强特性 69.4 应该使用。

表 69.4: 应力 增强的 钢材 条品的特性 (AASHTO, Seismic, 2011, table 8.4.2.1)

财产	评论	酒吧大小	ASTM A 706	ASTM A 615 等 (等级 60)
具体最低收益 应力 (基)	fy	#3 – #18	60	60
预期收益 应力 (基)	f_{ye}	#3 – #18	68	68
期待的 抗拉强度 (基)	f_{ue}	#3 – #18	95	95
预期收益 应变	ε_{ye}	#3 – #18	0.0023	0.0023
		#3 – #8	0.0150	0.0150
		#9	0.0125	0.0125
应变 硬化	ε_{sh}	#10 & #11	0.0115	0.0115
		#14	0.0075	0.0075
		#18	0.0050	0.0050
最终压缩 应变	ε_{su}^{R}	#4 – #10	0.090	0.060
		#11 – #18	0.060	0.040
最后一张应变	ε_{su}	#4 – #10	0.120	0.090
		#11 – #18	0.090	0.060

在弹性区域内, 弹性的模块 E_s, 将被视为 29000 ksi。根据桌子 69.4, ASTM A706 带的预期 屈服强度, 尺寸 #3-#第 18 章 被认为是 第 68 章.

⑧ 塑性铰 长度 L_p AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.6 表示, 为列的 解析 塑性铰 长度, L_p, 应以塑料 曲率 被认为是恒定的相当长度的 柱 , 以估计塑料 转角 , 图 。69.16. 同等成员的塑料转移从最大时刻点到破裂点, 应根据塑料旋转来确定。

对于与基础、整体式墩帽、加大尺寸桩柱或套管桩柱刚接的钢筋混凝土柱，塑性铰长度 L_P（单位为英寸）可按 AASHTO, Seismic, 2011, Equation 4.11.6-1 确定：

$$L_P = 0.08L_C + 0.15 f_{ye} d_{bl} \geq 0.3 f_{ye} d_{bl}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里:

L 柱的长度从最大时刻点到时刻分裂点 (in.)
f_{ye} 预期 屈服强度 的长度 柱 增强 钢材 条 (基)
d_{bl} 长度柱的名称直径, 强化钢材条 (在)

由于在这个项目中, 土壤和草坪的相互作用在分析中没有考虑到, 岩石的总高度是柱的高度的总值。(40 ft) 和沙特 (60 ft). 在这种情况下, 冲击点将大约在皮尔的中间高度。($L \simeq 50$ ft). 因此:

$$L_c \simeq 50 \times 12 = 600 \text{ (in)} \tag{69.8}$$
$$f_{ye} = 68 \text{ (ksi)} \tag{69.9}$$
$$d_{bl} = 1.693 \text{ (in)} \tag{69.10}$$
$$L_P = \max\{0.08 \times 600 + 0.15 \times 68 \times 1.693, 0.3 \times 68 \times 1.693\} \tag{69.11}$$
$$= \max\{65.3, 34.5\} = 65.3 \text{ (in)} \tag{69.12}$$

⑨ **塑料时刻** M_p AASHTO, Seismic, 2011, §8.5 表明, 所有二元混凝土成员的塑料时刻容量应按时-曲率计算。$(M - \Phi)$ 基于预期的物质特性进行分析。瞬间曲率分析应包括因恒载而引起的轴力, 以及因转动而导致的轴力量。

和 $(M - \Phi)$ 曲线应以弹性完美塑料反应为理想, 以估计一个成员的跨部分的塑料时刻容量。理想化曲线的弹性部分必须通过标记第一条增强带产量的点。理想化塑料时刻容量应通过平衡实际和理想化的区域来获得。$(M - \Phi)$ 曲线超越第一个增强条产量点, 如图所示 69.14 AASHTO, Seismic, 2011, Fig. 8.5-1.

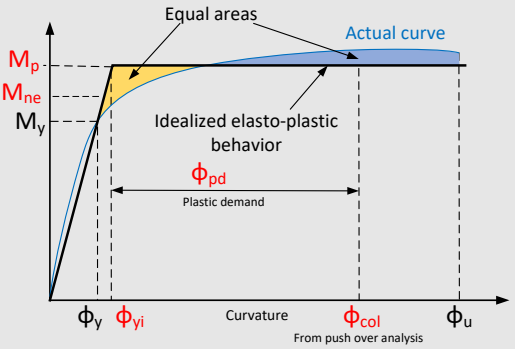


图 69.14: 时刻 曲率 (适应从 (AASHTO, Seismic, 2011, fig. 8.5.1))

列顶部的部分的瞬间曲线、列基础以及与相应理想化曲线相关的钻井中, 如下所定义。

再次注意, 在柱底部有 2 英寸的部分。(在哪里, 库普尔) 在那里, 外部雷巴是不停的。连接器只作为一个连接机 - 你不会从中获得任何力量。你也看到了, 正好在烤箱上方, 还有 2 个" 沙发顶部和外侧的顶部之间的差距。在两种情况下, 底层的塑料时刻应基于仅在内部相关术语内形成的封闭混凝土进行计算。

根据结果, 基于柱的塑料时刻是最小的。然而, 值得注意的是, 这并不意味着第一个塑性铰将发生在基于柱的基础上, 因为容量与需求的比例控制塑料粘贴在结构中的形成顺序。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

⑩ **谢尔** V_p 从静态, 第一个塑性铰发生在柱和相应的表顶部, V_p, 需要在两个列中形成的第一塑料时刻, 图 69.15, is

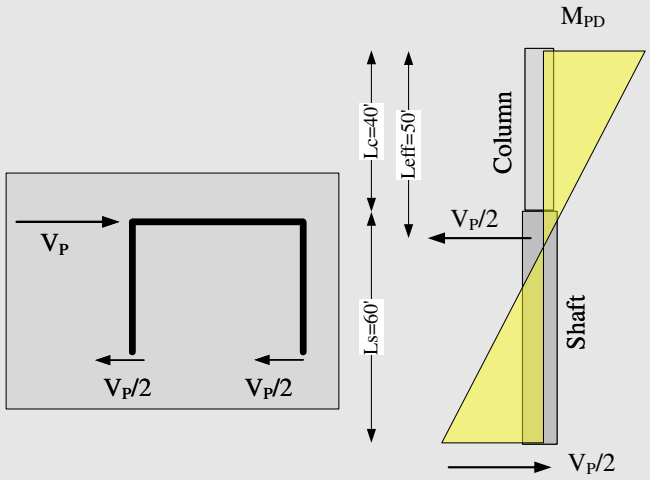


图 69.15: 瞬间分布在皮尔的高度

对于 7ft 直径柱的顶部, $M_p = 15,839\text{K}$ - 五

$$L_{eff} = \frac{L_C + L_S}{2} = \frac{60+40}{2} = 50\text{ft} \tag{69.13}$$

$$\frac{V_P}{2} L_{eff} = M_c^t \Rightarrow V_P = 2\frac{M_c^t}{L_{eff}} = 2\frac{15,839}{50} = 634 \text{ (kips)} \tag{69.14}$$

⑪ **精致 位移** Δ_e 我们使用 曲率 区域方法来确定会员的 转角 和 挠度 [b], 图 69.16.

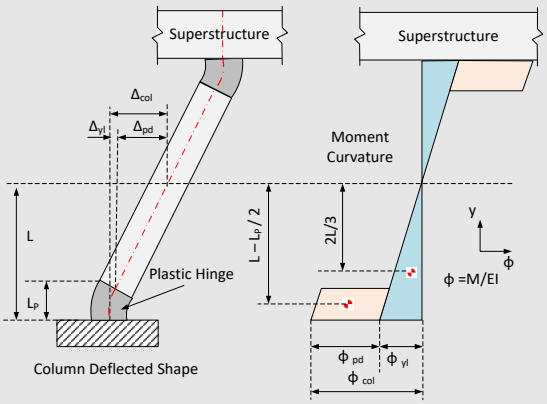


图 69.16: 皮革形状和曲率图表; 适用于 AASHTO, Seismic, 2011, fig. c4.9-2

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \text{ 1st curvature area theorem} \tag{69.15}$$
$$\Delta_e = \left(\Phi_{yld} \frac{L}{2}\right) \times \frac{2}{3} L \text{ 2nd curvature area theorem} \tag{69.16}$$
$$\Phi_{yld} = \frac{M_y}{E_C I_C} \tag{69.17}$$
$$E_c = 57\sqrt{f'_{cc}} = 57\sqrt{5,000} = 4,031 \text{ (ksi)} \tag{69.18}$$
$$I_C = \frac{\pi d_C^4}{64} = \frac{\pi \times 7^4 \times 12^4}{64} = 2,443,920 \text{ (in}^4\text{)} \tag{69.19}$$
$$\Phi_{yld} = \frac{15,839 \times 12}{4031 \times 2,443,920} = 1.93 \times 10^{-5} \tag{69.20}$$
$$\Delta_e = \left(1.93 \times 10^{-5} \frac{50 \times 12}{2}\right) \times \frac{2}{3} (50 \times 12) = 2.32 \text{ inch} \tag{69.21}$$
$$\tag{69.22}$$

⑫ **塑料 位移** Δ_{PD} Φ_{PD} 可以从 图 估计 69.9b 是 0.005 / ft。塑料 位移 可以根据以下方程式确定

$$\theta_{PD} = \Phi_{PD} L_P \tag{69.23}$$
$$\Phi_{PD} = 0.005 \times \frac{65.3}{12} = 0.0272 \tag{69.24}$$
$$\Delta_{PD} = \theta_P \left(L_C - \frac{L_P}{2}\right) \tag{69.25}$$
$$= 0.0272 \left((50 \times 12 - \frac{65.3}{2}\right) \simeq 15.4 \text{ (in.)} \tag{69.26}$$

⑬ **全 位移** Δ_{total} 总数 位移 仅仅是弹性一和塑料一的总数:

$$\Delta_{tot} = \Delta_e + \Delta_{PD} = 2.3 + 15.4 = 17.7 \text{ (in.)} \tag{69.27}$$

第三部分: 需求负载

该列的设计轴负载是 P_{DL} 二千五百克。

⑭ **瞬间在基于柱的时刻 $P\Delta$ 效应** AASHTO, Seismic, 2011, §4.11.5 覆盖了 $P-\Delta$ 效应要求和 AASHTO, Seismic, 2011, Eq. 4.11.5-1 指定为 钢筋混凝土 列

$$P_{DL} \Delta_r \leq 0.25 M_P$$

哪里

P_{DL} 无因素 恒载 (吉普赛)
Δ_r 相对侧面折扣, 在冲突点和塑性铰的最狭窄端之间 (in.).
在这里, 它将是从响应光谱的位移 2500 年.
M_P 理想化塑料瞬间容量基于预期的材料的增强混凝土列 属性 (吉普赛)

相应的 AASHTO 评论指出, $P-\Delta$ 效果可以被忽略。对于不满足前方程式的列, 设计师有选项。考虑其中一个或多个:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 增加 柱 时刻容量, 通过添加长度强化。
- 调整桥梁的动态特征, 如讨论 AASHTO, Seismic, 2011, §4.1.3.
- 重新配置桥梁以减少在列上运作的死负载需求。
- 使用非线性 时程分析 明确考虑 $P-\Delta$ 效果。

唯一严格的考虑方法 $P-\Delta$ 与地震要求相结合的效果是使用非线性时程分析。在使用非线性时程分析时, 需要随后的坚固性、坚固度衰退和能够捕获由于地震引发的循环负载而预期的结构反应的脱负坚固模型。由于这种类型的分析的复杂性, 建议要求 Eq。4.11.5-1 随时满足。

$$\begin{aligned} M_{P-\Delta} &= P_{DL}\Delta_r && (69.28)\\ P_{DL} &= 2,500 \text{ (Kip)} && (69.29)\\ \Delta_r &= 6 \text{ (in.) From Eq. 69.1} && (69.30)\\ M_{P-\Delta} &= (2,500)(0.5) = 1,250 \text{ (kip-ft)} && (69.31)\\ 0.25 * M_P &= 0.25(8,662) = 2,166 \text{ (kip-ft)} \checkmark && (69.32) \end{aligned}$$

哪里 M_P 由 图 定义 69.9b. 因此, $P-\Delta$ 效果不预计会对反应产生重大影响, 并被认为是不可忽视的。

⑮ **谢尔 V_{2500} 基于柱的** V_{2500} 是由 2500 年事件所产生的 she, 并被定义为

$$V_{2500} = C_S P_{DL} = (0.02)(2,500) = 50 \text{ (kips)}$$

C_S 被定义为 $T = 6$ 二、从图像 69.10b 或平等 69.2, 而轴力是给予的。

⑯ **M_{2500} 基于柱的** 基于柱的 2500 年时刻 M_{2500} 被定义为

$$M_{2500} = V_{2500} L_C = (50)(40) = 2,000 < M_P \text{ (kip-ft.)}$$

低于 柱 的容量为 8,662 k-ft。(图 69.9b).

⑰ **要求时刻 vs. 允许时刻** 可允许的时刻是

$$\begin{aligned} \phi M_{ne} &= (0.9)(8,551) = 7,695.9 \text{ (kip-ft)} && (69.33)\\ &> M_{2500}(2,000) && (69.34) \end{aligned}$$

哪里 M_{ne} 来自 EQ。69.7.

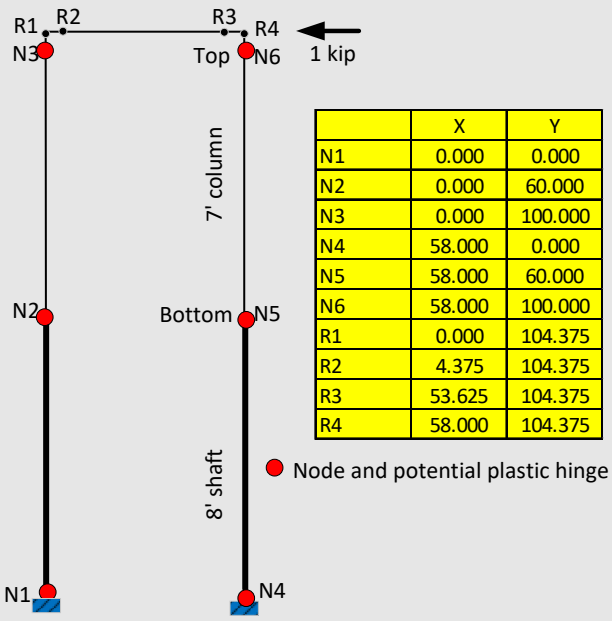
第 4 部分: 静力推覆分析部分

⑱ **模型的描述** 假设一个固定的胶囊梁, 只有列必须模型, 它们应该紧密连接到床顶。

Kiewit 报告了基于 图 中显示的插槽的弹性 静力分析 的步骤按压。69.17. 柱 仅仅是由部分的区域, 惯性矩, 以及弹性 的模块所特征。因此, 无线材料或纤维部分不需要在整个软件模型中定义。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



	X	Y
N1	0.000	0.000
N2	0.000	60.000
N3	0.000	100.000
N4	58.000	0.000
N5	58.000	60.000
N6	58.000	100.000
R1	0.000	104.375
R2	4.375	104.375
R3	53.625	104.375
R4	58.000	104.375

图 69.17: 雷莎模型

⑲ **塑料时刻 M_P 在列的顶部** 桌子 69.5 (被提取到 $N - M_p$ 向您提供的分布式) sshow moment 容量为三个不同的部分和一系列的轴力 (增值相当于 100kips). 这些瞬间容量通过静力推覆分析使用, 以计算轴力对时部的容量的影响, 因为结构被推动, 从而改变轴力。(ΔP 五百基普). 這些也顯示在 图 69.18.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 69.5: 三个不同部分的瞬间容量在一系列轴力

	7 英尺 柱 (顶部)	7 英尺 柱 (BTM)	8 英尺 Shaft
P (K)	M_p (K - 五)	M_p (K - 五)	M_p (K - 五)
-	10,858	5,051	16,234
100	11,067	5,216	16,467
200	11,276	5,379	16,698
300	11,484	5,541	16,929
400	11,692	5,702	17,159
500	11,899	5,862	17,388
600	12,105	6,020	17,617
700	12,312	6,177	17,846
800	12,517	6,332	18,073
900	12,721	6,485	18,299
1,000	12,924	6,637	18,525
1,100	13,126	6,787	18,750
1,200	13,327	6,934	18,974
1,300	13,528	7,080	19,196
1,400	13,727	7,224	19,419
1,500	13,924	7,366	19,639
1,600	14,121	7,505	19,859
1,700	14,318	7,643	20,077
1,800	14,512	7,778	20,296
1,900	14,706	7,911	20,512
2,000	14,898	8,040	20,727
2,100	15,089	8,169	20,941
2,200	15,278	8,295	21,154
2,300	15,467	8,419	21,366
2,400	15,654	8,541	21,576
2,500	15,839	8,662	21,786
2,600	16,024	8,780	21,994
2,700	16,207	8,897	22,200
2,800	16,388	9,011	22,405
2,900	16,568	9,122	22,610
3,000	16,747	9,232	22,812
3,100	16,925	9,340	23,013
3,200	17,101	9,445	23,214
3,300	17,275	9,549	23,412
3,400	17,448	9,651	23,609
3,500	17,619	9,751	23,805

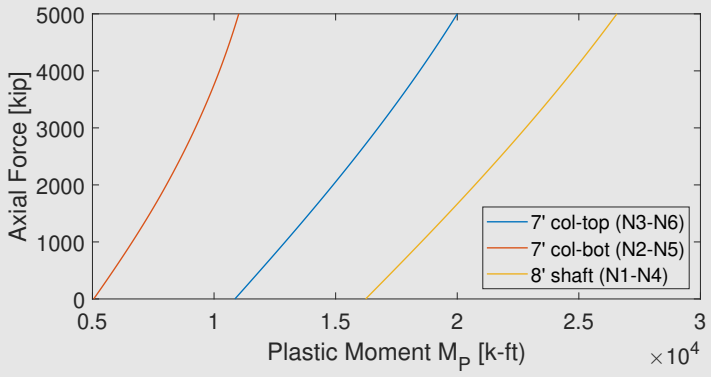


图 69.18: 相互作用图为所需的三个列

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

所有部分的塑料时刻 (计算未在这里报告) 由 图 提供 69.19.

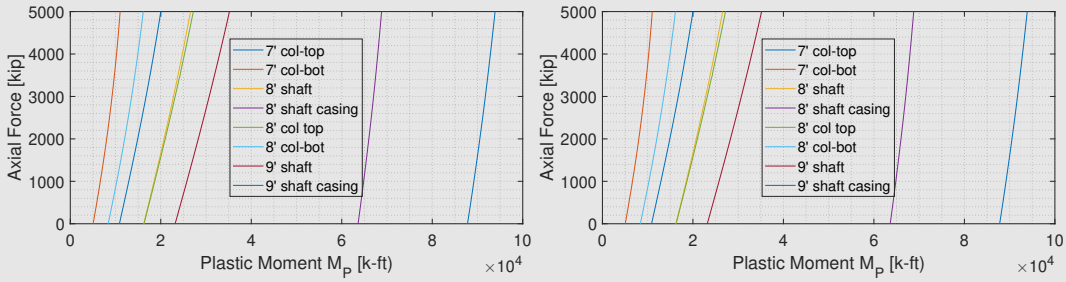


图 69.19: 塑料时刻

解释为 0.95 ϕ 因素 由 `Marilyne Lefebvre` 提供

我认为这个 0.95 因素在方程式中 $M_{EQ} \leq 0.95M_p$ 是塑料时刻所应用的减少因素, 它是两种荷载因素中发现的平均值。(AASHTO, LRFD, 2017) (AAHTO LRFD 桥梁设计特色) 和 (AASHTO, Seismic, 2011) (AASHTO 地震特征). 我会解释背后的哲学, 使用这荷载系数下面:

在 AASHTO LRFD 第 8 版中, 他们对柱的基于力量设计的灵活能力设定了限制。因为在 LRFD 中, 他们没有计算二元性需求, 所以他们添加了一个减少因素为 0.9 的塑料时刻是保守的:

> *Columnn* 需要为最小和最高 轴力 的设计而进行调查。此前的《这些》规格减少了灵活抵抗因子从 *0.9* 到 *0.5* 因为轴 荷载 从 *O* 增加到 $0.20f_c'A_g$, 由于趋势, 在二元性能力的下降, 因为轴荷载增加。这个这个版本的要求是放松, 但一个 $P-\Delta$ 要求已添加 *(*第 *4* 条 四十五条*)* 限制因过量挠度而对双性容量的需求。此外,*R* 因子已保持在其以前的水平。*(*第 *3107* 条*)* 尽管地震设计的回归期从 *500* 年增加到 *1000* 年。在 *NCHRP 12-49* 和 *20-7* 中 *(192)* 建议的灵活抵抗率为 *1.0.* 但是, 由于当前规格是基于强度的, 并且不明确计算二元性需求, 如在 *12-49* 和 *20-7(193)* 规定, 限制因素为 *0.9* 被认为是合理的而不是更严格的分析。
>
> [C5.11.4.1.2](AASHTO, LRFD, 2017)

事实上, 在 (AASHTO, Seismic, 2011), 荷载 抵抗因子是 1.0 因为您正在使用 荷载 组合 1.0DC + 1.0DW + 0.5LL + 1.0EQ 并使用预期的材料属性 (伊。f'_{ce} 和 f_{ye}).

通常在加利福尼亚和华盛顿等高地震区, 您希望使用基于位移的设计, 因为对双重性和位移容量的要求在 AASHTO Seismic 中比在 Aashto LRFD 更严格。

基于位移的设计与基于力量的设计有所不同, 但静力推覆分析的性能相同 - 而不是增加一个水平强度, 你正在增加一个位移.

但是, 对于这个例子, 我们正在展示基于力量的设计与静力推覆分析 (也就是说, 我们将剪力增加到一个塑性铰格式。).

由于戈塔尔处于地震区 A (SD1 = 0.03), AASHTO Seismic 不要求沙夫成为容量保护会员。從這本文的高度觀點 (查看附加词文档), 你可以看到, 只有内部列笼被扩展到相关术语。列螺旋笼子不扩展到相关术语。

有一个 21’-0” 内部的笼子延伸到相关术语, 但过渡强化是连接。柱中的螺旋强化不像典型的容量保护的成员那样扩展到轴承中。因此, 我们确定, 由于这两件事, 毛巾不完全弹性行为, 这意味着塑料绳子可以在毛巾内部形成。通过我们在 RISA 上进行的推翻分析, 我们终于确认了这条绳子的失败机制是相关术语子形成的基础。

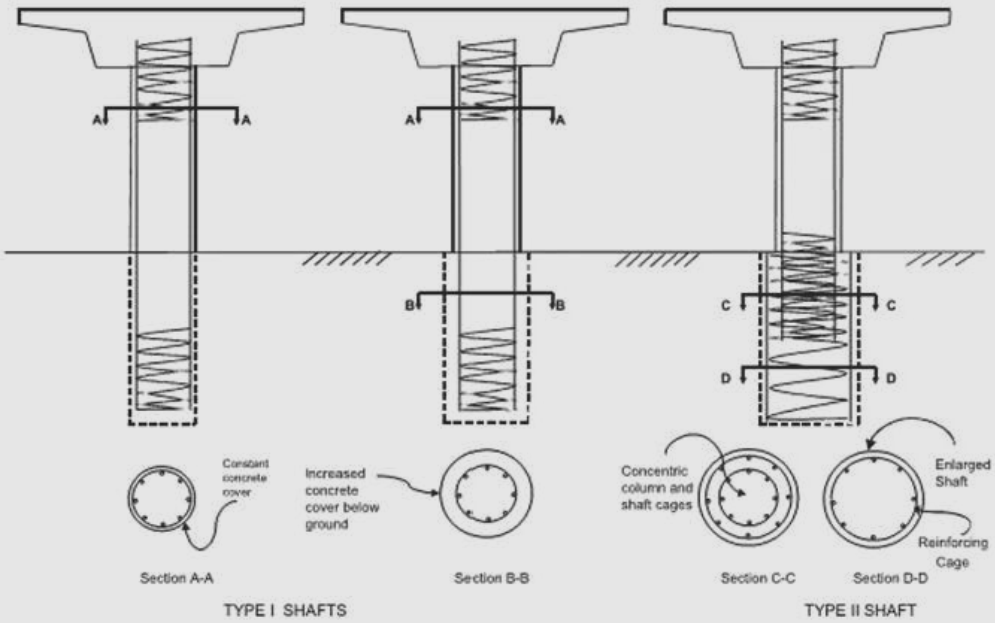
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

至于负载因子, 因为磨损轴不是容量保护的成员, 我们不认为使用 1.0 负载因素适用于柱子的双重设计是合适的, 因为 AASHTO Seismic 基于 1.0 負載因素在容量保護的成员上。因此, 对于初步设计, 而不是使用 1.0 的 荷载 减少因素, 如果我们想继续使用 AASHTO LRFD 的方程式, 我们在分析中自愿使用 0.95 。(是 AASHTO LRFD 和 AASHto Seismic 的平均值). 条 C5.11.4.1.2 允许我们使用一个不同于 0.9 的因素, 如果我们做了一个更严格的分析, 而不是只是依靠代码方程式。(即计算列的移动容量 - 我们通过我们的 pushover 分析进行). 我们只是为柱的塑料容量添加了一种减少因素, 以考虑在轴中的塑性铰形成。

CALTRANS, 2013 提供两种不同的沙格配置的好解释 (查看下面的截图, 表格 Caltrans Seismic Design Criteria Version 1.7), 图 69.20

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



Type I shafts are designed so the plastic hinge will form below ground in the shaft. The concrete cover and area of transverse and longitudinal reinforcement may change between the column and Type I shaft, but the cross section of the confined core is the same for both the column and the shaft. The global displacement ductility demand, μ_D for a Type I shaft shall be as specified in Section 2.2.4, with an upperbound value corresponding to that of the supported column.

Type II shafts are designed so the plastic hinge will form at or above the shaft/column interface, thereby, containing the majority of inelastic action to the ductile column element. Type II shafts are usually enlarged shafts characterized by a reinforcing cage in the shaft that has a core diameter larger than that of the column it supports. Type II shafts shall be designed to remain elastic. See Section 7.7.3.2 for design requirements for Type II shafts.

Figure 2.2.4-1 Shaft Definitions

NOTE:
Generally, the use of Type II shafts should be discussed and approved at the Type Selection Meeting. Type II Shafts will increase the foundation costs, compared to Type I Shafts, however there is an advantage of improved post-earthquake inspection and repair. Typically, Type I shafts are appropriate for short columns, while Type II shafts are used in conjunction with taller columns. The end result shall be a structure with a balanced stiffness as discussed in Section 7.

图 69.20: 卡尔特兰的沙夫定义 (CALTRANS, 2013)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

一般情况下, 类型二轴承的使用应在类型选择会议上进行讨论和批准。类型 *II* 轴承将增加 基础 的成本, 与 *1* 型轴承相比, 但是有改善后 地震 检查和维修的好处。通常, 型 *I* 切割合适于短列, 而类 *II* 切断合适与更高的列。最终结果应按照第 *7* 节所讨论的平衡坚固结构。

(CALTRANS, 2013)

20 **分析 I; 没有灵魂; 预塑料** 我们开始分析框架 (静态不确定) 使用软件的分析, 用于单元侧面力量 1 kip, 表 69.6.

表 69.6: 分析结果: 零环

$V(K)$	诺德	P_{eq} (K)	M_{EQ} (K - 五)	Δ (在)
1	N1	-0.805	28.84	0.000
	N2	-0.805	-1.17	-0.008
	N3	-0.805	-21.17	-0.013
	N4	0.805	28.82	0.000
	N5	0.805	-1.17	-0.008
	N6	0.805	-21.17	-0.013

21-22 **增長分析 I (散布板)** 创建一个新的桌子 (散布板) 哪里

- P_{EQ}, M^i_{EQ}, 和 Δ 是从以前的分析结果中获得的。(桌子 69.6) 由 剪力 加倍在 柱 1 (一分钟内更多关于它).
- P_{total} 这是总的 P_{DL} (2500 千里) 和 P_{eq}.
- $M_{EQ,total}$ 它只是相当于所有先前的值和当前的值的总额。例如, 在桌子上 69.9, $M^i_{EQ,total} = M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ}$ 对于 N1

$$\begin{aligned} M^i_{EQ,total} &= M^{i-1}_{EQ,total} + M^i_{EQ} \\ &= 19,322 + 282 = 19,603 \end{aligned}$$

- M_P 需要特别注意, 因为部分的轴力变化随着水平力量在顶部增加, 因此瞬间能力也发生变化。因此,Excel 表使用 **趋势** 需要最少的四方接近的函数 **线性** 两个终点之间的功能, 如:
`= 趋势('P vs Mp'!D3:D 五十三, 'P vs Mp'!A3:A53,F10)`
在目前的分析中, $0 < P_{total} < 5,000$.
- 我们认为下一个塑性铰将形成当 $M_{eq,Tot} \geq 0.95 M_p$

然而, 问题是真正的非线性, 因为形成一个环的条件取决于在这个阶段的叶子的大小。因此, 我们将增加其价值。*V* (10 基普) 直到一根形状。在此情况下, 它是 670kips。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 69.7: 轴调整导致第一环形成

V (K)	诺德 (K - 五)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K - 五)	Δ (在)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K - 五)	M_p (K - 五)	塑料英雄?	$M_P/M_{eq,Tot}$
670	N1	-539.66	19,322	0.00	1,960	19,322	20,531	NO	1.06
	N2	-539.66	-784	-5.19	1,960	-784	7,796	NO	-9.94
	N3	-539.66	-14,186	-8.79	1,960	-14,186	14,704	是的	-1.04
	N4	539.66	19,310	0.00	3,040	19,310	22,769	NO	1.18
	N5	539.66	-785	-5.19	3,040	-785	9,085	NO	-11.58
	N6	539.66	-14,182	-8.78	3,040	-14,182	16,687	NO	-1.18

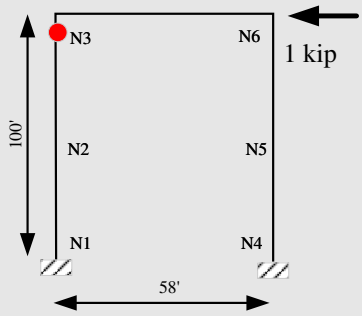


图 69.21: 改造的弹性模型, 形成第一 塑性铰

表 69.8: 分析结果: 一根手指

V (K)	诺德	P_{eq} (K)	M^2_{EQ} (K - 五)	Δ (在)
1	N1	-0.565	28.15	0.000
	N2	-0.565	11.23	-0.009
	N3	-0.565	0.00	-0.022
	N4	0.565	43.47	0.000
	N5	0.565	0.37	-0.012
	N6	0.565	-28.37	-0.021

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 69.9: Shear 调整导致第二环

V (K)	诺德 (K - 五)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K - 五)	Δ (在)	P_{Tot} (K)	$M_{EQ,Tot}$ (K - 五)	M_p (K - 五)	塑料英雄?	$M_P/M_{eq,Tot}$
10	N1	-5.65	282	0.00	1,955	19,603	20,519	是的	1.05
	N2	-5.65	112	-0.09	1,955	-672	7,789	NO	-11.59
	N3	-5.65	0	-0.22	1,955	-14,186	14,694	是的	-1.04
	N4	5.65	435	0.00	3,045	19,744	22,781	NO	1.15
	N5	5.65	4	-0.12	3,045	-781	9,092	NO	-11.64
	N6	5.65	-284	-0.21	3,045	-14,466	16,697	NO	-1.15

㉓-㉕ 一只戒指

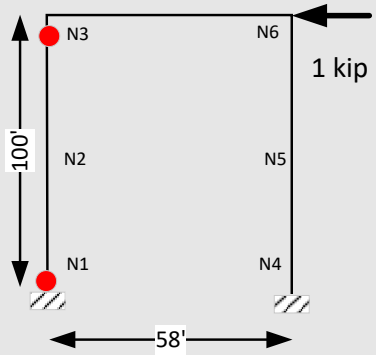


图 69.22: 改造二次塑性铰形成后的弹性模型

表 69.10: 分析结果; 两次倾斜

V (K)	诺德	P_{eq} (K)	M^3_{EQ} (K - 五)	Δ (在)
1	N1	-0.755	0.00	0.000
	N2	-0.755	0.00	-0.019
	N3	-0.755	0.00	-0.031
	N4	0.755	60.61	0.000
	N5	0.755	0.63	-0.017
	N6	0.755	-39.38	-0.030

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

表 69.11: 带到第三和第四轴的线调整

V (K)	诺德 (K - 五)	P_{EQ} (K)	M_{EQ} (K - 五)	Δ (在)	P_{total} (K)	$M_{EQ,total}$ (K - 五)	M_p (K - 五)	塑料英雄?	$M_P/M_{eq,total}$
40	N1	-30.18	0	0.00	1,925	19,603	20,457	是的	1.04
	N2	-30.18	0	-0.74	1,925	-672	7,753	NO	-11.54
	N3	-30.18	0	-1.24	1,925	-14,186	14,638	是的	-1.03
	N4	30.18	2,425	0.00	3,075	22,169	22,844	是的	1.03
	N5	30.18	25	-0.67	3,075	-755	9,128	NO	-12.08
	N6	30.18	-1,575	-1.20	3,075	-16,041	16,753	是的	-1.04

26-27 兩個靈魂

27 倒塌机构 (四个灵魂) 到目前为止, 我们有一个机制, 图 69.23 我们需要收集负担。

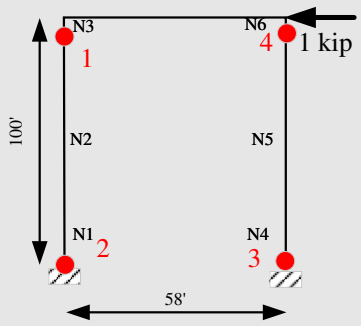


图 69.23: 崩溃机制, 形成 4 个塑料轴承

在桌子上 69.12:

$$
\begin{aligned}
V_{tot} &= 670 + 10 + 40 = 720 \\
P^{N6}_{eq,Tot} &= 539.6 + 5.65 + 30.18 = 575.49 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 19,310 + 435 + 2,425 = 22,169 \\
\Delta^{N5}_{Tot} &= -5.19 - 0.12 - 0.67 = -5.97 \\
P^{N5}_{Tot} &= 2,500 + 575.49 = 3,075 \\
M^{N4}_{eq,Tot} &= 22,169 \text{ from last analysis}
\end{aligned}
$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 69.12: 失败时的力量、瞬间和转移的集合

V_{Tot}	诺德	$P_{EQ,Tot}$	$M_{EQ,Tot}$	Δ_{Tot}	P_{Tot}	$M_{EQ,Tot}$	M_p
720	N1	-575.49	19,603	0.00	1,925	19,603	20,457
	N2	-575.49	-672	-6.02	1,925	-672	7,753
	N3	-575.49	-14,186	-10.25	1,925	-14,186	14,638
	N4	575.49	22,169	0.00	3,075	22,169	22,844
	N5	575.49	-755	-5.97	3,075	-755	9,128
	N6	575.49	-16,041	-10.19	3,075	-16,041	16,753

28 **皮尔失败** 塑料相关术语的进步形成最终导致一个列机制被描述在上面。(AASHTO, Seismic, 2011, §4.7) 指向塑性铰形成的位置。在此分析中, 塑料相关术语子预计在皮层的顶部和底部发展。

因此, 设计符合 AASHTO 规格。

29 **首頁 柱 位移 在失敗時** 从桌子 69.12 顶部 柱 位移 在节点 3 发生, 相当于 10.25 英寸 (与 N3 相匹配).

30 **静力推覆分析和手动计算的比较** 手工计算结果 $\Delta_{tot} = 17.7$ 英寸到 eq。69.27,

通过 静力推覆分析 , $\Delta_{tot} = 10.19$ 英寸。

显然, 手计算在保守方面。

31 **皮尔设计评估** 容量为 360kips ($V_{tot}/2$) 远超出了荷载的设计 $V_{2,500}$ 五十吉普。同时, 目前的能力 ($M_{eq,total}$) 在 静力推覆分析 中计算的设计负载远远超过第 3 部分计算的 (M_{2500} 二千 KIP-FT).

因此 设计是合适的。

[a]我们在课堂上追求过这样的练习, 尽管有一个稍微简单的方程式。(Desayi, 1964) 与 Mander 和直角部分相比。该代码可以轻松扩展, 以便在此部分进行分析。

[b]第一理论: 兩點之間的線路變更等於 曲率 的區域 (M/EI) 这两点之间的图表。
第 2 理论 (适用于这里): 兩個點之間的 位移 與 曲率 圖表下的區域時刻相同, 對於分裂形狀的點。

69.4.2 增長 动力分析 (伊达)

下一篇: 重复 *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures* 由 Mahdavi, 2023.

35 增長 动力分析 (伊达) 它是一种在地震负载下评估结构反应的方法。在这种方法中, 每个地面动作记录都会被系统规模为多重度测量。(IM) 水平, 工程需求参数 (EDP) 计算为每个规模级别 (Vamvatsikos and Cornell, 2002).

36 IDA 曲线是通过在不同强度水平上连接 EDP 值而构建的, 经常使用 spline 匹配 (Vamvatsikos and Cornell, 2004).

37 这种方法在地震脆弱性评估中广泛使用, 因为它允许研究人员在不同强度水平上确定崩溃的可能性。它确保结构崩溃发生在足够高的强度, 使其有用于概率性地震评估。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

38 然而, 大规模的地面动作可能会扭曲其频率内容, 导致不现实的记录形状可能影响结构反应预测。(Haselton et al., 2011).

39 为了评估崩溃的概率,IDA 专注于计算:

$$P\left[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im\right]$$

40 使用 IDA 的脆弱性估计有三种主要方法:

EDP 基于容量的脆弱性与 IDA 的完整结果 IDA 是通过插入 IDA 的曲线, 并定义在需求时崩溃,EDP_d 超越结构能力,EDP_c (Zareian et al., 2010). 在一定的强度水平上崩溃的可能性被计算为:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im]=P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{IM}=im]=\sum_{\text{all } edp_c}P[\mathrm{EDP}_d\geq\mathrm{EDP}_c|\mathrm{EDP}_c=edp_c,\mathrm{IM}=im]P[\mathrm{EDP}_c=edp_c]$$

形象 69.24a 描述不同地面动作记录的 EDP 容量值, 以及两个特定的 IM 级别的 EDS 需求。通过计算每个 IM 级的崩溃概率, 并将结果分配, 可以获得一个实验性脆弱度曲线, 然后使用正常日志积累分布功能进行调整。(CDF).

基于能力的 IM 脆弱性与完整的 IDA 结果 故障强度测量能力,IM_{cap}, 被定义为每个 IDA 曲线的无形点 (形象 69.24b). 崩溃的可能性是由:

$$P[\mathrm{C}|\mathrm{IM}=im]=P[\mathrm{IM}_{cap}<\mathrm{IM}=im]$$

脆弱性函数是通过将正常 CDF 合并到崩溃数据中获得的。一般使用两种统计方法来估计日志正常参数, η 和 β:

时刻的方法 (MM) MM 方法估计 η (媒介) 和 β (路透式标准差) 通过匹配日志正常分布时刻, 以便数据崩溃:

$$\hat{\eta}=\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{N_T}\ln(\mathrm{IM}_{cap_i})}{N_T}\right),$$

$$\hat{\beta}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_T}\left[\ln\left(\mathrm{IM}_{cap_i}\right)-\ln\left(\hat{\eta}\right)\right]^2}{N_T-1}}$$

哪里 N_T 是地动记录的总数。

最大概率估计 (MLE) MLE 估计 η 和 β 通过最大限度地提高 Log-Slikelyity 功能:

$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\}=\underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax}\sum_{i=1}^{N_T}\ln\left\{\phi\left(\frac{\ln(\mathrm{IM}_{cap_i})-\ln(\eta)}{\beta}\right)\right\}$$

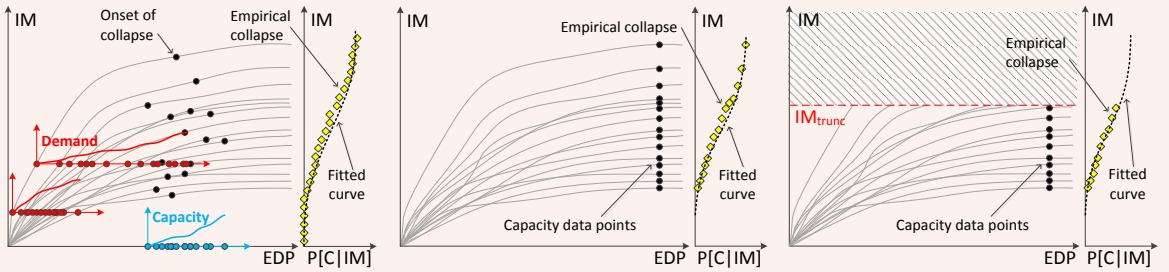
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

MLE 通常提供更准确的参数估计, 特别是对于小数据集。

基于 IM 容量的脆弱性与折叠 IDA 结果 在折叠 IDA 中, 最大 IM 水平仅限于 IM_{trunc}, 这意味着某些记录不会崩溃 (形象 69.24c). 结果是审查的数据, 需要更改的概率功能:

$$\mathcal{L}(\eta, \beta; \mathbf{IM}_{cap}, \text{IM}_{trunc}) = \left(\prod_{i=1}^{N_C} \phi \left(\frac{\ln(\text{IM}_{cap_i}) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) \times \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln(\text{IM}_{trunc}) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right)^{N_T - N_C}$$

哪里 N_C 是导致崩溃的记录数量。参数 η 和 β 使用最高概率估计与审查数据进行估计 (MLECD) (Baker, 2015) 确保对被压缩数据集的准确脆弱性评估。



(a) EDP 基于容量; 完整 IDA (b) 基于能力的 IM; 全 IDA (c) 基于能力的 IM; Truncated IDA

图 69.24: 概念崩溃脆弱性曲线基于 IDA 方法

69.4.3 多条线路分析 (MSA)

下一篇: 重复 Saouma and Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

[41] 不同 动力分析 (伊达), 在地面动作的固定集被逐步规模, 多条线分析 (MSA) 在多种分辨率指定的强度水平上进行分析 (西尔斯).

[42] 当进行三或多个 SIL 的分析时, 该方法被称为 MSA。(Cornell and Jalayer, 2002). 如果只使用一个或两个 SIL, 则称为单条线分析。(SSA) 双条线分析 (DSA) 相应。

[43] MSA 提供比 IDA 更大的灵活性。连续 SIL 之间的间隔不需要均匀; 例如, 在图中 69.25a,SIL 之间的空间 $_2$ 和 SIL_3 和 SIL 之间 $_6$ 和 SIL_7 比其他情况更大。这种变量可以归因于分析所需的特定过度频率。

[44] 每个 SIL 所分配的地面动作数量也可能有所不同, 并且每个条纹所选择的动作可能会有所不同。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

45 SIL 的数量是可选的, 但增加它会提高脆弱性曲线的准确性, 以额外的计算努力为代价。在图像中 69.25a, 分析进行八个 SIL, 但可以包括更多, 直到所有地面动作到达崩溃。

46 由于在条线上选择的地面动作的变化,SIL 的实验性崩溃的可能性 $_i$ 可能等于或大于 SIL 的。$_{i+1}$. 在图像中 69.25a 安静 $_4$ 有比 SIL 更高的实验性崩溃的可能性 $_5$, 而数据崩溃点在 SIL 的数量 $_7$ 和 SIL_8 是相同的。

平均和逻辑的估计 标准差

47 脆弱性函数的中间和逻辑标准差可以通过以下三种方法之一进行估计。

排序错误的总数 (SSE) 这种方法尽量减少观察到崩溃分裂和脆弱性功能预测的概率之间的平面错误总数:

$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmin} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_{C_i}}{N_{T_i}} - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right)^2$$

哪里 N_{C_i} 和 N_{T_i} 是崩溃的案例数量和地面动作总数 $\text{IM} = im_i$ 相应, 以及 m 是 IM 级别的数量。

最大概率估计 (MLE) 假设每个 SIL 的崩溃和非崩溃事件是独立的, 可以使用二元分布。可行性 质量 函数与可行性的二元分布 p is:

$$\mathcal{L}(p\,;\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{u_i}{v_i} p_i^{v_i} \left(1 - p_i\right)^{u_i - v_i}$$

哪里 v_i 代表了崩溃的数量。u_i 审判。MSA 的概率函数可以写为:

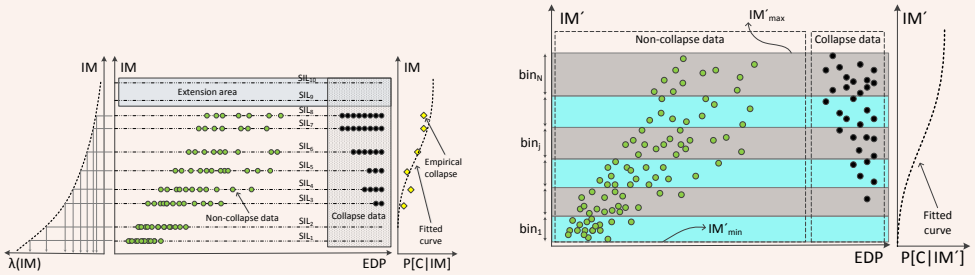
$$\mathcal{L}(\eta,\beta;\,\mathbf{IM},\mathbf{N_T},\mathbf{N_C}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right)^{N_{C_i}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right]^{N_{T_i} - N_{C_i}}$$

往往更方便地最大限度地提高概率函数的逻辑, 从而产生估计的参数。(Baker, 2015):

$$\{\hat{\eta},\hat{\beta}\} = \underset{\hat{\eta},\hat{\beta}}{argmax} \sum_{i=1}^{m} \left(\ln\binom{N_{T_i}}{N_{C_i}} + N_{C_i} \ln\left(\Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) + (N_{T_i} - N_{C_i}) \ln\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(im_i) - \ln(\eta)}{\beta} \right) \right) \right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

线性回归转型空间 (LRTS) 也被称为 B 方法 Porter, Kennedy, and Bachman, 2007, 这种方法是根据替代强度测量选择地面动作时使用的。(IM′). 在这种情况下,SSE 和 MLE 不再适用, 因为崩溃数据点不限于预定义的 SIL 而在 IM 中传播。′ 空间 (形象 69.25b). 程序包括识别 IM'_i 每个数据点的值, 分为 N 比恩在哪里 $N = \lfloor \sqrt{M} \rfloor$, 并确定平均强度测量为 bin。一条回归线随后安装在转型空间中, 以获得 η 和 β 定义脆弱性功能。



(a) 基于初级 IM　　(b) 基于替代 IM′

图 69.25: 概念崩溃脆弱性曲线基于 MSA 方法

69.4.4 云分析 (克拉)

下一篇: 重复 Saouma and Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

[48] 云分析 (克拉) 一个结构被相对较大组的未分裂或记录的地面动作, 并以数字分析的程序。

[49] 如果地面动作记录从预定义的字符串中选择, 则它们代表一个地震场景, 其特点是: (M_{bin}, R_{bin}), 在哪里 M_{bin} 和 R_{bin} 相应的代表性大小和距离的相关术语, 分别 (Jalayer, 2003).

[50] 从分析结果, 工程需求参数之间的关系 (EDP) 和强度测量 (IM) 它是建立的, 形成所谓的“云响应”。

[51] CLA 常用与 probabilistic 相结合 地震需求分析 (PSDA). 一个广泛接受的假设是, 从 CLA 获得的差异数据点显示了逻辑空间中的线性趋势, 这相当于在算法空间中的权力法关系。(Padgett, Nielson, and DesRoches, 2008; Jankovic and Stojadinovic, 2004; Ramamoorthy, Gardoni, and Bracci, 2006):

$$\eta_{\text{EDP|IM}} = a \cdot \text{IM}^b \tag{69.35}$$

哪里 a 和 b 常见的回归, 以及 $\eta_{\text{EDP|IM}}$ 是所提供的 EDP 的平均值。EDP 的 Logarithmic 标准差 被称为 $\beta_{\text{EDP|IM}}$, 被估计为:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$\beta_{\text{EDP|IM}} = \sigma_{\ln(\text{EDP|IM})} \approx \sqrt{\frac{\sum \left(\ln(edp_i) - \ln(a \cdot \text{IM}^b)\right)^2}{n-2}} \tag{69.36}$$

哪里 n 是非线性过渡分析的数量。

69.4.5 耐力时间分析 (艾特)

下一篇: 重复 Saouma and Hariri-Ardebili, 2021 Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures.

耐力时间分析 (艾特) 这是一个动态推移程序, 用于估计结构在受预先设计的强化刺激时的地震性能。(Estekanchi, Vafai, and Sadeghazar, 2004). 模拟的 加速度 函数旨在逐步从一个 **低刺激水平**, 反应保持弹性, 到一个 **中间刺激水平****, 非线性行为开始, 最后到一个 *高刺激水平***, 结构达到失败。这一整个反应进展是在一个 **单一**时间历史分析中捕获的。

耐用时间 加速度 功能 (阶段)

ETA 的一个关键挑战是创造 **耐用时间 加速度 功能 (阶段)** (Nozari and Estekanchi, 2011) 其次, 它被进一步优化为 Mashayekhi and Estekanchi, 2013. ETAF 的生产过程由以下步骤组成:

步骤 1: 创建一个静态随机加速度函数 加速度函数, 称为 $Z(t)$ 被用作生成 $\delta t = 0.01$, $N_{pnt} = 2^{11}$ 节点, 和峰地 加速度 (PGA) = $1.0g$. 点数的数量, N_{pnt} 是可选的。

步骤 2: 转换到频率域 應用 Fourier 轉換以獲得:

$$Z(i\omega) = \mathcal{F}(Z(t)),$$

哪里 i 是想象的单位和 ω 是频率。

步骤 3: 应用过滤功能 一个过滤函数被应用来形容频率内容, 以便它类似于真正的地面动作。(Clough and Penzien, 1993):

$$A(i\omega) = \frac{1 + 2i\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 2i\xi_1 \frac{\omega}{\omega_1}} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + 2i\xi_2 \frac{\omega}{\omega_2}} Z(i\omega)$$

第一個用語代表低通過過濾器, 而第二個是高通過過滤器。参数 ω_1, ξ_1, ω_2, 和 ξ_2 相应于这些过滤器的频率和蒸发率。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

步骤 4: 调整频率内容以匹配目标频谱 进行多种调节, 以修改频率内容, 确保产生的反应谱与目标频谱相匹配:

$$A^{new}(i\omega) = A^{old}(i\omega)\frac{S_a^{\text{trg}}(\omega)}{S_a^{\text{gen}}(\omega)}$$

哪里 $S_a^{\text{trg}}(\omega)$ 是目标频谱 (从建筑代码或概率性地震 危险性分析), 和 $S_a^{\text{gen}}(\omega)$ 它是产生的频谱。

步骤 5: 修改加速度时间历史 线性配置功能, $l(t) = t/t_{\text{trg}}$, 适用于加速度时间历史, 以确保随着时间的推移加剧。参数 t_{trg}, 通常设置为 10 秒, 是可选的。

步骤 6: 优化响应光谱 加速度 和 位移 响应频谱通过在时间域中的优化功能进行修改:

$$\underset{a_g}{minF}(a_g) = \int_0^{T_{max}}\int_0^{t_{max}}\left\{\left[S_a(T,t) - \frac{t}{t_{\text{trg}}}S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2 + \chi_0\left[S_d(T,t) - \frac{t}{t_{\text{trg}}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 S_a^{\text{trg}}(T)\right]^2\right\}$$

哪里 a_g 被寻找的, χ_0 它是重量参数, 并且 $t_{\max}$ 和 $T_{\max}$ 在优化过程中, 最长时间和期限。ETAF 样品显示在图中 69.26a.

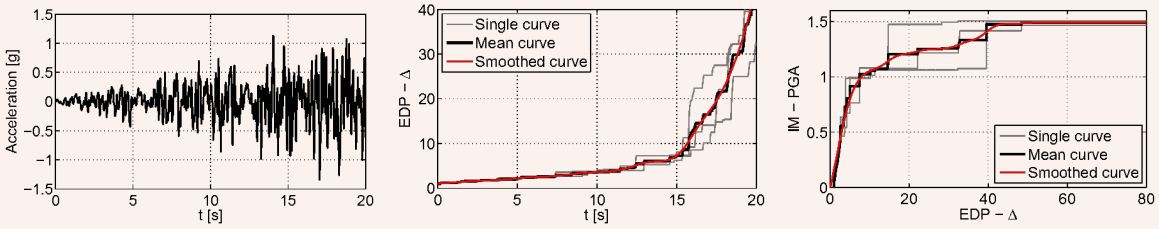
取消能力功能

要实现容量功能, 首先必须确定 ETA 曲线。(形象 69.26b). ETA 曲线将随着时间的推移,EDP 的最高绝对值分为:

$$\Omega(\text{EDP}(t)) \equiv \max\{\text{Abs}(\text{EDP}(\tau) : \tau \in [0,t])\}$$

时间参数然后转换为 IM, 利用时间与加速度之间的直接关系。(形象 69.26a). 最后, **EDP-IM** 坐标转换为 **IM-EDP** 座标, 提供步骤性容量功能。此功能可随后调整。(形象 69.26c).

因为 A **单身** ETAF 受 主条目: 信任区 由于其随机性质, 三种不同的 ETAF 的平均值通常用于提高可靠性。(Hariri-Ardebili and Mirzabozorg, 2014; Hariri-Ardebili and Saouma, 2015).



(a) 示例阶段 (b) ETA 曲线 (c) 能力功能

图 69.26: 基于 ETA 的能力功能生成

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

69.4.6 总结

52 地震脆弱性分析可以通过不同的方法进行, 每一个都有自己的优点和限制。本章讨论了五种广泛使用的方法: 经典静力推覆分析 (波), 增長 动力分析 (伊达), 多条线分析 (MSA) 云分析 (克拉), 和耐力时间分析 (艾特).

53 这些方法的比较在表中提供 69.13 虽然图像 69.28 总结其关键特征和应用。

古典 静力推覆分析 (波)

54 古典 静力推覆分析 (波) 是 A **静态** 用于估计结构在单调增加侧负载下的地震反应的方法。

55 该方法假设结构性反应可以通过单一不变的加载模式捕获, 通常基于基本的振型. 虽然 POA 是计算效率高, 并且在性能基于地震设计中广泛使用。**不捕获更高模式效果或动态 地震 加载的变量**.

56 POA 提供能力曲线的估计, 但缺乏概率评估能力。

增長 动力分析 (伊达)

57 IDA 是 **动态** 地动记录的方法 **加大规模** 多重强度测量 (IM) 水平, 以及相应的工程需求参数 (EDP) 值是计算的。

58 和 *IDA* **曲线**, 建造 使用这些结果, 可通过在不同 IM 级别的崩溃概率识别机会进行概率性地震评估。

59 形象 69.24 描述了基于 IDA 的不同脆弱性估计方法。虽然 IDA 提供全面的结构性响应数据, 但它有限制, 如在记录被扩展时地面运动频率内容中的潜在扭曲。

多条线路分析 (MSA)

60 MSA 在 IDA 上改善, 通过进行几次地震分析 **差异强度水平** *(西尔斯)* 而不是不断的记录。

61 这种方法提高了统计强度, 并允许更准确的脆弱性估计。与 IDA 不同,MSA 不承认固定集的地面动作; 不同的记录可以在不同的 IM 级别使用。

62 MSA 的灵活性在图中被证明 69.25, 这表明 SIL 是如何选择的。每个 SIL 中获得了实验性崩溃的概率, 并获得了不同的回归技术 - 如: **排序错误的总数** *(SSE)* **最大概率估计** *(MLE)*, **和线性回归在转型空间** *(LRTS)* 可用于脆弱性功能估计。

云分析 (克拉)

63 CLA 与 IDA 和 MSA 不同, 通过对结构进行 **大量不受破坏的地面动作**而不是不断增加 IM 水平。

64 这一结果在一 **云答案**, 在那里,EDP 对所有记录的 IM 进行分配。CLA 的主要优点是它捕获 **自然变量** 在地面动作记录中, 没有人工修改它们。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

65 EDP 和 IM 之间的关系往往被认为是权力法的形式, 如平衡中所描述。69.35.

66 和 **标志性 标准差 的** *EDP* **提供** *IM* 以平衡为估计 69.36 提供对地震脆弱性评估的有效但简化方法。

耐力时间分析 (艾特)

67 ETA 是 A **动态** *pushover* 结构所应对的方法 **预先设计的强化兴奋** 而不是真实的地震记录。

68 和 **耐用时间 加速度 功能 (阶段)** 它们产生, 以逐步增加地震强度, 使结构性行为能够在单一时间历史分析中通过弹性、非线性和失败状态进行评估。ETAF 生成过程在图中详细描述 69.26 描述了如何修改加速度时间历史, 以匹配目标光谱并优化响应特性。

69 最终结果是 A **能力功能**, 描述结构的反应, 并在时间内提供脆弱性信息 IM - EDP 格式。

比较与应用

70 五种方法的每一个服务于不同的目的, 取决于准确度、计算成本和所涉及的假设。形象 69.27 提供非线性过渡分析的比较概述, 描绘输入数据要求和对不同方法的预期结构反应。

71 此外, 桌子 69.13 提供 POA、IDA、MSA、CLA 和 ETA 的侧面比较。

表 69.13: 地震性结构分析方法的比较

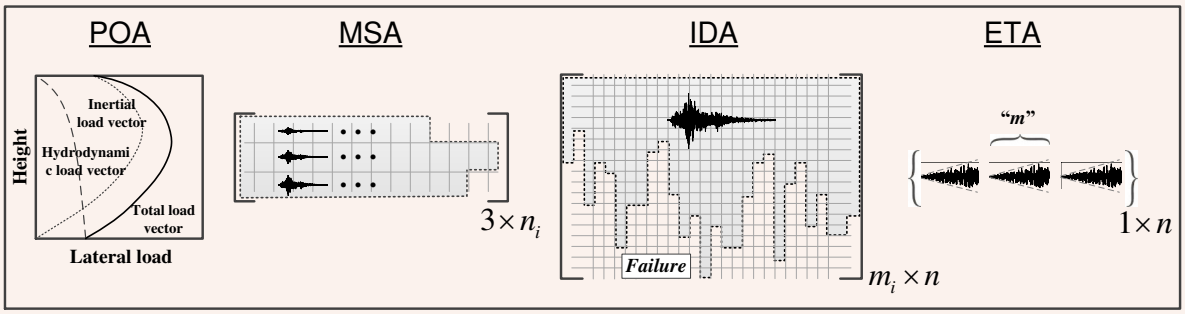
方法	类型	输入数据	计算机成本	尝试 - 双重	限制
波	静态	单一 pushover 曲线	低	No	忽略动态效应, 没有变量
伊达	动态	滑动地面动作	高	是的	频率内容扭曲因扩展
MSA	动态	多级 IM, 未分类记录	平均	是的	需要多种地面动作每 SIL
克拉	动态	大型未分类记录集	平均	是的	承认 EDP-IM 关系中的 Log-linear 趋势
艾特	动态	人工创造的兴奋	平均	No	合成兴奋可能不符合真实记录

数字 69.28

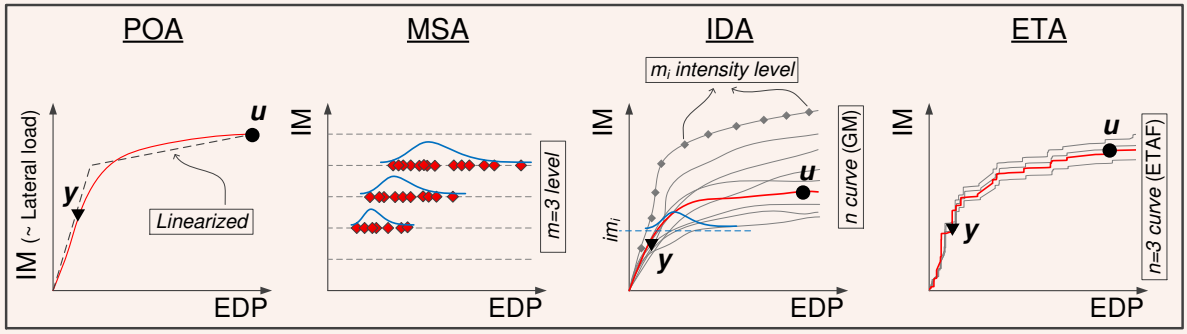
69.5 什么是下一个

72 在下一章中 (70) 我们将对本章中讨论的非线性地震分析进行定量评估。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 不同可能的输入类型为非线性过渡 (除了 POA) 分析



(b) 分析结果评估

图 69.27: 四种不同的策略 (Hariri-Ardebili, Saouma, and Porter, 2016)

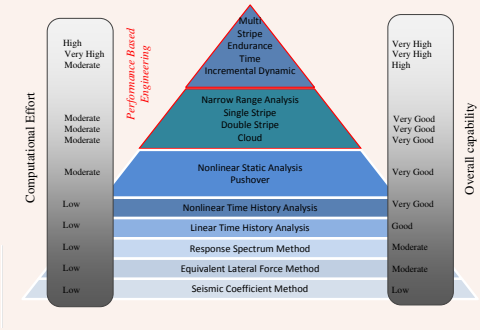
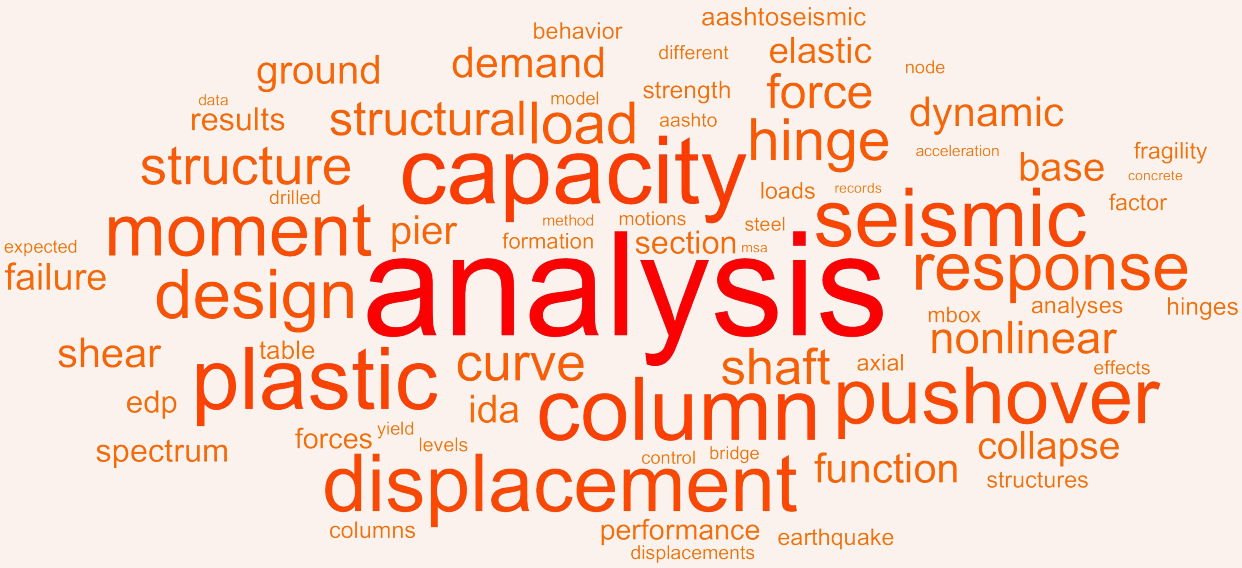


图 69.28: 地震分析的相对复杂性

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



审阅稿

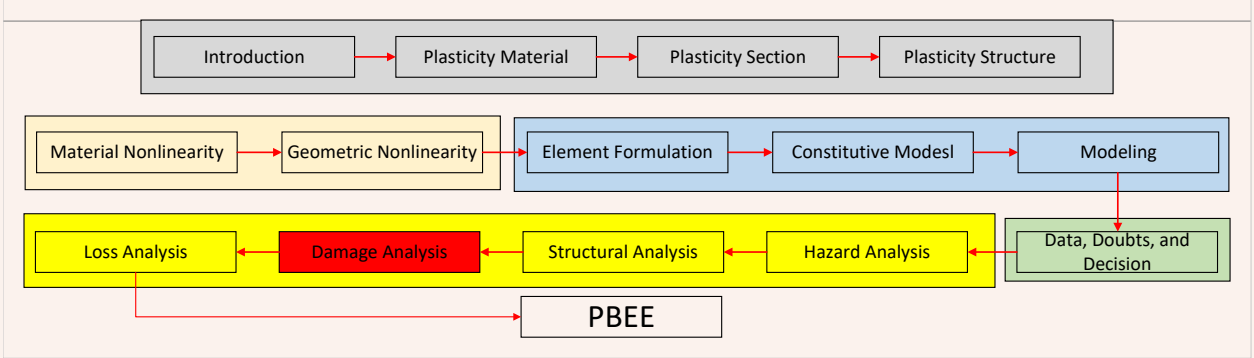
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

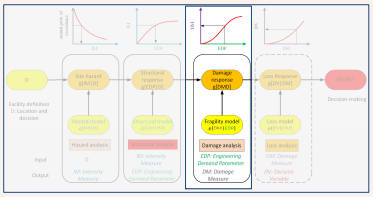
70 损害分析

摘要

本章介绍了对地震引发的结构损害量化和评估的框架, 包括定义主义和概率主义方法。从限制状态的概念开始 - 区分可接受和不可接受性能的边界 - 章节探讨了一个从操作到崩溃预防状态的层次。各式各样的损害指数都适用于线性分析 (需求能力比例, 累积无弹性寿命) 和 非线性分析 (基于变形和以能源为基础的指数). 到概率评估的进展承认了地震需求和结构能力的不确定性, 使用工程需求参数作为损害状态的定量预测。对流动限制、损害指数和需求能力比例的设定边界应以其相应性能水平呈现。通过在更广泛的 基于性能的地震工程 框架内定位损害分析, 该章节展示了这些技术概念如何将复杂的结构性反应转化为有意义的评估信息决策。

70.1 引入 2027
70.2 限制国家 2027
70.2.1 边界国家的层次 2028
70.2.2 概率框架 2028
70.2.3 PBEE 框架中的实施 2028
70.2.4 定义与验证 2029
70.2.5 多客观考虑 2029
70.2.6 与损害指数的联系 2029
70.3 损害指数 2030
70.3.1 损害指数和性能标准 2030
70.3.2 转向可能损害评估 2031
70.3.3 损害的概率代表性 2031
70.3.4 损害测量和工程需求参数 (EDP) 2032
70.3.5 主条目: 信任区 损害评估 . . 2032
70.3.6 量化损害测量 2032
70.4 表现 2034
70.4.1 基于性能的工程框架 2034
70.4.2 性能水平和接受标准 2035
70.4.3 整合限制状态、损害指数和性能水平 2036
70.5 过渡到脆弱性曲线和风险评估 2038





审阅稿

70.1 引入

1 结构损害评估代表工程分析与地震设计和逆转决策之间的关键界面。虽然先进的非线性分析技术提供了结构性行为的洞察力，但它们必须通过损害测量和性能标准进行解释，以指导有意义的工程决策。本章介绍了在 基于性能的地震工程 背景下的损害分析系统框架 (PBEE) 将定义主义和概率主义方法集成到对结构系统的地震负载的影响进行量化。

2 损害分析的 基础 位于边界状态的概念中 - 明确定义的边界，将可接受与不可接受性能分开。这些国家设定了从充分运营能力到破坏预防的性能目标的层次。通过定义这些边界，我们建立了一个结构化的框架来评估对利益相关者的期望和监管要求的结构性反应。边界状态的概率性处理承认地震事件和结构行为中的内在不确定性，允许风险信息评估而不是二进制过渡/失败评估。

3 损害指数是衡量一个结构越过其定义的限制状态的数量工具。对于线性弹性分析，指标如需求能力比例 (DCR)，累积无弹性寿命 (CID)，和累积无线区域 (CIA) 提供对潜在损害的规模、持续时间和范围的了解。在非线性背景下，更复杂的指标通过基于变形和基于能量的公式捕捉了产物、分裂和能源分散的累积影响。这些测量将复杂的解析输出转化为结构完整性和残余容量的有意义测量。

4 确定性损害指数与概率评估方法的整合在地震工程方面取得了显著进展。脆弱性曲线 - 表达超越特定损害状态的可能性作为地面运动强度功能 - 提供在可能的地震场景范围内潜在性能的全面图像。这个概率主义框架对地面运动特征、物质属性和模拟假设的不确定性负责，使风险评估和缓解策略更加坚实。

5 这些概念的实用实施需要解析测量和性能目标之间的定量关系。工程要求参数 (EDP) 例如，跨式冲动率和顶级地板加速率为损害状态的可测量预算。ASCE 41-17 和 FEMA 356 等授权来源的设定的限制为这些 EDP 与预期的性能水平相匹配的比较值。这些关系允许工程师将 解析 结果翻译成符合代码要求和利益相关者的期望的结构性能评估。

6 在本章节中，我们强调了损害分析在更广泛的 PBEE 框架内的核心作用。通过将地震危险特征连接到结构反应和性能评估，损害分析提供技术 基础 为风险信息决策。这里提出的方法制定了对地震风险的定量、解释和沟通的系统方法，最终使结构设计更加耐用、经济可行。

7 该章节以边界状态、损害指标和性能水平的详细审查进行，以集成方法为顶峰，将技术分析与实践应用之间的差距桥梁。这一全面的损害分析处理将为脆弱性分析和损失估计方法制定阶段，这些方法将在下一章中讨论。

70.2 限制国家

8 限制状态代表了关键的边界，定义了可接受和不可接受结构性能之间的边界。在 基于性能的地震工程 框架内 (PBEE) 边界状态作为对预定性能目标的结构反应评估的关键基准。

9 PBEE 的限制状态提供与特定损害条件或性能水平相匹配的定量限制。这些国家设定了对工程需求参数的标准 (EDP) 它们被评估，以确定一个结构是否符合其绩效目标。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

10 限制状态的概念将损害的定性描述转化为定量决策测量, 使性能评估能够一致且可靠。

70.2.1 边界国家的层次

11 PBEE 通常包含一个边界状态的序列, 相当于越来越严重的结构和非结构损害水平:

1. **操作 极限状态 (奥尔斯)**: 结构保持完全功能, 无可忽视的损害。基本服务仍在继续, 没有中断, 修复不需要。这相当于即时占领的表现。
2. **即时占领 极限状态 (伊奥尔斯)**: 结构损坏较小, 但建筑物在检查后保持安全的即时占领。非结构组件可能受到有限的损害, 但保持功能。
3. **生命安全 极限状态 (LSLS)** 结构损害显著, 但建筑物保持足够的残留强度和坚固, 以防止崩溃。避难是必要的, 在重新占领之前可能需要修复。
4. **破裂预防 极限状态 (CPLS)** 严重的结构损伤接近部分或完整崩溃的边界。结构可能无法修复, 但它通过避免崩溃来防止生命损失。

70.2.2 概率框架

12 在现代的 PBEE 方法中, 边界状态被视为概率主义而不是定义主义。这种方法承认了地震需求、结构能力和损害评估的内在不确定性。对于每个 极限状态, 开发了一种脆弱性函数, 表达了超越 极限状态 的可能性作为强度测量函数。(IM) 工程需求参数 (EDP).

13 超過 极限状态 的確率通常表達為:

$$P(LS|EDP) = \Phi\left(\frac{\ln(EDP) - \ln(EDP_{median})}{\beta_{LS}}\right)$$

哪里:

- Φ 是正常累积分配功能的标准
- EDP_{median} 是与 极限状态 相关的中间容量
- β_{LS} 是标准差的标志性代表 主条目: 信任区

70.2.3 PBEE 框架中的实施

14 在太平洋开发的 PBEE 框架中 地震工程 研究中心 (珍珠) 限制状态通过损害分析将结构反应分析与决策变量联系起来。这创造了一个完整的概率评估路径:

1. **危险性分析**: 特征化地震危险在强度措施方面 (IMS)
2. **结构分析**: 与工程需求参数相关的 IMs (EDP)
3. **损害分析**: 地图 EDPs 为损害措施 (DMS) 使用限制状态
4. **损失分析**: 将 DMs 翻译成决策变量 (DVS)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

15 限制状态是损害分析阶段的核心，在那里它们定义了不同损害状态发生的边界，基于计算的 EDP。

70.2.4 定义与验证

16 设定适当的限制状态需要通过实验测试，过去地震现场观测和专家判断来进行调节。限制状态必须对现实世界性能进行验证，以确保它们准确地代表所需的性能水平。这种加密过程往往涉及：

- 实验室测试结构组件和系统
- 分析后地震损害调查
- 数值模拟使用验证的模型
- 专家选举与共识发展

70.2.5 多客观考虑

17 现代 PBEE 应用往往涉及多个限制状态，以解决各种性能问题：

- 结构组件损坏
- 非结构性组件损坏
- 内容损害
- 功能障碍
- 修理费用及时间
- 环境影响

18 这种多目标方法使利益相关者能够根据对潜在地震性能的全面理解，做出有意识的决策。

19 PBEE 内部限制状态的正确定义和应用，为在不同地震危险级别下满足具体性能目标的结构设计提供了一个坚实的框架，最终导致更耐用的建筑和基础设施。

70.2.6 与损害指数的联系

20 虽然限制状态定义了结构性能的关键边界，但我们需要定量测量来确定这些边界何时被超越。这就是损害指数变得至关重要的地方，它们提供数学工具来测量和定量的损害程度与这些设定的边界状态有关。

21 损害指数是实用的测量工具，使工程师能够评估一个结构是否已经达到或超过了特定极限状态。正如我们将在下一节中探讨的那样，这些指标从简单的需求能力比例到复杂的概率特性功能，以计算随着时间的推移积累损失。损害指数与限制状态的整合，为性能评估创造了一个全面的框架，将理论界限与可测量的结构反应结合起来。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

70.3 损害指数

该部分的部分是由 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

70.3.1 损害指数和性能标准

22 A **性能指数** 是用来量化损害、稳定性或对被地震刺激的结构的一般反应的 数值 测量。这些指标为安全和可用性设定了客观的基准, 促进设计替代品或逆转策略之间的比较, 并使风险信息决策能够进行。虽然上一节设定了边界规定为边界, 但损害指数提供了需要确定这些边界何时越过的量计测量。

23 对于线性弹性分析, 常见指标专注于基于压力和基于压力的标准, 假设弹性物质行为没有明确的损害模型。和 **需求能力比例** (DCR) 测量所引发的 应力 或 应变 的比例到可允许的限制, 其中超过单位的值表明超越可接受的限制。除了基于 应力 的标准标准外, 根据 应变 的替代标准是由于 应力 和 应变 发动机的三重性而提出的, 因为:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}$$

在压力和压力方面, 相应的需求能力比例是:

$$\begin{cases} \text{Stress-based} & \text{DCR}^{\sigma} = \frac{\sigma}{f_t} \\ \text{Strain-based} & \text{DCR}^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \end{cases}$$

虽然 DCR 测量峰值过度, 但它不会捕捉时间或范围, 需要额外的指标。

24 和 **累积不弹性寿命** (CID) 量化压力或紧张旅行的总持续时间超过一个确定的限制, 表明在地震刺激期间过度压力程度。由于线性弹性分析不负责应力再分配, 而单一的过度并不一定会导致失败。相反,CID 跟踪积累的过度寿命超过两级。(1.0 ≤ DCR ≤ 2.0), 有效地在循环充电时提供结构耐力测量。

25 和 **累积无线区域** (CIA) CID 通过包含过度的长度和大小来完善。被定义为应力或应变过度的整体, 随着时间的推移, 中央情报局负责过度事件的严重性而不是仅仅是它们发生。在基于应力的评估中, 中央情报局每单位区域的力量单位按时间增加。

26 另一个重要因素是损害。**空间分布比例** (DSDR) 评估损害扩散的程度, 通过对整体结构进行过度压力或过度限制区域的测量。与 CID 和中央情报局不同, 这些机构在时间的推移中量化了本地过剩,DSDR 提供潜在失败区的空间测量。

27 对于非线性地震分析, 指标是基于物质损害, 裂缝传播和能源分散。基于歪曲的 **损害指数** (DI^{def}) 评估稳定性, 以至于在关键点的最大绝对转移为基于结果和最终转移正常化:

$$\text{DI}^{\text{def}} = \frac{|\Delta_{max}| - \Delta_y}{\Delta_u - \Delta_y}, \quad \Delta_y \le |\Delta_{max}| \le \Delta_u$$

哪里 Δ_y 和 Δ_u 代表结果和最终 位移, 分别。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

28 和 **以能源为基础** 损害指数 (DI^{energy}) 跟踪由于切割和塑性导致的累积能量分解:

$$DI^{energy} = \frac{\sum_{i=1}^{s} (E_H)_i}{(E_H)_u}$$

哪里 $(E_H)_i$ 能量是由单个裂缝分散的, 以及 $(E_H)_u$ 是崩溃时的全部能源分散能力。

70.3.2 转向可能损害评估

29 虽然确定性损害指标, 如需求能力比例 (DCR), 累积性无线长度 (CID), 和累积无线区域 (CIA) 提供对结构性能的基本洞察力, 他们不完全捕捉地震负载和结构反应中内在的不确定性。

30 这些指标为估计损害提供差异性限制, 但缺乏能力量化在不同地震强度下超过某种损害状态的可能性。

31 事实上, 地震危险和结构反应是由于因素如地形运动特征的变异性、物质特性和结构衰老等非常不确定。更全面的方法需要从定义指数转向 **概率损害评估**, 这使得风险信息的决策能够完成前部分讨论的限制状态的概率框架。

32 概率评估的基本概念是: **脆弱性曲线**, 表达了 超越某种损害状态的可能性作为强度测量的功能 (IM), 如高地加速度 (PGA) 或光谱 加速度 (SA). 与二进制过渡/失败结果的决定性评估不同, 脆弱度曲线描述了 **概率** 不同程度的损害发生在一系列地震强度。

33 为了构建脆弱性曲线, 定义指数如 DCR、CID 和 CIA 作为 **工程需求参数** *(EDP)* 定义各种损害限制。通过在一系列 地震 场景中进行多种结构模拟, 可以开发统计模型来估计超过每个损害范围的可能性。这些边界直接相当于对性能评估设定的边界状态。

34 从定义到概率的过渡在基于性能的地震工程中至关重要。(PBEE). 而不是设计结构, 以便简单地满足预定限制, 工程师可以使用概率模型来评估整个风险范围, 使地震缓解策略更耐用和成本效益。

35 下一章将探讨这些概念如何融入 **损失分析**, 在可能损害测量进一步精化, 以估计经济和功能后果。关于脆弱性曲线的详细讨论, 包括其衍生和应用, 在章节中呈现 72.

70.3.3 损害的概率代表性

36 而不是将损害视为二进制事件 (安全 vs. 失败), PBEE 模型损坏表示持续的概率分布。这是对地震入口和结构反应的内在不确定性, 即以前讨论的边界状态概率主义处理的直接延长。

37 超越某种损害状态的可能性 D_i 对特定地面动作强度测量 IM (例如, 高地加速、光谱加速) 它通常被表达为:

$$P(D > D_i|IM) = \Phi\left(\frac{\ln IM - \ln IM_i}{\beta}\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在哪里:

- $\Phi(\cdot)$ 这是正常的累积分配功能。
- IM_i 是中等强度的测量, 损害状态 D_i 被超越了。
- β 是标准差的逻辑, 代表了 主条目: 信任区 在损害范围内。

[38] 此 表述 导致 **脆弱性曲线**描述到达或超越某种损害状态的可能性, 作为地震强度功能。每个曲线通常符合在性能评估框架中确定的特定 极限状态。

70.3.4 损害测量和工程需求参数 (EDP)

[39] 量化损害的概率, 工程需求参数 (EDP) 它们被用作可测量的项目, 用于结构性反应。共同的 EDP 包括:

- **Interstory Drift 比例 (IDR):** 用于建筑物来评估基于变形的损害。
- **顶层 加速度 (PFA):** 对非结构组件损害的评估至关重要。
- **首位 剪力 (PSF):** 对支配的结构非常重要。
- **累积 位移 需求:** 用于桥梁和高楼结构, 以捕捉循环衰落。

[40] 这些 EDP 作为地震需求和结构性能之间的联系。一旦从非线性动力分析中获得 EDP 分布, 可以通过实验或解析模型将其地图到相应的损害状态。此地图化过程是将测量或计算的结构反应与性能框架中定义的限制状态相连。

70.3.5 主条目: 信任区 损害评估

[41] 对损害模型的概率主义方法计算各种来源 主条目: 信任区:

1. **地震危险 主条目: 信任区:** 土壤运动变量导致结构反应的差异。
2. **材料和建筑变量:** 具体强度、钢属性和工作能力影响能力的差异。
3. **模型 主条目: 信任区:** 不同分析技术和假设引入预测反应的变化。

[42] 這些不確定性被整合到 PBEE 通過 **蒙特卡洛模拟**巴伐利亚更新和损害模型的统计定义。通过明确计算这些不确定性, 该框架提供了一个更现实的评估什么时候不同边界状态可能会被超越。

70.3.6 量化损害测量

损害指数 (DI) 被定义为一个或多个损害变量的功能。(DVS). 它是指在缺失任何损害和单位时设置为零的数量, 当故障或崩溃发生时, DI $\in [0, 1]$ (Hariri-Ardebili et al., 2016):

$$\mathrm{DI} = f\left(\mathrm{DV}_i\right) \ , \quad i = 1, ..., N$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 n 是捐助者 DVs 的数量。如果 $n = 1$、它被称为单变量 DI, 如果 n >1、它是一种多变的 DI。(Kappos, 1997). 损害指数进化最受欢迎的形式可以写作如下:

$$\mathrm{DI} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{L_i}}{\mathrm{DV}_i - \mathrm{DV}_{U_i}} \right)^{\kappa_i}$$

哪里 DV_{L_i} 和 DV_{U_i} 下和上边界 (限界) 关于该 i^{th} 可变的损害和 κ 是与损害指数在不同阶段的损害变量的变化率相关的曝光。这些底层和上层边界往往直接与 PBEE 框架中的特定限制状态相匹配, 形成抽象 极限状态 概念与定量损害评估过程之间的关键联系。形象 70.1 描述了四种不同的模型, 基于组合的 κ_i 对于一个假设的 DI, 有两个 DV。

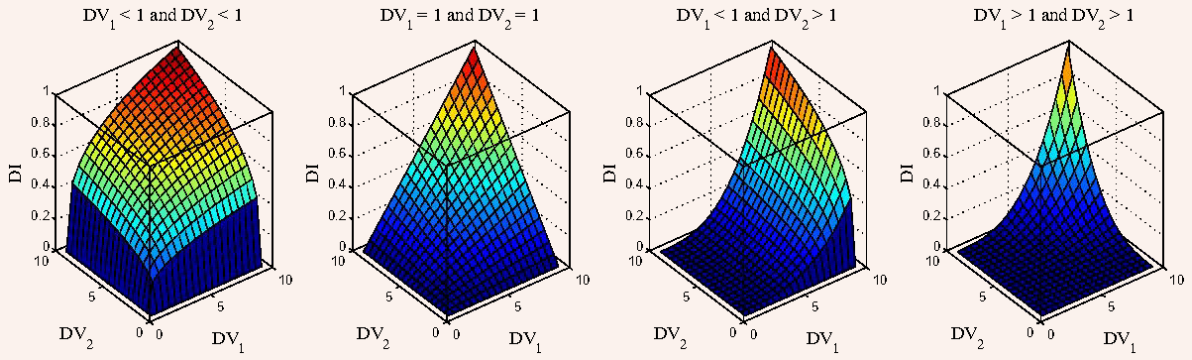


图 70.1: 一个 DI 和两个 DV 之间的关系 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

损害指数可以根据不同的应用分类 (Hariri-Ardebili and Saouma, 2015):

- **地方** vs. **全球**當地 DI 是 单元 成員或構造有限部分的損害指標。另一方面, 全球的 DI 在整个状态中捕获损害状态。全球 DI 可以通过重量集的本地 DI 计算。
- **单元变量** vs. **多变量**可以从单个变量或多个变量的组合计算 DI。通常结合的 DI 考虑到不同的参数, 并提供损害进展的更全面指标。
- **累积** vs. **非累积**一个累积 DI 能够在过渡分析期间捕获损害的积累, 而一个非累积 DI 只能捕获最终状态。
- **定义** vs. **斯托卡斯**因为所有材料都是异常的, 所以 DI 可能或可能不会通过斯托卡斯特或决定的表达来捕捉这种异常性。
- **损害指数** vs. **损害频谱**损害频谱代表对一系列单级自由系统的结构期对损害指数的变化, 受地面运动记录的影响。(Bozorgnia and Bertero, 2003).
- **结构性** vs. **经济**: 结构性 DI 在结构参数方面捕获损害。另一方面, 经济 DI 将引入成本概念, 如修理成本与相应的替换成本的比例。

[43] 这些损害指标分类为工程师提供灵活的工具, 以评估结构性能与 PBEE 框架所规定的限制状态。根据评估的具体要求选择合适指数, 工程师可以开发综合评估, 将定量测量与质量性能目标相连。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

44 通过各个指标的损害分类和定量化, 提供技术基础以实现基于性能的方法来对地震设计和评估。这些损害测量作为工程分析与利益相关者设定的性能目标之间的定量联系。

45 随着我们从损害量化转向性能评估, 我们必须将这些技术概念置于基于性能的工程的更广泛框架内, 不仅解决了结构性安全, 而且还解决了功能性、经济考虑和社会期望。

70.4 表现

46 基于性能的方法代表了我们对地震危险、结构反应和损害评估的理解的高峰。在这个更广泛的背景下, 上述限制状态和损害指标提供了量化和评估结构性能的技术手段, 如图中所示。70.2.

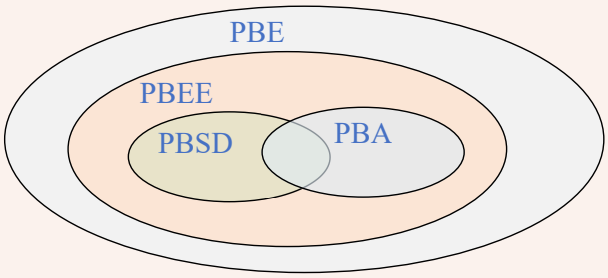


图 70.2: PBEE: 大画

70.4.1 基于性能的工程框架

47 基于性能工程 (PBE) 包括设计标准、结构系统、布局、比例和细节的选择, 以及结构及其非结构组件和内容。这种过程确保建筑质量, 管理长期维护。PBE 的主要目标是保证, 在确定的可靠性水平内, 结构或设施不会在预期兴奋水平下承受损害。

48 PBE 整合了各种学科, 包括 结构工程, 材料科学和风险评估, 以全面解决性能目标。它涉及对设计选择进行异常评估, 并确保符合性能目标。这个全面的过程从初始项目概念开始, 并在整个结构的生命周期中延长, 包括其运营、维护和最终解体。(Bertero and Bertero, 2002).

49 在地震工程的背景下,PBE 在几个补充方法中表现出来:

- **基于性能的地震工程 (PBEE)** 将 PBE 的原则应用到地震危险主导设计考虑的情况下。PBEE 处理整个结构的生命周期, 确保它能够抵抗不同强度的 地震 地面动作, 而不超过指定的损害限制。(Bertero and Bertero, 2002).

  PBEE 包含:

  - 详细的地震危险性分析定义地面运动特征。
  - 结构性能标准与概率风险评估的整合。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

  - 重点是即时功能和长期耐用性。

- **基于性能的地震设计 (PBSD)** 是 PBEE 活动的子组, 专注于设计阶段。它包括一个结构化的方法, 以融入地震抵抗性通过 (Bertero and Bertero, 2002):

  - 地震危险的识别和定量化, 使用特定地点数据。
  - 选择性能水平和设计目标。
  - 对适当性和潜在风险的网站条件进行评估。
  - 开发符合性能目标的概念设计。
  - 数值 模型和模拟为初步和最终设计验证。
  - 全面接受性检查和对手评论。
  - 建筑质量保证程序的规格。
  - 建筑后监测, 以确保持续遵守性能目标。

- **基于性能的评估 (PBA)** 是 PBEE 原则的应用, 以定量评估现有结构或新完成设计的地震性能。PBA 为利益相关者提供了对地震事件的结构反应的概率观点, 使风险管理有信息决策能力。(Zareian and Krawinkler, 2009).

  PBA 包括:

  - 解析模型和模拟, 以预测结构行为。
  - 对现有结构进行评估, 以确定脆弱性。
  - 概率风险评估, 以估计损害的可能性和后果。
  - 开发退缩或升级策略, 以缓解确定的风险。
  - 以清晰的形式呈现结果, 帮助利益相关者有效地了解和管理风险。

70.4.2 性能水平和接受标准

50 PBEE 首先寻求确定对主要结构组件的差异性能水平, 这对建筑功能和安全性产生重大影响。这些性能水平提供了一个标准化的方式, 以传达不同地震强度下的结构的预期行为, 并直接连接到前部分讨论的边界状态和损害指标。

51 第 41 集 (2007 年 ASCE) 其它代码通常为三个主要性能水平提供指导。(桌子 72.1):

- **即时占领**: 基本上弹性行为是通过限制结构损害而寻求的。(例如, 钢材产量, 显著的混凝土切割) 非结构性损害。
- **生命安全**限制结构和非结构组件的损害, 以尽量减少伤害或受伤风险, 并保持基本交通路线可用。
- **崩溃预防**确保部分或完整建筑崩溃的风险, 通过限制结构形状和力量到显著强度和硬度衰退的起源。

52 第 356 章 (FEMA-356, 2000) 定义不同目标建设性能水平和 地震 危险水平类似于其他框

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

架所示。性能水平和相应的物理损害的描述显示在表中 72.1, 提供对结构和非结构组件的损害质量描述。

53 加利福尼亚结构工程师协会提供了以性能为基础的地震设计的影响力框架 (海洋) 视野 2000 文件。它设定了四个差异性性能水平: 1) 全功能,2) 操作,3) 生命安全, 四) 即将崩溃, 每个代表在结构和非结构组件的损害范围内分开的带, 以及对占领者和设施功能造成的后果。(SEAOC, 1995).

54 SEAOC 框架还描述了基于过度的可能性的各种危险水平:

- 频率: 50% 30 年内超越的可能性
- 有时强度: 50% 50 年内超越的可能性
- 稀有强度: 10% 50 年内超越的可能性
- 非常罕见的强度: 10% 百年之内超越的可能性

55 性能级别与危险级别的整合, 创造了基于设施的重要性而有所不同的性能目标。70.3. 直线代表不同设施类型相匹配的不同目标, 更关键设施预计在严重地震事件中保持高性能水平。

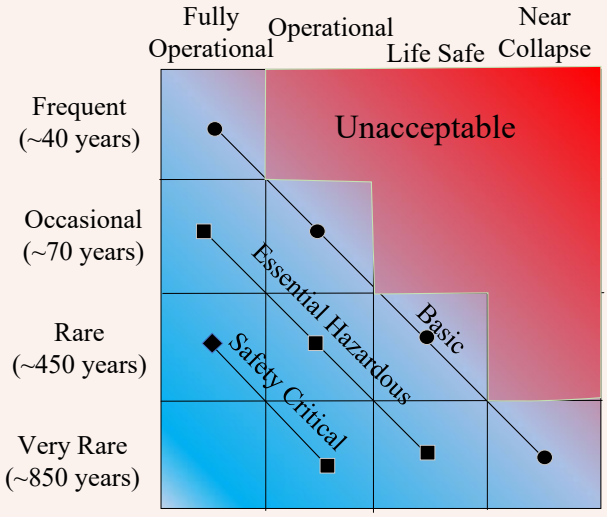


图 70.3: 建议建筑设计最低地震性能目标 (Porter, 2003)

70.4.3 整合限制状态、损害指数和性能水平

56 限制状态、损害指数和性能水平之间的定量关系是 PBEE 实用的必不可少的。桌子 70.1 和 70.2 现有设立的权威来源限制, 可用于评估结构性能。

57 这些驱动限制从 ASCE 41-17 (Civil Engineers, 2017) 提供可测量工程需求参数和预期的性能水平之间的直接相互关系。边界因结构系统而异, 承认不同类型的建筑物的不同变形能力。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 70.1: 允许 Interstory Drift Ratios (IDR) 根据 ASCE 41-17 的不同性能级别

结构系统	即时占领	生命安全	崩溃预防
瞬间框架 (钢材)	0.7%	2.5%	5.0%
瞬间框架 (混凝土)	1.0%	2.0%	4.0%
破碎的框架	0.5%	1.5%	2.0%
混凝土 Shear 墙壁	0.5%	1.0%	2.0%
Masonry Shear 墙壁	0.3%	0.6%	1.0%

表 70.2: 损害指数边界和相应的结构国家

损害指数范围	损害国家	描述
$DI < 0.1$	未成年	没有重大损害; 弹性反应占主导地位
$0.1 \leq DI < 0.25$	轻松	低折叠; 有限产量可能
$0.25 \leq DI < 0.4$	适度	显著的破裂; 某些本地产量; 容量不受影响
$0.4 \leq DI < 0.8$	严肃	广泛的破裂; 广泛的产量; 能力显著减少
$0.8 \leq DI < 1.0$	崩溃	严重损害; 残留强度或坚固性较少
$DI \geq 1.0$	解散	完整的失败; 没有剩余能力

58 图表中的损害指数限制 70.2 基于公园 & 损害模型 (Park and Ang, 1985), 通过实验测试和地震之后的调查进行了广泛验证。这种模型结合了最大变形和歇斯底里的能量分散, 以评估累积损害。Williams, Villemure, and Sexsmith, 1997 这些损害指数值和大地震后结构的表现之间建立了相互关系。

59 对于定义性地震评估, 需求到能力比例 (DCR) 提供与性能水平相关的另一个定量测量。桌子 70.3 介绍 FEMA 指南的 DCR 边界。

表 70.3: 需求能力比例 (DCR) 根据 FEMA 356 的限制

DCR 范围	性能水平	期待的行为
$DCR < 1.0$	即时占领	成分基本上保持弹性; 不可忽视的损害
$1.0 \leq DCR < 2.0$	生命安全	损害发生, 但结构保持安全边界反对崩溃
$2.0 \leq DCR < 3.0$	崩溃预防	有限剩余容量的重大损害; 近崩溃
$DCR \geq 3.0$	超越 CP	组件失败; 没有剩余的能力

60 这些 DCR 的 FEMA 356 限制 (FEMA-356, 2000) 提供对组件级性能的简单评估方法。与更全面的损害模型相比,DCR 值虽然简化, 但提供设计和结构评估的实用标准。

61 这些不同的测量 (驱动限制、损害指数和需求能力比例) 的整合, 为工程师提供了对设定的限度状态进行结构性能评估的全面框架。通过将 解析 的结果与这些边界相匹配, 工程师可以将复杂的结构反应转化为有意义的性能评估, 符合利益相关者的期望和代码要求。

62 值得注意的是, 虽然这些边界提供通用指导, 但特定地点的条件、结构特征和特殊占领要

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

求可能需要对这些值进行修改。专业判断在对性能设计和评估的更广泛背景下，在这些标准的解释和应用中仍然至关重要。

63 这种综合方法允许工程师翻译解析结果 (损害指数和 EDP) 提供有意义的性能评估，可以向利益相关者传达。通过建立这些关系，PBEE 将技术分析与实践决策之间的差距桥梁。

70.5 过渡到脆弱性曲线和风险评估

64 随着限制状态、损害指标和性能水平现在明确定义和整合，下一步是发展。**脆弱性曲线**量化超越特定损害状态或性能水平的可能性作为地震强度功能。这些曲线，讨论在章节 72，作为风险评估、损失估计和 PBEE 决策的基础。

65 脆弱性曲线代表了我们对地震危险、结构反应、损害机制和性能预期的理解的高峰。它们将定义工程测量转化为概率风险评估，以计算地震工程中的内在不确定性，并允许利益相关者根据可量的风险水平做出有意识的决策。



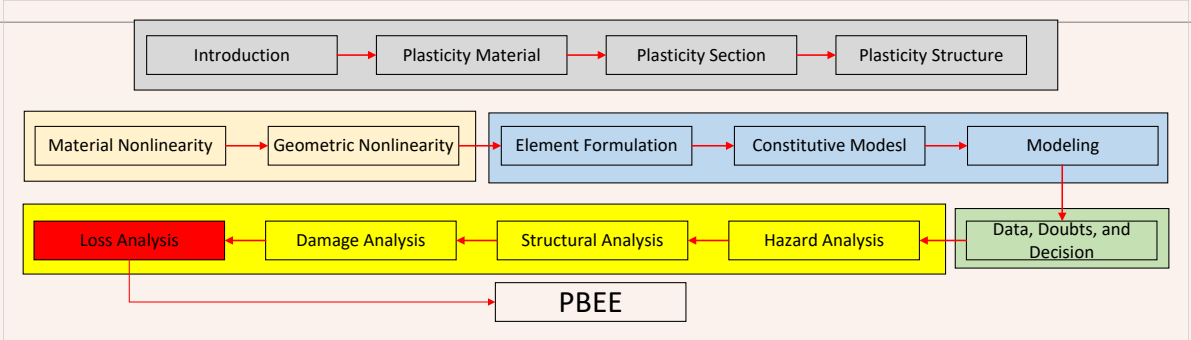
审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

71 损失分析

摘要

损失分析 在 基于性能的地震工程 中 *(PBEE)* 量化地震损害的经济和社会影响, 包括修复费用、停车时间和受伤。使用概率模型、脆弱性功能和后果功能, 将风险评估扩展到结构安全之外。该章节还探讨了催眠影响和社会经济不确定性, 强调它们在耐力规划中的作用。将 损失分析 集成到 *PBEE* 可使风险信息的决策, 平衡安全、成本和社会福利。



1 损失分析 是 基于性能的地震工程 的基本组成部分 (PBEE) 并在评估地震引发的损害的经济和社会后果方面发挥关键作用。

2 与专注于结构安全的传统设计方法不同,PBEE 旨在定量财务成本、功能停滞时间和与地震事件相关的人类后果。通过这样做, 它允许工程师、政策制定者和利益相关者对耐力策略、保险政策和缓解措施做出有意识的决策。

3 损失分析的核心在于估计修理费用、停车时间和损失。

4 修理费用包括需要恢复一个结构到其前地震状态的财务资源。这些成本取决于结构和非结构损害的程度, 以及劳动和材料的可用性。

5 低时间指一个设施因地震引起的损害而保持不运营的期限, 影响不仅企业和机构, 而且重要服务如医院和紧急应对中心。在某些情况下, 功能停滞时间可能比直接维修成本更大的影响, 尤其是关键基础设施。

6 偶然, 包括伤害和死亡, 是损失分析的另一个重要方面, 因为结构故障和废物倒塌对人类生命构成严重风险。

7 量化损失需要概率模型、脆弱性功能和后果功能的组合。

8 概率模型将地震危险评估与结构性能数据集成, 以估计不同损害水平的可能性。

9 脆弱性功能定义结构达到特定损害状态的可能性, 因为地面冲击的特定的水平。

10 结果功能将这些损害状态转化为可定量的损失, 如维修费用和终止时间估计。这些方法可以共同进行地震风险的全面评估, 仅超越结构性能。

审阅稿

11 损失分析 因社会经济因素的不确定性而进一步复杂。社会经济不确定性包括劳动成本波动、物质短缺以及区域间恢复努力的差异。解决这些不确定性需要先进的统计方法，包括蒙特卡洛模拟和巴耶西结论方法，以完善损失估计并改善决策。

12 损失分析的一个关键方面是理解地震损害的催眠效应。例如，一个关键桥的失败可能会干扰运输网络，延迟紧急应对努力，增加经济损失。

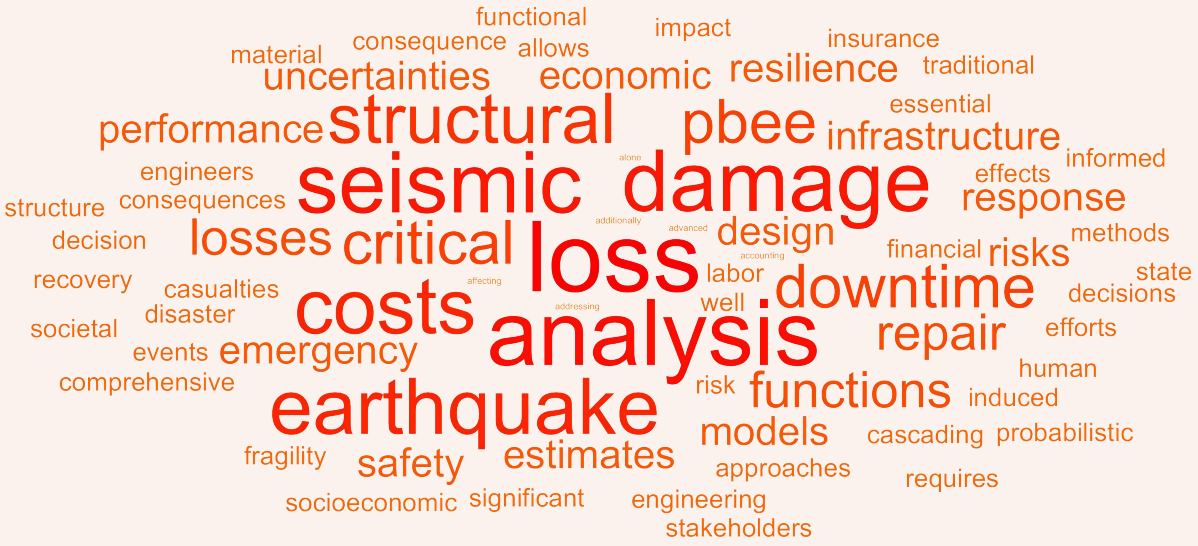
13 同样，工业设施的损害可能会导致危险物质泄漏，加剧灾难的影响。考虑到这些催眠效应，PBEE 提供了一个更全面的观点地震耐用性，并指导投资基础设施，以尽量减少间接损失。

14 在 PBEE 中实施损失分析对耐力规划有显著影响。决策者可以使用这些分析来确定是否投资于更高的地震设计标准是经济上合理的，或者是否回归现有结构将提供成本效益的长期风险减少手段。

15 此外，损失估计还报告了保险模型和灾难准备计划的开发，帮助社区在地震之后更有效地恢复。政府和私营部门的利益相关者可以利用这些洞察力，优先考虑地震升级和紧急应对基础设施的资金，确保更稳定的、更可持续的恢复。

16 通过将 损失分析 集成到 PBEE 框架中，工程师和规划者可以超越传统的安全测量，并考虑地震事件的影响更广泛。这种转型对现代地震工程至关重要，因为它允许风险信息的设计决策平衡安全、经济可行性和社会福利。

17 此外，随着全球城市化日益增长，地震风险越来越紧张，损失分析方法的精炼将是形成耐受性城市能够抵抗未来的灾难至关重要的。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

72 风险概率评估 (⊇ PBEE)[1]

摘要

本章介绍概率风险评估 *(PRA)* 作为一个全面的框架, 涵盖和扩展基于性能的地震工程原则 *(PBEE)*.

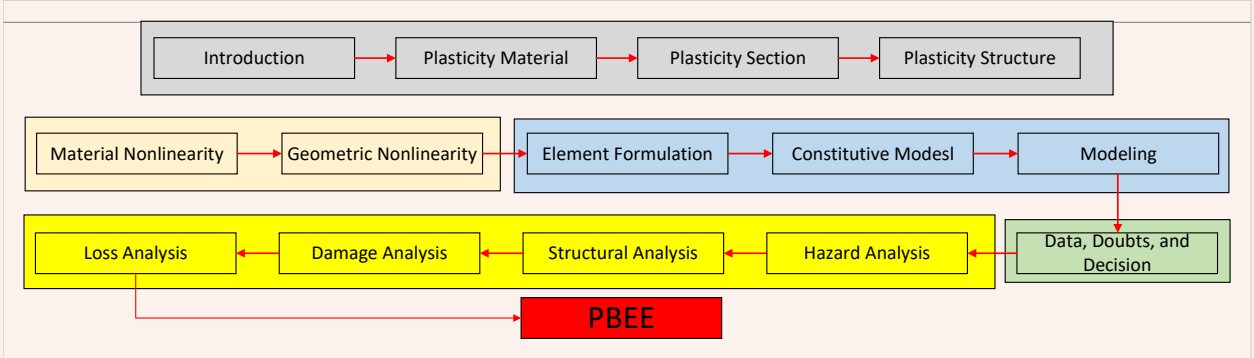
作为我们 *PBEE* 的底层发展概念顶峰, 它强调风险评估如何将地震危险、结构反应、损害和损失纳入统一的概率方法。从规格设计方法到 *PBEE-1* 和 *PBee-2* 的进化, 包括它们的强度和限制。

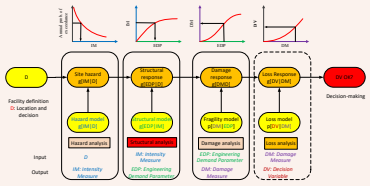
脆弱性曲线在这个框架内作为必需的工具, 提供工程需求参数与损害测量之间的概率联系, 并允许数量化。主条目: 信任区 结构性和非结构性表现。

72.1 新模式: 基于性能的地震工程 (PBEE) 2042
72.1.1 荷载和抵抗因素设计的限制 (LRFD) 2042
72.1.2 第一部分: 明确性能目标 . . . 2042
72.1.3 第二部分: 功能和经济后果的直接定量化: 2044
72.1.4 PBEE 实施程序 2047
72.2 从回应到损害: 脆弱性曲线 2049
72.2.1 基本和定义 2049
72.2.2 开发脆弱性曲线 2050
72.2.3 数学代表性 2050
72.2.4 连续功能 *vs.* 直播 矩阵 . . . 2051
72.3 PBEE 框架中的作用 2053
72.4 例题 72.1: 完整的 PBEE 例子 . . . 2054
72.5 历史遗迹和基础文件 2057

附录

第一部分：基础参考资料





[1]象征 ⊇ 表明, 概率风险评估被视为基于性能的地震工程的超级组。

72.1 新模式: 基于性能的地震工程 (PBEE)

72.1.1 荷载和抵抗因素设计的限制 (LRFD)

1 本章开始于重新审查中引入的关键想法。**间隔** (chapter 66) 要突出传统设计哲学的限制。

2 荷载 和抵抗因子设计 (LRFD) 讨论在 §37.3, 在结构工程中广泛使用, 特别是对于钢材和混凝土设计。虽然 LRFD 包含概率主义的概念, 以便对负载和物质属性的不确定性进行回应, 但它提出了几种限制, 引发转向 PBEE:

单级安全检查: LRFD 在预定因素负载下确保结构安全, 但不应对更广泛的性能目标, 如地震后修复性、功能停止时间或耐用性。

缺乏明确的损害考虑: LRFD 专注于在最终限度状态下的崩溃预防, 而不会量化不同 地震 强度的预期损害。因此, 建筑物可能会生存, 但遭受巨大的损坏, 并造成高修复成本。

对复杂负载场景的不灵活性: LRFD 依赖于负载和固定因素的线性组合, 限制其在动态地震负载下应对非线性行为、衰退和累积损害的能力。

统一安全边界: LRFD 适用一般安全因素, 无论占领类型或特定地点的地震风险。因此, 关键设施和普通建筑经常以相同的安全水平设计, 无论失败的社会后果不同。

没有与网站特定的危险的集成: LRFD 不包含 Probabilistic Seismic 危险性分析 (PSHA) 因此, 忽略了变量和 主条目: 信任区 地震在特定地点的地面动作。

3 基于性能的地震工程 (PBEE) 它是为了克服规律, 基于代码的方法的限制而开发的。它引入了一个风险信息框架, 明确评估结构性能在多个地震强度。

72.1.2 第一部分: 明确性能目标

72.1.2.1 方法

4 为了应对上述限制, 第一代 PBEE 引入了对地震需求的建筑物的差异性能目标。(FEMA, 1997b; FEMA, 1997a), 图 72.2,

- **运营** *(O):* 没有重大损害; 结构仍然完全功能。
- **即时占领** *(IO):* 较少的损坏; 建筑安全和可修复。
- **生命安全** *(LS):* 适度损坏; 结构可修复, 但没有干预却不起作用。
- **崩溃预防** *(CP):* 严重损害; 建筑避免全球崩溃, 但可能接近失败。

5 这个概念框架在图中被描述 72.1 更多在桌子上总结 72.1 (Whittaker03, Hamburger, and Mahoney, 2003).

72.1.2.2 PBEE1 的限制

6 尽管它的创新,PBEE-1 有几个缺点:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

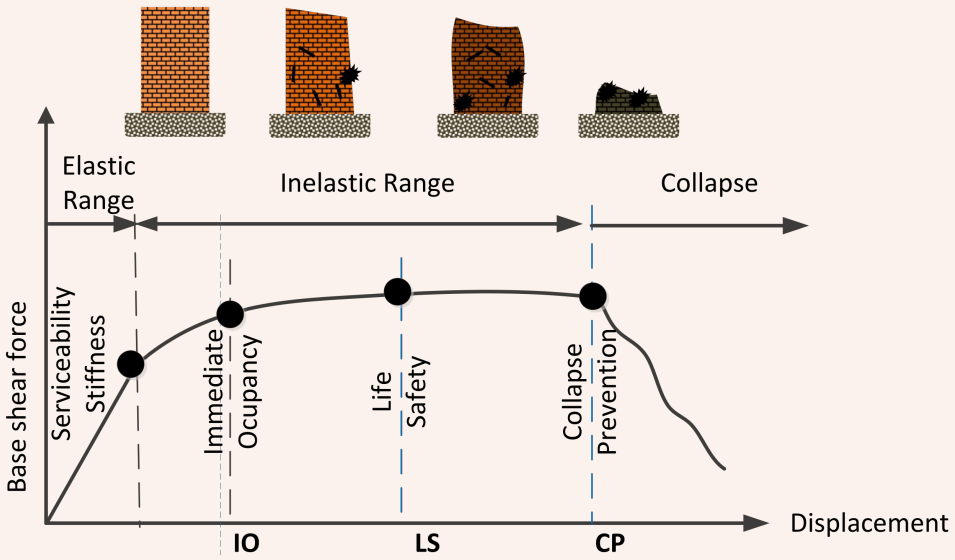


图 72.1: 第一代 PBEE 的概念描述; (Whittaker03, Hamburger, and Mahoney, 2003)

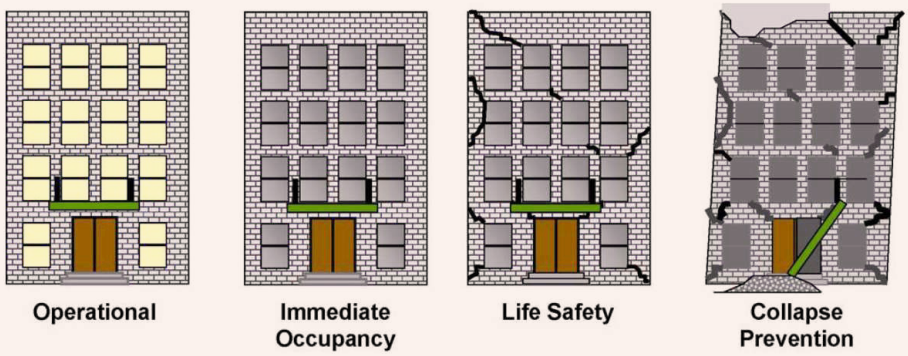


图 72.2: 透明的性能水平图像, (FEMA, 2012)

- **基于组件的评估**: 性能是基于单个组件限制而不是系统级别的行为。
- **主观接受标准**: 许多性能限制是基于专家的判断, 缺乏强大的实验验证。
- **不足的非结构性焦点**: 程序大多忽略了非结构性损害, 尽管其对损失和功能的显著影响。
- **未经验证的结果和保守主义**: 性能预测没有严格验证, 往往导致保守的设计。
- **股东不连接**: 该框架并没有解决利益相关者优先事项, 如维修费用、停车时间或业务连续性。
- **责任的潜力**: 对性能目标的误解, 保证工程师面临法律风险。

[7] 这些限制引发了更全面的框架 (PBEE-2) 的发展。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 72.1: 各个目标建筑性能级别的结构和非结构组件损害范围 (表 C1-2) (FEMA-356, 2000)

性能水平	崩溃预防	生命安全	即时占领	运营
全部损害	**严肃**	**适度**	**光明**	**非常光明**
结构组件	小剩余的硬度和强度, 但具有荷载列和墙壁功能。大型永久流动。一些出口被阻止。落下和未经处理的天花板失败或初步失败。建筑靠近崩溃。	一些剩余的力量和坚固留在所有故事中。重力负载元素功能。没有在飞机上失败的墙壁或粘贴的天花板。一些永久流动。损害分裂。建筑可能超越经济修复。	没有永久流动。结构基本上保持原始的强度和坚固性。面孔、分裂和天花板以及结构性单元的较小折叠。可以重新启动电梯。防火可行。	没有永久流动。结构基本上保持原始的强度和坚固性。面孔、分裂和天花板以及结构性单元的较小折叠。所有正常运行的系统都是功能性的。
非结构组件	严重的损害。	倒塌的危险被缓解, 但许多建筑、机械和电气系统受到损害。	设备和内容通常是安全的, 但由于机械故障或缺乏工具可能无法运行。	可否认的损害发生。电力和其他用途可用, 可能来自站立的来源。

72.1.2.3 设计 vs. 分析

8 相同 结构工程 (§37.1.1) 设计与分析之间的区别,PBEE 扩展了这种分离:

基于性能的地震设计 (PBSD): 设计新的结构, 以满足在地震负载下确定的性能目标。

基于性能的评估 (PBA): 对结构性能的定量评估, 适用于现有和新建筑。

72.1.3 第二部分: 功能和经济后果的直接定量化:

72.1.3.1 引入

9 PBEE 是指设计、评估和建造工程设施, 其性能在常见和极端负载下应对所有者、用户和社会的多样需求和目标。

10 1997 年, 太平洋地震工程研究中心 (珍珠) 决定开发一个更坚实的性能基于地震工程的方法, 称为下一代 PBEE。(也称为 PBEE-2 或 PEER PBEE). PEER PBEE 框架由 PEER 设施开发 直接计算其影响 主条目: 信任区 随机的每一步 以性能为基础的程序。

11 更具体地说:

- 基于性能的地震设计明确评估了如何 建造可能实现考虑到潜力 危险, 可能会经历考虑到对潜在危险的定量性不确定性和对实际建筑反应的评估不确定性。
- 与 LRFD 相反, 它 它不限于一个危险级别, 而是多元化。
- 性能在发生的可能性方面进行测量 受伤、修复和更换费用、修理时间及不安全的安装.
- 性能可以评估为 具体的地震场景或强度, 或者考虑到可能发生的所有地震, 以及每个人的概率, 在一定时间内。
- 表现表达在一系列差异性性能水平的意义上, 确定为 运营、即时占领、生命安全和崩溃预防.
- 引入了概念的 与结构和非结构组件的损害有关的性能. 性能目标是通过将其中一个性能水平与特定 地震 危险水平联系起来开发的。
- 它是 实践状态 高端公司。它已建立好

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

- 但是:
  - 限制国家是 基于组件而不是真正的系统范围, (如果一个组件失败, 它会导致逐步崩溃吗?)
  - 只为 MCE 活动 (2%50 年).
  - 有限的处理 主条目: 信任区 和概率。
  - 限量信息设计上代码。

72.1.3.2 一般框架

12 PEER PBEE 的总体框架显示在图中 72.3. 它将地震性能评估分为四个主要步骤, 图 72.3:

1. **危险性分析**: 衡量在特定地点经历不同水平的土壤冲击的可能性 **可行性地震 危险性分析** (PSHA), chapter 67.
2. **结构分析**: 评估对地震负载的结构反应, 包括 **非线性 动力分析** 工程需求参数 (EDP), chapter 69.
3. **损害分析**: 使用反应参数来估计物理损害 **结构和非结构组件**, chapter 70.
4. **损失分析**: 翻译损害 **经济损失、终止时间和事故估计**以成本为基础的决策, chapter 71.

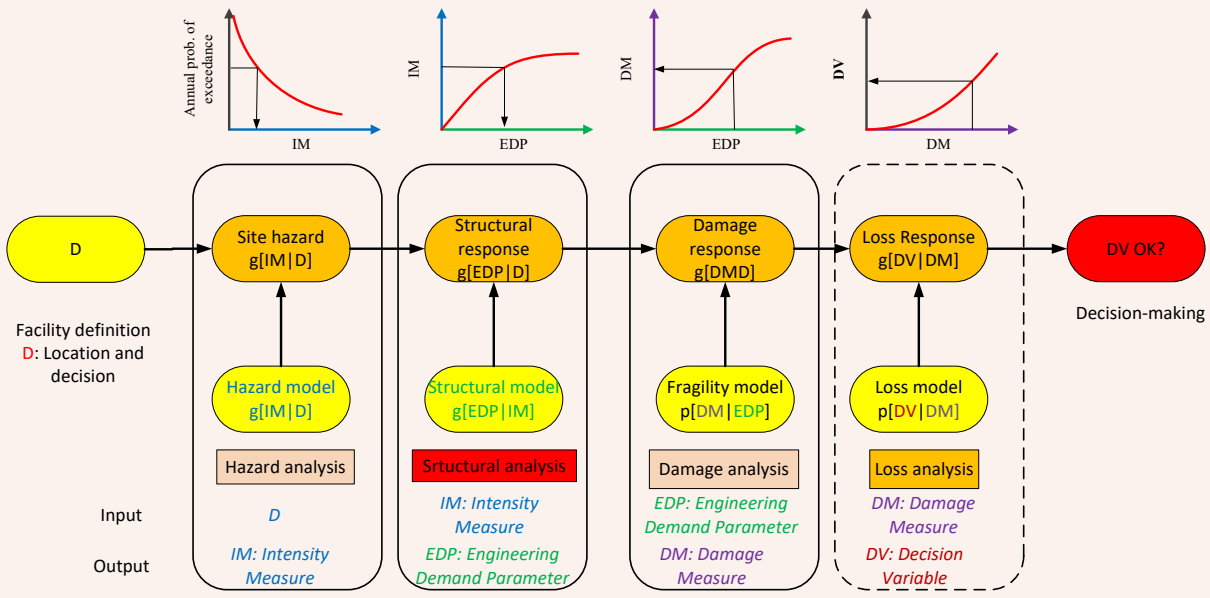


图 72.3: PBEE 的四个组成部分

13 每个步骤的结果都被描述为通用变量: 密度测量 (IM) 工程需求参数 (EDP) 损害测量

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

(DM), 和决策变量 (DV). 这个过程可以表达在三重整体的意义上, 这是总概率理论的应用。(Porter, 2003): 指数 [p2] 损害!测量 指数 [p2] 变量决策

$$g\,[\mathrm{DV}|\mathrm{D}] \;=\; \int\int\int p\,[\mathrm{DV}|\mathrm{DM},\mathrm{D}]\,p\,[\mathrm{DM}|\mathrm{EDP},\mathrm{D}] \\ p\,[\mathrm{EDP}|\mathrm{IM},\mathrm{D}]\,g\,[\mathrm{IM}|\mathrm{D}]\,d\mathrm{IM}.d\mathrm{EDP}.d\mathrm{DM} \tag{72.1}$$

哪里 p [X|Y] 其附加集体分配功能。X 条件为 Y, g [X|Y] 指示平均年度发生率 X 给予 Y, 和 D 标记设施位置、结构、非结构和其他特点。请注意, 在未来我们将忽略条件 D 为了简单。

IM: 密度测量 描述了地震地面运动的特性。这个参数通常被表达为平均年度过度的功能, g [IM].

EDP: 工程需求参数 描述了结构和非结构组件和内容对地震冲击的反应。这个阶段的产品是条件性概率, p [EDP|IM].

DM: 损害测量 描述结构和非结构组件的物理状态。DMs 包括有效的描述损害, 以特征功能性, 占用准备, 生命安全和需要修复建筑。这个阶段的产品是条件性概率, p [DM|EDP].

DV: 决策变量 用来将损害估计转化为对风险相关决策的人有用的数量。目前使用的 DV 被确定为决策指数是直接美元损失, 终止时间 (或恢复时间) 和死亡 (受害者). 这个阶段的产品是条件性概率, p [DV|DM].

[14] 正如前面提到的那样, 直接美元损失、折扣时间和损失被用作 PBEE2 方法中的决策变量来评估结构的性能。Applied Technology Council, 2012b 使用三种性能评估: 1) 基于强度,2) 基于场景, 和 3) 基于时间。

72.1.3.3 PBEE 1 和 PBEE 2 之间的差异

PBEE 1 的进化 (第一代 基于性能的地震工程) PBEE 2 (二代基于性能的地震工程) 代表在方法学、范围和应用方面取得了显著进展。下面是大差异的概述, 总结在表中 72.2.

关键差异

- **方法论框架**: PBEE1 依赖于定义方法和处方标准, 而 PBEE2 引入了一个多学科的概率框架。(Center, 2010).
- **解析 步骤**: PBEE 2 正式化了一个集成 危险性分析, 结构分析, 损害分析和 损失分析 的模块框架, 这在 PB EE 1 中没有明确分开。(FEMA, 2012).
- **范围**: PBEE 2 扩大了其重点, 包括非结构系统、社会影响和经济考虑, 与 PBEO 1 的结构中心方法不同。(American Society of Civil Engineers, 2017).
- **地面动作代表**: PBEE 2 包含 probabilistic seismic 危险性分析 (PSHA) 地面特定动作选择, 而 PBEE 1 使用简化危险描述 (Civil Engineers, 2022).
- **性能测量**: PBEE 2 除了结构安全之外, 还评估修理成本、停车时间、故障和功能性。(FEMA, 2012).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **决策**: PBEE 2 为风险信息决策提供可行信息, 超越基于代码的遵守 PBEE 1 (Center, 2010).

表 72.2: PBEE 1 和 PBEE 2 的比较

视角	**PBEE 1**	**PBEE 2**
方法论	定义, 处方	可靠, 多学科 (Center, 2010)
解析 步骤	危险、需求和损害的综合集成	模块化框架: 危险、结构性、损害和损失分析 (FEMA, 2012)
范围	只有结构系统	结构和非结构系统, 社会和经济影响 (American Society of Civil Engineers, 2017)
地面动作	简化危险描述	可靠性地震 危险性分析 (PSHA), 网站特定的选择 (Civil Engineers, 2022)
性能测量	结构性安全 (例如, 生命安全)	结构安全、修理费用、停车时间、致命性、功能性 (FEMA, 2012)
决策	基于代码的遵守	风险信息、利益相关者中心的决策 (Center, 2010)

72.1.4 PBEE 实施程序

15 从底部探索 PBEE 的四个核心组成部分 - 危害, 结构反应, 损坏和损失 - 我们现在描述了一个完整的步骤序列需要实施一个基于性能的地震工程 (PBEE) 评价。这个上下程序观点特别适用于实用 PBEE 的工程师和分析师。

16 该过程由一组精密分析组成, 从地震危险转移到决策变量 (DVS), 并在每个步骤中包含不确定性。步骤可以如下描述:

1. 设定设施和性能目标:
   - 描述结构及其位置、占据性和使用。
   - 确定利益相关者优先事项 (例如, 生命安全、功能连续性、维修成本限制、停车时间限制).
   - 选择合适的决策变量 (例如, 受害者, 成本, 恢复时间).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 性能可行性地震危险性分析 (PSHA), chapter 67:
    - 开发特定地面动作危险曲线, 适用于所选的强度措施 (IMS), 通常在基本期间的光谱加速度。
    - 选择不同返回期或危险级别的代表性地面动作 (例如,10%, 2%, 0.5% 五十年之内).
3. 导向 结构分析 到 Derive 工程需求参数 (EDP), chapter 69:
    - 构建非线性结构模型 (使用现有模型).
    - 在所选择的地面动作下进行非线性动态分析或响应历史分析。
    - 提取 EDPs 如间流动, 地板 加速度, 和组件变形。
    - 估计条件概率分布 $p(\text{EDP}|\text{IM})$.
4. 进行损害分析, chapter 70:
    - 将工程需求参数（EDP）映射为损伤指标 (DMS) 既是结构和非结构组件。
    - 使用脆弱性功能或实验关系来评估 $p(\text{DM}|\text{EDP})$.
    - 对组件特定的边界和后事件功能的计算。
5. 以 损失分析为性能。chapter 71:
    - 将损伤指标（DM）映射为决策变量 (DVS) 如事故、修理费用和停车时间。
    - 评估 $p(\text{DV}|\text{DM})$ 使用损失模式或恢复功能。
    - 将损失集成到组件中, 以获得预期的总损失测量。
6. 整合所有不确定性:
    - 通过 IM、EDP、DM 和 DV 进行概率集成, 使用总概率理论:

$$g[\text{DV}] = \int\int\int p[\text{DV}|\text{DM}]\, p[\text{DM}|\text{EDP}]\, p[\text{EDP}|\text{IM}]\, g[\text{IM}]\, d\text{IM}\, d\text{EDP}\, d\text{DM}$$

    - 使用 Monte Carlo 模拟或 数值积分 当关闭形式表达式不适用时。
7. 报告和解释结果:
    - 现有结果如预期的年度损失 (吃的), 损失过度曲线, 以及基于场景的后果。
    - 使用结果来报告风险减轻、设计决策、逆转优先考虑或利益相关者沟通。

[17] 此程序序列提供了一个实用的路线图, 以便在设计和评估方面应用 PBEE。虽然每个步骤都可以以不同的细节和精致度进行开发, 但整合框架确保性能在对社会的重要后果方面进行测量。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

72.2 从回应到损害: 脆弱性曲线

18 在上一节中描述的 PBEE 框架将地震入口与有意义的决策变量通过条件关系链连接: 强度测量 (IMS) 工程需求参数 (EDP) 损害措施 (DMS) 和决策变量 (DVS). 虽然结构分析 产生 EDP 如间隔冲动或地板加速, 但决策需要有关损害及其后果的信息。

19 解决这种差距 结构反应与物理损害之间 是 **脆弱性曲线**. 这些曲线量化了一个结构或非结构组件将超过一个特定的损害状态的可能性, 考虑到某种程度的地震需求。(通常是 EDP). 因此, 它们作为非线性结构分析和损失/损失模拟在 PBEE 之间的概率联系。

20 脆弱性函数是 PBEE 的核心, 尤其是在正式化 主条目: 信任区 损害的起源和进展。它允许从确定性检查转向结构性能的概率描述。下列部分介绍了脆弱性定义、区别、模型方法以及它们在更广泛的 PBEE 框架中的作用。

72.2.1 基本和定义

21 A **脆弱性曲线** 代表一个结构系统或组件超越特定 极限状态 的条件概率。(LS) 作为一个功能的 **强度测量** *(IM)*, 如光谱 加速度 (Sa) 或高峰地 加速度 (PGA):

$$P[\text{LS}|\text{IM} = im]$$

22 更正式, 脆弱性可以表达为:

$$P[D \geq C_{\text{LS}}|\text{IM} = im] = P\left[\frac{D}{C_{\text{LS}}} \geq 1 \mid \text{IM} = im\right]$$

哪里 D 这是需求和 C_{LS} 极限状态的容量限制。

23 在 PBEE 中, 脆弱性常常在 EDP-to-DM 水平上表达:

$$P[\text{DM} \geq dm \mid \text{EDP} = edp]$$

这种形式反映了脆弱性如何将结构反应与预期的损害联系起来。

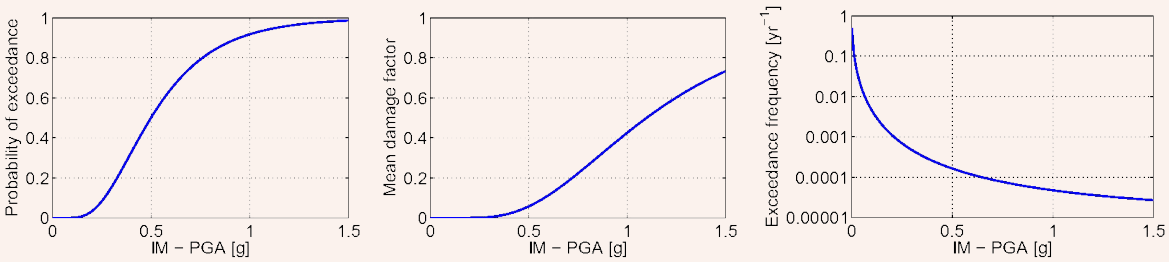
标签: Fragility vs. 脆弱性 vs. 危险

- **脆**弱性 量化损害状态超过所需需求的可能性。
- **脆**弱性 预期的量子 **损失** (例如, 成本, 停留时间, 受害者) 给予的危险。
- **危**险曲线 量化过度的频率 (PSHA 产量).

24 這些三個 单元 相結合 支座 風險評估和損失估計。形象 72.4 描述了区别。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



(a) 脆弱性曲线 (b) 脆弱性曲线 (c) 危险曲线

图 72.4: 地震脆弱性、脆弱性和危险曲线的比较

72.2.2 开发脆弱性曲线

漏洞数据的来源

- 帝国: 后地震观察; 真实但有限。
- 解析: 非线性时间史模拟 (IDA,MSA).
- Heuristic: 专家意见; 在数据不足时使用。
- 实验: 实验室测试; 由于成本而罕见。
- 混合: 结合实验和解析数据。

处理崩溃和极端反应

25 如果在模拟中出现崩溃或数值不稳定性, 则脆弱性应重新调整以考虑以下事件:

$$P[EDP \geq edp|IM] = P[EDP \geq edp|IM, \text{NoCollapse}](1-P[\text{Collapse}|IM])+P[\text{Collapse}|IM]$$

单人 vs. 多种损害国家

26 脆弱性可以表达在一系列限制状态 (LS_i) 每個相符的損害狀態 (DS_i). 按序列模型:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_i|IM] - P[\text{LS}_{i+1}|IM]$$

27 在平行系统中:

$$P[\text{DS}_i|IM] = P[\text{LS}_1|IM] \cdot P[\text{DS}_i|\text{LS}_1]$$

72.2.3 数学代表性

Lognormal 模型 (基于 IM)

$$P[\text{LS}|IM = im] = \Phi\left(\frac{\ln(im) - \ln(\eta)}{\beta}\right)$$

哪里 η 是中等能力和 β 分散的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

一般化线性模型 (GLM)

28 GLM 表达脆弱性, 使用链接功能 (例如, probit, logit, complementary log-log). 例如:

$$\text{Logit: } P = \frac{e^{\theta_0+\theta_1 IM}}{1+e^{\theta_0+\theta_1 IM}}$$

29 GLM 提供功能格式的灵活性, 可以用来评估不同代表性的模型匹配。

72.2.4 连续功能 *vs.* 直播 矩阵

30 脆弱性分析结果也可以根据它们的表现方式分类: 或者作为一个 **连续功能** (即脆弱性曲线) 或如 A **差异值表** 被称为 A **危害的可能性 矩阵** *(DPM)* (Erberik, 2015).

31 脆弱性曲线可以根据它们所代表的边界状态数量分类:

单身: 代表超越特定 极限状态 的可能性 (LS) 或工程需求参数的边界 (EDP).

多元: 不同边界状态相匹配的脆弱性曲线可以用来描述结构系统的完整损害状态资料。

32 限制国家 (LS) (参见部分 70.2) 定义不同损害状态之间的边界 (DS) 可以定义为质量的 (例如, 轻量级、适度、广泛) 或量化使用损害指数 (DI). 对于一个系统与 N_{LS} 边界国家, 有 $N_{\text{DS}} = N_{\text{LS}} + 1$ 相应的损害状态。国家损害 0 (DS_0) 代表不受损害的状态。

33 损害状态可以以两种不同的方式定义:

序列: (即命令) 系统必须通过 DS_i 到达之前 DS_{i+1}. 在特定 DS 中存在的可能性是:

$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im] - P[\text{LS}_{i+1} \mid \text{IM} = im], & 1 \le i < N_{\text{DS}} \\ P[\text{LS}_i \mid \text{IM} = im], & i = N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.2}$$

同時: (即平行) 每个损害状态均独立评估:

$$P[\text{DS} = ds_i \mid \text{IM} = im] = \begin{cases} 1 - P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im], & i = 0 \\ P[\text{LS}_1 \mid \text{IM} = im] \cdot P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1], & 1 \le i \le N_{\text{DS}} \end{cases} \tag{72.3}$$

34 请注意, 在同步评估的情况下, 所有损害状态的概率总额可能超过 1.0:

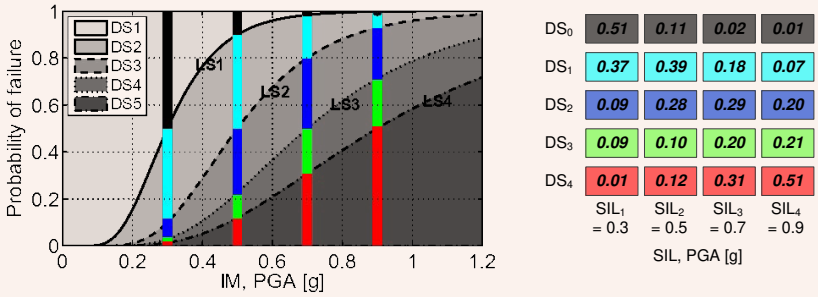
$$\sum_{i=1}^{N_{\text{DS}}} P[\text{DS} = ds_i \mid \text{LS}_1] > 1.0$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

指数 [p2] 损害! 概率 矩阵

35 和 **损害概率 矩阵 (DPM)**: 是 矩阵 , 在选择的地震强度水平上显示 DS 概率的差异值 (西尔斯). 每个 柱 代表一个差异化的 IM 水平, 而每个行都符合特定损害状态。虽然每个脆弱性曲线都是一个连续的功能, 但 DPM 代表在固定 IM 值中对这些功能进行差异样本。



(a) 脆弱性曲线 (b) 危害的可能性 矩阵

图 72.5: 脆弱性曲线与损害概率之间的关系 矩阵

表 72.3: 连续的对比 vs. 差异性差异性的表现

特色	**脆弱性曲线 (连续)**	**损害概率 矩阵 (差异性)**
代表性	软 功 能 (例 如,Lognormal CDF)	可见的 IM 级别的概率表
数据解决方案	无限域内	限于样品点
可用性	解析 框架最佳	可用于基于场景的评估
存储格式	功能参数 (是的, μ, β)	矩阵 值
解释	功能性	表格

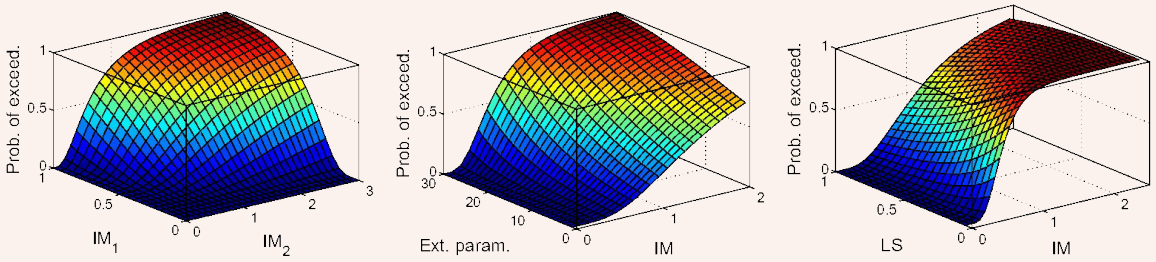
格拉吉利特曲线 vs. 表面

36 A **脆弱性曲线** 与损害状态过度的可能性有关 **单身** 我的。A **脆**弱的表面另一方面, 考虑到 **多元化** 变量, 图 72.6:

- **向量** *IMs:* 脆弱性作为两个或多个 IM 的功能, 例如 $P[\text{LS}|IM_1, IM_2]$
- **时间依赖的脆弱性**: 老化或恶化模型通过 $P[\text{LS}(t)|IM]$
- **限制国家范围**: 概率表面超越一个边界状态的连续性。

37 这些通用化对复杂系统, 如火柴或核电站特别重要。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 二个参数 (b) IM + 外部参数 (c) IM + LS 变量

图 72.6: 地震脆弱性表面的不同方面

72.3 PBEE 框架中的作用

38 在基于性能的地震工程的背景下 (PBEE) 脆弱性功能在一连锁条件关系中作为必不可少的链接, 量化流动。主条目: 信任区 从地动到结构性反应、损害, 最终到决策测量, 如经济损失或受害。

39 这个概率进展, 图 72.3 根据 PEER PBEE 框架, 计算超过特定决策变量的平均年度频率。(DV) 使用整体概率理论。核心 表述 通过强度测量集成 (IM) 工程需求参数 (EDP) 和损害措施 (DM) (二) 出于超越指定的 DV 限制的率:

$$\lambda_{\mathrm{DV}}(dv) = \int_{dm}\int_{edp}\int_{im} P[\mathrm{DV} \geq dv \mid \mathrm{DM} = dm] \times dP[\mathrm{DM} \geq dm \mid \mathrm{EDP} = edp]\, dP[\mathrm{EDP} \geq edp \mid \mathrm{IM} = im]\, |\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{IM}}(im)|$$

40 在此 表述 中, 脆弱性是结构反应与造成损害或损失之间的关键联系。术语 $P[\mathrm{EDP} \geq edp \mid \mathrm{IM} = im]$ 有时被称为需求脆弱性。(Mackie and Stojadinovic, 2005) 量化一个结构性需求超过特定地震强度水平的限制的可能性。这反映了结构动力学中的脆弱性传统使用。

41 然而, 在 PEER PBEE 框架内, 脆弱性更为紧密地定义为超越特定损害测量的条件概率, 因为已知的结构反应:

$$\text{Fragility} = P[\mathrm{DM} \geq dm \mid \mathrm{EDP} = edp]$$

这个定义捕捉了从物理反应到损害状态的过渡, 并代表 PBEE 方法中的关键概率步骤。(Porter, Kennedy, and Bachman, 2007; Gunay and Mosalam, 2013). 二、两种方程式 72.2 和 72.3, 描述序列和同时损害状态的可能性, 可以在这种脆弱性表达方面重新定义。

42 总体而言, 脆弱性功能是 PBEE 的地震危险转变为可行性能测量的背景。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

72.4 例题 72.1: 完整的 PBEE 例子

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

此示例介绍了 数值 的 基于性能的地震工程 示例 (PBEE) 覆盖所有四个主要组件:

- **地震 危险性分析** 地面动作过度概率的估计。
- **结构分析** 在地震负载下计算结构反应。
- **损害分析** 基于反应的物理损害评估。
- **损失分析** 估计经济损失、终止时间和受害者。

在这项研究中提出了以下假设:

- 该地点位于洛杉矶市中心。
- 这座建筑是三层钢材时刻框架。
- 建筑的基本时期是 $T_1 = 1.2$ 塞克。
- 地面动作强度在光谱加速度中测量 $S_a(T_1)$.
- 工程需求参数 (EDP) 是最大间流动率 θ.

地震 危险性分析

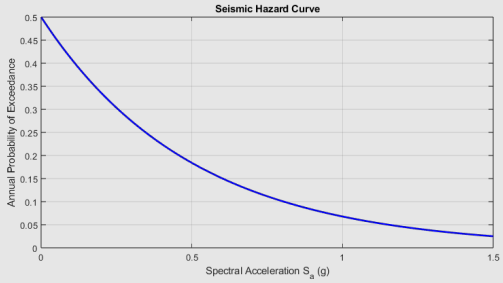
超越加速度的概率 S_a 被模型为:

$$\lambda(S_a) = Ae^{-BS_a}$$

网站特定的参数是:

- $A = 0.5$ (扩展因素)
- $B = 2.0$ (衰退率)

基于此模型的计算危险曲线在下面。



结构分析: IDA 曲线

结构性反应是由间歇式冲动比例所特征的。θ 接近如:

$$\theta = C_1 S_a^{C_2}$$

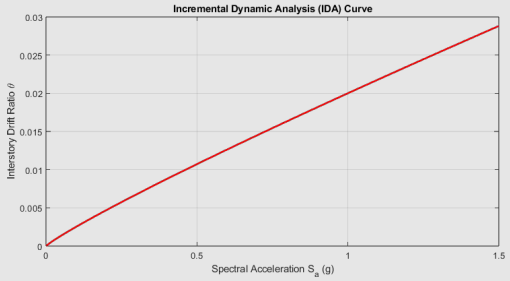
实验常态是:

- $C_1 = 0.02$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- $C_2 = 0.9$

这个关系是由 Incremental 动力分析 产生的 (伊达).



损害分析: 脆弱性曲线

脆弱性曲线定义基于流动率的不同损害状态过度的可能性 θ:

$$P(D_i|\theta) = \Phi\left(\frac{\ln(\theta) - \ln(\theta_{50})}{\beta}\right)$$

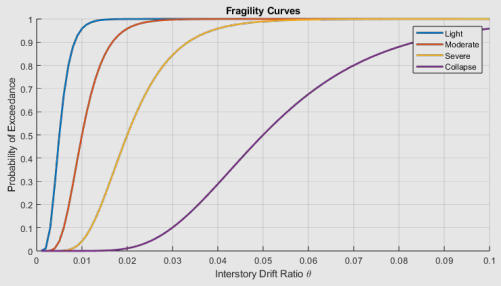
在哪里:

- θ_{50} 是中间驱动能力。
- $\beta = 0.4$ 代表分散 (主条目: 信任区 因素).

四个被视为损害状态是:

损害国家	平均驱动率 θ_{50}	分散 β
光损害	0.005 (0.5%)	0.4
适度损害	0.01 (1.0%)	0.4
严重损害	0.02 (2.0%)	0.4
崩溃	0.05 (5.0%)	0.4

脆弱性曲线显示在下面



失去估计

预期损失计算为:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

损失的概率和后果是:

损害国家	修理成本 ($M)	下载时间 (日子)	偶然 (%)
光明	0.1	2	0.0
适度	0.5	14	0.01
严肃	2.0	60	0.1
崩溃	10.0	300	5.0

使用计算损害的概率:

- 预期修理费用: $0.59M.
- 预期时间: 10.4 天
- 预期受害者: 0.01%.

失去估计

预期损失计算为:

$$\mathbb{E}[\text{Loss}] = \sum P(D_i) \times \text{Loss}_i$$

超越不同损害状态的可能性被用来将损失归分给每个样品。每个损害状态的概率分布用于将随机性引入计算。

损害状态和相关概率如下定义:

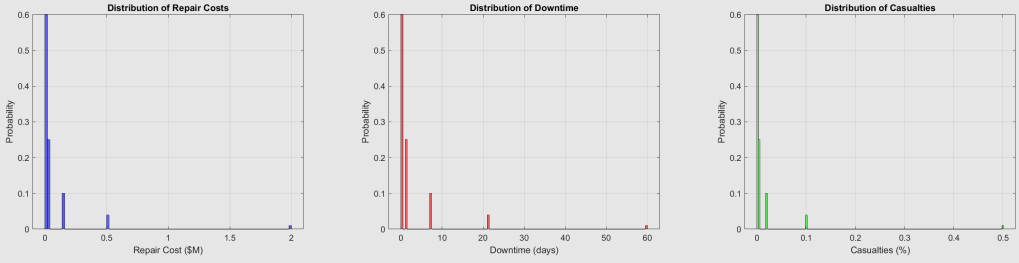
损害国家	概率	被分配的损失
光损害	90%	修理费用: $0.1M, 下载时间: 2 天, 偶然情况: 0.0%
适度损害	60%	修理费用: $0.5M, 下载时间: 14 天, 偶然情况: 0.01%
严重损害	10%	修理费用: $2.0M, 下载时间: 60 天, 偶然情况: 0.1%
崩溃	0%	修理费用: $10.0M, 下载时间: 300 天, 偶然情况: 5.0%

为了引入变量, 正常分布适用于标准偏差的损失。10% 是中等值。

从模拟中获得的预期值如下总结。

测量	预期价值 (意思)	标准差
预期修理费用	$1.08M	$0.25M
预期下载时间	3076 天	8.5 天
预期的偶然	0.48%	0.12%

下面的历史图显示了从蒙特卡洛模拟中获得的维修费用和停车时间的分配。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

损失的概率和损失后果如下。

损害国家	修理成本 ($M)	下载时间 (日子)	偶然 (%)
光明	0.1	2	0.0
适度	0.5	14	0.01
严肃	2.0	60	0.1
崩溃	10.0	300	5.0

观察

在 PBEE 损失分析中, 标准偏差可能大于平均水平。这是由于多种原因, 与损失估计中的概率模拟的性质有关。

- **右边分布:** PBEE 的损失分布经常跟随重型, 右侧分布, 如 Lognormal 或 Pareto 分布。这些分布可能表明与中间相对较大的差异。
- **非线性结构答案:** 损害和损失模型往往表现出高变异性, 因为 主条目: 信任区 在地面运动特征, 结构反应和脆弱性功能。罕见但极端损失的存在可以显著增加标准差。
- **多元化 主条目: 信任区 成本模型:** 修理成本模型, 在损失估计中使用, 往往结合了多种不确定性, 包括修理时间、劳动费用、物质费用和间接的经济损失。当这些模型以多重随机性进行时 (例如, 使用 Lognormal 分布) 与变量相同的比例 (COV) 可以是大。
- **蒙特卡洛模拟和重尾行为:** 当蒙特卡洛样本用于损失估计时, 极端实现 (例如, 整体结构崩溃导致灾难性损失) 可以将 标准差 与中间相似。

与参数的正常分布 μ_X 和 σ_X, 中等和标准差是由:

$$E[X] = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$$
$$\text{Std}(X) = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1}$$

标准差 超越平均值, 当:

$$\sqrt{e^{\sigma_X^2} - 1} > 1 \tag{72.4}$$

简化为:

$$\sigma_X^2 > \ln(2) \approx 0.693 \tag{72.5}$$

在 PBEE, 主条目: 信任区 在损害和成本模型往往导致 σ_X^2 超過 1 , 使 $\sigma > \mu$ 一个常见的事件。

MATLAB® 这个例子的代码在 §I.7.2.

72.5 历史遗迹和基础文件

[43] 基于性能的地震工程的开发 (PBEE) 由一系列来自 FEMA、ASCE、PEER 和 ATC 的基本文件组成。这些作品引入了现代地震风险评估和设计的背景, 现在形成的关键概念和方法。72.4.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- *ATC13 (1985)* 根据专家的早期脆弱性和损失估计, 在建筑类型中提供, 为脆弱性分析奠定基础。(ATC-13, 1985).
- *FEMA 273 / 274 (1997)* 引入与概率危险水平和性能水平相关的绩效目标, 如即时就业、生命安全和崩溃预防等。(FEMA, 1997b; FEMA, 1997a).
- **第** *356* **章** *(2000)* 将 FEMA 273/274 合成为工程师友好的格式, 后来成为 ASCE 41 的基础。(FEMA-356, 2000).
- *PEER* **框架** *(2003)* 太平洋地震工程研究中心正式化了 PBEE2 方法, 引入了 IM-EDP-DM-DV 链和概率集成 (Porter, 2003; Center, 2010).
- *FEMA P-58 (2012 – 2021)* 提供对单一建筑物的性能评估, 包括功能、停车时间和损失估计的全面概率框架。(FEMA, 2012).
- *ASCE 7* **和** *ASCE 41* 将基于性能的设计和评估纳入主流结构工程代码 (Civil Engineers, 2022; American Society of Civil Engineers, 2017).

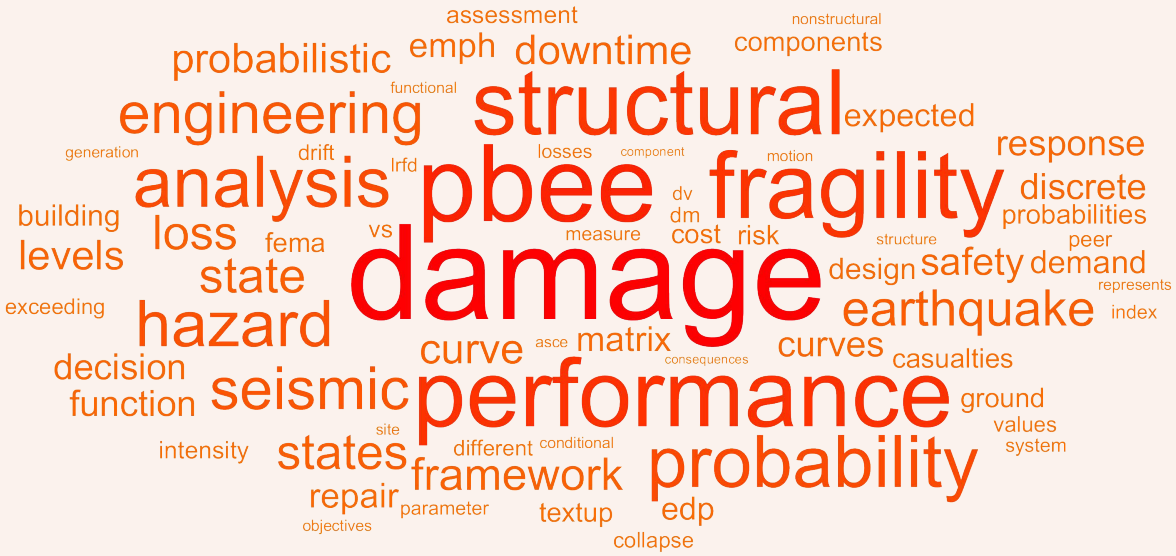
[44] 这些文件, 以及基于脆弱性损失模型和基于时间的性能测量等不断发展的方法, 已经确定了 PBEE 为地震风险信息工程的实用状态。

表 72.4: 基于性能的地震工程的历史发展中的关键文件 (PBEE).

年度	文件	機構	关键贡献
1985	ATC13	ATC	基于专家的脆弱性和损失估计
1997	FEMA 273 / 274	女士	性能目标与危险水平和损害状态相关
2000	第 356 章	女士	现有建筑物的预定标准导致 ASCE 41
2003	PEER 框架	珍珠	IM-EDP - DM - DV 链; 概率性能模型
2012 – 21	FEMA P-58	女士	可能的建筑 - 具体损失, 停车时间和功能性
2022	阿斯特 7	阿斯特	现代充电标准与性能为基础的规定
2023	第 41 集	阿斯特	现有建筑物的最新地震评估

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

附录

审阅稿

A 单位

A.1 是单位 2061
A.2 测量预定和多元化 2062
A.3 单位 & 转换因素 2062
A.4 强度、长度、工作和应力的概述, 在各个测量单位 2063
A.5 物理量从计量转换为帝国单位 2063

A.1 是单位

数量	尺寸		单位
	技术	基地单位	定义
长度	L	L	m
时间	t	t	s
质量	M	M	Kg
温度	T	T	K
质量 密度 (ρ)	ML^{-3}	ML^{-3}	公斤 $^{-3}$
力量 (F)	F	李 T^{-2}	N
应力	F.L−2	$ML^{-3}.t^{-2}$	MPA

审阅稿

A.2 测量预定和多元化

预定	简短	多元化
特拉	T	10^{12}
吉加	G	10^{9}
梅加	M	10^{6}
公斤	k	10^{3}
希特勒	h	10^{2}
德卡	da	10
因此	d	10^{-1}
百分	c	10^{-2}
千里	m	10^{-3}
微型	μ	10^{-6}
纳米	n	10^{-9}
皮科	p	10^{-12}

A.3 单位 & 转换因素

长度	m (尺寸)	1 英寸 = 0.0254 m	1 m = 39.37 英寸
力量	N (纽顿)	1 lb = 4482 N	1 N = 0.22481 lb
质量	Kg (千里)	1 lbm = 0.45359 Kg	1 公斤 = 2,2046 lb
密度	公斤/米 ^{3}	1 lbm/ft^3 = 16.018 公斤/米 ^{3}	1 公斤/米 ^{3}=0.062428 lbm/ft^3
温度	T	T ^{o}F=[(9/5)T^{o}C+32]	
加速度	m / s^2	1 in/s^2 = 0.0254 m/s^2	
精力	N / M	1 lb/in = 175.1 N/m	
应力	Pa = N/m^2	1 psi = 6,894.8 Pa	1 MPa = 145.04 psi
工作	J=N-M= 是	1 ft-lbf = 1.3558 J	1 J = 0.73756 ft- lbf

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

A.4 强度、长度、工作和应力的概述, 在各个测量单位

力量	长度	工作	应力
F	L	FL	FL2
N	m	J	Pa
	mm	mJ	MPA
kN	m	kJ	KPA
	mm	J	GPA
MN	m	MJ	MPA
	mm	kJ	TPA
Pa	m	N	
MPA	mm	N	
	m	MN	

A.5 物理量从计量转换为帝国单位

f'_c			f'_t		E	
狗狗	公斤/cm^2	MPA	狗狗	MPA	基	GPA
2,000	141	13.8	200	1.38	2,500	17.2
2,500	176	17.2	250	1.72	3,000	20.7
3,000	211	20.7	300	2.07	3,500	24.1
3,500	246	24.1	350	2.41	4,000	27.6
4,000	281	27.6	400	2.76	4,500	31.0
4,500	316	31.0	450	3.10	5,000	34.5
5,000	352	34.5	500	3.45	5,500	37.9
5,500	387	37.9	550	3.79	6,000	41.4
6,000	422	41.4	600	4.14	6,500	44.8
6,500	457	44.8	650	4.48	7,000	48.3

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

B 包装, 以帝国为基础的设计

章节 *18* 在此之前, 应该阅读.

摘要

该附件提供实验数据和结构负载的设计指南, 补充了关于结构分析和设计的主要章节。由 荷载 分类组织—*dead loads* (自我重) 生活负载 (占领与使用) 环境负担 (风、雪、地震), 和特殊负载 - 附件表明材料单位重量, 典型的地板和天花板负载, 以及各种建筑类型和占据的荷载因素。参考表提供铝、布、混凝土、钢和木材的实用值; 常见地板系统和天花板结构的规格; 以及对最终和服务性限制状态的负载组合的指南。这些实验数据和比例支持整个文本中使用的设计计算和负载案例。

B.1 死负载 2064
B.2 风负载 2065
B.2.1 例题 B.1: 风荷载 2068
B.3 地震 2070
B.3.1 例题 B.2: 地震在一个框架上加载 2073
B.3.2 例题 B.3: 地震 荷载 在高楼上 2075
B.4 桥梁负载 2076
B.5 荷载 组合 2076
B.6 活载 减少 2077
B.6.1 例题 B.4: 活载 减少 I 2078
B.6.2 例题 B.5: 活载 减少 II 2079
B.7 荷载 定位 2079

B.1 死负载

材料	lb/ft^3	kN/m^3
铝	173	27.2
布里克	120	18.9
混凝土	145	33.8
钢材	490	77.0
木材 (皮恩)	40	6.3

表 B.1: 材料重量单位

材料	lb/ft^2
木材	40-50
钢材	50-80
钢筋混凝土	100-150

表 B.2: 建筑物中平均 Gross 恒载

审阅稿

材料	lb/ft^2
天花板	
频道中断系统	1
Acoustical 纤维管	1
楼层	
钢材 地板	2-10
混凝土 - 清单 1 在。	12
林相关术语 1/4 在。	1
哈德伍德	4
罗夫斯	
铜或金	1-5
5 感知和沉默	6
Shingles 阿斯法尔特	3
克莱 • 蒂尔斯	9-14
林相关术语树	3
隔离 1 in. 在现场	2
派对	
克莱 • 泰勒 10 号。	40
吉普赛区 5 号	14
木材 2x4 (12 - 16 英格兰)	2
水晶 1 in. 水泥	10
1 英寸 吉普赛	5
墙壁	
布里克 12 号。	120
Hollow 混凝土 区块 (重集合)	
4 in.	30
8 in.	55
12 in.	80
Hollow 混凝土 区块 (光集合)	
4 in.	21
8 in.	38
12 in.	55

表 B.3: 建筑材料的重量

B.2 风负载

1 首先提到 §18.2.2.1

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

使用或占领	lb/ft^2
會議區域	50
公寓、露台、住宅阳台	60
走廊、楼梯	100
车库	50
办公室建筑	50
居住	40
存储	125-250

表 B.4: 最低均匀分配的现场负载, (ICBO, 1994)

2 在风暴中, 风速可能达到高于或高于每小时 150 英里, 相当于 动压 q_s 大约 60 PSF (如平均垂直占用率 荷载在建筑物中).

3 风 压力 增加与高度, 桌面 B.5.

高区	Wind-速度 地圖區域						
(脚下)	20	25	30	35	40	45	50
<30	15	20	25	25	30	35	40
30 to 49	20	25	30	35	40	45	50
50 to 99	25	30	40	45	50	55	60
100 to 499	30	40	45	55	60	70	75
500 to 1199	35	45	55	60	70	80	90
>1,200	40	50	60	70	80	90	100

表 B.5: 风 速度 地面上方的变化

4 风荷载 会导致 吸力 在左侧, 图 B.1

5 这个尺寸必须根据形状和环境进行修改。建筑物。因此, 设计 压力 p (PSF) 被授予

$$p = C_e C_q I q_s$$

压力被认为是正常的所有墙壁和天花板和

C_e **速度 压力 比例** 计算高度、曝光和口味因素。它是因为风速度随着高度和动态的增加。空气流的性质 (即风 压力 不稳定) 桌子 B.6.

C_q **压力 值** 是表中的形状因素。B.7 可用于加布式框架。

I **重要因素** 如表所示 B.8. 哪里

我基本设施: 医院; 火灾和警察局; 坦克; 紧急车辆避难所, 站立的电力发电设备; 政府中的结构和设备。通讯中心。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

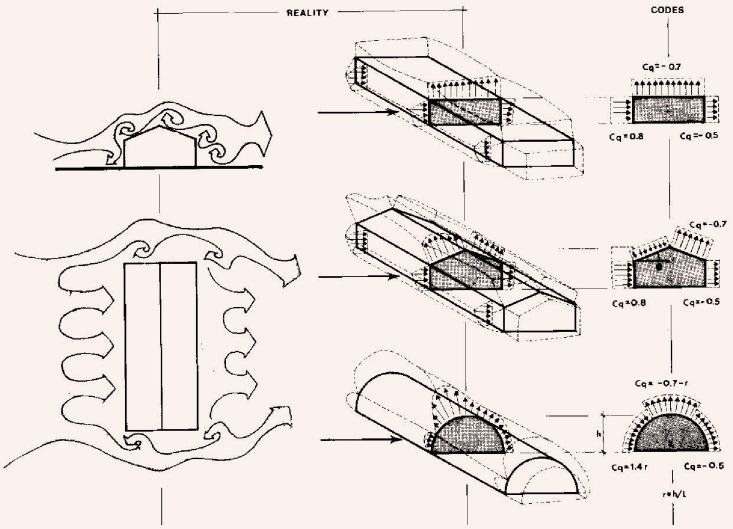


图 B.1: 风荷载对结构的影响 (Schueller, 1996)

C_e	展示	
1.39-2.34	D	开放、平面地面面对大水体
1.06-2.19	C	平坦的开放地板, 延伸一半英里或从现场在任何完整的四角形开放
0.62-1.80	B	建筑物、森林或表面不规则的地板高达 20 英尺以上

表 B.6: C_e 对 风荷载 的比例, (ICBO, 1994)

		迎风面	背风面
混合框架 (五:H)			
天花板	<9:12	−0.7	−0.7
	9:12 to 12:12	0.4	−0.7
	>12:12	0.7	−0.7
墙壁		0.8	−0.5
建筑物 (高度 < 200 ft)			
垂直预测	高度 < 40 ft	1.3	−1.3
	高度 > 40 ft	1.4	−1.4
水平预测		−0.7	−0.7

表 B.7: 风 压力 因子 C_q, (ICBO, 1994)

二、危险设施: 居住、支持或包含足够的数量的结构毒性或爆炸性物质对一般安全危险公开释放。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

	占领类别	重要因素 I 地震	风
I	基本设施	1.25	1.15
II	危险设施	1.25	1.15
第三	特殊占领结构	1.00	1.00
IV	标准占领结构	1.00	1.00

表 B.8: 风和地震负载的重要因素, (ICBO, 1994)

第三个特殊占领结构: 覆盖的结构, 其主要占据是公共集会, 能力 > 300 人。
通过中学或日常护理中心的学校建筑, 容量 > 250 人。
校园或成人教育学校的建筑, 能力 > 500 人。
50 或以上居民残疾患者的医疗设施, 但不包括上述
监狱和拘留设施
所有占领的结构 > 五千人。
发电站和其他公共用途的结构和设备设施不包括在上面, 并且需要继续运营。

四、标准占领结构: 所有具有上列未列出的占据或功能的结构。

6 对于普通建筑的初步设计 $C_e = 1.0$ 和 $C_q = 1.3$ 可能是假设, 出售

$$p = (1.3).020256V^2 = .00333V^2 \tag{B.1}$$

相当于压力的 21 psf, 为风速的 80 mph, 图 B.2, 桌子 B.9.

B.2.1 例题 B.1: 风荷载

确定下面的建筑物的风力它建在圣路易斯, 被树木包围。

1. 從 图 18.3 最高风量 速度 是 St. 路易斯是 70mph, 因为建筑被保护我们可以采取 $C_e = 0.7, I = 1.$.
基风 压力 $q_s = 0.00256 \times (70)^2 = 12.54$ PSF。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

高度上方等级 (ft)	展示			
	B		C	
	基本 风速 (mph)			
	70	80	70	80
0-15	10	13	17	23
20	11	14	18	24
25	12	15	19	25
30	12	16	20	26
40	14	18	21	28
60	17	22	25	33
80	18	24	27	35
100	20	26	28	37
120	21	28	29	38
160	23	30	31	41
200	25	33	33	43
300	29	37	36	47
400	32	41	38	50

表 B.9: 接近的风格设计 压力 p 普通风力抵抗建筑结构

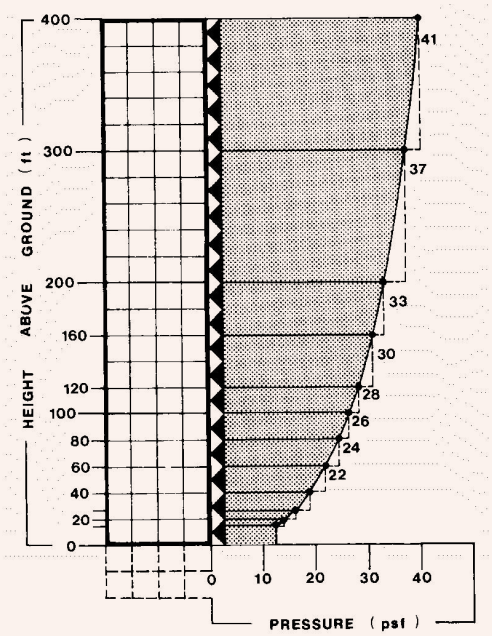
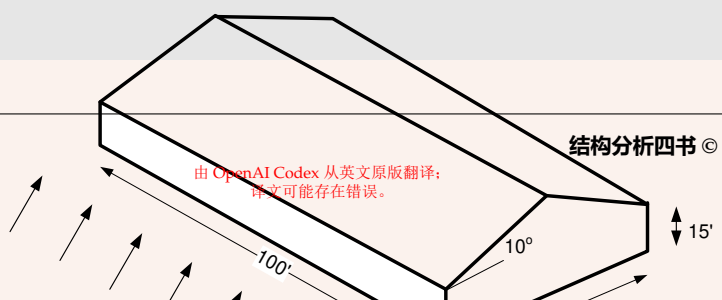


图 B.2: 接近的风设计 压力 p 为普通风力抵抗建筑结构



由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

2. 天花板的尾巴是 8:15=6.4:12, 这给了 $C_q = -0.7$ 兩者為风向和左向的侧面 垂直墙壁有 $C_q = 0.8$ 对于 The 迎风面 和 $C_q = -0.5$ 至于一只狮子。
3. 因此, 在天花板上应用的 压力 是 $p = 0.7 \times (-0.7) \times 12.54 =$ 614 PSF 这就是天花板被提升。
4. 胜利的墙, 压力是 $0.7 \times 0.8 \times 12.54 =$7.02 PSF, 至於的牆。$0.7 \times (-0.5) \times 12.54 =$439 PSF (吸力),
5. 风的方向可以改变。因此, 每个结构组件都必须设计为抵抗一切可能的荷载 组合。
6. 对于大型建筑物, 可以遭受大风负载, 在风隧道中测试结构本身及其周围经常完成。

B.3 地震

7 建筑可以抵抗

小地震 没有损害

适度地震 没有结构性损害, 但可能与某些非结构性损害

大地震 没有崩溃, 但可能有某些结构损坏以及非结构性损害。

这是通过适当的动力分析实现的。

8 对于初步设计或小型设计结构 A **同等水平静态 荷载** 可以确定。

9 现行负载取决于下列

1. 地面密度 加速度 (包括土壤/岩石属性).
2. 建筑的动态特性, 如其模式形状和振动的时期和它的冲浪特征。
3. 质量的建筑。

10 结构的动态反应的一个关键因素是结构振动的基本时期 (或第一种方式振动). 这是一个完整的运动周期所需的时间, 图 B.3. 如果是地震的兴奋频率接近建筑中的一个, 然后可以出现反射。这应该被避免。

11 地震 荷载 表现为水平力量, 因为 (首先) 垂直内立力量 ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

12 每个级别的水平强度计算为基 剪力 的部分。V

$$V = \frac{ZIC}{R_W} W$$

在哪里:

Z **区域因素:** 由 图 确定 B.4 和桌子 B.10.

地震区	0	1	2A	2B	3	4
Z	0	0.075	0.15	0.2	0.3	0.4

表 B.10: Z 不同地震区的因素, UBC1994 年

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

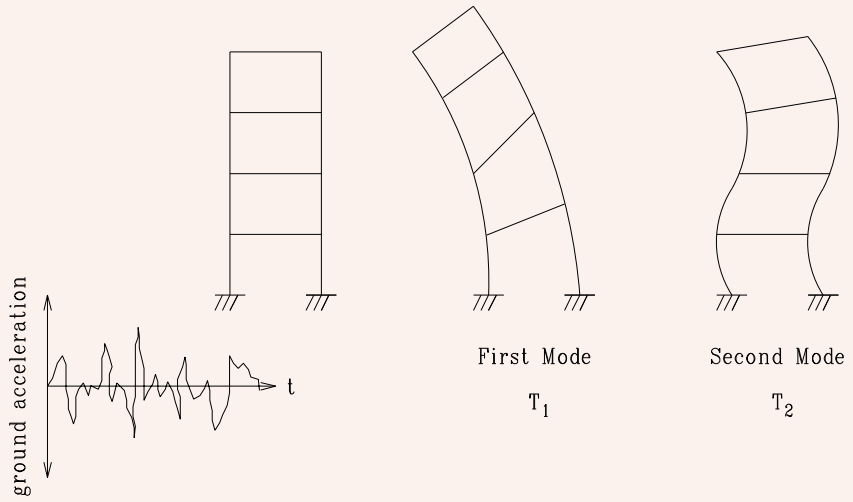


图 B.3: 建筑物的振动

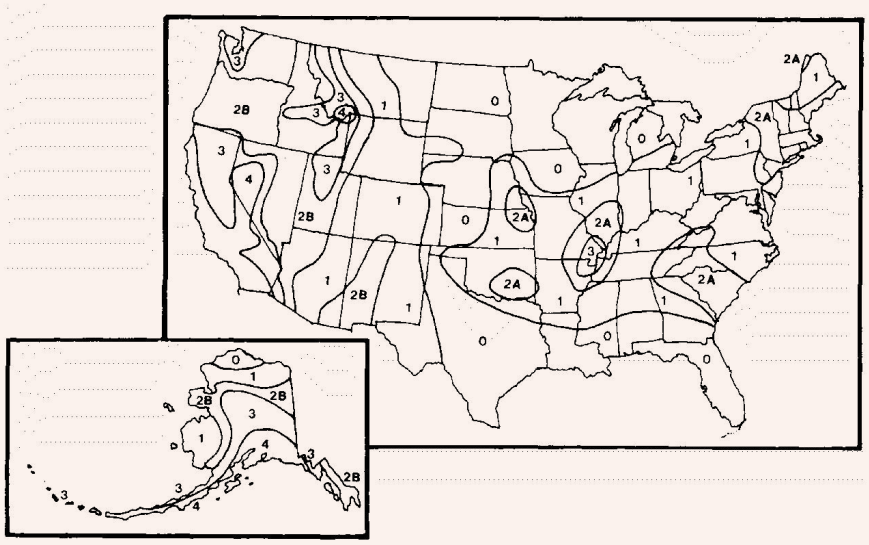


图 B.4: 美国地震区, (ICBO, 1994)

I **重要因素:** 由桌子所提供的 B.8.

C: **設計 反应谱** 给予的

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} \leq 2.75$$

T 这是建筑物的振动时间在几秒钟内。这可以通过建筑物的自由振动分析来确定。或从以下实验式中估计

$$T = C_t(h_n)^{3/4}$$

在哪里:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

h_n 是建筑高于基地的 ft。
和

C_t 0.035 钢材 时刻抵抗框架
C_t 0.030 钢筋混凝土 时刻抵抗框架和以色列包装框架 S **标签: 网站 Coefficient**
C_t 0.020 所有其他建筑物

按桌子提供 B.11 请注意, 大多数 1990 年: 旧金山大地震发生在海军许多房屋建在软

类型	描述	S 因素
S_1	地板配置, 如岩石材料或厚/薄的土壤不到 200 英尺。	1.0
S_2	厚或固体土壤超过 200 英尺	1.2
S_3	70 英尺或以上的土壤, 含有超过 20 英寸的软到中等固体粘贴但不超過 40 英尺的柔軟滑板。	1.5
S_4	土壤含有 40 英尺以上的软粘液	2.0

表 B.11: S 地震 加载的位置比例, (ICBO, 1994)

土上。
和

$$\frac{C}{R_W} \geq 0.075$$

R_W 由桌子提供 B.12.

W **荷载** 整体结构 荷载.

[13] 地平线力量 V 它分布在建筑物的高度上。在两部分。第一個 (只适用, 如果 $T \geq 0.7$ 塞克。) 是集中力量 F_1 同等的

$$F_t = 0.07TV \leq 0.25V \tag{B.2}$$

它在建筑物的顶部应用, 因为 Whiplash。力量的平衡 $V - F_t$ 被分布为三角形荷载在基地下降到零。

[14] 每层地板的平衡重量, 其次是强度每一个人的行动, 都是由

$$F_x = \frac{(V - F_t)h_x}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n} = \frac{(V - F_t)h_x}{\Sigma_{i=1}^{n} h_i} \tag{B.3}$$

哪里 h_i 和 h_n 是高度在 ft 上方的基地到水平 i, n 或 x 相应

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

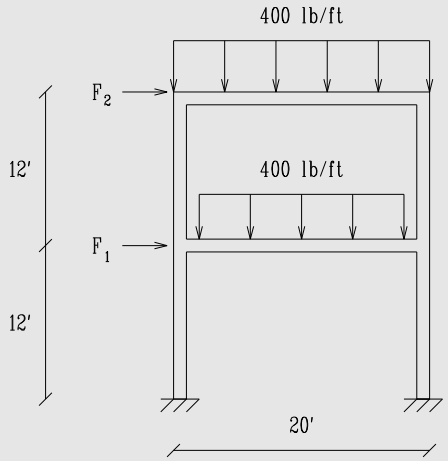
结构系统	R_W	H (ft)
带墙系统		
光框的墙壁与板块		
木材墙壁为结构三个故事或更少	8	65
所有其他照明框架墙壁	6	65
沙尔墙		
混凝土	8	240
马赛	8	160
建造框架系统 使用相关术语或沙墙)		
钢材 以极端分布式杜克蒂尔 框架	10	240
光框的墙壁与板块		
木材墙壁为结构三个故事或更少	9	65
所有其他照明框架墙壁	7	65
沙尔墙		
混凝土	8	240
马赛	8	160
集中包装框架		
钢材	8	160
混凝土 (仅适用于区域 I 和 2)	8	-
重木	8	65
时刻抵抗 框架 系统		
特殊时刻抵抗框架 (SMRF)		
钢材	12	N 号
混凝土	12	N 号
混凝土 中间时刻抵抗框架 (IMRF) 仅适用于区域 1 和 2	8	-
常规时刻抵抗框架 (OMRF)		
钢材	6	160
混凝土 (仅限区域 1)	5	-
双重系统 (选择的案例仅适用于杜克特硬框)		
沙尔墙		
混凝土 與 SMRF	12	N 号
与 SMRF 的 Masonry	8	160
钢材 异端切割式杜克蒂尔 框架	6-12	第 160 章
集成包装 框架	12	N。L。
钢材 與 钢材 SMRF	10	N 号
钢材 與 钢材 OMRF	6	160
混凝土 與 混凝土 SMRF (仅适用于区域 1 和 2)	9	-

表 B.12: 部分列表 R_W 各式各样的结构系统, (ICBO, 1994)

B.3.1 例题 B.2: 地震在一个框架上加载

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

确定下面的双重医院框架结构的大约地震力量。每个楼层的 DL 为 200lb/ft,LL 是四百英镑/ft。结构是建立在软土壤上。使用 DL Plus 50%每层的重量。这座建筑在区域 3。



1. 振动的基本时期是

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = (0.030)(24)^{3/4} = 0.32 \text{ sec.} \tag{B.4}$$

2. 和 C 比例是

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(2.0)}{(0.32)^{2/3}} = 5.344 > 2.75 \tag{B.5}$$

使用 $C = 2.75$.

3. 其它因素是: Z =0.3; I=1.25; R_W=12
4. 检查

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075\checkmark \tag{B.6}$$

5. 总垂直 荷载

$$W = 2\left((200 + 0.5(400)\right)(20) = 16000 \text{ lbs} \tag{B.7}$$

6. 地震基层的总数是

$$V = \frac{ZIC}{R_W} = \frac{(0.3)(1.25)(2.75)}{12} = 0.086W \tag{B.8}$$

$$= (0.086)(16000) = 1375\ lbs \tag{B.9}$$

7. 因为 $T < 0.7$ 答: 没有 Whiplash。
8. 荷载在每个楼层上是由

$$F_2 = \frac{(1375)(24)}{12+24} = 916.7lbs \tag{B.10}$$

$$F_1 = \frac{(1375)(12)}{12+24} = 458.3lbs \tag{B.11}$$

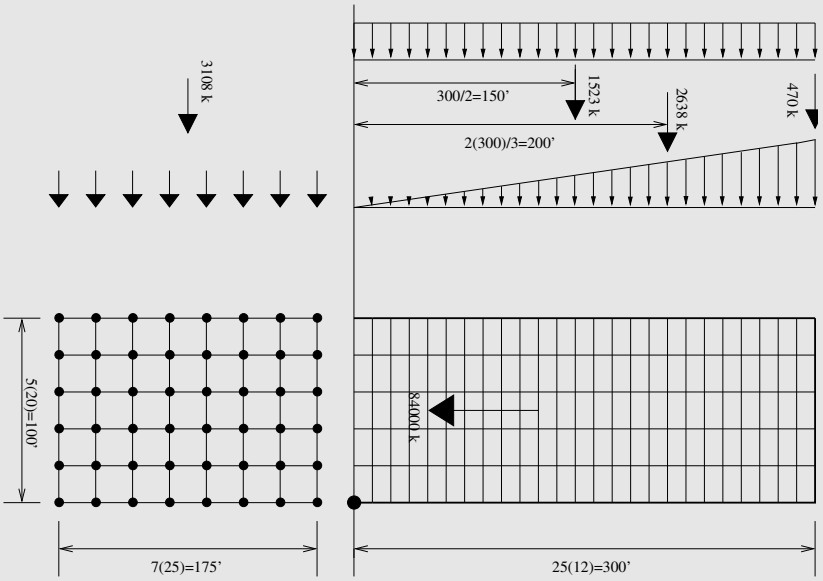
审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

B.3.2 例题 B.3: 地震 荷载 在高楼上

下一篇: 重复 Schueller, 1996 The design of Building Structures.

确定一个 25 层, 双重的关键侧载量, 固体空间 框架 混凝土 结构在短方向。坚固的框架被打破在 截面 和 20 英尺的长度方向。和建筑的计划尺寸为 175×100 英尺, 结构是 25(12)=300 英尺高。该办公室建筑位于城市环境中风速 70 毫米/小时, 在地震区 4。为此研究中, 使用的平均建筑总数为恒载 192 psf。土壤条件是未知的。



1. 建筑总体重量是

$$W = (0.1926)\ \text{psf}(100 \times 175)\ \text{ft}^2 \times 25\ \text{storeys} = 84,000\ \text{k} \tag{B.12}$$

2. 硬 框架 的基本振动期是

$$T = C_t(h_n)^{3/4} = 0.030(300)^{3/4} = 2.16\ \text{sec.} > 0.7\ \text{sec.}\checkmark \tag{B.13}$$

3. 和 C 比例是

$$C = \frac{1.25S}{T^{2/3}} = \frac{(1.25)(1.5)}{(2.16)^{2/3}} = 1.12 \leq 2.75\checkmark \tag{B.14}$$

4. 其它因素是 Z=0.4; I=1, R_W=12
5. 我们检查

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 \geq 0.075\checkmark \tag{B.15}$$

6. 沿着关键短方向的整体地震基板是

$$V = \frac{ZIC}{R_W}W = \frac{(0.4)(1)(1.12)}{(12)}W = 0.037W \tag{B.16}$$

$$= (0.037)(84000) = 3108kip \tag{B.17}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

7. 因为 $T > 0.7$ sec.,Whiplash 效应必须考虑

$$F_t = 0.07TV = (0.07)(2.16)(3108) = 470 \text{ k} \leftarrow \quad \text{(B.18)}$$

$$le \quad 0.25V = (0.25)(3108) = 777 \text{ k} \quad \text{(B.19)}$$

因此, 三角形荷载的总值是

$$V - F_t = 3108 - 470 = 2638 \text{ k} \quad \text{(B.20)}$$

8. 让我们来看看风荷载是否有权力。桌子 xx 我们保守地承认一个统一的风压力 29 psf 导致全方位的力量

$$P_W = (0.029) \text{ psf}(175 \times 300) \text{ ft}^2 = 1523 \text{ k} < 3108 \text{ k} \quad \text{(B.21)}$$

总值 地震荷载 的大小显然高于总值。风力。

B.4 桥梁负载

对于高速公路桥梁, 设计负载由 AASHTO 提供 (协会的美国国家高速公路交通官员). HS-20 卡车正在使用主要高速公路上的桥梁设计, 图 B.5. 要么需要使用指定的轴承负载和空间的设计卡车, 要么必须使用相同的单一荷载和集中荷载. 这种负载必须放置, 以便产生最大压力。

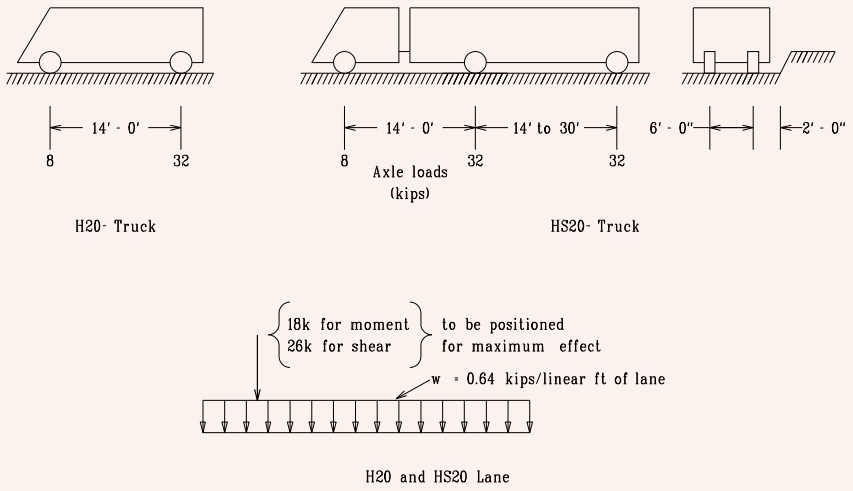


图 B.5: 卡车 荷载

B.5 荷载 组合

15 代码所指定的直播负载代表最大可能的负载。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

16 所有这些负载同时发生的可能性远程。因此, 建造代码允许一定的减少, 当某些负载它们是合并的。

17 此外, 结构应设计以抵抗负载组合。

18 D=死;L=活;Lr=天花板活;W=风;E=地震; S=雪; T=温度; H=土壤:

19 荷载和抵抗因子设计 (LRFD) 混凝土的方法美国混凝土研究所 (这里) 建筑设计代码 (318) (ACI 318, 2019) 要求下列荷载的组合应考虑:

1. 1.4D + 1.7L
2. 0.75(1.4D+1.7L+1.7W)
3. 9D + 1.3W
4. 1.4D +1.7L+1.7H
5. 0.75(1.4D+1.4T+1.7L)
6. 1.4(D + T)

而对于钢材结构, 美国研究所的钢材. 建设 (艾斯克) 代码 , (American Institute of Steel Construction, 2016) 要求下列组合被验证

1. 1.4D
2. 1.2D + 1.6L + 0.5(Lr 或 S)
3. 1.2D + 0.5L (或 0.8W)+1.6(Lr 或 S)
4. 1.2D + 0.5L + 0.5(Lr 或 S)+1.3W
5. 1.2D + 0.5L(或 0.2 S)+1.5E
6. 9D + 1.3W(或 1.5 E)

20 分析可以单独进行, 每个基本负载 (L、D、W 等) 然后使用负载的超越原则。可以线性结合 (除非已达到弹性限制).

21 重量往往被描述为 **常见**, **不寻常** 和 **极端**.

B.6 活载 减少

22 活载 减少是结构设计的一个重要概念, 旨在通过考虑到整个现场充电同时应用的可能性降低, 优化结构成员的设计负载。根据各种建筑规则, 包括 (ACI 318, 2019) 和 (ASCE/SEI 7-16, 2017).

23 活载 减少的原则是, 随着税收区域增加, 最大 活载 同时应用的可能性会下降。因此, 支持更大的区域的结构成员, 如喷射器、旋转器和列, 可以为减少现场负载而设计。

24 ACI 318 允许基于会员支持的税收区域 活载 减少。活载 减少的具体公式是为了确保安全, 同时优化设计。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

25 ASCE 7-16, 第 4.8 节为 活载 减少的详细规则。活载减少的总体公式是:

$$L_r = L \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right), \tag{B.22}$$

在哪里:

- L_r 是 活载 减少的 (PSF).
- L 是未减少的 活载 (PSF).
- A_T 是由会员支持的税收区 (在 ft^2).

26 低 活载 不应小于:

- 50% 原始 活载 为支持一层的会员。
- 40% 原始 活载 为支持多层的会员。

27 活载 减少不允许在某些情况下, 如:

- 聚集区域具有高占领负载。
- 存储或仓库区。
- 集中负载的区域。

B.6.1 例题 B.4: 活载 减少 I

考虑一个 柱 支持一个税收区域 $A_T = 400\,ft^2$ 与原始 活载 的 $L = 100\,psf$. 减少的 活载 以以下方式计算:

$$\begin{aligned} L_r &= L\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_T}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{400}}\right) \\ &= 100\left(0.25 + \frac{15}{20}\right) \\ &= 100\,(0.25 + 0.75) \\ L_r &= 100\,\text{psf} \end{aligned}$$

在这种情况下, 没有减少 因为 活载 减少公式产生与原始 活载 相同的值。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

B.6.2 例题 B.5: 活载 减少 II

在一个 10 个故事办公室建筑与柱两方向的 16 英尺空間, 總 恒载 為 60 psf, 雪 荷载 20 psf 和 活载 80 psf. 什么是总活负载和总负载柱必须在地板上设计

1. 税务区是 $16 \times 16 = 256 ft^2 > 150$✓
2. 减少 R 是 $R = .08(16 \times 16 - 150) = 8.48\%$
3. 最大可用的减少 $R^{max} = 23.1\left(1 + \frac{60}{80}\right) = 40.4\%$ which is less than 60% ✓
4. 减少的 **累积** 荷载 为每个楼层的 柱 是

楼层	天花板	10	9	8	7	6	5	4	3	2	全集
集成 R (%)	8.48	16.96	25.44	33.92	42.4	51.32	59.8	60	60	60	
合成 L	20	80	80	80	80	80	80	80	80	80	740
集成 R× LL	18.3	66.4	59.6	52.9	46.08	38.9	32.2	32	32	32	410

   柱 底部的结果设计为 活载 已减少第 740 章 要 410 基普.
5. 总值 恒载 是 $DL = (10)(60) = 600$ 基普, 因此总体荷载 是 $\frac{740-410}{740+600} \times 100$=25%.

B.7 荷载 定位

[28] 只有 恒载 是静态的。活载 另一方面, 可以或不能在某个结构的特定组件上应用。因此, 荷载定位以最高内部力量为基础的安排 (时刻 +ve 或 -ve 谢尔) 在不同的位置必须考虑, 图 B.6.

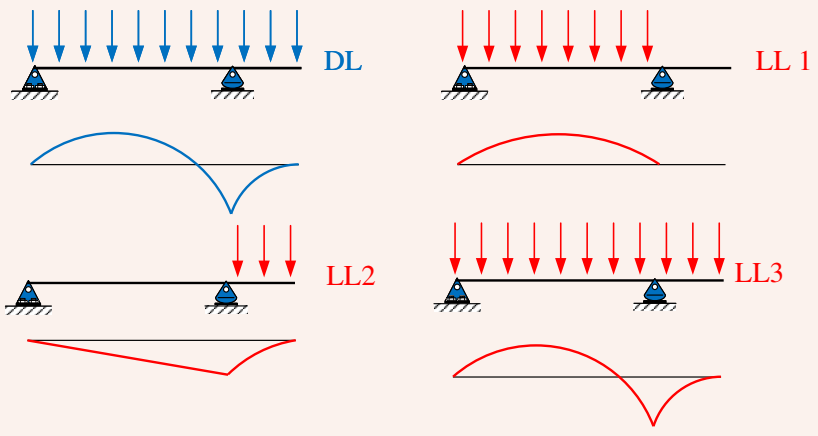


图 B.6: 荷载 定位以最大限度的时刻

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

C 线性均匀差异方程式

摘要

在整个书中, 一系列的表述导致第二或更常见的第四顺序差异方程式。本章节将简要描述他们的解决方案。

C.1 管理差异方程式的概述 2080
C.2 解决方案 2081
C.3 稳定 I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ 2081
C.4 二、稳定性 $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 2082
C.5 梁 弹性 基础; $\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$ 2083

差异方程式是一种方程, 在那里的未知是函数, 函数和其衍生物都可能出现在方程中。

C.1 管理差异方程式的概述

梁

(Eq. 22.2)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}EI\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = w(x) \text{ or } \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{w(x)}{EI}$$

索

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{H}$$

与 flexure 相同的评论

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M}{EI}$$

梁 大 挠度

(Eq. 29.2)

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{P}{EI}\frac{dx}{ds} = -\alpha^2\cos\phi$$

使用 Elliptic Integrals 要解决。

板

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.1}$$

审阅稿

或

$$\nabla^4 w = \frac{p_z}{\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}} \tag{C.2}$$

Beam 弹性基础

Eq. 22.3

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4k^4y = 0$$

C.2 解决方案

An **常微分方程** (这里) 只有一個獨立的 (如如 x 或 t). 否则,A **偏微分方程** (PDE) 有超过一个独立变量。(如如 x, y 或 x, t).

差异方程式是 **线性** 如果方程式中的每一个术语都包含任何或确切的依赖变量或其衍生物之一。依赖变量本身或其衍生品没有产品。每個詞都擁有最多一種同等的權力。x 或 $\dot{x}$ 或 $\ddot{x}$; or $f(x)$ 其衍生品。

差异方程式具有恒定的比例, 如果依赖变量和所有衍生品仅以恒定的倍数。

A **均匀的线性方程式** 右手的侧面是零。(所有条款都包含依赖变量和其衍生品的正确力量。).

C.3 稳定 I: $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$

第二次排序差异方程式是

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \tag{C.3}$$

或

$$y'' + ky = 0$$

应该是显而易见的, 这个方程式的解决方案将有形状。

$$y = e^{\lambda x}$$

然后

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

替代 EQ。C.3

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+ke^{\lambda x}=0$$
$$\Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2+k)=0$$

但是, 自从 $e^{\lambda x}$ 永远不能平等于零, 我们

$$\lambda^2+k=0 \qquad \text{characteristic equation} \tag{C.4}$$

特征方程式的解决方案是简单

$$\lambda^2=\pm\sqrt{-1}\sqrt{k}$$

或

$$\lambda^2=\pm i\sqrt{k}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=i\sqrt{k}\\ \lambda_2=-i\sqrt{k}\end{cases}$$

将这些表达式替换为 Eq。C.3

$$y=C_1e^{i\sqrt{k}x}+C_2e^{-i\sqrt{k}x} \tag{C.5}$$

引用 Euler 的公式 (他的许多人,)

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x) \tag{C.6}$$

我们得到

$$e^{i\sqrt{k}x}=\cos(\sqrt{k}x)+i\sin(\sqrt{k}x)$$
$$e^{-i\sqrt{k}x}=\cos(\sqrt{k}x)-i\sin(\sqrt{k}x)$$

这些表达式被替换为 Eq。C.5

$$\begin{aligned}y&=C_1\left[\cos(\sqrt{k}x)+i\sin(\sqrt{k}x)\right]+C_2\left[\cos(\sqrt{k}x)-i\sin(\sqrt{k}x)\right]\\&=(C_1+C_2)\cos(\sqrt{k}x)+i(C_1-C_2)\sin(\sqrt{k}x)\end{aligned}$$

我们可以引入新的集成连续性 D_1 和 D_2

$$y=D_1\cos(\sqrt{k}x)+D_2\sin(\sqrt{k}x) \tag{C.7}$$

C.4 二、稳定性 $\frac{d^4y}{dx^4}+k^2\frac{d^2y}{dx^2}=0$

稳定性 , 29.21.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

又是解决方案

$$\frac{d^4y}{dx^4}+k^2\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

被寻求的形式 $y=e^{\lambda x}$. 然后

$$y''=\lambda^2e^{\lambda x},$$
$$y^{(4)}=\lambda^4e^{\lambda x}.$$

替换差异方程式给出

$$\left(\lambda^4+k^2\lambda^2\right)e^{\lambda x}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^4+k^2\lambda^2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2(\lambda^2+k^2)=0.$$

进一步引发,

$$\lambda^2(\lambda-ik)(\lambda+ik)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=0,\\ \lambda_3=ik,\\ \lambda_4=-ik.\end{cases} \tag{C.8}$$

因为 $\lambda=0$ 它是双根, 它的贡献 $(C_1+C_2x)e^{0x}=C_1+C_2x$. 复杂的结合根源产生异常术语 $e^{\pm ikx}$. 因此, 一般的解决方案是

$$y=C_1+C_2x+C_3e^{ikx}+C_4e^{-ikx}.$$

使用 Euler 的身份,

$$e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx),\qquad e^{-ikx}=\cos(kx)-i\sin(kx),$$

奥斯卡的部分可以以同等形式写作为线性组合。$\cos(kx)$ 和 $\sin(kx)$ (重新定义的常态). 因此,

$$y=C_1+C_2x+C_3\cos(kx)+C_4\sin(kx).$$

C.5 梁 弹性 基础; $\frac{d^4y}{dx^4}+4k^4y=0$

Beam 弹性基础 22.3

第四条 差异方程式

$$y^{(4)}+ky=0 \tag{C.9}$$

我们设置

$$m^2=\sqrt{\frac{k}{4}}\ \text{ or }\ k=4m^4$$

差异方程式变成

$$y^{(4)}+4m^4=0 \tag{C.10}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

再一次, 应该是显而易见的, 这个方程式的解决方案将有形状。

$$y = e^{\lambda x}$$

and

$$y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}$$

替换为 Eq。C.10 我们获得

$$e^{\lambda x}(\lambda^4 + 4m^4) = 0$$

又一次, $e^{\lambda x}$ 它永远不能等于零, 因此相应的特征方程式将是

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \tag{C.11}$$

$$\lambda^4 + 4m^4 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2m^2 i)(\lambda^2 + 2m^2 i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = m(1+i) \\ \lambda_2 = m(1-i) \\ \lambda_3 = m(-1+i) \\ \lambda_4 = m(-1-i) \end{cases}$$

将解决方案替换为 Eq。C.9

$$y = C_1 e^{m(1+i)x} + C_2 e^{m(1-i)x} + C_3 e^{m(-1+i)x} + C_4 e^{m(-1-i)x}$$

但是 $e^{a+b} = e^a e^b$, 又召回欧拉方程 (Eq. C.6)

$$y = e^{(mx)}\left(C_1 \sin(mx) + C_2 \cos(mx)\right) + e^{(-mx)}\left(C_3 \sin(mx) + C_4 \cos(mx)\right) \tag{C.12}$$

更优雅的解决方案将从使用开始

$$e^x = \cosh x + \sinh x; \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

替代

$$y = C_1 \sin(mx)\sinh(mx) - C_3 \sin(mx)\sinh(mx) + C_2 \cos(mx)\sinh(mx) - C_4 \cos(mx)\sinh(mx) + C_2 \cos(mx)$$

重新安排

$$y = D_1 \cos(mx)\cosh(mx) + D_2 \sin(mx)\sinh(mx)) \tag{C.13}$$
$$+ D_3 \cos(mx)\sinh(mx) + D_4 \sin(mx)\cosh(mx) \tag{C.14}$$

与四个 Krylov 功能相似 (Kolosova and Kuroyedov, 2013).

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

D 灵活的架子; 先进的分析

摘要

该附件开发了解析方程式, 用于在各种负载条件下对交米特圆架进行弹性分析。使用静态、最少工作和虚功的原则, 关闭形状的解决方案为三角形、双角形和无缝的架子衍生, 具有定义拱地质的三角学变量。解析 方法对 *SAP 2000* 的 数值 解决方案进行验证, 并通过详细工作示例描述了点负载、自我重量和均匀分配的负载。内部力量 (光, 轴和时刻) 整个弓范围系统计算, 每个弓类型的结构性行为被分析以揭示反应模式、负载路径和压力分布的差异。

D.1 引入 2085
D.2 三角圆 拱 2086
D.2.1 分析程序 2086
D.2.2 点 荷载 2087
D.2.3 自我重量 2093
D.2.4 统一 分布荷载 2097
D.2.5 三角圆 拱: 验证 2099
D.2.6 结论 2101
D.3 2 - 旋转圆形 拱 2101
D.3.1 分析程序 2102
D.3.2 点 荷载 2102
D.3.3 自我重量 2112
D.3.4 统一 分布荷载 2120
D.3.5 双环圆 拱: 验证 2123
D.3.6 结论 2126
D.4 无缝循环 拱 2126
D.4.1 分析程序 2126
D.4.2 点 荷载 2127
D.4.3 自我重量 2139
D.4.4 统一 分布荷载 2147
D.4.5 无缝循环 拱: 验证 2151
D.4.6 结论 2154
D.5 结论 2154

第二部分：结构分析与设计表格

从主论文 “Analysis of Arches” 由 Sonavane, 2014

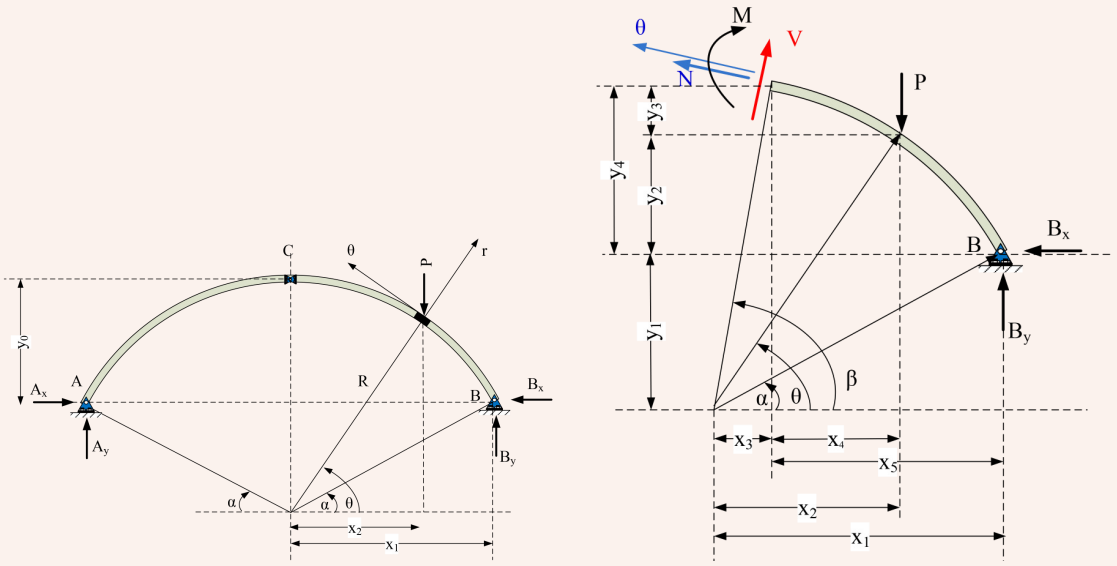
D.1 引入

该章节特别专注于静态, 主要的最少工作和虚功方法的应用, 以开发解析方程式在不同负载条件下交响三角、双角和无角圆形架。分析方程式是由引入某些三角形变量, 定义每个类型的地质。这些方程式通过现有文学中讨论的例子进行验证。此外, 一个结构分析程序,Sap 2000 用于开发上述三种类型的架构的模型, 其分析与使用解析方程式获得的解决方案进行比较。分析方程式的解决方案进一步用于讨论每个类型的架构行为。

三角形拱在图中 D.1 代表定义一个交响式圆形拱的地质学的三角变量, 用于衍生解析方程式。类似的变量用于双环和无灵弓。形状 ACB 代表一个弓, 在那里 A 和 B 是废物, 点 C 是弓的冠冕。距离 y0 代表 拱 的上升, 而距离 x1 代表了 拱 范围的一半。信 α 指的是由一条线连接中心的圆圈和与水平相结合的角度, 因此当 α 是零, 它是一个半循环 拱. 所有的尺寸和角度都被测量为 B 的抽象。信 θ 指示一个角落, 在其中 荷载 P 被应用到 拱 边缘。力 Ax 和 Bx 为水平支座反力，力 Ay 和 By 为拱座处的竖向支座反力。剪力 (V), 轴力 (N) 一瞬间 (M) 在任何角度的内部力量 β 在拱范围内。形象 D.1b 指示用于内部力量的信号通道, 在那里积

审阅稿

极信号被认为是时钟智慧瞬间, 外向剪力和紧张的轴力。一般情况下, 用于定义拱的地质学的名称包括指示所有力量的顶部案例字母和指示所有的尺寸的底部案件字母。



(a) 反应 (b) 内部部队

图 D.1: 圆形地质 拱

Trignometric Variables

x1=R Cos[α]; x2=R Cos[θ]; x3= R Cos[β]; x4=x2 − x3; x5=x1 − x3;
y0=R(1 − Sin[α]); y1=R Sin[α]; y2=R (Sin[θ] − Sin[α]); y3=R Sin[β] − y1 − y2; y4=R Sin[β] − y1;

D.2 三角圆 拱

相同的三环圆形拱总共有四个反应 - 每个支座中有两次。三角弓和双角或无角弓之间的主要区别是由于冠冕上的绳子, 这将三角弓转化为两个独立支持的曲线组成部分。在每个独立组件中, 有两种平等和适当的反应。因此, 对于每个组件有两个未知的反应和三个平衡方程式, 一个相似的三环圆架是一个静态定义的结构。

D.2.1 分析程序

对于分析, 考虑了三种负载条件: 一个点荷载 , 自我重量的拱和统一应用分布荷载在拱. 自我重量和均匀的分布荷载是对拱的中心相同的, 当应用到任何地方时作为点为荷载, 而在冠冕上则与拱的中心相对不相同。因此, 为了描述分析, 相同的数字用于自我重量和均匀分布的负载条件, 在那里作为不同的数字集用于点荷载状态。所有三种负载条件的分析以 3 个步骤

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

进行, 使用 Mathematica 进行分析, 在支座的反应在第一阶段计算。通过 拱 的内部力量在第二步计算, 并使用第二步的内部力量的方程式。所有步骤的数学文件都包含在相关部分中, 为了简化而仅扩展反应和内部力量的最终方程式。支持反应和内部力量的分析方程是指上述定义的三角形变量。

D.2.2 点 荷载

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dp = P \tag{D.1}$$

反应

考虑图像 D.2, 在支持器上确定了水平和垂直反应。当点负载应用到任何地方, 但在弓的冠冕上, 它创造了一个对弓的中心无形负载状态。因为垂直反应“By”的表达取决于点负载 P 的位置与冠冕 C 相比, 开发了两组不同的方程式, 一个为条件。$\theta < \frac{\pi}{2}$ 其次, 对于条件 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$. 下面是数学的结果, 描述了计算支持反应的衍生物。

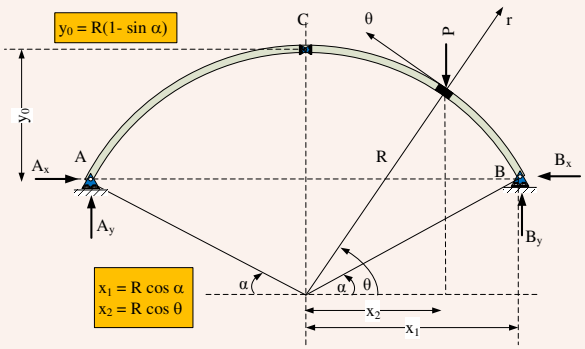


图 D.2: 三角圆 拱 点下 荷载

Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY*x1 - P*(x1 + x2);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

$\theta < \frac{\pi}{2}$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1 − Px2;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$\frac{-P\text{Cos}[\alpha]+P\text{Cos}[\theta]}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```

0

```
Clear[AX]; Clear[BX];
```

$\theta > \frac{\pi}{2}$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

```
SigMC= − BXy0 + BYx1;
```

```
Sol3=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol3[[1]]
```

$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$

```
AX=BX;
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[−AXy1 − AYx1 − Px2 + BXy1 + BYx1]
```

0

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

内部部队

虽然点荷载的位置在任何地方, 但在一个拱的冠冕上, 创造了一个无形的负载状态, 它也导致内部力量的中断。这种不停在内部力量中显示的图像 D.3. 因此, 在任何角度对内部力量的表达 β 在拱范围内, 取决于其与角度的关系 θ 在哪个点, 荷载 被应用。考虑到以下条件, 为内部力量开发了不同的方程式。

$$\theta < \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta, \quad \theta \geq \frac{\Pi}{2} \longrightarrow \beta < \theta, \beta \geq \theta \tag{D.2}$$

自由体图在图中 D.4 用来确定内部的力量 - 轴, 轴和时刻在任何角度 β 在拱范围内。接下来

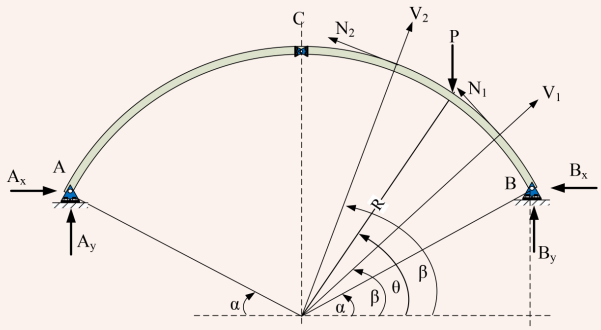


图 D.3: 关系的 β 至于 θ

是数学的结果, 描述了内部力量的衍生 - 轴, 叶和时刻在任何角度。β 在拱范围内。

Internal Forces

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1= – BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

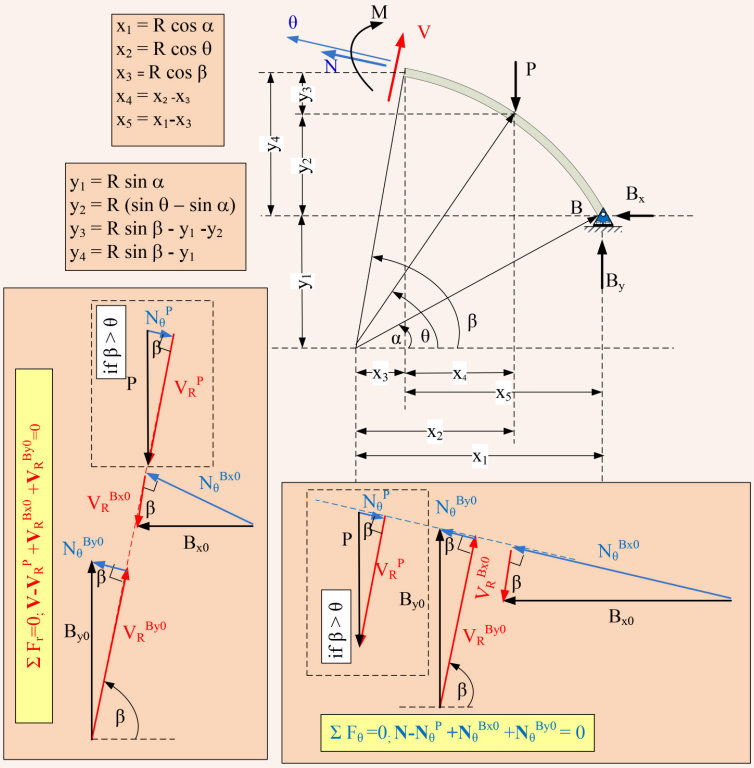


图 D.4: Fbd 三角形, 循环 拱 点下 荷载

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta < \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$\frac{P(-\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

Internal Forces

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta < \theta$

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV1= − BXCos[β] + BYSin[β] + V1;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==0,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]+\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](-\text{Sec}[\alpha]+\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN1=BXSin[β] + BYCos[β] + N1;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==0,N1]]; N1[β_]=N1/.Sol5[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](1-\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM1=BXy4 − BYx5 + M1;
```

```
Sol6=Solve[SigM1==0,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta] - PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ & $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2= − BXCos[β] + BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{P(\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]-\text{Sin}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BXSin[β] + BYCos[β] − PCos[β] + N2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,N2]]; N2[β_]=N2/.Sol8[[1]]
```

$$\frac{P((\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\beta]+\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta](\text{Sec}[\alpha]-\text{Tan}[\alpha])))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2=BXy4 − BYx5 + Px4 + M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}(-PR\text{Cos}[\alpha] - PR\text{Cos}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha] + PR\text{Cos}[\beta]\text{Sin}[\alpha] - 2PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha] + PR\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\beta] + PR\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\beta] - PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Tan}[\alpha])$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

挠度

一些看不见的挑战发生在应用三角弓的分析方程式, 以计算提供复杂解决方案的分裂。因此, 需要进一步研究未来的工作。

结果总结

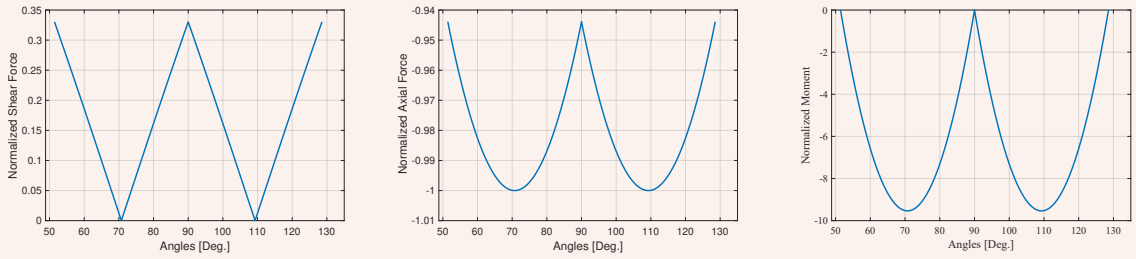


图 D.5: 三角圆架在点负载下的内部部队

形象 D.5 顯示在上面的部分討論的三角拱例子。一个点 荷载 适用于王冠的 拱. 内部 轴力 和 剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。如图所示, 所有内部力量都是对拱的冠冕相同的, 而三角形拱则像两个独立曲线组成部分一样行事。轴压力在每个组件的中间点最高, 它下降到倾斜支持, 差距约为 5。% 高和低的轴力之间。内部时刻是零在尾巴上, 它是每个组件的中点最高。另一方面, 剪力相对较低于内部的轴力和瞬间, 在最大内部时刻的位置上是零。

D.2.3 自我重量

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.3}$$

反应

考虑图像 D.6, 在支持器上确定了水平和垂直反应。下面是数学的结果, 描述了计算支持反应的衍生物。

Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

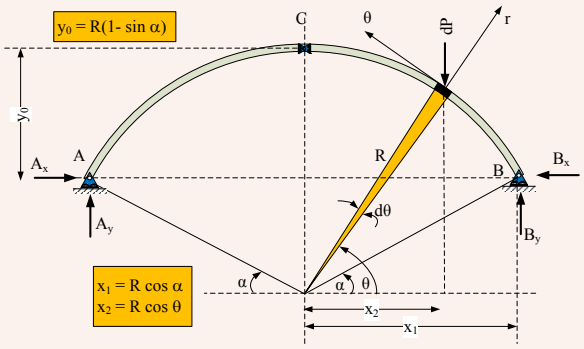


图 D.6: 三角圆 拱 低自重

BY= $\int_{\alpha}^{\pi/2} \text{dP}' d\theta$

$$Rw\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

SigMC= − BXy0 + BYx1 − $\int_{\alpha}^{\pi/2}$ x2dP′ $d\theta$;

Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]

$$-\frac{R(-2w+\pi w\text{Cos}[\alpha]-2w\alpha\text{Cos}[\alpha]+2w\text{Sin}[\alpha])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

CX=BX;

Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

MO=FullSimplify $\left[\text{BXy1} + \text{BYx1} - \text{CX(y1} + \text{y0}) - \int_{\alpha}^{\pi/2} \text{x2dP}' d\theta\right]$

0

内部部队

自由体图在图中 D.7 用来确定内部的力量 - 轴, 轴和时刻在任何角度 β 在拱范围内。接下来是数学的结果, 描述了内部力量的衍生物 - 轴, 叶和时刻。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

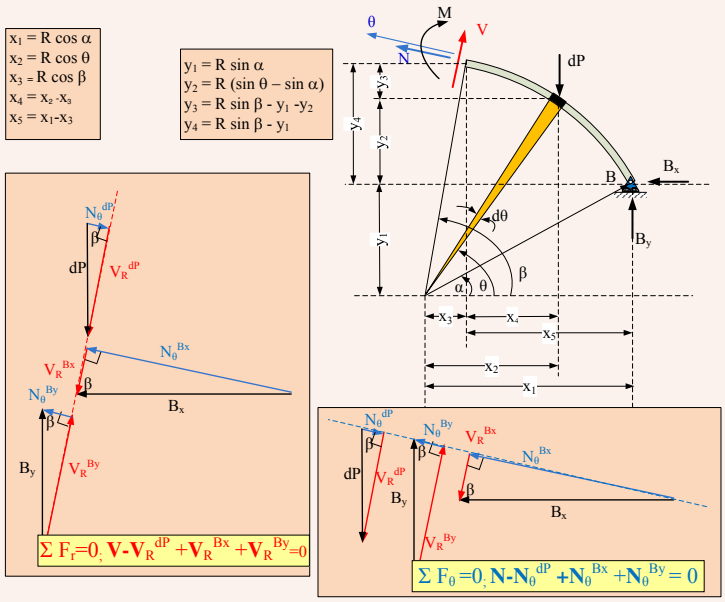


图 D.7: Fbd 三角圆 拱 低自重

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

$$\text{SigFV}= -\text{BXCos}[\beta]+\text{BYSin}[\beta]-\int_{\alpha}^{\beta}\text{dP}'\text{Sin}[\beta]d\theta+V;$$

Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]];V[β_]=V/.Sol2[[1]]

$$-\frac{Rw(\text{Cos}[\beta](-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\beta)(-1+\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta])}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

$$\text{SigFN}=\text{BXSin}[\beta]+\text{BYCos}[\beta]-\int_{\alpha}^{\beta}\text{dP}'\text{Cos}[\beta]d\theta+N;$$

Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]];NN[β_]=N/.Sol3[[1]]

$$\frac{1}{2}Rw\left(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]+\frac{(-2+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\text{Sin}[\alpha])\text{Sin}[\beta]}{-1+\text{Sin}[\alpha]}\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

$$\text{SigM}=\text{BXy4}-\text{BYx5}+\int_{\alpha}^{\beta}\text{dP}'\text{x4}d\theta+M;$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]];M[β_]=M/.Sol4[[1]]
```

$$\frac{R^2 w(-(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta](-1+\text{Sin}[\alpha])+(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha](-1+\text{Sin}[\beta]))}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

挠度

上述 解析 方程式用于计算 挠度 在一个交响圆形的 拱 。(Kinney, 1957, pg 547-558) 以下是用于三角形变量的 数值 值,

拱 Rib 宽度 (b) = 2 ft, 拱 Rib 深度 (d) = 3 ft, 区域 (a) = 6 ft^2, 惯性矩 (i) = 4.5 ft^4, 模块弹性 (e) 3645 Ksi, α 是 0.8975 条线。广播 (R) = 160.35 ft., Span = 200 英尺, 升高 = 35 ft, W = 2.275 kip/ft

跟随虚拟工作的方程式, 用于计算考察的档案例中的缺陷。

$$\delta P.\Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\ RD\beta + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\ RD\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{M\ \delta\text{M3}}{EI}\ RD\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M4}}{EI}\ RD\beta\right] \tag{D.4}$$

哪里

δP	外部虚拟单元 荷载 应用于 Δ
Δ	外部 位移 由实际应用的 荷载 引起
M	波中的内部时刻, 由实际负载引起
$\delta\text{M1}(\beta < \theta)$,	因外部原因而引起的内部时刻
$\delta\text{M2}(\beta \geq \theta)$	虚拟单位 荷载 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$
$\delta\text{M3}(\beta < \theta)$,	因外部原因而引起的内部时刻
$\delta\text{M4}(\beta \geq \theta)$	虚拟单位 荷载 当 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$

结果总结

形象 D.8 在上面的部分讨论的自我重量下, 显示三角形拱示例的插图。内部轴力和剪力是正常化的, 与垂直反力的结果和冲动在抽象中。轴压力是最高的, 它向冠冕下降到大约 81% 最高值的。另一方面, 剪力是相对较低的, 它在大约 4 之间有所不同。% 和 1%相应地, 从阿布特门到王冠。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。内部時刻在相关术语的位置為零, 並且在 相关术语之間是最高。没有冲击点在瞬间图表之间, 可以说一个三角形拱在自我重量下行为像两个独立支持的曲线组件。三角弓的破裂在冠冕上最高, 减少到大约 40% 最多在 $\frac{1}{6}$ 從相关术语子之下來。由于支持是不可移动的, 在单个曲线组件中引起的下向挠度将冠冕推向上。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

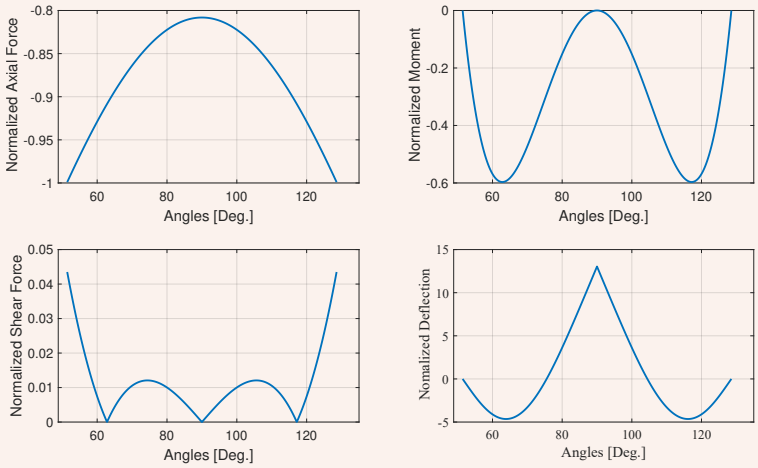


图 D.8: 三角圆形拱在自我重量下

D.2.4 统一 分布荷载

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.5}$$

反应

考虑图像 D.6, 在支持器上确定了水平和垂直反应。下面是数学的结果, 描述了计算支持反应的衍生物。

Reactions

Define the load (omitting the dθ)

dP′=wRSin[θ];

Determine vertical reaction by taking summation of forces in the y direction

BY= $\int_{\alpha}^{\pi/2}$ dP′ $d\theta$

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at B by taking moment with respect to C (CCW +ve)

SigMC= − BXy0 + BYx1 − $\int_{\alpha}^{\pi/2}$ x2dP′ $d\theta$;

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol1=Solve[SigMC==0,BX]; BX=BX/.Sol1[[1]]
```

$$-\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]^2}{2(-1+\text{Sin}[\alpha])}$$

```
CX=BX;
```

Check statics by taking moment about O (CCW +ve)

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - CX(y1 + y0) - ∫_α^(π/2) x2dP' dθ]
```

$$0$$

内部部队

自由体图在图中 D.7 用来确定内部的力量 - 轴, 轴和时刻在任何角度 β 在拱范围内。接下来是数学的结果, 描述了内部力量的衍生 - 轴, 叶和时刻在任何角度 β 在拱范围内。

Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFV= - BXCos[β] + BYSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + V;
```

```
Sol2=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw\text{Cos}[\beta](1+\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\beta])$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFN=BXSin[β] + BYCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + N;
```

```
Sol3=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N/.Sol3[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw\left(-2\text{Cos}[\beta]^2+\frac{\text{Cos}[\alpha]^2\text{Sin}[\beta]}{-1+\text{Sin}[\alpha]}\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM=BXy4 - BYx5 + ∫_α^β dP'x4 dθ + M;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigM==0,M]];M[β_]=M/.Sol4[[1]]
```

$$\frac{1}{2}R^2w(-1+\text{Sin}[\beta])(-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\beta])$$

D.2.4.1 挠度

计算三角圆架中的分裂在均匀分配负载下以及用于三角变量的数字值的过程类似于本重量中讨论的内容。D.2.3 因此, 它不在这里显示。

结果总结

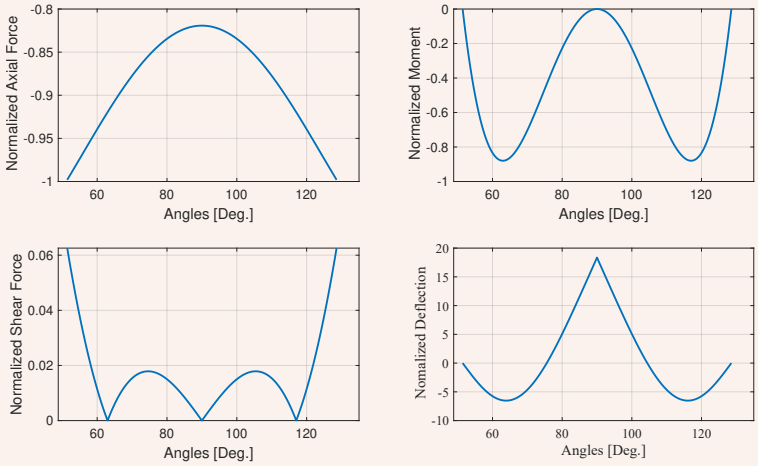


图 D.9: 三角圆形拱在均匀分布的荷载的插槽

形象 D.9 显示三角形拱在上面的部分讨论的均匀分布荷载下方的插件。内部 轴力 和 剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。轴压力是最高的, 它向冠冕下降到约 82.5。% 最高值的。另一方面, 剪力是相对较低的, 它在大约 6 之间有所不同。% 和 2%相应地, 从阿布特门到王冠。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。内部時刻在相关术语的位置為零, 並且在 相关术语之間是最高。三角弓的破裂是冠冕上最高, 减少到 33 左右。% 最多在 $\frac{1}{6}$ 從相关术语子之下來。由于支持是不可移动的, 在单个曲线组件中引起的下向挠度将冠冕推向上。

D.2.5 三角圆 拱: 验证

上面的分析方程式为点负载、自我重量和均匀分配负载下的三环圆架, 在两个步骤中进行验证。首先, 在 拱 范围内均匀应用的自我重量和 分布荷载 分为 20 点负载系列。内部力量的图表使用自我重量和均匀分布负载的分析方程式, 以及其相应点负载。这些图表是超强制

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

检查解析解的有效性。由于自我重量或均匀的分布荷载相当于其各式各样的点负载, 所以它们的分支相互紧密匹配。

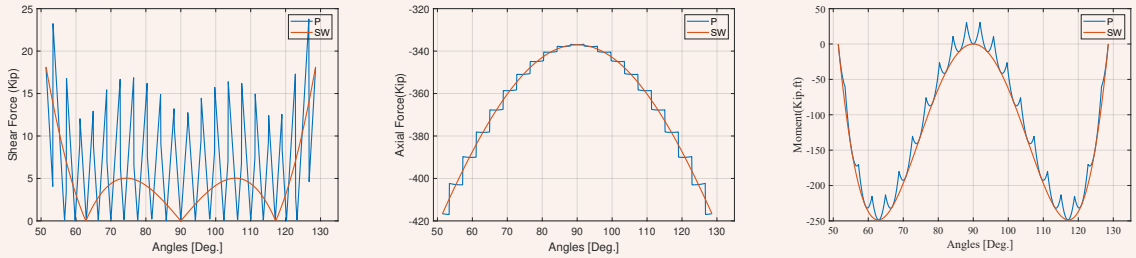


图 D.10: 三角圆 拱 低自重 vs. 点系列 荷载

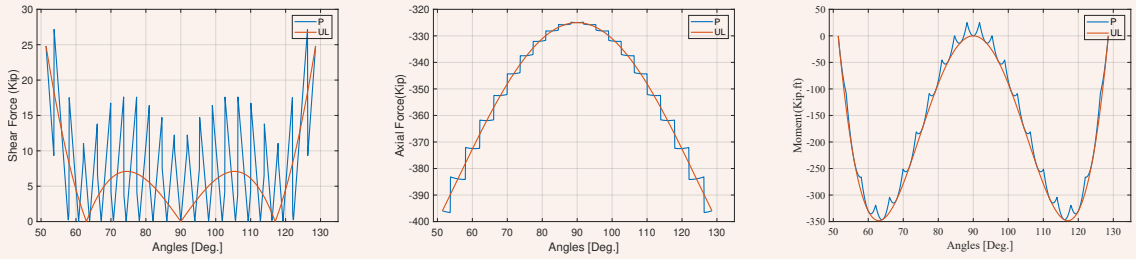


图 D.11: 三角圆 拱 均匀分布 荷载 vs. 点系列 荷载

形象 D.10 和图像 D.11 描述了上述讨论的过程, 用于验证解析方程式。其次,Sap 2000 模型正在为三角圆形拱在自我重量案例中开发。目前, 其分析的 剪力 和 轴力 图表与使用 解析方程式编写的图表进行比较。

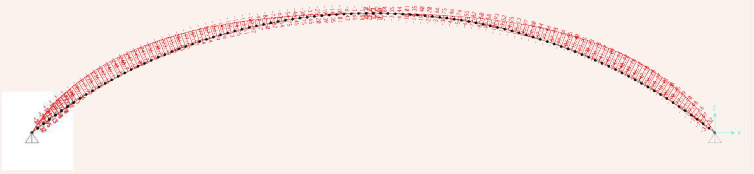


图 D.12: Sap 2000 - 三角圆形拱在自我重量下的时刻图

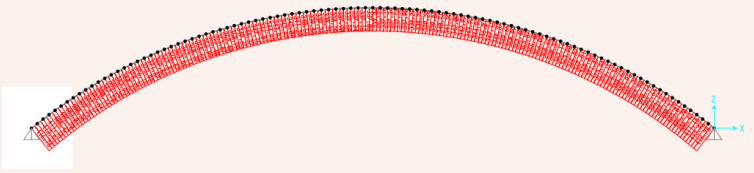


图 D.13: Sap 2000 - 自我重量下的三角圆形弓的轴力图

数值 值在图中的时刻图表 D.12, 轴力 图表 D.13 和 剪力 图表 D.14 与图表上的相应值相匹配 D.10.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

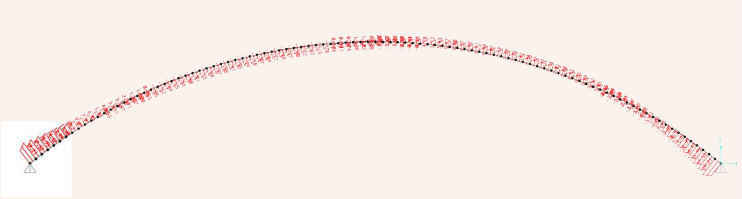


图 D.14: Sap 2000 - 自我重量下的三角圆形弓的 force 强图

D.2.6 结论

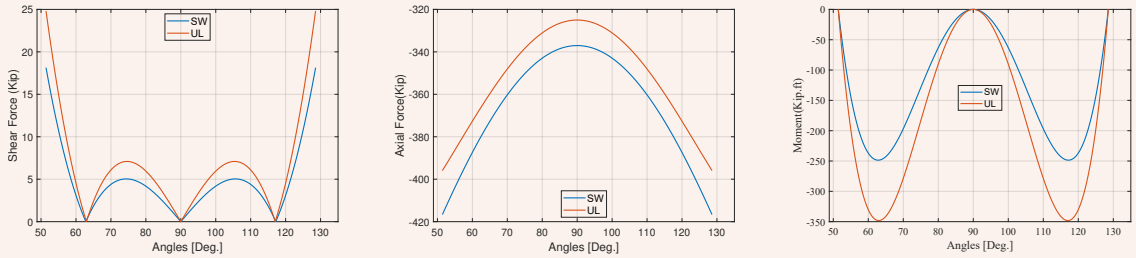


图 D.15: 三角圆 拱 低自重 vs. udl

本节讨论了三角弓在点负载、自我重量和统一分布负载的结构性行为, 从内部力量和脱落的角度来看。形象 D.15 比较自我重量加载条件与平等分配的加载状态, 相当于 荷载 w=2.275 kip/ft。与自我重量相比, 均匀的分布荷载会导致更多的内部剪力和瞬间, 并且会导致较少的内部压缩轴力。形象 D.16 显示无形负载条件的插件. 为此, 在冠冕和区域四分之

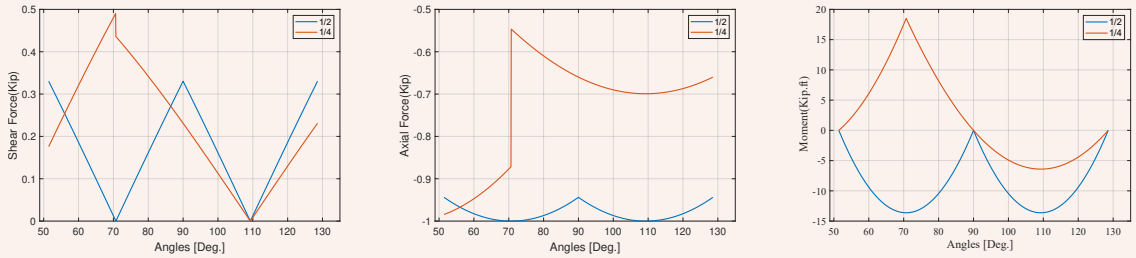


图 D.16: 三角圆 拱 点下 荷载 在 1/2 和 1/4 间隔

一上应用一个单位荷载。在这种情况下, 由于在间隔的四分之一上应用的荷载点, 最高时刻大约是王冠所应用的 1.5 倍。轴力 由于在间隔四分之一应用的 荷载 点, 最接近在冠冕上应用的。

D.3 2 - 旋转圆形 拱

一个交响式双环圆形拱总共有四个反应 - 每个支座中有两次。由于双向拱的拱线在支持者之间是连续的, 并且支持点是不可移动的, 应用的荷载不仅产生垂直但也产生水平反应, 通

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

常称为冲动。只有三个平衡方程式解决了四个未知的反应力, 一个双向的拱静态不确定到第一级。

D.3.1 分析程序

首先, 一个静态不确定的二角形拱的回归性反力被删除, 然后称为原始结构, 将其转换为静态定义的拱, 然后称之为主要结构。使用静态的常规方法, 主要结构中的支持反应和内部力量因应用负载而计算。随后, 假设没有外部力量存在于原始结构上, 在移除的旋转力量的位置应用了一个虚拟力量单位, 从荷载单位造成的内部力量计算。适用于应用负载下的弓形状的兼容性方程式被认为是计算原始静态无定义双环弓中的逆转反应。一旦发现了所有支持反应, 则使用常规静态方法计算弓中的内部力量。在这里描述的分析过程以 7 个步骤进行, 使用 Mathematica。所有步骤的数学文件都包含在相关部分中, 为了简化而仅限于反应和内部力量的最终方程扩展。

对于分析, 考虑了三种负载条件: 一个点荷载 , 自我重量的拱和统一应用分布荷载在拱. 自我重量和均匀的分布荷载是对拱的中心相同的, 当应用到任何地方时作为点为荷载, 而在冠冕上则与拱的中心相对不相同。因此, 为了描述分析, 相同的数字用于自我重量和均匀分布的负载条件, 在那里作为不同的数字集用于点负载状态。

D.3.2 点 荷载

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dp = P \tag{D.6}$$

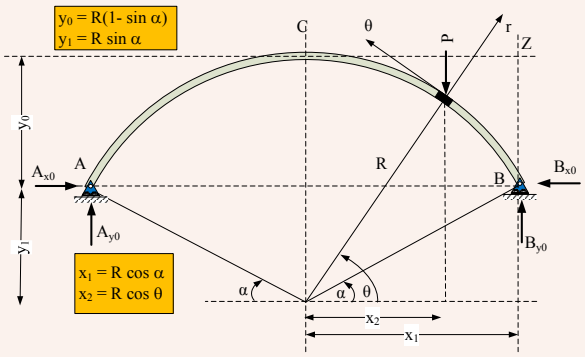


图 D.17: 双环圆 拱 点下 荷载

主要结构: 反应和内部力量

在原始双环拱中,Bxo 在 Abutment B 的旋转力量显示在图中 D.17 它被移除, 将其转化为一个主要结构。一个点负载的位置在弓上的任何地方会导致内部力量的不停性。这种不停在

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

内部力量中显示的图像 D.3 因此, 在任何角度对内部力量的表达 β 在拱范围内, 取决于其与角度的关系 θ 在哪个点, 荷载 被应用。考虑到以下条件, 为内部力量开发了不同的方程式。

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.7}$$

自由体图在图中 D.18 它用于确定支持者的水平、垂直反应以及内部力量 - 在任何角度的轴、轴和时刻。β 在拱范围内。下面是来自数学的结果, 描述了计算支持反应的衍生。

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha] + \text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(P - P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + P(x1 - x2) - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 - AXy1 - AYx1 - x2P]
```

$$0$$

接下来是数学的结果, 描述了内部力量的衍生 - 轴, 叶和时刻在任何角度。β 在拱范围内。

Primary Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$
Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

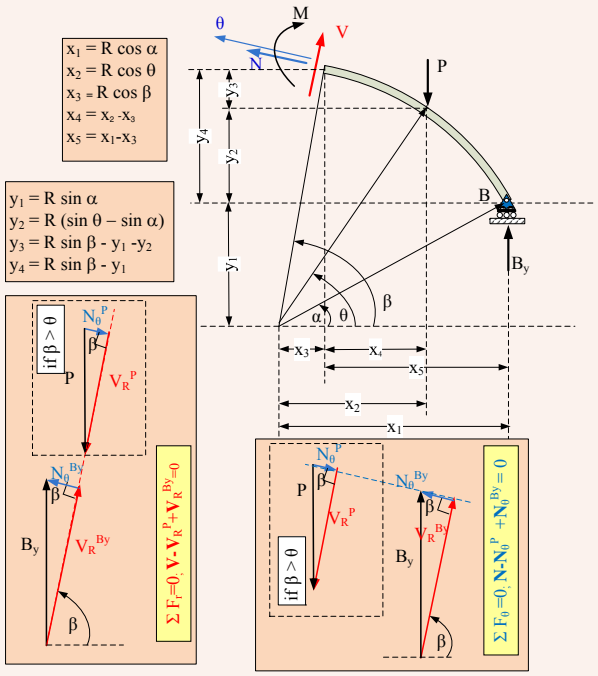


图 D.18: 双环圆 拱 在 abutment' b' 中移除 redundant 鼓

SigFV1=BYSin[β] + V1;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV1==**0**,V1]]; V1[β_]=V1/.Sol4[[**1**]]

$$-\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

SigFN1=BYCos[β] + NN1;

Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN1==**0**,NN1]]; NN1[β_]=NN1/.Sol5[[**1**]]

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM1= **–** BYx5 + M1;

Sol6=Solve[SigM1==**0**,M1]; M1[β_]=M1/.Sol6[[**1**]]

$$\frac{1}{2}P(R\text{Cos}[\alpha]-R\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

For $\beta > \theta$

Summation of Forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV2=BYSin[β] − PSin[β] + V2;
```

```
Sol7=FullSimplify[Solve[SigFV2==0,V2]]; V2[β_]=V2/.Sol7[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P(-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])\text{Sin}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN2=BYCos[β] − PCos[β] + NN2;
```

```
Sol8=FullSimplify[Solve[SigFN2==0,NN2]]; NN2[β_]=NN2/.Sol8[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}P\text{Cos}[\beta](-1+\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM2= − BYx5 + Px4 + M2;
```

```
Sol9=Solve[SigM2==0,M2]; M2[β_]=M2/.Sol9[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(PR\text{Cos}[\alpha]+PR\text{Cos}[\beta]-PR\text{Cos}[\theta]-PR\text{Cos}[\beta]\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$$

首要结构: 虚拟单位力量

一个虚拟力量单位在 Bxo 位置上应用到位移的方向, 在真实的荷载下。自由体图在图中 D.19 用来确定任何角度的内部力量。β 超過 拱 範圍, 由於虛擬單位 荷载 造成。接下来是数学的结果, 描述了由于虚拟力量造成的计算内部力量的衍生。

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] − δV];
```

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]
```

$$\text{Cos}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

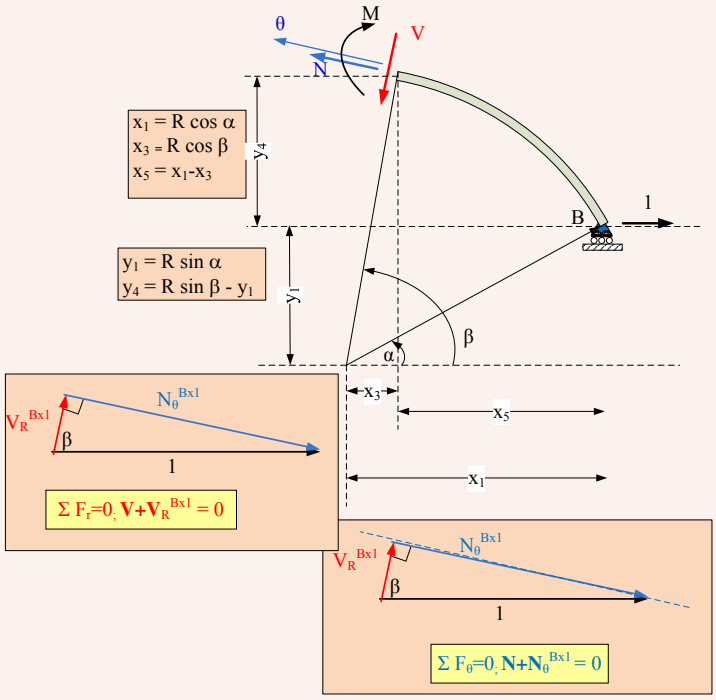


图 D.19: 双环圆 拱 具有应用虚拟力量

SigFδN=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δN];

Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]

Sin[β]

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigδM=FullSimplify[−BX1y4 + δM];

Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]

−RSin[α] + RSin[β]

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

原名:Redundant Force

根据 协调方程 的 拱 在应用的 荷载 和 虚功 方法下进行变形, 用于确定 Bxo 在 Abutment B 的 Redundant 强度。对于这个过程, 考虑到协调方程的灵活和轴组成部分以及内部力量的不持续性。

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_\alpha^\theta \frac{M1\ \delta\mathrm{M1}}{EI}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta\mathrm{M2}}{EI}\,d\beta + \int_\alpha^\theta \frac{N1\ \delta\mathrm{N1}}{a\ e}\,d\beta + \int_\alpha^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta\mathrm{N2}}{a\ e}\,d\beta\right] \tag{D.8}$$

哪里

$M1(\beta < \theta), M2(\beta \geq \theta)$	波中的内部时刻, 由实际负载引起
$\delta\mathrm{M1}(\beta < \theta)$,$\delta\mathrm{M2}(\beta \geq \theta)$	因外部原因而引起的内部时刻 虚拟单位 荷载
$N1(\beta < \theta)$,$N2(\beta \geq \theta)$	内部 轴力 在 梁 由真实的 荷载 引起
$\delta N1(\beta < \theta), \delta N2(\beta \geq \theta)$	内部 轴力 因外部 虚拟单位 荷载

接下来是数学的结果, 描述了计算压力的衍生物。

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{\mathrm{M1}[\beta]\delta\mathrm{M}[\beta]}{ei}d\beta + \int_\theta^{\pi-\alpha} \frac{\mathrm{M2}[\beta]\delta\mathrm{M}[\beta]}{ei}d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^\theta \frac{\mathrm{NN1}[\beta]\delta\mathrm{N}[\beta]}{ae}d\beta + \int_\theta^{\pi-\alpha} \frac{\mathrm{NN2}[\beta]\delta\mathrm{N}[\beta]}{ae}d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{\delta\mathrm{M}[\beta]\delta\mathrm{M}[\beta]}{ei}d\beta\right]$;

F11A=FullSimplify $\left[\int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{\delta\mathrm{N}[\beta]\delta\mathrm{N}[\beta]}{ae}d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

Redundant force in original structure

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{P\left(-(i-3aR^2)\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta]))\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]}$$

原创结构: 反应和内部力量

在原始结构中的逆转力量 Bxo 计算后, 剩余的支持反应和原来的结构内的内部力量通过图中的自由体图来确定。D.20. 下面是数学的结果, 描述了计算支座反应的衍生性。

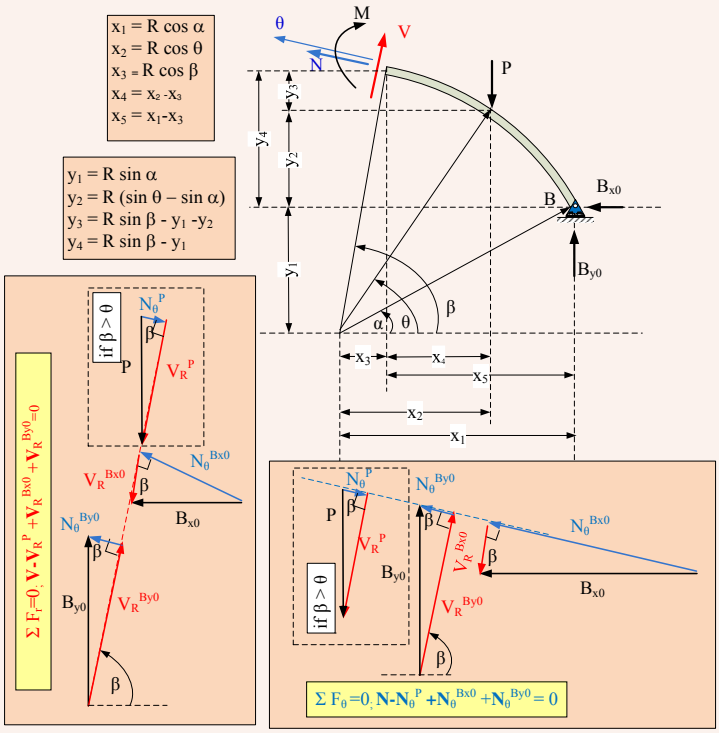


图 D.20: 原始双环圆形拱的 Fbd 在点下荷载

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 – P(x1 + x2);
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol13=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol13[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol14=Solve[BYO − P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol14[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BYOx1 + BXOy1 − AYOx1 − AXOy1 − Px2]
```

0

下面是数学的结果, 描述了计算内部力量的衍生。

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$
Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= − BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol15=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol15[[1]];
```

```
FullSimplify[VO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;
```

```
Sol16=Solve[SigFNO1==0,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol16[[1]];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
FullSimplify[NO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$+\left(\text{Sin}[\beta]\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + MO1;
```

```
sol17=Solve[SigMO1==0,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol17[[1]];
```

```
FullSimplify[MO1[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(R(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$-\left(R(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

For $\beta > \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol18=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2/.Sol18[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$\frac{1}{2}P\left(2\text{Sin}[\beta]-(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]\right.$$
$$+\left(\text{Cos}[\beta]\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol19=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2/.Sol19[[1]];
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

FullSimplify[NO2[β]]

$$\frac{1}{2}P\left(2\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\beta](\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$+\left(\text{Sin}[\beta]\left(\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(2+(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]-2\text{Sin}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + *P*x4 + MO2;

sol20=Solve[SigMO2==**0**,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol20[[**1**]];

FullSimplify[MO2[β]]

$$\frac{1}{2}PR\left(2(\text{Cos}[\beta]-\text{Cos}[\theta])+(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]\right.$$
$$+\left((\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\left(-\left(i-3aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i-aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+aR^2(-2+2\text{Sin}[\alpha](-(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+(\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+2\text{Sin}[\theta]\right)\right)\right)/\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\Big)$$

挠度

形象 D.21 而且上述 解析 方程式用于计算 挠度 在交响的双环圆形 拱 中。跟随虚拟工作的方程式, 用于计算失败。

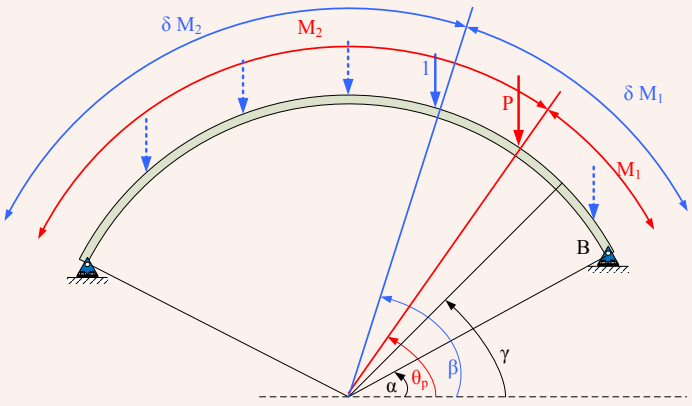


图 D.21: Fbd 可在双环圆形 拱 中计算 挠度

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M1\;\delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M2\;\delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.9}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里

δP	外部虚拟单元 荷载 应用 在方向上, Δ
Δ	外部 位移 由 真实应用 荷载
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	梁的内部时刻引起 以真实点 荷载
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	因果的内部时刻 由于外部虚拟单元 荷载

结果总结

形象 D.22 顯示一個雙角 拱 例子, 上面討論。一个点 荷载 适用于王冠的 拱. 内部 轴力 和剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。如图所示, 所有内部力量都对拱的冠冕相同。轴压力的强度是最高的 $\frac{1}{6}$ 二、从两种废物的范围下降到大约 91% 王冠的最高值。内部时刻是零的, 在冠冕上最高。另一方面, 剪力比内部的轴力和瞬间相对较低。缺点是零在相关术语子上, 它大约 $\frac{1}{6}$ 兩個字母之間的經歷。

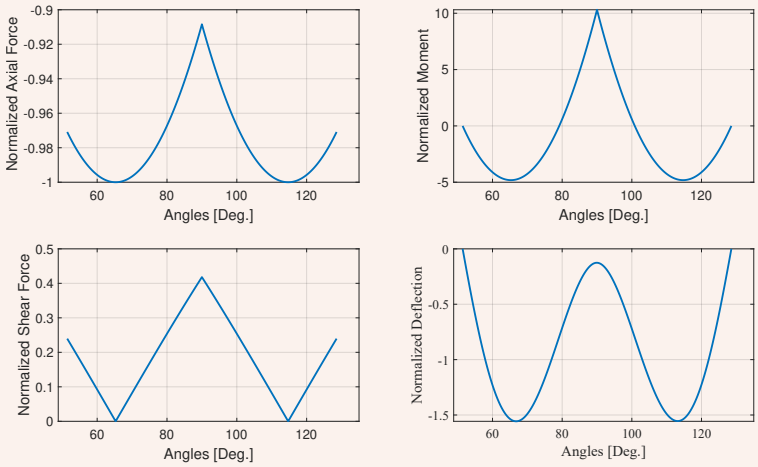


图 D.22: 双环圆形 拱 在点下 荷载 的插件

D.3.3 自我重量

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.10}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

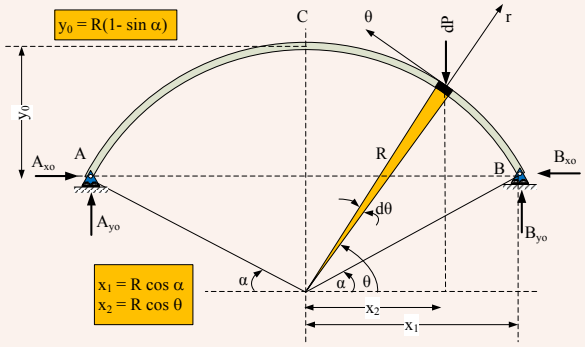


图 D.23: 双环圆 拱 低自重

主要结构: 反应和内部力量

在原始双环拱中,Bxo 在 Abutment B 的旋转力量显示在图中 D.23 它被移除, 将其转化为一个主要结构。自由体图在图中 D.24 它用于确定支持者的水平、垂直反应以及内部力量 - 在任何角度的轴、轴和时刻。β 在拱范围内。下面是数学的结果, 描述了计算支持反应的衍生物。

Primary Strucure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

$$dP'=wR;$$

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

$$SigMA=BY2x1-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}(x1+x2)dP'd\theta;$$

$$Sol1=Solve[SigMA==0,BY];BY=BY/.Sol1[[1]]$$

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

$$Sol2=Solve\left[BY-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}dP'd\theta+AY==0,AY\right];AY=AY/.Sol2[[1]]$$

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

$$BX=0;$$

$$SigMZ=AXy0-AY2x1+\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}dP'(x1-x2)d\theta-BXy0;$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − ∫_α^(π−α) x2dP′ dθ]
```

```
0
```

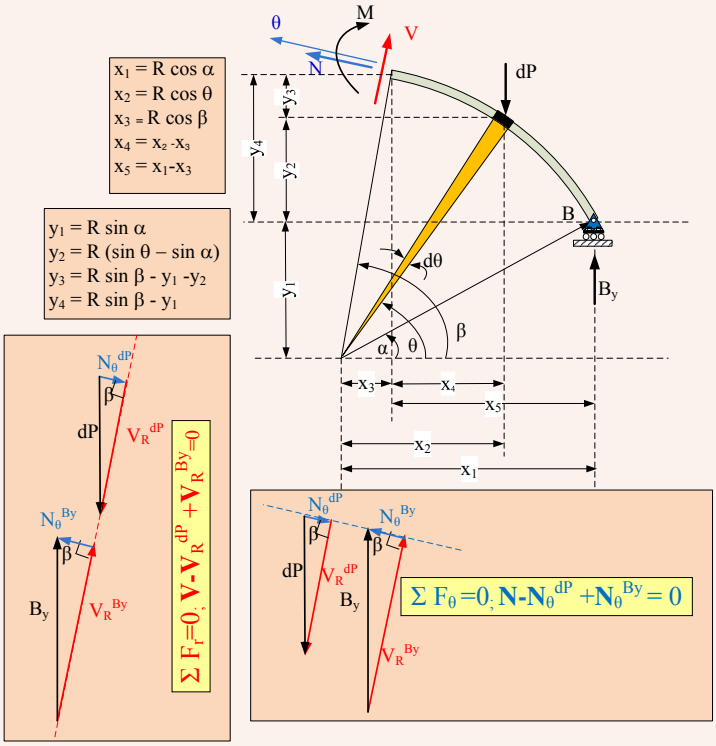


图 D.24: Fbd 的双环圆 拱 后移除 redundant thrust 在 abutment′ b′

接下来是数学的结果, 描述了内部力量的衍生 - 轴, 叶和时刻在任何角度。β 在拱范围内。

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFV=BYSin[β] − ∫_α^β dP′Sin[β] dθ + V;
```

```
Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; V[β_]=V/.Sol4[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\beta)\text{Sin}[\beta]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFN=BYCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β]dθ + N;
```

```
Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,N]]; NN[β_]=N/.Sol5[[1]]
```

$$-\frac{1}{2}Rw(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigM= - BYx5 + ∫_α^β dP'x4dθ + M;
```

```
Sol6=Solve[SigM==0,M]; M[β_]=M/.Sol6[[1]]
```

$$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha]-2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha]-\pi R^2 w\text{Cos}[\beta]+2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta]+2R^2 w\text{Sin}[\alpha]-2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$$

首要结构: 虚拟单位力量

形象 D.19 随后, 在点负载下使用双环圆架的类似过程来确定任何角度的内部力量。β 超過拱 範圍是由虛擬單位 荷载 引起的。下面是数学的结果, 描述计算内部力量因虚拟力量而引起的衍生。

Primary Structure: Virtual Force

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδV=FullSimplify[BX1Cos[β] - δV];
```

```
Sol10=Solve[SigFδV==0,δV]; δV[β_]=δV/.Sol10[[1]]
```

$$\text{Cos}[\beta]$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδN=FullSimplify[-BX1Sin[β] + δN];
```

```
Sol11=Solve[SigFδN==0,δN]; δN[β_]=δN/.Sol11[[1]]
```

$$\text{Sin}[\beta]$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδM=FullSimplify[-BX1y4 + δM];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol12=Solve[SigδM==0,δM]; δM[β_]=δM/.Sol12[[1]]
```

$$-R\text{Sin}[\alpha] + R\text{Sin}[\beta]$$

原名:Redundant Force

使用下列 协调方程 在应用的 荷载 中的 拱 的变形, 以及 虚功 方法, 用于确定 Bxo 在 Abutment B 的回归力。对于这个过程, 考虑到协调方程的灵活和轴组成部分。

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\text{M}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\text{N}}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.11}$$

哪里

M 波中的内部时刻, 由实际负载引起
δM 由于外部虚拟单位造成的内部时刻 荷载
N 内部 轴力 在 梁 由真实的 荷载 引起
δN 内部 轴力 因外部虚拟单元 荷载 造成

接下来是数学的结果, 描述了计算压力的衍生物。

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

```
DeltaBX1F=FullSimplify[∫_α^(π-α) M[β]δM[β]/ei dβ];
```

```
DeltaBX1A=FullSimplify[∫_α^(π-α) NN[β]δN[β]/ae dβ];
```

```
DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;
```

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

```
F11F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δM[β]δM[β]/ei dβ];
```

```
F11A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δN[β]δN[β]/ae dβ];
```

```
F11=F11F + F11A;
```

Redundant force in original structure

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left((\pi-2\alpha)\left(-4aR^2-(i-5aR^2)\text{Cos}[2\alpha]\right)-(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha))\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+2(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]}$$

原创结构: 反应和内部力量

在原始结构中的逆转力量 Bxo 计算后, 剩余的支持反应和原来的结构内的内部力量通过图中的自由体图来确定。D.25. 下面是数学的结果, 描述了支座反应计算的衍生。

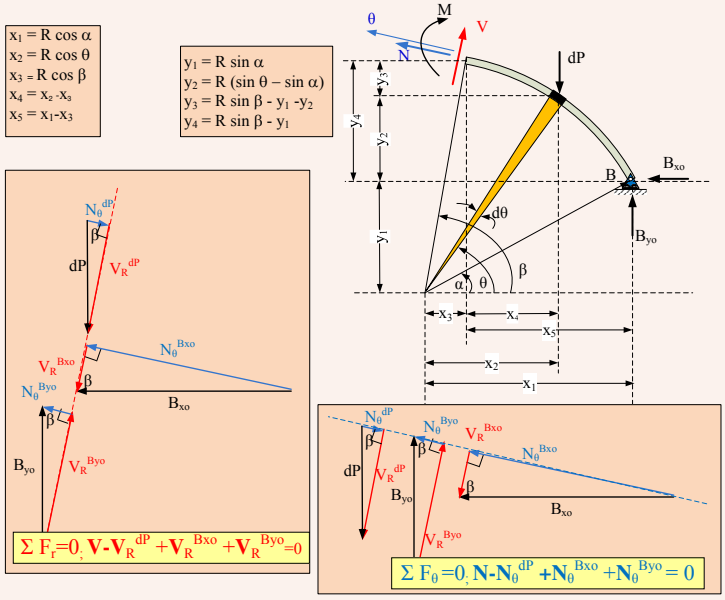


图 D.25: Fbd 的原始双环圆 拱 低自重

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol10=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[1]]
```

$$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol11=Solve[BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BYOx1 + BXOy1 - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

接下来是数学的结果, 描述了计算内部力量的衍生。

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)+(\pi-2\beta)\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NO;
```

```
Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

FullSimplify[NNO[β]]

$$\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

Clear[MO];

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + $\int_\alpha^\beta$ dP′x4$d\theta$ + MO;

sol14=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[1]];

FullSimplify[MO[β]]

$$\frac{1}{2}R^2w\left((\pi-2\alpha)(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])\right.$$
$$\left.-\left(\left(4aR^2(\pi-2\alpha)+\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2(-3+\pi-2\alpha)(3+\pi-2\alpha)\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)/\right.$$
$$\left.\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)-2((\alpha-\beta)\text{Cos}[\beta]-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\beta])\right)$$

挠度

上面开发的分析方程式用于计算在参数圆形弓样本中讨论的差异。D.2.3. 跟随虚拟工作的方程式, 用于计算失败。

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_\alpha^\theta \frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_\theta^{(\pi-\alpha)}\frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.12}$$

哪里

δP	外部虚拟单元 荷载 应用于 方向的 Δ
Δ	外部 位移 由实际应用的 荷载 引起
M	波中的内部时刻, 由实际负载引起
$\delta M1(\beta<\theta),\ \delta M2(\beta\geq\theta)$	因内部原因而引起的 外部虚拟单元 荷载

结果总结

形象 D.26 顯示兩輪 拱 在自我重量下討論在上面的部分的插件。内部 轴力 和 剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。轴压力是最高的, 它向冠冕下降到大约 80,5。% 最高值

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

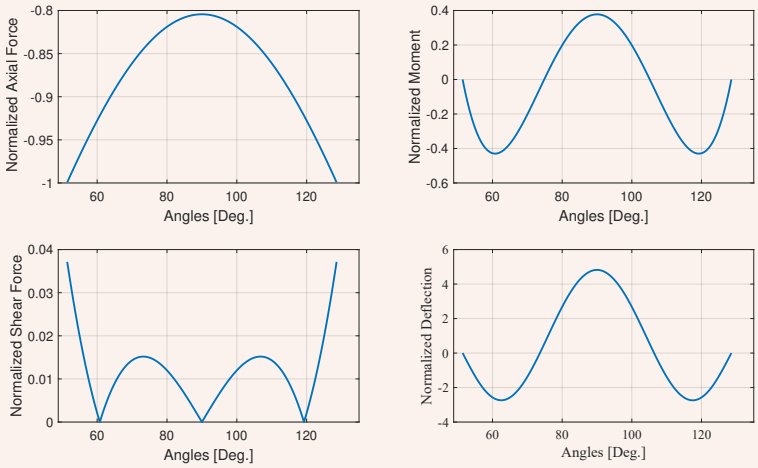


图 D.26: 双环圆形拱在自我重量下

的。另一方面, 剪力是相对较低的, 它在约 3.75 之间有所不同。% 和 1.5%相应地, 从阿布特门到王冠。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。内部时刻是零的位置, 它是最高的约 $\frac{1}{6}$ 從 ab 子中取出。目前图表中有两个通胀点, 它们相当于弓中的零通道点。缺陷是冠冕上最高的, 缺陷图表跟随与时刻图表相似的配置。最大正面和负面分裂相应于轴中的最高积极和负面的时刻。

D.3.4 统一 分布荷载

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.13}$$

在原始双环拱中,Bxo 在 Abutment B 的旋转力量显示在图中 D.23 它被移除, 将其转化为一个主要结构。第一三步, 包括支座 反力和由于真实的荷载造成的内部力量, 以及由于虚拟的荷载造成内部力量类似于双环圆形拱在自我重量下。对于简单性而言, 仅包括计算回归力、支座反应和原始结构中的内部力量的步骤才被显示在这里。

原名:Redundant Force

在此重量下使用的双环弓的过程重复了。在应用负载下的弓的变形与虚拟工作方法一起使用的兼容性方程式, 以确定 Bxo 在 Abutment B 的旋转力量。对于这个过程, 考虑到协调方程的灵活和轴组成部分。

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{M[\beta]\delta M[\beta]}{ei}\, d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{NN[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\delta M[\beta]\delta M[\beta]}{ei} d\beta\right]$;

F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\delta N[\beta]\delta N[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

Redundant force in original structure

Solve[{BXOF11==DeltaBX1},{BXO}];

FullSimplify[BXO]

$$\frac{w\left(9aR^3\text{Cos}[\alpha]-16iR\text{Cos}[\alpha]^3+aR^3(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha]))\right)}{12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+(i-3aR^2)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

原创结构: 反应和内部力量

在原始结构中的逆转力量 Bxo 计算后, 剩余的支持反应和原来的结构内的内部力量通过图中的自由体图来确定。D.25. 下面是数学的结果, 描述了支座反应计算的衍生。

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

SigMAO=BYO**2**x1 $-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}$(x1 + x2)dP′ $d\theta$;

Sol10=Solve[SigMAO==**0**,BYO]; BYO=BYO/.Sol10[[**1**]]

$Rw\text{Cos}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol11=Solve[BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol11[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

Check statics by taking summation of moments with respect to O CCW +ve

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BYOx1 + BXOy1 - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

$$0$$

下面是数学的结果, 描述了计算内部力量的衍生。

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol12=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol12[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β]]
```

$$\begin{aligned}&\left(Rw\left(3\left(-4i+3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]+\left(-4i+7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]\text{Cos}[\beta]\right.\right.\\&+3aR^2(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\beta](\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])\\&\left.-6\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)/\\&\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NO;
```

```
Sol13=Solve[SigFNO==0,NO]; NNO[β_]:=NO/.Sol13[[1]];
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

FullSimplify[NNO[β]]

$$\left(Rw\left(12\text{Cos}[\beta]^2\left(-(\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.+\left(3\left(4i-3aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]+\left(4i-7aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]+3aR^2(\pi-2\alpha)(-\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[3\alpha])\right)\text{Sin}[\beta]\right)\Big/$$
$$\left(12\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

Clear[MO];

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4$d\theta$ + MO;

sol14=Solve[SigMO==**0**,MO]; MO[β_]:=MO/.sol14[[**1**]];

FullSimplify[MO[β]]

$$\frac{1}{12}R^2w\left(12\text{Cos}[\alpha](\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])-6(\text{Cos}[\alpha]-\text{Cos}[\beta])^2\right.$$
$$\left.+\left(\left(9aR^2\text{Cos}[\alpha]-16i\text{Cos}[\alpha]^3+aR^2(7\text{Cos}[3\alpha]+3(\pi-2\alpha)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[3\alpha])\right)\right)(\text{Sin}[\alpha]-\text{Sin}[\beta])\right)\Big/$$
$$\left((\pi-2\alpha)\left(i+2aR^2-aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)+\left(i-3aR^2\right)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$

挠度

在双环圆形拱中计算挠度的过程在分布荷载下均匀, 以及用于三角变量的数值值类似于自我重量下, 因此它不在这里显示。

结果总结

形象 D.27 显示双环 拱 在均匀分布的 荷载 上面的部分讨论的插件。内部 轴力 和 剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。轴压力是最高的, 它下降到王冠约 81.5。% 最高值的。另一方面, 剪力是相对较低的, 它在约 5.25 之间有所不同。% 和 2%相应地, 从阿布特门到王冠。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。内部时刻是零的位置, 它是最高的约 $\frac{1}{6}$ 從 ab 子中取出。目前图表中有两个通胀点, 它们相当于弓中的零通道点。缺陷是冠冕上最高的, 缺陷图表跟随与时刻图表相似的配置。最大正面和负面分裂相应于轴中的最高积极和负面的时刻。

D.3.5 双环圆 拱: 验证

解析 等式在 荷载 点下的 2 个圆形 拱 上方开发, 自我重量和均匀的 分布荷载 在两个步骤中验证。首先, 在 拱 范围内均匀应用的自我重量和 分布荷载 分为 20 点负载系列。内部力量和缺陷的图表是用自我重量和均匀分布负载的分析方程式与其相应点负载一起编写的。这

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

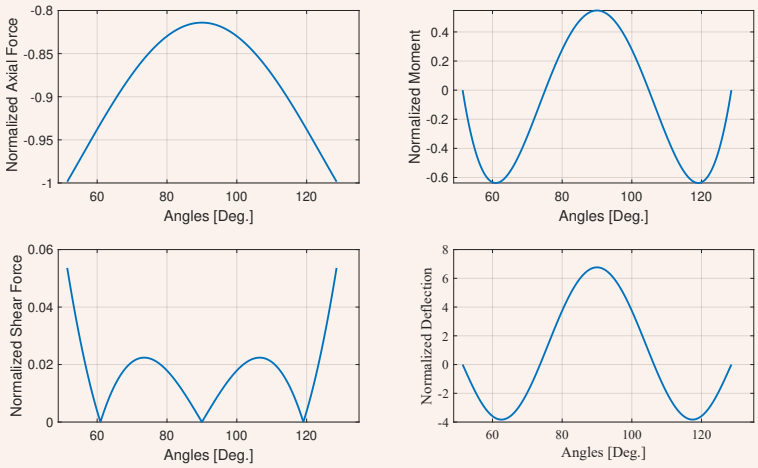


图 D.27: 双环圆形拱在 UDL 下

些图表是超强制检查解析解的有效性。由于自我重量或均匀的分布荷载相当于其各式各样的点负载, 所以它们的分支相互紧密匹配。

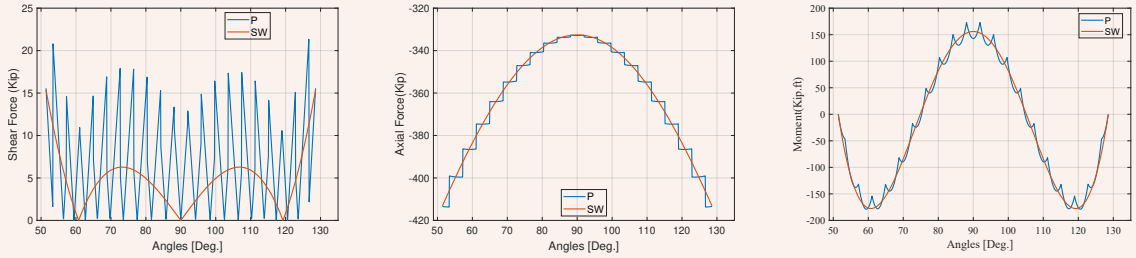


图 D.28: 双环圆 拱 低于自我重量 vs. 点系列 荷载

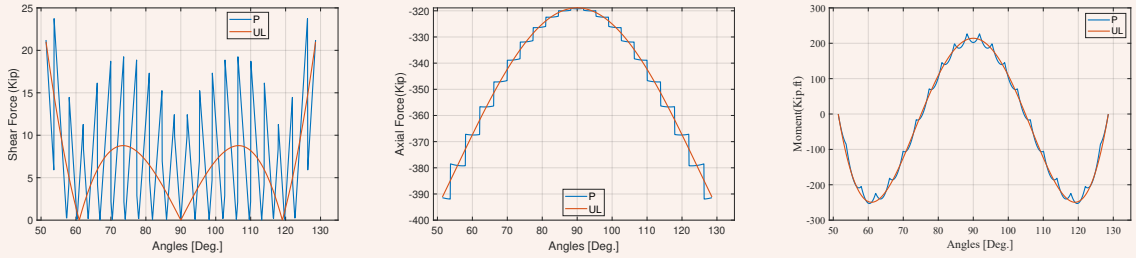


图 D.29: 双环圆 拱 均匀分布 荷载 对比 点系列 荷载

形象 D.28 和图像 D.29 描述了上述讨论的过程, 用于验证解析方程式。其次,Sap 2000 模型正在为三角圆形拱在自我重量案例中开发。目前, 其分析的 剪力 和 轴力 图表与使用 解析方程式编写的图表进行比较。数值 值在图中的瞬间图表 D.30, 轴力 图表 D.31 和 剪力 图表 D.32 密切相匹配与图表上的各自值 D.28.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



图 D.30: Sap 2000 - 双环圆形拱在自我重量下的时刻图



图 D.31: Sap 2000 - 自我重量下双环圆架的轴力图



图 D.32: Sap 2000 - 自我重量下双环圆架的相关术语力图

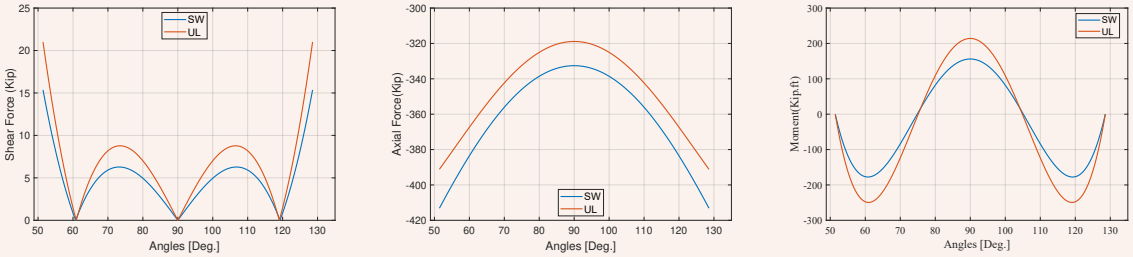


图 D.33: 双环圆 拱 低自重 vs.udl

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

D.3.6 结论

此部分讨论了双环拱的结构性行为, 在点荷载下, 自我重量和均匀分布荷载在内部力量和挠度方面。形象 D.33 与自我重量相比, 均匀分布的负载条件与平等分配的负担条件相比较,W=2275 kip/ft。

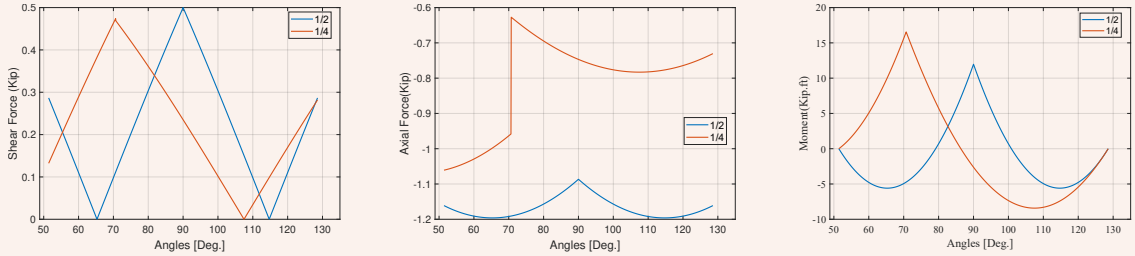


图 D.34: 双环圆 拱 在点下 荷载 在 1/2 和 1/4 间隔

形象 D.34 显示一个无形负载条件的插件。为此, 在冠冕和四分之一的间隔上应用一个单位荷载。在这种情况下, 由于在间隔的四分之一上应用的荷载点的最大时刻是约 1.4 倍比在冠冕上应用。轴力 的最大值, 由于在间隔冠冕上应用的 荷载 点, 大约是间隔四分之一时应用的 1.2 倍。

D.4 无缝循环 拱

一个交响的无缝圆形拱总共有六个反应 - 每个支座中有三个。由于无缝 拱 的 拱 带在支持者之间是连续的, 并且支持点是不可移动的, 所以应用的 荷载 不仅产生垂直但也产生水平反应, 通常称为冲动。只有三个平衡方程, 以解决六个未知的反应力量, 一个无情的弓是静态不确定到第三度。

D.4.1 分析程序

首先, 静态不定义的无缝弓的三种逆转反应被移除, 将其转化为静态确定的弓, 主要结构。使用静态的常规方法, 主要结构中的支持反应和内部力量因应用负载而计算。随后, 假设没有外部力量存在于原始结构上, 在被移除的旋转力量或瞬间的位置应用了一个虚拟力量或时刻单位, 并计算出所造成的内部力量。适用于应用负载下的弓形状的兼容性方程式被认为是计算原始静态不定义的 Hingeles 弓中的逆转反应。一旦发现了所有支持反应, 则使用常规静态方法计算弓中的内部力量。此外, 这些内部力量用于在应用的负载下计算弓中的分裂。在这里描述的分析过程以 7 个步骤进行, 使用 Mathematica。所有步骤的数学文件都包含在相关部分中, 为了简化而仅限于反应和内部力量的最终方程扩展。对于分析, 考虑了三种负载条件: 一个点荷载 , 自我重量的拱和统一应用分布荷载在拱. 自我重量和均匀的分布荷载是对拱的中心相同的, 当应用到任何地方时作为点为荷载, 而在冠冕上则与拱的中心相对不相同。因此, 为了描述分析, 相同的数字用于自我重量和均匀分布的负载条件, 在那里作为不同的数字集用于点荷载状态。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

D.4.2 点 荷载

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dp = P \tag{D.14}$$

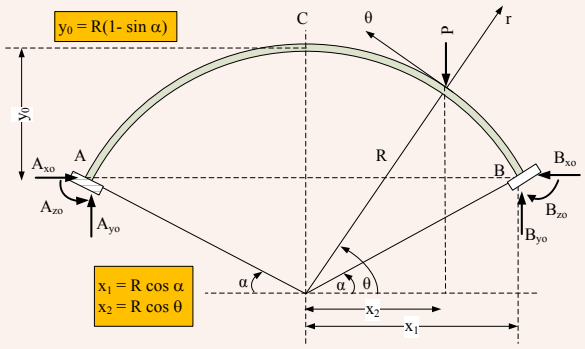


图 D.35: 无缝循环 拱 点下 荷载

主要结构: 反应和内部力量

原始无情的拱中的 Bxo 和 Bzo 和 Azo 的旋转力量, 显示在图中 D.35 它被移除, 将其转化为一个主要结构。在弓的任何地方, 点负载的位置会导致内部力量的停滞。这种不停在内部力量中显示的图像 D.3 因此, 在任何角度对内部力量的表达 β 在拱范围内, 取决于其与角度的关系 θ 在哪个点, 荷载 被应用。考虑到以下条件, 为内部力量开发了不同的方程式。

$$\beta < \theta,\ \beta \geq \theta \tag{D.15}$$

Hingeless 拱 的基本结构与双环的 拱 相似。自由体图在图中 D.18 它用于确定支持者的水平、垂直反应以及内部力量 - 在任何角度的轴、轴和时刻。β 在拱范围内。下面是数学的结果, 描述了计算支持反应的衍生物。

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

0

接下来是数学的结果, 描述了内部力量的衍生 - 轴, 叶和时刻在任何角度。β 在拱范围内。

Primary Structure: Reactions

Define the load

```
P=P;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 − P(x1 + x2);
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}P(\text{Cos}[\alpha]+\text{Cos}[\theta])\text{Sec}[\alpha]$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY − P + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]]
```

$\frac{1}{2}(P-P\text{Cos}[\theta]\text{Sec}[\alpha])$

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
SigMZ=AXy0 − AY2x1 + P(x1 − x2) − BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```

Check statics by taking moment about O CCW +ve

```
MO=FullSimplify[BXy1 + BYx1 − AXy1 − AYx1 − x2P]
```

```
0
```

首要结构: 虚拟单位力量

一个虚拟力量单位在位置 Bxo 应用到位移的方向, 在真实的荷载下。D.19 用来确定任何角度的内部力量。β 由于虚拟单元负载而引起的架间范围, 在 Bzo 和 Azo 的位置上也适用一个单元时刻, 在实际负载下分别在 B 和 A 的旋转方向。自由体图在图中 D.36 和图像 D.37 用来确定任何角度的内部力量。β 在拱范围内, 由于虚拟时刻应用于 B 和 A 分区。接下来是数学的结果, 描述了由于虚拟力量造成的计算内部力量的衍生。

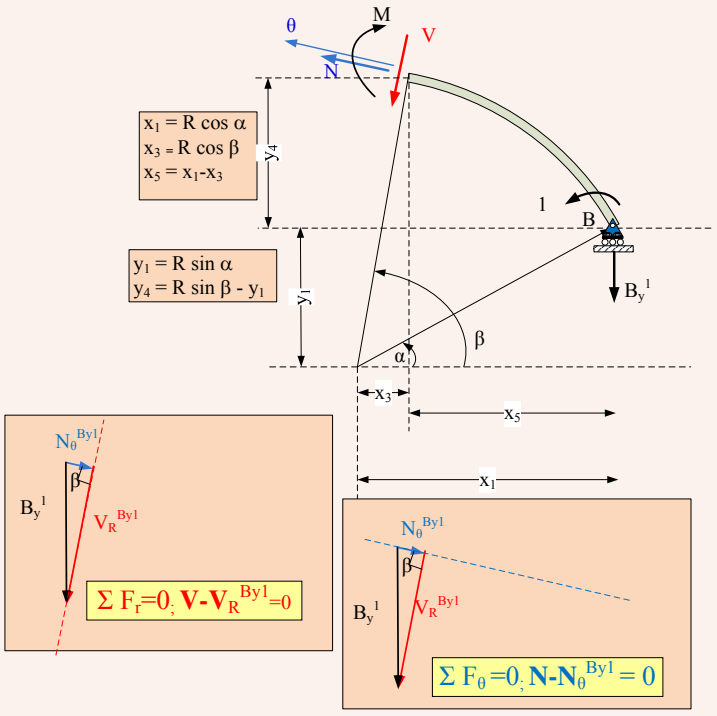


图 D.36: 无缝圆形拱与虚拟时刻在“b”

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

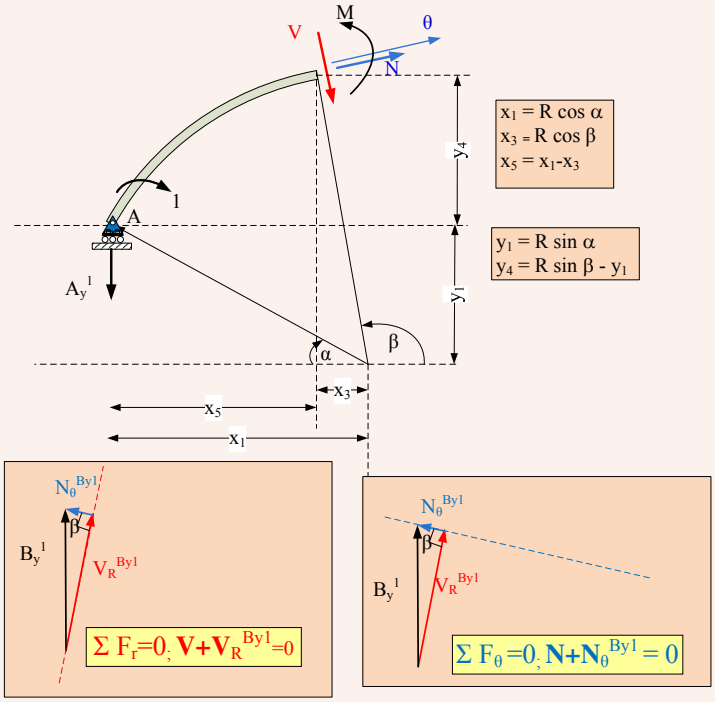


图 D.37: 无缝圆形拱与虚拟时刻在“A”

Primary Structure: Virtual Forces

Apply virtual horizontal force at B

```
BX1=1;
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVBX1=FullSimplify[BX1Cos[β] + δVBX1];
```

```
Sol7=Solve[SigFδVBX1==0,δVBX1]; δVBX1[β_]=δVBX1/.Sol7[[1]]
```

```
−Cos[β]
```

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNBX1=FullSimplify[−BX1Sin[β] + δNBX1];
```

```
Sol8=Solve[SigFδNBX1==0,δNBX1]; δNBX1[β_]=δNBX1/.Sol8[[1]]
```

```
Sin[β]
```

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
SigδMBX1=FullSimplify[−BX1y4 + δMBX1];
```

```
Sol9=Solve[SigδMBX1==0,δMBX1]; δMBX1[β_]=δMBX1/.Sol9[[1]]
```

$$-R\text{Sin}[\alpha] + R\text{Sin}[\beta]$$

Apply virtual moment at B

```
BZ1=1;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

```
SigMABZ1=FullSimplify[2x1BY1 − BZ1];
```

```
Sol10=Solve[SigMABZ1==0,BY1]; BY1=BY1/.Sol10[[1]]
```

$$\frac{\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of forces in the radial direction; Shear(+ve outward)

```
SigFδVBZ1=FullSimplify[−BY1Sin[β] + δVBZ1];
```

```
Sol11=Solve[SigFδVBZ1==0,δVBZ1]; δVBZ1[β_]=δVBZ1/.Sol11[[1]]
```

$$\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNBZ1=FullSimplify[−BY1Cos[β] + δNBZ1];
```

```
Sol12=Solve[SigFδNBZ1==0,δNBZ1]; δNBZ1[β_]=δNBZ1/.Sol12[[1]]
```

$$\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMBZ1=FullSimplify[BY1x5 − BZ1 + δMBZ1];
```

```
Sol13=Solve[SigδMBZ1==0,δMBZ1]; δMBZ1[β_]=δMBZ1/.Sol13[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1 + \text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

Apply virtual moment at A

```
AZ1=1;
```

Determine vertical reaction at B by taking moment about A (CW +ve)

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
SigMAAZ1=FullSimplify[AZ1 − 2x1BY2];
```

```
Sol14=Solve[SigMAAZ1==0,BY2]; BY2=BY2/.Sol14[[1]];
```

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

```
SigFδVAZ1=FullSimplify[BY2Sin[β] + δVAZ1];
```

```
Sol15=Solve[SigFδVAZ1==0,δVAZ1]; δVAZ1[β_]=δVAZ1/.Sol15[[1]]
```

$$-\frac{\text{Sec}[\alpha]\text{Sin}[\beta]}{2R}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFδNAZ1=FullSimplify[BY2Cos[β] + δNAZ1];
```

```
Sol16=Solve[SigFδNAZ1==0,δNAZ1]; δNAZ1[β_]=δNAZ1/.Sol16[[1]]
```

$$-\frac{\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha]}{2R}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigδMAZ1=FullSimplify[−BY2x5 + δMAZ1];
```

```
Sol17=Solve[SigδMAZ1==0,δMAZ1]; δMAZ1[β_]=δMAZ1/.Sol17[[1]]
```

$$\frac{1}{2}(1-\text{Cos}[\beta]\text{Sec}[\alpha])$$

原名:Redundant Force

跟随 协调方程 在应用的 荷载 下的 拱 的变形, 与 虚功 方法一起使用来确定 Bxo、Bzo 和 Azo 的旋转力量。对于这个过程, 考虑到协调方程的灵活和轴组成部分以及内部力量的不持续性。

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_\alpha^\theta \frac{M1\ \delta\text{M1}}{EI}\,d\beta + \int_\theta^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta\text{M2}}{EI}\,d\beta + \int_\alpha^\theta \frac{N1\ \delta\text{N1}}{a\ e}\,d\beta + \int_\alpha^{(\pi-\alpha)} \frac{N2\ \delta\text{N2}}{a\ e}\,d\beta\right] \tag{D.16}$$

哪里

$M1(\beta<\theta), M2(\beta\geq\theta)$	波中的内部时刻, 由实际负载引起
$\delta M1(\beta<\theta), \delta M2(\beta\geq\theta)$	由于外部虚拟单位造成的内部时刻 荷载
$N1(\beta<\theta), N2(\beta\geq\theta)$	内部 轴力 在 梁 由真实的 荷载 引起
$\delta N1(\beta<\theta), \delta N2(\beta\geq\theta)$	内部 轴力 因外部虚拟单元 荷载 造成

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

接下来是数学的结果, 描述了计算压力的衍生物。

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1_{[\beta]}\delta MBX1_{[\beta]}}{ei} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2_{[\beta]}\delta MBX1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;

DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{NN1_{[\beta]}\delta NBX1_{[\beta]}}{ae} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2_{[\beta]}\delta NBX1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Rotation at B

DeltaBZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1_{[\beta]}\delta MBZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2_{[\beta]}\delta MBZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;

DeltaBZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{NN1_{[\beta]}\delta NBZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2_{[\beta]}\delta NBZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;

Rotation at A

DeltaAZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1_{[\beta]}\delta MAZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2_{[\beta]}\delta MAZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;

DeltaAZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{NN1_{[\beta]}\delta NAZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN2_{[\beta]}\delta NAZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;

Deformation due to virtual load (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1_{[\beta]}\delta MBX1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1_{[\beta]}\delta NBX1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

F12F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1_{[\beta]}\delta MBZ1_{[\beta]}}{ei} d\beta\right]$;
F12A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1_{[\beta]}\delta NBZ1_{[\beta]}}{ae} d\beta\right]$;

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
F12=F12F + F12A;
```

```
F13F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δMBX1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F13A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δNBX1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F13=F13F + F13A;
```

```
F22F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δMBZ1[β]δMBZ1[β]/(ei) dβ];
F22A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δNBZ1[β]δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F22=F22F + F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F23A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[∫_α^(π−α) δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F33A=FullSimplify[∫_α^(π−α) δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11+BZOF12+AZOF13==DeltaBX1,BXOF21+BZOF22+AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31+
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{P\left(-(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(i-aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\theta]-2aR^2(\pi-2\alpha+2\text{Sin}[2\alpha])+4aR^2\text{Cos}[\alpha]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

原创结构: 反应和内部力量

在原始结构中的 Bxo、Bzo 和 Azo 的逆转力被计算后, 剩余的 支座 反力 和原始构成的内部力量通过图表中的自由体图来确定。D.38. 下面是数学的结果, 描述了支座反应计算的

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

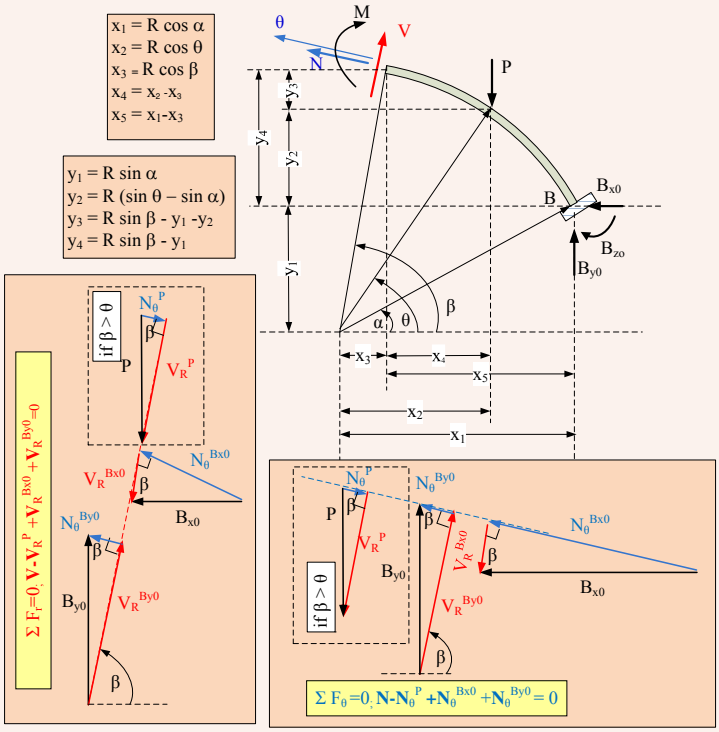


图 D.38: 原始无缝循环 拱 的 Fbd 在 荷载 点下

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

衍生。

Original Structure: Reactions

Determine Vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 - P(x1 + x2) + AZO - BZO;
```

```
Sol21=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol21[[1]];
```

```
FullSimplify[BYO]
```

$$\frac{P\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-(i+aR^2)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+(-i+aR^2)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol22=Solve[BYO - P + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[AYO]
```

$$\frac{P\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]-2(i+aR^2)(\alpha-\theta+\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha])+(i-aR^2)\text{Sin}[2\theta]\right)}{2(i+aR^2)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])}$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[-BZO + BYOx1 + BXOy1 + AZO - AYOx1 - AXOy1 - Px2]
```

```
0
```

下面是数学的结果, 描述了计算内部力量的衍生。

Original Structure: Internal Forces

For $\beta < \theta$

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO1= - BXOCos[β] + BYOSin[β] + VO1;
```

```
Sol23=Solve[SigFVO1==0,VO1]; VO1[β_]:=VO1/.Sol23[[1]];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

FullSimplify[VO1[β]]

$$\begin{aligned}&\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+\right.\right.\\&\left.4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\\&-2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\right.\\&\left.\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\right.\\&\left.\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

SigFNO1=BXOSin[β] + BYOCos[β] + NO1;

Sol24=Solve[SigFNO1==**0**,NO1]; NO1[β_]:=NO1/.Sol24[[**1**]];

FullSimplify[NO1[β]]

$$\begin{aligned}&\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+\right.\right.\\&\left.4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\\&-2\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\right.\\&\left.\left(i+aR^2\right)(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\Big)/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)\right.\right.\\&\left.\left.(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigMO1=BXOy4 − BYOx5 + BZO + MO1;

sol25=Solve[SigMO1==**0**,MO1]; MO1[β_]:=MO1/.sol25[[**1**]];

FullSimplify[MO1[β]]

$$\begin{aligned}&-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+\right.\right.\right.\\&\left.\left.4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right.\\&-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)\\&+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-2\text{Cos}[\theta]\left(-2aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)(\pi-\alpha-\theta)-2aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)\right.\right.\\&\left.\left.(\pi-\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]\right)+\left(i+aR^2\right)(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\right)\\&+\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)\right.\\&\left.\left.(2(-\pi+\alpha+\theta)+\text{Sin}[2\alpha])+\left(i-aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\Big)/\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right.\right.\\&\left.\left.-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

For $\beta > \theta$
Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
SigFVO2= − BXOCos[β] + BYOSin[β] − PSin[β] + VO2;
```

```
Sol26=Solve[SigFVO2==0,VO2]; VO2[β_]:=VO2/.Sol26[[1]];
```

```
FullSimplify[VO2[β]]
```

$$-\left(P\left(2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\beta](-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$\left.-4\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\right)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

```
SigFNO2=BXOSin[β] + BYOCos[β] − PCos[β] + NO2;
```

```
Sol27=Solve[SigFNO2==0,NO2]; NO2[β_]:=NO2/.Sol27[[1]];
```

```
FullSimplify[NO2[β]]
```

$$-\left(P\left(-2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\beta]\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[2\alpha]+(\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Cos}[\alpha](-\pi\text{Cos}[\theta]+2\theta\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\alpha]-2\text{Sin}[\theta])\right)\right.$$
$$\left.-4\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]\text{Sin}[\alpha]+\text{Cos}[\theta]\left(-i\text{Sin}[\theta]+aR^2(-2\text{Sin}[\alpha]+\text{Sin}[\theta])\right)\right)\right)\Big/\left(4\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
SigMO2=BXOy4 − BYOx5 + Px4 + BZO + MO2;
```

```
sol28=Solve[SigMO2==0,MO2]; MO2[β_]:=MO2/.sol28[[1]];
```

```
FullSimplify[MO2[β]]
```

$$-\left(PR\left(\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left((\pi-2\alpha)\left(2aR^2+\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]\right)+4aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right.\right.$$
$$-2\left(i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha](\pi-2\alpha-\text{Sin}[2\alpha])\left(i+3aR^2+\left(-i+aR^2\right)\text{Cos}[2\theta]+2aR^2\text{Sin}[\beta]((\pi-2\theta)\text{Cos}[\theta]+2\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$+\left(i+aR^2\right)\left(2\text{Cos}[\theta]\left((\pi-2\alpha)\left(aR^2(2+(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta))+i(\pi-2\alpha)(\alpha-\theta)+2aR^2\text{Cos}[2\alpha]\right)-8aR^2\text{Cos}[\alpha]^3\text{Sin}[\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\alpha-\theta)\text{Sin}[2\alpha]^2\right)+\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])(2(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]-2(\pi-2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\text{Sin}[\theta])\right)$$
$$\left.-\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\left(-4aR^2\text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\alpha]+\left(i+aR^2\right)(2\alpha-2\theta+\text{Sin}[2\alpha])+\left(-i+aR^2\right)\text{Sin}[2\theta]\right)\right)\Big/\left(2\left(i+aR^2\right)(-\pi+2\alpha+\text{Sin}[2\alpha])\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

挠度

形象 D.21 和上面的 解析 方程式用于计算 挠度 在同步无环圆形 拱 例子中讨论的部分 D.2.2. 跟随虚拟工作的方程式, 用于计算失败。

$$\delta P.\, \Delta = \left[\int_{\alpha}^{\theta} \frac{M1\ \delta \mathrm{M1}}{EI}\, R d\beta + \int_{\theta}^{(\pi-\alpha)} \frac{M2\ \delta \mathrm{M2}}{EI}\, R d\beta \right] \tag{D.17}$$

哪里

δP	外部虚拟单元 荷载 应用于 Δ
Δ	外部 位移 由实际应用的 荷载 引起
$M1(\beta < \theta),\ M2(\beta \geq \theta)$	波中的内部时刻是由实际点负载引起的
$\delta M1(\beta < \theta),\ \delta M2(\beta \geq \theta)$	由于外部虚拟单位造成的内部时刻 荷载

结果总结

形象 D.39 在上面的部分中讨论的一个无情的弓例子显示插件。点负载适用于弓冠。内部轴力 和 剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。如图所示, 所有内部力量都对拱的冠冕相同。轴压力的强度是最高的 $\frac{1}{4}$ 從兩個相关术语的區域下降到大約 93.5% 王冠的最高值。在冠冕上, 内部时刻是最高的。另一方面, 剪力比内部的轴力和瞬间相对较低。挠度 是零的, 最多在两者间隔约为 1/4 的范围。

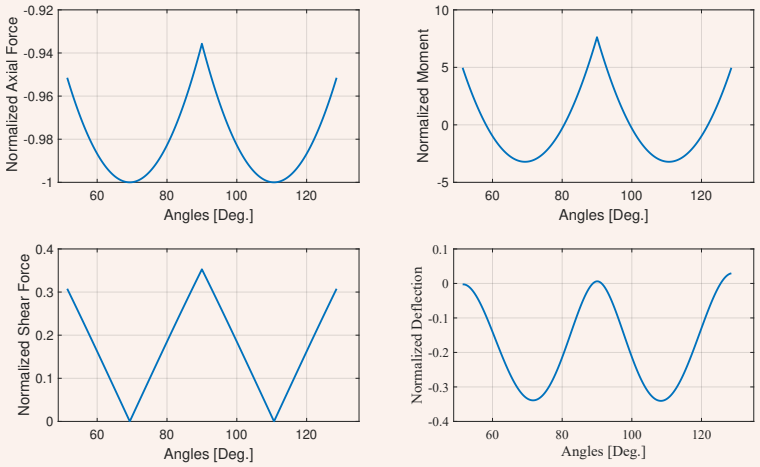


图 D.39: 荷载 点下的无缝圆形 拱

D.4.3 自我重量

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dP = wds = wRd\theta \tag{D.18}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

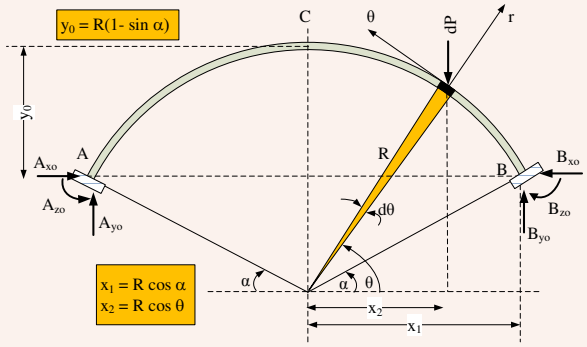


图 D.40: 无缝圆形拱低于自我重量

主要结构: 反应和内部力量

原始无情的拱中的 Bxo 和 Bzo 和 Azo 的旋转力量在图中显示 D.40 它被移除, 将其转化为一个主要结构。Hingeless 拱 的基本结构与双环的 拱 相似。自由体图在图中 D.24 用来确定支持者的水平、垂直反应以及内部力量 - 任何角度的轴、线和时刻。β 在拱范围内。下面是数学的结果, 描述了计算支持反应的衍生物。

Primary Structure: Reactions

Define the load (omitting the dθ)

```
dP'=wR;
```

Determine reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMA=BY2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ;
```

```
Sol1=Solve[SigMA==0,BY]; BY=BY/.Sol1[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi - 2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol2=Solve[BY - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AY==0,AY]; AY=AY/.Sol2[[1]];
```

Determine horizontal reaction at A by taking moment with respect to Z (CCW +ve)

```
BX=0;
```

```
SigMZ=AXy0 - AY2x1 + ∫_α^(π-α) dP'(x1 - x2) dθ - BXy0;
```

```
Sol3=Solve[SigMZ==0,AX]; AX=AX/.Sol3[[1]];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Check statics by taking moment about O CCW +ve

MO=FullSimplify $\left[\text{BXy1} + \text{BYx1} - \text{AXy1} - \text{AYx1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{x2dP}' \, d\theta\right]$

0

接下来是数学的结果, 描述了内部力量的衍生 - 轴, 叶和时刻在任何角度。β 在拱范围内。

Primary Structure: Internal Forces

Summation of forces in the radial direction; Shear (+ve outward)

SigFV=BYSin[β] $- \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{Sin}[\beta] \, d\theta + V$;

Sol4=FullSimplify[Solve[SigFV==0,V]]; $V[\beta\_]=V$ /.Sol4[[1]]

$-\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\beta)\text{Sin}[\beta]$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force (+ve Tension)

SigFN=BYCos[β] $- \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{Cos}[\beta] \, d\theta + \text{NN}$;

Sol5=FullSimplify[Solve[SigFN==0,NN]]; NN[β_]=NN /.Sol5[[1]]

$-\frac{1}{2} Rw(\pi - 2\beta)\text{Cos}[\beta]$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

SigM= $-$ BYx5 $+ \int_{\alpha}^{\beta} \text{dP}'\text{x4} \, d\theta + M$;

Sol6=Solve[SigM==0,M]; $M[\beta\_]=M$ /.Sol6[[1]]

$\frac{1}{2}\left(\pi R^2 w\text{Cos}[\alpha] - 2R^2 w\alpha\text{Cos}[\alpha] - \pi R^2 w\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\beta\text{Cos}[\beta] + 2R^2 w\text{Sin}[\alpha] - 2R^2 w\text{Sin}[\beta]\right)$

首要结构: 虚拟单位力量

形象 D.19 图像 D.36 和图像 D.37 随后, 在点负载下使用的无缝循环弓类似过程来确定任何角度的内部力量。β 超過 拱 範圍是由虛擬單位 荷载 引起的。描述计算内部力量因虚拟力量而引起的衍生物的数学结果, 用于无情拱在点下荷载也适用在这里。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

原文:Redundant Force

使用下一个协调方程在应用的荷载下的拱的变形, 以及虚功方法, 用于确定 Bxo、Bzo 和 Azo 的回归力量。对于这个过程, 考虑到协调方程的灵活和轴组成部分。

$$1.\ \Delta_B = \left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M\ \delta\mathrm{M}}{EI}\, d\beta + \int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{N\ \delta\mathrm{N}}{a\ e}\, d\beta\right] \tag{D.19}$$

哪里

M 波中的内部时刻, 由实际负载引起
δM 由于外部虚拟单位造成的内部时刻 荷载
N 内部 轴力 在 梁 由真实的 荷载 引起
δN 内部 轴力 因外部虚拟单元 荷载 造成

下面是数学的结果, 描述了计算机的衍生力。

Original Structure: Redundant Force

Deformation due to the real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

$$\text{DeltaBX1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MBX1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBX1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NBX1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;}$$

Rotation at B

$$\text{DeltaBZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MBZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{DeltaBZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NBZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;}$$

Rotation at A

$$\text{DeltaAZ1F=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta\mathrm{MAZ1}[\beta]}{ei}\, d\beta\right];$$
$$\text{DeltaAZ1A=FullSimplify}\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\mathrm{NN}[\beta]\delta\mathrm{NAZ1}[\beta]}{ae}\, d\beta\right];$$

$$\text{DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;}$$

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
F11F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMBX1[β]/ei,{β,α,(π-α)}]];
F11A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNBX1[β]/ae,{β,α,(π-α)}]];
```

```
F11=F11F+F11A;
```

```
F12F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMBZ1[β]/ei,{β,α,(π-α)}]];
F12A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNBZ1[β]/ae,{β,α,(π-α)}]];
```

```
F12=F12F+F12A;
```

```
F13F=FullSimplify[Integrate[δMBX1[β]δMAZ1[β]/ei,{β,α,(π-α)}]];
F13A=FullSimplify[Integrate[δNBX1[β]δNAZ1[β]/ae,{β,α,(π-α)}]];
```

```
F13=F13F+F13A;
```

```
F22F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMBZ1[β]/ei,{β,α,(π-α)}]];
F22A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNBZ1[β]/ae,{β,α,(π-α)}]];
```

```
F22=F22F+F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[Integrate[δMBZ1[β]δMAZ1[β]/ei,{β,α,(π-α)}]];
F23A=FullSimplify[Integrate[δNBZ1[β]δNAZ1[β]/ae,{β,α,(π-α)}]];
```

```
F23=F23F+F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[Integrate[δMAZ1[β]δMAZ1[β]/ei,{β,α,(π-α)}]];
F33A=FullSimplify[Integrate[δNAZ1[β]δNAZ1[β]/ae,{β,α,(π-α)}]];
```

```
F33=F33F+F33A;
```

```
F21=F12;F32=F23;F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
Solve[{BXOF11+BZOF12+AZOF13==DeltaBX1,BXOF21+BZOF22+AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31+
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\left(-2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)-\left(-16aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-(i+7aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}{2\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

原创结构: 反应和内部力量

在原始结构中的 Bxo、Bzo 和 Azo 的逆转力被计算后, 剩余的 支座 反力 和原始构成的内部力量通过图表中的自由体图来确定。D.41. 下面是数学的结果, 描述了支座反应计算的

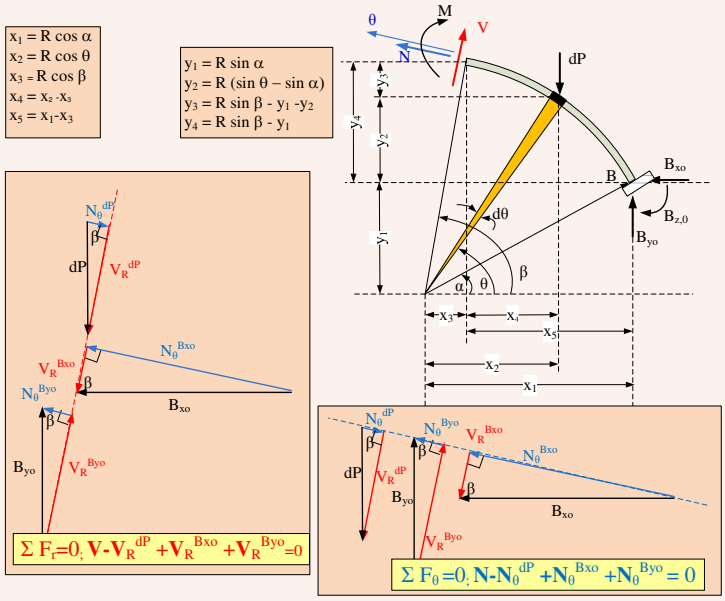


图 D.41: 无缝循环的内部力量 拱

衍生。

Original Structure: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

$$\text{SigMAO=BYO2x1} - \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}(\text{x1}+\text{x2})\text{dP}'\,d\theta + \text{AZO} - \text{BZO};$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol19=Solve[BYO - ∫_α^(π-α) dP' dθ + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$\frac{1}{2}Rw(\pi-2\alpha)$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BZO + BYOx1 + BXOy1 - AZO - AYOx1 - AXOy1 - ∫_α^(π-α) dP'x2 dθ]
```

0

下面是数学的结果, 描述了计算内部力量的衍生。

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[β] + BYOSin[β] - ∫_α^β dP'Sin[β] dθ + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[β_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[β_]]
```

$$-\left(Rw\left(\text{Cos}[\beta]\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\pi-2\beta)\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[β] + BYOCos[β] - ∫_α^β dP'Cos[β] dθ + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[β_]:=NO/.Sol21[[1]];
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

FullSimplify[NO[β_]]

$$-\left(Rw\left((\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(2aR^2\left(-8+(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-16aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+7aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + $\int_{\alpha}^{\beta}$ dP′x4$d\theta$ + MO;

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

FullSimplify[MO[β_]]

$$\left(R^2w\left(2\left(3i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Cos}[\alpha]+2\left(aR^2-i\left(-3+(\pi-2\alpha)^2\right)-aR^2(\pi-2\alpha)^2+\left(3i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\alpha]\right.\right.$$
$$+(\pi-2\beta)\text{Cos}[\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$
$$\left.\left.+\left(-2\left(4aR^2+i(\pi-2\alpha)^2\right)+\left(-8aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2\right)\text{Cos}[2\alpha]-\left(i-5aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)/$$
$$\left(2\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

挠度

上述开发的解析方程式用于计算挠度在无缝交响圆形拱例子中讨论的部分 D.2.3. 跟随虚拟工作的方程式, 用于计算失败。

$$\delta P.\,\Delta=\left[\int_{\alpha}^{\theta}\frac{M\ \delta\text{M1}}{EI}\,Rd\beta+\int_{\theta}^{(\pi-\alpha)}\frac{M\ \delta\text{M2}}{EI}\,Rd\beta\right] \tag{D.20}$$

哪里

δP	外部虚拟单元 荷载 应用于 Δ
Δ	外部 位移 由实际应用的 荷载 引起
M	波中的内部时刻, 由实际负载引起
$\delta M1(\beta<\theta)$	由于外部虚拟单位造成的内部时刻 荷载
$\delta M2(\beta\geq\theta)$	由于外部虚拟单位造成的内部时刻 荷载

结果总结

形象 D.42 顯示對 Hingeless 拱 在自我重量下討論了上面的部分。内部 轴力 和 剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。轴压力是最高的, 它向冠冕下降到大约 81% 最高值的。另

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

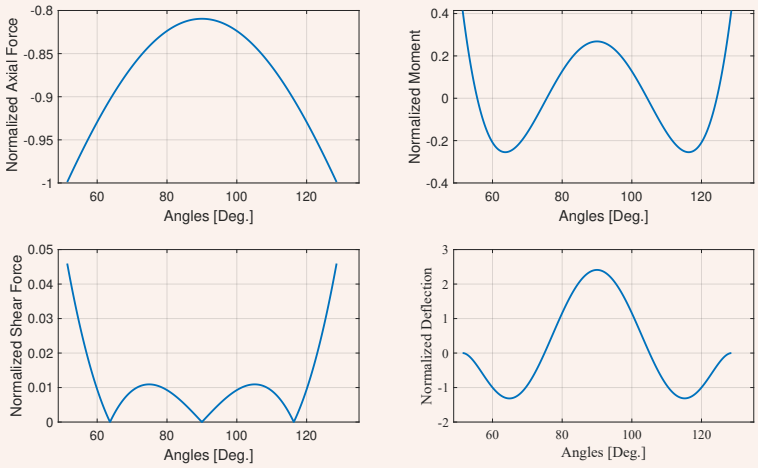


图 D.42: 无缝圆形拱在自我重量下

一方面, 剪力是相对较低的, 它在约 4.75 之间有所不同。% 和 1.0%相应地, 从阿布特门到王冠。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。内部时刻是最高的, 在抽象中, 它约为 60。% 王冠的最高值和大约 $\frac{1}{6}$ 從 ab 子中取出。目前图表中有四个漏洞点, 它们相当于弓中的零漏洞。缺陷是冠冕上最高的, 缺陷图表跟随与时刻图表相似的配置。积极和消极的分裂相应于对轴中的积极和负面时刻。

D.4.4 统一 分布荷载

在这种情况下, 基本的应用力量是由

$$dp = wdx = wRSin\theta \tag{D.21}$$

原始无情的拱中的 Bxo 和 Bzo 和 Azo 的旋转力量, 显示在图中 D.40 它被移除, 将其转化为一个主要结构。第一三个步骤, 包括支持反应和由实际负载引起的内部力量以及由于虚拟负载造成的内部势力等, 与无限循环弓在自我重量下相似。对于简单性而言, 仅包括计算回归力、支座反应和原始结构中的内部力量的步骤才被显示在这里。

原名:Redundant Force

使用的过程在自我重量下的无限拱在这里重复。协调方程在应用的荷载下变形的 拱与虚功方法一起, 用于确定 Bxo 在 B 分数中的逆转力量。对于这个过程, 考虑到协调方程的灵活和轴组成部分。以下是数学的结果, 描述了计算压缩力量的衍生物。

Original Structure: Redundant Forces

Deformation due to real load (Flexural + Axial)
Displacement at B

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

DeltaBX1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
DeltaBX1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBX1=DeltaBX1F + DeltaBX1A;

Rotation at B

DeltaBZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
DeltaBZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaBZ1=DeltaBZ1F + DeltaBZ1A;

Rotation at A

DeltaAZ1F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{M[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
DeltaAZ1A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{NN[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

DeltaAZ1=DeltaAZ1F + DeltaAZ1A;

Deformation due to virtual force (Flexural + Axial)

F11F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBX1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F11A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBX1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F11=F11F + F11A;

F12F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MBZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F12A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NBZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F12=F12F + F12A;

F13F=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta MBX1[\beta]\delta MAZ1[\beta]}{ei} d\beta\right]$;
F13A=FullSimplify $\left[\int_{\alpha}^{(\pi-\alpha)} \frac{\delta NBX1[\beta]\delta NAZ1[\beta]}{ae} d\beta\right]$;

F13=F13F + F13A;

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
F22F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBZ1[β]δMBZ1[β]/(ei) dβ];
F22A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBZ1[β]δNBZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F22=F22F + F22A;
```

```
F23F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMBZ1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F23A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNBZ1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F23=F23F + F23A;
```

```
F33F=FullSimplify[∫_α^(π-α) δMAZ1[β]δMAZ1[β]/(ei) dβ];
F33A=FullSimplify[∫_α^(π-α) δNAZ1[β]δNAZ1[β]/(ae) dβ];
```

```
F33=F33F + F33A;
```

```
F21=F12; F32=F23; F31=F13;
```

Redundant forces in original structure

```
Solve[{BXOF11+BZOF12+AZOF13==DeltaBX1,BXOF21+BZOF22+AZOF23==DeltaBZ1,BXOF31+
BZOF32 + AZOF33==DeltaAZ1}, {BXO,BZO,AZO}];
```

```
FullSimplify[BXO]
```

$$\frac{Rw\text{Cos}[\alpha]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2(i-aR^2)+(2i+aR^2)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)}{3\left(-4aR^2+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+(i+aR^2)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)}$$

原创结构: 反应和内部力量

在原始结构中的 Bxo、Bzo 和 Azo 的逆转力被计算后, 剩余的 支座 反力 和原始构成的内部力量通过图表中的自由体图来确定。D.41. 下面是数学的结果, 描述了支座反应计算的衍生。

Original Strcture: Reactions

Determine vertical reaction at B by taking moment with respect to A (CCW +ve)

```
SigMAO=BYO2x1 - ∫_α^(π-α) (x1 + x2)dP' dθ + AZO - BZO;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Sol18=Solve[SigMAO==0,BYO]; BYO=BYO/.Sol18[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine vertical reaction at A by taking summation of forces in the y direction

```
Sol19=Solve[BYO - Integrate[dP' d\[Theta], {\[Theta], \[Alpha], \[Pi] - \[Alpha]}] + AYO==0,AYO]; AYO=AYO/.Sol19[[1]]
```

$$Rw\text{Cos}[\alpha]$$

Determine horizontal reaction at A by taking summation of forces in the x direction

```
AXO=BXO;
```

```
Clear[MO];
```

```
MO=FullSimplify[BZO + BYOx1 + BXOy1 - AZO - AYOx1 - AXOy1 - Integrate[dP'x2 d\[Theta], {\[Theta], \[Alpha], \[Pi] - \[Alpha]}]]
```

$$0$$

接下来是数学的结果, 描述了计算内部力量的衍生。

Original Structure: Internal Forces

Summation of forces in the Radial direction ; Shear (+ve outward)

```
SigFVO= - BXOCos[\[Beta]] + BYOSin[\[Beta]] - Integrate[dP'Sin[\[Beta]] d\[Theta], {\[Theta], \[Alpha], \[Beta]}] + VO;
```

```
Sol20=Solve[SigFVO==0,VO]; VO[\[Beta]_]:=VO/.Sol20[[1]];
```

```
FullSimplify[VO[\[Beta]_]]
```

$$\begin{aligned}&\left(Rw\left(2\text{Cos}[\alpha]\text{Cos}[\beta]\left(-(\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)-3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.\\&\quad\left.\left.-3\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[2\beta]\right)\right)/\\&\quad\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)\end{aligned}$$

Summation of forces in the tangential direction; Normal force +(ve Tension)

```
SigFNO=BXOSin[\[Beta]] + BYOCos[\[Beta]] - Integrate[dP'Cos[\[Beta]] d\[Theta], {\[Theta], \[Alpha], \[Beta]}] + NO;
```

```
Sol21=Solve[SigFNO==0,NO]; NO[\[Beta]_]:=NO/.Sol21[[1]];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
FullSimplify[NO[β_]]
```

$$\left(Rw\left(6\text{Cos}[\beta]^2\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.+2\text{Cos}[\alpha]\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)/$$
$$\left(6\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

Summation of moments; Internal moment (CW +ve)

```
Clear[MO];
```

```
SigMO=BXOy4 − BYOx5 + BZO + ∫_α^β dP'x4dθ + MO;
```

```
sol22=Solve[SigMO==0,MO]; MO[β_]:=MO/.sol22[[1]];
```

```
FullSimplify[MO[β_]]
```

$$\left(R^2w\left(9\left(-3i+aR^2\right)\text{Cos}[\alpha]^2\right.\right.$$
$$+3\text{Cos}[2\beta]\left(4aR^2-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2+4aR^2\text{Cos}[2\alpha]-\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)$$
$$+\text{Cos}[\alpha]\left(-\left(5i+aR^2\right)\text{Cos}[3\alpha]-6\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[\alpha]+4\left((\pi-2\alpha)\left(2\left(i-aR^2\right)+\left(2i+aR^2\right)\text{Cos}[2\alpha]\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+3aR^2\text{Sin}[2\alpha]\right)\text{Sin}[\beta]\right)\right)\Big/\left(12\left(-4aR^2+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)^2-4aR^2\text{Cos}[2\alpha]+\left(i+aR^2\right)(\pi-2\alpha)\text{Sin}[2\alpha]\right)\right)$$

挠度

在无限圆形拱中计算挠度的过程, 同时在分布荷载下均匀计算, 以及用于三角变量的数值值类似于自我重量下计算, 因此它不在这里显示。

结果总结

形象 D.43 显示无情的 拱 在上面的部分中讨论的均匀 分布荷载 下的插件。内部 轴力 和 剪力 是正常化的, 与垂直 反力 的结果相匹配。轴压力是最高的, 它向冠冕下降到约 82.5。% 最高值的。另一方面, 剪力是相对较低的, 它在约 6.75 之间有所不同。% 和 1.75%相应地, 从阿布特门到王冠。内部时刻与内部轴力的产品和上涨有关正常化。内部时刻是最高的, 在抽象中, 它约为 67 % 王冠的最高值和大约 $\frac{1}{6}$ 從 ab 子中取出。目前图表中有四个漏洞点, 它们相当于弓中的零漏洞。缺陷是冠冕上最高的, 缺陷图表跟随与时刻图表相似的配置。积极和消极的分裂相应于对轴中的积极和负面时刻。

D.4.5 无缝循环 拱: 验证

上述为无情圆形拱在点下的荷载的解析方程, 自我重量和均匀的分布荷载是两步验证的。首先, 在 拱 范围内均匀应用的自我重量和 分布荷载 分为 20 点负载系列。内部力量和缺陷的图表是用自我重量和均匀分布负载的分析方程式与其相应点负载一起编写的。这些图表是

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

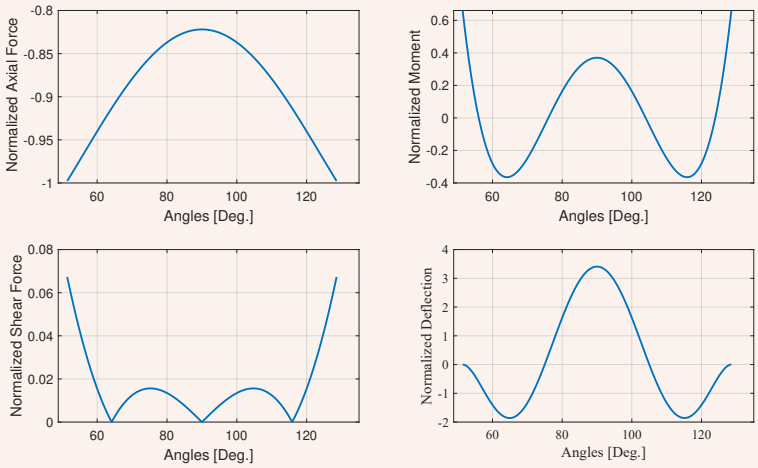


图 D.43: 无缝循环 拱 在 UDL 下

超强制检查解析解的有效性。由于自我重量或均匀的分布荷载相当于其各式各样的点负载, 所以它们的分支相互紧密匹配。

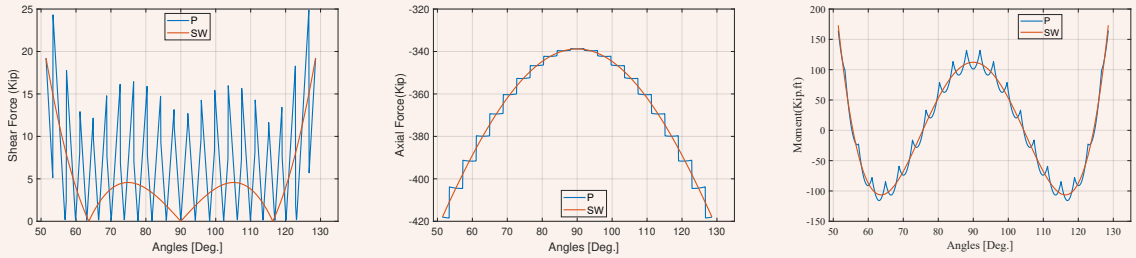


图 D.44: 无缝循环 拱 低于自我重量 vs. 点系列 荷载

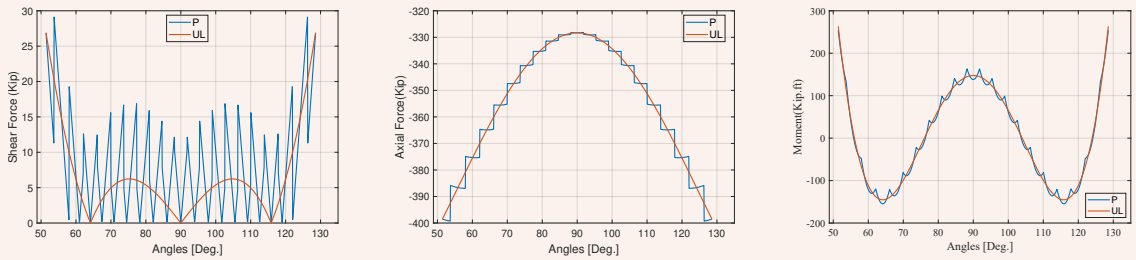


图 D.45: 无缝循环架在均匀分布负载下 vs. 点负载系列

形象 D.44 和图像 D.45 描述了上述讨论的过程, 用于验证解析方程式。其次, 一款 SAP 2000 型号正在为无缝圆形拱在自我重量下开发。目前, 其分析的 剪力 和 轴力 图表与使用 解析 方程式编写的图表进行比较。数值 值在图中的时刻图表 D.46, 轴力 图表 D.47 和 剪力 图表 D.48 密切相匹配与图表中的各自值 D.44.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



图 D.46: Sap 2000 - 无缝圆形拱的时刻图在自我重量下



图 D.47: Sap 2000 - 自我重量下无缝循环弓的轴力图



图 D.48: Sap 2000 - 自我重量下无缝循环弓的光力图表

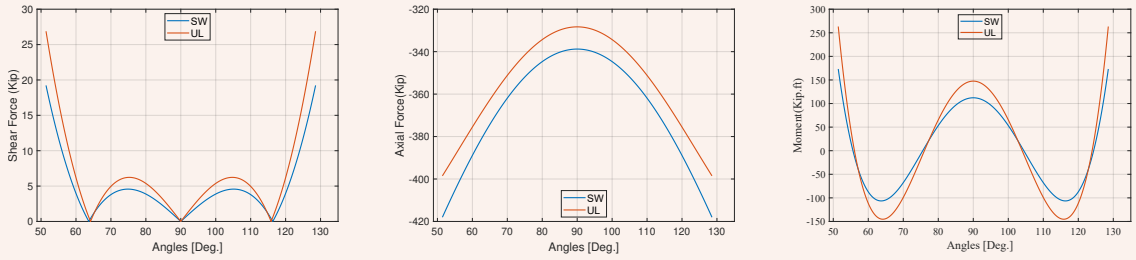


图 D.49: 无缝循环 拱 在自我重量下 vs.udl

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

D.4.6 结论

在本节中, 讨论一个无情的弓在点负载下、自我重量和统一分布负载的结构性行为, 从内部力量和脱落的角度来看。形象 D.49 比较自我重量负载状态与均匀分布的负载条件在平等负载 w=2.275 kip/ft. 相比自体重量, 均匀 分布的負載会导致更多的内部表面力量、瞬间和脱落, 并造成较少的内部压缩轴力。形象 D.50 显示无形负载条件的插件. 为此, 在冠冕和区域

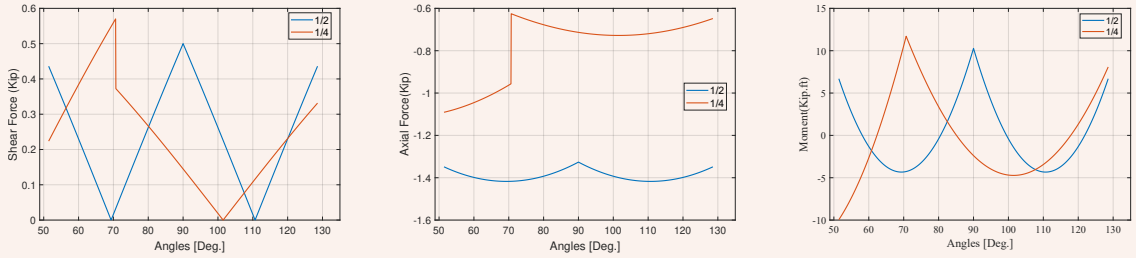


图 D.50: 无缝圆形拱在点下荷载在 1/2 和 1/4 间隔

四分之一上应用一个单位荷载。在这种情况下, 由于在间隔的四分之一上应用的荷载点的最大时刻是约 1.2 倍比在冠冕上应用。轴力 的最大值, 由于在间隔冠冕上应用的 荷载 点, 大约是间隔四分之一时应用的 1.3 倍。

D.5 结论

该章节的重点是开发分析方程式, 以支持三角、二角和无情的弓中的反应和内部力量, 并使用这些方程来理解每个弓类型的结构性行为。三角 拱 是静态定义, 只有需要的常规方法的静态来产生 解析 方程式。另一方面, 对于静态不定义的双环弓和无环弓, 虚拟工作方法与兼容性方程式一起用于变形。

每个类型的架子在三个负载条件下进行分析 - 点负载, 自重和均匀分布的负载。在同步加载中, 三种拱之间的主要差异是它们时刻图中的通胀点数量以及其在拱范围内的时刻分布的影响。如图中所见 D.15 一个三角弓没有冲击点, 并在接近的相关术语之间具有高负面时刻。如图所示 D.33 有红点, 双环的拱有两次感染, 在冠冕上有着高积极的时刻。如图所示 D.49 有红点, 无情的拱有四个发射点, 在发射时具有高积极的时刻。对于所有三个字符, 自我重量和均匀分布的负载条件之间的比较表明, 自我体重对内部轴力有更大的贡献, 而作为均匀的分布荷载则对内部时刻有更高的贡献。这表明一个拱的独特压缩机制可以抵抗其自我重量。

每个弓类型的内部力量的分数表明, 当对弓王冠施加点负载时, 它会产生与弓本身重量或平等分布在整个范围内施加的内部力量不同模式。以 拱 的 当一个点 荷载 应用到王冠的双环或无环 拱 , 它会导致最大 轴力 在距离约 $\frac{1}{4}$ 到 $\frac{1}{6}$ 從相关术语子之間的延伸, 它在冠冕上造成最大的瞬間。當一個點 荷载 應用於三角形 拱 的冠冕時, 它會導致最大 轴力 和瞬間在大約的距離 $\frac{1}{4}$ 從相关术语子之下來。当自我重量或均匀分布的负载应用于三根或两根弓时, 它会产生最多的轴力, 并在一个距离的最大瞬间。$\frac{1}{6}$ 但当同样的力量被应用到一个天使弓时, 最大的轴力和瞬间都发生在相关术语上。最大 挠度 的所有三种类型在自我重量或均匀的

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

分布荷载 的架子发生在 拱 的冠冕上。理解内部力量的变化和研究架的分裂, 可以应用到优化他们的交叉部分以及压缩和灵活的强度。对于所有类型的弓箭, 分析还比较了由于在冠冕上应用的荷载点造成的内部力量。$\frac{1}{4}$ 关于 Span。结果表明, 当一个点 荷载 被应用时, 最高时刻发生。$\frac{1}{4}$ 其中最多 轴力 发生时, 它适用于冠冕。一般情况下, 在所有三种类型的架子中具有无形的负载状态会导致与同步负载相比, 内部时刻相当高。这一点负载与内部力量的位置关系可以用来引导适当的位置, 以便在开放式螺旋弓桥设计的情况下为脚踏板。从分析结果中可以说, 围绕拱的中心的脚踏板的交响式布局将提供一个有效的设计解决方案。对于“原始结构: 旋转力量”部分的双手和双手弓中显示的兼容性方程式, 考虑到两轴和灵活组件。观察到, 在 拱 分析中的多个现有文学只使用 协调方程 的灵活组件。虽然这对双环拱的内部力量产生了不可忽视的影响, 但发现忽略轴组件会导致大约 20 个。% 错误在无限 拱 的内部时刻。为了验证 解析解, 使用了 SAP 2000 程序。目前没有“拱”组件, 因此在 Sap 2000 中使用了多个部分来构建一个拱. 验证过程表明, 没有最佳数量的分区可能会导致内部力量计算中的重大错误。在这里开发的解析方程式可以作为一个初步工具在拱中找到内部力量。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

E 圆形壳分析表

下列图表从 (Whitney et al., 1952). 他们也被授予在 (Portland Cement Association, 1954) (Gibson, 1968) 当然, (Billington, 1965).

原始衍生品 Finsterwalder, 1933.

审阅稿

an ordinary indeterminate structure. As a matter of fact, since in most cases the thickness of the shell is determined by practical considerations (such as sufficient depth for reinforcement), a single investigation is generally sufficient. However, to achieve this economy in time and labor, a systematization of the analytical procedure is necessary. Such a systematization is here attempted, and to expedite the analysis and bring the various load-stress relationships into a coherent group, formulas and tables for the various stresses in a shell are given in this section. Those interested in the development of the formulas from which the tables are computed can find the development of the theory in Appendix II.

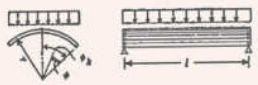
In its broader aspects the analysis of cylindrical shells is strikingly similar to the analysis of ordinary indeterminate structures. In the analysis of an indeterminate structure, it is customary to make it determinate by releasing end restraints, thereby allowing rotation and displacement of the end to occur. Afterward, reactions are applied to bring the boundary back to its original or desired position. The final stresses are the algebraic sum of those found in the determinate state and those induced by the end restraints.

The analysis of a thin shell follows the same procedure. It is first assumed that the surface load is transmitted to the supports solely by direct stresses, generally called "membrane stresses," which is equivalent to assuming the structure to be determinate. In the indeterminate two-dimensional analysis the preliminary step of making the structure determinate leads to displacements that are inconsistent with the prescribed end conditions, but in shell design the preliminary step called "membrane analysis" yields displacements and reactions along the longitudinal edges of the shell that do not comply with the boundary requirements. To satisfy these requirements, line loads must be applied along the longitudinal edges of the shell. In contrast with general surface loading, these line loads create bending as well as direct stresses in the shell. The stresses produced by the line loads must be added to the direct stresses previously evaluated to obtain the final stress pattern. Thus it is evident that the design of thin shells can be divided into two stages: (1) Determine the internal stresses and the edge forces created by the surface loading on the basis of membrane analysis; and (2), determine the stresses due to the edge line loading. It is in this order that the analysis of cylindrical shells will be presented.

Notation.—The letter symbols in this manual are defined where they first appear, in the text or by diagram, and are assembled alphabetically for reference, in Appendix III.

Step 1. Surface Loads.—The membrane analysis of a cylindrical shell subjected to surface loads involves only successive differentiations and integrations of the radial and tangential components of the surface loads. Since this is always possible for continuous loads, the stresses created by any type of continuous load distribution expressible as a function of the longitudinal and radial coordinates, x and ϕ, can be determined. For most conditions, the surface loads on the shell will be uniform in the longitudinal direction of the shell. The force and displacement components produced by two such loads

TABLE 1A.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS UNIFORMLY DISTRIBUTED ALONG THE LENGTH OF THE BARREL

	(a) Uniform Transverse Load[a]	(b) Dead Weight Load[a]
		
	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (1) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (2) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (3) Vertical Displacement[b] Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{r^2 t E} \times \left\{2\left(\frac{r}{l}\right)^4 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\right\} \times$ Col. (4) Horizontal Displacement[c] Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{r^2 t E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (5) $+ \left[2\left(\frac{r}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{r}{l} + 6\left(\frac{r}{l}\right)^4\left(\frac{x}{l} - (x/l)^2\right)\right] \times$ Col. (6)$\right\}$	Longitudinal Force T_x— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right) \times$ Col. (7) Shearing Force S— $p_0 r \left(\frac{l}{r}\right) \times \left(1-\frac{2x}{l}\right) \times$ Col. (8) Transverse Force T_ϕ— $p_0 r \times$ Col. (9) Vertical Displacement Δ_V— $p_0 r \frac{l^4}{r^2 t E}\left\{-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{r}{l}\right)^4\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] + \left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (10)$\right\}$ Horizontal Displacement Δ_H— $p_0 r \frac{l^4}{r^2 t E}\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times$ Col. (11)

$\phi_0 - \phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_V	Δ_H
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−1.500	0	−1.0000	0.5000	0	0	−1.0000	0	−1.0000	1.0000	0
5	−1.477	−0.1302	−0.9924	0.4944	0.0872	−0.0003	−0.9960	−0.0871	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−1.409	−0.2565	−0.9698	0.4775	0.1736	−0.0025	−0.9853	−0.1736	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−1.295	−0.3749	−0.9330	0.4506	0.2588	−0.0072	−0.9749	−0.2589	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−1.150	−0.4820	−0.8830	0.4148	0.3420	−0.0200	−0.9399	−0.3421	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.965	−0.5748	−0.8214	0.3722	0.4226	−0.0377	−0.8998	−0.4225	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.750	−0.6503	−0.7500	0.3447	0.5000	−0.0625	−0.8658	−0.5000	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.513	−0.7048	−0.6710	0.2748	0.5736	−0.0944	−0.8194	−0.5737	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.261	−0.7385	−0.5868	0.2247	0.6428	−0.1328	−0.7661	−0.6428	−0.7660	0.5868	0.4924
45	0	−0.7500	−0.5000	0.1767	0.7071	−0.1768	−0.7071	−0.7071	−0.7071	0.5000	0.5000
50	0.261	−0.7385	−0.4132	0.1328	0.7680	−0.2247	−0.6427	−0.7661	−0.6428	0.4132	0.4924
55	0.513	−0.7048	−0.3290	0.0944	0.8191	−0.2749	−0.5736	−0.8192	−0.5738	0.3290	0.4698
60	0.750	−0.6503	−0.2500	0.0625	0.8660	−0.3248	−0.5000	−0.8660	−0.5000	0.2500	0.4330
65	0.965	−0.5746	−0.1786	0.0377	0.9063	−0.3722	−0.4225	−0.9062	−0.4226	0.1786	0.3830
70	1.150	−0.4820	−0.1170	0.0199	0.9397	−0.4149	−0.3420	−0.9397	−0.3420	0.1170	0.3214
75	1.295	−0.3749	−0.0689	0.0086	0.9659	−0.4506	−0.2588	−0.9659	−0.2588	0.0689	0.2500
80	1.409	−0.2565	−0.0301	0.0028	0.9848	−0.4770	−0.1732	−0.9847	−0.1736	0.0301	0.1710
85	1.477	−0.1302	−0.0076	0.0004	0.9962	−0.4943	−0.0873	−0.9962	−0.0872	0.0076	0.0868
90	1.500	0	0	0	1.0000	−0.5000	0	−1.0000	0	0	0

[a] The use of column numbers in the formulas refers to the appropriate coefficient in the column cited
[b] Downward direction is positive. [c] Inward direction is positive.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

	(a) Uniform Transverse Load	(b) Dead Weight Load
		
Longitudinal Force T_x—	$p_0 r\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi z}{l}$	$p_0 r\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right]\sin\frac{\pi z}{l}$
Shearing Force S—	$p_0 r\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi z}{l}$	$p_0 r\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right]\cos\frac{\pi z}{l}$
Transverse Force T_ϕ—	$p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi z}{l}$	$p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{\pi z}{l}$
Vertical Displacement Δ_Y—	$p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right]\sin\frac{\pi z}{l}$	$p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^2+\frac{2}{\pi^4} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (10)}\right]\sin\frac{\pi z}{l}$
Horizontal Displacement Δ_H—	$+p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\}\times\sin\frac{\pi z}{l}$	$+p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \text{Col. (11)}\right] \times\sin\frac{\pi z}{l}$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0	
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9902	0.9924	0.0868	
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710	
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500	
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214	
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830	
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330	
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698	
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924	
45	0	−0.4775	−0.5000	0.04355	0.7071	−0.04355	−0.1433	−0.4502	−0.7071	0.5000	0.5000	
50	0.0528	−0.4702	−0.4132	0.03272	0.7660	−0.05537	−0.1302	−0.4877	−0.6428	0.4132	0.4924	
55	0.1040	−0.4487	−0.3290	0.02325	0.8191	−0.06771	−0.1162	−0.5215	−0.5736	0.3290	0.4698	
60	0.1520	−0.4140	−0.2500	0.01539	0.8660	−0.08001	−0.1013	−0.5513	−0.5000	0.2500	0.4330	
65	0.1954	−0.3658	−0.1786	0.00930	0.9063	−0.09170	−0.0856	−0.5769	−0.4226	0.1786	0.3830	
70	0.2329	−0.3069	−0.1170	0.00490	0.9397	−0.10222	−0.0693	−0.5982	−0.3420	0.1170	0.3214	
75	0.2623	−0.2387	−0.0659	0.00213	0.9659	−0.11102	−0.0534	−0.6149	−0.2588	0.0659	0.2500	
80	0.2856	−0.1633	−0.0301	0.00064	0.9848	−0.11766	−0.0351	−0.6269	−0.1736	0.0301	0.1710	
85	0.2993	−0.0829	−0.0076	0.00009	0.9962	−0.12180	−0.0177	−0.6342	−0.0872	0.0076	0.0868	
90	0.3040	0	0	0	1.0000	−0.12319	0	−0.6368	0	0	0	

TABLE 1C.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING SINUSOIDALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM AT THE MIDDLE

	(a) Uniform Transverse Load	(b) Dead Weight Load
		
Longitudinal Force T_x—	$p_0 r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)} \times \sin\frac{3\pi z}{l}$	$p_0 r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)} \times \sin\frac{3\pi z}{l}$
Shearing Force S—	$p_0 r\frac{l}{r} \times \text{Col. (2)} \times \cos\frac{3\pi z}{l}$	$p_0 r\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)} \times \cos\frac{3\pi z}{l}$
Transverse Force T_ϕ—	$p_0 r \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{3\pi z}{l}$	$p_0 r \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{3\pi z}{l}$
Vertical Displacement Δ_Y—	$p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right]\text{Col. (4)} \times\sin\frac{3\pi z}{l}$	$p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left[\frac{2}{81(\pi^2)^2}+\frac{4}{9}\left(\frac{r}{\pi l}\right)^2+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right]\sin\frac{3\pi z}{l}$
Horizontal Displacement Δ_H—	$p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{9}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4 + \frac{81}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right]\text{Col. (6)}\right\}\sin\frac{3\pi z}{l}$	$p_0 r\frac{l^4}{\pi^4 l E}\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)} \times\sin\frac{3\pi z}{l}$

$\phi_1-\phi$	T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H		T_x	S	T_ϕ	Δ_Y	Δ_H	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	
0	−0.0338	0	−1.0000	0.00152	0	0	−0.0225	0	−1.0000	1.0000	0	
5	−0.0332	−0.0276	−0.9924	0.00150	0.0872	−0.00000	−0.0224	−0.0185	−0.9902	0.9924	0.0868	
10	−0.0317	−0.0544	−0.9698	00.0145	0.1736	−0.00000	−0.0222	−0.0308	−0.9848	0.9698	0.1710	
15	−0.0291	−0.0796	−0.9330	0.00137	0.2588	−0.00002	−0.0219	−0.0549	−0.9659	0.9330	0.2500	
20	−0.0259	−0.1023	−0.8830	0.00126	0.3420	−0.00006	−0.0212	−0.0726	−0.9397	0.8830	0.3214	
25	−0.0217	−0.1219	−0.8214	0.00113	0.4226	−0.00011	−0.0204	−0.0867	−0.9063	0.8214	0.3830	
30	−0.0169	−0.1383	−0.7500	0.00099	0.5000	−0.00019	−0.0195	−0.1061	−0.8000	0.7500	0.4330	
35	−0.0116	−0.1498	−0.6710	0.00081	0.5736	−0.00029	−0.0181	−0.1217	−0.8191	0.6710	0.4698	
40	−0.0059	−0.1567	−0.5868	0.00068	0.6428	−0.00040	−0.0172	−0.1384	−0.7660	0.5868	0.4924	
45	0	−0.1592	−0.5000	0.00054	0.7071	−0.00054	−0.0159	−0.1501	−0.7071	0.5000	0.5000	
50	0.0059	−0.1567	−0.4132	0.00040	0.7660	−0.00068	−0.0145	−0.1625	−0.6428	0.4132	0.4924	
55	0.0116	−0.1496	−0.3290	0.00029	0.8191	−0.00081	−0.0129	−0.1738	−0.5736	0.3290	0.4698	
60	0.0169	−0.1380	−0.2500	0.00019	0.8660	−0.00099	−0.0113	−0.1818	−0.5000	0.2500	0.4330	
65	0.0217	−0.1219	−0.1786	0.00011	0.9063	−0.00113	−0.0095	−0.1923	−0.4226	0.1786	0.3830	
70	0.0259	−0.1023	−0.1170	0.00006	0.9397	−0.00126	−0.0077	−0.1994	−0.3420	0.1170	0.3214	
75	0.0291	−0.0796	−0.0689	0.00002	0.9659	−0.00137	−0.0058	−0.2050	−0.2588	0.0669	0.2500	
80	0.0317	−0.0544	−0.0301	0.00000	0.9848	−0.00145	−0.0040	−0.2090	−0.1736	0.0301	0.1710	
85	0.0332	−0.0276	−0.0076	0.00000	0.9962	−0.00150	−0.0019	−0.2114	−0.0872	0.0076	0.0868	
90	0.0338	0	0	0	1.0000	−0.00152	0	−0.2122	0	0	0	

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

(the first varies uniformly in the transverse direction and the second varies as the weight of the shell) are presented in Table 1A, in which the internal forces and displacements in the system of cylindrical coordinates, shown in Fig. 13, are:

T_ϕ = the direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile;
T_x = the direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile;
S = the tangential shearing force, considered positive when it creates tension in the direction of increasing values of x and ϕ;
Δ_V = the vertical displacement, considered positive when it is in the downward direction;
Δ_H = the horizontal displacement, considered positive when it is directed inward;

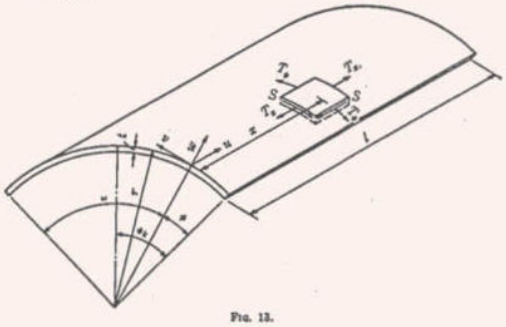


FIG. 13.

l = length of shell between supports;
r = centerline radius of shell;
t = thickness of shell;
x = longitudinal distance measured from the left support;
ϕ = angle measured from the right edge of shell;
ϕ_k = angle subtended by the edge of shell measured from the centerline axis;
E = modulus of elasticity of concrete;
p_x = intensity of uniform load on unit area; and,
p_d = intensity of dead load on unit area.

Although it is possible to obtain the internal forces produced by any surface loads, because of mathematical difficulties, the corrective line loads applied along the longitudinal edges are expressible only as functions of $\sin \frac{n\pi x}{l}$ or $\cos \frac{n\pi x}{l}$ in which n is any integer. To avoid confusion in the application of

the line loads under Step 2, it is expedient to regard the surface load on the shell as the sum of partial loads, the intensity of which is defined as $A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$.

By a suitable selection of the values of A_n which will vary with each n, it is possible to approximate with any degree of accuracy any variation of loading. This representation of a known function by a series of sines or cosines is called "Fourier Analysis" and the series is called "Fourier Series." The Fourier series for a uniform load equals:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{l} \ldots\right] \quad \ldots\ldots\ldots (1a)$$

or:

$$p_x = \frac{4p}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1b)$$

The partial loads represented by the first three terms are shown in Figs. 14(a), 14(b) and 14(c). The sum of the first and second term is shown in Fig. 14(d), and the sum of the first three terms is represented in Fig. 14(e). The sum of all the terms of the series gives the straight line $p = 1$. In general, only the first few terms of this series are needed to achieve sufficient accuracy. Hence, the internal forces and displacements produced by the sinusoidal loading represented by the first two terms are given in Tables 1B and 1C.

For the purpose of indicating the accuracy obtained by using only the first two partial loads, a comparison between values obtained by Table 1A and the sum of the values of Tables 1B and 1C is made. The internal forces at $\phi_k - \phi = 30°$ and at $x = \frac{l}{2}$ for T_x and T_ϕ and at $x = 0$ for S, in a shell subject to a uniform load, computed by Table 1A, are

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2(-0.750 \times \tfrac{1}{4}) = -0.1875\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots (2a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)(-0.650 \times 1) = -0.650\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \quad \ldots\ldots (2b)$$

and,

$$T_\phi = p_x r\,(-0.750 \times 1) = -0.750\, p_x r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2c)$$

Using the coefficients from Tables 1B and 1C and applying the load constants indicated by the Fourier series:

$$T_x = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2\frac{4}{\pi}\left[-0.1520 \times 1 - \frac{1 \times (-)\,0.0169}{3}\right]$$

$$= -0.186\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3a)$$

$$S = p_x r\left(\frac{l}{r}\right)\frac{4}{\pi}\left[-0.414 + \frac{1 \times (-)\,0.1380}{3}\right] = -0.586\, p_x r\left(\frac{l}{r}\right) \ldots (3b)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

and,

$$T_\phi = p_u r \frac{4}{\pi}\left[-0.750 - \frac{1 \times (-) 0.750}{3}\right] = -0.635\, p_u r \ldots\ldots (3c)$$

Comparing the values obtained by the partial loads with those obtained by the uniform load, it is seen that good agreement is obtained for the longitudinal force T_x. The shear and transverse force components obtained by the sum of the first two sinusoidal loads are approximately 10% and 15% too small. In designing shells by partial loads, this discrepancy should be borne in mind and adjustments should be made to the final values.

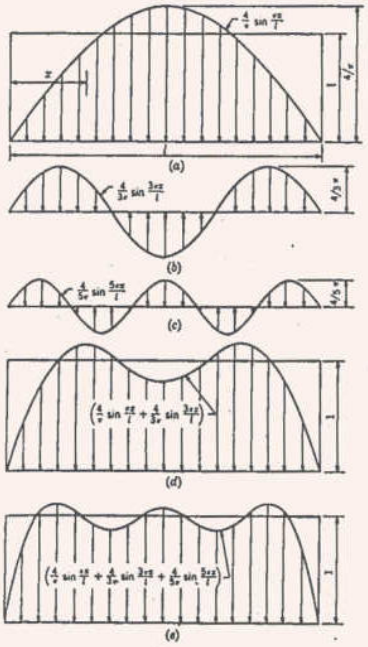


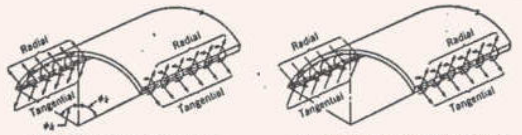
FIG. 14.

It is evident from Tables 1A, 1B and 1C that, for shells whose subtended angle is less than 180°, the membrane analysis gives transverse and shearing forces acting on and along the longitudinal edge. If the necessary marginal forces can be provided by the edge reactions and at the same time, the displacement of the supporting members correspond to the calculated displacements of the shell, the membrane analysis suffices; but to fulfill these requirements, deep edge members are often needed. In most cases these are neither possible nor desirable. On the contrary, in current practice the longitudinal edge beams are frequently omitted or reduced to a minimum size to exploit the full strength of the concrete shell. This reduction in the size of the edge beams means that the boundary conditions required by the membrane analysis are unfulfilled—in other words that the statical requirements of the

shell are unsatisfied. To satisfy the requirements of statics, line loads must be applied.

Step 2—Line Loads Along the Longitudinal Edges.—Along the longitudinal edges four separate line loads, a radial shearing force, a longitudinal shearing force, a tangential transverse force and a moment, can be applied along each edge as shown in Fig. 15. The line loads along one edge can be different from those acting along the other edge. With these eight line loads, four on each edge, any edge requirement can be satisfied.

For a single barrel with no edge member, subject to a symmetrical load, the corrective line loads will consist simply of a tangential transverse force and a longitudinal shearing force equal to but opposite in direction to T_ϕ and S given by the membrane analysis. When the edge conditions are complicated by the presence of longitudinal edge beams or adjoining shells, in addition to the two afore-mentioned loads, a radial shearing force and a moment normal to the edge must be applied. The relative magnitude of each force will depend on the strains and rotation produced by each load. The determination of the correct proportions of each is illustrated in design examples. However, briefly,



(a) SYMMETRICAL LINE LOADS (b) ANTISYMMETRICAL LINE LOADS

FIG. 15.

the procedure consists of establishing a number of simultaneous equations fulfilling known edge requirements.

The effect of edge line loads on the shell is basically different from the effect of surface loads. As previously mentioned, line loads produce bending as well as direct forces. The various forces produced by line loads are illustrated in Fig. 16 with the additional force components defined as:

- N_ϕ = the radial shearing force on the radial face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative ϕ-direction;
- N_x = the radial shearing force on the longitudinal face, considered positive when it acts outwardly on the face facing the negative x-axis;
- M_ϕ = bending moment on the radial face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
- M_x = bending moment on the transverse face, considered positive when it produces tension in the inner fibers;
- M_t = torsional moment, considered positive when it produces tension in the inner fibers in the direction of increasing values of x and ϕ;
- u = the displacement of the shell in the longitudinal direction, considered positive in the direction of increasing values of x;

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

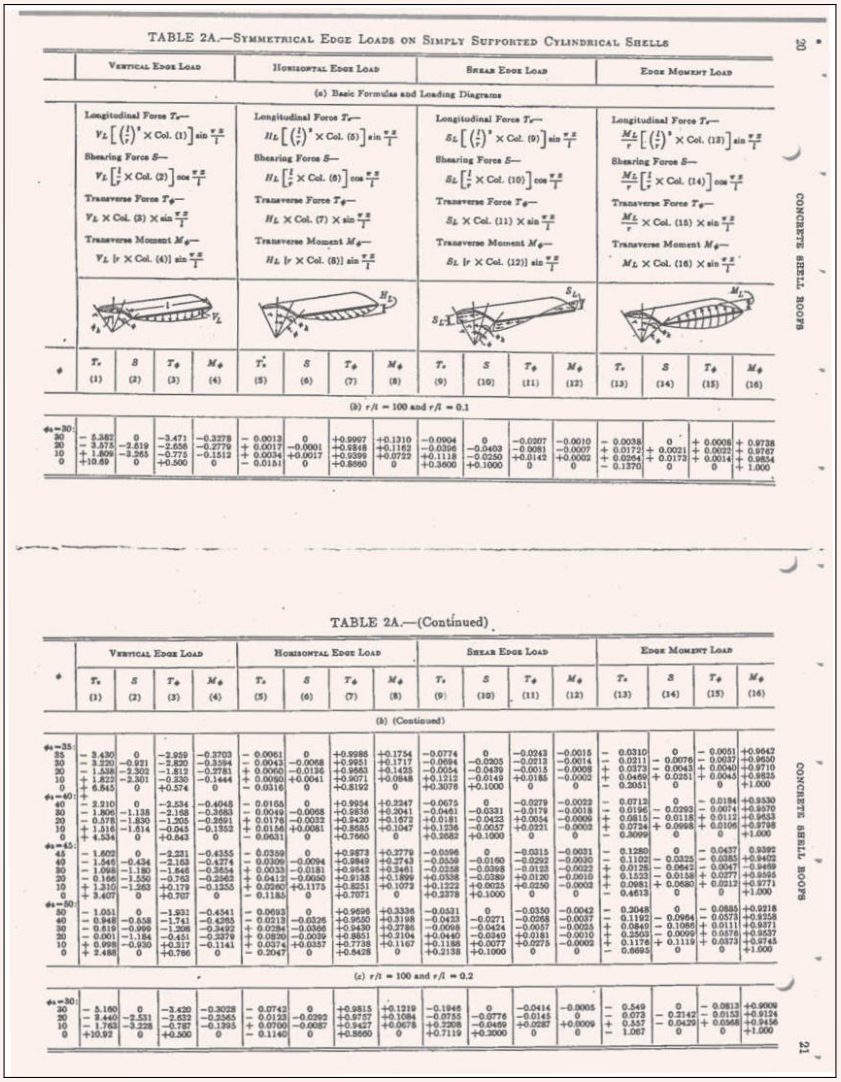


TABLE 2A.—Symmetrical Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

(a) Basic Formulas and Loading Diagrams

Vertical Edge Load	Horizontal Edge Load	Shear Edge Load	Edge Moment Load
Longitudinal Force T_x— $V_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $H_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (5)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (9)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $\frac{M_L}{r}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^3 \times \text{Col. (13)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$
Shearing Force S— $V_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $H_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (6)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $S_L\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (10)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$	Shearing Force S— $\frac{M_L}{r}\left[\frac{l}{r} \times \text{Col. (14)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$
Transverse Force T_ϕ— $V_L \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $H_L \times \text{Col. (7)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $S_L \times \text{Col. (11)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Force T_ϕ— $\frac{M_L}{r} \times \text{Col. (15)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$
Transverse Moment M_ϕ— $V_L\,[r \times \text{Col. (4)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $H_L\,[r \times \text{Col. (8)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $S_L\,[r \times \text{Col. (12)}]\sin\frac{\pi x}{l}$	Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times \text{Col. (16)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$

ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(b) $r/l = 100$ and $r/l = 0.1$																
ϕ_k=30:																
30	− 5.382	0	−3.471	−0.3278	− 0.0013	0	+0.9997	+0.1310	−0.0904	0	−0.0207	−0.0010	− 0.0038	0	+ 0.0008	+ 0.9738
20	− 3.572	−2.619	−2.656	−0.2779	+ 0.0017	−0.0001	+0.9948	+0.1162	−0.0396	−0.2403	−0.0081	−0.0007	+ 0.0172	+ 0.0021	+ 0.0022	+ 0.9787
10	+ 1.809	−3.265	−0.773	−0.1512	+ 0.0034	+0.0017	+0.9399	+0.0722	+0.1118	−0.0250	+0.0142	+0.0002	+ 0.0264	+ 0.0173	+ 0.0014	+ 0.9854
0	+10.89	0	+0.500	0	− 0.0181	0	+0.8860	0	+0.3600	+0.1000	0	0	− 0.1370	0	0	+ 1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(b) (Continued)																
ϕ_k=35:																
35	− 3.430	0	−2.959	−0.3703	− 0.0061	0	+0.9986	+0.1754	−0.0774	0	−0.0243	−0.0015	− 0.0310	0	− 0.0051	+0.9642
30	− 3.220	−0.921	−2.820	−0.3394	− 0.0043	−0.0068	+0.9951	+0.1717	−0.0694	−0.0205	−0.0213	−0.0014	− 0.0211	− 0.0076	− 0.0037	+0.9650
20	− 1.538	−2.302	−1.812	−0.2781	+ 0.0060	−0.0136	+0.9853	+0.1425	−0.0554	−0.0439	−0.0115	−0.0008	+ 0.0373	− 0.0043	+ 0.0040	+0.9710
10	+ 1.822	−2.301	−0.330	−0.1444	+ 0.0080	+0.0041	+0.9071	+0.0848	+0.1212	−0.0149	+0.0185	−0.0002	+ 0.0489	+ 0.0251	+ 0.0045	+0.9825
0	+ 6.845	0	+0.574	0	− 0.0316	0	+0.8192	0	+0.3076	+0.1000	0	0	− 0.2051	0	0	+1.000
ϕ_k=40:																
40	− 2.310	0	−2.534	−0.4048	− 0.0155	0	+0.9934	+0.2247	−0.0675	0	−0.0279	−0.0022	− 0.0712	0	− 0.0184	+0.9530
30	− 1.806	−1.138	−2.168	−0.3583	− 0.0049	−0.0068	+0.9836	+0.2041	−0.0461	−0.0331	−0.0179	−0.0018	− 0.0196	− 0.0293	− 0.0074	+0.9570
20	− 0.578	−1.830	−1.205	−0.2891	+ 0.0176	−0.0032	+0.9420	+0.1672	+0.0181	−0.0423	+0.0054	−0.0009	− 0.0815	− 0.0118	− 0.0112	+0.9653
10	+ 1.516	−1.814	−0.045	−0.1552	+ 0.0156	+0.0081	+0.8585	+0.1047	+0.1236	−0.0057	+0.0231	−0.0003	− 0.0724	+ 0.0098	+ 0.0106	+0.9798
0	+ 4.534	0	+0.643	0	− 0.0631	0	+0.7660	0	+0.3682	+0.1000	0	0	− 0.3099	0	0	+1.000
ϕ_k=45:																
45	− 1.602	0	−2.231	−0.4355	− 0.0359	0	+0.9873	+0.2779	−0.0596	0	−0.0315	−0.0031	− 0.1280	0	− 0.0437	0.9392
40	− 1.545	−0.434	−2.163	−0.4274	− 0.0309	−0.0094	+0.9849	+0.2743	−0.0559	−0.0160	−0.0292	−0.0030	− 0.1102	− 0.0325	− 0.0385	+0.9402
30	− 1.098	−1.185	−1.846	−0.3854	+ 0.0033	−0.0181	+0.9643	+0.2461	−0.0258	−0.0398	−0.0123	−0.0022	+ 0.0128	− 0.0642	− 0.0047	−0.9489
20	− 0.166	−1.550	−0.763	−0.2862	+ 0.0412	−0.0050	+0.9138	+0.1899	+0.0338	−0.0389	+0.0120	−0.0010	+ 0.1533	− 0.0158	+ 0.0277	+0.9595
10	+ 1.310	−1.263	+0.179	−0.1355	+ 0.0260	+0.1175	+0.8251	+0.1072	+0.1222	+0.0025	+0.0250	−0.0002	+ 0.0081	+ 0.0580	+ 0.0213	+0.9771
0	+ 3.407	0	+0.707	0	− 0.1185	0	+0.7071	0	+0.3278	+0.1000	0	0	− 0.4613	0	0	+1.000
ϕ_k=50:																
50	− 1.051	0	−1.931	−0.4541	− 0.0693	0	+0.9696	+0.3336	−0.0531	0	−0.0350	−0.0042	− 0.2048	0	− 0.0885	+0.9218
40	− 0.948	−0.658	−1.741	−0.4265	− 0.0213	−0.0326	+0.9550	+0.3198	−0.0423	−0.0271	−0.0268	−0.0037	− 0.1192	− 0.0964	− 0.0573	+0.9258
30	− 0.619	−0.999	−1.208	−0.3492	+ 0.0284	−0.0366	+0.9430	+0.2786	−0.0096	−0.0424	−0.0057	−0.0025	+ 0.0849	− 0.1086	+ 0.0111	+0.9271
20	− 0.001	−1.184	−0.451	−0.2379	+ 0.0830	−0.0039	+0.9051	+0.2104	+0.0460	−0.0340	+0.0181	−0.0010	+ 0.2303	− 0.0099	+ 0.0576	+0.9537
10	+ 0.998	−0.930	+0.217	−0.1141	+ 0.0374	+0.0357	+0.7738	+0.1167	+0.1188	+0.0077	+0.0275	−0.0002	+ 0.1176	+ 0.1119	+ 0.0373	+0.9745
0	+ 2.488	0	+0.786	0	− 0.2047	0	+0.6428	0	+0.2138	+0.1000	0	0	− 0.6695	0	0	+1.000
(c) $r/l = 100$ and $r/l = 0.2$																
ϕ_k=30:																
30	− 5.160	0	−3.420	−0.3028	− 0.0743	0	+0.9815	+0.1219	−0.1946	0	−0.0414	−0.0005	− 0.549	0	− 0.0813	+0.9009
20	− 3.440	−2.531	−2.623	−0.2565	− 0.0123	−0.0292	+0.9757	+0.1084	−0.0755	−0.0776	−0.0145	0	− 0.073	− 0.2142	− 0.0153	+0.9124
10	− 1.763	−3.228	−0.787	−0.1393	+ 0.0700	−0.0687	+0.9427	+0.0678	+0.2208	−0.0489	+0.0287	+0.0009	− 0.357	− 0.0429	+ 0.0588	+0.9456
0	+10.92	0	+0.300	0	− 0.1465	0	+0.8660	0	+0.7119	+0.3000	0	0	− 1.067	0	0	+1.000

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

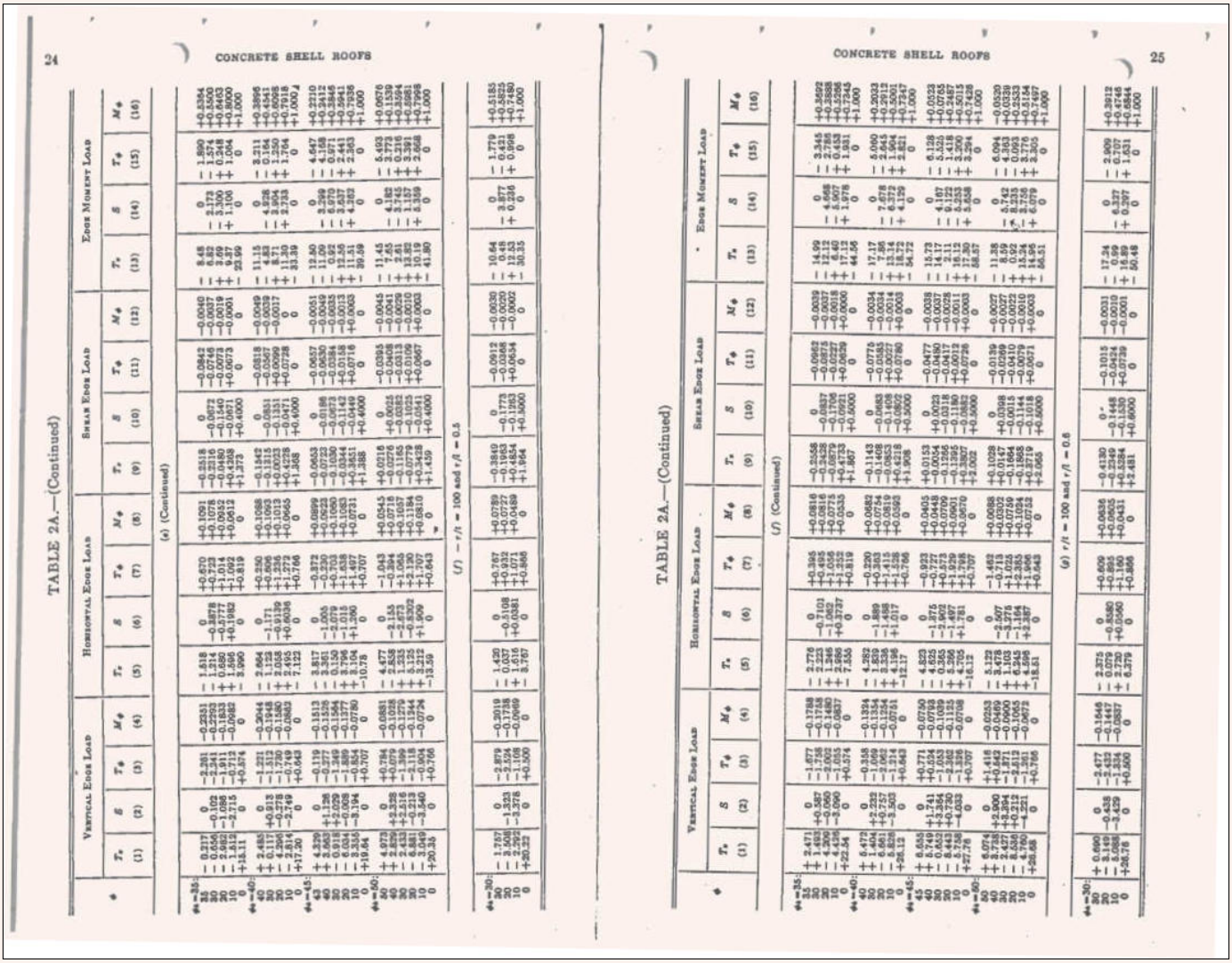
TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(c) (Continued)																
$\phi = 25°$																
35	− 3.087	0	−2.871	−0.3347	− 0.1552	0	+0.9603	+0.1591	−0.1487	0	−0.0458	−0.0024	− 0.912	0	− 0.1914	+0.8637
30	− 2.939	−0.833	−2.744	−0.3248	− 0.1560	−0.0399	+0.9622	+0.1559	−0.1334	−0.0394	−0.0401	−0.0022	+ 0.742	− 0.2343	− 0.1685	+0.8069
20	− 1.629	−2.156	−1.807	−0.2314	+ 0.0581	−0.0634	+0.9849	+0.1301	−0.0108	−0.0845	−0.0018	−0.0012	+ 0.327	− 0.3747	+ 0.0318	+0.8914
10	+ 1.501	−2.296	−0.365	−0.1302	+ 0.1556	+0.0074	+0.9224	+0.0781	+0.2378	−0.0293	+0.0369	−0.0001	+ 0.928	+ 0.0486	+ 0.1212	+0.9562
0	+ 7.434	0	+0.574	0	− 0.2244	0	+0.8192	0	+0.6139	+0.3000	0	0	+ 2.045	0	0	+1.000
$\phi = 40°$																
40	− 1.764	0	−2.398	−0.3556	− 0.3096	0	+0.9087	+0.1962	−0.1273	0	−0.0325	−0.0035	+ 1.421	0	− 0.3885	+0.8156
30	− 1.645	−0.947	−2.105	−0.3339	− 0.1336	−0.1389	+0.9351	+0.1845	−0.0880	−0.0626	−0.0335	−0.0029	+ 0.631	− 0.6481	− 0.3007	+0.8306
20	− 0.963	−1.697	−1.351	−0.2374	+ 0.2243	−0.1133	+0.9680	+0.1487	+0.0323	−0.0817	+0.0109	−0.0013	+ 1.015	− 0.5396	+ 0.1574	+0.8707
10	+ 1.111	−1.763	−0.109	−0.1188	+ 0.2753	+0.0557	+0.9161	+0.0870	+0.2408	−0.0111	+0.0434	−0.0007	+ 1.316	+ 0.2523	+ 0.2259	+0.9271
0	+ 6.856	0	+0.643	0	− 0.7210	0	+0.7660	0	+0.6460	+0.2000	0	0	+ 3.453	0	0	+1.000
$\phi = 45°$																
45	− 0.775	0	−1.934	−0.3619	− 0.5679	0	+0.7941	+0.2293	−0.1067	0	−0.0377	−0.0050	+ 2.074	0	− 0.7385	+0.7309
40	− 0.820	−0.217	−1.897	−0.3556	− 0.4967	−0.1493	+0.8118	+0.2269	−0.0988	−0.0287	−0.0535	−0.0048	+ 1.828	− 0.5460	− 0.6582	+0.7358
30	− 1.062	−0.731	−1.584	−0.3068	− 0.2210	−0.2078	+0.9229	+0.2071	−0.0506	−0.0795	−0.0228	−0.0034	+ 0.116	− 1.138	− 0.1410	+0.7920
20	− 0.934	−1.217	−0.910	−0.2175	+ 0.5381	−0.1552	+1.008	+0.1641	+0.0570	−0.0737	+0.0224	−0.0014	+ 1.958	− 0.5987	+ 0.3956	+0.8510
10	+ 0.700	−1.478	+0.039	−0.1073	+ 0.4245	+0.1611	+0.9154	+0.0948	+0.2353	+0.3028	+0.0482	0	+ 1.641	+ 0.2811	+ 0.3778	+0.9196
0	+ 5.344	0	+0.707	0	− 1.392	0	+0.7071	0	+0.4995	+0.3000	0	0	+ 5.299	0	0	+1.000
$\phi = 50°$																
50	+ 0.052	0	−1.437	−0.3493	− 0.9469	0	+0.5813	+0.2514	−0.0848	0	−0.0601	−0.0065	+ 2.814	0	− 1.245	+0.6613
40	− 0.291	−0.028	−1.413	−0.3315	− 0.8427	−0.4585	+0.7040	+0.2452	−0.0714	−0.0439	−0.0468	−0.0056	+ 1.762	− 1.381	− 0.8336	+0.6869
30	− 1.016	−0.383	−1.245	−0.2788	+ 0.2885	−0.5526	+0.9656	+0.2238	−0.0258	−0.0723	−0.0113	−0.0035	+ 0.797	− 1.690	+ 0.0839	+0.7533
20	− 1.244	−1.059	−0.745	−0.1953	+ 0.1015	−0.1620	+1.112	+0.1794	+0.0656	−0.0959	+0.0312	−0.0013	+ 3.038	− 0.538	+ 0.7607	+0.8338
10	+ 0.381	−1.427	+0.110	−0.0943	+ 0.5824	+0.3610	+0.9471	+0.1015	+0.2257	+0.0125	+0.0513	0	+ 1.811	+ 1.083	+ 0.3718	+0.9154
0	+ 5.870	0	+0.766	0	− 2.398	0	+0.6428	0	+0.4748	+0.3000	0	0	+ 7.473	0	0	+1.000
(d) $r/t = 100$ and $r/t = 0.3$																
$\phi = 30°$																
30	− 4.709	0	−3.362	−0.2789	− 0.2662	0	+0.9571	+0.1099	−0.2618	0	−0.0596	−0.0024	+ 2.101	0	− 0.3444	+0.7859
20	− 3.668	−2.381	−2.632	−0.2347	− 0.0094	−0.0961	+0.9753	+0.0982	−0.1182	−0.1174	−0.0231	−0.0016	+ 0.108	− 0.7689	− 0.0803	+0.8119
10	+ 1.053	−3.290	−0.837	−0.1275	+ 0.2942	+0.0035	+0.9639	+0.0622	+0.3251	−0.0750	+0.0421	−0.0003	+ 2.372	+ 0.0141	+ 0.1945	+0.8845
0	+12.43	0	+0.500	0	− 0.6606	0	+0.8660	0	+1.102	+0.3000	0	0	+ 5.456	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load				Horizontal Edge Load				Shear Edge Load				Edge Moment Load			
	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(d) (Continued)																
$\phi = 35°$																
35	− 2.156	0	−2.682	−0.2903	− 0.8039	0	+0.8706	+0.1362	−0.2140	0	−0.0585	−0.0036	+ 3.493	0	− 0.7613	+0.7084
30	− 2.203	−0.595	−2.501	−0.2821	− 0.4823	−0.1544	+0.8932	+0.1326	−0.1937	−0.0568	−0.0603	−0.0033	+ 2.808	− 0.8945	− 0.5319	+0.7161
20	− 2.151	−1.817	−1.950	−0.2301	+ 0.2958	−0.2300	+0.9859	+0.1137	−0.0244	−0.1248	−0.0046	−0.0018	+ 1.508	− 1.358	+ 0.1098	+0.7729
10	+ 0.513	−2.456	−0.652	−0.1148	+ 0.8242	+0.0755	+0.9830	+0.0898	+0.3455	−0.0471	+0.0535	−0.0002	+ 3.764	+ 0.4236	+ 0.4372	+0.8589
0	+10.03	0	+0.574	0	− 1.343	0	+0.8192	0	+0.8978	+0.3000	0	0	+ 9.403	0	0	+1.000
$\phi = 40°$																
40	− 0.218	0	−1.977	−0.2853	− 1.176	0	+0.8733	+0.1553	−0.1668	0	−0.0736	−0.0048	+ 5.193	0	− 1.489	+0.6071
30	− 1.030	−0.275	−1.822	−0.2631	− 0.4855	−0.5149	+0.8708	+0.1488	−0.1238	−0.0637	−0.0483	−0.0039	+ 2.223	− 2.288	− 0.7475	+0.6444
20	− 2.210	−1.303	−1.430	−0.1982	+ 0.9141	−0.3958	+1.059	+0.1252	+0.0263	−0.1164	+0.0125	−0.0018	+ 3.993	− 1.809	+ 0.5718	+0.7382
10	− 0.295	−3.141	−0.338	−0.1018	+ 1.072	+0.2676	+1.040	+0.0762	+0.3397	−0.0252	+0.0611	−0.0001	+ 5.004	+ 1.180	+ 0.7966	+0.8572
0	+10.01	0	+0.643	0	− 3.068	0	+0.7660	0	+0.8934	+0.3000	0	0	+ 14.38	0	0	+1.000
$\phi = 45°$																
45	+ 1.400	0	−1.178	−0.2565	− 1.970	0	+0.3055	+0.1591	−0.1142	0	+0.0719	−0.0059	+ 6.844	0	− 2.463	+0.4746
40	+ 1.083	+0.334	−1.224	−0.2537	− 1.728	−0.5178	+0.3766	+0.1589	−0.1112	−0.0310	−0.0674	−0.0056	+ 6.032	− 1.802	− 2.202	+0.4871
30	− 1.040	+0.432	−1.454	−0.2296	− 0.0472	−1.061	+0.8585	+0.1550	−0.0776	−0.0851	−0.0328	−0.0040	+ 0.316	− 3.743	− 0.4779	+0.5768
20	− 3.110	−0.788	−1.396	−0.1743	+ 1.941	−0.5051	+1.279	+0.1338	+0.0382	−0.1013	+0.0241	−0.0016	+ 6.770	− 1.867	+ 1.313	+0.7124
10	− 0.946	−2.214	−0.330	−0.0899	+ 1.313	+0.6328	+1.158	+0.0821	+0.3209	−0.0128	+0.0645	−0.0001	+ 5.696	+ 2.230	+ 1.229	+0.8510
0	+11.24	0	+0.707	0	− 5.257	0	+0.7071	0	+0.8743	+0.3000	0	0	+ 19.61	0	0	+1.000
$\phi = 50°$																
50	+ 2.805	0	−0.326	−0.2300	− 2.821	0	−0.2407	+0.1409	−0.0565	0	−0.0511	−0.0063	+ 7.871	0	− 3.553	+0.3153
40	+ 1.276	+1.180	−0.678	−0.2032	− 1.744	−1.346	+0.1577	+0.1474	−0.0651	−0.0337	−0.0514	−0.0056	+ 4.994	− 3.782	− 2.394	+0.3734
30	− 1.837	+1.062	−1.342	−0.1928	+ 0.8732	−1.624	+1.033	+0.1561	−0.0643	−0.0700	−0.0308	−0.0036	+ 2.207	− 4.666	+ 0.2204	+0.5237
20	− 4.099	−0.890	−1.432	−0.1527	+ 3.129	−0.6486	+1.523	+0.1422	+0.0214	−0.0879	+0.0276	−0.0013	+ 8.917	− 1.422	+ 2.171	+0.5995
10	− 1.765	−3.497	−0.379	−0.0801	+ 1.795	+1.155	+1.315	+0.0853	+0.3203	−0.0113	+0.0639	−0.0002	+ 5.588	+ 3.217	+ 1.625	+0.8508
0	+12.66	0	+0.766	0	− 7.773	0	+0.6428	0	+0.8992	+0.3000	0	0	− 23.76	0	0	+1.000
(e) $r/t = 100$ and $r/t = 0.4$																
$\phi = 30°$																
30	− 3.508	0	−3.175	−0.2404	− 0.736	0	+0.881	+0.0947	−0.3318	0	−0.0772	−0.0028	+ 5.33	0	− 0.879	+0.6558
20	− 3.500	−1.942	−2.562	−0.2048	+ 0.038	−0.2682	+0.958	+0.0856	−0.1568	−0.1503	−0.0304	−0.0019	+ 0.14	− 1.920	− 0.196	+0.8995
10	− 0.244	−3.281	−0.947	−0.1121	+ 0.804	−0.0008	+1.008	+0.0344	+0.4153	−0.0998	+0.0545	−0.0003	+ 6.27	+ 0.187	+ 0.502	+0.8169
0	+15.23	0	+0.500	0	− 1.772	0	+0.866	0	+1.508	+0.4000	0	0	− 15.27	0	0	+1.000

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

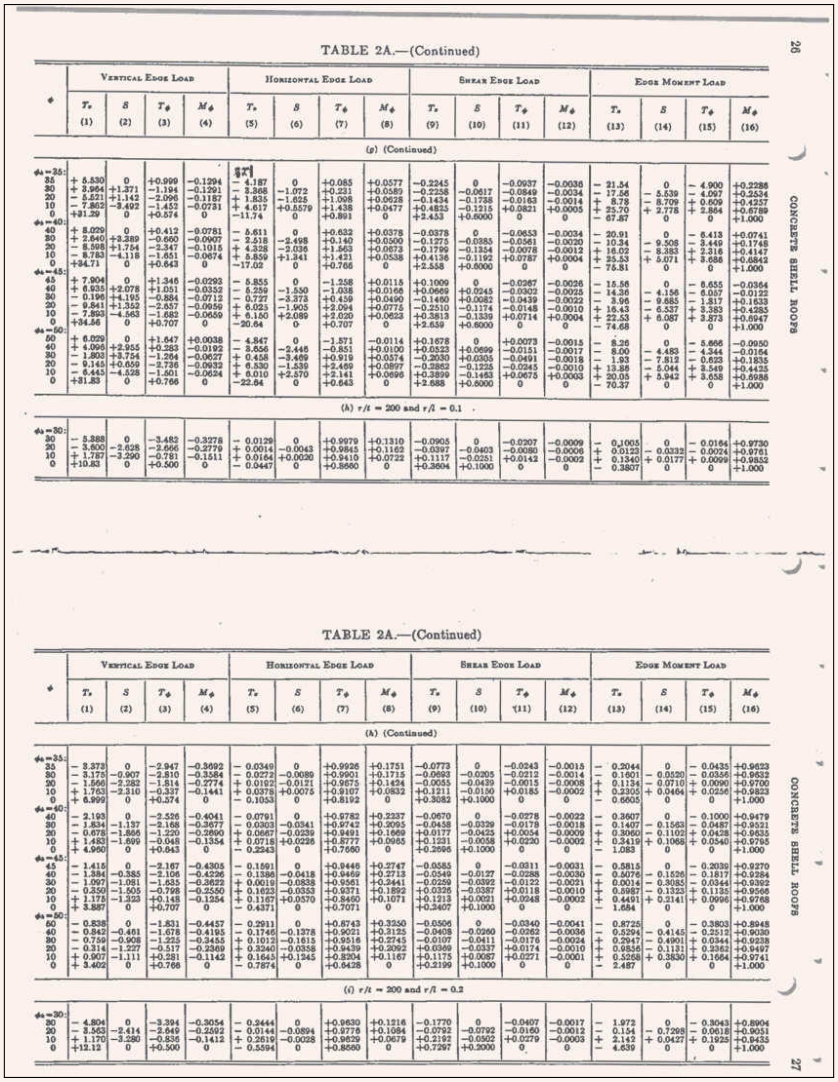


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(g) (Continued)																
$\phi_0 = 25°$:																
35	+ 5.530	0	+0.999	−0.1294	− 4.187	0	+0.085	+0.0577	−0.2245	0	−0.0937	−0.0036	− 21.54	0	− 4.900	+0.2288
30	+ 3.964	+1.371	−1.194	−0.1291	− 3.368	−1.072	+0.231	+0.0589	−0.2238	−0.0617	−0.0849	−0.0034	− 17.56	− 5.539	− 4.097	+0.2534
20	− 5.521	+1.142	−2.096	−0.1167	+ 1.835	−1.625	+1.098	+0.0628	−0.1434	−0.1738	−0.0163	−0.0014	+ 8.78	+ 8.709	+ 0.509	+0.4257
10	− 7.862	−3.492	−1.453	−0.0731	+ 4.617	+0.5579	+1.438	+0.0477	+0.4825	−0.1215	+0.0821	+0.0005	+ 25.70	+ 2.778	+ 2.864	+0.6789
0	+21.29	0	+0.574	0	−11.74	0	+0.891	0	+2.453	+0.6000	0	0	− 67.87	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	+ 8.029	0	+0.412	−0.0781	− 5.611	0	+0.632	+0.0378	−0.0378	0	−0.0653	−0.0034	− 20.91	0	− 6.413	+0.0741
30	+ 2.940	+2.289	−0.660	−0.0907	− 2.518	−2.498	+0.140	+0.0500	−0.1275	−0.0385	−0.0561	−0.0020	− 10.34	− 9.508	− 3.449	+0.1748
20	− 8.598	+1.754	−2.347	−0.1015	+ 4.328	−2.036	+1.563	+0.0573	−0.1799	−0.1354	−0.0078	−0.0012	+ 16.02	+ 8.383	+ 2.316	+0.4147
10	− 8.783	−4.118	−1.851	−0.0674	+ 5.859	+1.341	+1.421	+0.0538	+0.4136	−0.1192	+0.0787	+0.0004	+ 35.53	+ 5.071	+ 3.686	+0.6842
0	+34.71	0	+0.643	0	−17.02	0	+0.766	0	+2.538	+0.6000	0	0	− 75.81	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	+ 7.904	0	+1.345	−0.0293	− 5.855	0	−1.358	+0.0115	+0.1009	0	−0.0267	−0.0026	− 15.56	0	− 8.655	−0.0364
40	+ 6.935	+2.078	+1.051	−0.0352	− 5.259	−1.550	−1.038	+0.0166	+0.0669	+0.0245	−0.0302	−0.0025	− 14.36	− 4.158	− 6.037	−0.0122
30	− 0.196	+4.195	−0.884	−0.0712	− 0.727	−3.373	+0.459	+0.0490	−0.1460	+0.0082	−0.0439	−0.0022	− 3.96	− 9.885	− 1.817	+0.1633
20	− 9.841	+1.352	−2.857	−0.0959	+ 6.023	−1.905	+2.094	+0.0775	−0.2510	−0.1174	−0.0148	−0.0010	+ 16.43	− 6.537	+ 3.383	+0.4285
10	− 7.893	−4.563	−1.682	−0.0659	+ 6.100	+2.089	+2.020	+0.0622	+0.3813	−0.1339	+0.0714	+0.0004	+ 22.53	+ 6.087	+ 3.873	+0.6947
0	+34.56	0	+0.707	0	−20.64	0	+0.707	0	+2.539	+0.6000	0	0	− 74.68	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	+ 6.029	0	+1.647	+0.0038	− 4.847	0	−1.371	−0.0114	+0.1678	0	+0.0073	−0.0015	− 8.26	0	− 5.866	−0.0950
40	+ 4.095	+2.955	+0.283	−0.0192	− 3.256	−2.445	−0.851	+0.0100	+0.0523	+0.0699	−0.0151	−0.0017	− 8.00	− 4.483	− 4.344	−0.0154
30	− 1.803	+3.754	−1.264	−0.0527	+ 0.458	−3.409	+0.919	+0.0574	−0.2030	+0.0305	−0.0491	−0.0018	− 1.93	− 7.812	− 0.623	+0.1835
20	− 9.143	+0.659	−2.738	−0.0933	+ 5.530	−1.539	+2.469	+0.0897	−0.2862	−0.1225	−0.0245	−0.0010	+ 13.86	+ 5.044	+ 3.549	+0.4425
10	− 6.445	−4.528	−1.501	−0.0624	+ 8.010	+2.570	+2.141	+0.0696	+0.3899	−0.1453	+0.0675	+0.0003	+ 20.05	+ 5.942	+ 3.658	+0.6686
0	+31.83	0	+0.766	0	−22.84	0	+0.643	0	+2.688	+0.6000	0	0	− 70.37	0	0	+1.000
(h) $r/t = 200$ and $r/l = 0.1$																
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 5.388	0	−3.483	−0.3278	− 0.0129	0	+0.9979	+0.1310	−0.0905	0	−0.0207	−0.0009	− 0.1005	0	− 0.0164	+0.9730
20	− 3.600	−2.628	−2.666	−0.2779	+ 0.0014	−0.0043	+0.9845	+0.1163	−0.0397	−0.0403	−0.0080	−0.0006	+ 0.0123	− 0.0339	+ 0.0024	+0.9781
10	+ 1.787	−3.290	−0.781	−0.1511	+ 0.0164	+0.0030	+0.9410	+0.0722	+0.1117	−0.0251	+0.0142	+0.0002	+ 0.1340	+ 0.0177	+ 0.0099	+0.9888
0	+10.83	0	+0.500	0	− 0.0447	0	+0.8580	0	+0.3604	+0.1000	0	0	− 0.3807	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(h) (Continued)																
$\phi_0 = 35°$:																
35	− 3.373	0	−2.947	−0.3692	− 0.0349	0	+0.9926	+0.1751	−0.0773	0	−0.0243	−0.0015	− 0.2044	0	− 0.0435	+0.9623
30	− 3.178	−0.907	−2.810	−0.3584	− 0.0272	−0.0089	+0.9901	+0.1715	−0.0693	−0.0205	−0.0212	−0.0014	− 0.1601	− 0.0520	− 0.0356	+0.9632
20	− 1.566	−2.382	−1.814	−0.2774	+ 0.0122	−0.0121	+0.9875	+0.1454	−0.0055	−0.0439	−0.0015	−0.0008	+ 0.1134	+ 0.0710	+ 0.0090	+0.9700
10	+ 1.763	−3.310	−0.337	−0.1441	+ 0.0378	+0.0075	+0.9107	+0.0832	+0.1211	−0.0150	+0.0185	+0.0002	+ 0.2305	+ 0.0464	+ 0.0256	+0.9823
0	+ 6.999	0	+0.574	0	− 0.1053	0	+0.8192	0	+0.3082	+0.1000	0	0	− 0.6605	0	0	+1.000
$\phi_0 = 40°$:																
40	− 3.193	0	−2.526	−0.4041	− 0.0791	0	+0.9782	+0.2337	−0.0670	0	−0.0278	−0.0022	+ 0.3607	0	− 0.1000	+0.9479
30	− 1.834	−1.137	−2.168	−0.3677	− 0.0303	−0.0341	+0.9742	+0.2093	−0.0458	−0.0329	−0.0178	−0.0018	+ 0.1407	− 0.1563	− 0.0487	+0.9531
20	− 0.678	−1.866	−1.220	−0.2890	+ 0.0667	−0.0239	+0.9491	+0.1669	+0.0177	−0.0425	+0.0054	−0.0009	+ 0.3060	− 0.1102	+ 0.0428	+0.9635
10	+ 1.483	−1.899	−0.048	−0.1354	+ 0.0718	+0.0226	+0.8777	+0.0955	+0.1231	−0.0058	+0.0230	−0.0002	+ 0.3419	+ 0.1068	+ 0.0540	+0.9795
0	+ 4.960	0	+0.643	0	− 0.2343	0	+0.7660	0	+0.2695	+0.1000	0	0	− 1.083	0	0	+1.000
$\phi_0 = 45°$:																
45	− 1.415	0	−2.167	−0.4305	− 0.1591	0	+0.9446	+0.2747	−0.0585	0	−0.0311	−0.0031	+ 0.5815	0	− 0.2039	+0.9270
40	− 1.384	−0.385	−2.106	−0.4226	− 0.1586	−0.0418	+0.9469	+0.2713	−0.0549	−0.0127	−0.0288	−0.0030	+ 0.5076	− 0.1525	− 0.1817	+0.9284
30	− 1.097	−1.081	−1.635	−0.3822	− 0.1019	−0.0838	+0.9561	+0.2441	−0.0259	−0.0392	−0.0122	−0.0021	+ 0.3014	− 0.3085	− 0.0344	+0.9362
20	− 0.250	−1.505	−0.798	−0.2550	+ 0.1023	−0.0353	+0.9371	+0.1892	+0.0326	−0.0387	+0.0118	−0.0010	+ 0.3987	− 0.1323	+ 0.1135	+0.9566
10	+ 1.178	−1.323	+0.148	−0.1254	+ 0.1167	+0.0570	+0.8465	+0.1071	+0.1213	+0.0021	+0.0048	−0.0002	+ 0.4491	+ 0.2141	+ 0.0996	+0.9768
0	+ 3.887	0	+0.707	0	− 0.4371	0	+0.7071	0	+0.2407	+0.1000	0	0	− 1.684	0	0	+1.000
$\phi_0 = 50°$:																
50	− 0.838	0	−1.831	−0.4457	− 0.2911	0	+0.8743	+0.3250	−0.0506	0	−0.0340	−0.0041	+ 0.8725	0	− 0.3803	+0.8948
40	− 0.842	−0.461	−1.678	−0.4195	− 0.1746	−0.1378	+0.9021	+0.3125	−0.0408	−0.0260	−0.0262	−0.0036	+ 0.5294	− 0.4145	− 0.2512	+0.9030
30	− 0.759	−0.908	−1.225	−0.3455	+ 0.1012	−0.1615	+0.9518	+0.2745	−0.0107	−0.0411	−0.0176	−0.0024	+ 0.2947	− 0.4901	+ 0.0344	+0.9238
20	− 0.314	−1.227	−0.517	−0.2369	+ 0.3240	−0.0358	+0.9439	+0.2092	+0.0369	−0.0337	+0.0174	−0.0010	+ 0.9856	− 0.1131	+ 0.2362	+0.9497
10	+ 0.907	−1.111	+0.281	−0.1142	+ 0.1643	+0.1345	+0.8204	+0.1167	+0.1175	+0.0087	+0.0271	−0.0001	+ 0.5268	+ 0.3830	+ 0.1664	+0.9741
0	+ 3.402	0	+0.766	0	− 0.7874	0	+0.6428	0	+0.2199	+0.1000	0	0	− 2.487	0	0	+1.000
(i) $r/t = 200$ and $r/l = 0.2$																
$\phi_0 = 30°$:																
30	− 4.804	0	−3.394	−0.3054	− 0.3444	0	+0.9630	+0.1216	−0.1770	0	−0.0407	−0.0017	− 1.972	0	− 0.3043	+0.8904
20	− 3.563	−2.414	−2.649	−0.2592	− 0.0144	−0.0894	+0.9778	+0.1084	−0.0792	−0.0792	−0.0160	−0.0012	− 0.154	− 0.7295	− 0.0618	+0.9051
10	+ 1.170	−3.280	−0.836	−0.1412	+ 0.2619	−0.0028	+0.9579	+0.0679	+0.2192	−0.0822	+0.0279	−0.0003	+ 2.143	+ 0.0422	+ 0.1925	+0.9435
0	+12.13	0	+0.500	0	− 0.5594	0	+0.8569	0	+0.7297	+0.3000	0	0	− 4.639	0	0	+1.000

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

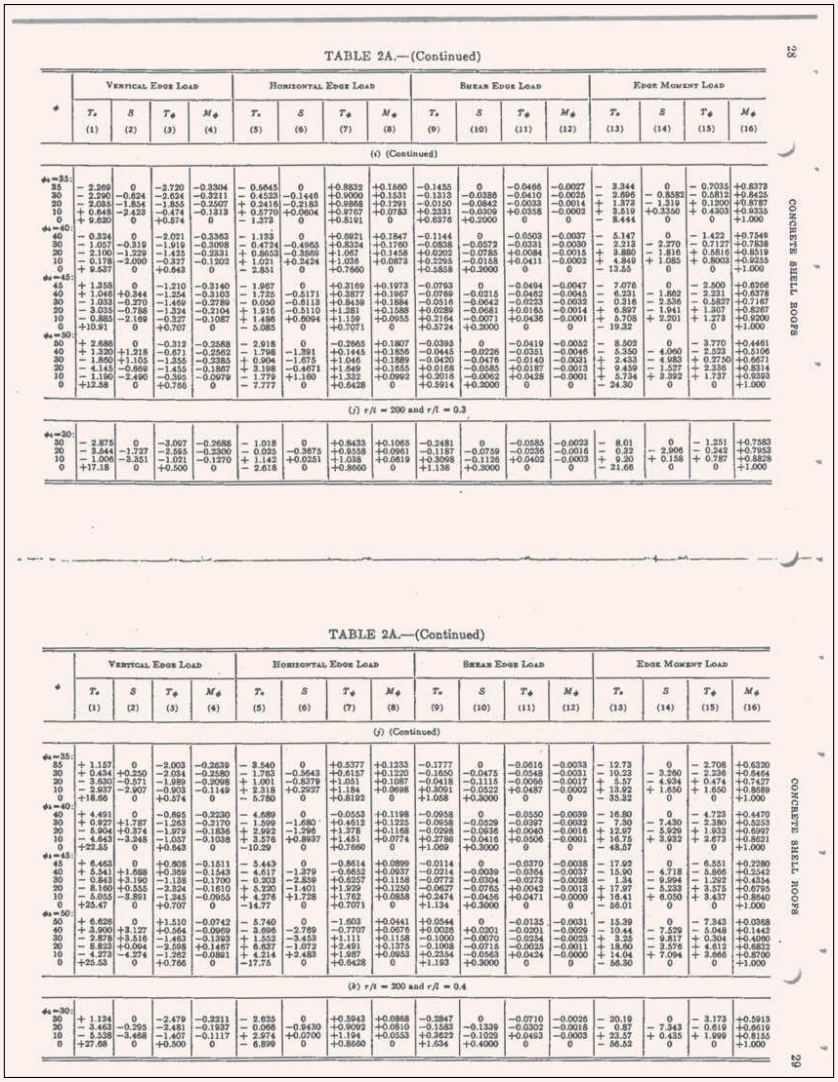


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(i) (Continued)																
$\phi_1=35°$	− 2.269	0	−2.720	−0.3304	− 0.6645	0	+0.8832	+0.1580	−0.1455	0	−0.0466	−0.0027	− 3.344	0	− 0.7035	+0.8373
30	− 2.290	−0.624	−2.634	−0.3211	− 0.4523	−0.1448	+0.9000	+0.1531	−0.1313	−0.0386	−0.0410	−0.0025	− 2.695	− 0.8582	− 0.5812	+0.8425
20	− 2.035	−1.854	−1.855	−0.2507	+ 0.2416	−0.2183	+0.9868	+0.1291	−0.0150	−0.0842	−0.0033	−0.0014	+ 1.373	− 1.319	+ 0.1200	+0.8787
10	+ 0.648	−2.423	−0.474	−0.1313	+ 0.2770	+0.0604	+0.9767	+0.0783	+0.2331	−0.0309	+0.0358	−0.0003	+ 3.619	+0.3350	+ 0.4303	+0.9335
0	+ 9.620	0	+0.574	0	− 1.372	0	+0.8191	0	+0.6376	+0.2000	0	0	− 8.444	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	− 0.324	0	−2.021	−0.3363	− 1.133	0	+0.6921	+0.1847	−0.1144	0	−0.0503	−0.0037	− 5.147	0	− 1.422	+0.7549
30	− 1.057	−0.319	−1.919	−0.3098	− 0.4724	−0.4955	+0.8324	+0.1760	−0.0838	−0.0572	−0.0331	−0.0030	− 2.213	− 2.270	− 0.7127	+0.7538
20	− 2.100	−1.229	−1.425	−0.2331	+ 0.8653	−0.3898	+1.067	+0.1458	+0.0202	−0.0785	+0.0084	−0.0015	+ 3.880	− 1.816	+ 0.5816	+0.8519
10	− 0.178	−2.090	−0.327	−0.1202	+ 1.021	+0.2424	+1.038	+0.0873	+0.2295	−0.0158	+0.0411	−0.0002	+ 4.849	+ 1.085	+ 0.8003	+0.9255
0	+ 9.537	0	+0.543	0	− 2.851	0	+0.7660	0	+0.5858	+0.3000	0	0	− 13.55	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 1.358	0	−1.210	−0.3140	− 1.967	0	+0.3169	+0.1973	−0.0763	0	−0.0494	−0.0047	− 7.078	0	− 2.500	+0.6266
40	+ 1.046	+0.344	−1.254	−0.3103	− 1.725	−0.6171	+0.3877	+0.1967	−0.0709	−0.0215	−0.0463	−0.0045	− 6.231	− 1.662	− 2.231	+0.6378
30	− 1.033	−0.370	−1.469	−0.2789	− 0.050	−0.5113	+0.8439	+0.1884	−0.0516	−0.0642	−0.0223	−0.0032	− 0.316	− 2.536	− 0.5827	+0.7167
20	− 3.035	−0.758	−1.324	−0.2104	+ 1.916	−0.3110	+1.281	+0.1588	+0.0289	−0.0681	+0.0185	−0.0014	+ 6.897	− 1.941	+ 1.207	+0.8267
10	− 0.885	−2.169	−0.327	−0.1087	+ 1.496	+0.3094	+1.159	+0.0955	+0.2164	−0.0071	+0.0436	−0.0001	+ 5.708	+ 2.201	+ 1.273	+0.9200
0	+10.91	0	+0.707	0	− 5.085	0	+0.7071	0	+0.5724	+0.3000	0	0	− 19.32	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 2.686	0	−0.312	−0.2688	− 2.918	0	−0.2965	+0.1807	−0.0393	0	−0.0419	−0.0052	− 8.502	0	− 3.770	+0.4461
40	+ 1.320	+1.218	−0.671	−0.2562	− 1.798	−1.291	+0.1445	+0.1856	−0.0446	−0.0228	−0.0351	−0.0046	− 5.350	− 4.000	− 2.523	+0.5106
30	− 1.850	+1.105	−1.355	−0.2385	+ 0.904	−1.675	+1.046	+0.1589	−0.0420	−0.0476	−0.0140	−0.0031	+ 2.433	− 4.983	+ 0.2750	+0.6671
20	− 4.145	−0.669	−1.455	−0.1857	+ 3.198	−0.4671	+1.549	+0.1555	+0.0168	−0.0585	+0.0187	−0.0013	+ 9.459	− 1.537	+ 2.336	+0.8314
10	− 1.106	−2.490	−0.395	−0.0979	− 1.779	+1.160	+1.332	+0.0992	+0.2016	−0.0062	+0.0428	−0.0001	+ 5.734	+ 3.292	+ 1.737	+0.9393
0	+12.58	0	+0.766	0	− 7.777	0	+0.6428	0	+0.5914	+0.3000	0	0	− 24.30	0	0	+1.000
(j) $r/t = 200$ and $r/l = 0.3$																
$\phi_1=30°$	− 2.575	0	−3.097	−0.2688	− 1.018	0	+0.8433	+0.1065	−0.2481	0	−0.0585	−0.0023	− 8.01	0	− 1.251	+0.7383
20	− 3.544	−1.727	−2.595	−0.2300	+ 0.025	−0.3675	+0.8538	+0.0981	−0.1187	−0.0759	−0.0236	−0.0016	+ 0.32	− 2.908	− 0.342	+0.7953
10	− 1.006	−0.351	−1.071	−0.1270	+ 1.142	+0.0251	+1.038	+0.0619	+0.3098	−0.1126	+0.0402	−0.0003	+ 9.20	+ 0.158	+ 0.787	+0.8828
0	+17.18	0	+0.500	0	− 2.618	0	+0.8660	0	+1.138	+0.3000	0	0	− 21.66	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(j) (Continued)																
$\phi_1=35°$	+ 1.157	0	−2.003	−0.2639	− 3.540	0	+0.5377	+0.1233	−0.1777	0	−0.0616	−0.0033	− 12.73	0	− 2.708	+0.6330
30	+ 0.434	+0.250	−2.034	−0.2580	− 1.763	−0.3543	+0.6157	+0.1220	−0.1650	−0.0475	−0.0543	−0.0031	− 10.23	− 3.290	− 2.236	+0.5464
20	− 3.630	−0.571	−1.999	−0.2098	+ 1.001	−0.5379	+1.051	+0.1087	−0.0418	−0.1118	−0.0096	−0.0017	+ 5.57	− 4.934	+ 0.474	+0.7427
10	− 2.937	−2.907	−0.903	−0.1149	+ 2.318	+0.2927	+1.184	+0.0698	+0.3091	−0.0522	+0.0487	−0.0002	+ 13.92	+ 1.650	+ 1.650	+0.8689
0	+18.56	0	+0.574	0	− 5.780	0	+0.8182	0	+1.058	+0.3000	0	0	− 35.32	0	0	+1.000
$\phi_1=40°$	+ 4.491	0	−0.895	−0.2230	− 4.589	0	−0.0553	+0.1198	−0.0958	0	−0.0550	−0.0039	− 16.80	0	− 4.723	+0.4470
30	+ 0.927	+1.787	−1.263	−0.2170	− 1.599	−1.680	+0.4612	+0.1225	−0.0958	−0.0529	−0.0397	−0.0032	− 7.30	− 7.430	− 2.380	+0.5253
20	− 5.904	+0.374	−1.979	−0.1836	+ 2.992	−1.296	+1.378	+0.1158	−0.0298	−0.0936	+0.0040	−0.0016	+ 12.97	+ 5.929	+ 1.932	+0.6997
10	− 4.643	−3.248	−1.057	−0.1038	+ 3.576	+0.8937	+1.451	+0.0774	+0.2786	−0.0416	+0.0506	−0.0001	+ 16.75	+ 3.932	+ 2.673	+0.8621
0	+22.55	0	+0.643	0	−10.29	0	+0.7660	0	+1.069	+0.3000	0	0	− 48.57	0	0	+1.000
$\phi_1=45°$	+ 5.463	0	+0.808	−0.1511	− 5.443	0	−0.8614	+0.0899	−0.0114	0	−0.0370	−0.0038	− 17.92	0	− 6.551	+0.2280
40	+ 2.541	+1.888	+0.369	−0.1543	− 4.617	−1.379	−0.6652	+0.0937	−0.0214	−0.0039	−0.0364	−0.0037	− 15.90	− 4.718	− 5.866	+0.2542
30	− 0.843	+3.190	−1.138	−0.1700	− 0.303	−2.859	+0.6257	+0.1158	−0.0772	−0.0304	−0.0273	−0.0038	− 1.34	− 9.994	− 1.292	+0.4304
20	− 8.160	+0.555	−2.324	−0.1610	+ 5.220	−1.401	+1.929	+0.1250	−0.0627	−0.0765	+0.0042	−0.0013	+ 17.97	+ 5.233	+ 3.575	+0.6795
10	− 6.055	−3.891	−1.945	−0.0955	+ 4.276	+1.728	+1.763	+0.0858	+0.2474	−0.0456	+0.0471	−0.0000	+ 16.41	+ 8.050	+ 3.437	+0.8940
0	+25.47	0	+0.707	0	−14.77	0	+0.7071	0	+1.134	+0.3000	0	0	− 56.01	0	0	+1.000
$\phi_1=50°$	+ 5.628	0	+1.510	−0.0742	− 5.740	0	−1.503	+0.0441	+0.0544	0	−0.0135	−0.0031	− 15.39	0	− 7.343	+0.0368
40	+ 3.900	+3.127	+0.564	−0.0969	− 3.696	−2.789	−0.7707	+0.0676	+0.0026	+0.0201	−0.0201	−0.0029	− 10.44	− 7.529	− 5.048	+0.1442
30	− 2.878	+3.516	−1.463	−0.1393	+ 1.553	−3.453	+0.111	+0.1168	−0.1000	−0.0670	−0.0234	−0.0023	+ 3.25	− 9.817	+ 0.304	+0.4090
20	− 8.823	+0.094	−2.598	+0.1467	+ 6.537	−1.072	+2.491	+0.1375	−0.1008	−0.0716	−0.0023	−0.0011	+ 18.80	+ 5.273	− 3.576	+0.6832
10	− 7.273	−4.274	−1.982	−0.0891	+ 4.214	+2.483	+1.982	+0.0953	+0.2254	−0.0563	+0.0424	−0.0000	+ 14.04	+ 7.094	+ 3.666	+0.8700
0	+25.53	0	+0.766	0	−17.75	0	+0.6428	0	+1.193	+0.3000	0	0	− 56.36	0	0	+1.000
(k) $r/t = 200$ and $r/l = 0.4$																
$\phi_1=30°$	+ 1.134	0	−2.479	−0.2211	− 2.625	0	+0.5943	+0.0868	−0.2847	0	−0.0710	−0.0026	− 20.19	0	− 3.173	+0.5913
20	− 3.463	−0.295	−2.481	−0.1937	− 0.066	−0.9430	+0.9092	+0.0810	−0.1583	−0.1339	−0.0302	−0.0018	+ 0.87	− 7.343	− 0.619	+0.6619
10	− 5.538	−3.468	−1.407	−0.1117	+ 2.974	+0.0700	+1.194	+0.0553	+0.3622	−0.1029	+0.0493	−0.0003	+ 22.57	+ 0.435	+ 1.999	+0.8155
0	+27.68	0	+0.500	0	− 6.899	0	+0.8660	0	+1.534	+0.4000	0	0	− 56.52	0	0	+1.000

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

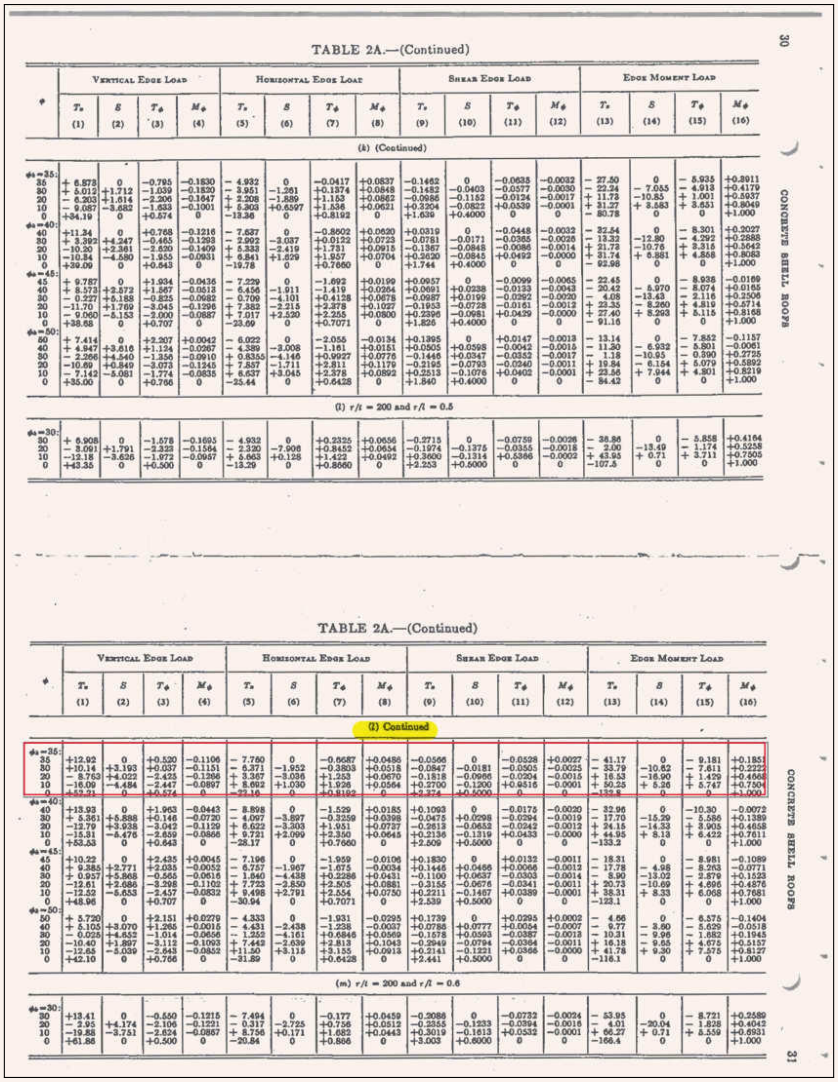


TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(k) (Continued)																
$\phi_k = 35°$																
35	+ 6.873	0	−0.795	−0.1830	− 4.932	0	−0.0417	+0.0837	−0.1462	0	−0.0635	−0.0032	− 27.50	0	− 5.935	+0.3911
30	+ 5.012	+1.712	−1.039	−0.1820	+ 3.951	−1.261	+0.1374	+0.0848	−0.1482	−0.0403	−0.0577	−0.0030	+ 22.24	− 7.055	+ 4.913	+0.4179
20	− 6.203	+1.614	−2.206	−0.1647	+ 2.208	−1.839	+1.153	+0.0862	−0.0985	−0.1152	−0.0124	−0.0017	+ 11.72	−10.55	+ 1.001	+0.5937
10	− 9.087	−3.682	−1.633	−0.1001	+ 5.303	+0.6597	+1.536	+0.0621	+0.3204	−0.0822	+0.0539	−0.0001	+ 31.27	+ 3.583	+ 3.551	+0.8049
0	+34.19	0	+0.574	0	−13.36	0	+0.8192	0	+1.639	+0.4000	0	0	− 80.78	0	0	+1.000
$\phi_k = 40°$																
40	+11.34	0	+0.768	−0.3216	− 7.637	0	−0.8502	+0.0620	+0.0319	0	−0.0448	−0.0032	+ 32.54	0	− 8.301	+0.2027
30	+ 3.392	+4.247	−0.485	−0.1293	− 2.992	−3.037	+0.0152	+0.0723	−0.0781	−0.0171	−0.0365	−0.0026	− 13.32	−12.80	− 4.292	+0.2888
20	−10.30	+2.361	−2.620	−0.1409	+ 5.333	−2.419	+1.751	+0.0915	−0.1367	−0.0848	−0.0086	−0.0014	+ 21.72	−10.76	+ 3.315	+0.5642
10	−10.84	−4.580	−1.955	−0.0931	+ 6.841	+1.629	+1.937	+0.0704	+0.3620	−0.0845	+0.0492	−0.0000	+ 31.74	+ 6.881	+ 4.868	+0.8063
0	+39.09	0	+0.843	0	−19.78	0	+0.7660	0	+1.744	+0.4000	0	0	− 92.86	0	0	+1.000
$\phi_k = 45°$																
45	+ 9.787	0	+1.934	−0.0436	− 7.229	0	−1.692	+0.0199	+0.0957	0	−0.0099	−0.0065	− 22.45	0	− 8.936	−0.0169
40	+ 8.573	+2.572	+1.567	−0.0513	− 6.456	−1.911	−1.419	+0.0264	+0.0691	+0.0238	−0.0133	−0.0043	− 20.42	− 5.970	− 8.074	+0.0165
30	− 0.227	+5.188	−0.825	−0.0982	− 0.709	−4.101	+0.4128	+0.0678	−0.0987	+0.0199	−0.0292	−0.0030	− 4.08	−13.43	− 2.116	+0.2506
20	−11.70	+1.769	−3.045	−0.1296	+ 7.383	−2.215	+2.378	+0.1027	−0.1933	−0.0728	−0.0161	−0.0012	+ 23.35	− 8.260	+ 4.819	+0.5714
10	− 9.060	−5.153	−2.000	−0.0887	+ 7.017	+2.520	+2.255	+0.0800	+0.2396	−0.0981	+0.0429	−0.0000	+ 27.40	+ 8.293	+ 5.115	+0.8168
0	+38.88	0	+0.707	0	−23.09	0	+0.7071	0	+1.826	+0.4000	0	0	− 91.16	0	0	+1.000
$\phi_k = 50°$																
50	+ 7.414	0	+2.307	+0.0042	− 6.022	0	−2.055	−0.0134	+0.1395	0	+0.0147	−0.0013	− 13.14	0	− 7.852	−0.1157
40	+ 4.947	+3.616	+1.124	−0.0267	− 4.389	−3.008	−1.161	+0.0151	+0.0505	+0.0598	−0.0042	−0.0015	− 11.30	0	− 5.801	−0.0061
30	− 2.266	+4.540	−1.356	−0.0910	+ 0.8355	−4.146	+0.9927	+0.0776	−0.1445	+0.0347	−0.0352	−0.0017	+ 1.18	− 6.932	+ 0.390	+0.2725
20	−10.89	+0.849	−3.073	−0.1245	+ 7.857	−1.711	+2.811	+0.1179	−0.2195	−0.0793	−0.0340	−0.0011	+ 19.84	−10.95	+ 5.079	+0.5892
10	− 7.142	−5.081	−1.774	−0.0835	+ 6.537	+3.045	+2.378	+0.0892	+0.2513	−0.1076	+0.0402	−0.0001	+ 23.56	− 6.154	+ 4.801	+0.8219
0	+35.00	0	+0.766	0	−25.44	0	+0.6428	0	+1.840	+0.4000	0	0	− 84.42	+ 7.944	0	+1.000
(l) $r/t = 200$ and $r/t = 0.5$																
$\phi_k = 30°$																
30	+ 5.908	0	−1.578	−0.1693	− 4.932	0	+0.2355	+0.0656	−0.2715	0	−0.0759	−0.0026	− 38.86	0	− 5.858	+0.4164
20	− 3.061	+1.791	−2.323	−0.1564	+ 2.330	−7.908	+0.8452	+0.0634	−0.1974	−0.1375	−0.0355	−0.0018	+ 2.00	−13.49	− 1.174	+0.5258
10	−12.18	−3.626	−1.972	−0.0957	+ 5.863	+0.128	+1.422	+0.0492	+0.3600	−0.1314	+0.5386	−0.0002	+ 43.95	+ 0.71	+ 3.711	+0.7505
0	+43.35	0	+0.500	0	−13.29	0	+0.8660	0	+2.253	+0.5000	0	0	−107.5	0	0	+1.000

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	Horizontal Edge Load T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	Shear Edge Load T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	Edge Moment Load T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(l) Continued																
$\phi_k = 35°$																
35	+12.92	0	+0.520	−0.1106	− 7.760	0	−0.6687	+0.0486	−0.0566	0	−0.0528	+0.0027	− 41.17	0	− 9.181	+0.1851
30	+10.14	+3.193	+0.037	−0.1151	+ 5.371	−1.952	−0.3803	+0.0518	−0.0847	−0.0181	−0.0505	−0.0025	− 33.79	−10.62	− 7.811	+0.2222
20	− 8.763	+4.022	−2.425	−0.1266	+ 3.367	−3.036	+1.253	+0.0670	−0.1818	−0.0966	−0.0204	−0.0015	+ 16.53	−16.90	+ 1.429	+0.4668
10	−16.09	−4.484	−2.447	−0.0897	+ 8.602	+1.030	+1.926	+0.0564	+0.2700	−0.1200	+0.9816	−0.0001	+ 50.25	+ 5.26	+ 5.747	+0.7504
0	+53.91	0	+0.574	0	−23.16	0	+0.8192	0	+2.374	+0.5000	0	0	−133.8	0	0	+1.000
$\phi_k = 40°$																
40	+13.93	0	+1.963	−0.0443	− 8.898	0	−1.529	+0.0185	+0.1093	0	−0.0175	−0.0020	− 32.96	0	−10.30	−0.0072
30	+ 5.361	+5.888	+0.146	−0.0720	+ 4.097	−3.897	−0.3359	+0.0398	−0.0475	+0.0298	−0.0294	−0.0019	− 17.70	−15.29	− 5.586	+0.1389
20	−12.79	+3.938	−3.042	−0.1129	+ 6.622	−3.303	+1.931	+0.0727	−0.2613	−0.0652	−0.0242	−0.0012	+ 34.16	−14.53	+ 3.903	+0.4658
10	−15.31	−8.476	−2.639	−0.0866	+ 9.721	+2.099	+2.350	+0.0645	+0.2136	−0.1319	+0.0433	−0.0000	+ 44.95	+ 8.13	+ 6.422	+0.7611
0	+53.53	0	+0.643	0	−28.17	0	+0.7660	0	+2.509	+0.5000	0	0	−133.2	0	0	+1.000
$\phi_k = 45°$																
45	+10.22	0	+2.435	+0.0045	− 7.196	0	−1.959	−0.0106	+0.1830	0	+0.0132	−0.0011	− 18.31	0	− 8.981	−0.1089
40	+ 9.385	+2.771	+2.035	−0.0052	− 6.757	−1.967	−1.675	−0.0034	+0.1446	+0.0466	+0.0066	−0.0013	− 17.78	− 4.98	− 8.263	−0.0771
30	+ 0.957	+5.868	−0.565	−0.0616	− 1.640	−4.438	+0.2286	+0.0431	−0.1100	+0.0637	−0.0303	−0.0014	− 8.90	−13.02	− 2.879	+0.1533
20	−12.61	+2.686	−3.298	−0.1102	+ 7.723	−2.850	+2.505	+0.0881	−0.2155	−0.0676	−0.0341	−0.0011	+ 20.73	−10.69	+ 4.896	+0.4876
10	−12.52	−6.653	−2.457	−0.0832	+ 9.498	+2.791	+2.554	+0.0750	+0.2211	−0.1467	+0.0389	−0.0001	+ 38.31	+ 8.33	+ 6.068	+0.7681
0	+48.96	0	+0.707	0	−30.94	0	+0.7071	0	+2.539	+0.5000	0	0	−123.1	0	0	+1.000
$\phi_k = 50°$																
50	+ 5.720	0	+2.151	+0.0279	− 4.333	0	−1.931	−0.0295	+0.1739	0	+0.0295	+0.0002	− 4.66	0	− 6.575	−0.1404
40	+ 5.155	+3.070	+1.265	−0.0015	− 4.431	−2.438	−1.228	−0.0037	+0.0785	+0.0777	+0.0054	−0.0007	− 9.77	− 3.90	− 5.629	−0.0518
30	− 0.025	+4.452	−1.014	−0.0656	− 1.252	−4.161	+0.6846	+0.0569	−0.1578	+0.0593	−0.0387	−0.0013	− 10.31	− 9.96	− 1.682	+0.1945
20	−10.40	+1.897	−3.112	−0.1093	+ 7.442	−2.639	+2.813	+0.1043	−0.2949	−0.0794	−0.0364	−0.0011	+ 16.18	− 9.55	+ 4.675	+0.5157
10	−11.50	−5.039	−2.643	−0.0833	+ 11.50	+3.115	+3.155	+0.0913	+0.2141	−0.1221	+0.0366	−0.0000	+ 41.78	+ 9.30	+ 7.373	+0.8127
0	+42.10	0	+0.766	0	−31.89	0	+0.6428	0	+2.441	+0.5000	0	0	−116.1	0	0	+1.000
(m) $r/t = 200$ and $r/t = 0.6$																
$\phi_k = 30°$																
30	+13.41	0	−0.550	−0.1215	− 7.494	0	−0.177	+0.0459	−0.3086	0	−0.0732	−0.0024	− 53.95	0	− 8.721	+0.2589
20	− 2.95	+4.174	−2.106	−0.1231	+ 0.317	−2.725	+0.756	−0.0513	−0.2355	−0.1333	−0.0394	−0.0016	+ 4.01	−20.04	− 1.828	+0.4043
10	−19.88	−3.751	−2.624	−0.0887	+ 8.756	+0.171	+1.682	+0.0443	+0.3019	−0.1613	+0.0532	−0.0001	+ 66.27	+ 0.71	+ 8.559	+0.6931
0	+61.88	0	+0.500	0	−20.84	0	+0.866	0	+3.003	+0.6000	0	0	−166.4	0	0	+1.000

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

32 CONCRETE SHELL ROOFS

TABLE 2A.—(Continued)

ϕ	Vertical Edge Load			Horizontal Edge Load			Shear Edge Load			Edge Moment Load		
	T_ϕ (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_ϕ (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_ϕ (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_ϕ (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
(m) (Continued)																
4°–25°	+117.48	0	+1.241	−0.0576	+9.794	0	−1.156	+0.0231	+0.0614	0	−0.0363	−0.0020	48.68	0	−11.31	+0.0453
35	+113.76	+4.642	+0.975	−0.0451	−4.190	−2.973	−1.311	+0.0331	+0.0779	+0.113	−0.0381	−0.0022	47.77	−12.65	−9.638	+0.0427
30	+110.27	+9.000	+2.270	−0.0889	+4.016	+1.270	+2.252	+0.0533	+0.1889	+0.6000	−0.0294	−0.0012	17.11	−21.22	−3.823	+0.3710
20	−22.33	−5.090	−2.136	−0.0827	+11.70	0	+0.819	0	+3.204	0	−0.0454	−0.0000	65.22	+5.83	+7.238	+0.7029
10	+68.53	0	+0.274	0	−30.32	0	0	0	0	0	0	0	−160.9	0	0	+1.000
4°–40°	+14.46	0	+2.530	−0.0552	+8.900	0	−1.788	−0.0029	+0.2066	0	−0.0330	−0.0012	29.22	0	−10.53	−0.0830
40	+6.70	+0.504	+0.519	−0.0397	+4.840	−4.143	−0.357	+0.0213	−0.0157	+0.0719	−0.0224	−0.0013	20.21	−14.50	+6.191	+0.0578
30	−13.24	+4.922	−3.187	−0.0946	+6.008	−3.889	+2.003	+0.0650	−0.3723	−0.0438	−0.0384	−0.0010	18.87	−18.27	+2.394	+0.3969
20	−49.22	−5.810	−1.114	−0.0412	+12.10	+2.031	+2.921	+0.0616	+0.1169	+0.1797	+0.0373	−0.0001	18.09	+7.26	+7.253	+0.7139
0	+68.53	0	+0.048	0	−35.19	0	+0.766	0	+3.267	+0.6000	0	0	−162.2	0	0	+1.000
4°–45°	+8.60	0	+2.397	+0.0217	+5.739	0	−1.838	−0.0205	+0.2347	0	−0.0256	−0.0004	8.38	0	7.554	−0.1241
40	+6.15	+2.310	+2.268	+0.0133	+5.622	−1.565	−1.616	−0.0140	+0.1924	+0.0903	−0.0199	−0.0005	10.38	−2.49	7.198	−0.0988
30	+11.68	+3.500	+3.371	−0.0948	+6.784	−3.438	+2.416	+0.0759	+0.1644	−0.0964	−0.0478	−0.0011	12.49	−10.03	3.665	+0.4113
20	−16.02	−5.641	−2.752	−0.0772	+12.13	+2.709	+2.752	+0.0695	+0.1908	−0.1895	−0.0361	−0.0001	50.54	+6.80	6.668	+0.7190
0	+58.53	0	+0.707	0	−38.04	0	+0.707	0	+3.268	+0.6000	0	0	−158.3	0	0	+1.000
4°–50°	+3.09	0	+1.709	+0.0284	+1.816	0	−1.467	−0.0273	+0.1854	0	+0.0382	+0.0002	7.18	0	3.972	−0.1088
40	+4.42	+1.981	+1.179	+0.0063	+3.693	−1.374	−1.120	+0.0084	+0.1051	+0.0872	+0.0118	−0.0003	5.77	1.40	4.634	−0.0572
30	+2.57	+4.287	−0.638	−0.0476	+3.650	−3.722	+0.325	+0.0406	−0.1481	+0.0826	−0.0419	−0.0012	20.51	6.83	3.347	+0.1206
20	−9.43	−2.920	−1.775	−0.0948	+11.37	+3.425	+2.401	+0.0662	−0.3819	−0.0757	−0.0497	−0.0012	1.78	12.83	3.041	+0.4149
0	+53.46	0	+0.765	−0.0706	+41.80	0	+0.643	+0.07	+3.218	+0.6000	−0.0384	−0.0001	51.00	6.80	6.371	+0.7134
											0	0	−156.9	0	0	+1.000

33 CONCRETE SHELL ROOFS

v = the tangential displacement of the shell, considered positive in the direction of increasing values of ϕ;

w = the radial displacement of the shell, considered positive in the outward direction; and,

θ = the rotation of the shell, considered positive when the section rotates clockwise.

The effect of line loads is most pronounced in the vicinity of the edge at which the line load is applied, with the intensity of the internal forces generally diminishing as the distance from the applied forces is increased. When the chord width of the shell is small compared to the longitudinal span, the internal resisting forces produced by line loads applied at one edge do not diminish

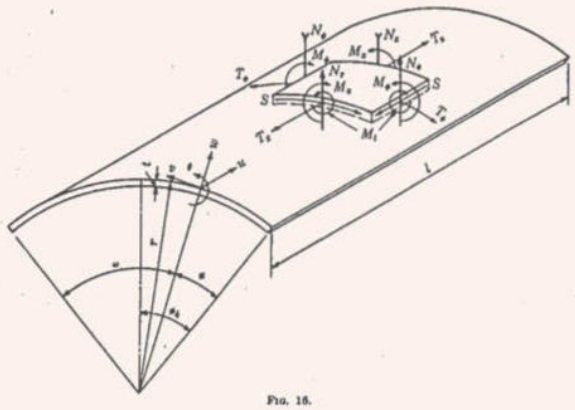


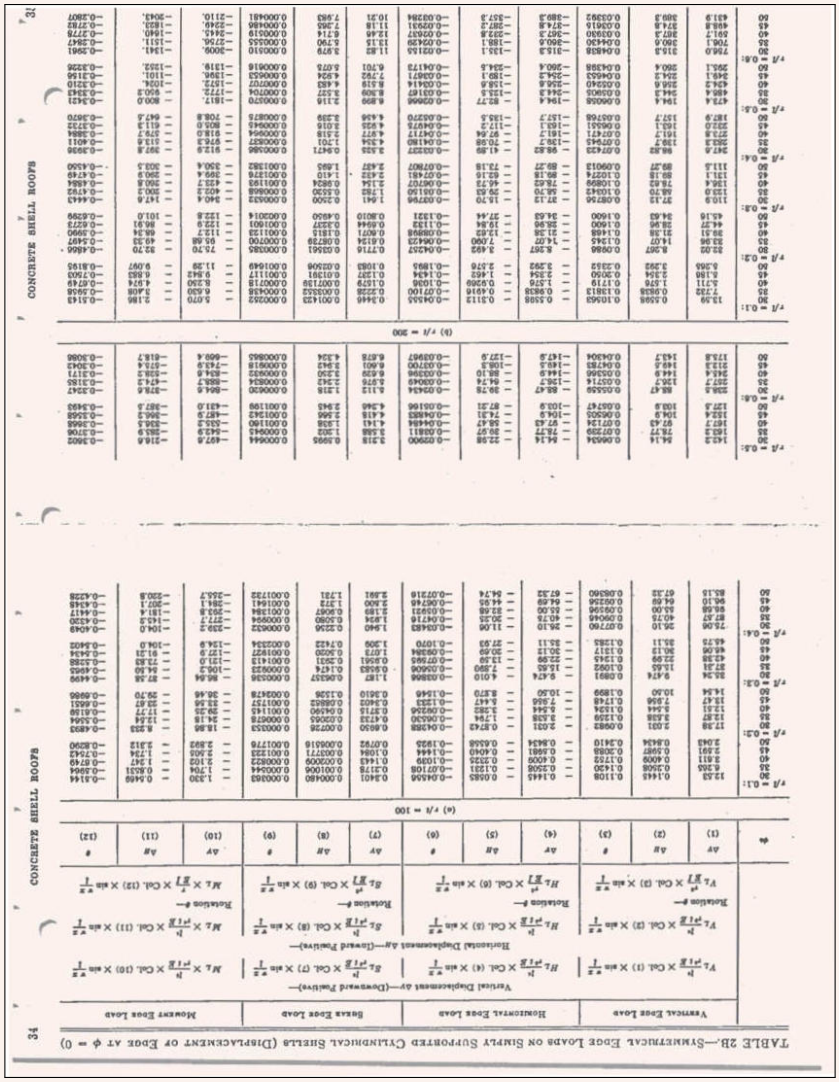
FIG. 16.

sufficiently fast so that the effect of a line load applied at one edge is felt at the farther edge. For this condition, the magnitude of angle subtended by the shell plays an important role in the distribution of the forces and must be considered; but, when the chord width is large compared with the longitudinal span, the effect of line loads on one edge is negligible on the other edge, and therefore line loads on each edge can be treated separately. There is no definite line of demarcation as to when the effect of line loads applied to one edge can be neglected at the other edge. However, computed values seem to indicate that, when r/l exceeds 0.6 with ϕ_1 more than 30°, each longitudinal edge can be treated individually.

Because of this indication, data showing the effect of line loads are presented in two groups of tables. The first group (Tables 2A and 2B) gives the force distribution and displacements at the edge in long barrels for symmetrical

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

F 彩票设计 壳 Roofs

. 这个例子, 从 (Portland Cement Association, 1954) 它是特别有兴趣的。它不仅描述了壳结构的分析和设计, 而且还描述了一个静态不确定的案例的处理, 其中灵活性概念 - 在章节中讨论之前 25 被雇用。结构首先分为两个部分, 每一个单独分析; 最终解决方案在两部分重新组合时通过执行转移兼容性来获得。

可以将程序视为与以弹性春季支持的梁相似, 如下所示 865.

审阅稿

CONCRETE INFORMATION
PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

Design of Barrel Shell Roofs

Introduction

The roofing of large unobstructed areas with a minimum amount of material is a goal that has claimed the attention of engineers and architects for years. Of the various types of roof construction, the concrete shell offers the best possibility of attaining this desirable end. For example, shells only 2¼ in. thick spanning distances up to 150 ft. have been built. In Mexico a shell only 1½ in. thick cantilevers 36 ft. without the aid of any supporting members. In countries throughout the world, including the United States, Great Britain, Germany, Spain and India, there are examples of concrete shells having a smaller ratio of thickness to span than that provided by nature in its protective covering of an egg.

Although concrete shells are of relatively recent origin (the first experimental shell was built in 1920 at the Zeiss works in Germany while the first shell roof in the U.S. was constructed in 1933), the list of shell structures throughout the world is impressive. At least 500 such roofs of various shapes and sizes have been built. In the United States alone over 12 million sq.ft. of shell roofs have been constructed for structures varying from small industrial buildings to monumental buildings displaying new architectural forms.

Aware of the potentialities of this form of construction, the American Society of Civil Engineers in 1952 published Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. By a series of comprehensive tables this manual greatly simplifies the design of shell roofs. The following article is intended to supplement the manual by presenting in detail the design of a concrete shell roof for a typical industrial building.

Structural Behavior

Although the analysis of a shell in a strict sense is a three-dimensional problem, structural behavior of a shell can best be understood by comparing its action to that of an ordinary beam. Consider the curved longitudinal shell in Fig. 1 to be a beam supported by two transverse supports. This beam differs from the ordinary concept of a beam only in that its cross-section is a thin curved slab.

The application of load on the shell induces longitudinal fiber stresses similar to those induced in any homogeneous beam under load, and if the longitudinal span l (Fig. 1) is large compared to the transverse chord width, the variation of fiber stresses across any section is the same as that created in a beam; that is, it is linear from top to bottom. These fiber stresses designated in shell terminology as T_x, the force per unit width, are comparable to the f_c-stresses of conventional reinforced concrete design.

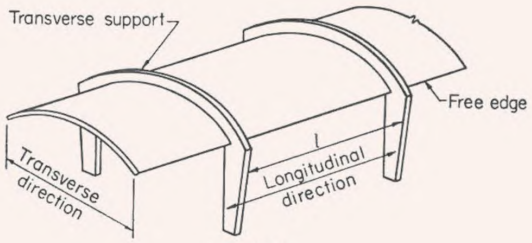


FIG. 1

As the ratio of chord width to span length increases, the variation of T_x-forces changes from straight-line to curvilinear. The extent of this change is shown in Fig. 2, where T_x-forces are plotted in the conventional manner. The ordinate represents vertical distance measured from the bottom of the shell in terms of $\frac{y}{h}$ and the abscissa indicates magnitude of T_x-forces. For convenience, curves are drawn for various values of $\frac{r}{l}$, the ratio of shell radius to span length, rather than for the previously discussed ratio of chord width to span length. Although the two ratios are interdependent, $\frac{r}{l}$ is a more suitable parameter since it includes the effect of shell rise as well as chord

The activities of the Portland Cement Association are limited to scientific research, the development of new or improved products and methods, technical service, promotion and educational effort (including safety work), and are primarily designed to improve and extend the uses of portland cement and concrete. The manifold program of the Association and its varied services to cement users are made possible by the financial support of its member companies in the United States and Canada, engaged in the manufacture and sale of a very large proportion of all portland cement used in these two countries. A current list of member companies will be furnished on request.

Printed in U.S.A.

COPYRIGHT 1954 BY PORTLAND CEMENT ASSOCIATION

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

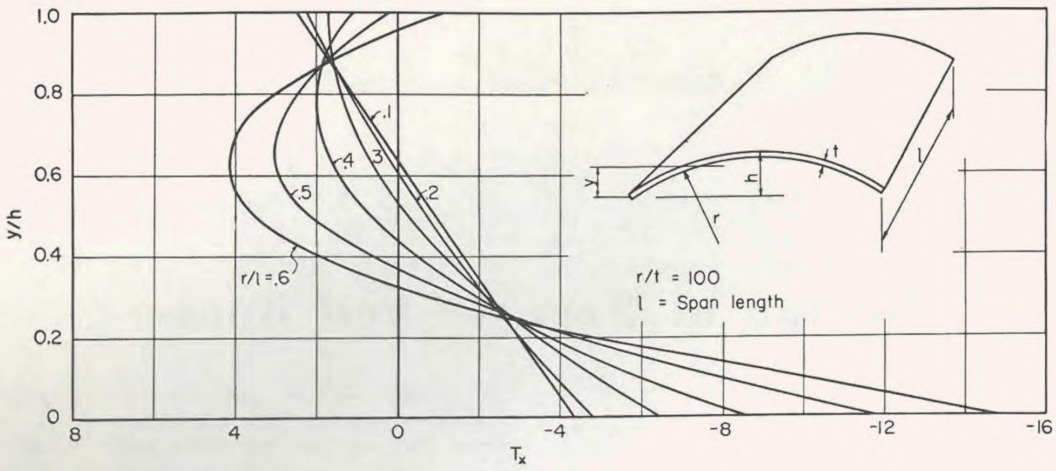


FIG. 2

width. Curves of Fig. 2 apply to a given load, the specific ratio of $\frac{r}{t} = 100$ in which t equals thickness, and a subtended angle of 80°. However, the trend shown is applicable to all shells. When $\frac{r}{l}$ is less than 0.2, the variation is almost linear, while for larger values of $\frac{r}{l}$, the force at the lower edge is greater than that given by ordinary beam theory.

The departure from ordinary flexural action is due basically to the presence of transverse bending in the shell. In the typical shell strip of unit width illustrated in Fig. 3a, moments of the external load and internal forces about any face such as AC must be in equilibrium. With face BD taken at the lower edge of the shell, moment M_ϕ must equal the difference between moment due to external load acting on the unit strip and that due to tangential shears S. These tangential shears are similar to the shearing stresses v in a beam.

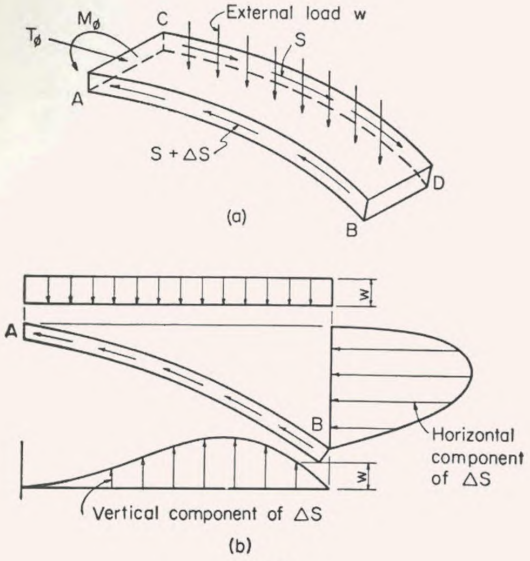


FIG. 3

For most distributed loads, moment produced by an external load and that produced by tangential shears are seldom equal. In fact, for usual distributed loads the moment M_ϕ is counterclockwise while the net moment of external load and tangential shears is clockwise. This can be inferred by inspecting Fig. 3b in which vertical and horizontal components of the difference in tangential shears acting on faces AB and CD have been plotted to the same scale as uniform external load. Statical moment of external load to the right of any point is clockwise. In contrast to this the vertical component of the tangential shears always produces a counterclockwise moment about that point. Throughout most of the shell this counterclockwise moment is larger than the statical moment of the external load, although the difference between the two is small since total upward and downward forces are of equal magnitude. As a result, addition of the clockwise moment due to the horizontal component always produces a clockwise final moment, and the resisting moment M_ϕ is counterclockwise. From this line of reasoning, it follows that uniformly distributed loads always produce tension in the upper fibers and compression in the lower fibers of a shell that is unrestrained along its edges.

Since transverse moment M_ϕ at any point is always counterclockwise or negative, point B (Fig. 3a) deflects down and inward relative to A. This differential deflection of point B induces longitudinal fiber stresses in the lower portion of the shell which are in excess of those given by ordinary beam theory. This condition forces a departure from straight-line stress variation.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

The increase in the tensile fiber stresses in the lower region of the shell cross-section, as shown in Fig. 2, must be accompanied by an increase in compressive stresses above the neutral axis so that the summation of forces in the longitudinal direction will be zero. Since moment produced by the longitudinal internal forces must still equal the external moment, this increase in magnitude of the internal forces is accompanied by a shortening of the moment arm between centroids of compressive and tensile forces. The effect of this action is to lower the position of the neutral axis.

If the curves in Fig. 2 are examined critically, it becomes apparent that as values of $\frac{r}{l}$ increase, the concentration of stresses in the vicinity of the lower edge indicates a decrease in the height of shell participating in beam action. In other words, for large values of $\frac{r}{l}$ the top or crown portion of the shell participates to only a minor extent in beam action. This action can be compared to the decreasing effectiveness of remote portions of a T-beam flange as the ratio of flange width to beam span increases.

Although the magnitude of tensile stress at the lower edge of the shell as indicated in Fig. 2 is sometimes quite sensitive to variations of $\frac{r}{l}$, total tensile area under these curves does not vary to the same degree. For example, the ratio of bottom fiber stresses for values of $\frac{r}{l}$ of 0.6 and 0.1 is 3.2 while the ratio of tensile areas below the neutral axis for these cases is only 1.4. Since reinforcement required depends essentially on total tensile area rather than maximum fiber stress, the design of a shell is not so sensitive a problem as the curves indicate. Moreover, curves of Fig. 2 are prepared for a single shell unrestrained at the lower edges. When these edges are restrained from deflecting down and inward by adjoining shells or edge beams, longitudinal stresses conform more closely to the straight-line variation.

Factors Affecting Shell Dimensions

An example is presented to illustrate the procedure involved in the analysis and design of a typical cylindrical concrete shell roof. A column spacing of 40x50 ft. is selected as being representative of the unobstructed floor area generally required for industrial buildings. A typical unit of the shell roof shown in Fig. 4 consists of three barrels, two exterior and one interior, spanning 50 ft. in the longitudinal direction. The barrels are supported by transverse frames spanning 40 ft. These dimensions result in a unit 100 ft. long and 120 ft. wide with shells continuous over alternate frames. Split frames are provided every 100 ft. This layout permits six re-uses of forms in a building 600 ft. long and limits the amount of concrete placed in one operation to about 200 cu.yd.

Shell thickness is taken as 4 in., which for most conditions is more than adequate to resist compressive forces and flexural moments induced in a shell. As a matter of fact, except in the vicinity of transverse frames, depth of

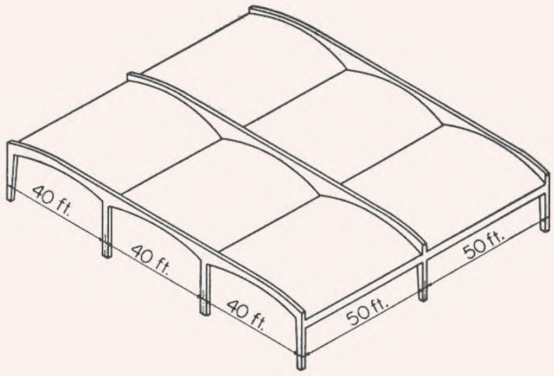


FIG. 4

the shell is controlled by requirements of adequate coverage for reinforcement. Usually, three to four layers of reinforcement are required, depending upon loading and type of shell; and with a minimum clear distance between reinforcement and shell surface of ¾ in., minimum depth is about 3 in. Many shells have been built abroad with a thickness of less than 3 in., such shells requiring close tolerance in the placement of reinforcement. While it might be argued that the increased labor involved in such circumstances is not justified by the reduction in concrete volume, a decrease in dead weight may be important since it is reflected almost directly in the amount of longitudinal and diagonal reinforcement required.

The relationship between dead weight and reinforcement follows from the fact that a shell acts essentially as a beam in the longitudinal direction with effective depth dependent upon the rise of the shell. For a given rise, the distance between centroids of tensile and compressive forces is almost unaffected by minor changes in shell thickness, and total longitudinal tension varies directly with the load. As a result, a reduction in dead load due to a decrease in shell thickness leads to a smaller total tension.

Transverse moment is also reduced in proportion to the load. However, this moment is resisted by the shell thickness itself so that a decrease in thickness allows little reduction in the amount of transverse reinforcement. In selecting shell thickness, its effect on reinforcement should be considered.

With shell thickness established, the next step involves the selection of rise (see Fig. 5), the distance from the lowest point of the structure (the bottom of the edge beams, if required) to mid-depth of the shell at the crown. For long-barrel, simply supported shells, a rise of one-tenth the longitudinal span generally gives sufficient curvature to produce a satisfactory stress condition and to avoid a large concentration of reinforcement in the valley. This ratio of one-tenth is simply a guide in preliminary layout work. For shells continuous in the longitudinal direction, rise can be less than one-tenth of the span.

In this example a rise of approximately $0.1\,l$ is pro-

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

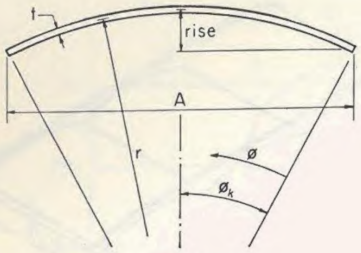


FIG. 5

duced by a shell radius of 45 ft. The rise of the interior barrel is determined by trigonometry from Fig. 5.

$$\text{rise} = r - \sqrt{r^2 - (0.5A)^2}$$
$$= 45 - \sqrt{45^2 - 20^2}$$
$$= 4.69 \text{ ft.}$$

The sine and cosine of one-half the angle subtended by the shell are:

$$\sin \phi_k = \frac{20}{45} = 0.4444$$
$$\cos \phi_k = \frac{(45 - 4.69)}{45} = 0.8958$$

Therefore ϕ_k, the angle from the crown to the edge of the shell, is equal to 26° 23′. Physical constants required in shell analysis are:

$$\frac{r}{l} = \frac{45}{50} = 0.9$$
$$\frac{rt}{l^2} = \frac{45 \times 4}{50^2 \times 12} = 0.006$$

Two separate analyses are required for the roof unit shown in Fig. 4 since support conditions at longitudinal edges of interior and exterior barrels are different. Edges of the interior barrel are restrained horizontally by adjoining exterior barrels, while outside edges of exterior barrels are restrained only by edge beams. The first analysis deals with the interior barrel and the second with exterior barrels.

Discussion of Tables in ASCE Manual No. 31

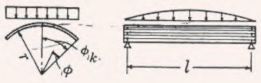
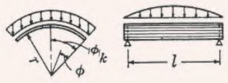
As discussed in ASCE Manual No. 31, *Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*,* shell analysis resembles the analysis of indeterminate structures. The shell is first considered supported along both the transverse and longitudinal edges, a condition equivalent to assuming the shell determinate. Under this condition load is carried only by direct forces acting entirely in the plane of the shell, and reactions and displacements along the edges are inconsistent with actual end conditions. Therefore, corrective forces called edge or line loads are applied subsequently along the edges inducing bending moments as well as direct forces in the shell. Consequently, the analysis of a shell consists of two principal steps:

1. Determination of internal forces and edge reactions, assuming the shell to be statically determinate. This is called the "membrane analysis."

2. Determination of internal forces due to corrective loads applied along the edges of the shell, and the superposition of these forces on those resulting from the membrane analysis.

Table 1B and portions of Tables 3A and 3B reproduced from ASCE Manual No. 31 will be utilized. Table 1B deals with internal membrane forces and the displacements induced in a simply supported shell by sinusoidal surface loads. As shown in sketches at the top of the table, the load on the shell is assumed symmetrical about the crown. Coefficients in the left half are for a load uniform in the transverse direction, while coefficients in the right half are for a load varying as the weight of the shell. In both cases, load distribution in the longitudinal direction varies as $\sin \frac{\pi x}{l}$.

TABLE 1B.—MEMBRANE FORCES AND DISPLACEMENTS IN SIMPLY SUPPORTED CYLINDRICAL SHELLS; LOADS VARYING LONGITUDINALLY FROM ZERO AT THE ENDS TO MAXIMUM POSITIVE AT THE MIDDLE

	(a) UNIFORM TRANSVERSE LOAD	(b) DEAD WEIGHT LOAD
		
	Longitudinal Force T_x— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (1)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{ur}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (2)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{ur} \times \text{Col. (3)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement ΔV— $\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(1+\frac{1}{2}(\pi r/l)^2+\frac{1}{12}(\pi r/l)^4\right) \times \text{Col. (4)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement ΔH— $+ p_{ur}\frac{l^4}{r^3tE}\left\{\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (5)} + \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi r}{l}\right)^4\right] \times \text{Col. (6)}\right\} \times \sin\frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right)^2 \times \text{Col. (7)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $p_{dr}\left[\left(\frac{l}{r}\right) \times \text{Col. (8)}\right]\cos\frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $p_{dr} \times \text{Col. (9)} \times \sin\frac{\pi x}{l}$ Vertical Displacement ΔV— $p_{dr}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{2r}{\pi l}\right)^2+\frac{2}{\pi^4}+\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (10)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$ Horizontal Displacement ΔH— $+ p_{dr}\frac{l^4}{r^3tE}\left[\left(\frac{r}{l}\right)^4 \times \text{Col. (11)}\right] \times \sin\frac{\pi x}{l}$

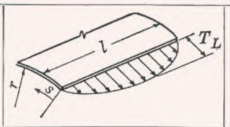
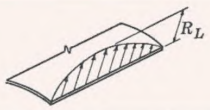
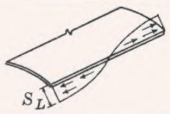
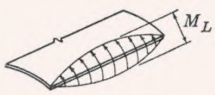
$\phi_k - \phi$	T_x	S	T_ϕ	ΔV	ΔH		T_x	S	T_ϕ	ΔV	ΔH
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	−0.3040	0	−1.0000	0.12319	0	0	−0.2026	0	−1.000	1.0000	0
5	−0.2993	−0.0829	−0.9924	0.12180	0.0872	−0.00009	−0.2019	−0.0555	−0.9962	0.9924	0.0868
10	−0.2856	−0.1633	−0.9698	0.11766	0.1736	−0.00064	−0.1996	−0.1105	−0.9848	0.9698	0.1710
15	−0.2623	−0.2387	−0.9330	0.11102	0.2588	−0.00213	−0.1975	−0.1648	−0.9659	0.9330	0.2500
20	−0.2329	−0.3069	−0.8830	0.10222	0.3420	−0.00490	−0.1904	−0.2178	−0.9397	0.8830	0.3214
25	−0.1954	−0.3658	−0.8214	0.09170	0.4226	−0.00930	−0.1837	−0.2690	−0.9063	0.8214	0.3830
30	−0.1520	−0.4140	−0.7500	0.08001	0.5000	−0.01539	−0.1754	−0.3183	−0.8660	0.7500	0.4330
35	−0.1040	−0.4487	−0.6710	0.06771	0.5736	−0.02325	−0.1660	−0.3652	−0.8191	0.6710	0.4698
40	−0.0528	−0.4702	−0.5868	0.05537	0.6428	−0.03272	−0.1552	−0.4092	−0.7660	0.5868	0.4924

*Published by the American Society of Civil Engineers.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

TABLE 3A.—Edge Loads on Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas for $n = 1$; for $n = 3$ Substitute $\frac{3\pi x}{l}$ Instead of $\frac{\pi x}{l}$			
	Longitudinal Force T_x— $T_L \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $T_L \times$ Col. (2) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $T_L \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $T_L \times t \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $R_L \times \frac{l}{t} \times$ Col. (6) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $R_L \times \frac{t}{t} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $R_L \times l \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $S_L \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $S_L \times$ Col. (10) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $S_L \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $S_L \times t \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$	Longitudinal Force T_x— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (13) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Shearing Force S— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (14) $\times \cos \frac{\pi x}{l}$ Transverse Force T_ϕ— $M_L \times \frac{1}{t} \times$ Col. (15) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$ Transverse Moment M_ϕ— $M_L \times$ Col. (16) $\times \sin \frac{\pi x}{l}$
	(b) $n = 1$			
				

$\frac{s}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	T_x (1)	S (2)	T_ϕ (3)	M_ϕ (4)	T_x (5)	S (6)	T_ϕ (7)	M_ϕ (8)	T_x (9)	S (10)	T_ϕ (11)	M_ϕ (12)	T_x (13)	S (14)	T_ϕ (15)	M_ϕ (16)
0.2	+ 8.039	−2.488	+0.769	+0.1217	−0.1224	+0.05501	+0.00539	+0.02779	+3.624	+0.169	+0.0851	+0.0378	−0.1135	+0.1348	+0.01418	+0.837
0.1	+15.393	−1.575	+0.933	+0.1301	−0.3353	+0.03740	+0.00163	+0.01407	+5.200	+0.515	+0.0589	+0.0227	−0.7959	+0.1008	+0.00452	+0.913
0.0	+24.846	0	+1.000	0	−0.6254	0	0	0	+7.129	+1.000	0	0	−1.8212	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.006:																
3.2	− 0.153	−0.209	+0.047	+0.1550	+0.0179	+0.00877	−0.00034	−0.00493	+0.017	−0.029	+0.0122	+0.0265	+0.0692	+0.0134	+0.00536	−0.002
1.6	− 0.103	+0.827	−0.230	−0.9042	−0.0591	−0.03918	+0.00239	+0.03457	−0.202	+0.094	−0.0522	−0.1554	−0.2359	−0.0467	−0.03216	+0.050
0.8	− 5.182	−1.161	−0.344	−0.8634	+0.1807	−0.00480	+0.02822	+0.07956	−0.481	−0.263	−0.0089	−0.0585	+0.3234	−0.0780	+0.03503	+0.417
0.4	− 1.030	−2.556	+0.347	−0.0900	+0.1227	+0.05977	+0.01810	+0.05372	+1.253	−0.197	+0.0890	+0.0380	+0.4651	+0.0860	+0.03538	+0.664
0.2	+ 6.371	−2.158	+0.778	+0.1355	−0.1270	+0.06253	+0.00677	+0.02870	+3.240	+0.182	+0.0955	+0.0382	−0.0872	+0.1294	+0.01514	+0.814
0.1	+12.071	−1.363	+0.936	+0.1232	−0.3444	+0.04246	+0.00205	+0.01463	+4.628	+0.523	+0.0655	+0.0224	−0.6882	+0.0975	+0.00484	+0.901
0.0	+19.407	0	+1.000	0	−0.6412	0	0	0	+6.328	+1.000	0	0	−1.6010	0	0	+1.000
$\frac{rt}{l^2}$=0.008:																
3.2	− 0.086	−0.178	+0.050	+0.1271	+0.0163	+0.00949	−0.00072	−0.00511	+0.022	−0.025	+0.0132	+0.0227	+0.0605	+0.0132	+0.00522	−0.002
1.6	− 0.131	+0.719	−0.240	−0.7409	−0.0562	−0.04265	+0.00383	+0.03459	−0.199	+0.084	−0.0567	−0.1360	−0.2087	−0.0432	−0.03372	+0.043
0.8	− 4.278	−1.094	−0.313	−0.6617	+0.1813	−0.00397	+0.03329	+0.07719	−0.414	−0.263	−0.0042	−0.0422	+0.2814	−0.0763	+0.03497	+0.385
0.4	− 0.770	−2.316	+0.367	−0.0315	+0.1217	+0.06531	+0.02116	+0.05188	+1.177	−0.187	+0.0988	+0.0410	+0.4211	+0.0803	+0.03618	+0.637

TABLE 3B.—Edge Displacements of Simply Supported Cylindrical Shells

	Tangential Edge Load	Radial Edge Load	Shear Edge Load	Moment Edge Load
	(a) Basic Formulas			
	Tangential Displacement v (Inward Positive)— $T_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (1) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (4) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l}{Et} \times$ Col. (7) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{Et^2} \times$ Col. (10) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Radial Displacement w (Outward Positive)— $T_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (2) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^3}{Et^3} \times$ Col. (5) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{l^2}{Et^2} \times$ Col. (8) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l^2}{Et^3} \times$ Col. (11) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$
	Rotation θ (Counter Clockwise Positive)— $T_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (3) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$R_L \times \frac{l^2}{EI} \times$ Col. (6) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$S_L \times \frac{lt}{EI} \times$ Col. (9) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$	$M_L \times \frac{l}{EI} \times$ Col. (12) $\times \sin \frac{n\pi x}{l}$

$\frac{rt}{l^2}$	v (1)	w (2)	θ (3)	v (4)	w (5)	θ (6)	v (7)	w (8)	θ (9)	v (10)	w (11)	θ (12)
	(b) $n = 1$											
0.002	−77.30	−1.495	0.5712	1.495	0.03568	−0.01782	−11.91	−0.1861	0.05752	6.854	0.2138	−0.1710
0.003	−54.76	−1.409	0.4742	1.409	0.04535	−0.02027	− 9.393	−0.1943	0.05227	5.691	0.2433	−0.1795
0.004	−42.58	−1.342	0.4118	1.342	0.05332	−0.02206	− 7.909	−0.1990	0.04830	4.942	0.2648	−0.1851
0.006	−29.98	−1.243	0.3329	1.243	0.06635	−0.02459	− 6.176	−0.2041	0.04246	3.995	0.2951	−0.1920
0.008	−23.24	−1.169	0.2830	1.169	0.07690	−0.02634	− 5.164	−0.2062	0.03819	3.396	0.3161	−0.1962
0.010	−19.03	−1.110	0.2477	1.110	0.08582	−0.02764	− 4.485	−0.2069	0.03484	2.973	0.3317	−0.1990
0.015	−13.18	−1.000	0.1911	1.000	0.1036	−0.02983	− 3.452	−0.2058	0.02878	2.293	0.3580	−0.2032
0.020	−10.13	−0.9204	0.1565	0.9204	0.1174	−0.03120	− 2.853	−0.2029	0.02457	1.878	0.3744	−0.2055
0.025	− 8.241	−0.8582	0.1327	0.8582	0.1286	−0.03213	− 2.455	−0.1994	0.02142	1.593	0.3855	−0.2069
0.030	− 6.958	−0.8074	0.1152	0.8074	0.1381	−0.03279	− 2.168	−0.1956	0.01894	1.383	0.3935	−0.2078

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

An explanation of the reason for using a sinusoidal load instead of the actual uniform load on the shell is necessary. Although the membrane analysis could be made for a uniform load, the second principal step in shell analysis involving the application of corrective edge loads cannot be accomplished unless these edge loads are sinusoidal in shape. Therefore, to achieve compatibility of stresses produced by both edge and surface loads, the surface load is also assumed sinusoidal. While this sinusoidal load is different from the actual load, it can be made to approximate the effect of the uniform load.

To illustrate the similarity of flexural effects of both types of loads, a comparison is made of a simple beam supporting first a sinusoidal load (see Fig. 6) and then a uniform load.

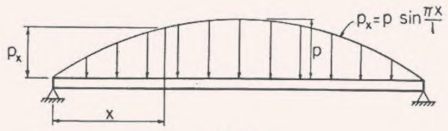


FIG. 6

Expressions for shear, moment, slope and deflection based on the sinusoidal loading of $p = 1$ are:

$$p_x = p \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

$$V = \int p_x dx = p \int \sin \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{2}$$

$$M = \int V dx = p \int -\frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} dx = -\frac{pl^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3}$$

$$\theta = \int \frac{M dx}{EI} = \frac{p}{EI} \int -\frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} dx = +\frac{pl^3}{EI\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} \tag{4}$$

$$\triangle = \int \theta dx = \frac{p}{EI} \int \frac{l^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{p}{EI} \frac{l^4}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{5}$$

Using these expressions, the following comparison is made with the uniform load condition:

℄ Moment (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^2} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.128$
℄ Moment (uniform)	$\sim \frac{1}{8}$	$= 0.125$
℄ Deflection (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi^4} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.0130$
℄ Deflection (uniform)	$\sim \frac{5}{384}$	$= 0.0130$
Support Shear (sinusoidal)	$\sim \frac{1}{\pi} \times \frac{4}{\pi}$	$= 0.405$
Support Shear (uniform)	$\sim \frac{1}{2}$	$= 0.500$

In this comparison, the centerline or maximum ordinate of the sinusoidal load equals $1.0 \times \frac{4}{\pi}$ while the uniform load has an intensity of 1.0. The maximum ordinate of the sinusoidal load must be of greater intensity than the uniform load if the stresses produced by the two loads are to be similar, and the factor $\frac{4}{\pi}$ used for this purpose is derived from a Fourier Analysis. Results of this comparison indicate that good agreement is obtained for moment and deflection of beams with only the first term of the Fourier Series. This same trend holds for the shell.

Several terms of the Fourier Series may be added to approximate the uniform longitudinal load. Each of these terms represents a partial load having an intensity varying as $\frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}$ where $n = 1, 3, 5$, etc. Figs. 7a, 7b and 7c illustrate graphically the first three terms. Fig. 7d shows

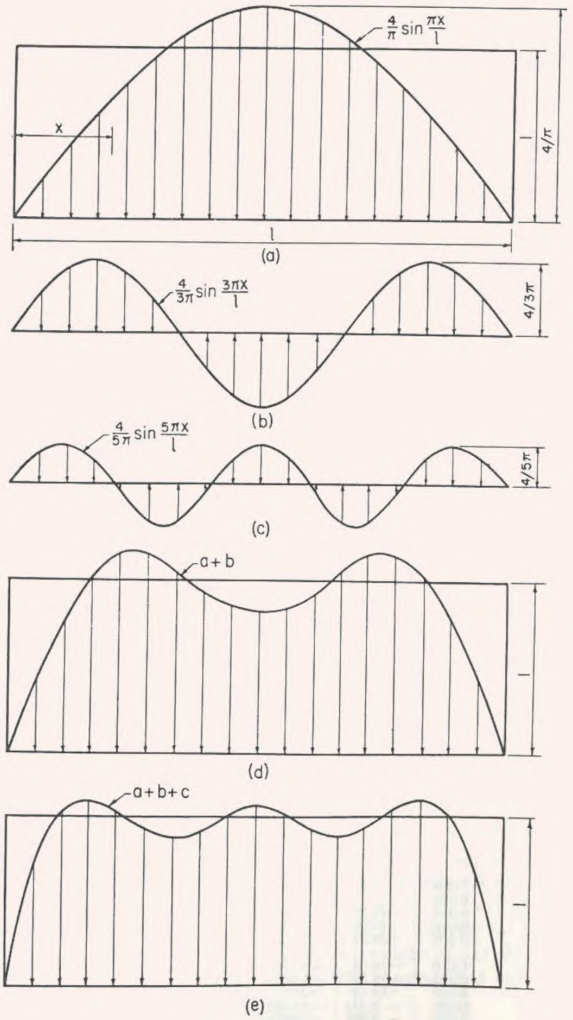


FIG. 7

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

the load resulting from the addition of the first two terms while Fig. 7e is the combination of the first three terms. The sum of all terms of the series would closely approximate the straight line $p = 1$. However, the preceding comparison indicates that the use of many terms is unnecessary and for clarity the computations for this example will be made in detail for only the first term where $n = 1$, as given in Table 1B.

Internal forces and displacements are defined as follows:

T_ϕ = Direct force component in the transverse direction, considered positive when tensile.
T_x = Direct force component in the longitudinal direction, considered positive when tensile.
S = Longitudinal shearing force, considered positive when creating tension in the direction of increasing values of x and ϕ.
$\triangle_V$ = Vertical displacement, considered positive when downward.
$\triangle_H$ = Horizontal displacement, considered positive when inward.

Transverse and longitudinal distribution of membrane forces created by a unit uniform transverse load or a unit dead load may be determined from Table 1B. Internal forces T_x, T_ϕ and S are obtained by means of formulas listed in the table heading in conjunction with tabulated coefficients. The transverse distribution of internal forces is given according to the column headed $\phi_k - \phi$, the central angle measured from the crown of the shell. ϕ_k is equal to one-half the angle subtended by the barrel while the angle ϕ is measured from the bottom edge as shown in Fig. 5. The angle $\phi_k - \phi$ is, therefore, the angle from the crown to any point designated by ϕ. For example, coefficients for values at the crown are taken at $\phi_k - \phi = 0°$.

The distribution of internal forces in the longitudinal direction varies according to trigonometric functions in formulas in the heading of Table 1B. For the sinusoidal surface load, forces T_ϕ and T_x vary as $\sin \frac{\pi x}{l}$ in which $\frac{\pi x}{l}$ is measured in radians. When $x = \frac{l}{2}$, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin \frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$. When $x = 0$ or l, $\sin \frac{\pi x}{l} = \sin 0°$ or $180°$ and is equal to zero. Values at intermediate points can be obtained from any trigonometric table, but values at $\frac{x}{l} = \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{3}$ are easily determined since they correspond to $\sin 30°$, $45°$ and $60°$, respectively, which have values of 0.50, 0.707 and 0.866.

As in a beam, shear is maximum at the support and zero at midspan, the shearing force varying as $\cos \frac{\pi x}{l}$. This function equals $+1$ and -1 at the supports and zero at midspan.

Two sets of coefficients and formulas are given in Table 1B, one for use with uniform live load p_u and one for dead load p_d. To obtain the magnitude of various membrane forces due to either load, coefficients must be multiplied by factors given in the formulas. For example, the coefficient of T_x selected for a specific value of $\phi_k - \phi$ must be multiplied by the load p_u or p_d, the constant $\left(\frac{l}{r}\right)^2$, the shell radius r, and the factor $\frac{4}{\pi}$. Coefficients in Table 1B are applicable to any shell irrespective of its proportions.

Coefficients for determining internal forces and moments due to line loads applied along one edge of a shell are given in Tables 3A and 3B, which are reproduced in part here. These tables are applicable to shells having a ratio $\frac{r}{l}$ exceeding 0.6 and are therefore appropriate for this example where $\frac{r}{l}$ equals 0.9. Another set of tables, 2A and 2B, presented in ASCE Manual No. 31 but not reproduced here, gives effects of symmetrical edge loads on barrel shells having $\frac{r}{l}$ less than 0.6.

This arbitrary division is one of convenience but does have a reasonable basis. It is only when $\frac{r}{l}$ is approximately 0.6 or less that line loads applied along one edge create significant stresses and displacements at the opposite edge. In this case, the arc length of the shell has an important influence on stress distribution but when $\frac{r}{l}$ is 0.6 or more, stresses are independent of arc length. For this reason coefficients of Tables 2A and 2B are given in terms of the subtended angle while those of Tables 3A and 3B are not.

When $\frac{r}{l}$ is less than 0.6, forces and displacements at the far edge of the shell produced by line loads at the near edge must be made to agree with actual boundary conditions. This could be done by applying another set of loads at the far edge, these loads in turn creating inconsistent forces at the near edge. However, the operation involving successive correction of these diminishing forces can be replaced by a single step if symmetrical loads are applied simultaneously at both longitudinal edges. Tables 2A and 2B are developed for this type of loading.

As $\frac{r}{l}$ increases beyond 0.6, the negligible far edge effects do not require correction and analysis requires only one application of line loads at each edge with final superposition of forces resulting from both loadings. For a symmetrically loaded shell computations are required for only one edge since results are applicable in reverse order for loads at the opposite edge. While Tables 3A and 3B covering the case of $\frac{r}{l} \geq 0.6$ could have been prepared for simultaneous application of symmetrical edge loads as in Tables 2A and 2B, their range or usefulness would have been limited by such an arrangement. These tables are therefore developed for loads applied at only one edge of the shell.

Coefficients in Table 3A are tabulated for the four different types of unit edge loads indicated by sketches in the table heading and give four effects of each load. These effects, which may be evaluated at the transverse locations indicated by the term $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, include the bending moment M_ϕ and the three forces T_x, T_ϕ and S. A large range of shell proportions is included by means of the

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

term $\frac{rt}{l^2}$ varying from 0.002 to 0.1. Small values are applicable to shells with proportions in the vicinity of $\frac{r}{t} = 200$ and $\frac{r}{l} = 0.6$, i.e., $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \times \frac{t}{r} = \frac{rt}{l^2} = 0.0018$, while large values correspond to short shells having a radius several times the longitudinal span. It should be noted that Tables 3A and 3B include two sinusoidal loadings, one with $n=1$ and one with $n=3$, since the second loading term becomes more important with increasing values of $\frac{r}{l}$.

Table 3B provides data for evaluating radial, tangential and rotational displacements due to four different edge loads. This and previously mentioned tables will be used in the design example that follows.

TABLE I—Internal Forces in an Interior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$ / $\frac{s}{\phi}$ / $\phi_k - \phi$	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′	Multipliers	3.2 / 44.5 / 56° 40′	1.6 / 22.3 / 28° 20′ / −2°	0.8 / 11.1 / 14° 10′ / 12°	0.4 / 5.6 / 7° 5′ / 19°	0.2 / 2.8 / 3° 30′ / 23°	0.1 / 1.4 / 1° 45′ / 25°	0 / 0 / 0° / 26° 23′
Load	Coefficients								Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.9970	−0.9551	−0.8930	−0.8460	− 0.8214	− 0.8017	1,720		− 1,720	− 1,640	− 1,540	− 1,460	− 1,410	− 1,380
② p_d		−0.9985	−0.9772	−0.9449	−0.9196	− 0.9063	− 0.8952	2,860		− 2,860	− 2,790	− 2,700	− 2,630	− 2,590	− 2,560
③ Σ										− 4,580	− 4,430	− 4,240	− 4,090	− 4,000	− 3,940
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	5,760	+ 270	− 1,330	− 1,980	+ 2,000	+ 4,480	+ 5,390	+ 5,760
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	135,400	− 50	+ 320	+ 3,820	+ 2,450	+ 920	+ 280	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	1,620	+ 20	− 80	− 10	+ 140	+ 150	+ 110	0
⑦ M_L	+0.00536	−0.03216	+0.03503	+0.03538	+0.01514	+ 0.00484	0	−7,000	− 40	+ 220	− 250	− 250	− 110	− 30	0
⑧ Σ									+ 200	− 870	+ 1,580	+ 4,340	+ 5,440	+ 5,750	+ 5,760
⑨ Forces due to line loads at far edge									+ 5,760	− 760	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨										− 6,210	− 3,210	+ 150	+ 1,500	+ 1,940	+ 2,020
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.0332	−0.1935	−0.2933	−0.3422	− 0.3658	− 0.3791	1,910		− 60	− 370	− 560	− 650	− 700	− 720
② p_d		−0.0222	−0.1322	−0.2072	−0.2485	− 0.2690	− 0.2826	3,170		− 70	− 420	− 660	− 790	− 850	− 900
③ Σ										− 130	− 790	− 1,220	− 1,440	− 1,550	− 1,620
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	5,760	− 1,200	+ 4,760	− 6,690	−14,700	−12,400	− 7,850	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	135,400	+ 1,190	− 5,310	− 650	+ 8,100	+ 8,470	+ 5,750	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	1,620	− 50	+ 150	− 430	− 320	+ 290	+ 850	+ 1,620
⑦ M_L	+0.0134	−0.0467	−0.0780	+0.0860	+0.1294	+ 0.0975	0	−7,000	− 90	+ 330	+ 550	− 600	− 910	− 680	0
⑧ Σ									− 150	− 70	− 7,210	− 7,520	− 4,550	− 1,930	+ 1,620
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 1,620	+ 1,800	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨										+ 1,600	− 9,400	− 9,540	− 6,410	− 3,730	0
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
① p_u		−0.3021	−0.2763	−0.2387	−0.2104	− 0.1954	− 0.1867	2,120		− 640	− 590	− 510	− 450	− 430	− 400
② p_d		−0.2023	−0.1987	−0.1918	−0.1863	− 0.1837	− 0.1771	3,520		− 710	− 700	− 680	− 660	− 650	− 620
③ Σ										− 1,350	− 1,290	− 1,190	− 1,110	− 1,080	− 1,020
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	5,760	− 880	− 590	−29,800	− 5,930	+36,700	+69,500	+112,000
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	135,400	+ 2,420	− 8,000	+24,500	+16,600	−17,200	−46,600	− 86,800
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	1,620	+ 30	− 330	− 780	+ 2,030	+ 5,250	+ 7,500	+ 10,300
⑦ M_L	+0.0692	−0.2359	+0.3234	+0.4651	−0.0872	− 0.6882	− 1.6010	−7,000	− 480	+ 1,650	− 2,260	− 3,260	− 610	+ 4,820	+ 11,200
⑧ Σ									+ 1,080	− 7,270	− 8,340	+ 9,440	+25,360	+35,220	+ 46,700
⑨ Forces due to line loads at far edge									+46,700	−10,400	+ 200	+ 1,900	+ 2,000	+ 2,000	+ 1,500
⑩=③+⑧+⑨										−19,020	− 9,430	+10,150	+26,250	+36,140	+ 47,180
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,920	+ 300	− 1,740	− 1,660	− 170	+ 260	+ 240	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	45,200	− 220	+ 1,560	+ 3,600	+ 2,430	+ 1,300	+ 660	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	540	+ 10	− 80	− 30	+ 20	+ 20	+ 10	0
⑦ M_L	−0.002	+0.050	+0.417	+0.664	+0.814	+ 0.901	+ 1.000	−2,330	+ 50	− 120	− 970	− 1,550	− 1,900	− 2,100	− 2,330
⑧ Σ									+ 90	− 380	+ 940	+ 730	− 320	− 1,190	− 2,330
⑨ Forces due to line loads at far edge									− 2,330	− 50	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨										− 430	+ 550	+ 590	− 355	− 1,175	− 2,280

①②③ Surface loads
④⑤⑥⑦⑧ Line loads applied at near edge

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Analysis of Simply Supported Interior Barrel Shell

A—Membrane Analysis

Data necessary for this analysis are:

Live load p_u = 30 psf
Dead load p_d = 50 psf
Radius r = 45 ft.
$\frac{l}{r} = \frac{50}{45}$ = 1.11
$\left(\frac{l}{r}\right)^2$ = 1.238

In the membrane analysis external surface loads, dead and live, induce three forces throughout the shell: T_x, the force in the longitudinal direction; T_ϕ, the force in the transverse direction; and S, the tangential shearing force. For maximum values, T_x and T_ϕ are found at mid-span or at $x = \frac{l}{2}$, while S is found at the supports where $x = 0$ or $x = l$.

The magnitude of these internal forces is given in Table I (Roman numerals are used for the computed tables to differentiate them from Manual tables) at various transverse points, each location being expressed in four different terms. The first, $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$, is one of the parameters of Table 3A and values are selected to agree with those listed in Table 3A. Values of the other three terms s, ϕ and $\phi_k - \phi$ agree accordingly. For example, if $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.1$,

$$s = 0.1\sqrt[4]{rtl^2} = 0.1\sqrt[4]{(45)(0.333)(50^2)}$$

or s = 1.391 ft.

Also $\phi = \frac{s}{r}$ (in radians)

$$\phi = \frac{1.391}{45} \times \frac{180}{\pi} = 1.77°$$

The point indicated in Table I by s = 44.5 ft. and $\phi = 56°40'$ lies slightly beyond the far edge of the shell. Although forces determined at this point are meaningless for the shell under consideration, they are used for interpolation of forces at the far edge.

Membrane forces are determined by means of equations in the heading of Table 1B. The combination of all terms in any one equation with the exception of the coefficient is called the multiplier. Multipliers for this example are:

For live load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.238 = 2120$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 \times 1.11 = 1910$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 30 \times 45 = 1720$

For dead load:

(T_x) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.238 = 3520$

(S) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 \times 1.11 = 3170$

(T_ϕ) $\frac{4}{\pi} \times 50 \times 45 = 2860$

Coefficients for these multipliers are taken from columns (1), (2), (3) and (7), (8), (9) for live and dead loads, respectively. For example, to find the live load coefficient for the force T_x at $\phi = 7°\,5'$ or $\phi_k - \phi = 19°\,18'$, enter column (1) of Table 1B. Sufficient accuracy is achieved by interpolating for an angle $\phi_k - \phi = 19°$ giving the coefficient -0.2387. Multiplying this coefficient by the multiplier 2120 gives a force T_x of 510 lb. per ft.

The same procedure is repeated at various locations across the shell to determine the forces T_ϕ, T_x and S induced by both dead and live loads. Results are tabulated in rows ① and ② of Table I, while rows ③ give a summation of ① and ②. Slide rule accuracy is sufficient in these computations.

B—Correction for Edge Loads

Complete shell analysis requires that final forces and displacements along all edges be consistent with actual boundary conditions. Since the membrane analysis assumes the existence of imaginary edge supports, membrane forces must be corrected. This correction constitutes the second principal step of shell analysis.

The sequence of operations involved in the second step requires determination of magnitude and direction of corrective line loads applied at the edges and then evaluation of the internal forces which they produce. For a single barrel shell without edge beams—that is, one in which longitudinal edges are free—the only condition to be satisfied is that the algebraic sum of corrective line loads and membrane forces at the edges equal zero. In other words, final corrective line loads T_L and S_L are equal and opposite to membrane forces T_ϕ and S and therefore are known upon completion of the membrane analysis.

In contrast to this simple analysis for a single barrel, determination of line loads for a multiple barrel roof is more complicated. Not only must membrane forces be satisfied but, in addition, displacements of common edges of adjacent barrels must coincide. For this reason final corrective line loads seldom equal membrane forces and a special notation T_{LM} and S_{LM} is introduced for line loads which satisfy only the edge forces of the membrane analysis. Final line loads T_L and S_L include T_{LM} and S_{LM} as well as loads effecting coincident edge displacements.

There are various ways of evaluating line loads for the multiple barrel roof and although the method presented here is not the most direct, it is considered the least complicated. Initially, each barrel is assumed separated from the rest of the structure and is treated as a single barrel. Following a membrane analysis, corrective line loads T_{LM} and S_{LM} producing zero reactions are applied along the longitudinal edges of each barrel. As previously mentioned, determination of these line loads does not require a separate computation and in this example values of 3940 lb. per ft. for T_{LM} and 1620 lb. per ft. for S_{LM} are taken directly from rows ③ of Table I at $\phi = 0°$. The interior barrel is in static equilibrium when these loads are applied. However, individual barrels still must be brought together in the multiple barrel system by additional line loads applied to each barrel. Internal forces produced by these additional loads then are super-

PAGE 9

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

imposed on the effects of T_{LM} and S_{LM}.

Consistency in displacements of adjacent edges is achieved by making longitudinal, vertical, horizontal and angular displacements of one edge equal to those of the other. Generally, longitudinal stresses T_x/t at common edges are made equal to each other instead of longitudinal displacements since edge displacements agree if corresponding stresses are identical. The remaining three displacement equations are established for each edge in terms of the unknown line loads T_L, R_L, S_L and M_L, coefficients taken from Table 2B or 3B and specified physical properties of the shell.

Equating like displacements of adjoining barrel edges yields four equations containing eight unknowns, these unknowns including four line loads applied to each adjacent edge. The eight unknowns can be reduced to four by statics. Because these line loads are internal, the algebraic sum of their components in any direction must equal zero. Moment and tangential shear acting on one edge must be equal and opposite to similar forces acting on the adjoining edge, and the sum of the vertical and horizontal components of radial and tangential line loads R_L and T_L applied to adjacent edges must equal zero. By inserting these conditions, the four equations can be expressed in terms of four unknowns and a simultaneous solution gives numerical values for the line loads.

The general procedure of establishing four displacement equations to determine the unknowns R_L, T_L, S_L and M_L is not always necessary. When adjacent barrels are symmetrical in shape and loading as in this design example, analysis can be simplified to a consideration of only one barrel. It should be understood that line loads applied to one barrel are applied in an opposite sense to the adjacent barrel. Agreement in displacement of common edges is obtained from four known conditions: that no horizontal or angular displacement of the edges takes place and that tangential and vertical shears along common edges are equal to zero.

The first two conditions are evident from symmetry in shape and loading. The latter two conditions also can be deduced from physical aspects of the problem. With adjacent barrels identical and equally loaded, variation of longitudinal stress is symmetrical about the common edge and tangential shear at the edge must equal zero. Vertical shear equal to the sum of the vertical components of line loads R_L and T_L, must also equal zero since its presence would indicate that load on one shell was being carried in part by the adjoining barrel, an impossible condition because of symmetry.

The four known conditions can be summarized as:

$$\begin{aligned} \triangle_H &= 0 \\ \theta &= 0 \\ S &= 0 \\ \Sigma V &= 0 \end{aligned}$$

Numerical expressions are derived for the design example from these conditions.

Expressing $\triangle_H = 0$ in terms of displacements given in Table 3B gives:

$$\triangle_H = 0 = v \cos \phi_k - w \sin \phi_k \tag{6}$$

where v is the tangential displacement of the shell considered positive in the direction of increasing values of ϕ, and w the radial displacement considered positive when outward. Sign convention for this equation arbitrarily defines displacement to the left as positive. The trigonometric relationship is shown in Fig. 8.

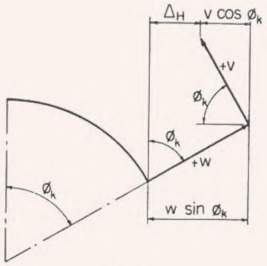


FIG. 8

Evaluation of v and w is made by combining displacement contributions of T_{LM} and S_{LM} with those of the four line loads which unite displaced edges of adjoining barrels. T_{LM} and S_{LM} are part of the final edge loads T_L and S_L, respectively, and are combined with them in equation (7). Tangential and radial displacements due to the four line loads T_L, R_L, S_L and M_L are given in the heading of Table 3B. Equation (7) is given at $x = \frac{l}{2}$ and for convenience is divided by the factor $\frac{l}{Et}$.

$$\begin{aligned} \triangle_H = 0 = \Big[&(T_L + 3940) \times \text{Col. (1)} + R_L \times \tfrac{l}{t} \times \\ &\text{Col. (4)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (7)} + M_L \times \tfrac{1}{t} \times \\ &\text{Col. (10)} \Big] \cos \phi_k - \Big[(T_L + 3940) \times \text{Col. (2)} + \\ &R_L \times \tfrac{l}{t} \times \text{Col. (5)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (8)} + \\ &M_L \times \tfrac{1}{t} \times \text{Col. (11)} \Big] \tfrac{l}{t} \sin \phi_k \end{aligned} \tag{7}$$

Substituting coefficients of Table 3B given for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ and for the first sine loading ($n = 1$) together with dimensional and trigonometric values gives:

$$\begin{aligned} 0 = \Big[&(T_L + 3940)(-29.98) + (R_L)(150)(1.243) + \\ &(S_L + 1620)(-6.176) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(3.995) \Big] 0.8958 - \\ \Big[&(T_L + 3940)(-1.243) + (R_L)(150)(0.06635) + \\ &(S_L + 1620)(-0.2041) + \left(\frac{M_L}{t}\right)(0.2951) \Big] (150)(0.4444) \end{aligned} \tag{7a}$$

which reduces to:

$$0 = 233{,}700 + 56.00\, T_L - 496.4\, R_L + 8.073\, S_L - 16.09 \frac{M_L}{t} \tag{7b}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

The term $\frac{M_L}{t}$ is kept separate for convenience in the use of Table 3A.

The condition of zero edge rotation for the interior barrel ($\theta = 0$) is expressed by combining rotational effects of edge loads T_L, R_L, S_L and M_L taken from the heading of Table 3B. Rotation is determined at midspan where $x = \frac{l}{2}$ and the entire equation is divided by $\frac{lt}{EI}$.

$$\theta = 0 = (T_L + 3940) \times \text{Col. (3)} + R_L \times \frac{l}{t} \times \text{Col. (6)} + (S_L + 1620) \times \text{Col. (9)} + M_L \times \frac{1}{t} \times \text{Col. (12)} \tag{8}$$

Substituting dimensions and coefficients from Table 3B gives:

$$0 = (T_L + 3940)(0.3329) + (R_L \times 150)(-0.02459) + (S_L + 1620) \times 0.04246 + \left(\frac{M_L}{t}\right)(-0.1920) \tag{8a}$$

which simplifies to:

$$1380 + 0.3329\,T_L - 3.689\,R_L + 0.04246\,S_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0 \tag{8b}$$

Static equilibrium of the interior barrel was satisfied by application of loads T_{LM} and S_{LM}. To maintain this stability the summation of vertical components of line loads R_L and T_L must equal zero. The expression for $\Sigma V = 0$ at one edge is developed from the sketch of Fig. 9.

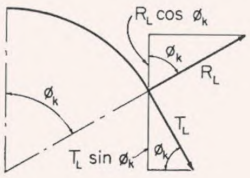


FIG. 9

Assuming the downward direction positive gives:

$$-R_L \cos \phi_k + T_L \sin \phi_k = 0 \tag{9}$$

$$-R_L \times 0.8958 + T_L \times 0.4444 = 0 \tag{9a}$$

$$T_L = 2.016\,R_L \tag{9b}$$

As previously discussed, shear is zero at the edges of the interior barrel in this example. Since shear equilibrium is produced by the load S_{LM} of 1620 lb. per ft. which resists shear resulting from the membrane analysis, the only other shearing force involved, line load S_L, along these edges must equal zero.

Substituting the value of T_L from equation (9b) and setting $S_L = 0$, equations (7b) and (8b) become:

$$233{,}700 - 383.5\,R_L - 16.09\,\frac{M_L}{t} = 0$$

$$1380 - 3.017\,R_L - 0.1920\,\frac{M_L}{t} = 0$$

Solving these simultaneously gives:

$$R_L = +903 \text{ lb. per ft.}$$

$$\frac{M_L}{t} = -7000 \text{ ft. lb. per ft.}^2$$

and from equation (9b):

$$T_L = 1820 \text{ lb. per ft.}$$

These line loads satisfy requirements of transverse continuity along longitudinal edges of the interior barrel. Since T_{LM} acts in the same direction as the force T_L these two forces are combined to form a final T_L of $+1820 + 3940 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the value of S_L is added to S_{LM} to give a final S_L of $0 + 1620 = +1620$ lb. per ft. The sign convention for T_L and S_L is the same as that for T_ϕ and S, respectively. Positive R_L is in the outward direction while positive M_L produces compression at the upper surface of the shell.

Internal forces resulting from edge loads are determined by equations in the heading of Table 3A. In these equations the terms $\sin \frac{\pi x}{l}$ and $\cos \frac{\pi x}{l}$ equal 1.0 at $x = \frac{l}{2}$ and $x = 0$, respectively. As previously discussed, the multiplier is the combination of all terms in one equation with the exception of the coefficient. For example, the multiplier for computing internal forces T_ϕ, S and T_x resulting from line load T_L equals $T_L \times 1.0 = +5760$ lb. per ft. Similarly, the multiplier for these same forces due to R_L equals $R_L \times \frac{l}{t} \times 1.0 = +903 \times \frac{50}{0.333} \times 1.0 = +135{,}400$ lb. per ft., while the multiplier for moment M_ϕ due to the edge moment M_L is $M_L \times 1.0 = \frac{M_L}{t} \times t \times 1.0 = -7000 \times 0.333 \times 1.0 = -2330$ lb. per ft. All multipliers are tabulated in the center column of Table I.

Coefficients taken from Table 3A for $\frac{rt}{l^2} = 0.006$ are listed in rows ④ through ⑦ at the left side of Table I. These coefficients times appropriate multipliers give the forces T_ϕ, T_x, S and M_ϕ at the points indicated by $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$. These forces are listed at the right side of the table.

For illustration, the internal force T_ϕ produced by line load T_L at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is obtained by multiplying the coefficient $+0.347$ by the multiplier $+5760$ to give $+2000$ lb. per ft. Other values of T_ϕ at this location due to line loads R_L, S_L and M_L are determined in a similar manner and all are added algebraically in row ⑧ and plotted in Fig. 10 to show the variation of T_ϕ across the shell. Similar curves for T_x, S and M_ϕ are also included. Although values are not available for plotting between $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.6$ and 3.2, curves can be estimated with a satisfactory degree of accuracy since the magnitude of forces between these values becomes smaller and curvatures diminish.

PAGE 11

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

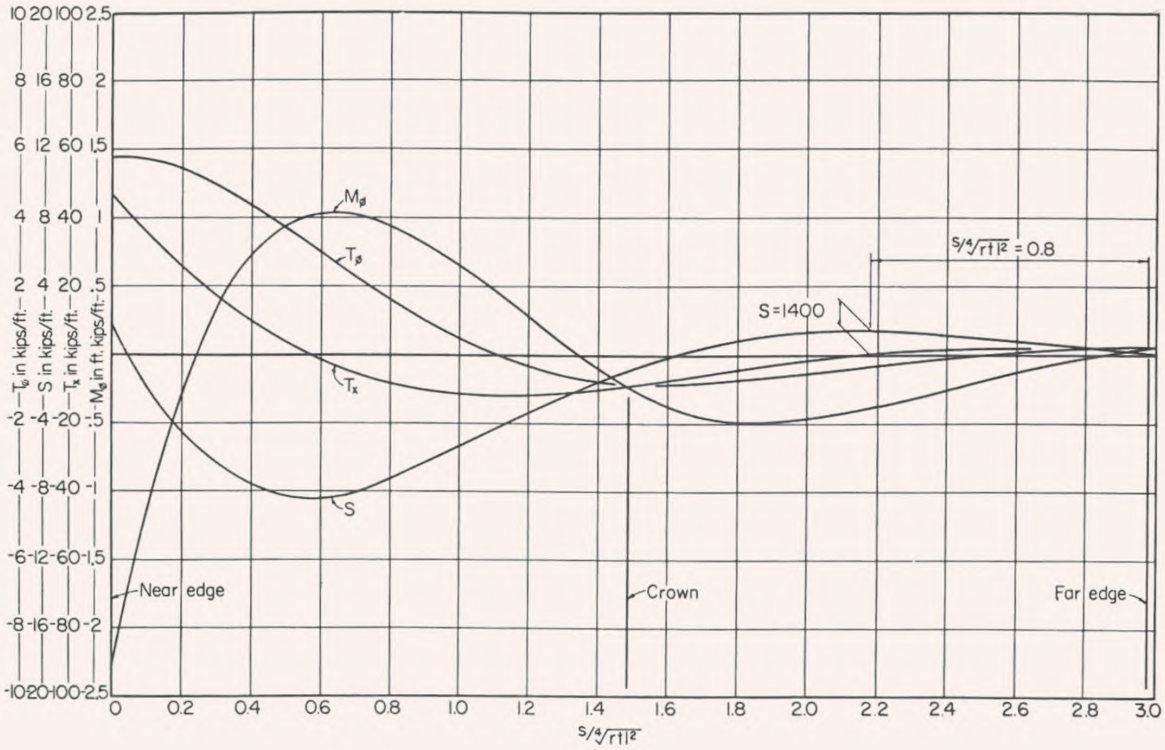


FIG. 10

The curves of Fig. 10 involve line loads applied only at the near edge. Symmetry of structure and loading allows the use of these same curves for determining forces resulting from line loads acting at the far edge. This is done by reversing the abscissa scale of Fig. 10 so that the right edge represents the near edge of the shell and then scaling directly from the curves. For example, the magnitude of force S at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.8$ (measured on the reversed scale) due to line loads at the far edge is scaled as 1400 lb. per ft. Forces determined in this manner are tabulated in rows ⑨ of Table I.

Although algebraic signs tabulated for shear in row ⑧ of Table I agree with those of the S curve in Fig. 10, signs in row ⑨ are opposite to those indicated by this curve. This is due to the fact that the shear sign convention defined on page 9 is related to the origin of the coordinate axes. The signs of coefficients for line loads are based on a coordinate system originating at the loaded edge. Therefore, line loads applied at near and far edges have different referent axes, and positive shears due to these two loads will be opposite in direction.

The difference between positive shear directions can be seen by reference to Fig. 11 in which face BB' is assumed to be parallel to and facing the near edge of the shell. Shear resulting from line loads acting at the near edge is referenced to the coordinate origin at the right and is positive as shown in conformance with the definition that it produce tension in the direction of increasing values of ϕ and x, or along diagonal AB. For this condition positive shear on face BB' acts toward the origin of x.

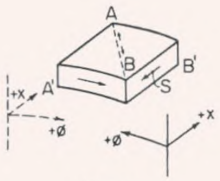


FIG. 11

Similarly, shear produced by line loads acting at the far edge is referenced to the origin at the left and when positive is directed toward the origin of x on face AA' which is nearest to the loaded edge. In this case shear on face BB' is opposite to that shown. Consequently, on a face such as BB', positive shear due to line loads at the far edge is opposite in direction to positive shear caused by line loads at the near edge. Direction is made consistent by changing signs.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

Rows ⑩ of Table I give final internal forces in the simply supported interior barrel. These are obtained by summation of membrane forces and effects of line loads applied at both longitudinal edges. Variation of these forces is shown graphically in Fig. 12.

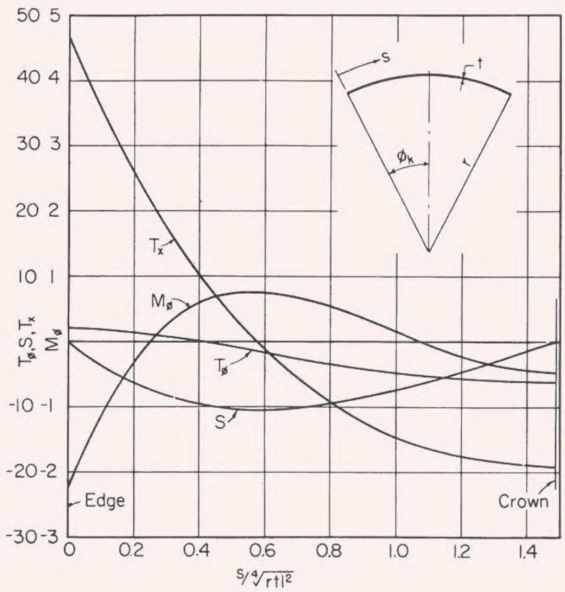


FIG. 12

Statical Check of Forces in Interior Barrel

A statical check of internal forces should be made as a precautionary measure against numerical errors. The sum of horizontal T_x-forces across a transverse section of the barrel must equal zero, the sum of vertical components of the shearing force S at each support must equal one-half the total load on the shell, and the total internal longitudinal moment at midspan due to the T_x-forces must equal the external moment.

The summation of horizontal forces at midspan is made by means of Simpson's rule. This method, useful in integrating non-linear functions, expresses area as:

$$\frac{\triangle L}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + y_n)$$

in which y_o to y_n are equally spaced ordinates of the curve enclosing the area, n is an even number, and $\triangle L$ the distance between ordinates. In this example, the arc distance from shell edge to crown is divided into four equal parts. The angle ϕ_k was shown to be 26°23′ (26.38°) and its value in radians is obtained by multiplying by $\frac{\pi}{180}$. Hence:

$$\triangle L = \frac{s}{4} = \frac{r\phi_k}{4} = \frac{45 \times 26.38 \times \pi}{4 \times 180} = 5.18 \text{ ft.}$$

The value of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ corresponding to this interval equals:

$$\frac{5.18}{\sqrt[4]{45 \times 0.333 \times 50^2}} = 0.372$$

Because values of internal forces tabulated in rows ⑩ of Table I occur at locations different from those required for ordinates in Simpson's rule, scaled values from Fig. 12 are used. With scaled values, the summation of longitudinal forces is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[47{,}180 + 4 \times 13{,}800 + 2 \times (-7{,}200) + 4 \times (-16{,}300) + (-19{,}400)]$$

$$\Sigma H = +177{,}000 - 171{,}000 = +6000 \text{ lb.}$$

The difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetic sum.

The internal moment produced by T_x-forces at any section is always the same regardless of where the axis is chosen. Here moment is computed about the bottom edge of the shell and Simpson's rule takes the form:

$$\text{Moment} = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o h_o + 4\,y_1 h_1 + 2\,y_2 h_2 + 4\,y_3 h_3 \ldots + y_n h_n]$$

where the ordinate y with its subscript is again the magnitude of the force T_x at the same locations specified for the summation of horizontal forces and h is the companion moment arm measured from the lower edge of the shell. The moment arm equals $r\,[\cos(\phi_k - \phi) - \cos\phi_k]$. The summation is multiplied by 2 to include the moment at either side of the crown.

To illustrate computations used in the moment summation, the ordinate y_1 at the point $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.372$ was scaled previously from Fig. 12 as 13,800 lb. per ft. The angle ϕ subtended by this point equals 6°36′ and $\phi_k - \phi$ is approximately 19°50′. The moment arm therefore equals $45(0.9407 - 0.8958) = 2.02$ ft. The complete expression for moment is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times 13{,}800 \times 2.02 + 2 \times (-7200) \times 3.51 + 4 \times (-16{,}300) \times 4.38 + (-19{,}400) \times 4.69]$$

from which:

$$M \text{ (internal)} = -1{,}077{,}000 \text{ ft. lb.}$$

Midspan moment due to external load is determined from equation (3), $M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}$, as developed on page 8. With shell arc length equal to $8\triangle L = 8 \times 5.18 = 41.4$ ft. and $p_u = 30$ psf and $p_d = 50$ psf, external moment is:

$$M = -\frac{50^2}{\pi^2}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right]$$
$$= -1{,}055{,}000 \text{ ft. lb.}$$

As previously discussed, dead and live loads are multiplied by $\frac{4}{\pi}$ in accordance with the Fourier Analysis. According to sign conventions adopted, both external and internal moments produce compression at the top of the shell and internal moment is only 2 per cent greater than the external.

Summation of vertical components of the shearing force S at one end of the barrel is:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

$$\Sigma V = \frac{\triangle L}{3} \times 2\,[y_o \sin(\phi_k-\phi_o) + 4\,y_1 \sin(\phi_k-\phi_1) + 2\,y_2 \sin(\phi_k-\phi_2) + \ldots y_n \sin(\phi_k-\phi_n)]$$

where y now represents ordinates of the shear curve of Fig. 12. For example, y_1 scales -9000 lb. per ft. For $\phi_k-\phi_1=19°50'$, $\sin(\phi_k-\phi_1)$ equals 0.3393 and the vertical component at this point is -9000×0.3393. Values at other points are obtained in a similar manner. Total upward force acting at the support is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3} \times 2[0 + 4 \times (-9000) \times 0.3393 + 2 \times (-9750) \times 0.2278 + 4 \times (-5850) \times 0.1161 + 0]$$

$$\Sigma V = -66{,}800 \text{ lb.}$$

Equation (2) shows that total vertical shear due to a sinusoidal load is equal to $-p\frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}$. At the support where $x = 0$, $\cos\frac{\pi x}{l} = 1$ and the reaction becomes $-p\frac{l}{\pi}$. Substituting for p the numerical values used in the moment expression, total shear is:

$$V = -\frac{50}{\pi}\left[30 \times 40 \times \frac{4}{\pi} + 50 \times 41.4 \times \frac{4}{\pi}\right] = -66{,}300 \text{ lb.}$$

In this example, good agreement is obtained between the summation of internal and external forces with a maximum difference of less than 2 per cent. Such a favorable comparison cannot always be expected. Scaled ordinates, approximate integration given by Simpson's rule and, to a minor extent, the incomplete satisfaction of edge conditions may result in differences amounting to as much as 10 per cent in exceptional cases.

Analysis of Simply Supported Exterior Barrel Shell

Geometrical properties of exterior and interior barrels of the roof in this example are similar except that a beam 24 in. deep and 9 in. wide is added at the outside edge of exterior shells. This vertical extension, defined as an edge beam, acts integrally with the shell and should not be considered a separate member.

Analysis of the exterior barrel follows almost the same procedure outlined for the interior barrel. The first step involves determination of membrane forces created by surface loads. Since identical loading is applied to all barrels, membrane forces for exterior and interior barrels are the same and their summation is taken directly from Table I or computed from Table 1B and tabulated in rows ③ of Table III on page 20. Effects of line loads at the inside edge of the exterior barrel also are similar to those previously determined for the interior barrel and these values are tabulated in rows ⑨ of Table III.

Restraint at the outside edge of the exterior barrel is quite different from that at the interior edge since displacement is resisted only by the edge beam. As a result, investigation of the exterior barrel chiefly concerns conditions at the outside edge.

It is first assumed that the exterior shell is detached temporarily from the adjoining barrel and edge beam as illustrated in Fig. 13. Line loads which re-establish unity of beam and shell can be determined in the manner shown for the interior barrel. However, to emphasize the pronounced effect of the edge beam on deflection, longitudinal stress and vertical displacement of the shell are computed without taking the edge beam into account. The force T_x created in the single barrel is:

$$T_x = (-1020 + 3940 \times 19.407 + 1620 \times 6.328) \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\text{or } T_x = 85{,}700 \sin\frac{\pi x}{l} \text{ lb. per ft.}$$

In the equation above, -1020 is the longitudinal force due to membrane forces and is taken directly from row ③ of Table I, while the two products constitute effects of line loads which counteract tangential and shear reactions at the edge resulting from the membrane analysis.

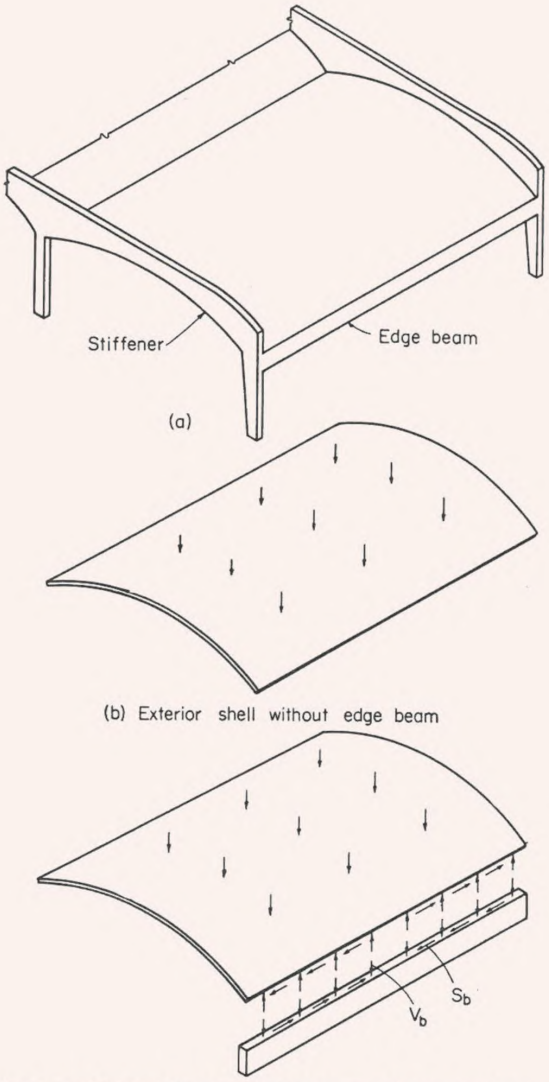


FIG. 13

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

Coefficients are taken from Table 3A. The final value of 85,700 sin $\frac{\pi x}{l}$ lb. per ft. is the longitudinal edge force existing when the shell is independent of the edge beam.

Vertical displacement of the outside edge for this condition is computed by means of Table 3B by adding vertical components of tangential and radial displacements.

$$\Delta_V = \frac{l}{Et}\,[(-3940 \times 29.98 - 1620 \times 6.176)\ 0.4444 + 150 \times (-3940 \times 1.243 - 1620 \times 0.2041)\ 0.8958]\ \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\Delta_V = -759{,}000\ \frac{l}{Et}\ \sin\frac{\pi x}{l} = \frac{114 \times 10^6}{E}\ \sin\frac{\pi x}{l}$$

If E is assumed equal to 3,000,000 psi, dead load taken as 5/8 of the total load and long-time deflection assumed 3.8* times the instantaneous deflection, then:

$$\Delta_V = \frac{5 \times 114 \times 10^6 \times 3\ 8}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} + \frac{3 \times 114 \times 10^6}{8 \times 3 \times 10^6 \times 144} = 0.73 \text{ ft. or } 8\tfrac{3}{4} \text{ in.}$$

Although actual deflection would be approximately 1/4 to 1/5 of 0.73 ft. because of longitudinal continuity, edge deflection still would be excessive without an edge beam. Because of the nonlinear variation of the T_x-forces in all shell roofs except those having very large $\frac{l}{r}$ ratios, it is probable that the creep will be considerably less than that prevailing in ordinary beams. The factor 3.8 is used here only to indicate the maximum value.

The next step is to reunite common edges of barrel and beam by making vertical displacement and longitudinal strain coincident throughout their length. The other two requirements of continuity, that horizontal displacement and angular rotation of common edges agree, can be neglected since horizontal and rotational stiffnesses of the beam are slight as compared with those of the shell.

*See *Deflection of Reinforced Concrete Members*, p. 16, available free in U.S. and Canada on request to Portland Cement Association.

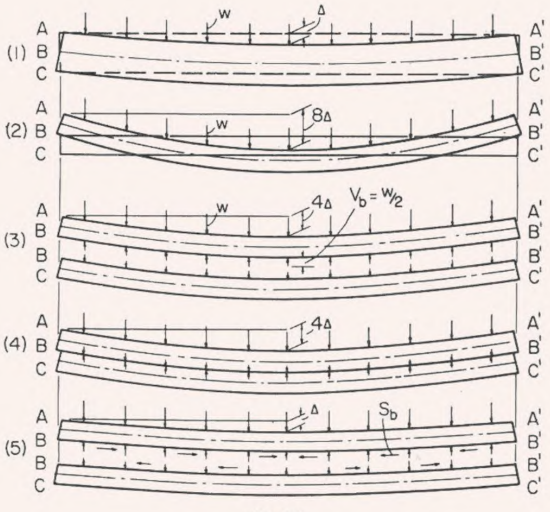


FIG. 14

Because two conditions of compatibility are to be satisfied, two types of forces must be applied at the junction of edge beam and shell. The necessity for considering two force conditions rather than one can be demonstrated easily for a simply supported rectangular beam carrying uniform load. As shown in Fig. 14 (1), deflection of the beam due to a uniform load w is designated as Δ. While impractical, analysis of this beam can be made by dividing it horizontally into two parts and then reuniting these parts by internal forces. In Fig. 14 (2), the beam is split and the entire load is assumed carried by the upper half, the deflection of this half becoming 8 Δ. The lower portion assumed unloaded remains in its undeflected position:

If equal and opposite loads of magnitude $\frac{w}{2}$ are added to both the upper and lower sections of the beam as shown in Fig. 14 (3), both parts are subjected to a net downward force of $\frac{w}{2}$ and the deflection of each becomes 4 Δ. However, strains of the common face BB' differ and can only be brought into agreement by equal and opposite shearing forces acting along this common surface. The shearing forces shorten bottom fibers of the upper beam and lengthen top fibers of the lower beam while maintaining the same relative deflection of both. Hence both displacement and strain requirements are satisfied. Final stresses and deflections obtained by this indirect procedure are identical to those obtained from a consideration of the beam as a unit.

As in this simple beam illustration, line loads acting on the edge of the exterior barrel must be equal and opposite to those carried by the edge beam. Since the edge beam is assumed to resist only vertical loads and horizontal shearing loads, forces acting on the shell must correspond to these two loads. Therefore, if forces acting on the beam are designated as V_b and S_b, shell line loads

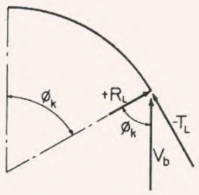


FIG. 15

are, from Fig. 15:

$$T_L = -V_b \sin\phi_k = -0.4444\ V_b \qquad (10a)$$

$$R_L = V_b \cos\phi_k = 0.8958\ V_b \qquad (10b)$$

$$S_L = S_b \qquad (10c)$$

The positive direction of V_b shown represents the reaction of the beam on the shell. The relationship expressed by equations (10a) and (10b) satisfies the condition that the horizontal edge force equals zero.

Longitudinal stress and vertical displacement at the edge are determined by superimposing effects of these line loads on those previously determined for the single barrel. With the influence of line loads applied at the far

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

edge neglected, $\frac{T_x}{t}$ and $\triangle_V$ are:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 + 19.407\,T_L - 150\times 0.6412\,R_L + 6.328\,S_L)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\Big[-759{,}000 + (-29.98\,T_L + 150\times 1.243\,R_L - 6.176\,S_L)\,0.4444 + 150\,(-1.243\,T_L + 150 \times 0.06635\,R_L - 0.2041\,S_L)\,0.8958\Big]\sin\frac{\pi x}{l} \tag{11b}$$

Substituting in equations (11a) and (11b) the values of T_L, R_L, and S_L as expressed by equations (10) gives:

$$\frac{T_x}{t} = \frac{1}{t}\,(85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12a}$$

$$\triangle_V = -\frac{l}{Et}\,(-759{,}000 + 1352\,V_b - 30.17\,S_b)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12b}$$

Equations (12a) and (12b) express longitudinal stress and vertical displacement of the shell's edge in terms of internal forces acting on the beam. Numerical values of these unknown forces are determined by developing similar expressions for the beam based on its elastic behavior.

To maintain a constant relationship between T_L and V_b and between S_L and S_b over the entire length of shell, vertical loading V_b and shearing force S_b must vary respectively as $\sin\frac{\pi x}{l}$ and $\cos\frac{\pi x}{l}$. Effects of vertical and shear loads having these variations are obtained by the ordinary flexural theory for homogeneous beams. This theory is considered adequate because of the large length-to-depth ratio.

Expressions for moment and vertical displacement produced by a vertical sine load are given by equations (3) and (5). A rectangular homogeneous beam carrying this type of load is subjected to flexural action only and its fiber stresses are symmetrical about the centroidal axis. In contrast, a similar beam carrying only a shear load applied along one surface is subjected to both direct and bending stresses and extreme fiber stresses are not of equal magnitude. Axial thrust at any section is equal to the summation of shear from that section to the end of the beam, moment is equal to this thrust times its eccentricity about the centroidal axis, and vertical displacement is determined by conventional means from this induced moment.

In spite of the fact that vertical and shear loads are dissimilar in direction and distribution, fiber stresses and displacements resulting from each have the same longitudinal variation expressed in terms of $\sin\frac{\pi x}{l}$. Coefficients for fiber stress and displacement in a beam due to these loads are taken from ASCE Manual No. 31, page 59, equations (9f) and (10c).

Extreme fiber stress at the top of the beam is:

$$f = -\frac{l}{bh}\Big[0.60793\times\frac{l}{h}(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big]\sin\frac{\pi x}{l} \tag{13}$$

in which the sign convention for fiber stress conforms to that used in shell analysis; i.e., positive indicates tension. Positive directions of loads are as shown in Fig. 16. In equation (13), the value 286 accounts for the dead weight of the beam and is obtained by multiplying the actual weight of the beam, 225 lb. per ft., by $\frac{4}{\pi}$.

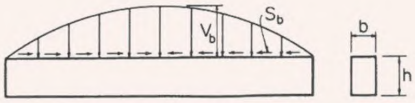


FIG. 16

From equations (9d) and (10e) of ASCE Manual No. 31, vertical displacement of the beam is:

$$\triangle_V = \frac{l^3}{bh^2E}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big]\sin\frac{\pi x}{l} \tag{14}$$

Equating stresses and deflections given by equations (12) to those of equations (13) and (14) and multiplying by t and $\frac{Et}{l}$ respectively gives:

$$+85{,}700 - 94.78\,V_b + 6.328\,S_b = -\frac{lt}{hb}\Big[0.60793\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 1.2732\,S_b\Big] \tag{15a}$$

$$+759{,}000 - 1352\,V_b + 30.17\,S_b = \frac{l^2t}{h^2b}\Big[0.12319\,\frac{l}{h}\,(V_b + 286) + 0.19351\,S_b\Big] \tag{15b}$$

Substituting values of:

$$\frac{l}{h}\times\frac{t}{b} = \frac{50}{2}\times\frac{4}{9} = 11.11$$

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^2\times\frac{t}{b} = 11.11\times\frac{50}{2} = 277.7$$

and

$$\Big(\frac{l}{h}\Big)^3\times\frac{t}{b} = 277.7\times 25 = 6944$$

in equations (15) and simplifying gives:

$$74.04\,V_b + 20.47\,S_b = -134{,}000$$
$$-2207\,V_b - 23.57\,S_b = -514{,}000$$

from which a simultaneous solution results in:

$$V_b = +315 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_b = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Substitution of these values in equations (10) gives line loads which reunite common edges of barrel and beam:

$$T_L = -0.4444\times 315 = -140 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +0.8958\times 315 = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 \text{ lb. per ft.}$$

Total line loads must include T_{LM} and S_{LM}, the reactions to membrane forces created by surface loads. Final line loads then are:

$$T_L = -140 + 3940 = +3800 \text{ lb. per ft.}$$
$$R_L = +280 \text{ lb. per ft.}$$
$$S_L = -7680 + 1620 = -6060 \text{ lb. per ft.}$$

Effects of these three line loads on internal forces T_x, S, T_ϕ and M_ϕ are determined from formulas given at the

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

TABLE II—INTERNAL FORCES IN AN EXTERIOR BARREL OF A SIMPLY SUPPORTED MULTIPLE BARREL ROOF DUE TO LINE LOADS AT OUTSIDE EDGE

$\frac{rt}{l^2} = 0.006$ $\phi_k = 26° 23'$ $\frac{r}{l} = 0.90$

$\frac{s}{\sqrt{r\,t\,l^2}}$	3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0		3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1	0
s	44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0		44.5	22.3	11.1	5.6	2.8	1.4	0
ϕ	56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°		56° 40′	28° 20′	14° 10′	7° 5′	3° 30′	1° 45′	0°
$\phi_k - \phi$		−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′			−2°	12°	19°	23°	25°	26° 23′
Load	Coefficients							Multipliers	Forces						
T_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	+0.047	−0.230	−0.344	+0.347	+0.778	+ 0.936	+ 1.000	3,800	+ 180	− 870	− 1,310	+ 1,320	+ 2,960	+ 3,560	+ 3,800
⑤ R_L	−0.00034	+0.00239	+0.02822	+0.01810	+0.00677	+ 0.00205	0	42,000	− 10	+ 100	+ 1,190	+ 760	+ 280	+ 90	0
⑥ S_L	+0.0122	−0.0522	−0.0089	+0.0890	+0.0955	+ 0.0655	0	−6,060	− 70	+ 320	+ 50	− 540	− 580	− 400	0
⑧ Σ									+ 100	− 450	− 70	+ 1,540	+ 2,660	+ 3,250	+ 3,800
S at $x = 0$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.209	+0.827	−1.161	−2.556	−2.158	− 1.363	0	3,800	− 790	+ 3,140	− 4,410	− 9,710	− 8,200	− 5,180	0
⑤ R_L	+0.00877	−0.03918	−0.0048	+0.05977	+0.06253	+ 0.04246	0	42,000	+ 370	− 1,650	− 200	+ 2,510	+ 2,630	+ 1,780	0
⑥ S_L	−0.029	+0.094	−0.263	−0.197	+0.182	+ 0.523	+ 1.000	−6,060	+ 180	− 570	+ 1,590	+ 1,190	− 1,100	− 3,170	− 6,060
⑧ Σ									− 240	+ 920	− 3,020	− 6,010	− 6,670	− 6,570	− 6,060
T_x at $x = \frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)															
④ T_L	−0.153	−0.103	−5.182	−1.030	+6.371	+12.071	+19.407	3,800	− 580	− 390	−19,700	− 3,910	+24,200	+45,900	+ 73,700
⑤ R_L	+0.0179	−0.0591	+0.1807	+0.1227	−0.1270	− 0.3444	− 0.6412	42,000	+ 750	− 2,480	+ 7,590	+ 5,150	− 5,330	−14,500	− 26,900
⑥ S_L	+0.017	−0.202	−0.481	+1.253	+3.240	+ 4.628	+ 6.328	−6,060	− 110	+ 1,220	+ 2,910	− 7,590	−19,600	−28,000	− 38,300
⑧ Σ									+ 60	− 1,650	− 9,200	− 6,350	− 730	+ 3,400	+ 8,500
M_ϕ at $x = \frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)															
④ T_L	+0.1550	−0.9042	−0.8634	−0.0900	+0.1355	+ 0.1232	0	1,260	+ 200	− 1,140	− 1,090	− 110	+ 170	+ 160	0
⑤ R_L	−0.00493	+0.03457	+0.07956	+0.05372	+0.02870	+ 0.01463	0	14,000	− 70	+ 480	+ 1,110	+ 750	+ 400	+ 200	0
⑥ S_L	+0.0265	−0.1554	−0.0585	+0.0380	+0.0382	+ 0.0224	0	−2,020	− 50	+ 310	+ 120	− 80	− 80	− 50	0
⑧ Σ									+ 80	− 350	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0

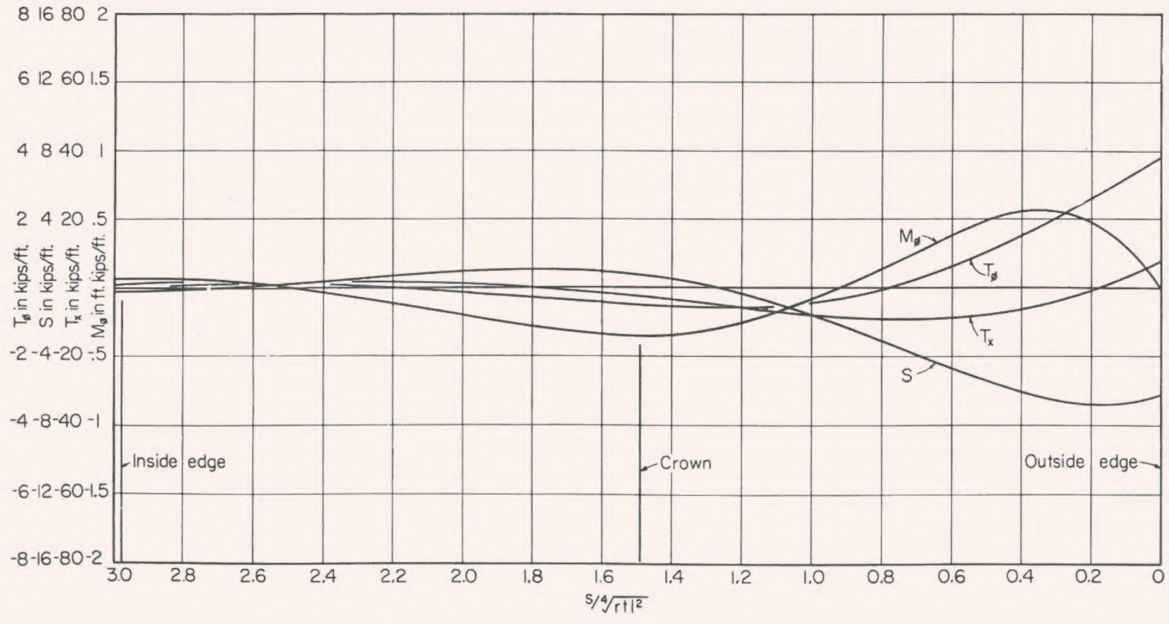


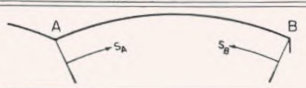
FIG. 17

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

TABLE III—Internal Forces in an Exterior Barrel of a Simply Supported Multiple Barrel Roof



$\frac{s_B}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	2.98	2.88	2.78	2.58	2.18	1.78	1.49 Crown	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1	0
$\frac{s_A}{\sqrt[4]{r\,t\,l^2}}$	0	0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.49	1.78	2.18	2.58	2.78	2.88	2.98
T_ϕ at $x=\frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 3,940	− 4,000	− 4,090	−4,240	−4,430	− 4,500	− 4,580	− 4,500	− 4,430	−4,240	−4,090	−4,000	−3,940
⑧ Line loads at B	+ 140	+ 150	+ 160	+ 150	0	− 300	− 520	− 610	− 70	+1,540	+2,660	+3,250	+3,800
⑨ Line loads at A	+ 5,760	+ 5,750	+ 5,440	+4,340	+1,580	− 310	− 880	− 750	− 360	+ 50	+ 150	+ 190	+ 200
⑩=③+⑧+⑨	+ 1,960	+ 1,900	+ 1,510	+ 250	−2,850	− 5,110	− 5,980	− 5,860	− 4,860	−2,650	−1,280	− 560	+ 60
S at $x=0$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	+ 1,620	+ 1,550	+ 1,440	+1,220	+ 790	+ 460	0	− 460	− 790	−1,220	−1,440	−1,550	−1,620
⑧ Line loads at B	− 200	− 150	− 50	+ 100	+ 700	+ 1,050	+ 750	− 310	− 3,020	−6,010	−6,670	−6,570	−6,060
⑨ Line loads at A	− 1,620	+ 1,930	+ 4,550	+7,520	+7,210	+ 3,400	+ 900	− 750	− 1,400	− 800	− 420	− 250	0
⑩=③+⑧+⑨	− 200	+ 3,330	+ 5,940	+8,840	+8,700	+ 4,910	+ 1,650	− 1,520	− 5,210	−8,030	−8,530	−8,370	−7,680
T_x at $x=\frac{l}{2}$ (Lb. per ft.)													
③ Membrane forces	− 1,020	− 1,080	− 1,110	−1,190	−1,290	− 1,320	− 1,350	− 1,320	− 1,290	−1,190	−1,110	−1,080	−1,020
⑧ Line loads at B	+ 300	+ 800	+ 900	+1,200	+1,500	− 300	− 2,500	− 5,770	− 9,200	−6,350	− 730	+3,400	+8,500
⑨ Line loads at A	+46,700	+35,220	+25,360	+9,440	−8,340	−11,400	− 9,000	− 4,800	+ 200	+1,900	+2,000	+2,000	+1,500
⑩=③+⑧+⑨	+45,980	+34,940	+25,150	+9,450	−8,130	−13,020	−12,850	−11,890	−10,290	−5,640	+ 160	+4,320	+8,980
M_ϕ at $x=\frac{l}{2}$ (Ft. lb. per ft.)													
⑧ Line loads at B	+ 70	+ 70	+ 60	+ 30	− 120	− 290	− 360	− 270	+ 140	+ 560	+ 490	+ 310	0
⑨ Line loads at A	− 2,330	− 1,190	− 320	+ 730	+ 940	+ 290	− 240	− 480	− 390	− 140	− 35	+ 15	+ 50
⑩=⑧+⑨	− 2,260	− 1,120	− 260	+ 760	+ 820	0	− 600	− 750	− 250	+ 420	+ 455	+ 325	+ 50

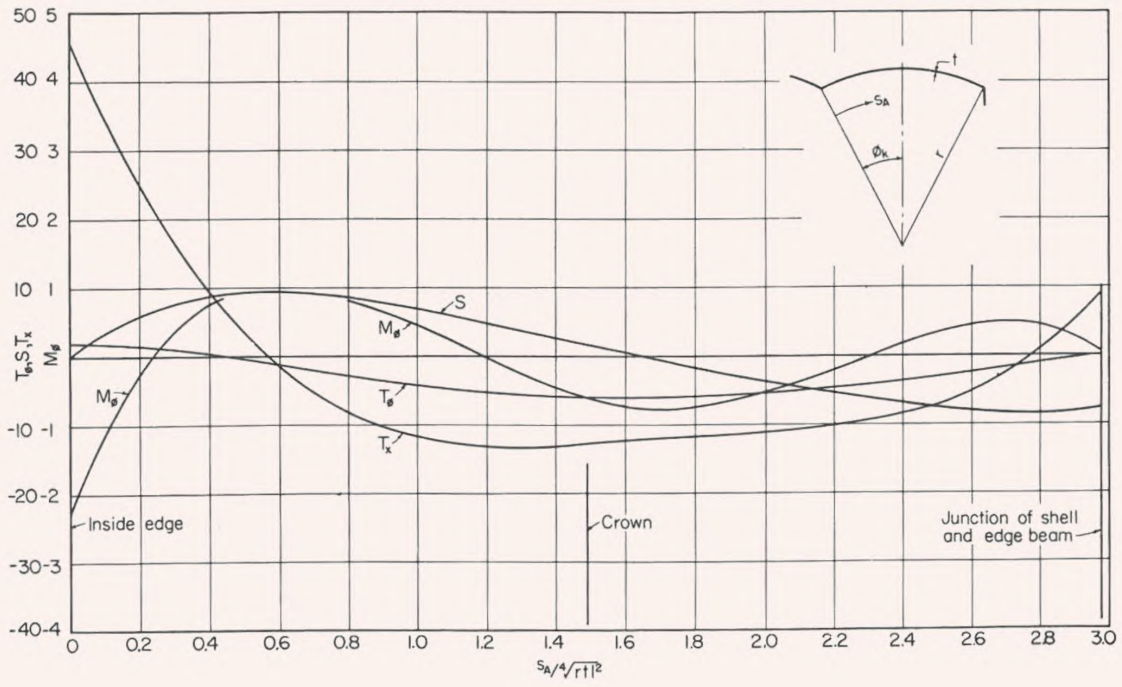


FIG. 18

PAGE 18

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

top of Table 3A. The combination of all terms in one formula with the exception of the coefficient indicated by column number constitutes the multiplier. For example, the multipliers of the tangential and shear edge loads for forces T_x, S and T_ϕ are merely T_L and S_L while the multiplier of the radial edge load for these forces is $R_L \times \frac{l}{t}$ $= +280 \times 150 = 42{,}000$ lb. per ft. Multipliers for tangential, radial and shear edge loads for the transverse moment M_ϕ are respectively:

$$T_L \times t = +3800 \times \tfrac{1}{3} = +1260 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$R_L \times l = +280 \times 50 = +14{,}000 \text{ ft. lb. per ft.}$$
$$S_L \times t = -6060 \times \tfrac{1}{3} = -2020 \text{ ft. lb. per ft.}$$

Internal forces produced by line loads acting at the exterior edge are obtained as the products of coefficients and multipliers. These operations are given in rows ④, ⑤ and ⑥ of Table II. Since the curved shell portions of interior and exterior barrels are identical, coefficients in Table II are the same as those listed in Table I. Effects of the various line loads are combined in rows ⑧ of Table II and are plotted in Fig. 17.

Because restraint differs at the two longitudinal edges of the exterior barrel, internal forces are not symmetrical about the crown. Consequently, values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ in Table III are extended from one edge to the other with subscripts A and B designating the edge from which s is measured. The exterior edge is considered the near edge.

As in Table I, rows ③ in Table III represent membrane forces, and values given are taken directly from rows ③ of Table I or computed from Table 1B. Values in rows ⑧, Table III, from $\frac{s_B}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0$ to 0.8 are copied from rows ⑧ of Table II while values from 1.2 to 2.98 are scaled from curves in Fig. 17. Values in rows ⑨ represent effects of line loads at the interior edge and are obtained from rows ⑧ and ⑨ of Table I with the exception of values at $\frac{s_A}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 1.2$, 1.49 and 1.78 which are scaled from Fig. 10.

Algebraic sums of these individual effects are tabulated in rows ⑩ of Table III and are shown graphically in Fig. 18. Inspection of the curves indicates that the neutral axis is not horizontal but sloped and that shear is not zero at the crown.

Statical Check of Forces in Exterior Barrel

The accuracy of numerical calculations for the exterior barrel is checked in a manner similar to that used for the interior barrel with the provision that internal forces acting in the edge beam must be added to those in the shell. Internal stress at the top, midspan fibers of the edge beam is by equation (13):

$$f \text{ (top)} = -\frac{50}{0.75 \times 2}\left[0.60793 \times \frac{50}{2} \times (315+286) + 1.2732 \times (-7680)\right] = -304{,}500 + 325{,}900 = +21{,}400 \text{ psf.} \quad (16)$$

Equation (16) includes effects of vertical and shear loads. Top and bottom fiber stresses due to the vertical load are equal and opposite. Inspection of formulas (10c) and (10d) of ASCE Manual No. 31 indicates that bottom fiber stress resulting from a shear load acting at the top of the beam is one-half that at the top. Therefore, midspan bottom fiber stress in the edge beam is expressed simply as:

$$f \text{ (bottom)} = +304{,}500 - \frac{325{,}900}{2} = 141{,}500 \text{ psf} \quad (17)$$

The force per foot at top and bottom of beam is:

T_x (top) $= 21{,}400 \times 0.75 = 16{,}000$ lb. per ft.
T_x (bottom) $= 141{,}500 \times 0.75 = 106{,}000$ lb. per ft.

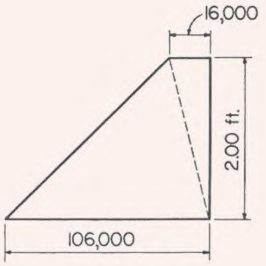


FIG. 19

The assumed straight line variation results in the T_x-force diagram of Fig. 19. Total horizontal force in the beam is $(106{,}000 + 16{,}000)\ 0.5 \times 2 = 122{,}000$ lb. and the moment of this force about the top of the beam is:

$$0.5 \times 2\left[16{,}000 \times \frac{2}{3} + 106{,}000 \times \frac{4}{3}\right] = 152{,}000 \text{ ft. lb.}$$

The complete summation of horizontal forces including those in the edge beam is:

$$\Sigma H = \frac{5.18}{3}[+45{,}980 + (4)(+11{,}200) + (2)(-6{,}500) + (4)(-12{,}600) + (2)(-12{,}850) + (4)(-11{,}550) + (2)(-10{,}000) + (4)(-5000) + 8980] + 122{,}000$$

from which $\Sigma H = -302{,}000 + 294{,}300 = -7{,}700$ lb.

In theory this summation should equal zero. Here the difference between positive and negative values is less than 2 per cent of their arithmetical sum.

In computing internal moment due to T_x, forces taken at points symmetrical about the crown have equal moment arms and therefore are grouped in parentheses. The resulting expression is:

$$\Sigma M = \frac{5.18}{3}[0 + 4\ (11{,}200-5{,}000)\ 2.02 + 2(-6{,}500-10{,}000) \times 3.51 + 4\ (-12{,}600-11{,}550)\ 4.38 + 2(-12{,}850)\ 4.69 + 0]\ -152{,}000$$

from which $\Sigma M = -1{,}204{,}000$ ft. lb.

External moment equals the sum of that already computed for the interior barrel (page 15) and the moment resulting from the weight of the edge beam. Though the

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

edge beam is of uniform cross-section throughout its length, its weight is expressed as a sinusoidal load for reasons discussed on page 8. This is done by multiplying the weight per foot by $\frac{4}{\pi}$ giving 286 lb. per ft. Midspan moment developed by this load is given by equation (3) as:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2} = -286 \times \frac{50^2}{\pi^2} = -72{,}500 \text{ ft. lb.}$$

Total external moment then equals:

$$\Sigma M = -1{,}055{,}000 - 72{,}500 = -1{,}127{,}500 \text{ ft. lb.}$$

The difference between computed internal and external moments is 1,204,000 − 1,127,500 = 76,500. Internal moment is approximately 7 per cent greater than the external.

As previously explained, a percentage difference of this magnitude is not excessive but this discrepancy could be reduced by correcting for the residual T_ϕ edge forces of +140 and +200 lb. per ft. indicated in Table III. Line loads T_L of −140 and −200 lb. per ft. applied at the respective edges would decrease the internal moment. The effect of this correction can be estimated by computing the external moment which the residual forces produce. Edge forces of +140 and +200 lb. per ft. represent an additional downward load of (140+200) 0.4444 = 150 lb. per ft. assumed acting on the shell. The moment created by this load is equal to $\frac{150}{286} \times 72{,}500 = 38{,}000$ ft. lb. If this correction is applied to the internal moment, the corrected value would be −1,204,000 + 38,000 = −1,166,000 ft. lb., which exceeds the external moment by only 3.5 per cent.

A comparison of internal and external shear at the support must include forces within the edge beam which is subjected to its own dead weight and to forces V_b and S_b shown in Fig. 16. It should be noted that although the horizontal shearing force S_b produces vertical shearing stresses at any cross-section, a summation of these stresses equals zero. This is evident from the fact that S_b alone does not create external reactions. Hence, shear in the edge beam at the support is determined from equation (2) as:

$$V = -p\frac{l}{\pi}$$

where p is the sum of V_b and the dead weight of the beam or 315 + 286 = 601 lb. per ft. From this

$$V = -601 \times \frac{50}{\pi} = -9570 \text{ lb.}$$

The complete expression for internal shear is similar to that given on page 16 for the interior barrel. For values of ϕ greater than ϕ_k, sin $(\phi_k - \phi)$ is negative. Shear ordinates which are multiplied by common values of sin $(\phi_k - \phi)$ are combined in parentheses. The expression is:

$$\Sigma V = \frac{5.18}{3}[(-7680 + 200)\ 0.4444 + 4(-8150 - 8550)\ 0.3393 + 2(-5600 - 9000)\ 0.2278 + 4(-2500 - 5700)\ 0.1161] - 9570 = 72{,}600 \text{ lb.}$$

Reaction at the support is equal to the sum of that previously determined for the interior barrel and that due to the weight of the beam.

$$\Sigma V \text{ (external)} = -66{,}300 - 286 \times \frac{50}{\pi} = -70{,}850 \text{ lb.}$$

The percentage difference of 2.5 per cent can be reduced if the 150 lb. per ft. vertical load due to uncompensated T_ϕ forces is taken into account.

Modification of Internal Forces for Continuity

In preceding discussions force distribution has been obtained in terms of a simply supported barrel although the roof structure in Fig. 4 consists of two equal spans continuous over a center support. This force distribution now must be modified for continuity. As discussed in ASCE Manual No. 31, the effect of continuity on shells and conventional beams is similar since it affects only longitudinal variation of stress. Manual No. 31 points out that while forces in the continuous structure can be obtained by a rigorous satisfaction of boundary conditions, force distribution also may be determined by proportioning on the basis of the ratio of moments in a continuous beam to moment in a simply supported span. The second procedure is used in this design example. In order to evaluate the change in force distribution, the fixed end moment in a beam subject to sinusoidal loading is determined first.

Slopes of tangents at the ends of a simply supported beam carrying a sinusoidal load are given by equation (4) as:

$$\theta = \frac{pl^3}{EI\pi^3}$$

To produce a fixed end condition, end moments must be applied which rotate both ends of the beam through this angle. It is known that an end moment of $\frac{4EI}{l}$ will rotate the near end of a beam through a unit angle when the far end is fixed. Therefore, applying a moment of $\frac{4EI}{l} \times \frac{pl^3}{EI\pi^3}$ at each end and including the carryover moment, final fixed end moment is equal to:

$$M = \frac{pl^3}{EI\pi^3} \times \frac{4EI}{l}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2pl^2}{\pi^3} \qquad (18)$$

If one end of the beam is hinged, moment at the fixed end by moment distribution is:

$$M = \frac{2pl^2}{\pi^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3pl^2}{\pi^3} \qquad (19)$$

Final moment at any point in a beam having one end fixed and the other hinged is found by adding algebraically the simple span moment given by equation (3) and the effect of the end moment indicated by equation (19). These two moments are shown in Fig. 20. After superposition the resulting moment is:

$$M = \frac{3pl^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{pl^2}{\pi^2} \sin\frac{\pi x}{l}$$

Expressed in terms of the midspan moment $-\frac{pl^2}{\pi^2}$ of the

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

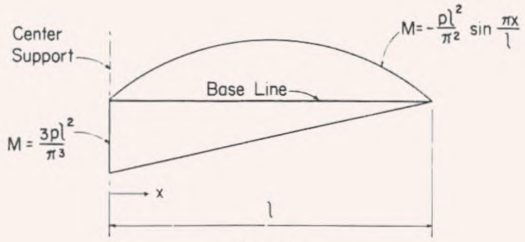


FIG. 20

simply supported span this becomes:

$$M = -\frac{pl^2}{\pi^2}\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right]$$

Conditions of support for this beam are similar to those in the design example where, due to symmetry of structure and loading, a fixed end exists at the center cross frame with hinged supports at the far ends. A beam bearing such similarity to a shell structure may be used to proportion internal forces for continuity. For example, in a continuous shell of two equal spans l, longitudinal T_x-forces at any section are approximately equal to the midspan T_x-forces in a simply supported shell of span l times the ratio of moment at the same section in a continuous beam of two equal spans to the midspan moment of one simply supported span of the beam. From this, longitudinal force at any section in the continuous shell roof of this example is:

$$T_x \text{ (continuous)} = T_x^*\left[-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}\right] \quad (20)$$

Shear determined for the simply supported single span shell also is modified by the condition of continuity. Shear due to end restraint is equal to the fixed-end moment divided by span length while that due to the simply supported sinusoidal load is given by equation (2). The complete expression for shear is the sum of these effects or:

$$S = -\frac{3pl}{\pi^3}-\frac{pl}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l} \quad (21)$$

Expressed in terms of $-\frac{pl}{\pi}$, the shear at the support of the simple span, shear in the continuous structure is found from:

$$S = -\frac{pl}{\pi}\left[\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}\right] \quad (21a)$$

Modification of transverse moment M_ϕ for continuity is given by formula (236b) of ASCE Manual No. 31 as follows:

$$M_\phi \text{ (continuous)} = M_\phi^*\left\{\sin\frac{\pi x}{l} - 3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]\right\} \quad (22)$$

The effect of end restraint on T_ϕ-forces calculated previously for the simply supported shell is negligible.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

TABLE IV—INTERNAL FORCES IN THE INTERIOR BARREL OF THE CONTINUOUS SHELL ROOF

T_ϕ in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}$				
			0	0.707	0.953	0.707	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−6,300	0	−4,450	−6,000	−4,450	0
16.8	1.2	−5,600	0	−3,960	−5,340	−3,960	0
11.1	0.8	−3,210	0	−2,270	−3,060	−2,270	0
5.6	0.4	+ 150	0	+ 110	+ 140	+ 110	0
2.8	0.2	+1,500	0	+1,060	+1,430	+1,060	0
1.4	0.1	+1,940	0	+1,370	+1,850	+1,370	0
0	0	+2,020	0	+1,430	+1,930	+1,430	0

S in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Forces at supports in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\frac{3}{\pi^2}+\cos\frac{\pi x}{l}$				
			+1.304	+1.011	0	−0.403	−0.696
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	0	0	0	0	0	0
16.8	1.2	−4,600	− 6,000	−4,700	0	+1,900	+3,200
11.1	0.8	−9,400	−12,300	−9,500	0	+3,800	+6,600
5.6	0.4	−9,540	−12,500	−9,700	0	+3,900	+6,700
2.8	0.2	−6,410	− 8,400	−6,500	0	+2,600	+4,500
1.4	0.1	−3,730	− 4,900	−3,800	0	+1,500	+2,600
0	0	0	0	0	0	0	0

T_x in lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\sin\frac{\pi x}{l}$				
			−0.955	−0.009	+0.571	+0.468	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	−19,400	+18,500	+170	−11,100	− 9,100	0
16.8	1.2	−17,500	+16,700	+160	−10,000	− 8,200	0
11.1	0.8	− 9,430	+ 9,000	+ 80	− 5,400	− 4,400	0
5.6	0.4	+10,150	− 9,700	− 90	+ 5,800	+ 4,800	0
2.8	0.2	+26,250	−25,100	−240	+15,000	+12,300	0
1.4	0.1	+36,140	−34,500	−330	+20,600	+16,900	0
0	0	+47,180	−45,000	−420	+26,900	+22,100	0

M_ϕ in ft. lb. per ft.

s (ft.)	$\frac{s}{\sqrt{rtl^2}}$	Midspan forces in simple span	$\frac{x}{l}$ = 0	0.25	0.60	0.75	1.0
			Multiplier = $\sin\frac{\pi x}{l}-3\pi\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{x}{l}\right]$				
			0	0.192	0.425	0.339	0
			Force = Col. (3) × Multiplier				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Crown	Crown	− 480	0	− 90	−200	−160	0
16.8	1.2	− 190	0	− 40	− 80	− 60	0
11.1	0.8	+ 550	0	+110	+230	+190	0
5.6	0.4	+ 590	0	+110	+250	+200	0
2.8	0.2	− 355	0	− 70	−150	−120	0
1.4	0.1	−1,175	0	−230	−500	−400	0
0	0	−2,280	0	−440	−970	−770	0

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Table IV deals with evaluation of internal forces in the continuous interior barrel, these forces being symmetrical about the crown. Forces in the exterior barrel would be computed in a similar manner but are not symmetrical about the crown.

Since the longitudinal T_x-force is of considerable importance in determining reinforcement, it is desirable to compute maximum values. For this purpose equation (20) expressing the variation of T_x is differentiated with respect to x and set equal to zero to determine the location of maximum force. The first derivative of equation (20) is:

$$\frac{dT_x}{d_x} = T_x^* \left[\frac{3}{\pi} + \pi \cos \frac{\pi x}{l}\right] = 0$$

from which:

$$\cos \frac{\pi x}{l} = -\frac{3}{\pi^2} = -0.3039$$

and:

$$\frac{\pi x}{l} = 107° 42' \text{ or } 1.88 \text{ radians}$$

The negative sign indicates a second quadrant angle. Solving for $\frac{x}{l}$, the location of maximum T_x-force, gives:

$$\frac{x}{l} = \frac{1.88}{\pi} = 0.60$$

The four internal forces are computed at five sections: at supports where $\frac{x}{l} = 0$ and 1.0, and at $\frac{x}{l}$ equal to 0.25, 0.60 and 0.75. At each section forces are determined for the seven points indicated in columns ① and ② of Table IV.

Forces occurring in the simply supported interior barrel are tabulated in columns ③ of Table IV. Values given for T_ϕ, T_x and M_ϕ occur at midspan while those for shear S are at the support. For values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ from 0 through 0.8, these forces are taken directly from rows ⑩ of Table I while at $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 1.2 and at the crown forces are scaled from Fig. 12.

Multipliers are listed at the top of each table for various values of $\frac{x}{l}$. For forces M_ϕ, T_x and S these multipliers include corrections for continuity and are equal to the bracketed terms of equations (22), (20) and (21a), respectively. The multiplier for T_ϕ is equal merely to sin $\frac{\pi x}{l}$.

Values in columns ④ through ⑧ are final forces obtained by multiplying forces in columns ③ by appropriate multipliers. For example, force T_x at $\frac{x}{l}$ equal to 0.60 and $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}} = 0.4$ is found by multiplying +10,150 found in column ③ by multiplier +0.571 to give +5,800 lb. per ft. It should be noted that since T_x-forces are maximum at $\frac{x}{l} = 0.6$, the moment they produce at this section is also maximum and, as with an ordinary beam, shear is zero.

*The superscript (*) indicates the force at the centerline of the simply supported shell span.

The horizontal neutral axis falls between values of $\frac{s}{\sqrt[4]{rtl^2}}$ equal to 0.4 and 0.8 and is approximately 3 ft. above the lower edge of the shell.

Shell Reinforcement

Design of reinforcement for the interior barrel is based on final forces summarized in Table IV. In general, shell reinforcement is provided for three force conditions: tensile T_x-forces are resisted by horizontal steel; moment M_ϕ combined with the direct force T_ϕ is resisted by transverse reinforcement while shearing forces S are resisted primarily by diagonal reinforcement.

A major question arising in the design of shells is whether the stress assigned to the steel shall vary according to n times the computed concrete stress or whether an arbitrarily designated value of f_s such as 20,000 psi can be assumed disregarding concrete stress. Shell analysis has been based on the assumption of homogeneity of material. In other words, strains in the structure are proportional to induced concrete stresses. To be consistent, steel stresses should be based on steel strains that are equal to concrete strains. This condition requires the use of a constant percentage of steel throughout the tensile zone.

The same problem exists in detailing indeterminate structures such as rigid frames and arches. In this case it is customary to analyze the structure on the basis of the constant elastic property of the members and then determine required steel area on the assumption that reinforcement is stressed to an allowable design value. This same practice will be followed in shell design.

There are several methods of proportioning horizontal or longitudinal reinforcing steel. One method is to divide the external moment by the product of the allowable steel stress and the distance between centroids of reinforcement and compressive T_x-forces. A minimum amount of reinforcement is provided by this method since the bars generally are concentrated as far from the neutral axis as possible.

According to the method proposed in ASCE Manual No. 31, longitudinal steel stresses vary linearly from a maximum at the edge of the shell to zero at the neutral axis. Tensile reinforcement is distributed over the entire tension zone.

A third procedure is suggested in which the required steel area at any point is given by T_x at that point divided by a constant allowable stress. For example, from Table IV at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$ with $T_x = +26{,}900$ lb. per ft.,



FIG. 21

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

required reinforcement is:

$$A_s = \frac{26{,}900}{20{,}000} = 1.4 \text{ sq. in. per ft.}$$

Five #5 bars providing an area of 1.55 sq. in. are placed as shown in Fig. 21 within the first foot at either side of the valley formed by the junction of adjacent barrels. At $s = 1.4$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, a required steel area of $\frac{20{,}600}{20{,}000} =$ 1.03 sq. in. per ft. is supplied by #5 bars spaced at 3½ in., this spacing being continued to $s = 2.8$ ft. The procedure is repeated up to the neutral axis. In the compression zone reinforcement is theoretically unnecessary but minimum reinforcement equal to approximately 0.4 per cent is provided either by welded wire fabric or small diameter bars spaced at about 1-ft. intervals.

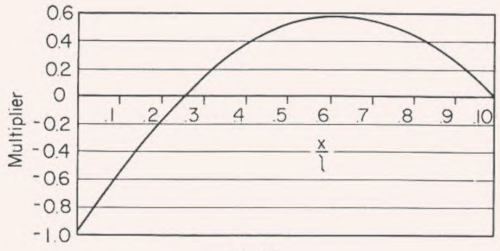


FIG. 22

Cut-off points for longitudinal bars are determined by means of Fig. 22, which shows a curve representing the multiplier in Table IV: $-\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{x}{l}\right) + \sin\frac{\pi x}{l}$. For illustration note in Fig. 22 that multipliers are -0.955 at $\frac{x}{l} = 0$ and $+0.571$ at $\frac{x}{l} = 0.6$. The use of this curve is illustrated by determining cut-off points for one of the five longitudinal #5 bars provided at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$. Four #5 bars resist a tensile force of $4 \times 0.31 \times 20{,}000 = 24{,}800$ lb. per ft. To obtain a force of 24,800 lb. per ft., the midspan T_x-force of 47,180 lb. per ft. in the simply supported shell must be multiplied by the factor:

$$\frac{24{,}800}{47{,}180} = 0.526$$

In Fig. 22 the multiplier 0.526 occurs at $\frac{x}{l}$ equal to 0.52 and 0.67, these being the points at which four #5 bars are sufficient. This illustration applies to all horizontal reinforcement.

Transverse reinforcement is computed for moment M_ϕ and direct force T_ϕ. The procedure is similar to that used for ordinary reinforced concrete beams subjected to combined stresses. In this example design is based on a rectangular section 12 in. wide and 4 in. deep except at the junction of adjacent barrels where depth is increased to provide a smooth transition from one barrel to the other.

Consider selecting transverse reinforcement at $s = 0$ and $\frac{x}{l} = 0.6$, where $M_\phi = -0.97$ ft. kips per ft. producing tension at the top surface and $T_\phi = 1.93$ kips per ft. in tension. A total depth of 8 in. is scaled from Fig. 21 and effective depth is taken as 7 in. Steel area is 0.15 sq. in. per ft. as determined according to Example 8 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*.* For an allowable concrete stress of 1350 psi., compression reinforcement is not required. As shown in Fig. 21, transverse reinforcement at this location is placed near the top of the shell and is continuous from one barrel to the next. Transverse reinforcement required throughout the interior barrel is nominal in amount and may be evenly spaced as shown in Fig. 23.

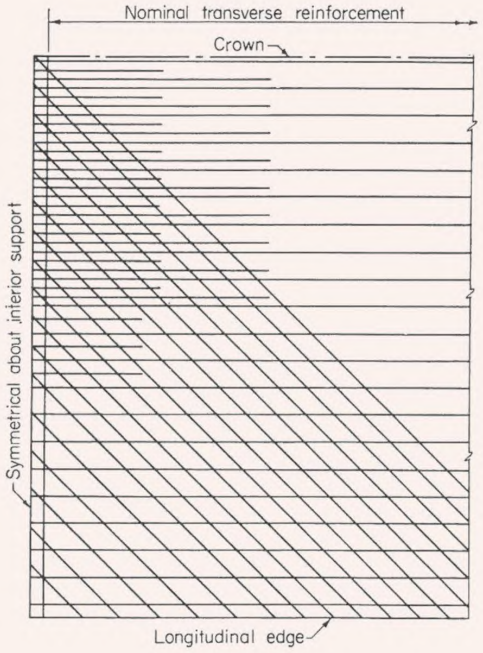


FIG. 23

Diagonal reinforcement shown in Fig. 23 may be designed by several methods. Reinforcement may be provided on the basis of principal stresses computed at various points. Such an approach implies the placement of bars parallel to stress trajectories.

In this example diagonal reinforcement is designed as for conventional reinforced concrete beams and is provided to resist shear in excess of $0.3 f'_c$. For example, from Table IV at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.25$, $S = -9700$ lb. per ft.

*Published by the American Concrete Institute, Detroit, Mich.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

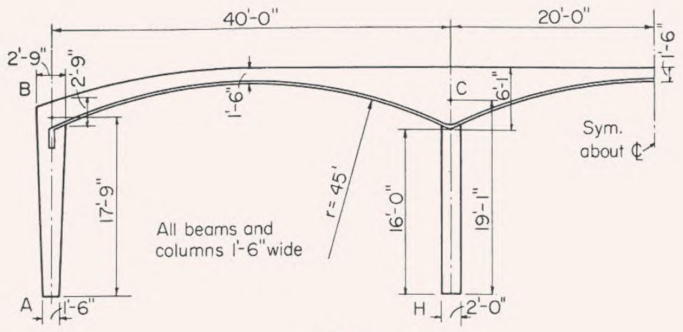


FIG. 24

Assuming 3000-lb. concrete, required diagonal steel is:

$$A_s = (9700 - 90 \times 4 \times 12) \div 20{,}000$$
$$= (9700 - 4300) \div 20{,}000 = 0.27 \text{ sq. in. per ft.}$$

Critical shear stress which determines spacing of diagonal bars does not necessarily occur at the supports and it may be desirable to compute shear at intermediate points.

Longitudinal and transverse reinforcement also may be used to resist diagonal tension if these bars are only lightly stressed by their primary loads. However, horizontal and vertical bars make an angle of 45° with the axis of diagonal tension and, as pointed out by formula (6d) of ASCE Manual No. 31, their effectiveness in the 45° direction is only one-half its normal value.

Shear is investigated at $s = 5.6$ and $\frac{x}{l} = 0.125$ to illustrate the distribution of diagonal tension over reinforcement extending in more than one direction. Since Table IV gives no values at $\frac{x}{l} = 0.125$, shear at this point must be computed. Substituting in the expression for the shear multiplier $\frac{3}{\pi^2} + \cos\frac{\pi x}{l}$ gives $+1.228$ which, when multiplied by -9540, the support shear in the simply supported barrel at $s = 5.6$, gives a total shear of $-11{,}700$ lb. per ft. This value then is reduced by 4300 lb. per ft., the previously determined allowable shear strength of the concrete, leaving 7400 lb. per ft. to be resisted by reinforcement. Required steel area is $\frac{7400}{20{,}000}$ or 0.37 sq. in. per ft.

Inspection of Table IV indicates that T_x-forces at $s = 5.6$ are compressive from the support to $\frac{x}{l} = 0.25$. Therefore, longitudinal steel at $\frac{x}{l} = 0.125$ carries no tensile stress and may be used to resist some diagonal tension. Effective area of these #5 bars spaced at 12 in. is reduced from 0.31 to 0.15 sq. in. per ft. because of the 45° displacement. Diagonal reinforcement is then supplied for 0.37 less 0.15 or 0.22 sq. in. per ft. Similar advantage can be taken of transverse steel when the stress produced by T_ϕ and M_ϕ is small.

Although not discussed here, design of reinforcement for the exterior barrel follows a procedure similar to that outlined for the interior barrel. The total tensile longitudinal force at midspan in the edge beam is found on page 21 to be 122,000 lb. To determine the companion force in the continuous structure at $\frac{x}{l} = 0.6$, this value is multiplied by the multiplier 0.571 in Table IV giving a final tensile force of 69,600 lb. The required steel area of 3.48 sq. in. should be located with its center of gravity at or below the center of gravity of the 122,000 lb. longitudinal force.

Frame Design

The analysis of any frame supporting a shell is similar to the analysis of a continuous bent supporting a conventional slab except that the shell induces a direct force in the frame. As explained in ASCE Manual No. 31, frames are designed for their own dead weight plus live and dead loads on the shell.

The 18-in. wide frame shown in Fig. 24 is selected to illustrate steps involved in the analysis of a frame. The choice of this shape with the shell at the bottom edge does not imply that this is the best or only solution. Under certain circumstances it may be desirable to have the shell at the top of the frame with the soffit straight. Also, economic considerations may favor the use of an arch following the curve of the shell.

The frame in Fig. 24 is the center frame of the roof unit shown in Fig. 4. It is symmetrical about the centerline of the interior bay and has a depth varying from 33 in. at the inner face of the exterior column to 18 in. at midspan. Depth at interior columns is 73 in. with the top surface of the frame horizontal between centerlines of exterior bays. Although depth at midspan may seem excessively shallow, it is shown subsequently that in this area the frame carries a large axial tensile force.

ASCE Manual No. 31 points out that the shell acts as a flange of the frame, the effective flange overhang at either side of a supporting rib in a shell roof continuous over its supports being $0.76\sqrt{rt}$. The overhang in this example is $0.76\sqrt{45 \times 0.33} = 2.94$ ft. Total overall flange width is $2 \times 2.94 + 1.50 = 7.38$ ft. In the analysis, cross sections are assumed T-shaped.

Frame analysis for loads is made by moment distribution with carry-over factors, distribution factors and fixed-end moments for horizontal members determined on the basis of parabolic haunches. (The use of parabolic haunches to approximate the circular curve of the soffit is considered sufficiently accurate.) These factors are extrapolated from values given in the *Handbook of Frame Constants.** It should be recognized that the use of these constants involves a slight inaccuracy since a horizontal centroidal axis is assumed while in reality this axis is curved. However, the effect of curvatures as large as

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

those encountered in this example may be neglected since the small error introduced is conservative.

To avoid lengthy computations in determining the moment of inertia I of the T-section, use is made of Fig. 5 in *Continuity in Concrete Building Frames** which gives I of a T-section as the I of its web times a coefficient C. This coefficient is a function of A, the ratio of flange to web widths and B, the ratio of flange to web depths. At interior columns these are:

$$A = \frac{7.38}{1.50} = 4.9$$

$$B = \frac{0.33}{6.10} = 0.054$$

From Fig. 5, $C = 1.50$. At midspan of each bay A has the same value but $B = \frac{0.33}{1.50} = 0.220$ and hence $C = 1.85$.

At exterior columns $C = 1.70$ since $B = \frac{0.33}{2.75} = 0.120$.

Constants in the *Handbook* are for rectangular sections and are given in terms of the ratio of centerline to haunch depths. Therefore, the I of the T-section must be expressed in terms of the depth of a rectangular section possessing the same moment of inertia as the T. Since $I = CI_{web}$, this equivalent depth is $d\sqrt[3]{C}$. Hence equivalent depths are:

at B $\quad h_B = 2.75\ \sqrt[3]{1.70} = 3.27$ ft.
at midspan $\quad h_{\text{℄}} = 1.50\ \sqrt[3]{1.85} = 1.85$ ft.
at C $\quad h_C = 6.10\ \sqrt[3]{1.50} = 7.06$ ft.

The various coefficients are tabulated in Table V for the exterior bay with:

$$r_B = \frac{3.27 - 1.85}{1.85} = 0.77$$

$$r_C = \frac{7.06 - 1.85}{1.85} = 2.81$$

and for the interior bay having:

$$r_C = r_D = 2.81$$

Carry-over and stiffness factors for the exterior column, assumed to have a straight haunch, are taken from Table 52 of the *Handbook* for $r_B = \frac{2.75 - 1.50}{1.50} = 0.833$:

$$C_{AB} = -0.78$$
$$C_{BA} = -0.32$$
$$k_{BA} = 16.20$$

Assuming columns to be hinged at the base, stiffnesses of members at various points are:

$$K_{BA} = \frac{16.20 \times 1.5^3\ (1 - 0.78 \times 0.32)}{17.75} = 2.31$$

$$K_{BC} = \frac{13.20 \times 1.85^3}{40} = 2.09$$

$$K_{CB} = \frac{21.7 \times 1.85^3}{40} = 3.43$$

$$K_{CH} = \frac{4 \times 2^3\ (1 - 0.5^2)}{19.1} = 1.26$$

$$K_{CD} = \frac{32.3 \times 1.85^3}{40} = 5.11$$

Distribution factors are therefore:

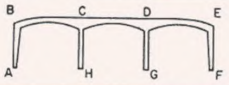
$$d_{BC} = \frac{2.09}{2.31 + 2.09} = 0.48$$

$$d_{CB} = \frac{3.43}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.35$$

$$d_{CD} = \frac{5.11}{3.43 + 5.11 + 1.26} = 0.52$$

These values are tabulated in Table V to simplify the computations.

TABLE V—Moment Distribution For Dead and Live Loads



	B		C	D
Carry-over factor	− 0.95	− 0.58	− 0.82	− 0.82
Stiffness factor	13.2	21.7	32.3	32.3
M^F Uniform	− 0.0730	− 0.1470	− 0.1130	− 0.1130
M^F Right haunch	− 0.0012	− 0.0190	− 0.0018	− 0.0184
M^F Left haunch	− 0.0147	− 0.0050	− 0.0184	− 0.0018
Distribution factor	0.48	0.35	0.52	0.52
Fixed-end moments	−629	−1280	−993	−993
1st Distribution	+302	+ 100	−149	−149
Carry over	− 58	− 287	+122	+122
2nd Distribution	+ 28	+ 143	−213	−213
Carry over	− 83	− 27	+175	+175
3rd Distribution	+ 40	+ 71	−105	−105
Carry over	− 41	− 38	+ 86	+ 86
4th Distribution	+ 20	+ 43	− 65	− 65
End moment	−421	−1275	−1142	−1142

The load on the frame consists of its own weight and the shell reactions. As discussed in Manual No. 31, the effect of these reactions can be simulated by applying the shell load on the frame. Since the rise is small, dead weight of the shell can be assumed to be uniform in the transverse as well as the longitudinal direction. Uniform load carried by the center frame is:

Dead wt. of shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.050 = 3.1$ kips per ft.
Live load on shell: $2 \times 0.625 \times 50 \times 0.030 = 1.9$ kips per ft.
Partial wt. of frame: $1.5 \times 1.17 \times 0.150 = 0.3$ kips per ft.
Total uniform load $= \overline{5.3}$ kips per ft.

The value 0.625×50 gives the position of zero shear on either side of the center support in a uniformly loaded continuous beam of two 50-ft. spans. The load on this portion of each shell span is carried by the center frame. Haunch loads are:

at B: $\quad 1.5\ (2.75 - 1.5) \times 0.150 = 0.28$ kips per ft.
at C: $\quad 1.5\ (6.10 - 1.5) \times 0.150 = 1.04$ kips per ft.

Utilizing coefficients in Table V, the fixed-end moments are:

$$M^F_{BC} = -(5.3 \times 0.073 + 0.28 \times 0.0147 + 1.04 \times 0.0012)\ 40^2 = -629 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CB} = -(5.3 \times 0.147 + 0.28 \times 0.0050 + 1.04 \times 0.0190)\ 40^2 = -1280 \text{ ft. kips}$$

$$M^F_{CD} = -[5.3 \times 0.1130 + 1.04\ (0.0184 + 0.0018)]\ 40^2 = -993 \text{ ft. kips}$$

Final moments as determined by moment distribution are tabulated in the last row of Table V.

In addition to these moments, there is induced in the frame a horizontal tensile force T which equals the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero shear as shown in Fig. 26. This force results from the satisfaction of internal equilibrium re-

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

quirements and should not be confused with thrust created by foundation restraint

To prove the existence of the force T, reference is made to Figs. 25 and 26. Internal forces in the typical rigid frame of Fig. 25(a) are equal to the sum of those present when the frame is made statically determinate by rollers at A' and those due to the final horizontal reaction $H_{A'}$. In the statically determinate condition there are no external horizontal reactions and as a result no thrust exists in member $B'C'$. However, in the indeterminate condition a thrust is induced in $B'C'$ equal to $H_{A'}$.

In a similar manner the frame of Fig. 25(b), assumed to support a thin shell roof, has no horizontal reaction at A when in the statically determinate state. However, an examination of part of the frame as the free body shown in Fig. 26 indicates that resistance must be given to the horizontal components of the T_ϕ-forces. Since there is no horizontal reaction, this resistance is supplied by the frame itself in the form of the internal force T acting in the same plane as the T_ϕ-forces. Since any indeterminate structure can be analyzed by first considering it to be statically determinate, it follows that all cross frames are subject to an internal force equal and opposite to the sum of the horizontal components of the T_ϕ-forces. This force, of course, is superimposed on the thrust produced by the external reactions in the final indeterminate condition.

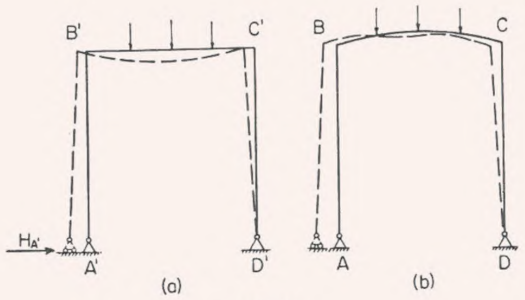


FIG. 25

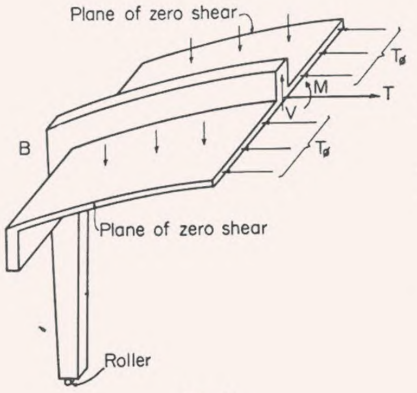


FIG. 26

When the force T acts with an eccentricity e from the centroidal axis of a member, a moment Te is produced in addition to the moment calculated for external loads. If the member is statically indeterminate the angular rotation caused by moment Te produces external reactions.

Computations for fixed-end moments in member BC resulting from the moment Te are tabulated in Table VI. The procedure is based on the method of elastic weights explained in *Analysis of Arches, Rigid Frames and Sewer Sections.** In Table VI, slide rule accuracy is sufficient since end moments produced by the T-force are small when compared with total moments. For practical purposes, fixed-end moments can be taken as being equal to the value of Te at midspan since at this point Te is relatively large and the member BC most flexible. Generally, fixed-end moments due to Te can be approximated in this manner. Table VI is included here only for completeness and as evidence of the validity of this suggested approximation. In the case of an arch rib having constant moment of inertia, fixed-end moments would be equal to the average value of the moment Te. The advisability of estimating fixed-end moments in this manner will depend upon the ratio of Te to the moment due to loads.

In Table VI depths h, Col. (1), of the frame at distances x, Col. (3), from point B are scaled from a drawing having a scale of approximately 1 in. = 3 ft. Col. (2) contains values of coefficient C interpolated linearly in proportion to the x distance from the centerline between 1.70 at B and 1.85 at centerline of span BC and between 1.85 and 1.50 at C. This coefficient when multiplied by I of the rectangular web gives the moment of inertia of the T-section. Instead of the absolute value of a, which is taken as $\frac{ds}{EI}$, Col. (4) gives relative values of $\frac{1}{Ch^3}$. Since ds is equal to zero at B, ℄ and C, no values are listed at these points.

Eccentricity e of the force T with respect to the centroidal axis is listed in Col. (7). With a frame width of 1.50 ft., overhanging flange width of 2.94 ft. and shell thickness of 0.33 ft., the distance y from bottom surface

*Available free in the U.S. and Canada on request to the Portland Cement Association.

TABLE VI—Determination of Fixed-End Moments Due to Moment Te in Exterior Bay

	h	C	x	$a=\frac{1}{Ch^3}$	ax	ax^2	e	T_ϕ	Cos $(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times$ cos $(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$	ma	max
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
B	2.75	1.70	0	—	—	—	0.82	—	0.90	—	—	—	—
1	2.5	1.71	2.0	0.037	0.07	0.2	0.71	−0.9	0.92	− 35	+ 25	+ 0.9	+ 2
2	2.1	1.74	6.0	0.062	0.37	2.2	0.55	−3.0	0.95	−120	+ 66	+ 4.1	+ 24
3	1.8	1.77	10.0	0.097	0.97	9.7	0.43	−4.6	0.98	−189	+ 81	+ 7.9	+ 79
4	1.6	1.80	14.0	0.136	1.90	26.7	0.35	−5.6	0.99	−233	+ 82	+11.1	+156
5	1.5	1.83	18.0	0.162	2.92	52.5	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	+12.6	+228
℄	1.50	1.85	20.0	—	—	—	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78	—	—
6	1.5	1.81	22.0	0.164	3.61	79.4	0.31	−5.7	1.0	−239	+ 74	+12.1	+267
7	1.9	1.74	26.0	0.084	2.18	56.8	0.47	−4.4	0.99	−183	+ 86	+ 7.2	+187
8	2.6	1.67	30.0	0.034	1.02	30.6	0.76	−2.4	0.98	− 99	+ 75	+ 2.5	+ 77
9	3.8	1.60	34.0	0.011	0.37	12.7	1.29	−0.1	0.95	+ 4	− 5	− 0.1	− 2
10	5.3	1.53	38.0	0.004	0.15	5.7	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132	− 0.5	− 20
C	6.1	1.50	40.0	—	—	—	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181	—	—
			Σ	0.791	13.56	276.5						57.8	998

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

to centroidal axis is:

$$y = \frac{0.75h^2 + 2(2.94\times0.33\times0.167)}{1.5h + 2\times2.94\times0.33} = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h + 1.94}$$

Since T is assumed to act at mid-depth of the flange:

$$e = 0.5h - \frac{0.97h-0.324}{1.5h + 1.94} - 0.17$$

Values of T_ϕ in Col. (8) are scaled from Fig. 18. Total tension T is equal to the summation of the horizontal components of the T_ϕ-forces acting between planes of zero tangential shear previously found to be at $\frac{x}{l} = 0.6$. Integrating T_ϕ on both sides of the frame gives:

$$T = 2T_\phi \cos(\phi_k-\phi) \int_0^{30} \sin\frac{\pi x}{l}\,dx$$
$$= \frac{131}{\pi} T_\phi \cos(\phi_k-\phi) = 42\,T_\phi \cos(\phi_k-\phi)$$

Moment produced by this tensile force is equal to the product of T and $-e$ and is tabulated in Col. (11). Values in Cols. (12) and (13) are the products of those in Col. (11) and Cols. (4) and (5) respectively. The summation of these columns times $\frac{12\,ds}{E}$ represents the angular rotation and vertical displacement of joint B with respect to joint C, assuming that the member is free at B and fixed at C. Applying a moment M^F_{BC} and a vertical reaction V_B and setting angular rotation and vertical displacement at B equal to zero gives respectively:

$$0.791\,M^F_{BC} + 13.56\,V_B + 57.8 = 0$$
$$13.56\,M^F_{BC} + 276.5\,V_B + 998 = 0$$

The solution of these simultaneous equations gives:

$$M^F_{BC} = -70 \text{ ft. kips}$$
$$V_B = -0.17 \text{ kips}$$

and by statics:

$$M^F_{CB} = -70-(40\times0.17) = -77 \text{ ft. kips}$$

As stated earlier, an approximate value of -74 ft. kips, the midspan moment, could have been used. Therefore, for the interior bay fixed-end moments are taken as -82 ft. kips, the value of midspan moment given in Table VII. Thrust, eccentricity and moment of the force T at various points between joint C and the centerline of span CD are tabulated in Table VII. Eccentricity is taken directly from Table VI while values of T_ϕ are scaled from Fig. 12.

End moments resulting from the T-forces are computed by moment distribution as shown in Table VIII. Total moments equal to the sum of end moments due to vertical loads and T-forces are likewise included in Table VIII.

TABLE VII—T-FORCE IN INTERIOR BAY

x	e	T_ϕ	$\cos(\phi_k-\phi)$	$T=42T_\phi\times\cos(\phi_k-\phi)$	$m=-Te$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	2.38	+2.0	0.90	+ 76	−181
2	2.00	+1.7	0.92	+ 66	−132
6	1.29	−0.3	0.95	− 12	+ 16
10	0.76	−2.8	0.98	−115	+ 87
14	0.47	−4.9	0.99	−204	+ 96
18	0.31	−6.0	1.0	−252	+ 78
20	0.31	−6.3	1.0	−265	+ 82

TABLE VIII—MOMENT DISTRIBUTION DUE TO ECCENTRICITY OF T_ϕ-FORCES

	B	C		D
Carry-over factor Distribution factor	−0.95 0.48	−0.58 0.35	−0.82 0.52	−0.82 0.52
Fixed-end moments 1st Distribution Carry over 2nd Distribution	−70 +34 —	−77 — −32 +11	−82 — — −17	−82 — — −17
End moment End moment—Table V Total moment	− 36 −421 −457	− 98 −1275 −1373	− 99 −1142 −1241	− 99 −1142 −1241

With end moments determined, moment at any other point in the frame is found by statics. For example, moment at midspan of the interior bay is:

$$M = -1241 + (5.3\times0.125 + 1.04\times0.0208)40^2 + 82$$
$$= -64 \text{ ft. kips}$$

in which 0.0208 is the simple beam centerline moment coefficient for parabolic haunch loads. In the above expression the moment $+82$ ft. kips due to the eccentric T-force is included. Because the distance center to center of columns is used, midspan moment should be modified to take into account the width of columns. Vertical reactions at columns CH and DG are equal to $\left(5.3 + \frac{1.04}{3}\right) \times 20 = 113$ kips. In accordance with recommendations in Section 13 of *Continuity in Concrete Building Frames* the modified moment is:

$$M = -64 - \frac{113\times2}{6} = -102 \text{ ft. kips}$$

Tensile thrust at the section is:

$$N = -265 + \frac{457}{17.8} + \frac{1373 - 1241}{19.1} = -232 \text{ kips}$$

Because of this large thrust, tension can be assumed to exist over the entire cross section and total required steel area is:

$$\frac{232{,}000}{20{,}000} = 11.6 \text{ sq.in.}$$

This total area is apportioned between top and bottom bars by making the centroid of reinforcement coincide with the line of action of thrust. Distance from bottom of the beam to lower reinforcement is assumed to be 1¼ in. or 0.10 ft. and to top reinforcement 1.22 ft. As shown in Fig. 27, eccentricity of thrust N measured from the centroid of bottom reinforcement is:

$$0.31 + 0.17 - 0.10 + \frac{102}{232} = 0.82 \text{ ft.}$$

Top reinforcement A'_s is determined by taking moments of internal forces about the bottom layer:

$$0.82\,N = A'_s \times 1.12 \times 20{,}000$$

from which:

$$A'_s = \frac{11.6 \times 0.82}{1.12} = 8.5 \text{ sq.in.}$$
$$A^b_s = 11.6 - 8.5 = 3.1 \text{ sq.in.}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

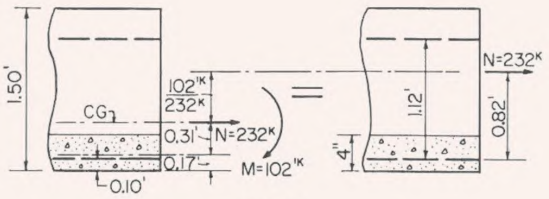


FIG. 27

In the exterior bay, vertical reaction at the face of column *CH* is:

$$V_C = \left(5.3+1.04\times\frac{7}{24}+0.28\times\frac{1}{24}\right)20+\frac{1373-457}{40}$$
$$= 112+23 = 135 \text{ kips}$$

In the above expression, reactions of the haunch loads of member *BC* are equal to $\frac{7}{24}$ and $\frac{1}{24}$ of $W\times\frac{l}{2}$. Taking into account the *T*-force and the reduction because of the use of the clear span, moment at the column face is:

$$M = -1373-157+\frac{135\times2}{3} = -1440 \text{ ft. kips}$$

Interpolating for the value of T at $x = 39$ ft., thrust at the section is:

$$N = 71+26 = 97 \text{ kips}$$

Reinforcement is determined for this moment and thrust as illustrated in Example 7 of the *Reinforced Concrete Design Handbook*. At midspan of exterior bay:

$$M = -(1373+457)0.5+[5.3\times0.125$$
$$+0.0104(1.04+0.28)]40^2+78-\frac{135\times2}{6}$$
$$= +200 \text{ ft. kips}$$
$$N = -252+26 = -226 \text{ kips}$$

Example 8 of the *Handbook* may be followed for design of reinforcement. The small amount of compression reinforcement required at midspan can be supplied by extending a few bars from the top negative reinforcement. It is desirable to have some of these bars continuous in any case since a large tensile force exists throughout most of the frame.

Moment and thrust at joint *B* are obtained in a conventional manner since T is zero at this point.

As pointed out in ASCE Manual No. 31, strains in a frame over which a shell is continuous induce a longitudinal moment M_x at the junction of shell and frame equal to:

$$M_x = -\frac{t^2}{3.56}f_c \qquad (23)$$

in which f_c is the stress in the frame considered to be a homogeneous section. For example, at midspan of the interior bay:

$h = 18$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.85$
$b-b' = 2.94\times2\times12 = 70.6$ in.
$M = -102$ ft. kips
$N = -232$ kips

The distance y_b from centroid of section to middle of shell equals 0.31 ft. or 3.7 in. Therefore:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{18^4\times1.85}{12\times(-3.7)} = -4380 \text{ in.}^3$$
$$A = 18^2+4\times70.6 = 606 \text{ in.}^2$$

and at mid-depth of the shell:

$$f_c = -\left(\frac{-102\times12000}{-4380}-\frac{232\times1000}{606}\right)$$
$$= +103 \text{ psi (tension)}$$

From equation (23):

$$M_x = -\frac{4^2\times103}{3.56} = -460 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At the face of column *CH* with:

$h = 68$ in.
$b' = 18$ in.
$C = 1.50$
$b-b' = 70.6$ in.
$y_b = 2.17$ ft. or 26.0 in.
$M = -1440$ ft. kips
$N = +97$ kips

then:

$$\frac{I}{y_b} = \frac{68^3\times18\times1.50}{12\times(-26.0)} = -27{,}200 \text{ in.}^3$$
$$A = 68\times18+70.6\times4 = 1506 \text{ in.}^2$$
$$f_c = -\left(\frac{-1440\times12000}{-27{,}200}+\frac{97\times1000}{1506}\right)$$
$$= -700 \text{ psi}$$

and:

$$M_x = -\frac{4^2\times(-700)}{3.56} = +3{,}100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

At crown of exterior bay:

$$\frac{I}{y_b} = -4{,}380 \text{ in.}^3$$
$A = 606$ in.^{2}
$M = +200$ ft. kips
$N = -226$ kips

Therefore:

$$f_c = -\left(\frac{200\times12000}{-4380}-\frac{226\times1000}{606}\right)$$
$$= +921 \text{ psi}$$

from which:

$$M_x = -\frac{4^2\times921}{3.56} = -4100 \text{ ft. lb. per ft.}$$

M_x is computed in a similar manner at other points.

M_x is a local moment and decreases rapidly. At a distance of $\frac{2.94}{2}$ ft. or about 1.5 ft. from the junction of shell and frame its value is reduced by 76 per cent and practically diminishes to zero at 4 ft. As a result, only short bars are needed to handle the induced stresses. In providing the required steel area it may be advantageous in some cases to utilize previously provided longitudinal reinforcement if it is not already stressed to its maximum value. Relatively large values of M_x at the crown of the exterior bay and at the face of interior columns indicate that the shell should be thickened to about 6 in. at the frame, tapering to 4 in. within a distance of 3 ft.

Portland Cement Association · 33 West Grand Avenue, Chicago, Illinois 60610

Printed in U.S.A.

R/C 30

ST 77

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

G 阿拉米洛的桥梁数据集

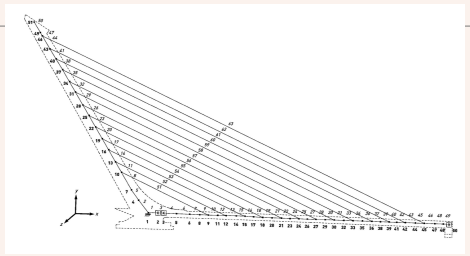
摘要

Pollalis, 1999 出版了一本精彩的书, 详细描述了卡拉特拉瓦创建阿拉米洛桥 *(§15.6.1.3)*. 在此中, 作者发布了桥梁的有限元分析所需数据集, 更具体地说: 节点坐标、单元连接性和属性、边界条件和负载。

这些是在这里重复的读者谁愿意模型桥梁一个简单的编写代码 *(*如上所列的 *§I.2.7)*.

荷载条件列表 *(*桌子 *G.4)* 它也具有特殊的兴趣, 因为读者可能不完全意识到一个结构应抵抗的各种负担。





审阅稿

表 G.1: 阿拉米洛的节点坐标 (Pollalis, 1999)

#	X	y	z	诺德	x	y	z
1	1.00	13.50	0.00	27	113.60	12.12	0.00
2	7.61	13.30	0.00	28	-44.95	84.33	0.00
3	11.65	13.18	0.00	29	119.57	12.06	0.00
4	-5.58	21.57	0.00	30	125.54	12.00	0.00
5	19.72	12.94	0.00	31	-49.47	91.73	0.00
6	28.43	12.68	0.00	32	131.53	11.93	0.00
7	-10.28	28.29	0.00	33	137.52	11.87	0.00
8	35.64	12.50	0.00	34	-54.00	99.12	0.00
9	42.85	12.32	0.00	35	143.49	11.80	0.00
10	-17.55	39.82	0.00	36	149.45	11.74	0.00
11	48.99	12.20	0.00	37	-58.52	106.52	0.00
12	55.15	12.09	0.00	38	155.41	11.68	0.00
13	-22.10	47.23	0.00	39	161.37	11.62	0.00
14	60.86	12.15	0.00	40	-63.04	113.92	0.00
15	66.58	12.22	0.00	41	167.33	11.56	0.00
16	-26.65	54.65	0.00	42	173.30	11.49	0.00
17	72.21	12.33	0.00	43	-67.56	121.32	0.00
18	77.83	12.43	0.00	44	179.30	11.43	0.00
19	-31.19	62.04	0.00	45	185.31	11.36	0.00
20	83.79	12.38	0.00	46	-72.10	128.76	0.00
21	89.75	12.33	0.00	47	191.70	11.29	0.00
22	-35.75	69.46	0.00	48	197.70	11.23	0.00
23	95.71	12.28	0.00	49	-73.43	130.94	0.00
24	101.67	12.22	0.00	50	201.00	11.20	0.00
25	-40.34	76.89	0.00	51	-78.21	138.75	0.00
26	107.64	12.17	0.00				

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

表 G.2: 阿拉米洛的成员属性 (Pollalis, 1999)

#	i	j	一 mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4	#	i	j	一 mm^2	I_Z m^4	I_Y m^4	J m^4
皮隆							戴克						
2	1	4	86.06	1048.40	524.44	721.30	1	1	2	82.24	672.00	946.30	92.90
5	4	7	68.33	625.90	423.43	424.70	3	2	3	60.99	327.80	724.50	92.90
8	7	10	62.90	512.70	374.38	321.83	4	3	5	40.30	95.92	572.90	92.90
11	10	13	56.80	428.90	354.31	293.87	6	5	6	33.29	61.03	449.80	89.93
14	13	16	54.15	393.20	334.82	267.32	7	6	8	33.37	68.44	371.83	69.83
17	16	19	51.71	361.73	315.92	242.20	9	8	9	26.22	61.60	304.29	49.74
20	19	22	48.95	327.90	297.58	218.45	10	9	11	17.02	41.47	248.56	39.64
23	22	25	46.57	300.05	279.78	196.11	12	11	12	14.22	33.91	233.18	34.90
26	25	28	53.29	278.64	268.43	175.12	13	12	14	12.84	31.61	232.17	32.50
29	28	31	50.96	253.40	257.61	155.49	15	14	15	11.70	29.69	220.82	31.60
32	31	34	48.65	229.90	241.41	137.19	16	15	17	10.70	26.91	219.00	31.60
35	34	37	46.04	205.01	225.72	120.20	18	17	18	9.46	21.67	217.51	31.60
38	37	40	43.78	184.90	210.54	104.51	19	18	20	9.46	21.67	217.51	31.60
41	40	43	41.23	163.75	195.85	90.07	21	20	21	9.13	21.12	216.04	28.80
44	43	46	39.02	146.72	181.63	76.89	22	21	23	8.79	20.57	214.57	26.10
47	46	49	37.46	135.37	167.89	64.91	24	23	24	8.79	20.57	214.57	26.10
50	49	51	37.46	135.37	167.89	64.91	25	24	26	8.93	21.04	214.70	26.50
电缆							27	26	27	8.93	21.04	214.70	26.50
51	9	10	0.00	0.00	0.00	0.00	28	27	29	8.93	21.04	214.70	26.50
52	12	13	0.00	0.00	0.00	0.00	30	29	30	8.93	21.04	214.70	26.50
53	15	16	0.00	0.00	0.00	0.00	31	30	32	8.93	21.04	214.70	26.50
54	18	19	0.00	0.00	0.00	0.00	33	32	33	9.26	21.63	216.17	29.30
55	21	22	0.00	0.00	0.00	0.00	34	33	35	9.60	22.15	217.64	32.20
56	24	25	0.00	0.00	0.00	0.00	36	35	36	9.60	22.15	217.64	32.20
57	27	28	0.00	0.00	0.00	0.00	37	36	38	9.60	22.15	217.64	32.20
58	30	31	0.00	0.00	0.00	0.00	39	38	39	9.60	22.15	217.64	32.20
59	33	34	0.00	0.00	0.00	0.00	40	39	41	9.60	22.15	217.64	32.20
60	36	37	0.00	0.00	0.00	0.00	42	41	42	9.60	22.15	217.64	32.20
61	39	40	0.00	0.00	0.00	0.00	43	42	44	9.46	21.67	217.51	31.60
62	42	43	0.00	0.00	0.00	0.00	45	44	45	9.46	21.67	217.51	31.60
63	45	46	0.00	0.00	0.00	0.00	46	45	47	9.46	21.67	217.51	31.60
							48	47	48	9.46	21.67	217.51	31.60
							49	48	50	9.46	21.67	217.51	31.60

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

表 G.3: 阿拉米洛的边界条件 (Pollalis, 1999)

	位移			转角		
#	X	Y	Z	X	Y	Z
1	固定	固定	固定	固定	固定	固定
2	免费	固定	固定	固定	免费	免费
3	免费	固定	固定	固定	免费	免费
50	免费	固定	固定	固定	免费	免费

表 G.4: 阿拉米洛的荷载组合 (Pollalis, 1999)

	1. 死亡和永久负载
1.1	死去和永久的负载,W_{pylon}
1.2	地板的死和永久负载,W_{deck}
1.3	索的后压力,T_{cable}
	2. 生活负载
2.1	统一 荷载 4 KPa 在整个地板和步行路线上
2.2	统一 荷载 4 KPa 在半个地板和半个步行道 Ito 产生最大 扭转 在 钢材 盒子上)
2.3	600 kN 卡车 荷载 在节点 6 [轴 44;172 米从东方的废墟], 精度 13.30 m
2.4	600 kN 卡车 荷载 在 9 节点 [轴 41; 160 米从东方的废墟], 精度 13.30 m
2.5	600 kN 卡车 荷载 在节点 15 [轴 35;136 米从东方的废墟], 精度 13.30 m
2.6	600 kN 卡车 荷载 在节点 21 [轴 29;104 米从东方的废墟], 精度 13.30 m
2.7	600 kN 卡车 荷载 在节点 27 [轴 23; 88 m 从东方的废墟], 精度 13 .30 m
2.8	600 kN 卡车 荷载 在节点 33 [轴 17;64 米从东方的废墟], 精度 13 .30 m
2.9	600 kN 卡车 荷载 在节点 39 [轴 11; 40 m 从东方的废墟], 精度 13.30 m
2.10	600 kN 卡车 荷载 在节点 45 [轴 5; 16 米从东方的废墟], 精度 13.30 m
	3. 热负载
3.1	电缆温度的统一变化 26°C
3.2	平等的温度变化 13.5 的皮隆 °C
3.3	平等地调温度变化 23.3°C
3.4	地板内温度线性变化 [下到上表面] by 21°C
3.5	线性长度温度变量 4.5°C
3.6	线性横向温度变量在皮隆内 5.1°C
	4. 静态风负载
4.1	长度 风荷载
4.2	转换 风荷载
	5. 旋转皮隆的基础
5.1	0.25% (0.225°) 转角在长度方向; 最高预测的转角 0.06°
5.2	0.10% (0.090°) 转角 转向; 最高预测 转角 0.026°
	6. 静态地震负载
6.1	长度性地震负载在皮隆上 (3% 以 恒载)
6.2	转向地震负载在皮隆 (3% 以 恒载)

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿

H 标签: Visual Hashing

此附件和相应的 MATLAB®(§I.8.1) 代码完全由一个 AI 工具创建 (Anthropic, 2025).

摘要

该文件提供了一个全面的解释身份 - 视觉表达的哈什值, 创造独特, 可识别的模式。它涵盖了相同发明算法的理论基础以及我们 *MATLAB* 计划的具体实施细节。该文件解释了如何使用标识符来视觉地代表书章节, 创造出独特的视觉“指纹”, 作为章节标记或标识器。讨论了数学原则和实用实施方面, 提供完整的理解相同生殖过程。

H.1 引入身份证 2202
H.2 识别一代算法 2203
H.3 GitHub vs. Stack Exchange Identicon 定位 2204
H.4 我们的 MATLAB 实施 2205
H.5 核心代码分区 2207
H.6 使用该计划 2208
H.7 优点和应用 2209
H.8 结论 2209

第三部分：程序实现

H.1 引入身份证

标识是哈希值的视觉表现, 通常用于创建独特、可识别的图像而不需要手动图像创建或存储。原来为在线社区的用户 avatars 开发,ID 在各种背景下发现了应用, 在文本数据的视觉“指纹”是有用的。

身份的主要特点包括:

- **定义世代**: 同一输入文本总是产生相同的模式
- **视觉区别**: 不同输入产生视觉上不同的模式
- **自动创建**: 没有人设计干预要求
- **最小存储**: 只需要存储源文本, 而不是图像本身

流行的应用包括 GitHub 的用户 avatars 和 Stack Exchange 的用户识别, 这些用户基于用户名或电子邮件地址产生不同的模式。

书出版的应用程序

在书出版的背景下, 身份证可以作为:

审阅稿

- 视觉章节标记
- 内容指纹视觉区分类似主题
- 装饰性 单元 微妙地显示内容
- 导航助理, 帮助读者视觉识别章节

通过从每个章节标题中创建一个单一的视觉签名, 符合该章节的内容, 提高认可和导航, 同时为书籍添加视觉兴趣。

H.2 识别一代算法

核心算法概述

创建身份的基本过程包括通过一系列定义步骤将文本输入转化为视觉模式:

Algorithm 1 识别代码算法

Require: 文本 string (标题, 标识)
Ensure: 视觉模式 (身份)
1: 创建输入文本的加密字体
2: 定义网 (典型 5×5)
3: 使用哈什的部分来确定细胞模式:
4: A。哪些细胞包含形状 (国家 / Off State)
5: B。在活性细胞中使用哪些形状
6: C。哪些颜色适用于形状
7: 使用 Symmetry (通常是通过镜子半网)
8: 将结果模式作为图像

Hash 功能

哈希函数是同一代的基础, 将变量长度文本转换为固定长度值序列。有效的 Hash 函数为 ID 应该提供:

- **定义**相同输入总是产生相同的输出。
- **Avalanche 效应**: 输入中的小变化导致输出中的大变化
- **统一分配**: 输出值均匀分布在可能范围内

虽然 MD5, SHA-1 或 SHA-256 等加密式黑客功能在专业应用中常用, 但我们的 MATLAB 程序用于教育目的使用更简单的自定义黑客函数:

```
function hash_values = simpleHash(str)
    % Sum ASCII values with position weighting
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    hash_values = zeros(1, 32);
    for i = 1:length(str)
        char_code = double(str(i));
        for j = 1:min(32, length(str))
            position_factor = mod(i*j, 32) + 1;
            hash_values(position_factor) = mod(hash_values(position_factor) + char_code * i, 256);
        end
    end
end
```

Listing H.1: Simple Hash Function

此函数创建了一个 32-单元 值序列, 在 0 和 255 之间, 包括字符代码和位置信息从输入行。

模式地图

模式地图过程将哈希值转化为视觉网络, 通常是 5×5. 这涉及:

1. **网络启动**: 创建所需尺寸的空网
2. **细胞值分配**地图黑客值到网络细胞值
3. **同步应用**: 视觉平衡的镜子网部分

在 GitHub 等应用程序中, 每个单元格都是“在”或“关闭”的。(二元). 在像我们这样的更复杂的版本中, 每个细胞都可以根据相应的哈希值包含不同的形状。

视觉转换

最终步骤将抽象模式转化为视觉表现:

- **形状选择**: 将细胞值转换为特定的形状
- **颜色应用**: 应用来自 Hash 的颜色
- **尺寸和滑板**: 调整视觉特性为清晰度

H.3 GitHub vs. Stack Exchange Identicon 定位

不同平台采用微妙变量的身份:

GitHub 的实施

GitHub 使用一个简单但有效的方法:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 5×5 网 (25 个细胞)
- 二进制模式 (每个细胞都满或空。)
- 垂直同步 (镜子留下一半向右)
- 单色由哈希衍生, 加上白色背景

只需要 15 位信息 (半网 + 中 柱) 更多颜色数据

Stack Exchange 实施

Stack 交换 (包括 Stack Overflow) 使用更多样的方法:

- 每细胞多种可能的形状 (广场, 三角形)
- 单色制
- 光明背景与彩色形状
- 垂直同步

我们的实施从两种方法中获得灵感, 同时添加额外的功能。

H.4 我们的 MATLAB 实施

我们的 MATLAB 程序产生与以下功能的身份:

计划概述

该项目有两项入门:

- 输出文件名 PDF
- 一个章节标题用于产生身份

它产生一个双板图像显示:

- 与彩色形状相同的表现 (左侧)
- 数值 模式 矩阵 显示基础值 (右侧)

标题显示了章节的标题和其哈希的一部分, 提供生成过程的跟踪性。

关键项目特点

1. **多种形状**: 与更简单的实施不同, 我们的程序使用五个不同的状态每个细胞:
    - 0: 空细胞 (没有形状)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 1、圆广场
- 二、三角形 (向左向右底)
- 3、三角形 (右上向左下)
- 4、循环

2. **补充色彩计划**: 而不是使用单色, 我们基于黑暗产生多种补充颜色, 创造更有吸引力和区别的模式。
3. **透明背景**输出使用透明背景, 使其适合与各种文档风格的集成。
4. **双重视觉**: 视觉标识和其数值代表性的侧面显示, 通过使地图过程透明, 提供教育价值。
5. **PDF 输出**: 该程序将标识符直接保存到根据第一个输入参数命名的 PDF 文件。

详细实施过程

Hash 世代和模式地图

哈希和网络值之间的相互关系是按照这个具体过程进行的:

1. **哈希创作**:
   - 和 **简单的** `Hash` 函数将章节标题转换为 32-单元 序列
   - 值从 0 到 255, 基于字符代码和位置
2. **模型 矩阵 创建**:
   - A 5×5 矩阵 以零开始
   - 每個細胞在左半球 (加上中型 柱 如果 odd 大小):

```
hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1
pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5)
```

   - 每個值都會在 0-4 範圍內進行地圖, 使用模組
   - 右半是从左半的镜子。

细胞地图模型

特定位置的细胞 (我,J):

1. 计算一个 Hash 指数:
   $hash\_idx = mod((i-1) \times size\_matrix + j, 32) + 1$
2. 例如, 与细胞 (2,3) 在一个 5×5 网:
   $hash\_idx = mod((2-1) \times 5 + 3, 32) + 1 = 8$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 在这个指数中获取 Hash 值:
   $hash\_value = hash\_values(hash\_idx)$
4. If $hash\_values(8) = 173$ 第 173 章 用
5. 地图到一个格式类型使用模块:
   $pattern(i,j) = mod(hash\_value, 5) = mod(173, 5) = 3$
6. 细胞 (2,3) 3 型形状 (三角形 右上向左下)

色彩世代

颜色也源于 Hash:

1. 從第一個幾個哈什值計算一個基點:
   $base\_hue = mod(sum(hash\_values(1:3)), 360)/360$
2. 通过改变色彩来产生补充颜色:

```
colors = [
    hsv2rgb([mod(base_hue, 1), 0.8, 0.9]);          % Primary
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]);  % Complement 1
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.5, 1), 0.8, 0.8]);   % Complement 2
    hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85])  % Complement 3
];
```

3. 根据位置和值分配颜色到细胞:
   $color\_idx = mod(i \times j + value, 4) + 1$

H.5 核心代码分区

下列代码部分描述了我们实施的关键部分:

模型世代

```
% Fill half the pattern with values from the hash
for i = 1:size_matrix
    for j = 1:floor(size_matrix/2)
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);

        % Mirror for symmetry
        pattern(i, size_matrix-j+1) = pattern(i,j);
    end

    % Middle column for odd-sized grid
    if mod(size_matrix, 2) == 1
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        j = ceil(size_matrix/2);
        hash_idx = mod((i-1)*size_matrix + j, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end
```

Listing H.2: Pattern Generation from Hash

形状转换

```
case 4 % Circle
    center_r = (row_start + row_end) / 2;
    center_c = (col_start + col_end) / 2;
    radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9; % 90% of half cell size

    for r = row_start:row_end
        for c = col_start:col_end
            distance = sqrt((r - center_r)^2 + (c - center_c)^2);
            if distance <= radius
                identicon(r, c, :) = color;
            end
        end
    end
```

Listing H.3: Shape Rendering Example (Circle)

H.6 使用该计划

运行脚本

使用该计划:

1. 保存 MATLAB 脚本 **创建 标志**.m
2. 打开 MATLAB 并导航到包含脚本的目录
3. 通过打字运行脚本 **创建** Identicon 在 MATLAB 命令窗口中
4. 随时, 请输入所需的字符号。(例如“C14”)
5. 请求时, 输入章节标题。(例如,“基于性能的地震工程”)
6. 该程序将创建标识符, 并将其保存为 PDF (例如“C-14.pdf”)

了解出品

创建的 PDF 包含:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 标题显示章节名称和其哈希值的一部分
- 左板: 色彩形状的视觉相同性
- 右板: The 数值 矩阵 (0-4) 表明哪些值产生了哪些形状

这种双重代表性有助于理解章节标题如何转化为一个独特的视觉模式。

H.7 优点和应用

身份的优点

- **独特性**: 不同章节标题产生视觉上不同的模式
- **再生性**: 同一标题总是产生相同的模式
- **效率**: 不需要手动创建或存储图像
- **可扩展**: 可以为任何章节数量创建独特的身份

书出版的应用程序

身份证可以以多种方式增强书籍:

- **第章 识别**视觉标记, 帮助读者识别和记住章节
- **航行助理**: 视觉可图, 支座通过书的快速导航
- **设计一致性**: 一整本书中统一的视觉语言
- **内容指纹**: 内容的“本质”的视觉表现

H.8 结论

标识器提供一个优雅的解决方案, 以创建独特的文本内容视觉表现。通过从章节标题中产生不同的模式, 它们作为功能导航辅助和书设计中的美学单元服务。

我们的 MATLAB 实施结合了来自不同类似方法的功能, 产生多种形状和颜色的视觉吸引力模式, 同时保持决定的性和独特性的基本特性。视觉模式和其基础值数值的双显示, 提供教育洞察到生成过程。

这个对章节识别的方法表明, 算法技术如何可以提高传统书籍设计, 创造文本内容和视觉认知之间的桥梁, 通过改进导航和记忆力来帮助读者。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

I MATLAB®, 数学 代码

和 *MATLAB®* 该附件中提交的代码最初由作者编写。随后, 他们被克劳德重建。*(天文台:SONNET 4.6 2026)* 以清晰度、文档和教学可用性为基础, 改进变量名称、内线理论的解释以及在确定的情况下修复小错误。算法和数值逻辑完全是原创作者的; 克劳德的贡献是严格编辑。因此, 为了避免在自动翻译中腐败代码的任何风险, 本附件仅以英语提供。

代码 *MATLAB®* 此附件中, 作者在原文上写的。他们后来被克劳德重复了 *(天文台:SONNET 4.6 2026)* 以清晰、文档和教学可用性为主, 与变量名称的改进, 在下层理论中包含的解释, 以及神小人的纠正, 在工作过程中确定。算法及数值逻辑完全属于原作者; *Claude* 的贡献严格限于编辑工作。为了这种理由, 为了避免在自动翻译时对代码发生任何变化, 这项附件仅以英语呈现。

本附录所列 *MATLAB®* 代码最初由作者编写。后来，*Claude*（*Anthropic*，*Sonnet 4.6*，*2026*）对代码进行了重构，以提高清晰度、文档质量和教学可读性——采用更具描述性的变量命名、嵌入式理论说明，并修正过程中发现的少量错误。算法与数值逻辑完全属于原作者；*Claude* 的贡献严格限于编辑。为避免自动翻译改变代码，本附录仅以英文呈现代码内容。

摘要

该附件介绍了一系列 *MATLAB* 和数学代码, 实施了整个书中描述的基本和先进计算方法。代码覆盖基本结构力学 *(*静态、矩阵方法, 用于相关术语和 *be)*, 经典和先进的分析技术 *(*变量方法, 以色列方形结尾 单元*)*, 和数值模拟算法 *(*蒙特卡洛样本, 不确定性传播*)*. 每个代码都以变量命名公约, 引入理论解释和工作例子为支座学习和实践应用。软件实施将主要章节中提交的数学框架和算法翻译成适用于结构分析参数识别和可靠性评估的可执行计算工具。该附件仅以英语提供, 以保留代码完整性。

I.1 第一部分: 基本和计算分析方法 . . . 2211
I.1.1 静态 矩阵 的 桁架 B 2211
I.1.2 圣路易斯 拱 形状 2213
I.1.3 仲裁三重循环 拱; 数学 2215
I.1.4 马索尼亚架的崩溃 2226
I.1.5 主 2226
I.1.6 大 挠度 的 梁 2237
I.2 第二部分: 结构设计与分析 2241
I.2.1 圆形盾牌设计 2241
I.2.2 接近 框架 分析; cantilever 方法 2253
I.2.3 非统一 扭转 2265
I.2.4 正统 框架 2268
I.2.5 混合式框架 2271
I.2.6 框架; 硬直 2274
I.2.7 直接刚度法; 框架 2278
I.2.8 主要代码 2278
I.2.9 刚度矩阵 非普里斯马特成员 2290
I.2.10 隔离线 2296
I.2.11 进化设计 2302
I.2.12 主 2302
I.2.13 柱 互动图表 2308
I.2.14 变量方法: 数学 2311
I.2.15 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应 2322
I.2.16 以色列 单元 2324
I.3 第三部分: 材料模型与宪法行为 . . . 2335
I.3.1 增長 塑性 2335
I.3.2 宪法模型 2339
I.3.3 二元模型 2339
I.3.4 哈登 2343
I.3.5 催眠 2346
I.3.6 修 正 的 吉 夫 雷 Monegotto Pinto 2365
I.3.7 改造城区公园 2370
I.3.8 伊巴拉 2375
I.3.9 极限状态 Shear 标签 2415

审阅稿

I.4 第四部分: 数据驱动的方法和参数识别 2436
I.4.1 参数识别计划 2437
I.4.2 主节目和核心乐队 2437
I.4.3 数据 I/O 和 Spreadsheet 集成 2447
I.4.4 优化工作流和辅助功能 . . . 2458
I.5 第五部分: 数值和统计基础 2471
I.5.1 莱文伯格 - 马库尔德 . . . 2471
I.5.2 数值 技术 2472
I.5.3 FFT 和 Butterworth 过滤器 . 2472
I.5.4 单一价值分解 2475
I.5.5 预条件 2477
I.5.6 随机样本共识 (拉纳克) . . 2478
I.5.7 拉丁 Hypercube 2483
I.5.8 巴伐利亚回归以四方基础 2487
I.5.9 马尔科链 Monte Carlo Simulation 2495
I.6 第六部分: 优化和参数匹配 2496
I.6.1 莱文伯格 - 马库尔德 . . . 2496
I.6.2 定制实施 2497
I.6.3 使用内置功能 2499
I.7 第七部分: 地震可靠性和不确定性 . . 2501
I.7.1 地震 危险性分析 2502
I.7.2 基于性能 地震工程 2504
I.8 第八部分: 有用 2508
I.8.1 身份 2509

第四部分：数值与统计方法

I.1 第一部分: 基本和计算分析方法

此部分涵盖了基本的结构力学和先进的计算技术分析, 包括静态, 架子, 射线, 变量方法, 蒙特卡洛模拟, 以及以色列单元。

I.1.1 静态 矩阵 的 桁架 B

正如我们讨论的

```
%  Initialize the statics matrix
% ========================================================================
% STATICS MATRIX OF A TRUSS
% ========================================================================
% Builds the statics matrix B, which relates internal bar forces (and
% support reactions) to external nodal loads via:
%
%                         B * q = f
%
% where:
%   B  : statics matrix          [2*npoin x (nelem + nbc)]
%   q  : generalized forces      [bar forces | reaction forces]
%   f  : external nodal loads    [Fx1, Fy1, Fx2, Fy2, ...]
%
% Each bar contributes two columns (its direction cosines) to B.
% Each restrained DOF contributes one additional column (a unit reaction).
%
% Inputs assumed to exist in the workspace:
%   npoin        : number of nodes
%   nelem        : number of bar elements
%   coord(i,1:2) : x,y coordinates of node i
%   lnods(e,1:2) : global node numbers of element e  [node_i, node_j]
%   id(i,1:2)    : boundary condition flag for node i, DOF 1(x) and 2(y)
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

```
%                   id = 1 means the DOF is restrained (support reaction)
% ==========================================================================

%--------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Allocate the statics matrix
%--------------------------------------------------------------------------
% The matrix has one row per DOF (2 per node: x and y)
% and one column per unknown force (bar forces + support reactions).
% We don't know nbc yet, so we allocate a square upper-bound and trim later.

nDOF = 2 * npoin;                   % total degrees of freedom
B    = zeros(nDOF, nDOF);           % over-allocated; will trim after BCs

%--------------------------------------------------------------------------
% Step 2 -- Fill columns corresponding to bar forces (direction cosines)
%--------------------------------------------------------------------------
% For each bar element, project the unit bar force onto the global x and y
% axes at both end nodes.  For bar e connecting nodes i and j:
%
%   At node i:  contribution is [ cos(theta);  sin(theta) ]   (tension +ve)
%   At node j:  contribution is [-cos(theta); -sin(theta) ]   (equal & opposite)
%
% where theta is the angle the bar makes with the global x-axis, and
%   cos(theta) = lx / L,    sin(theta) = ly / L
%
% These are stored in rows (2*node-1) and (2*node) of column e.

l_elem = zeros(nelem, 1);           % pre-allocate element length vector

for e = 1:nelem

    % --- Retrieve the two end nodes of this element ---
    node_i = lnods(e, 1);
    node_j = lnods(e, 2);

    % --- Compute the projection of the bar onto x and y ---
    lx = coord(node_j, 1) - coord(node_i, 1);   % x-component of bar vector
    ly = coord(node_j, 2) - coord(node_i, 2);   % y-component of bar vector

    % --- Bar length (Pythagorean theorem) ---
    l_elem(e) = sqrt(lx^2 + ly^2);

    % --- Direction cosines (unit vector along the bar) ---
    cos_theta =  lx / l_elem(e);    % = cos(theta)
    sin_theta =  ly / l_elem(e);    % = sin(theta)

    % --- Insert at node i (rows 2*node_i-1 and 2*node_i, column e) ---
    % A tensile force in the bar pulls node i toward node j
    B(2*node_i - 1, e) =  cos_theta;    % x-equilibrium at node i
    B(2*node_i,     e) =  sin_theta;    % y-equilibrium at node i

```

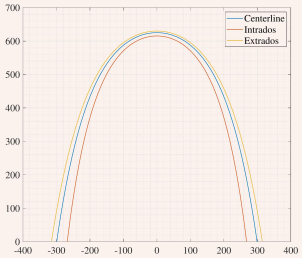

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    % --- Insert at node j (equal and opposite by Newton's third law) ---
    B(2*node_j - 1, e) = -cos_theta;   % x-equilibrium at node j
    B(2*node_j,     e) = -sin_theta;   % y-equilibrium at node j

end

%-------------------------------------------------------------------------
% Step 3 -- Append columns corresponding to support reactions
%-------------------------------------------------------------------------
% Each restrained DOF introduces one unknown reaction force.
% Its contribution to equilibrium is simply +1 in the corresponding row
% (a unit force in the restrained direction).
% These reactions occupy columns (nelem+1) through (nelem+nbc) of B.

nbc = 0;   % reaction counter (incremented each time a restrained DOF is found)

for inode = 1:npoin
    for iDOF = 1:2            % iDOF = 1 -> x-direction,  iDOF = 2 -> y-direction

        if id(inode, iDOF) == 1    % this DOF is restrained -> there is a reaction

            nbc = nbc + 1;         % one more reaction unknown

            % Global row index for this DOF
            row = 2*(inode - 1) + iDOF;

            % Place a unit entry in the next available reaction column
            B(row, nelem + nbc) = 1.0;

        end
    end
end

%-------------------------------------------------------------------------
% Step 4 -- Trim B to its actual size
%-------------------------------------------------------------------------
% Now that we know nbc, discard the unused trailing columns.

B = B(:, 1 : nelem + nbc);

% B is now [2*npoin  x  (nelem + nbc)] -- ready for use.
```

I.1.2 圣路易斯 拱 形状

基于 拱 的实际地质, 该代码产生了 图。15.30b

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿




```
clear;close;clc;opengl software
% From http://www.jug.net/wt/archcgs.htm
%==================
% Graphics stuff
%==================
scrsz = get(0,'ScreenSize');GS = 'gswin64.exe';opengl software
fs=18;
font='Times New Roman';
%================
% Initialize
%================
L=299.2239;% half widdth
Ab=1262.6651;% max x section bottom ft^2
At=125.1406;% max x section top ft^2
x=(299.2239:-0.001:0);
%==================
% Some Constants
%==================
C=acosh(Ab/At);
h=625.0925;% maximum height
A=h/((Ab/At)-1);
%============
% centroid
%============
y=693.8597-A*(cosh(C*x/L));% CHECKED
yp=interp1(x,y,118.4123);
%=======================
% slope of the normal
%=======================
m=1.44935529./sinh(0.0100333*x);% CHECKED
mp=interp1(x,m,118.4123);
%=======================
% Cross sectional area
%=======================
Q=((At-Ab)/h).*y+Ab;%cross section linearly varying
%=======================
% height of section
%=======================
h=sqrt(cotd(30)*Q);
hi=2*h/3;ho=h/3;
%================================
% Intrados and extrados curves
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%================================
xi=x-hi./sqrt(1+m.^2);yi=y-m.*hi./sqrt(1+m.^2);
ypi=interp1(xi,yi,108.9984);
xo=x+ho./sqrt(1+m.^2);yo=y+m.*ho./sqrt(1+m.^2);
ypo=interp1(xo,yo,123.1192);
%========================================
% take mirrors for the -ve side & merge
%========================================
rx=-flip(x);xx=cat(2,x,rx);
rxi=-flip(xi);xxi=cat(2,xi,rxi);
rxo=-flip(xo);xxo=cat(2,xo,rxo);
ry=flip(y);yy=cat(2,y,ry);
ryi=flip(yi);yyi=cat(2,yi,ryi);
ryo=flip(yo);yyo=cat(2,yo,ryo);
%===============
% plot curves
%===============
hf1 = figure('Position',[1 scrsz(4)/4.5 scrsz(3)/3 scrsz(4)/2]);
plot(xx,yy,xxi,yyi,xxo,yyo,'linewidth',1);
lgd=legend('Centerline','Intrados','Extrados','location','NorthEast');
lgd.FontSize=fs;
grid minor; grid;
ylim([0 700]);daspect([1 1 1]);
```

I.1.3 仲裁三重循环 拱; 数学

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Circular Three Hinged Arch self weight

Determine Reactions

In[1]:=
```
Sol1 = Solve[-2 R Cy +
       Integrate[w R^2 (1 + Cos[theta]), {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2 + alpha}] == 0, Cy][[1]];
```

In[2]:=
```
Cy = Cy /. Sol1
```

Out[2]=
```
alpha R w
```

In[3]:=
```
Sol2 =
  Simplify[Solve[-R Cx + R Cy - Integrate[w R^2 Cos[theta], {theta, Pi / 2 - alpha, Pi / 2}] ==
      0, Cx]][[1]] /. Sol1;
```

In[4]:=
```
Cx = Cx /. Sol2
```

Out[4]=
```
R w (-1 + alpha + Cos[alpha])
```

In[5]:=
```
alpha = 2 ArcTan[2 h / s]
```

Out[5]=
$$2 \text{ArcTan}\left[\frac{2 h}{s}\right]$$

In[6]:=
```
w = 1;
```

In[7]:=
```
Cxs = FullSimplify[Cx / s]
```

Out[7]=
$$\frac{R \left(-1 + 2 \text{ArcTan}\left[\frac{2 h}{s}\right] + \text{Cos}\left[2 \text{ArcTan}\left[\frac{2 h}{s}\right]\right]\right)}{s}$$

In[8]:=
```
TeXForm[Cxs]
```

Out[8]//TeXForm=
```
\frac{R \left(2 \tan ^{-1}\left(\frac{2 h}{s}\right)+\cos \left(2 \tan ^{-1}\left(\fr
   h}{s}\right)\right)-1\right)}{s}
```

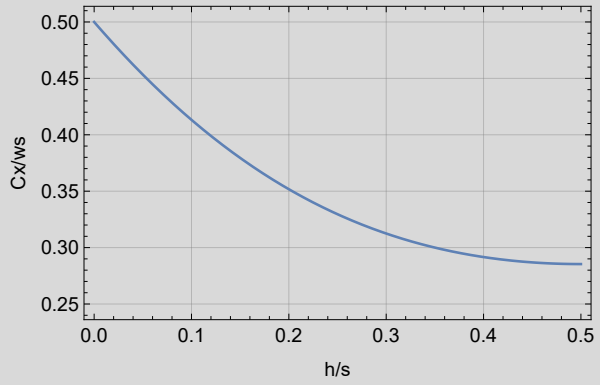
In[9]:=
```
Cxs = Cx / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[9]=
$$\frac{1}{2} \times (-1 + 2 \text{ArcTan}[2 hs] + \text{Cos}[2 \text{ArcTan}[2 hs]]) \text{Csc}[2 \text{ArcTan}[2 hs]]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

In[10]:=
```
CxsPlot =
 Plot[Cxs, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.25}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cx/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[10]=



In[11]:=
```
Export["CxsPlot.pdf", CxsPlot]
```

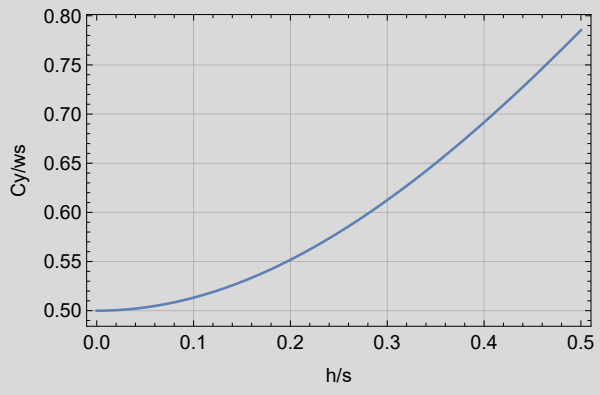
Out[11]=
```
CxsPlot.pdf
```

In[12]:=
```
Cys = Cy / s /. R / s → 1 / (2 Sin[alpha]) /. h / s → hs
```

Out[12]=
```
ArcTan[2 hs] Csc[2 ArcTan[2 hs]]
```

In[13]:=
```
CysPlot =
 Plot[Cys, {hs, 0., 0.5}, AxesOrigin → {0, 0.5}, LabelStyle → Directive[Black, Medium],
  Frame → True, FrameLabel → {"h/s", "Cy/ws"}, GridLines → Automatic]
```

Out[13]=



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

In[14]:=
```
Export["CysPlot.pdf", CysPlot]
```
Out[14]=
```
CysPlot.pdf
```

Determine Internal Forces Arbitrary Case

Shear

In[15]:=
```
Sol6 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
      Integrate[w R Sin [theta], {beta, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```
Out[15]=
$$\left\{V \to R \left(\text{Cos}[\text{theta}] \left(-1+\text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\right)+ 2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]-\text{Sin}[\text{theta}])+\text{theta}\,\text{Sin}[\text{theta}]\right)\right\}$$

In[16]:=
```
V[theta_] := R (Cos[theta] (-1 + Cos[2 ArcTan[2 h / s]]) +
    2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] - Sin[theta]) + theta Sin[theta])
```

Axial

In[17]:=
```
Sol7 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
      Integrate[w R Cos [theta], {beta, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```
Out[17]=
$$\left\{NN \to R \left(\text{theta}\,\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}]- \text{Cos}\left[2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right]\right]\text{Sin}[\text{theta}]-2\,\text{ArcTan}\left[\frac{2\,h}{s}\right](\text{Cos}[\text{theta}]+\text{Sin}[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[18]:=
```
NN[theta_] := R (theta Cos[theta] + Sin[theta] - Cos[2 ArcTan[2 h / s]] Sin[theta] -
    2 ArcTan[2 h / s] (Cos[theta] + Sin[theta])) /. h / s → 1 / 2;
```

In[19]:=
```
NN[x]
```
Out[19]=
$$R\left(x\,\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x]-\frac{1}{2}\pi(\text{Cos}[x]+\text{Sin}[x])\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Moment

In[20]:=
```
Sol8 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
      Integrate[w R R (Cos[beta] - Cos[theta]), {beta, 0, theta}] + M == 0, M][[1]]]
```

Out[20]=
$$\left\{M \to R^2 \left(\text{theta} \cos[\text{theta}] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[\text{theta}] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[\text{theta}] + \sin[\text{theta}])\right)\right\}$$

In[21]:=
```
M[theta_] := R^2 (theta Cos[theta] -
    Cos[2 ArcTan[2 h / s]] Sin[theta] - 2 ArcTan[2 h / s] (-1 + Cos[theta] + Sin[theta]))
```

In[22]:=
```
NN[x]
```

Out[22]=
$$R\left(x \cos[x] + \sin[x] - \frac{1}{2}\pi (\cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[23]:=
```
V[x]
```

Out[23]=
$$R\left(\cos[x]\left(-1 + \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right]\right) + 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (\cos[x] - \sin[x]) + x \sin[x]\right)$$

In[24]:=
```
M[x]
```

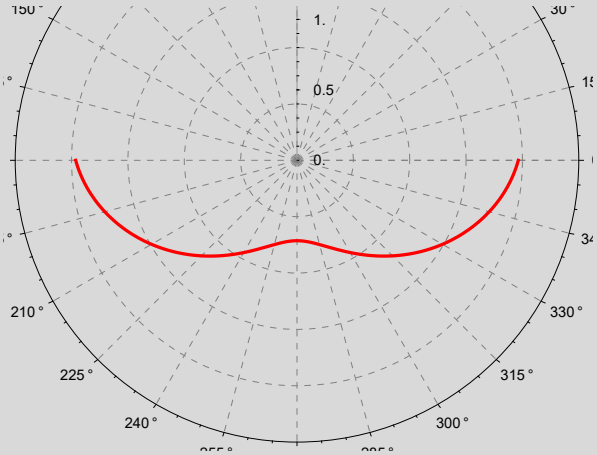
Out[24]=
$$R^2\left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

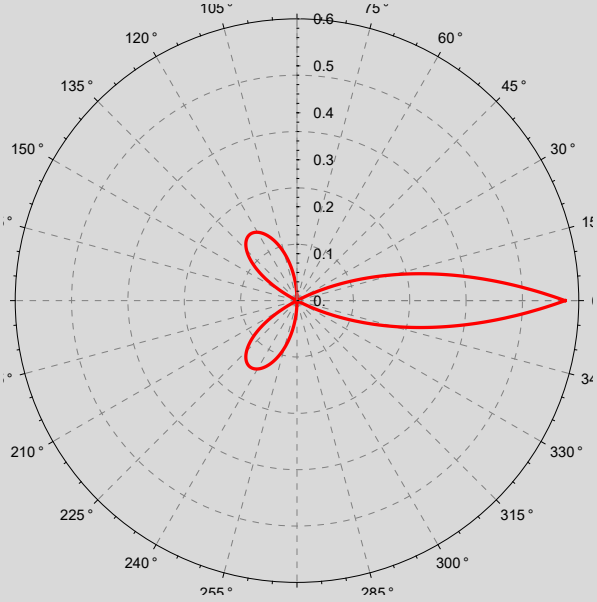
In[25]:=
```
P1 = PolarPlot[NN[x] / R, {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[25]=



In[26]:=
```
P2 = PolarPlot[V[x] / R /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[26]=



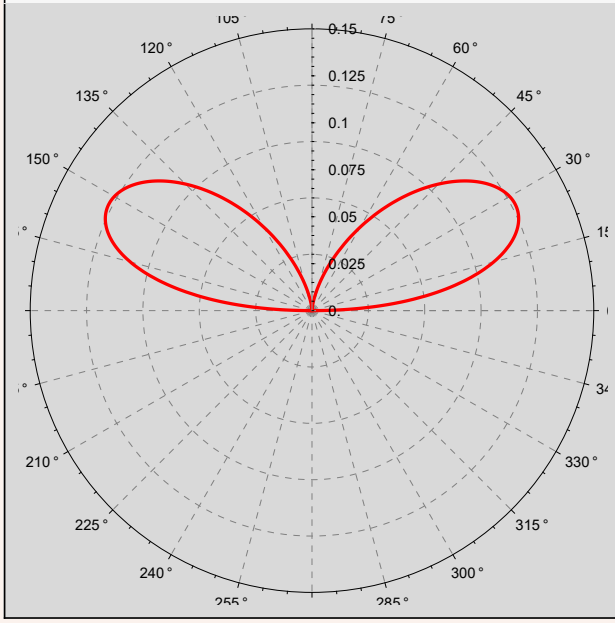
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

In[27]:=
```
M[x]
```

Out[27]=
$$R^2 \left(x \cos[x] - \cos\left[2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right]\right] \sin[x] - 2 \arctan\left[\frac{2h}{s}\right] (-1 + \cos[x] + \sin[x])\right)$$

In[28]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x] / R^2 /. h / s → 1 / 2, {x, 0, Pi},
  PlotStyle → {Red, Thick}, PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[28]=



Determine Internal Forces Semi-Circular Case

In[29]:=
```
Clear[alpha];
```

Shear

In[30]:=
```
Sol3 = FullSimplify[Solve[-Cx Cos[theta] + Cy Sin[theta] -
       Integrate[w R Sin [theta], {alpha, 0, theta}] + V == 0, V]][[1]]
```

Out[30]=
$$\{V \to R\,((-1 + \text{alpha} + \cos[\text{alpha}])\cos[\text{theta}] + (-\text{alpha} + \text{theta})\sin[\text{theta}])\}$$

In[31]:=
```
V[theta_] := 1/2 R w ((-2 + π) Cos[theta] - (π - 2 theta) Sin[theta])
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Axial

In[32]:=
```
Sol4 = FullSimplify[Solve[Cx Sin[theta] + Cy Cos[theta] -
       Integrate[w R Cos [theta], {alpha, 0, theta}] + NN == 0, NN]][[1]]
```

Out[32]=
```
{NN → R ((-alpha + theta) Cos[theta] - (-1 + alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[33]:=
```
NN[theta_] := -1/2 R w ((π - 2 theta) Cos[theta] + (-2 + π) Sin[theta]);
```

Moment

In[34]:=
```
Sol5 = FullSimplify[Solve[Cx R Sin[theta] - Cy R (1 - Cos[theta]) +
       Integrate[w R R (Cos[alpha] - Cos[theta]), {alpha, 0, theta}] + M == 0, M]][[1]]
```

Out[34]=
```
{M → R^2 (alpha + (-alpha + theta) Cos[theta] - (alpha + Cos[alpha]) Sin[theta])}
```

In[35]:=
```
M[theta_] := -1/2 R^2 w ((π - 2 theta) Cos[theta] + π (-1 + Sin[theta]))
```

Plot Internal Forces

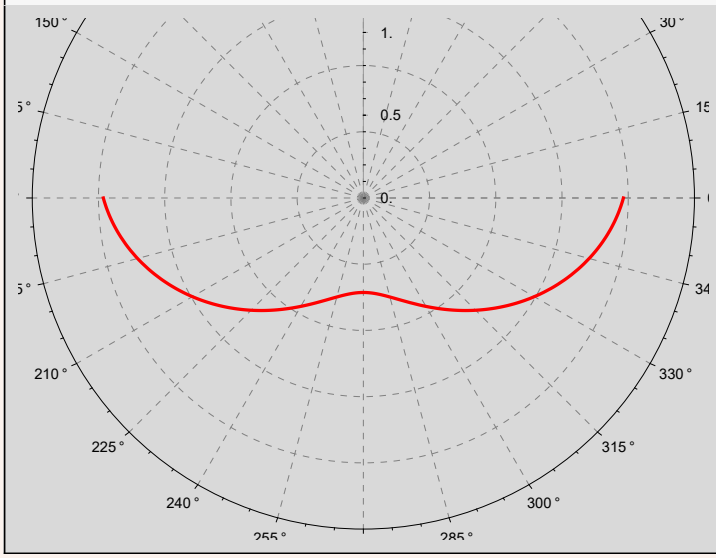
In[36]:=
```
w = 1; R = 1;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

In[37]:=
```
P4 = PolarPlot[NN[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[37]=



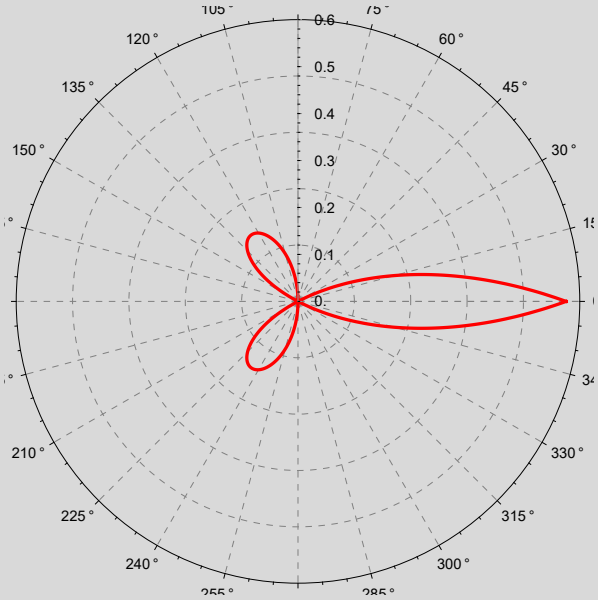
In[38]:=
```
Export["NxPlot.pdf", P1]
```

Out[38]=
```
NxPlot.pdf
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

In[39]:=
```
P5 = PolarPlot[V[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[39]=



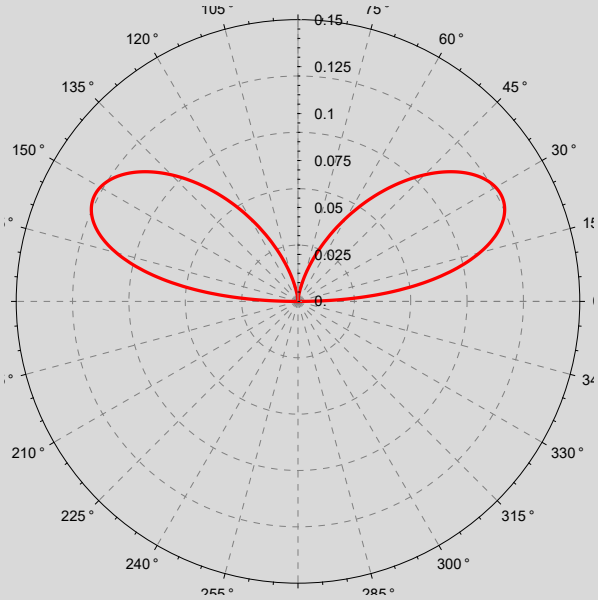
In[40]:=
```
Export["VxPlot.pdf", P2]
```

Out[40]=
```
VxPlot.pdf
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

In[41]:=
```
P6 = PolarPlot[-M[x], {x, 0, Pi}, PlotStyle → {Red, Thick},
  PolarGridLines → Automatic, PolarAxes → {True, True},
  PolarTicks → {"Degrees", Automatic}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]]
```

Out[41]=



In[42]:=
```
Export["MxPlot.pdf", P6]
```

Out[42]=
```
MxPlot.pdf
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

I.1.4 马索尼亚架的崩溃

皮埃尔 • 马斯 (Pierre Mars) 在 Octave 中写的代码, 重新编程 MATLAB® 由作者。

I.1.5 主

```
% ========================================================================
% COLLAPSE ANALYSIS OF A MASONRY ARCH -- THRUST LINE METHOD
% ========================================================================
% This code determines the minimum and maximum thrust states of a circular
% masonry arch using the "line of resistance" (thrust line) approach.
%
% THEORY:
%   A masonry arch can carry load as long as the thrust line -- the locus
%   of the resultant compressive force -- remains within the arch thickness
%   at every cross-section.  Collapse occurs when the thrust line touches
%   the boundary (intrados or extrados) at enough sections to form a
%   mechanism (typically 4 hinges for a symmetric arch).
%
%   The thrust line position is controlled by three "points of passage":
%   sections n1, n2, n3 where the normalised eccentricities e1, e2, e3
%   are prescribed.  The algorithm iteratively relocates these points
%   until the thrust line just touches the arch boundary -- the limit state.
%
% SIGN CONVENTION FOR ECCENTRICITY:
%   e = +1  ->  point on extrados  (outer face)
%   e = -1  ->  point on intrados  (inner face)
%   e =  0  ->  centroid of section (centerline)
%
% TWO LIMIT STATES COMPUTED:
%   Minimum thrust : thrust line hugs intrados at supports, extrados at crown
%   Maximum thrust : opposite -- extrados at supports, intrados at crown
%
% FILE STRUCTURE (all functions at bottom, MATLAB convention):
%   Part 1  --  Main script: parameters, calls min_thrust then max_thrust
%   Part 2  --  min_thrust  : iterative minimum thrust algorithm
%   Part 3  --  max_thrust  : iterative maximum thrust algorithm
%   Part 4  --  resistance_line : plots thrust line, voussoirs, N and V diagrams
%   Part 5  --  face_points : (x,y) of a point at given eccentricity on each face
%   Part 6  --  faces_wrenches : self-weight wrench at each section face  *** STUB ***
%   Part 7  --  faces_efforts : internal N, V, eccentricity at every face
%   Part 8  --  three_points : force on first face to pass thrust line through 3 points
%
% Original code: Pierre Smars (smars@yuntech.edu.tw), ver. 2022-12-02
% License: GNU GPL v2 or later -- https://www.gnu.org/licenses/
% Reprogrammed in MATLAB from Octave by V.E. Saouma
% ========================================================================

% ========================================================================
% PART 1 -- MAIN SCRIPT
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ========================================================================
% Sets all parameters, runs both limit-state analyses, then cleans up.
%
% NOTE ON GLOBAL VARIABLES:
%   All geometry and state are stored in globals so that helper functions
%   can access them without long argument lists.  For a production code
%   one would pass a parameter struct instead, but globals are clearer
%   for a teaching context of this size.

clear; close all; clc;

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       maximum_eccentricity small x y xe ye xi yi density angles radius ...
       thickness iter fn LimitState

% --- Execution control ---
% iWait = 1 : pause at every iteration with a dialog box  (useful for demos)
% iWait = 0 : run silently to completion                  (normal use)
iWait = 0;

% --- Output file base name (used in figure titles and saved EPS/PDF) ---
fn = 'arch-1';

% --- Arch geometry ---
n             = 40;     % number of voussoir blocks
radius_cst    = 5;      % centerline radius of the arch           [m]
thickness_cst = 1;      % uniform voussoir thickness              [m]
aperture      = 90;     % half-opening angle                      [deg]
                        % 90 deg -> semicircular arch

% --- Material and physical constants ---
density_cst = 2500;     % masonry density                         [kg/m^3]
g           = 9.81;     % gravitational acceleration              [m/s^2]

% --- Algorithm parameters ---
maximum_eccentricity = 1;      % |e| <= 1 defines the admissible zone
small                = 1e-6;   % convergence tolerance on eccentricity

% --- Run both limit-state analyses ---
if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Starting with Minimum thrust'));
    close;
end
min_thrust;

if iWait == 1
    waitfor(warndlg('Next: Maximum thrust'));
    close;
end
max_thrust;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Clean up EPS files generated during iterations
delete('*.eps');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: min_thrust
% ========================================================================
% Finds the minimum thrust state by iteratively adjusting the three points
% of passage until the thrust line just fits inside the arch.
%
% MINIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the intrados at both supports (e = -1)
%   and the extrados at the crown (e = +1).
%
% ALGORITHM (iterative heuristic):
%   1. Start with passage points at supports (n1, n3) and crown (n2).
%   2. Compute internal forces and eccentricity profile.
%   3. Find the section r0 with the largest eccentricity violation.
%   4. Move the nearest passage point to r0.
%   5. Repeat until max|ex| <= maximum_eccentricity + small.
%
% WARNING: the while condition  (ok==0)||(iter>10)  is logically
%   questionable -- the ||iter>10 clause keeps looping even after
%   convergence when iter>10.  Preserved faithfully from the original.

function min_thrust

global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState

% --- Initial guess for the three passage points ---
e1 = -maximum_eccentricity;   % intrados at left support
e2 =  maximum_eccentricity;   % extrados at crown
e3 = -maximum_eccentricity;   % intrados at right support
n1 = 1;
n2 = round(n/2) + 1;          % section closest to the crown
n3 = n + 1;

iter            = 0;
LimitState      = 'min';
ok_eccentricity = 0;

while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING above

    iter = iter + 1;

    % Compute internal forces N, V and eccentricity profile ex
    [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>

    % Plot the current thrust line at this iteration
    Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    if iWait == 1
        waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
        close;
    end

    % --- Find the most violated section ---
    % r0 is the index of the section where |eccentricity| is maximum
    [~, r0] = max(abs(ex));

    % --- Relocate the nearest passage point to the offending section ---
    % Intrados violation (ex < 0): move whichever support point is closer
    % Extrados violation (ex > 0): move the crown point
    if ex(r0) < 0
        if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
            n1 = r0;
        else
            n3 = r0;
        end
    else
        n2 = r0;
    end

    % --- Check convergence ---
    if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
        ok_eccentricity = 1;
    else
        ok_eccentricity = 0;
    end

end

% Plot the final (converged or last-iteration) thrust line
Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);

end   % min_thrust


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: max_thrust
% ========================================================================
% Finds the maximum thrust state.  Mirror image of min_thrust:
%
% MAXIMUM THRUST PATTERN:
%   The thrust line touches the extrados at both supports (e = +1)
%   and the intrados at the crown (e = -1).
%
% The relocation logic is the reverse of min_thrust:
%   Extrados violation -> move a support point
%   Intrados violation -> move the crown point

function max_thrust
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
198
199 global n maximum_eccentricity small iter iWait fn LimitState
200
201 % --- Initial guess (reversed signs relative to min_thrust) ---
202 e1 =  maximum_eccentricity;   % extrados at left support
203 e2 = -maximum_eccentricity;   % intrados at crown
204 e3 =  maximum_eccentricity;   % extrados at right support
205 n1 = 1;
206 n2 = round(n/2) + 1;
207 n3 = n + 1;
208
209 iter            = 0;
210 LimitState      = 'max';
211 ok_eccentricity = 0;
212
213 while ok_eccentricity == 0 || (iter > 10)   % see WARNING in min_thrust
214
215     iter = iter + 1;
216
217     [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);  %#ok<ASGLU>
218     Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
219
220     if iWait == 1
221         waitfor(warndlg(['Iteration: ' int2str(iter)], 'Warning'));
222         close;
223     end
224
225     [~, r0] = max(abs(ex));
226
227     % Reversed logic relative to min_thrust
228     if ex(r0) < 0
229         % Intrados violation: move the crown point
230         n2 = r0;
231     else
232         % Extrados violation: move the nearer support point
233         if abs(r0 - n1) < abs(r0 - n3)
234             n1 = r0;
235         else
236             n3 = r0;
237         end
238     end
239
240     if max(abs(ex)) - maximum_eccentricity < small
241         ok_eccentricity = 1;
242     else
243         ok_eccentricity = 0;
244     end
245
246 end
247
248 Plott(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
249
250 end   % max_thrust
251
252
253 % ========================================================================
254 % PART 4 -- FUNCTION: resistance_line
255 % ========================================================================
256 % Produces the final result figure for a converged limit state showing:
257 %
258 %   (a) Arch geometry: voussoir blocks drawn as alternating grey/white
259 %       patches ("Alhambra style"), with centroids marked
260 %   (b) Thrust line: dashed red curve
261 %   (c) Three passage points: filled red circles
262 %   (d) Internal force diagrams: axial N (red sticks) and shear V (blue sticks)
263 %       drawn as scaled arrows at each section face
264 %
265 % Output: EPS file, converted to PDF via Ghostscript (eps2pdf).
266
267 function resistance_line(n1, e1, n2, e2, n3, e3)
268
269 global n x y xe ye xi yi angles radius thickness iter fn LimitState
270
271 fs   = 16;
272 font = 'Times New Roman';
273 GS   = 'gswin64.exe';    % path to Ghostscript executable
274
275 % --- Compute converged internal forces ---
276 [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
277
278 % --- Thrust line coordinates ---
279 % The thrust line at section i is offset from the centerline by
280 %   ex(i) * thickness(i)/2  in the radial direction
281 xz = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
282 yz = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* ex);
283
284 % --- Draw voussoir blocks ---
285 for i = 1:n
286
287     % Four corners of voussoir i (two intrados + two extrados nodes)
288     xp = [xi(i), xi(i+1), xe(i+1), xe(i)];
289     yp = [yi(i), yi(i+1), ye(i+1), ye(i)];
290
291     % Alternating grey / white shading
292     if rem(i, 2) == 1
293         C = [0.5, 0.5, 0.5];   % grey
294     else
295         C = 'White';
296     end
297
298     patch(xp, yp, C);
299     hold on;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
300
301     % Centroid of each voussoir (for verification)
302     poly_i        = polyshape(xp, yp);
303     [x0(i), y0(i)] = centroid(poly_i);
304
305 end
306
307 plot(x0, y0, 'k.');   % centroid markers
308
309 % --- Thrust line and passage points ---
310 plot(xz, yz, '--r', 'LineWidth', 2);
311 xzz = [xz(n1), xz(n2), xz(n3)];
312 yzz = [yz(n1), yz(n2), yz(n3)];
313 scatter(xzz, yzz, 80, 'red', 'filled');
314
315 axis('equal', 'tight');
316 grid minor; grid on;
317 title([fn ' - ' LimitState ' - iter ' num2str(iter)]);
318
319 % --- Axial (N) and shear (V) force diagrams ---
320 % Each stick starts at the thrust line point and extends in the direction
321 % normal (N) or tangential (V) to the section face.
322 % Scale: alpha chosen so the largest N fills 80% of the arch thickness.
323 alpha = 0.8 * thickness(1) / max(N);
324
325 for i = 1:n
326
327     % Base point at the thrust line location for section i
328     xBase = x(i) + ex(i) * thickness(i) * cosd(90 - angles(i)) / 2;
329     yBase = y(i) + ex(i) * thickness(i) * sind(90 + angles(i)) / 2;
330
331     % Axial force stick (red) -- along the arch axis
332     xN = [xBase,  xBase + alpha * N(i) * sind(90 - angles(i))];
333     yN = [yBase,  yBase - alpha * N(i) * cosd(90 - angles(i))];
334     plot(xN, yN, '-r', 'LineWidth', 1);
335
336     % Shear force stick (blue) -- perpendicular to arch axis
337     xV = [xBase,  xBase + alpha * V(i) * cosd(90 - angles(i))];
338     yV = [yBase,  yBase + alpha * V(i) * sind(90 - angles(i))];
339     plot(xV, yV, '-b', 'LineWidth', 1);
340
341 end
342
343 % --- Export ---
344 FileName = [fn '-' LimitState '-Iter-' num2str(iter) '.eps'];
345 set(gca, 'FontSize', 0.8*fs, 'FontName', font);
346 set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
347 print(FileName, '-depsc');
348 eps2pdf(FileName, GS, 0);
349 close all;
350
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
end   % resistance_line


% ========================================================================
% PART 5 -- FUNCTION: face_points
% ========================================================================
% Returns the (x,y) coordinates of the point on each section face at a
% prescribed normalised eccentricity.
%
%   eccentricity = +1  ->  extrados
%   eccentricity = -1  ->  intrados
%   eccentricity =  0  ->  centroid (centerline)
%
% NOTE: this function calls angles() and radius(), thickness() as
% functions -- in the original Octave code these were functions returning
% the global arrays.  In MATLAB with globals they resolve to the global
% variables directly; the call syntax is preserved from the original.

function [x, y] = face_points(eccentricity)

global n aperture

a = angles();

x = sin(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);
y = cos(a) .* (radius(a) + thickness(a)/2 .* eccentricity);

end   % face_points


% ========================================================================
% PART 6 -- FUNCTION: faces_wrenches  *** STUB -- BODY NOT PROVIDED ***
% ========================================================================
% PURPOSE:
%   Computes the resultant force wrench (Fx, Fy, M) acting on each section
%   face due to the cumulative self-weight of all voussoirs above that face.
%
% EXPECTED OUTPUTS  (each an (n+1) x 1 vector):
%   Fx(i) : horizontal force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   Fy(i) : vertical   force resultant at face i due to blocks above   [N]
%   M(i)  : moment resultant at face i about the centerline point      [N.m]
%
% EXPECTED ALGORITHM (not provided in original source):
%   For each block j above face i:
%     weight_j = density(j) * g * volume_j
%     volume_j = area of trapezoidal block j * thickness_cst  (unit depth)
%     Add weight_j to Fy(i) and compute its moment arm about x(i),y(i)
%
% *** This function must be completed before the code will run. ***

function [Fx, Fy, M] = faces_wrenches
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
402
403 global n x y density g angles radius thickness  %#ok<NUSED>
404
405 % TODO: implement self-weight accumulation loop here
406 error('faces_wrenches: function body not provided in original source -- must be
        implemented.');
407
408 end   % faces_wrenches
409
410
411 % =====================================================================
412 % PART 7 -- FUNCTION: faces_efforts
413 % =====================================================================
414 % Computes the internal stress resultants at every section face:
415 %
416 %   N(i)  : normal (axial compressive) force at face i        [N]
417 %   V(i)  : shear force at face i                             [N]
418 %   ex(i) : normalised eccentricity of thrust line at face i  [-1 .. +1]
419 %
420 % ALGORITHM:
421 %   1. Find the boundary force (Fx1,Fy1,M1) on the first face that makes
422 %      the thrust line pass through the three prescribed points
423 %      -> calls three_points()
424 %   2. Get the self-weight wrench at every face
425 %      -> calls faces_wrenches()
426 %   3. Superpose: total wrench = self-weight + boundary force
427 %      (the boundary force contributes a linearly growing moment)
428 %   4. Rotate from global (x,y) axes to local (normal, tangential) frame
429 %      using the section face angle
430 %   5. Compute eccentricity from bending moment and axial force
431
432 function [N, V, ex] = faces_efforts(n1, e1, n2, e2, n3, e3)
433
434 global x y angles thickness
435
436 % Step 1 -- Boundary force on the first face
437 [Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3);
438
439 % Step 2 -- Self-weight wrench at every face
440 [Fx, Fy, M] = faces_wrenches();
441
442 % Step 3 -- Superpose contributions
443 % The moment arm of (Fx1,Fy1) grows linearly from the first face
444 Fx = Fx + Fx1;
445 Fy = Fy + Fy1;
446 M  = M  + M1 + (x - x(1)) .* Fy1 - (y - y(1)) .* Fx1;
447
448 % Step 4 -- Rotate to local section frame
449 % angles(i) is measured from the vertical [deg]
450 % Convention: N positive in compression (masonry standard)
451 N  = -cosd(angles) .* Fx + sind(angles) .* Fy;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
V  =  sind(angles) .* Fx + cosd(angles) .* Fy;

% Step 5 -- Eccentricity: e = M / (N * t/2)
% Normalised by half-thickness so |e| = 1 at the face boundary
ex = -2 .* M ./ (N .* thickness);

end   % faces_efforts


% ========================================================================
% PART 8 -- FUNCTION: three_points
% ========================================================================
% Determines the force (Fx1, Fy1, M1) that must act on the FIRST section
% face in order to make the thrust line pass through three prescribed points.
%
% METHOD -- moment equilibrium at each passage point:
%   For the thrust line to pass through point (xa,ya) on face n1, the
%   total moment about that point must be zero.  This gives one linear
%   equation in (Fx1, Fy1, M1).  Writing it for all three points:
%
%       A * [Fx1; Fy1; M1] = Mp
%
%   where A is 3x3 and Mp contains the self-weight moments at the
%   passage points.  Solved by Gaussian elimination (A\Mp).
%
% SIDE EFFECT: this function also initialises all arch geometry globals
%   (angles, thickness, radius, x, y, xe, ye, xi, yi, density)
%   because it is the deepest call in the chain.

function [Fx1, Fy1, M1] = three_points(n1, e1, n2, e2, n3, e3)

global n radius_cst density_cst thickness_cst g aperture ...
       x y xe ye xi yi density angles radius thickness

% --- Build arch geometry ---
% Section face angles uniformly distributed over the full arch opening
a      = aperture;
da     = 2*a / n;
angles = (-a : da : a)';          % (n+1) x 1  [deg]

% Constant thickness and radius for all faces (could be made variable)
thickness = ones(n+1, 1) * thickness_cst;
radius    = ones(n+1, 1) * radius_cst;

% --- Extrados coordinates  (e = +1) ---
xe = sind(angles) .* (radius + thickness/2);
ye = cosd(angles) .* (radius + thickness/2);

% --- Intrados coordinates  (e = -1) ---
xi = sind(angles) .* (radius - thickness/2);
yi = cosd(angles) .* (radius - thickness/2);
```

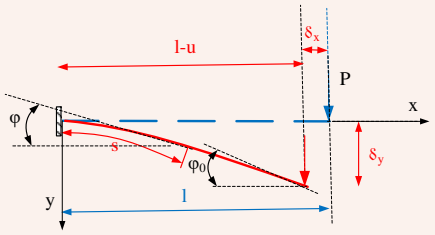

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
503
504 % --- Voussoir density (one value per block, not per face) ---
505 density = ones(n, 1) * density_cst;
506
507 % --- Centerline coordinates  (e = 0) ---
508 x = sind(angles) .* radius;
509 y = cosd(angles) .* radius;
510
511 % Reference point: centre of the first section face
512 xr = x(1);
513 yr = y(1);
514
515 % --- Coordinates of the three passage points ---
516 % Each lies at its prescribed eccentricity on its respective face
517 x1 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);
518 y1 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e1);
519
520 x2 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);
521 y2 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e2);
522
523 x3 = sind(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);
524 y3 = cosd(angles) .* (radius + thickness/2 .* e3);
525
526 xa = x1(n1);  ya = y1(n1);
527 xb = x2(n2);  yb = y2(n2);
528 xc = x3(n3);  yc = y3(n3);
529
530 % --- Moment-equilibrium matrix A ---
531 % Row i: moment of (Fx1,Fy1,M1) about passage point i = 0
532 %   (y_pt - yr)*Fx1 - (x_pt - xr)*Fy1 - M1 = -M_selfweight(ni)
533 A = [ ya-yr,  -(xa-xr),  -1 ;
534       yb-yr,  -(xb-xr),  -1 ;
535       yc-yr,  -(xc-xr),  -1 ];
536
537 % --- Self-weight wrench ---
538 [Fx, Fy, M] = faces_wrenches();
539
540 % --- Shift moment to the passage points ---
541 % Subtract lever arm from section centroid to passage point
542 xa = xa - x(n1);  ya = ya - y(n1);
543 xb = xb - x(n2);  yb = yb - y(n2);
544 xc = xc - x(n3);  yc = yc - y(n3);
545
546 % Moment at each passage point = face moment + transport term
547 Ma = M(n1) - Fx(n1)*ya + Fy(n1)*xa;
548 Mb = M(n2) - Fx(n2)*yb + Fy(n2)*xb;
549 Mc = M(n3) - Fx(n3)*yc + Fy(n3)*xc;
550
551 Mp = [Ma; Mb; Mc];
552
553 % --- Solve for the unknown boundary force ---
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
W   = A \ Mp;
Fx1 = W(1);
Fy1 = W(2);
M1  = W(3);

end   % three_points
```

I.1.6 大 挠度 的 梁



解决问题在 §29.2.3

注: 只有 太阳=1 工作, 其余两人没有给出正确的答案。到读者到 Debug。

```
% ========================================================================
% LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF A CANTILEVER BEAM UNDER END LOAD
% ========================================================================
% A cantilever beam of length L carries a tip load P (vertical).
% For large deflections, the classical Euler-Bernoulli linear theory
% (delta = PL^3/3EI) is no longer accurate. The exact solution requires
% solving a nonlinear boundary value problem based on the elastica equation:
%
%         d^2 phi / ds^2 = -P*cos(phi) / EI
%
% where phi(s) is the rotation at arc-length s from the fixed end.
%
% This script compares three solution methods for the tip displacement:
%   Sol = 1 : Direct numerical integration (RECOMMENDED -- others are buggy)
%   Sol = 2 : Elliptic integral form (incomplete -- currently incorrect)
%   Sol = 3 : Complete elliptic integral of the 2nd kind
%
% Outputs: plot of phi_0 and normalised displacements vs load parameter PL^2/EI
% ========================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Beam properties
% ------------------------------------------------------------------------
L  = 4;                  % Length [m]
A  = 50e-6;              % Cross-sectional area [m^2]  (not used here)
I  = 1e7 * 1e-12;        % Second moment of area [m^4]
E  = 800e9;              % Young's modulus [Pa]
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
EI = E * I;              % Bending stiffness [N.m^2]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Load stepping
% -------------------------------------------------------------------------
% We sweep P from dP to P_max in equal increments.
% The load parameter x = P*L^2/EI is dimensionless -- it is the natural
% variable for the elastica problem.

dP     = 1000;                  % Load increment [N]
P_max  = 5000000;               % Maximum load   [N]
nSteps = P_max / dP;            % Number of load steps

% Pre-allocate result arrays (faster than growing inside the loop)
PP     = zeros(1, nSteps);      % Applied load at each step
x      = zeros(1, nSteps);      % Dimensionless load PL^2/EI
y0     = zeros(1, nSteps);      % Linear (small-deflection) tip displacement / L
phi    = zeros(1, nSteps);      % Tip rotation phi_0 [rad]
yv     = zeros(1, nSteps);      % Vertical tip displacement / L  (nonlinear)
yh     = zeros(1, nSteps);      % Horizontal tip displacement / L (nonlinear)

% Choose solution method (only Sol=1 is currently verified)
sol = 1;

% fsolve options -- suppress iteration output; tight tolerance
fsolve_opts = optimset('TolFun', 1e-6, 'Display', 'off');

% Initial guess for phi_0 (tip rotation).
% pi/4 works well for moderate loads; may need adjustment at very large P.
phi0_guess = pi / 4;

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Main loop over load steps
% -------------------------------------------------------------------------
for i = 1 : nSteps

    % Current load and dimensionless load parameter
    P     = i * dP;
    PP(i) = P;
    x(i)  = P * L^2 / EI;           % PL^2/EI  (horizontal axis of final plot)

    % Linear (Euler-Bernoulli) tip deflection, normalised by L
    % Valid only for small deflections; included for comparison
    y0(i) = (P * L^3 / (3*EI)) / L;

    % alpha appears repeatedly: alpha = sqrt(P/EI)  [1/m]
    alpha = sqrt(P / EI);

    % ---------------------------------------------------------------
    % Step 3a -- Solve for phi_0 (rotation at the free tip)
    % ---------------------------------------------------------------
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    % The exact arc-length condition gives an implicit equation for phi_0:
    %
    %   (1/sqrt(2)*alpha) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
    %
    % We solve this numerically with fsolve.
    % FuncPhi0 (defined at the bottom) returns the residual of this equation.

    [phi0, ~, exitflag] = fsolve( ...
        @(phi0) FuncPhi0(phi0, alpha, L), ...
        phi0_guess, fsolve_opts);

    if exitflag <= 0
        warning('Step %d: fsolve did not converge. phi0 may be unreliable.', i);
    end

    phi(i) = phi0;    % Store converged tip rotation

    % ------------------------------------------------------------------
    % Step 3b -- Compute tip displacements using the chosen method
    % ------------------------------------------------------------------

    beta = alpha * L;    % dimensionless load parameter (= sqrt(PL^2/EI))

    if sol == 1
        % --- Method 1: Direct numerical integration ---
        % Vertical displacement (normalised by L):
        %   delta_y/L = (sqrt(2)/(2*beta)) * integral_0^phi0 [ sin(phi)/sqrt(sin(phi0)-
    sin(phi)) ] dphi
        %
        % Horizontal shortening (normalised by L):
        %   delta_x/L = (sqrt(2)/(alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1

        integrand_v = @(phi) sin(phi) ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, phi0);

        yv(i) = (sqrt(2) / (2*beta)) * integral_v;
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    elseif sol == 2
        % --- Method 2: Elliptic integral formulation (CURRENTLY INCORRECT) ---
        % The substitution k = sqrt((1+sin(phi0))/2) transforms the integral
        % into a standard elliptic form.  This branch has a known bug -- left
        % as an exercise for the reader.

        k = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );

        integrand_v = @(theta) (2*k^2*sin(theta).^2 - 1) ...
                               ./ sqrt(1 - k^2*sin(theta).^2);
        integral_v  = integral(integrand_v, 0, pi/2);

        yv(i) = (1 / beta) * integral_v;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        % yh not computed in this branch

    elseif sol == 3
        % --- Method 3: Complete and incomplete elliptic integrals of 2nd kind ---
        % Uses MATLAB's built-in ellipticE.
        % delta_y/L = 1 - (2/beta) * [ E(k) - E(phi0, k) ]
        % where E(k) is the complete and E(phi0,k) the incomplete elliptic integral.

        k        = sqrt( (1 + sin(phi0)) / 2 );
        E_k      = ellipticE(k);                        % complete
        E_k_phi0 = ellipticE(asin(sin(phi0)), k);       % incomplete

        yv(i) = 1 - (2/beta) * (E_k - E_k_phi0);
        yh(i) = (sqrt(2) / (alpha*L)) * sqrt(sin(phi0)) - 1;

    end

end   % end load-step loop

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot results
% ------------------------------------------------------------------------
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;   % font size

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);

% --- Upper panel: tip rotation vs load parameter ---
subplot(2, 1, 1)
plot(x, phi, 'k', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [0 1.6], 'YTick', 0:0.2:1.6)
grid on
xlabel('PL^2 / EI',  'FontSize', fs)
ylabel('\phi_0  [rad]', 'FontSize', fs)
title('Tip rotation', 'FontSize', fs)
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

% --- Lower panel: normalised tip displacements vs load parameter ---
subplot(2, 1, 2)
plot(x, yv, 'r', x, yh, 'b', 'LineWidth', 2)
set(gca, 'XLim', [0 10], 'XTick', 0:1:10)
set(gca, 'YLim', [-0.6 1.0], 'YTick', -0.6:0.2:1.0)
grid on
xlabel('PL^2 / EI', 'FontSize', fs)
ylabel('Normalised displacement', 'FontSize', fs)
title('Tip displacements (normalised by L)', 'FontSize', fs)
lgnd = legend('\delta_y / L', '\delta_x / L', 'Location', 'best');
set(lgnd, 'Color', 'none')
set(gca, 'FontSize', fs, 'Color', 'none')

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
exportgraphics(hf1, 'Displ-Load-Anal.pdf', 'BackgroundColor', 'none')

% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: FuncPhi0
% ========================================================================
function residual = FuncPhi0(phi0, alpha, L)
% FuncPhi0  Residual of the arc-length constraint for the elastica problem.
%
%   The exact arc-length condition for a cantilever under tip load P is:
%
%     (1 / (sqrt(2)*alpha)) * integral_0^phi0 [ 1/sqrt(sin(phi0)-sin(phi)) ] dphi = L
%
%   Rearranging, the residual (which fsolve drives to zero) is:
%
%     residual = (1/(sqrt(2)*alpha)) * integral(...) - L
%
%   Inputs:
%     phi0     : current guess for tip rotation [rad]
%     alpha    : sqrt(P/EI)   [1/m]
%     L        : beam length [m]
%
%   Output:
%     residual : how far the arc-length condition is from being satisfied

    % The integrand has a square-root singularity at phi = phi0.
    % max(eps, ...) prevents division by exactly zero at the upper limit.
    integrand = @(phi) 1 ./ sqrt( max(eps, sin(phi0) - sin(phi)) );

    % Numerical integration from 0 to phi0
    integralValue = integral(integrand, 0, phi0, 'RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-9);

    % Residual: left-hand side minus right-hand side of the arc-length equation
    residual = (1 / (sqrt(2) * alpha)) * integralValue - L;

end
```

I.2 第二部分: 结构设计与分析

此部分讨论了详细的结构设计和框架分析, 包括壳设计、框架-分析方法、扭转和优化。

I.2.1 圆形盾牌设计

编写的代码 Georg, R., 2014 需要验证。

以下代码是为仅支持的圆形壳的盾牌部分设计而开发的。该代码遵循由深相关术语理论

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

所描述的设计程序, 并在 §35.2.3.2.2. 设计工具的目的是确定壳内的内部力量和转移。壳设计代码是由基本输入和表格组成的, 该壳尺寸。壳 函数产生需要解决的同步方程式, 以便为随意恒定的方程。有了已知的恒定的值, 壳力量函数确定了内部力量和位移的壳. 代码如下呈现:

```
% ========================================================================
% DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
% ========================================================================
% Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
% method, which decomposes the shell response into:
%
%   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
%       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
%       Valid in the interior, away from edges.
%
%   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
%       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
%       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
%       mixed trig/hyperbolic functions.
%
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x  : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
%   r  : radius of curvature
%   h  : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)             [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                   [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)      [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge    [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                  [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)      [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number         [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete           [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                     [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
98
99  Shell.k     = k;
100 Shell.gamma = gamma;
101 Shell.Q     = Q;
102 Shell.x     = x;
103 Shell.E     = E;
104 Shell.D     = D;
105
106 % ------------------------------------------------------------------------
107 % Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
108 % ------------------------------------------------------------------------
109 % The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
110 % roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
111 % Eq. 4.54 of the reference text:
112 %
113 %   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2
114
115 m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
116 n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
117 m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
118 n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );
119
120 mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions
121
122 % Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
123 % These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
124 alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
125 beta1   = Q * n1;
126 alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
127 beta1p  = Q * n2;
128
129 rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions
130
131 Roots.M1     = m1;      Roots.N1     = n1;
132 Roots.M2     = m2;      Roots.N2     = n2;
133 Roots.Alpha1 = alpha1;  Roots.Alpha2 = alpha1p;
134 Roots.Beta1  = beta1;   Roots.Beta2  = beta1p;
135
136 % ------------------------------------------------------------------------
137 % Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
138 % ------------------------------------------------------------------------
139 % The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
140 % as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
141 %
142 %   TL  : tangential load resultant at the edge
143 %   SL  : shear load resultant at the edge
144
145 TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
146 SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);
147
148 M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge

EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;

% Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
% ------------------------------------------------------------------------
% The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
% We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
% shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
% stress resultant type SC evaluated at the edge.
%
% SC index map:
%   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
%   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip

F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi

F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix

ShellCoef.M_phi  = F1;
ShellCoef.N_phi  = F2;
ShellCoef.Qp_phi = F3;
ShellCoef.N_xphi = F4;

% Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
% ------------------------------------------------------------------------
% Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
phi  = 0;
phit = phi - phi_k;
x    = L/2;

% --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);

% --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
% shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here

M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

% --- Store results ---
Forces.M_phi    = M_phi;    Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x      = N_x;      Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;         Displacement.v = v;    Displacement.w = w;
Displacement.up = up;       Displacement.vp = vp;  Displacement.wp = wp;


% ========================================================================
% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
% ========================================================================
% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.1 -- Inputs
% ------------------------------------------------------------------------
b     = 1;              % edge beam width                    [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                    [ft]
L     = 66.5;           % span                               [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                       [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                    [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                   [rad]
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge            [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                    [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                  [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
E = 4.32e5;             % Young's modulus                       [ksf]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% -------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip/ft]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% -------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% -------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% -------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2) ...
               + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force       [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                              [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement              [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal

% Shell reinforcement: tension governed by N1
As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in shell

% Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel

% Edge beam reinforcement: tension from arch action
T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal steel

% Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric

fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
% ========================================================================
% Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
% edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
%
% Each stress resultant SC has the form:
%
%   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
%                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
%
% where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
% and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
%
% The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
% (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
%
% INPUT:
%   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
%   k       : longitudinal wave number [1/ft]
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   r       : shell radius [ft]
%   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
%   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
%   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
%   Q       : shell parameter
%   gamma   : shell bending parameter
%   h       : thickness [ft]
%   x       : longitudinal evaluation point [ft]
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2          * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma    * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
455
456 R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
457 B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;
458
459 R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
460 B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;
461
462 R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
463 B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;
464
465 R(7)  =  2                  * sin(k*x);   % w
466 B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;
467
468 R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
469 B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;
470
471 R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
472 B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;
473
474 R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
475 B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
476 B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);
477
478 R(11) =  2*D*k/r            * cos(k*x);   % M_xphi
479 B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;
480
481 R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
482 B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
483 B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);
484
485 % --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
486 % SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
487 % SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
488 if SC < 8
489     A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
490     B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
491     C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
492     D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
493 else
494     A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
495     B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
496     C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
497     D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
498 end
499
500 Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);
501
502 end   % shell_coefficients
503
504
505 % ========================================================================
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
% ========================================================================
% Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
%
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
%   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2            * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
R(3)  = -2*D*k^3/gamma       * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2   * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3   * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                    * sin(k*x);
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r              * cos(k*x);
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

% --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
if SC < 8
    A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
    B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
    D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
else
    A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
    B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
    C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
    D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
end

F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);

end   % shell_forces
```

I.2.2 接近 框架 分析; cantilever 方法

```
% ========================================================================
% DESIGN OF CYLINDRICAL BARREL VAULT SHELLS
% ========================================================================
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Analyzes a cylindrical concrete shell roof using the Beam-Arch (Schorer)
% method, which decomposes the shell response into:
%
%   (a) MEMBRANE (PARTICULAR) SOLUTION:
%       The shell carries load by in-plane membrane forces only.
%       Valid in the interior, away from edges.
%
%   (b) BENDING (HOMOGENEOUS) SOLUTION:
%       Edge disturbances decay inward from the free longitudinal edges.
%       Governed by a 4th-order ODE whose characteristic roots involve
%       mixed trig/hyperbolic functions.
%
%   (c) EDGE BEAM COMPATIBILITY:
%       The shell edge and the stiffening edge beam must deform together.
%       A 2x2 compatibility system is solved for the edge forces.
%
% GEOMETRY (single barrel vault):
%   x  : longitudinal axis  (0 to L)
%   phi: circumferential angle from crown  (0 at crown, phi_k at edge)
%   r  : radius of curvature
%   h  : shell thickness
%
% LOAD: uniform dead/live load q [ksf] on the projected plan area
%
% SIGN CONVENTION: forces per unit length [kip/ft], moments [kip.ft/ft]
%   N_phi  : circumferential membrane force
%   N_x    : longitudinal membrane force
%   N_xphi : in-plane shear
%   M_phi  : circumferential bending moment
%   M_x    : longitudinal bending moment
%   Q_phi  : circumferential transverse shear
%   Q_x    : longitudinal transverse shear
%
% UNITS: kip, ft throughout (E in ksf, q in ksf, dimensions in ft)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Shell analysis (membrane + bending solution)
%   Part 2  -- Edge beam compatibility analysis
%   Part 3  -- function shell_coefficients  (coefficient matrix rows)
%   Part 4  -- function shell_forces        (force/displacement evaluation)
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- SHELL ANALYSIS
% ========================================================================

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Geometry and loading
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ------------------------------------------------------------------------
L     = 66.5;           % shell span (longitudinal)              [ft]
r     = 26.6;           % radius of curvature                    [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                        [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % half-angle of shell (edge angle)       [rad]
phi   = 0;              % current evaluation angle from edge     [rad]
q     = 0.080;          % uniform surface load                   [ksf]

% phit: angle measured from the crown (phi=0 at crown, phi_k at edge)
% Note: phi is measured FROM the edge, so phit = phi - phi_k
phit = phi - phi_k;
Phi  = phi_k - phi;     % complementary angle (from crown)       [rad]

% Pack geometry into struct for reference
dimload.Length  = L;
dimload.Radius  = r;
dimload.Height  = h;
dimload.Phi_k   = phi_k;
dimload.Phi     = phi;
dimload.Pd      = q;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Shell bending stiffness constants
% ------------------------------------------------------------------------
% The Fourier series representation uses a single half-wave (n=1).
% k = n*pi/L is the longitudinal wave number.

n_fourier = 1;              % Fourier harmonic number (single half-wave)
k         = n_fourier * pi / L;   % longitudinal wave number         [1/ft]

% Bending rigidity of the shell plate
E = 4.32e5;             % Young's modulus of concrete            [ksf]
D = E * h^3 / 12;       % flexural rigidity                      [kip.ft]

% Shell bending parameter (Schorer theory)
% gamma combines the wave number, radius, and thickness
gamma = r * k / 3^(1/4) * sqrt(h/r);

% Q: combined shell parameter used in the characteristic equation
Q = 3^(1/8) * (r/h)^(1/4) * sqrt(r*k);

% Evaluation point: midspan (where Fourier sin/cos terms are maximum)
x = L/2;

Shell.k     = k;
Shell.gamma = gamma;
Shell.Q     = Q;
Shell.x     = x;
Shell.E     = E;
Shell.D     = D;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Characteristic roots of the bending equation
% ------------------------------------------------------------------------
% The homogeneous bending solution involves four complex characteristic
% roots.  Their real and imaginary parts m1,n1,m2,n2 are computed from
% Eq. 4.54 of the reference text:
%
%   roots involve  sqrt( sqrt((1+/-gamma)^2 + 1)  +/-  (1+/-gamma) ) / 2

m1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) + (1+gamma) ) / 2 );
n1 = sqrt( ( sqrt((1+gamma)^2 + 1) - (1+gamma) ) / 2 );
m2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) - (1-gamma) ) / 2 );
n2 = sqrt( ( sqrt((1-gamma)^2 + 1) + (1-gamma) ) / 2 );

mn = [m1, n1, m2, n2];   % collect for passing to sub-functions

% Root powers (Eq. 4.55): scale m,n by the shell parameter Q
% These appear as arguments of the trig/hyperbolic functions in the solution
alpha1  = Q * m1;    % decay/oscillation rate, first root pair
beta1   = Q * n1;
alpha1p = Q * m2;    % decay/oscillation rate, second root pair
beta1p  = Q * n2;

rp = [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p];   % collect for sub-functions

Roots.M1     = m1;      Roots.N1     = n1;
Roots.M2     = m2;      Roots.N2     = n2;
Roots.Alpha1 = alpha1;  Roots.Alpha2 = alpha1p;
Roots.Beta1  = beta1;   Roots.Beta2  = beta1p;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Edge loading (Fourier coefficients)
% ------------------------------------------------------------------------
% The boundary conditions at the free edge (phi = phi_k) are expressed
% as Fourier series.  For a single half-wave the coefficients are:
%
%   TL  : tangential load resultant at the edge
%   SL  : shear load resultant at the edge

TL       =  4/pi * q * r * cos(phi_k - phi) * sin(k*x);
SL       =  4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k - phi) * cos(k*x);

M_phi_edge   = 0;         % free edge: no moment applied
Np_phi_edge  = -TL;       % normal membrane force at edge
Qp_phi_edge  = 0;         % free edge: no transverse shear
Np_xphi_edge = -SL;       % in-plane shear at edge

EdgeLoad.M_phi   = M_phi_edge;
EdgeLoad.N_phi   = Np_phi_edge;
EdgeLoad.Qp_phi  = Qp_phi_edge;
EdgeLoad.N_xphi  = Np_xphi_edge;
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
157
158 % Assemble right-hand side vector for the 4x4 coefficient system
159 f = [M_phi_edge; Np_phi_edge; Qp_phi_edge; Np_xphi_edge];
160
161 % ------------------------------------------------------------------------
162 % Section 1.5 -- Assemble the 4x4 coefficient matrix and solve
163 % ------------------------------------------------------------------------
164 % The bending solution has 4 unknown constants (a,b,c,d).
165 % We enforce the 4 edge boundary conditions, each yielding one row of F.
166 % shell_coefficients(SC,...) returns the row of F corresponding to
167 % stress resultant type SC evaluated at the edge.
168 %
169 % SC index map:
170 %   1=M_phi  2=M_x   3=Q_x   4=N_phi  5=N_x    6=u
171 %   7=w      8=Q_phi 9=N_xphi 10=v   11=M_xphi 12=Q_phip
172
173 F1 = shell_coefficients(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % M_phi
174 F2 = shell_coefficients(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_phi
175 F3 = shell_coefficients(12, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % Q_phip
176 F4 = shell_coefficients(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x);  % N_xphi
177
178 F = [F1; F2; F3; F4];   % 4x4 coefficient matrix
179
180 ShellCoef.M_phi  = F1;
181 ShellCoef.N_phi  = F2;
182 ShellCoef.Qp_phi = F3;
183 ShellCoef.N_xphi = F4;
184
185 % Solve for the 4 integration constants: F * constants = -f
186 constants = -F \ f;     % [a; b; c; d]
187
188 % ------------------------------------------------------------------------
189 % Section 1.6 -- Evaluate total forces (membrane + bending) at midspan
190 % ------------------------------------------------------------------------
191 % Reset evaluation point to midspan, crown (phi=0)
192 phi  = 0;
193 phit = phi - phi_k;
194 x    = L/2;
195
196 % --- Membrane (particular) solution at midspan, crown ---
197 Np_x     = -4/pi * 2*q/(r*k^2)       * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
198 Np_phi   = -4/pi * q*r                * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
199 Np_xphi  = -4/pi * q*r * 2/(r*k)     * sin(phi_k-phi) * cos(k*x);
200 up       =  2*q/(E*h*r*k^3)           * cos(phi_k-phi) * cos(k*x);
201 vp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2) * sin(phi_k-phi) * sin(k*x);
202 wp       = -2*q/(E*h*r^2*k^4) * (1 + 2*k^2*r^2 + r^4*k^4/2) * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
203
204 % --- Total forces = bending (homogeneous) + membrane (particular) ---
205 % shell_forces evaluates the homogeneous part; membrane part added here
206
207 M_phi  = shell_forces(1,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
M_x    = shell_forces(2,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
M_xphi = shell_forces(11, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_phi  = shell_forces(8,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
Q_x    = shell_forces(3,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x);
N_phi  = shell_forces(4,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_phi;
N_x    = shell_forces(5,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_x;
N_xphi = shell_forces(9,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + Np_xphi;
u      = shell_forces(6,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + up;
v      = shell_forces(10, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + vp;
w      = shell_forces(7,  k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x) + wp;

% --- Resolve displacements into vertical and horizontal components ---
DV = -v * sin(phi_k-phi) + w * cos(phi_k-phi);   % vertical displacement
DH =  v * cos(phi_k-phi) + w * sin(phi_k-phi);   % horizontal displacement

% --- Store results ---
Forces.M_phi   = M_phi;    Forces.N_phi  = N_phi;
Forces.N_x     = N_x;      Forces.N_xphi = N_xphi;
Displacement.u = u;        Displacement.v = v;    Displacement.w = w;
Displacement.up = up;      Displacement.vp = vp;  Displacement.wp = wp;


% ========================================================================
% PART 2 -- EDGE BEAM COMPATIBILITY ANALYSIS
% ========================================================================
% The shell free edge is stiffened by a rectangular edge beam.
% At the shell-beam interface, vertical displacement and rotation must
% be compatible.  This gives a 2x2 linear system for the unknown
% edge forces: vertical edge load Vb and in-plane shear SB.
%
% The approach follows ASCE Manual 31 (Cylindrical Shell Roofs).

close all; fclose all; clear all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.1 -- Inputs
% ------------------------------------------------------------------------
b     = 1;              % edge beam width                       [ft]
d_eb  = 2.25;           % edge beam depth                       [ft]
L     = 66.5;           % span                                  [ft]
r     = 26.6;           % shell radius                          [ft]
h     = 0.25;           % shell thickness                       [ft]
phi_k = 45 * pi/180;    % shell edge angle                      [rad]
phi   = 0 * pi/180;     % evaluation angle from edge            [rad]
q     = 0.080;          % shell surface load                    [ksf]
rho   = 0.150;          % concrete unit weight                  [kcf]
w_eb  = b * d_eb * rho; % edge beam self-weight per unit length [klf]

n_fourier = 1;
k = n_fourier * pi / L;
x = L/2;
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
E = 4.32e5;             % Young's modulus                        [ksf]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.2 -- Known shell force at edge (from Part 1)
% ------------------------------------------------------------------------
N_x_shell = 99.03;      % longitudinal membrane force from shell analysis [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.3 -- ASCE Manual 31 influence coefficients
% ------------------------------------------------------------------------
% These coefficients relate unit edge loads (vertical V, shear S) to
% shell displacements and forces at the edge.
% Table 2B: deformation coefficients (delta_v)
C1 =  96.10;    % vertical edge load  -> vertical displacement
C2 = -64.69;    % horizontal edge load -> vertical displacement
C3 =   2.500;   % shear edge load     -> vertical displacement

% Table 2A: force coefficients (T_x)
C4 =  19.64;    % vertical edge load  -> N_x
C5 =   1.388;   % shear edge load     -> N_x

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.4 -- Membrane forces and edge load resultants
% ------------------------------------------------------------------------
Np_phi  = -4/pi * q * r * cos(phi_k-phi) * sin(k*x);
Np_xphi = -4/pi * q * r * 2/(r*k) * sin(phi_k-phi) * cos(0);

% Resolve membrane force at the edge into vertical, horizontal, shear
VL =  -Np_phi  * sin(phi_k);   % vertical component of N_phi at edge
HL =  -Np_phi  * cos(phi_k);   % horizontal component
SL =  -Np_xphi;                % shear component

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.5 -- Compatibility matrix and right-hand side
% ------------------------------------------------------------------------
% The shell and beam flexibility matrices S and B are assembled.
% NS, NB: normalisation factors (flexibility denominators)

NS = L^4 / (r^3 * h * E);   % shell flexibility normalisation
NB = L^4 / (d_eb^3 * b * E); % beam flexibility normalisation

% Shell flexibility matrix and fixed-end load vector
% Row 1: vertical displacement compatibility
% Row 2: N_x compatibility
FS(1,1) = NS * (q*r * (((2*r)/(pi*L))^2 + 2/pi^4 + (r/L)^4 * cos(phi_k-phi)^2) ...
               + C1*VL + C2*HL + C3*SL) * sin(k*x);
FS(2,1) = N_x_shell / h;

S(1,1) = NS * C1 * sin(k*x);
S(1,2) = NS * C3 * sin(k*x);
S(2,1) = NS * E*r/L^2 * C4 * sin(k*x);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
S(2,2) = NS * E*r/L^2 * C5 * sin(k*x);

% Beam flexibility matrix and fixed-end load vector
FB(1,1) = NB * (-4/pi) * w_eb * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
FB(2,1) = NB * E*d_eb/L^2 * 4/pi * w_eb * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);

B(1,1) =  NB * 12/(pi*n_fourier)^4 * sin(k*x);
B(1,2) = -NB * d_eb/L * 6/(pi*n_fourier)^3 * sin(k*x);
B(2,1) = -NB * E*d_eb/L^2 * 6/(pi*n_fourier)^2 * sin(k*x);
B(2,2) =  L/(b*d_eb) * 4/(pi*n_fourier) * sin(k*x);

% Combined system: (S + B) * X = -(FS + FB)
BS = S + B;
F  = FS + FB;
X  = BS \ (-F);

Vb = X(1);   % vertical edge force solution   [kip/ft]
SB = X(2);   % in-plane shear edge force       [kip/ft]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.6 -- Final internal forces including edge beam correction
% ------------------------------------------------------------------------
% The ASCE Manual 31 influence coefficients translate the solved edge
% forces back into increments of each stress resultant.

% N_x: longitudinal force
N_x = N_x_shell + Vb*C4 + SB*C5;

% N_xphi: in-plane shear (C4=0 for shear, C5=0.4)
N_xphi = 0 + Vb*0 + SB*0.4;

% N_phi: circumferential force (C4=0.707 for vertical, C5=0 for shear)
N_phi = 0 + Vb*0.707 + SB*0;

% M_phi: bending moment (no correction from edge beam for this case)
M_phi = 0;

Forces.N_x     = N_x;
Forces.N_xphi  = N_xphi;
Forces.N_phi   = N_phi;
Forces.M_phi   = M_phi;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2.7 -- Reinforcement design (ACI working stress)
% ------------------------------------------------------------------------
fs = 20;    % allowable steel stress                              [ksi]
ds = 2;     % effective depth of shell reinforcement              [in]

% Principal membrane forces from Mohr's circle for membrane forces
N1 = (N_x + N_phi)/2 + sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % max principal
N2 = (N_x + N_phi)/2 - sqrt(N_xphi^2 + ((N_x - N_phi)/2)^2);  % min principal
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
361
362 % Shell reinforcement: tension governed by N1
363 As_shell = N1 / fs;                          % [in^2/ft] -- tension steel in shell
364
365 % Bending reinforcement (if M_phi produces tension)
366 As_bend  = M_phi * 12 / (fs * 7/8 * ds);    % [in^2/ft] -- bending steel
367
368 % Edge beam reinforcement: tension from arch action
369 T        = ((N1 + 8.32)/2 - 8.32) * d_eb;
370 As_beam  = T / fs;                           % [in^2] -- beam longitudinal steel
371
372 % Minimum reinforcement per ACI (temperature and shrinkage)
373 Amin1 = 0.0035 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- each direction (deformed bars)
374 Amin2 = 0.0018 * h * 12 * 12;   % [in^2/ft] -- welded wire fabric
375
376 fprintf('\n--- Reinforcement Summary ---\n');
377 fprintf('  Shell tension steel  As_shell = %.4f in^2/ft\n', As_shell);
378 fprintf('  Shell bending steel  As_bend  = %.4f in^2/ft\n', As_bend);
379 fprintf('  Edge beam steel      As_beam  = %.4f in^2\n',    As_beam);
380 fprintf('  Min steel (bars)     Amin1    = %.4f in^2/ft\n', Amin1);
381 fprintf('  Min steel (WWF)      Amin2    = %.4f in^2/ft\n', Amin2);
382
383
384 % ========================================================================
385 % PART 3 -- FUNCTION: shell_coefficients
386 % ========================================================================
387 % Builds one row of the 4x4 coefficient matrix F used to enforce the
388 % edge boundary conditions on the bending (homogeneous) solution.
389 %
390 % Each stress resultant SC has the form:
391 %
392 %   F_SC = 2 * R(SC) * [ B1*T1 - B2*T2,  -B2*T1 - B1*T2,
393 %                        B3*T3 - B4*T4,  -B4*T3 - B3*T4 ]
394 %
395 % where T1..T8 are trig/hyperbolic combinations evaluated at the edge,
396 % and B1..B4 are dimensionless coefficients specific to each resultant.
397 %
398 % The distinction SC<8 / SC>=8 selects between two sets of T functions
399 % (T1..T4 for moments/axial; T5..T8 for shears/twists).
400 %
401 % INPUT:
402 %   SC      : stress resultant selector (1..12, see index map in Part 1)
403 %   k       : longitudinal wave number [1/ft]
404 %   r       : shell radius [ft]
405 %   phit    : angle from crown to evaluation point [rad]
406 %   rp      : [alpha1, beta1, alpha1p, beta1p] root parameters
407 %   mn      : [m1, n1, m2, n2] root components
408 %   Q       : shell parameter
409 %   gamma   : shell bending parameter
410 %   h       : thickness [ft]
411 %   x       : longitudinal evaluation point [ft]
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%
% OUTPUT:
%   Shell   : 1x4 row vector -- one row of the coefficient matrix

function Shell = shell_coefficients(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, x)

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Trig/hyperbolic basis functions evaluated at phit ---
% Set 1 (for SC < 8: moments, axial forces, displacements u, w)
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
% Set 2 (for SC >= 8: shears, twists, displacement v)
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Material and bending stiffness ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

% --- Scaling factor R(SC) and shape coefficients B1..B4 for each SC ---
% R: the 'particular solution' scale factor  (depends on x via sin/cos)
% B1..B4: dimensionless coefficients from the theory (Eq. 4.5x)
R  = zeros(1,12);
B1 = zeros(1,12);
B2 = zeros(1,12);
B3 = zeros(1,12);
B4 = zeros(1,12);

R(1)  = -2*D/r^2          * sin(k*x);   % M_phi
B1(1) = Q^2*(1+gamma);   B2(1) = Q^2;   B3(1) = Q^2*(gamma-1); B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2          * sin(k*x);   % M_x
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma    * cos(k*x);   % Q_x
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1; B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2 * sin(k*x);   % N_phi
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3 * sin(k*x);   % N_x
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;

R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);   % u
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;

R(7)  =  2                  * sin(k*x);   % w
B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;

R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phi
B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2); B4(8) = m2-n2;

R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);   % N_xphi
B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;

R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);   % v
B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);

R(11) =  2*D*k/r            * cos(k*x);   % M_xphi
B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;

R(12) = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);   % Q_phip
B1(12) = m1*(1-gamma)-n1;    B2(12) = m1+n1*(1-gamma);
B3(12) = -m2*(1+gamma)-n2;   B4(12) = m2-n2*(1+gamma);

% --- Assemble the row vector for stress resultant SC ---
% SC < 8: use T1..T4 (moments, axial, u, w)
% SC >= 8: use T5..T8 (shears, twists, v)
if SC < 8
    A_col = ( B1(SC)*T1 - B2(SC)*T2);
    B_col = (-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
    C_col = ( B3(SC)*T3 - B4(SC)*T4);
    D_col = (-B4(SC)*T3 - B3(SC)*T4);
else
    A_col = ( B1(SC)*T5 - B2(SC)*T6);
    B_col = (-B2(SC)*T5 - B1(SC)*T6);
    C_col = ( B3(SC)*T7 - B4(SC)*T8);
    D_col = (-B4(SC)*T7 - B3(SC)*T8);
end

Shell = [A_col, B_col, C_col, D_col] * 2 * R(SC);

end   % shell_coefficients


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: shell_forces
% ========================================================================
% Evaluates a single stress resultant or displacement at a given point
% using the four known integration constants (a, b, c, d).
%
% This is the same basis as shell_coefficients, but now the constants
% are known and we compute the scalar force value rather than a matrix row.
%
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% INPUT:
%   SC        : stress resultant selector (same index as shell_coefficients)
%   constants : [a; b; c; d] -- solved integration constants
%   (remaining arguments same as shell_coefficients)
%
% OUTPUT:
%   F  : scalar value of the requested stress resultant or displacement

function F = shell_forces(SC, k, r, phit, rp, mn, Q, gamma, h, constants, x)

a = constants(1);  b = constants(2);
c = constants(3);  d = constants(4);

alpha1  = rp(1);  beta1   = rp(2);
alpha1p = rp(3);  beta1p  = rp(4);
m1 = mn(1);  n1 = mn(2);  m2 = mn(3);  n2 = mn(4);

% --- Same trig/hyperbolic basis functions as shell_coefficients ---
T1 = cos(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T2 = sin(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T3 = cos(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);
T4 = sin(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T5 = cos(beta1  * phit) * sinh(alpha1  * phit);
T6 = sin(beta1  * phit) * cosh(alpha1  * phit);
T7 = cos(beta1p * phit) * sinh(alpha1p * phit);
T8 = sin(beta1p * phit) * cosh(alpha1p * phit);

% --- Same R and B coefficient tables ---
E_mod = 4.32e5;
D     = E_mod * h^3 / 12;

R  = zeros(1,11);   % only SC 1..11 used in shell_forces (no SC=12 here)
B1 = zeros(1,11);
B2 = zeros(1,11);
B3 = zeros(1,11);
B4 = zeros(1,11);

R(1)  = -2*D/r^2           * sin(k*x);
B1(1) = Q^2*(1+gamma);  B2(1) = Q^2;  B3(1) = Q^2*(gamma-1);  B4(1) = Q^2;

R(2)  =  2*D*k^2            * sin(k*x);
B1(2) = 1;  B2(2) = 0;  B3(2) = 1;  B4(2) = 0;

R(3)  = -2*D*k^3/gamma      * cos(k*x);
B1(3) = 1;  B2(3) = 1;  B3(3) = -1;  B4(3) = 1;

R(4)  =  4*D*r*k^4/gamma^2  * sin(k*x);
B1(4) = 0;  B2(4) = 1;  B3(4) = 0;  B4(4) = -1;

R(5)  = -4*D*r*k^4/gamma^3  * sin(k*x);
B1(5) = -1;  B2(5) = 1+gamma;  B3(5) = 1;  B4(5) = 1-gamma;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
565
566 R(6)  =  4*D*r*k^3/(h*E_mod*gamma^3) * cos(k*x);
567 B1(6) = -1;  B2(6) = 1+gamma;  B3(6) = 1;  B4(6) = 1-gamma;
568
569 R(7)  =  2                    * sin(k*x);
570 B1(7) = 1;  B2(7) = 0;  B3(7) = 1;  B4(7) = 0;
571
572 R(8)  = -2*D*k^3/(sqrt(gamma))^3 * sin(k*x);
573 B1(8) = m1-n1;   B2(8) = m1+n1;   B3(8) = -(m2+n2);  B4(8) = m2-n2;
574
575 R(9)  =  4*D*r*k^4/(sqrt(gamma))^5 * cos(k*x);
576 B1(9) = -n1;  B2(9) = m1;  B3(9) = n2;  B4(9) = -m2;
577
578 R(10) =  4*D*r*k^3/(E_mod*h*(sqrt(gamma))^7) * sin(k*x);
579 B1(10) = m1+n1*(1-gamma);   B2(10) = n1-m1*(1-gamma);
580 B3(10) = -m2+n2*(1+gamma);  B4(10) = -n2-m2*(1+gamma);
581
582 R(11) =  2*D*k/r             * cos(k*x);
583 B1(11) = alpha1;  B2(11) = beta1;  B3(11) = alpha1p;  B4(11) = beta1p;
584
585 % --- Evaluate with known constants a, b, c, d ---
586 if SC < 8
587     A_val = a*B1(SC)*T1 - a*B2(SC)*T2;
588     B_val = b*(-B2(SC)*T1 - B1(SC)*T2);
589     C_val = c*(B3(SC)*T3 - c*B4(SC)*T4);
590     D_val = d*(-B4(SC)*T3 - d*B3(SC)*T4);
591 else
592     A_val = a*B1(SC)*T5 - a*B2(SC)*T6;
593     B_val = b*(-B2(SC)*T5 - b*B1(SC)*T6);
594     C_val = c*B3(SC)*T7 - c*B4(SC)*T8;
595     D_val = d*(-B4(SC)*T7 - d*B3(SC)*T8);
596 end
597
598 F = 2 * R(SC) * (A_val + B_val + C_val + D_val);
599
600 end   % shell_forces
```

I.2.3 非统一 扭转

```
1  % ========================================================================
2  % NON-UNIFORM (WARPING) TORSION -- DISTRIBUTION OF TORQUE COMPONENTS
3  % ========================================================================
4  % When a thin-walled open section (e.g. I-beam, channel) is twisted, the
5  % total applied torque T is resisted by TWO mechanisms:
6  %
7  %   1. ST. VENANT TORSION (T_SV):
8  %      Pure shear flow around the cross-section.  Dominates in short
9  %      members and near free ends where warping is unrestrained.
10 %
11 %   2. WARPING TORSION (T_V):
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%       Bending of the flanges in opposite directions (bimoment).
%       Dominates near fixed ends where warping is fully restrained.
%
% The governing ODE for a member fixed at the base (x=0) and free at
% the top (x=L), carrying a concentrated torque T at the free end, gives:
%
%   T_V(x)  = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
%   T_SV(x) = T * [ 1 - cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda) ]
%
% where:
%   lambda = sqrt(E*C_w / G*J)   [length]  -- torsional characteristic length
%
% For this W-section example lambda = 65.9 in (= 5.49 ft).
%
% AT THE FIXED END (x=0):
%   T_V   = T / cosh(L/lambda)   -> small for long members (SV dominates)
%   T_SV  = T * [1 - 1/cosh(L/lambda)]
%
% AT THE FREE END (x=L):
%   T_V   = T   (all torque is warping torsion at the point of application)
%   T_SV  = 0
%
% This script plots the distribution of both torque components over the
% member height for four different member lengths, illustrating how the
% relative importance of warping vs. St. Venant torsion varies with L/lambda.
%
% REFERENCE SECTION: W-shape with lambda = 65.9 in
% Units: inches for internal calculation, feet for plotting
% ========================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Display settings
% ------------------------------------------------------------------------
fs   = 16;
font = 'Times New Roman';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/1.5, scrsz(4)/2]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
T      = 1;               % applied torque (normalised)         [kip.in]
lambda = 65.9;            % torsional characteristic length     [in]
                          % lambda = sqrt(E*Cw / G*J) for the section

L_ft   = [10, 20, 25, 30]; % member lengths to compare          [ft]

% ------------------------------------------------------------------------
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

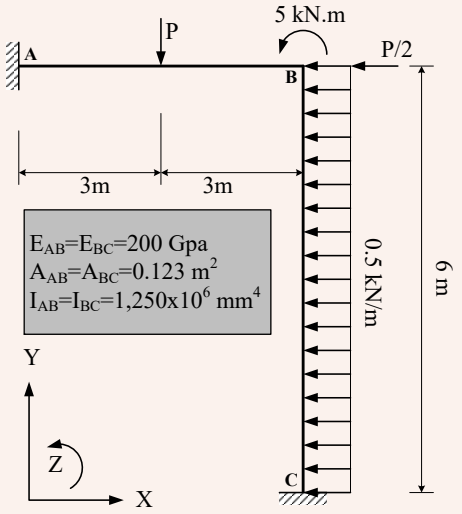
```
% Section 3 -- Plot torque distributions for each member length
% ------------------------------------------------------------------------
% Four subplots, one per length.
% x runs from 0 (fixed base) to L (free top where torque is applied).
% Torques are normalised by T so the plots show fractions [0..1].
% Height axis is plotted in feet (x/12) for readability.

for i = 1 : 4

    L_in = L_ft(i) * 12;           % member length in inches
    x    = (0 : L_in);             % position vector, inch increments

    % --- Warping torsion component ---
    % T_V = T * cosh((L-x)/lambda) / cosh(L/lambda)
    % Maximum at the free end (x=L), minimum at the fixed end (x=0)
    T_V  = T * cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda);

    % --- St. Venant torsion component ---
    % T_SV = T - T_V  (the two must sum to T at every section)
    % Maximum at the fixed end, zero at the free end
    T_SV = T * (1 - cosh((L_in - x) / lambda) / cosh(L_in / lambda));

    % --- Plot: torque on horizontal axis, height on vertical axis ---
    % (vertical axis matches the physical orientation of the member)
    subplot(2, 2, i);
    plot(T_V,  x/12, 'b', ...
         T_SV, x/12, 'r', ...
         'LineWidth', 1.5);

    % Axes: normalised torque 0->1, height 0->30 ft
    xlim([0 1]);
    ylim([0 30]);
    set(gca, 'XTick', 0 : 0.2 : 1.0);
    set(gca, 'YTick', 0 : 5  : 30  );

    grid on;
    xlabel('T / T_{total}  (normalised)',        'FontSize', fs);
    ylabel('Height  [ft]',                       'FontSize', fs);
    title( ['Member length  L = ' num2str(L_ft(i)) ' ft  '  ...
            '(L/\lambda = ' num2str(L_in/lambda,'%.1f') ')'], ...
           'FontSize', fs);

    lgd = legend('T_V  (warping)', 'T_{SV}  (St. Venant)', ...
                 'Location', 'North');
    lgd.FontSize = fs - 2;

    set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

end

sgtitle(['Non-Uniform Torsion:  \lambda = ' num2str(lambda) ' in'], ...
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        'FontSize', fs + 2);
```

I.2.4 正统 框架

分析下列正确的框架, §42.3.2




```
% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- ORTHOGONAL FRAME (L-SHAPED)
% ========================================================================
% Analyzes a two-element frame with members oriented perpendicular to each
% other (one horizontal, one vertical), meeting at a common node B.
%
% GEOMETRY:
%
%        C (pin -- vertical reaction only)
%        |
%        | Element BC (vertical, length L2)
%        |
%   A ---B    (B = free node: DOFs u_B, v_B, theta_B)
%   Element AB (horizontal, length L1)
%   A is fully fixed.
%
% Both elements are aligned with global axes -> no coordinate transform needed.
%
% FREE DOFs AT NODE B:
%   DOF 1: horizontal displacement u_B
%   DOF 2: vertical displacement   v_B
%   DOF 3: rotation                theta_B
%
% Original code courtesy of Xiao Fu.
% ========================================================================
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
26
27 clear; clc;
28
29 % ------------------------------------------------------------------------
30 % Section 1 -- Element properties  (SI: kN, m)
31 % ------------------------------------------------------------------------
32 L = [6.0;  6.0];          % element lengths            [m]      index: (AB, BC)
33 A = [0.123; 0.123];       % cross-sectional areas      [m^2]
34 E = [200e6; 200e6];       % Young's moduli             [kN/m^2]
35 I = [1250e-6; 1250e-6];   % second moments of area     [m^4]
36
37 EA = E .* A;              % axial stiffnesses          [kN]
38 EI = E .* I;              % bending stiffnesses        [kN.m^2]
39
40 % ------------------------------------------------------------------------
41 % Section 2 -- Applied loads
42 % ------------------------------------------------------------------------
43 P = 1;    % concentrated horizontal force at B    [kN]
44 M = 5;    % concentrated moment at B              [kN.m]
45 w = 0.5;  % uniform distributed load on BC        [kN/m]  (transverse on BC)
46
47 % ------------------------------------------------------------------------
48 % Section 3 -- Reduced global stiffness matrix K (free DOFs at B)
49 % ------------------------------------------------------------------------
50 % Assembled by superposing contributions from AB and BC:
51 %
52 %   K(1,1): axial  AB  +  bending BC  (u_B direction)
53 %   K(2,2): bending AB +  axial  BC   (v_B direction)
54 %   K(3,3): bending AB +  bending BC  (theta_B)
55 %   K(1,3): coupling from BC (6EI2/L2^2)
56 %   K(2,3): coupling from AB (-6EI1/L1^2)
57
58 K = [ EA(1)/L(1) + 12*EI(2)/L(2)^3,                          0,    6*EI(2)/L(2)^2
           ;
59                                0,   EA(2)/L(2) + 12*EI(1)/L(1)^3,  -6*EI(1)/L(1)^2
            ;
60                6*EI(2)/L(2)^2,              -6*EI(1)/L(1)^2,    4*EI(1)/L(1) + 4*EI(2)/
    L(2)   ]
61
62 % ------------------------------------------------------------------------
63 % Section 4 -- Equivalent nodal load vector
64 % ------------------------------------------------------------------------
65 % Distributed and element loads -> fixed-end reactions (sign-reversed at B)
66 % plus directly applied nodal loads.
67 %
68 %   AB carries midpoint load P (vertical):
69 %     fixed-end shear = P/2, fixed-end moment = +/-P*L1/8
70 %
71 %   BC carries uniform load w (transverse = horizontal on vertical member):
72 %     fixed-end shear = w*L2/2, fixed-end moment = +/-w*L2^2/12
73
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

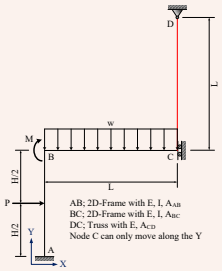
```
NEL = [ -w*L(2)/2                   ;   % DOF 1: fixed-end shear from BC
        -P/2                        ;   % DOF 2: fixed-end shear from AB
         P*L(1)/8 - w*L(2)^2/12   ];  % DOF 3: fixed-end moments from AB and BC

F   = [ -P/2 ;   % DOF 1: applied horizontal force (half at B)
         0   ;   % DOF 2: no direct vertical force
         M   ];  % DOF 3: applied moment

F_ext = NEL + F;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Solve for displacements at B
% ------------------------------------------------------------------------
Disp = K \ F_ext

% Disp = [u_B [m];  v_B [m];  theta_B [rad]]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element AB
% ------------------------------------------------------------------------
% End A fixed (zero displacements); end B has solved Disp values.
% F_int = k * d - NEL_elem

k_AB   = stiff(E(1), I(1), L(1), A(1));
NEL_AB = [0; -P/2; -P*L(1)/8; 0; -P/2; P*L(1)/8];
d_AB   = [0; 0; 0; Disp(1); Disp(2); Disp(3)];

F_AB = k_AB * d_AB - NEL_AB   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B] in LCS

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Internal forces in element BC
% ------------------------------------------------------------------------
% BC is vertical: local axial = global y, local transverse = global x.
% LCS displacements at B:  u_local = -v_B,  v_local = +u_B

k_BC   = stiff(E(2), I(2), L(2), A(2));
NEL_BC = [0; -w*L(2)/2; -w*L(2)^2/12; 0; -w*L(2)/2; w*L(2)^2/12];
d_BC   = [-Disp(2); Disp(1); Disp(3); 0; 0; 0];

F_BC = k_BC * d_BC - NEL_BC   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C] in LCS


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
%
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]
%   u     : axial displacement
%   v     : transverse displacement
%   theta : rotation
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   1, 2  : near and far end nodes

function k = stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;

k = [ EA/L,           0,           0,  -EA/L,           0,           0 ;
          0,  12*EI/L^3,   6*EI/L^2,       0, -12*EI/L^3,   6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,     4*EI/L,       0,  -6*EI/L^2,     2*EI/L ;
     -EA/L,           0,           0,    EA/L,           0,           0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,       0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,     2*EI/L,       0,  -6*EI/L^2,     4*EI/L ];

end
```

I.2.5 混合式框架

正统 框架 已解决 §42.3.4




```
% ========================================================================
% DIRECT STIFFNESS METHOD -- HYBRID ORTHOGONAL FRAME
% ========================================================================
% Three-element frame: vertical beam-column AB, horizontal beam BC,
% and a vertical axial bar DC connecting node C to a fixed support D.
%
% GEOMETRY:
%   A (fixed wall)
%   |
%   | AB (vertical beam-column, length Lab)
%   |
%   B -------------------------- C (roller: horizontal DOF only)
%         BC (horizontal beam, length Lbc)
%                   |
%                   | DC (axial bar only, length Ldc)
%                   |
%                   D (fixed)
%
% FREE DOFs (4 total at nodes B and C):
%   DOF 1: horizontal displacement of B  (Delta_1)
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   DOF 2: vertical   displacement of B  (Delta_2)
%   DOF 3: rotation at B                 (theta_3)
%   DOF 4: horizontal displacement of C  (Delta_4)
%
% LOADING:
%   P : concentrated transverse load at midspan of AB
%   w : uniform distributed load along BC (transverse = vertical)
%   Applied moment -P*Lbc at node B (in NF vector)
%
% UNITS: GPa, kN, mm (consistent throughout)
% =========================================================================

clear; clc;

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Structural properties
% -------------------------------------------------------------------------
E   = 200;          % Young's modulus                   [kN/mm^2 = GPa]
I   = 200e6;        % second moment of area (beams)     [mm^4]

Lab = 8000;         % length of AB                      [mm]
Lbc = 10000;        % length of BC                      [mm]
Ldc = 10000;        % length of DC                      [mm]

Aab = 5000;         % area of AB                        [mm^2]
Abc = 5000;         % area of BC                        [mm^2]
Adc = 100;          % area of DC (axial bar only)       [mm^2]

P   = 10;           % midspan load on AB                [kN]
w   = 1e-3;         % uniform load on BC                [kN/mm]

EI   = E * I;
EAab = E * Aab;
EAbc = E * Abc;
EAdc = E * Adc;

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Nodal force vectors
% -------------------------------------------------------------------------
% NF : forces/moments applied directly at free DOFs
NF = [  0      ;   % DOF 1
        0      ;   % DOF 2
       -P*Lbc  ;   % DOF 3: applied moment at B
        0      ];  % DOF 4

% NEF : equivalent nodal forces from element loads (fixed-end reactions
%       carried to the free DOFs, sign reversed)
%   AB: midpoint load P -> shear P/2 at B, moment P*Lab/8 at B
%   BC: uniform load w  -> shear w*Lbc/2 at B and C, moment w*Lbc^2/12 at B
NEF = [  P/2                   ;   % DOF 1: from AB
        -w*Lbc/2               ;   % DOF 2: from BC
```

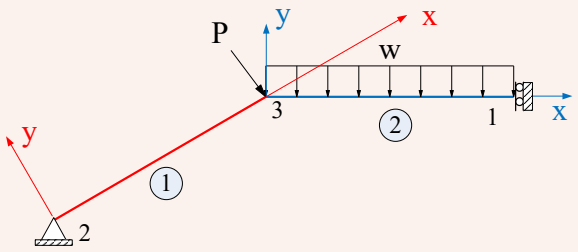

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
         P*Lab/8 - w*Lbc^2/12   ;   % DOF 3: from AB and BC
        -w*Lbc/2                ];  % DOF 4: from BC at C

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Reduced global stiffness matrix (4 x 4)
% -------------------------------------------------------------------------
% Superposition of AB (vertical beam), BC (horizontal beam), DC (axial bar)
Ktt = [ 12*EI/Lab^3 + EAbc/Lbc,                    0,          6*EI/Lab^2,
    0        ;
                                0,  EAab/Lab + 12*EI/Lbc^3,  6*EI/Lbc^2,       -12*EI/Lbc
    ^3        ;
                    6*EI/Lab^2,             6*EI/Lbc^2,  4*EI/Lab + 4*EI/Lbc,   -6*EI/Lbc^2
            ;
                                0,          -12*EI/Lbc^3,     -6*EI/Lbc^2,   12*EI/Lbc^3 +
     EAdc/Ldc ];

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Solve for displacements
% -------------------------------------------------------------------------
Delta = Ktt \ (NF + NEF);

Delta_1 = Delta(1);   % horizontal displacement of B   [mm]
Delta_2 = Delta(2);   % vertical   displacement of B   [mm]
theta_3 = Delta(3);   % rotation at B                  [rad]
Delta_4 = Delta(4);   % horizontal displacement of C   [mm]

fprintf('Node B:  u = %+.6f mm   v = %+.6f mm   theta = %+.4e rad\n', ...
        Delta_1, Delta_2, theta_3);
fprintf('Node C:  u = %+.6f mm\n', Delta_4);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Internal forces in element AB (vertical beam-column)
% -------------------------------------------------------------------------
% LCS: local x points up (A->B).
%   Local axial at B  =  global vertical   =  Delta_2
%   Local transverse  = -global horizontal = -Delta_1

k_ab   = beam_stiff(E, I, Lab, Aab);
nef_ab = [0; -P/2; -P*Lab/8; 0; -P/2; P*Lab/8];
d_ab   = [0; 0; 0; Delta_2; -Delta_1; theta_3];

F_int_ab = k_ab * d_ab - nef_ab   % [N_A, V_A, M_A, N_B, V_B, M_B]

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Internal forces in element BC (horizontal beam)
% -------------------------------------------------------------------------
% LCS = GCS (BC is horizontal, no transformation needed).
% C: roller -> v_C = 0, pin -> theta_C = 0; only u_C = Delta_4 is free.

k_bc   = beam_stiff(E, I, Lbc, Abc);
nef_bc = [0; -w*Lbc/2; -w*Lbc^2/12; 0; -w*Lbc/2; w*Lbc^2/12];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
d_bc   = [Delta_1; Delta_2; theta_3; 0; Delta_4; 0];

F_int_bc = k_bc * d_bc - nef_bc   % [N_B, V_B, M_B, N_C, V_C, M_C]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Internal forces in element DC (axial bar)
% ------------------------------------------------------------------------
% Pin-ended bar: 2x2 stiffness, axial only.
% D is fixed; C moves horizontally by Delta_4.
% DC is vertical so local axial of C = -Delta_4.

k_dc  = EAdc/Ldc * [1, -1; -1, 1];
d_dc  = [0; -Delta_4];

F_int_dc = k_dc * d_dc   % [N_D, N_C] axial forces


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: beam_stiff
% ========================================================================
% 6x6 Euler-Bernoulli beam-column stiffness matrix in LCS.
% DOF order: [u1, v1, theta1, u2, v2, theta2]

function k = beam_stiff(E, I, L, A)

EA = E * A;
EI = E * I;

k = [ EA/L,           0,           0,  -EA/L,           0,           0 ;
          0,  12*EI/L^3,   6*EI/L^2,       0, -12*EI/L^3,   6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,     4*EI/L,       0,  -6*EI/L^2,     2*EI/L ;
     -EA/L,           0,           0,    EA/L,           0,           0 ;
          0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,       0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
          0,   6*EI/L^2,     2*EI/L,       0,  -6*EI/L^2,     4*EI/L ];

end
```

I.2.6 框架; 硬直




```
clc; clear;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
2
3  % ========================================================================
4  % DIRECT STIFFNESS METHOD -- INCLINED FRAME (HARD-WIRED)
5  % ========================================================================
6  % Analyzes a two-element plane frame where both elements are inclined,
7  % requiring coordinate transformation between LCS and GCS.
8  %
9  % GEOMETRY (coordinates in meters):
10 %   Node 1: (0,     0)     fixed support  (restrained DOFs 4, 5, 6)
11 %   Node 2: (7.416, 3)     free node      (free DOFs 1, 2, 3)
12 %   Node 3: (15.416,3)     fixed support  (restrained DOFs 7, 8, 9)
13 %
14 %   Element 1: Node 1 to Node 2  (inclined)
15 %   Element 2: Node 2 to Node 3  (horizontal at y = 3 m)
16 %
17 % FREE DOFs AT NODE 2:
18 %   DOF 1: horizontal displacement u
19 %   DOF 2: vertical   displacement v
20 %   DOF 3: rotation theta
21 %
22 % LOADING:
23 %   Element 2: uniform distributed load 4 kN/m (transverse)
24 %   Node 2:    concentrated 50 kN load (components resolved into DOFs 1,2,3)
25 %
26 % KEY STEPS:
27 %   1. stiff() builds k (LCS), K (GCS), Gamma for each inclined element
28 %   2. Augmented 9x9 stiffness matrix assembled via LM connectivity
29 %   3. Ktt (3x3 free-DOF block) solved for Node 2 displacements
30 %   4. Reactions recovered from Kut partition + fixed-end corrections
31 %   5. Internal forces recovered in LCS for each element
32 %
33 % UNITS: kN, m, kPa  (converted from mm^2, mm^4, GPa at input)
34 % ========================================================================
35
36 % ------------------------------------------------------------------------
37 % Section 1 - Structural properties (input in mm/GPa, converted to m/kPa)
38 % ------------------------------------------------------------------------
39 A  = 6000  / 1e6;    % cross-sectional area  [mm^2 -> m^2]
40 II = 200e6 / 1e12;   % second moment         [mm^4 -> m^4]
41 EE = 200   * 1e6;    % Young's modulus       [GPa  -> kPa]
42
43 % ------------------------------------------------------------------------
44 % Section 2 - Element stiffness matrices
45 % ------------------------------------------------------------------------
46 k_loc = zeros(6,6,2);   % LCS stiffness
47 K_glo = zeros(6,6,2);   % GCS stiffness
48 Gamma = zeros(6,6,2);   % rotation matrices
49
50 % Element 1: Node1(0,0) to Node2(7.416,3)
51 [k_loc(:,:,1), K_glo(:,:,1), Gamma(:,:,1)] = stiff(EE, II, A, [0,0],     [7.416,3]);
52
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Element 2: Node2(7.416,3) to Node3(15.416,3)
[k_loc(:,:,2), K_glo(:,:,2), Gamma(:,:,2)] = stiff(EE, II, A, [7.416,3], [15.416,3]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - Location matrix (connectivity)
% ------------------------------------------------------------------------
% LM(elem, 1:6) maps local DOFs 1-6 to global DOF numbers.
% Rows = elements; columns = [near-end DOFs, far-end DOFs].
%
%   Element 1: near=Node1 (global 4,5,6), far=Node2 (global 1,2,3)
%   Element 2: near=Node2 (global 1,2,3), far=Node3 (global 7,8,9)

LM = [ 4, 5, 6, 1, 2, 3 ;
       1, 2, 3, 7, 8, 9 ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Assemble augmented global stiffness matrix (9x9)
% ------------------------------------------------------------------------
Kaug = zeros(9);
for elem = 1:2
    for r = 1:6
        lr = abs(LM(elem,r));
        for c = 1:6
            lc = abs(LM(elem,c));
            Kaug(lr,lc) = Kaug(lr,lc) + K_glo(r,c,elem);
        end
    end
end

Ktt = Kaug(1:3, 1:3);   % free-DOF partition (Node 2)
Kut = Kaug(4:9, 1:3);   % restrained-free coupling (for reactions)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Fixed-end actions (FEA) from distributed load on Element 2
% ------------------------------------------------------------------------
% Element 2 carries w = 4 kN/m uniform transverse load.
% Fixed-end reactions in LCS (Euler-Bernoulli, both ends clamped):
%   Shear at each end:    w*L/2
%   Moment at near end:  +w*L^2/12
%   Moment at far  end:  -w*L^2/12

w   = 4;     % distributed load on element 2   [kN/m]
L2  = sqrt((15.416-7.416)^2 + (3-3)^2);        % = 8 m

fea = zeros(6,2);
fea(:,2) = [0; w*L2/2; w*L2^2/12; 0; w*L2/2; -w*L2^2/12];

% Transform FEA to GCS
FEA_glo = zeros(6,2);
for elem = 1:2
    FEA_glo(:,elem) = Gamma(:,:,elem) * fea(:,elem);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
end

% Fixed-end actions at restrained DOFs (for reaction correction)
FEA_Rest = [0, 0, 0, FEA_glo(4:6,2)'];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Applied load vector at free DOFs
% ------------------------------------------------------------------------
% 50 kN concentrated load on element 2; position gives reaction fractions.
% Negative of near-end FEA is added to account for element loading.

P = zeros(3,1);
P(1) =  50 * 3/8;
P(2) = -50 * 7.416/8 - fea(2,2);
P(3) = -fea(3,2);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 - Solve for displacements at Node 2
% ------------------------------------------------------------------------
Displacements = Ktt \ P

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 8 - Support reactions
% ------------------------------------------------------------------------
Reactions = Kut * Displacements + FEA_Rest'

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 9 - Internal forces in LCS for each element
% ------------------------------------------------------------------------
d_global        = zeros(6,1,2);
d_global(:,:,1) = [0;0;0; Displacements(1:3)];
d_global(:,:,2) = [Displacements(1:3); 0;0;0];

fprintf('\n--- Internal Forces in LCS ---\n');
fprintf('%-12s %8s %8s %8s %8s %8s %8s\n', 'Element','N_i','V_i','M_i','N_j','V_j','M_j'
    );
for elem = 1:2
    d_local = Gamma(:,:,elem) * d_global(:,:,elem);
    f_int   = k_loc(:,:,elem) * d_local + fea(:,elem);
    fprintf('Element %-4d %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f %+8.3f\n', ...
            elem, f_int(1),f_int(2),f_int(3),f_int(4),f_int(5),f_int(6));
end


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Computes LCS stiffness k, GCS stiffness K, and rotation matrix Gamma
% for an inclined 2D Euler-Bernoulli beam-column.
%
% alpha = atan2(dy,dx) is the element inclination angle.
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Gamma rotates a GCS 6-DOF vector into LCS.
% K = Gamma' * k * Gamma

function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, i, j)

dx    = j(1) - i(1);
dy    = j(2) - i(2);
L     = sqrt(dx^2 + dy^2);
alpha = atan2(dy, dx);
c     = cos(alpha);
s     = sin(alpha);

Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
         -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
          0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
          0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
          0,  0,  0,  0,  0,  1 ];

EI = EE * II;
EA = EE * A;

k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
         0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,      0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
     -EA/L,          0,          0,   EA/L,          0,          0 ;
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,   6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end
```

I.2.7 直接刚度法; 框架

I.2.8 主要代码

```
% ========================================================================
% GENERAL 2D FRAME ANALYSIS -- DIRECT STIFFNESS METHOD
% ========================================================================
% A general-purpose program for linear elastic analysis of 2D frames
% (beam-columns with axial, shear, and bending DOFs).
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- Input data (problem definition): prob_1 (inline)
%   Part 3  -- function stiff        : element k, K, Gamma
%   Part 4  -- function plot_frame   : geometry and support visualisation
%   Part 5  -- function print1       : echo input to output file
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   Part 6  -- function print2       : write results to output file
%
% THEORY SUMMARY:
%   Each 2D beam-column element has 6 DOFs: [u_i, v_i, theta_i, u_j, v_j, theta_j]
%   The element stiffness is formed in the Local Coordinate System (LCS)
%   and rotated to the Global Coordinate System (GCS) via:
%       K_global = Gamma^T * k_local * Gamma
%
%   The augmented system (free + restrained DOFs) is assembled and
%   partitioned:
%       [ K_tt  K_tu ] { Delta_t }   { P_t }
%       [ K_ut  K_uu ] { Delta_u } = { R   }
%   where t = free (unknown) DOFs, u = restrained (known = 0) DOFs.
%   Solving the top partition: Delta_t = K_tt^-1 * P_t
%   Reactions from the bottom: R = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
%
% ID MATRIX CONVENTION:
%   ID(node, dof) = 0 -> DOF is FREE    (will be numbered first)
%   ID(node, dof) = 1 -> DOF is FIXED   (will be numbered after free DOFs)
%   After renumbering, ID holds the global equation number for each DOF.
%
% INPUT DATA ARRAYS (defined in prob_1 section below):
%   coord(n,2)         : nodal x,y coordinates
%   lnods(e,2)         : element connectivity [near_node, far_node]
%   ID(n,3)            : boundary condition flags (0=free, 1=fixed)
%   E(e), A(e), Iz(e)  : element material and section properties
%   NodalLoad(i,4)     : [node, Fx, Fy, Mz] for each applied nodal load
%   ElementLoad(e,2)   : [element, w] for each distributed load
%
% OUTPUT: text file 'my_output.dat' with full analysis results
% ========================================================================

clear;
fid = fopen('my_output.dat', 'w');
ndofpn = 3;   % degrees of freedom per node (u, v, theta)

% ========================================================================
% PART 1 -- PROBLEM DEFINITION  (inline replacement for prob_1.m)
% ========================================================================
% 5-node, 5-element portal frame with two fixed supports.
% Units: mm, kN  (E in kN/mm^2, A in mm^2, Iz in mm^4)
%
% NODE LAYOUT:
%   Node 1: (0,     0)      fixed base left
%   Node 2: (9000,  0)      fixed base right
%   Node 3: (0,     6000)   left knee (free)
%   Node 4: (9000,  6000)   right knee (free)
%   Node 5: (0,    12000)   top left (free)
%
% ELEMENT CONNECTIVITY:
%   Elem 1: Node 1 -> Node 3  (left column, lower)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   Elem 2: Node 2 -> Node 4  (right column)
%   Elem 3: Node 3 -> Node 5  (left column, upper)
%   Elem 4: Node 3 -> Node 4  (beam at mid-height)
%   Elem 5: Node 4 -> Node 5  (diagonal or upper beam)

Nnodes = 5;
Nelem  = 5;

% ID matrix: 0 = free DOF, 1 = restrained DOF
% Rows = nodes, columns = [u, v, theta]
ID = [ 1, 1, 1 ;    % Node 1: fully fixed
       1, 1, 1 ;    % Node 2: fully fixed
       0, 0, 0 ;    % Node 3: free
       0, 0, 0 ;    % Node 4: free
       0, 0, 0 ];   % Node 5: free

coord = [      0,     0 ;
          9000,     0 ;
             0,  6000 ;
          9000,  6000 ;
             0, 12000 ];

lnods = [ 1, 3 ;
          2, 4 ;
          3, 5 ;
          3, 4 ;
          4, 5 ];

% Section and material properties (uniform for all elements)
E  = 30e6  * ones(1, Nelem);   % Young's modulus     [kN/mm^2]
A  = 75000 * ones(1, Nelem);   % cross-section area  [mm^2]
Iz = 4.8e8 * ones(1, Nelem);   % second moment       [mm^4]

% Nodal loads: [node, Fx, Fy, Mz]
Nnodal_load = 2;
NodalLoad = [ 3,  80,  0,  0 ;   % 80 kN horizontal at Node 3
              5,  40,  0,  0 ];   % 40 kN horizontal at Node 5

% Element loads: [element, w (transverse distributed load)]
Nelement_load = 1;
ElementLoad   = [ 4,  1e-3 ];    % w = 0.001 kN/mm on element 4

% ==========================================================================
% PART 2 -- VISUALISE FRAME GEOMETRY
% ==========================================================================
plot_frame(coord, lnods, ID);

% ==========================================================================
% PART 3 -- ELEMENT STIFFNESS MATRICES
% ==========================================================================
% For each element, compute:
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   k_loc : stiffness in Local Coordinate System  (6x6)
%   K_glo : stiffness in Global Coordinate System (6x6) = Gamma^T k Gamma
%   Gamma : rotation matrix from GCS to LCS       (6x6)

k_loc = zeros(6, 6, Nelem);
K_glo = zeros(6, 6, Nelem);
Gamma = zeros(6, 6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    n1 = lnods(e,1);
    n2 = lnods(e,2);
    xy1 = coord(n1, :);
    xy2 = coord(n2, :);
    [k_loc(:,:,e), K_glo(:,:,e), Gamma(:,:,e)] = stiff(E(e), Iz(e), A(e), xy1, xy2);
end

% ==========================================================================
% PART 4 -- DOF NUMBERING: update ID matrix
% ==========================================================================
% Free DOFs are numbered first (1 .. size_K_tt),
% then restrained DOFs (size_K_tt+1 .. size_K_aug).
% This ensures the free-DOF partition occupies the top-left of K_aug.

orig_ID = ID;
eq_num  = 0;

% Pass 1: number free DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 0
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
    end
end
size_K_tt = eq_num;   % number of free DOFs (= size of K_tt)

% Pass 2: number restrained DOFs
for i = 1 : Nnodes
    for j = 1 : ndofpn
        if orig_ID(i,j) == 1
            eq_num      = eq_num + 1;
            ID(i,j) = eq_num;
        end
    end
end
size_K_aug = eq_num;  % total DOFs (free + restrained)

print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, lnods, E, A, Iz);

% ==========================================================================
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
% PART 5 -- LOCATION MATRIX (LM)
% ========================================================================
% LM(e, 1:6) maps local DOF indices 1..6 of element e
% to global equation numbers using the updated ID matrix.
% Local DOFs 1-3 = near-end node; 4-6 = far-end node.

LM = zeros(Nelem, 6);
for e = 1 : Nelem
    LM(e,:) = [ ID(lnods(e,1), :),  ID(lnods(e,2), :) ];
end

% ========================================================================
% PART 6 -- ASSEMBLE AUGMENTED GLOBAL STIFFNESS MATRIX
% ========================================================================
% The augmented matrix K_aug includes all DOFs (free + restrained).
% Each element's GCS stiffness is scattered into K_aug via LM.

K_aug = zeros(size_K_aug);

for e = 1 : Nelem
    for r = 1 : 6
        lr = LM(e, r);      % global row
        for c = 1 : 6
            lc = LM(e, c);  % global column
            K_aug(lr, lc) = K_aug(lr, lc) + K_glo(r, c, e);
        end
    end
end

% Extract the free-DOF partition (top-left block)
K_tt = K_aug(1:size_K_tt, 1:size_K_tt);

% Extract the coupling partition (needed for reaction recovery)
K_ut = K_aug(size_K_tt+1 : size_K_aug,  1:size_K_tt);

% ========================================================================
% PART 7 -- LOAD VECTOR ASSEMBLY
% ========================================================================
% The total load vector P_tt combines:
%   (a) Directly applied nodal forces/moments
%   (b) Equivalent nodal forces (fixed-end reactions) from element loads,
%       transformed to GCS and added at the free DOFs with reversed sign

P_tt = zeros(size_K_tt, 1);

% --- (a) Directly applied nodal loads ---
for i = 1 : Nnodal_load
    node = NodalLoad(i, 1);
    for j = 1 : ndofpn
        eq = ID(node, j);
        if eq <= size_K_tt
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NodalLoad(i, j+1);
        end
    end
end

% --- (b) Equivalent nodal forces from distributed element loads ---
% Fixed-end reactions in LCS for uniform transverse load w over length L:
%   Near end: [ 0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12 ]
%
% These are transformed to GCS and subtracted from the load vector
% at free DOFs (and stored for reaction correction at restrained DOFs).

NEF_local  = zeros(Nelement_load, 6);
NEF_global = zeros(Nelement_load, 6);
R_nef      = zeros(size_K_aug - size_K_tt, 1);  % FEA at restrained DOFs

for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    w    = ElementLoad(e, 2);
    n1   = lnods(elem, 1);
    n2   = lnods(elem, 2);
    xy1  = coord(n1, :);
    xy2  = coord(n2, :);
    L    = sqrt((xy2(2)-xy1(2))^2 + (xy2(1)-xy1(1))^2);

    % Fixed-end reactions in LCS (uniform transverse load, both ends fixed)
    NEF_local(e,:)  = [0,  w*L/2,  w*L^2/12,  0,  w*L/2,  -w*L^2/12];

    % Transform to GCS using Gamma^T (Gamma maps GCS->LCS, so Gamma^T maps LCS->GCS)
    NEF_global(e,:) = (Gamma(:,:,elem)' * NEF_local(e,:)')';
end

% Scatter NEF into load vector (free DOFs) or reaction correction (fixed DOFs)
for e = 1 : Nelement_load
    elem = ElementLoad(e, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(elem, i);
        if eq <= size_K_tt
            P_tt(eq) = P_tt(eq) + NEF_global(e, i);
        else
            R_nef(eq - size_K_tt) = R_nef(eq - size_K_tt) + NEF_global(e, i);
        end
    end
end

% ========================================================================
% PART 8 -- SOLVE FOR DISPLACEMENTS
% ========================================================================
Displacements = K_tt \ P_tt;

% ========================================================================
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% PART 9 -- RECOVER SUPPORT REACTIONS
% =========================================================================
% Reactions = K_ut * Delta_t - FEA_restrained
% The FEA term corrects for the equivalent loads that were applied at
% restrained nodes due to element distributed loads.

Reactions = K_ut * Displacements - R_nef;

% =========================================================================
% PART 10 -- RECOVER ELEMENT INTERNAL FORCES (in LCS)
% =========================================================================
% For each element:
%   1. Extract global displacements at both end nodes from Displacements
%      (restrained DOFs have zero displacement)
%   2. Rotate to LCS:  d_local = Gamma * d_global
%   3. Compute internal forces:  f = k_loc * d_local
%   4. Subtract fixed-end actions for loaded elements (equilibrium correction)

int_forces = zeros(6, Nelem);

for e = 1 : Nelem
    % Assemble the 6x1 global displacement vector for this element
    d_global = zeros(6, 1);
    for i = 1 : 6
        eq = LM(e, i);
        if eq <= size_K_tt
            d_global(i) = Displacements(eq);
        else
            d_global(i) = 0;   % restrained DOF
        end
    end

    % Rotate to LCS and compute internal forces
    d_local        = Gamma(:,:,e) * d_global;
    int_forces(:,e) = k_loc(:,:,e) * d_local;

    % Subtract fixed-end actions for distributed loads on this element
    for j = 1 : Nelement_load
        if ElementLoad(j,1) == e
            int_forces(:,e) = int_forces(:,e) - NEF_local(j,:)';
        end
    end
end

% Write all results to output file
print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
       Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
       Nelement_load, ElementLoad);

fclose(fid);
fprintf('Analysis complete. Results written to my_output.dat\n');
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
319
320
321 % ======================================================================
322 % FUNCTION: stiff
323 % ======================================================================
324 % Computes element stiffness for an arbitrarily inclined 2D beam-column.
325 %
326 % INPUTS:
327 %   EE, II, A  : Young's modulus, second moment, cross-section area
328 %   xy_1, xy_2 : [x,y] coordinates of near and far end nodes
329 %
330 % OUTPUTS:
331 %   k     : 6x6 stiffness matrix in LCS
332 %   K     : 6x6 stiffness matrix in GCS  (= Gamma^T k Gamma)
333 %   Gamma : 6x6 rotation matrix (GCS vector -> LCS vector)
334 %
335 % SPECIAL CASE: vertical elements (dx approx 0) are detected explicitly
336 % to avoid numerical issues with atan2 near +/-pi/2.
337
338 function [k, K, Gamma] = stiff(EE, II, A, xy_1, xy_2)
339
340 dx = xy_2(1) - xy_1(1);
341 dy = xy_2(2) - xy_1(2);
342 L  = sqrt(dx^2 + dy^2);
343
344 % Inclination angle -- handle near-vertical elements explicitly
345 if abs(dx) > max(abs(xy_2(1)), abs(xy_1(1))) * 1e-6
346     alpha = atan2(dy, dx);
347 else
348     alpha = (dy > 0) * pi/2 + (dy <= 0) * (-pi/2);
349 end
350
351 c = cos(alpha);
352 s = sin(alpha);
353
354 % Rotation matrix: transforms a GCS 6-DOF vector to LCS
355 Gamma = [ c,  s,  0,  0,  0,  0 ;
356          -s,  c,  0,  0,  0,  0 ;
357           0,  0,  1,  0,  0,  0 ;
358           0,  0,  0,  c,  s,  0 ;
359           0,  0,  0, -s,  c,  0 ;
360           0,  0,  0,  0,  0,  1 ];
361
362 % Element stiffness in LCS (Euler-Bernoulli beam-column)
363 EI = EE * II;
364 EA = EE * A;
365
366 k = [ EA/L,          0,          0,  -EA/L,          0,          0 ;
367          0,  12*EI/L^3,  6*EI/L^2,       0, -12*EI/L^3,  6*EI/L^2 ;
368          0,   6*EI/L^2,    4*EI/L,       0,  -6*EI/L^2,    2*EI/L ;
369      -EA/L,          0,          0,    EA/L,          0,          0 ;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
         0, -12*EI/L^3, -6*EI/L^2,      0,  12*EI/L^3, -6*EI/L^2 ;
         0,    6*EI/L^2,    2*EI/L,      0,  -6*EI/L^2,    4*EI/L ];

K = Gamma' * k * Gamma;

end   % stiff


% ========================================================================
% FUNCTION: plot_frame
% ========================================================================
% Draws the frame geometry: elements (blue), free nodes (magenta circles),
% support symbols (red), element numbers, and node numbers.
%
% Support type is inferred from the ID row for each node:
%   [1,1,1] -> fixed wall     (hatched bar)
%   [1,1,0] -> pin support    (triangle)
%   [0,1,0] -> horizontal roller
%   [1,0,0] -> vertical roller
%   [0,1,1] -> horizontal roller with rotation fixed
%   [1,0,1] -> vertical roller with rotation fixed

function plot_frame(coord, lnods, ID)

x = coord(:,1);
y = coord(:,2);

figure;
margin      = max(max(x)-min(x), max(y)-min(y)) / 10;
ax          = [min(x)-margin, max(x)+margin, min(y)-margin, max(y)+margin];
axis(ax);  axis('equal');  hold on;

n_nodes    = size(coord,  1);
n_elements = size(lnods,  1);
n_nodes_id = size(ID,     1);   % may differ from n_nodes if ID is larger
axlim      = axis;
cs         = max(axlim(2)-axlim(1), axlim(4)-axlim(3)) / 40;  % circle size

% --- Draw support symbols ---
for i = 1 : n_nodes_id
    bc = ID(i,:);
    xi = x(i);  yi = y(i);
    theta_circle = 0 : 0.1 : 2*pi;

    % Roller symbols (circles)
    if isequal(bc, [0,1,0]) || isequal(bc, [1,1,0]) || isequal(bc, [0,1,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi, ...
             cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
    end
    if isequal(bc, [1,0,0]) || isequal(bc, [1,0,1])
        plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
421                 cos(theta_circle)*cs/2, 'r');
422     end
423
424     % Triangle for pin
425     if isequal(bc, [1,1,0])
426         plot([xi, xi-cs, xi+cs, xi], [yi, yi-cs, yi-cs, yi], 'r');
427     end
428
429     % Horizontal platform (hatching) -- for horizontal rollers, pins, fixed
430     if any([isequal(bc,[0,1,0]), isequal(bc,[1,1,0]), isequal(bc,[0,1,1]), isequal(bc
    ,[1,1,1])])
431         ybase = yi - cs + cs * isequal(bc,[1,1,1]);
432         plot([xi-2*cs, xi+2*cs], [ybase, ybase], 'r');
433         for hx = -2:0.5:2
434             plot([xi+hx*cs, xi+(hx-0.5)*cs], [ybase, ybase-cs*0.5], 'r');
435         end
436     end
437
438     % Vertical platform -- for vertical rollers
439     if any([isequal(bc,[1,0,0]), isequal(bc,[1,0,1])])
440         xbase = xi - cs;
441         plot([xbase, xbase], [yi-2*cs, yi+2*cs], 'r');
442         for vy = -1.5:0.5:2
443             plot([xbase, xbase-cs], [yi+vy*cs, yi+(vy-0.5)*cs], 'r');
444         end
445     end
446
447     % Extra rollers for multi-roller supports
448     if isequal(bc, [0,1,1])
449         for dx = [-1, 0, 1]
450             plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi + dx*cs, ...
451                  cos(theta_circle)*cs/2 - cs/2 + yi, 'r');
452         end
453     end
454     if isequal(bc, [1,0,1])
455         for dy = [-1, 0, 1]
456             plot(sin(theta_circle)*cs/2 + xi - cs*0.5, ...
457                  cos(theta_circle)*cs/2 + dy*cs, 'r');
458         end
459     end
460 end
461
462 % --- Draw elements ---
463 for i = 1 : n_elements
464     plot([x(lnods(i,1)), x(lnods(i,2))], ...
465          [y(lnods(i,1)), y(lnods(i,2))], 'b', 'LineWidth', 1.5);
466 end
467
468 % --- Draw free nodes ---
469 for i = 1 : n_nodes
470     if ~max(ID(i,:))
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        plot(x(i), y(i), 'mo', 'MarkerSize', 6);
    end
end

% --- Element numbers (blue, at midpoint) ---
set(gca, 'DefaultTextColor', 'blue');
for i = 1 : n_elements
    xm = (x(lnods(i,1)) + x(lnods(i,2)))/2 + cs;
    ym = (y(lnods(i,1)) + y(lnods(i,2)))/2 + cs;
    text(xm, ym, int2str(i), 'Color', 'blue');
end

% --- Node numbers (magenta, offset) ---
for i = 1 : n_nodes
    text(x(i)+cs, y(i)+cs, int2str(i), 'Color', 'magenta');
end

hold off;  grid on;
title('Frame Geometry');

end   % plot_frame


% ========================================================================
% FUNCTION: print1  (echo input data to output file)
% ========================================================================
function print1(fid, Nnodes, Nelem, size_K_tt, size_K_aug, coord, ID, ...
                lnods, E, A, Iz)

fprintf(fid, '      ******************************************\n');
fprintf(fid, '      *  Computer Program for 2D Frame Analysis  *\n');
fprintf(fid, '      ******************************************\n');
fprintf(fid, '\nNumber of Nodes:              %d\n', Nnodes);
fprintf(fid, 'Number of Elements:          %d\n', Nelem);
fprintf(fid, 'Number of Free DOFs:         %d\n', size_K_tt);
fprintf(fid, 'Number of Restrained DOFs:   %d\n', size_K_aug - size_K_tt);

fprintf(fid, '\nNodal Information:\n');
for inode = 1 : Nnodes
    fprintf(fid, '  Node %d  (x=%9.3e, y=%9.3e)\n', ...
            inode, coord(inode,1), coord(inode,2));
    dof_str = '';
    labels  = {'  u (X)', '  v (Y)', '  theta'};
    for j = 1 : 3
        if ID(inode,j) <= size_K_tt && ID(inode,j) > 0
            dof_str = [dof_str, labels{j}];
        end
    end
    if isempty(dof_str)
        dof_str = '  none (fully fixed)';
    end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

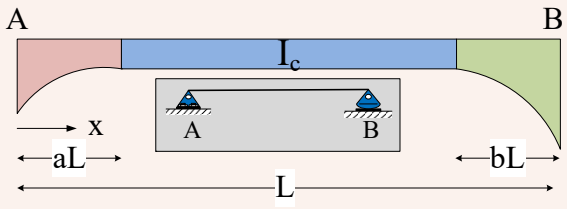
```
    fprintf(fid, '    Free DOFs:%s\n', dof_str);
end

fprintf(fid, '\nElement Information:\n');
for ielem = 1 : Nelem
    fprintf(fid, '  Element %d  (%d -> %d)', ielem, lnods(ielem,1), lnods(ielem,2));
    fprintf(fid, '   E=%9.3e  A=%9.3e  Iz=%9.3e\n', E(ielem), A(ielem), Iz(ielem));
end

end   % print1


% ==========================================================================
% FUNCTION: print2  (write results to output file)
% ==========================================================================
function print2(fid, size_K_tt, size_K_aug, ID, Displacements, Reactions, ...
                Nelem, lnods, int_forces, Nnodal_load, NodalLoad, ...
                Nelement_load, ElementLoad)

dof_names = {'delta_X', 'delta_Y', 'rot_Z  '};

% --- Applied loads ---
fprintf(fid, '\n\nApplied Nodal Loads:\n');
for i = 1 : Nnodal_load
    fprintf(fid, '  Node %d:  Fx=%9.3e  Fy=%9.3e  Mz=%9.3e\n', ...
            NodalLoad(i,1), NodalLoad(i,2), NodalLoad(i,3), NodalLoad(i,4));
end

fprintf(fid, '\nApplied Element Loads:\n');
for i = 1 : Nelement_load
    fprintf(fid, '  Element %d:  distributed w = %9.3e\n', ...
            ElementLoad(i,1), ElementLoad(i,2));
end

% --- Displacements ---
fprintf(fid, '\n\nNodal Displacements:\n');
for eq = 1 : size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Displacements(eq));
end

% --- Reactions ---
fprintf(fid, '\n\nSupport Reactions:\n');
for eq = 1 : size_K_aug - size_K_tt
    [node, dof] = find(ID == size_K_tt + eq);
    fprintf(fid, '  Node %2d  %-9s  %+12.5e\n', ...
            node, dof_names{dof}, Reactions(eq));
end

% --- Internal forces ---
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
fprintf(fid, '\n\nElement Internal Forces (Local Coordinate System):\n');
force_labels = {'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)', ...
                'N  (axial)', 'V  (shear)', 'M  (moment)'};
for ielem = 1 : Nelem
    fprintf(fid, '\n  Element %d\n', ielem);
    for idof = 1 : 6
        if idof == 1
            fprintf(fid, '    Near-end node %d:\n', lnods(ielem,1));
        end
        if idof == 4
            fprintf(fid, '    Far-end  node %d:\n', lnods(ielem,2));
        end
        fprintf(fid, '      %-12s  %+12.5e\n', ...
                force_labels{idof}, int_forces(idof,ielem));
    end
end

end   % print2
```

I.2.9 刚度矩阵 非普里斯马特成员

列出在 图 中生成插件的 Matlab 代码 46.11, 并产生非普里斯米亚成员的刚度矩阵。这是基于 (Portland Cement Association, 1947).




```
% ========================================================================
% STIFFNESS MATRIX AND FIXED-END MOMENTS FOR NON-PRISMATIC BEAM MEMBERS
% ========================================================================
% Computes the exact stiffness matrix and fixed-end moments (FEM) for a
% beam with variable cross-section -- specifically a member with haunches
% (tapered ends) and a prismatic central segment.
%
% MEMBER PROFILE:
%
%   |<-- a*L -->|<------ (1-a-b)*L ------>|<-- b*L -->|
%   A           |                         |           B
%   [left haunch]   [prismatic centre]      [right haunch]
%
%   Moment of inertia profile:
%     Left haunch   (0 <= x <= a*L):        I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
%     Centre segment (a*L <= x <= (1-b)*L): I(x) = Ic  (constant)
%     Right haunch ((1-b)*L <= x <= L):     I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%
%   where ra, rb are the haunch depth ratios (0 = no haunch, prismatic)
%   and n is the haunch shape exponent (n=1: linear, n=2: parabolic).
%
% METHOD -- FLEXIBILITY APPROACH:
%   The 2x2 flexibility matrix d is built by numerical integration of the
%   virtual work integrals (unit moment diagrams x 1/EI).
%   The stiffness matrix is then obtained by inversion and static
%   condensation, following the force method:
%       k_tt = d^-1
%       k = B^T * d^-1 * B  (after condensation and permutation)
%
% FIXED-END MOMENTS (FEM) for uniform transverse load w:
%   Computed from the compatibility equations for a fixed-fixed beam,
%   integrating the particular solution against the flexibility kernel.
%   Output FEM = [M_A; M_B] normalised so that w=1 gives actual moments.
%
% DOF ORDER IN OUTPUT STIFFNESS MATRIX k (4x4):
%   [v_A, theta_A, v_B, theta_B]   (transverse displacements and rotations)
%
% PARAMETRIC STUDY (driver script below):
%   Plots surfaces of k(2,2) and FEM(1) as functions of haunch geometry
%   to visualise sensitivity of stiffness and fixed-end moments to
%   haunch length (a,b) and depth ratio (r).
%
% INPUTS TO NonPrismatic():
%   a   : left  haunch length as fraction of L    [0..0.5]
%   b   : right haunch length as fraction of L    [0..0.5]  (a+b <= 1)
%   L   : member length                           [any consistent unit]
%   Ic  : moment of inertia of prismatic centre   [length^4]
%   ra  : left  haunch depth ratio                [>= 0]
%   rb  : right haunch depth ratio                [>= 0]
%   n   : haunch shape exponent (1=linear,2=parabolic)
%
% OUTPUTS:
%   k   : 4x4 stiffness matrix  [force/length units consistent with input]
%   FEM : [M_A; M_B] fixed-end moments for w=1 uniform load
% ================================================================================



% ================================================================================
% DRIVER SCRIPT -- parametric surfaces
% ================================================================================

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;
font  = 'Times New Roman';

% Fixed parameters for the parametric study
Ic = 1;    % normalised (results are per unit Ic)
n  = 2;    % parabolic haunches
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
L  = 1;    % normalised length

hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.5]);

% -------------------------------------------------------------------------
% Plot 1 & 3: symmetric haunches (a=b, ra=rb)
% Vary haunch length a in [0.2, 0.4] and depth ratio r in [0, 4]
% -------------------------------------------------------------------------
[A_grid, R_grid] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0:0.2:4);
K_surf   = zeros(size(A_grid));
FEM_surf = zeros(size(A_grid));

for i = 1 : size(A_grid, 1)
    for j = 1 : size(A_grid, 2)
        a = A_grid(i,j);
        r = R_grid(i,j);
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, a, L, Ic, r, r, n);
        K_surf(i,j)   = k_ij(2,2) / 4;    % normalised bending stiffness
        FEM_surf(i,j) = fem_ij(1) * 12;   % normalised fixed-end moment
    end
end

subplot(2,2,1);
surf(A_grid, R_grid, K_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('k_{22}/4');
title('Stiffness: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([0 2 4 6 8]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,3);
surf(A_grid, R_grid, FEM_surf);
xlabel('a');  ylabel('r');  zlabel('FEM');
title('Fixed-End Moment: a=b, r_a=r_b');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0 1 2 3 4]);
zticks([1 1.1 1.2 1.3 1.4]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% -------------------------------------------------------------------------
% Plot 2 & 4: asymmetric haunches (a ~= b, fixed r=0.2)
% Vary both haunch lengths independently
% -------------------------------------------------------------------------
r_fixed = 0.2;
[A_grid2, B_grid2] = meshgrid(0.2:0.01:0.4,  0.1:0.01:0.4);
K_ratio   = zeros(size(A_grid2));
FEM_ratio = zeros(size(A_grid2));

for i = 1 : size(A_grid2, 1)
    for j = 1 : size(A_grid2, 2)
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
        a = A_grid2(i,j);
        b = B_grid2(i,j);
        % WARNING: no check that a+b <= 1; caller must ensure valid geometry
        [k_ij, fem_ij] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, r_fixed, r_fixed, n);
        K_ratio(i,j)   = k_ij(2,2) / k_ij(4,4);   % ratio of end stiffnesses
        FEM_ratio(i,j) = fem_ij(1) / fem_ij(2);    % ratio of end moments
    end
end

subplot(2,2,2);
surf(A_grid2, B_grid2, K_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('k_{11}/k_{12}');
title('Stiffness ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

subplot(2,2,4);
surf(A_grid2, B_grid2, FEM_ratio);
xlabel('a');  ylabel('b');  zlabel('FEM_A / FEM_B');
title('FEM ratio: r_a=r_b=0.2');
xticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
yticks([0.2 0.25 0.3 0.35 0.4]);
zticks([0.9 0.95 1 1.05 1.1]);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

% Export figure
if n == 2
    FileName = 'Haunches-Parab.eps';
else
    FileName = 'Haunches-Straight.eps';
end
% print(FileName, '-depsc');   % uncomment to save


% ========================================================================
% FUNCTION: NonPrismatic
% ========================================================================
% Computes the 4x4 stiffness matrix and fixed-end moments for a
% non-prismatic beam with left and right haunches and a prismatic centre.
%
% The flexibility approach is used:
%   Step 1: Build 2x2 flexibility matrix d by numerical integration
%   Step 2: Invert to get the 2x2 rotational stiffness k_tt
%   Step 3: Expand to 4x4 using statics matrix B (static condensation)
%   Step 4: Permute rows/columns to standard DOF order
%   Step 5: Integrate compatibility equations for FEM under uniform load

function [k, FEM] = NonPrismatic(a, b, L, Ic, ra, rb, n)

```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Step 1 -- Build the 2x2 flexibility matrix d
% ------------------------------------------------------------------------
% d(i,j) = integral of (m_i(x) * m_j(x) / (E*I(x))) dx   over [0, L]
%
% where m_1(x) = (x/L - 1) and m_2(x) = (x/L) are the unit moment
% diagrams for unit end moments at A and B respectively.
%
% The integral is split into three segments matching the I(x) profile.
% Each segment uses MATLAB's adaptive quadrature (integral()).

% --- Left haunch  (0 <= x <= a*L) ---
% I(x) = Ic * (1 + ra*(1 - x/(a*L))^n)^3
I_L  = @(x) Ic .* (1 + ra .* (1 - x./(a*L)).^n).^3;

d11_L = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d12_L = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_L(x), 0,   a*L);
d22_L = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_L(x), 0,   a*L);

% --- Prismatic centre  (a*L <= x <= (1-b)*L) ---
d11_C = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);
d12_C = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ Ic, a*L, (1-b)*L);
d22_C = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ Ic,     a*L, (1-b)*L);

% --- Right haunch  ((1-b)*L <= x <= L) ---
% I(x) = Ic * (1 + rb*(1 - (L-x)/(b*L))^n)^3
I_R  = @(x) Ic .* (1 + rb .* (1 - (L-x)./(b*L)).^n).^3;

d11_R = integral(@(x) ((-1+x/L).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d12_R = integral(@(x) ((-1+x/L).*(x/L)) ./ I_R(x), (1-b)*L, L);
d22_R = integral(@(x) ((x/L).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L);

% Assemble full 2x2 flexibility matrix (sum of three segments)
d = [ d11_L+d11_C+d11_R,  d12_L+d12_C+d12_R ;
      d12_L+d12_C+d12_R,  d22_L+d22_C+d22_R ];

% ------------------------------------------------------------------------
% Step 2 -- Build stiffness sub-matrices via inversion
% ------------------------------------------------------------------------
% The statics matrix B relates the two redundant moments (M_A, M_B)
% to the four end forces via equilibrium:
%   B = [1/L, 1/L; -1/L, -1/L]  (shear equilibrium)

B_stat = [1, 1; -1, -1] / L;

d_inv = inv(d);              % 2x2 rotational stiffness

k_tt  = d_inv;               % rotational DOFs (2x2)
k_ut  = B_stat * d_inv;      % coupling: translational from rotational (2x2)
k_tu  = d_inv * B_stat';     % coupling: rotational from translational (2x2)
k_uu  = B_stat * d_inv * B_stat';  % translational stiffness (2x2)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

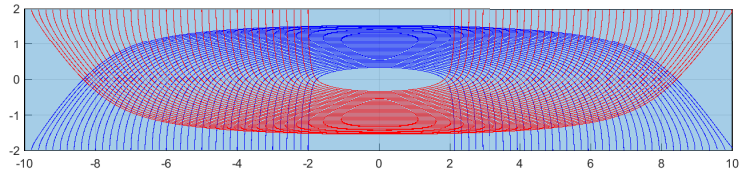
```
222
223 % Assemble full 4x4 in order [theta_A, theta_B, v_A, v_B]
224 k_full = [ k_tt,  k_tu ;
225            k_ut,  k_uu ];
226
227 % -------------------------------------------------------------------------
228 % Step 3 -- Permute to standard DOF order [v_A, theta_A, v_B, theta_B]
229 % -------------------------------------------------------------------------
230 idx = [3, 2, 4, 1];
231 k   = k_full(idx, idx);
232
233 % -------------------------------------------------------------------------
234 % Step 4 -- Fixed-end moments for uniform transverse load (w = 1)
235 % -------------------------------------------------------------------------
236 % For a fixed-fixed beam under uniform load w, the FEM are found by
237 % solving the compatibility equations:
238 %
239 %   [d11, d12] [M_A]   [integral of x^2*(L-x)/I dx / 2     ]
240 %   [d21, d22] [M_B] = [integral of x*(L-x)^2/I dx / 2     ]
241 %
242 % (These are the particular-solution integrals for w=1.)
243 % The factor /2 comes from the parabolic bending moment diagram m_p(x)
244 % for a simply-supported beam under uniform load: m_p = w*x*(L-x)/2.
245
246 % Numerator integral 1: integral of x^2 * m_unit_1 / I dx  = integral of x^2*(L-x) / (2*
    I) dx
247 % Split into three segments as before
248
249 eq11_L = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_L(x), 0,       a*L    );
250 eq11_C = integral(@(x) (x.^2)        ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
251 eq11_R = integral(@(x) (x.^2)        ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
252 eq11   = eq11_L + eq11_C + eq11_R;
253
254 eq12_L = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
255 eq12_C = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
256 eq12_R = integral(@(x) ((L-x).*x)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
257 eq12   = eq12_L + eq12_C + eq12_R;
258
259 % Right-hand side: particular moment integral for m_1 = (x/L - 1)
260 eq13_L = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
261 eq13_C = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
262 eq13_R = integral(@(x) ((L-x).*x.^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
263 eq13   = eq13_L + eq13_C + eq13_R;
264
265 % Numerator integral 2: for m_unit_2 = (x/L)
266 eq22_L = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_L(x), 0,       a*L    );
267 eq22_C = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
268 eq22_R = integral(@(x) ((L-x).^2)    ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
269 eq22   = eq22_L + eq22_C + eq22_R;
270
271 % Right-hand side: particular moment integral for m_2 = (x/L)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
eq23_L = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_L(x), 0,       a*L    );
eq23_C = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ Ic,     a*L,     (1-b)*L);
eq23_R = integral(@(x) (x.*(L-x).^2) ./ I_R(x), (1-b)*L, L      );
eq23   = eq23_L + eq23_C + eq23_R;

% Solve the 2x2 compatibility system for the unknown FEM
% NOTE: eq21 = eq12 by symmetry of the flexibility matrix (Maxwell's theorem)
A_fem = [ eq11,  eq12 ;
          eq12,  eq22 ];    % eq21 == eq12 by reciprocity
B_fem = [ eq13 ;
          eq23 ] / 2;       % divide by 2 for the w*x*(L-x)/2 moment diagram

FEM = A_fem \ B_fem;        % [M_A; M_B]

end   % NonPrismatic
```

I.2.10 隔离线

以色列线路的编码, 如在 §15.4.7




```
% ========================================================================
% ISOSTATIC LINES (STRESS TRAJECTORIES) IN A SIMPLY-SUPPORTED BEAM
% ========================================================================
% Isostatic lines (also called stress trajectories or principal stress
% lines) are curves that are everywhere tangent to a principal stress
% direction.  They reveal the internal "flow" of compression and tension
% through a structural member.
%
% THEORY:
%   At any point (x,y) in the beam, the stress state under bending and
%   shear is:
%       [sigma,  tau ]
%       [tau,    0   ]
%
%   where sigma = -M(x)*y/I  (bending stress, zero at neutral axis)
%   and   tau   = V(x)*(h^2/4 - y^2)*A_eff  (parabolic shear stress)
%
%   The principal stress directions are the eigenvectors of this tensor.
%   Two families of isostatic lines exist:
%     Family 1 (blue):  major principal stress direction (compression or tension)
%     Family 2 (red):   minor principal stress direction (orthogonal to family 1)
%
% TRACING ALGORITHM:
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   Each isostatic line is traced by a simple Euler integration:
%     x(k+1) = x(k) +/- step * eigenvector_component_x
%     y(k+1) = y(k) +/- step * eigenvector_component_y
%
%   The sign of the step is chosen based on the quadrant of (x,y) to
%   keep the tracing moving in a consistent direction (see inline notes).
%
%   WARNING: the sign logic in both tracing loops is heuristic and was
%   tuned for this specific beam geometry.  It may not generalise to
%   other load cases or starting points without adjustment.
%
% LOADS SUPPORTED:
%   Load = 1 : uniformly distributed load w on a simply-supported beam
%   Load = 2 : midspan point load W on a simply-supported beam
%
% BEAM GEOMETRY:
%   Origin at the beam centroid (x=0, y=0 at mid-span, mid-height).
%   x in [-L/2, L/2],  y in [-h/2, h/2]
%
% OUTPUT:
%   Figure with beam outline, blue compression trajectories (Family 1),
%   and red tension trajectories (Family 2).
%   Exported to EPS and converted to PDF via Ghostscript.
% ========================================================================

clear; clc; close all;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 16;
font  = 'Times New Roman';
GS    = 'gswin64.exe';   % Ghostscript executable for EPS->PDF

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Problem parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Load   = 1;       % 1 = uniform load;  2 = midspan point load
nlines = 40;      % number of isostatic lines per family
delta  = 100;     % spacing denominator: starting x = -L/2 + i*L/delta

w    = 1;         % load intensity (normalised)
L    = 20;        % beam span                          [length units]
h    = L/5;       % beam depth                         [length units]
B    = 1;         % beam width                         [length units]
A    = 4;         % cross-sectional area               [length^2]
Inrt = B*h^3/12; % second moment of area              [length^4]

% Reference stress values (for context, not used in tracing)
Mmax   = w*L^2/8;
sigmax = Mmax * (h/2) / Inrt;     % maximum bending stress at extreme fibre
taumax = 1.5 * w*L / (2*A);       % maximum shear stress at neutral axis

```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
step = h/100;    % integration step size for Euler tracing

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Draw beam outline
% ------------------------------------------------------------------------
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/4]);

pgon = polyshape([-L/2, L/2, L/2, -L/2], [-h/2, -h/2, h/2, h/2]);
plot(pgon);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Family 1: traces along the FIRST eigenvector (column 1)
% ------------------------------------------------------------------------
% Starting points: bottom fibre (y approx -h/2), evenly spaced along the span.
% Traces upward through the beam following the compression arch.
%
% Sign convention for step direction (heuristic, tuned for this geometry):
%   y > 0 (upper half):  move right in x, downward in y
%   y < 0 & x < 0:       move left  in x, upward   in y
%   y < 0 & x > 0:       move right in x, downward in y
%
% WARNING: this quadrant-based sign logic is geometry-specific.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;   % starting x position
    y0 = -0.99 * h/2;          % start near (but inside) bottom fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        % Compute stress tensor at current point
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        % Eigenvectors give principal stress directions
        [Ve, D]    = eig(T);
        [~, idx]   = sort(diag(D));   % sort by ascending eigenvalue
        Vect       = Ve(:, idx);
        Vect       = -Vect / norm(Vect);   % normalise (sign absorbed below)

        % Step in the direction of eigenvector 1 (column 1 after sorting)
        if yv(k) > 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,1);
        else   % y < 0 and x >= 0
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,1);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,1);
        end

        % Terminate if the line exits through the bottom fibre
        if yv(k+1) < -h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'b-');
    hold on;
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Family 2: traces along the SECOND eigenvector (column 2)
% ------------------------------------------------------------------------
% Starting points: top fibre (y approx +h/2), same x spacing.
% Traces downward following the tension arch (orthogonal to Family 1).
%
% Sign convention (heuristic):
%   y > 0 & x < 0:  move right, downward
%   y > 0 & x > 0:  move left,  upward    (note: reversed direction)
%   y < 0:          move right, downward  (both half-planes)
%
% WARNING: the y>0 & x>0 branch has a two-step logic in the original
% that sets (x,y) to the current value then immediately overwrites it.
% The first assignment is dead code -- preserved here as a no-op comment.

for i = 1 : nlines
    x0 = -L/2 + i * L/delta;
    y0 =  0.99 * h/2;   % start near (but inside) top fibre

    xv = zeros(1, 1000);  yv = zeros(1, 1000);
    xv(1) = x0;  yv(1) = y0;

    for k = 1 : 999
        sig = Sigma(xv(k), yv(k), w, L, Inrt, Load);
        tau = Tau(xv(k), yv(k), w, A, h, Load);
        T   = [sig, tau; tau, 0];

        [Ve, D]  = eig(T);
        [~, idx] = sort(diag(D));
        Vect     = Ve(:, idx);
        Vect     = -Vect / norm(Vect);

        % Step in the direction of eigenvector 2 (column 2 after sorting)
        if yv(k) > 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) > 0 && xv(k) >= 0
            % BUG FIX: original had a dead assignment (x,y)=(x,y) before
            % this step -- removed; only the active step is kept.
            xv(k+1) = xv(k) - step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) + step * Vect(2,2);
        elseif yv(k) < 0 && xv(k) < 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        else   % y < 0 and x >= 0
            xv(k+1) = xv(k) + step * Vect(1,2);
            yv(k+1) = yv(k) - step * Vect(2,2);
        end

        % Terminate if the line exits through the top fibre
        if yv(k+1) > h/2
            xv(k+1) = NaN;  yv(k+1) = NaN;
            xv = xv(1:k+1);  yv = yv(1:k+1);
            break
        end
    end

    plot(xv, yv, 'r-');
    hold on;
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Formatting and export
% ------------------------------------------------------------------------
grid on;
daspect([1 1 1]);
xlim([-L/2, L/2]);
ylim([-h/2,  h/2]);
xlabel('x', 'FontSize', fs);
ylabel('y', 'FontSize', fs);
title(['Isostatic Lines -- Load type ' num2str(Load) ...
       '  (blue = Family 1,  red = Family 2)'], 'FontSize', fs);
set(gca, 'FontSize', fs, 'FontName', font);

FileName = ['Stress-Flow-' num2str(Load) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);


% ========================================================================
% FUNCTION: Tau  -- shear stress at point (x,y)
% ========================================================================
% Parabolic shear stress distribution (Jourawski formula):
%   tau(y) = V(x) * (h^2/4 - y^2) * (B/2) / I
%          = V(x) * (1.5/A) * (1 - (2y/h)^2)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   A     : cross-sectional area
%   h     : section depth
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
%   tau   : shear stress at (x,y)

function tau = Tau(x, y, w, A, h, Load)

% Shear force at section x
if Load == 1   % uniform load: V(x) = -w*x  (reactions at +/-L/2 = +w*L/2)
    V = -w * x;
else           % midspan point load W=w: V = +/-w/2
    if x > 0
        V = -w/2;
    else
        V =  w/2;
    end
end

% Parabolic distribution (zero at extreme fibres, max at neutral axis)
tau = -6*V*y^2 / (A*h^2) + 1.5*V/A;

end   % Tau


% ========================================================================
% FUNCTION: Sigma  -- bending stress at point (x,y)
% ========================================================================
% Linear bending stress (Navier formula):
%   sigma(x,y) = -M(x) * y / I
%
% INPUTS:
%   x, y  : coordinates (origin at centroid)
%   w     : load intensity
%   L     : beam span
%   Inrt  : second moment of area
%   Load  : 1 = uniform load,  2 = point load at midspan
%
% OUTPUT:
%   sigma : bending stress at (x,y)

function sigma = Sigma(x, y, w, L, Inrt, Load)

% Bending moment at section x
if Load == 1   % uniform load: M(x) = w*L^2/8 - w*x^2/2
    M = -w*x^2/2 + w*L^2/8;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
else            % midspan point load W=w
    if x >= 0
        M = w*L/2 - w*x/2;    % right half
    else
        M = w*L/2 + w*x/2;    % left half (x is negative here)
    end
end

sigma = -M * y / Inrt;

end   % Sigma
```

I.2.11 进化设计

I.2.12 主

```
% ========================================================================
% EVOLUTIONARY STRUCTURAL DESIGN -- RANDOM ELEMENT REMOVAL
% ========================================================================
% Demonstrates the concept of evolutionary structural optimization (ESO):
% a fully-connected 3D truss is progressively simplified by removing one
% element at a time, while checking that no node becomes under-connected.
%
% CONCEPT:
%   In a real ESO implementation, elements are removed based on a stress
%   or strain energy criterion (least-stressed elements removed first).
%   Here, removal is RANDOM -- this is a demonstration scaffold showing
%   the bookkeeping, visualization, and termination logic that a full
%   optimizer would use.
%
% ALGORITHM:
%   1. Generate a node grid (regular or random)
%   2. Connect ALL pairs of nodes -> fully-connected truss (Hankel indexing)
%   3. Loop:
%      a. Select an element to remove (here: random; replace with criterion)
%      b. Highlight it, remove it from the connectivity list
%      c. Check that both end nodes still have >= min_elem connections
%      d. If a node drops below the minimum, stop and report
%      e. Re-plot the updated mesh and write a video frame
%   4. Stop after MaxSteps or if a termination condition is met
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Main driver script
%   Part 2  -- function Node_Generation   : create node coordinates
%   Part 3  -- function Check_Lonely      : verify node connectivity
%   Part 4  -- function PlotMesh          : draw 3D truss and export frame
%
% NOTE: In a production ESO code, the line:
%   ElemOut = randi([1 nelem], 1, 1);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% would be replaced by a finite element analysis call that returns the
% index of the least-stressed (or lowest strain-energy) element.
% ========================================================================


% ========================================================================
% PART 1 -- MAIN DRIVER
% ========================================================================

clear; close all; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.1 -- Control parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Random   = 1;      % 0 = 8 random nodes;  1 = regular grid of nodes
MaxSteps = 30;     % maximum number of element removals

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.2 -- Generate nodes
% ------------------------------------------------------------------------
[x, y, z, N] = Node_Generation(Random);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.3 -- Generate fully-connected element list
% ------------------------------------------------------------------------
% Every unique pair of nodes (i,j) with i < j forms one element.
% The Hankel matrix trick generates all such pairs without duplication.
%
% hankel(2:N) produces a matrix whose (r,c) entry is r+c (shifted),
% and find() returns the row/column indices of all non-zero entries.
% The result is a 2 x nelem matrix of [node_i; node_j] pairs.

[r, c, ~]  = find(hankel(2:N));
index      = [c, r]';        % each column is one element: [near_node; far_node]
nelem      = size(index, 2);
lnods      = index';         % nelem x 2: each row = [node_i, node_j]

step = 0;
OK   = 0;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1.4 -- Set up video writer
% ------------------------------------------------------------------------
vid           = VideoWriter('Design_Opti.avi');
vid.FrameRate = 1;   % 1 frame per second (slow enough to follow visually)
open(vid);

% Draw and record the initial fully-connected mesh
PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);
frame = getframe(gcf);
writeVideo(vid, frame);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
85
86 % ---------------------------------------------------------------------
87 % Section 1.5 -- Evolutionary removal loop
88 % ---------------------------------------------------------------------
89 while OK == 0 && step < MaxSteps
90
91     % --- Select element to remove ---
92     % NOTE: in a real ESO, replace this random selection with:
93     %   ElemOut = index_of_least_stressed_element_from_FEA;
94     ElemOut = randi([1, nelem], 1, 1);
95
96     % --- Highlight the element being removed (red, thick) ---
97     X  = [x(lnods(ElemOut,1)),  x(lnods(ElemOut,2))];
98     Y  = [y(lnods(ElemOut,1)),  y(lnods(ElemOut,2))];
99     Z  = [z(lnods(ElemOut,1)),  z(lnods(ElemOut,2))];
100    plot3(X, Y, Z, 'LineWidth', 3, 'Color', 'r');
101    hold on;
102    frame = getframe(gcf);
103    writeVideo(vid, frame);
104
105    % --- Record which nodes this element connected ---
106    NodesOut = lnods(ElemOut, 1:2);
107
108    % --- Remove element from connectivity list ---
109    % Compact the lnods array by shifting rows up from ElemOut onward.
110    % WARNING: for large meshes this in-place shift is O(nelem) per step.
111    %          A more efficient approach would use logical indexing:
112    %          lnods = lnods([1:ElemOut-1, ElemOut+1:end], :);
113    for i = ElemOut : nelem-1
114        lnods(i, 1:2) = lnods(i+1, 1:2);
115    end
116    lnods = lnods(1:nelem-1, :);   % trim the now-redundant last row
117    nelem = nelem - 1;
118    step  = step  + 1;
119
120    % --- Re-plot the updated mesh ---
121    PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step);
122
123    % --- Check that neither end node has become under-connected ---
124    min_elem = 2;   % minimum number of elements required at any node
125    Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, vid);
126
127    frame = getframe(gcf);
128    writeVideo(vid, frame);
129
130 end   % evolutionary loop
131
132 close(vid);
133 fprintf('Evolutionary design complete after %d steps.\n', step);
134
135
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: Node_Generation
% ========================================================================
% Generates the node coordinate arrays x, y, z.
%
% If Random == 0: generates 8 nodes at random positions in [0,1]^3.
%                 (despite the name 'Random==0', these ARE random -- the
%                 flag controls grid vs random, but the naming is inverted
%                 from what one would expect)
%
% If Random == 1: generates a regular rectangular grid of nodes with
%                 specified range and spacing in each direction.
%
% WARNING: the grid generation uses Rx/Deltaz (not Rz/Deltaz) for nz.
%          This is preserved from the original -- verify if Rz was intended.
%
% OUTPUTS:
%   x, y, z : 1 x N coordinate arrays
%   N       : total number of nodes

function [x, y, z, N] = Node_Generation(Random)

if Random == 0
    % 8 random nodes in the unit cube
    N = 8;
    x = rand(1, N);
    y = rand(1, N);
    z = rand(1, N);

else
    % Regular grid
    Rx = 20;  Ry = 20;  RZ = 60;    % grid extents in x, y, z   [units]
    Dx = 20;  Dy = 20;  Dz = 30;    % grid spacing in x, y, z   [units]

    xmin = 0;  ymin = 0;  zmin = 0;

    nx = round(Rx/Dx) + 1;   % number of nodes in x
    ny = round(Ry/Dy) + 1;   % number of nodes in y
    % WARNING: original uses Rx/Dz (not RZ/Dz) for nz -- may be a typo.
    %          If the z-extent should be RZ=60 with spacing Dz=30, nz=3.
    %          Currently nz = round(Rx/Dz)+1 = round(20/30)+1 = 2.
    nz = round(Rx/Dz) + 1;

    N = 0;
    x = zeros(1, nx*ny*nz);
    y = zeros(1, nx*ny*nz);
    z = zeros(1, nx*ny*nz);

    for ix = 1 : nx
        for iy = 1 : ny
            for iz = 1 : nz
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                N      = N + 1;
                x(N)   = xmin + (ix-1) * Dx;
                y(N)   = ymin + (iy-1) * Dy;
                z(N)   = zmin + (iz-1) * Dz;
            end
        end
    end

    % Trim to actual size
    x = x(1:N);
    y = y(1:N);
    z = z(1:N);
end

end   % Node_Generation


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: Check_Lonely
% ========================================================================
% After removing an element, checks that both of its end nodes still have
% at least min_elem elements connected to them.  If either node drops
% below the minimum, an error dialog is shown and execution stops.
%
% INPUTS:
%   NodesOut : 1x2 vector of the two node indices of the removed element
%   lnods    : current (reduced) connectivity array  [nelem x 2]
%   min_elem : minimum acceptable element count per node
%   v        : VideoWriter object (passed in but not used -- legacy arg)
%
% OUTPUT:
%   Del_Nodes : 0 if both nodes are adequately connected;
%               otherwise the count of the under-connected node

function Del_Nodes = Check_Lonely(NodesOut, lnods, min_elem, v) %#ok<INUSD>

Del_Nodes = 0;

for i = 1 : 2
    % Count how many rows in lnods contain this node number
    % (checking both columns: lnods(:,1) and lnods(:,2))
    matches  = (lnods == NodesOut(i));   % logical array, same size as lnods
    n_connected = sum(matches(:));       % total occurrences = number of connected
    elements

    if n_connected < min_elem
        msg = ['Number of elements connected to node ' num2str(NodesOut(i)) ...
               ' dropped below minimum (' num2str(min_elem) ')'];
        errordlg(msg, 'END EXECUTION');
        Del_Nodes = n_connected;
        error('Evolutionary design terminated: node %d under-connected.', NodesOut(i));
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    end
end

end   % Check_Lonely


% ======================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: PlotMesh
% ======================================================================
% Draws the current 3D truss in a new figure window:
%   - node positions as red asterisks with node number labels
%   - elements as lines with element number labels at midpoints
%   - title showing the current step number
% Exports to EPS and converts to PDF.
%
% INPUTS:
%   x, y, z  : node coordinate arrays
%   lnods    : connectivity array  [nelem x 2]
%   nelem    : number of active elements
%   step     : current removal step (used in title and filename)

function PlotMesh(x, y, z, lnods, nelem, step)

figure;
plot3(x, y, z, '*');
hold on;

N = length(x);

% Node labels (red numbers at node positions)
for i = 1 : N
    text(x(i), y(i), z(i), num2str(i), 'Color', 'red', 'FontSize', 14);
end

% Elements (lines with element number at midpoint)
for ie = 1 : nelem
    X  = [x(lnods(ie,1)),  x(lnods(ie,2))];
    Y  = [y(lnods(ie,1)),  y(lnods(ie,2))];
    Z  = [z(lnods(ie,1)),  z(lnods(ie,2))];
    Xc = mean(X);  Yc = mean(Y);  Zc = mean(Z);

    plot3(X, Y, Z);
    text(Xc, Yc, Zc, num2str(ie), 'FontSize', 10);
end

title(['Step: ' num2str(step)]);
pbaspect([1 1 1]);
grid minor;
view(-36, 24);

% Export frame
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
GS       = 'c:/Program Files/gs/gs9.10/bin/gswin64.exe';
FileName = ['./Figs/Mesh-No-' num2str(step) '.eps'];
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);

end   % PlotMesh
```

I.2.13 柱 互动图表

```
% ========================================================================
% RECTANGULAR RC COLUMN -- NOMINAL INTERACTION DIAGRAM (P-M)
% ========================================================================
% Constructs the nominal axial force - bending moment (P_n vs M_n)
% interaction diagram for a doubly-reinforced rectangular concrete column
% using ACI 318 rectangular stress block assumptions.
%
% THEORY:
%   The interaction diagram is the locus of (M_n, P_n) pairs at which the
%   column reaches its nominal strength.  Each point corresponds to a
%   specific neutral axis depth c (measured from the compression face).
%
%   ACI rectangular stress block:
%     Compression force in concrete: C_c = 0.85 * f'c * a * b
%     where  a = Beta1 * c  (depth of equivalent stress block)
%     Beta1 = 0.85 for f'c <= 4 ksi, reduced 0.05 per 1 ksi above 4,
%     minimum Beta1 = 0.65
%
%   Steel strains (linear strain compatibility):
%     eps_s  = eps_cu * (d  - c) / c   (tension steel at depth d)
%     eps_s' = eps_cu * (c  - d') / c  (compression steel at depth d')
%
%   Steel stresses capped at f_y (elastic-perfectly-plastic model).
%
% TWO BRANCHES:
%   Tension failure  (c < c_b): steel yields before concrete crushes
%   Compression failure (c > c_b): concrete crushes before steel yields
%   Balanced point  (c = c_b): both occur simultaneously
%
% UNITS: kips, inches (moments converted to k-ft for output)
% ========================================================================

close all; clear; clc;

fss    = 24;
scrsz  = get(0, 'ScreenSize');
figpos = [2, 2, scrsz(3)/3, scrsz(4)/2];

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Material properties
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ------------------------------------------------------------------------
E_s    = 29000;   % steel Young's modulus          [ksi]
eps_cu = 0.003;   % ACI ultimate concrete strain   [in/in]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 - Section geometry and reinforcement
% ------------------------------------------------------------------------
h    = 20;     % section depth (in bending direction)  [in]
b    = 12;     % section width                          [in]
dp   = 2.5;    % cover to compression steel centroid   [in]
d    = h - dp; % effective depth to tension steel      [in]

f_y  = 50;     % steel yield strength                  [ksi]
f_c  = 3.5;    % concrete compressive strength         [ksi]
A_s  = 2;      % tension steel area                    [in^2]
Ap_s = 2;      % compression steel area                [in^2]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 - ACI Beta1 factor
% ------------------------------------------------------------------------
if f_c <= 4
    Beta1 = 0.85;
else
    Beta1 = max(0.85 - 0.05*(f_c - 4), 0.65);
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 - Balanced failure point
% ------------------------------------------------------------------------
% Strain compatibility at balanced condition:
%   c_b/d = eps_cu / (eps_cu + eps_y)

eps_y  = f_y / E_s;
c_b    = eps_cu * d / (eps_cu + eps_y);
a_b    = Beta1 * c_b;

fp_s_b = min(E_s * eps_cu * (c_b - dp) / c_b, f_y);
C_c_b  = 0.85 * f_c * a_b * b;
Pn_b   = C_c_b + Ap_s * fp_s_b - A_s * f_y;
Mn_b   = C_c_b * (d - a_b/2) + Ap_s * fp_s_b * (d - dp);
e_b    = Mn_b / Pn_b;   % balanced eccentricity [in]

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 - Tension failure branch  (c_min to c_b)
% ------------------------------------------------------------------------
% Tension steel has yielded (f_s = f_y).
% Compression steel stress varies with c; capped at f_y.

n     = 400;
cmin  = h / n;   % avoid c=0 singularity
c_vec = linspace(cmin, c_b, n+1);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
PT    = zeros(1, n+1);
MT    = zeros(1, n+1);

for i = 1 : n+1
    c     = c_vec(i);
    a     = Beta1 * c;
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PT(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_y;
    MT(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

figure('Position', figpos);
set(gca, 'FontSize', fss);
plot(MT, PT, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 - Compression failure branch  (c_b to c_max)
% ------------------------------------------------------------------------
% Both steel stresses vary with c; each capped at f_y.

cmax    = 50;
c_vec2  = linspace(c_b, cmax, n);
PC      = zeros(1, n);
MC      = zeros(1, n);

for i = 1 : n
    c     = c_vec2(i);
    a     = Beta1 * c;
    f_s   = min(E_s * eps_cu * (d  - c) / c, f_y);
    fp_s  = min(E_s * eps_cu * (c  - dp) / c, f_y);
    C_c   = 0.85 * f_c * a * b;
    PC(i) = C_c + Ap_s * fp_s - A_s * f_s;
    MC(i) = (C_c * (d - a/2) + Ap_s * fp_s * (d - dp)) / 12;
end

plot(MC, PC, 'r', 'LineWidth', 2);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 - Format and export
% ------------------------------------------------------------------------
lgd = legend('Tension Failure', 'Compression Failure');
set(lgd, 'Color', 'none');
xlim([0, inf]);  ylim([0, inf]);
grid on;
xlabel('Nominal Moment  M_n  [k-ft]', 'FontSize', fss);
ylabel('Nominal Load  P_n  [kips]',   'FontSize', fss);
title('RC Column P-M Interaction Diagram', 'FontSize', fss);
set(gca, 'FontSize', fss, 'Color', 'none');
exportgraphics(gca, 'Interaction-Diagram-Matlab.pdf', 'BackgroundColor', 'none');
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

I.2.14 变量方法: 数学

虽然数学可以保存一个文件 **德克斯**, 一个脚本是写的, 以将该文件转换为更可读的一个几乎模拟笔记本电脑感觉。

这是解决问题的解决方案。§48.6.1.2.

虚拟 位移

定义函数 v

```
v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3
```

解决为 a **和** b **至于** v_2 **和** v_3

```
solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
```

$$\left\{\left\{\text{a1}\to -\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to -\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

更新表达式 v

```
v=v1[x]/.solution
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

```
delv=v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}
```

$$\left\{-\frac{(-8\text{delv2}+\text{delv3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{delv2}-\text{delv3})x^3}{L^3}\right\}$$

二、衍生品 v

```
d2v=D[v,{x,2}]
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

虚拟位移的第二个衍生品

```
d2delv=d2v/.{v2 → delv2,v3 → delv3}
```

$$\left\{-\frac{2(-8\text{delv2}+\text{delv3})}{L^2}-\frac{12(4\text{delv2}-\text{delv3})x}{L^3}\right\}$$

虚拟 应变能

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
delU=Integrate[d2vd2delvEI,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

虚拟外部工作

```
delW=Integrate[q0(1 − x/L)delv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]
```

$$\left\{\frac{4\text{delv2}L\text{q0}}{15}+\frac{\text{delv3}L\text{q0}}{60}\right\}$$

设置 $\delta U-\delta W=0$

```
UW=delU − delW
```

$$\left\{-\frac{4}{15}\text{delv2}L\text{q0}-\frac{\text{delv3}L\text{q0}}{60}+\frac{256\text{delv2EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv3EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{delv2EIv3}}{L^3}+\frac{28\text{delv3EIv3}}{L^3}\right\}$$

```
A=Coefficient[UW,delv2]
```

$$\left\{-\frac{4L\text{q0}}{15}+\frac{256\text{EIv2}}{L^3}-\frac{80\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

```
B=Coefficient[UW,delv3]
```

$$\left\{-\frac{L\text{q0}}{60}-\frac{80\text{EIv2}}{L^3}+\frac{28\text{EIv3}}{L^3}\right\}$$

```
solution2=Solve[{A==0,B==0},{v2,v3}]
```

$$\left\{\left\{\text{v2}\to\frac{11L^4\text{q0}}{960\text{EI}},\text{v3}\to\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}\right\}$$

```
v2=N[v2/.solution2]
```

$$\left\{\frac{0.0114583L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

```
v3=N[v3/.solution2]
```

$$\left\{\frac{0.0333333L^4\text{q0}}{\text{EI}}\right\}$$

从 位移 字段中确定时刻

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

M=Simplify[d2vEI]

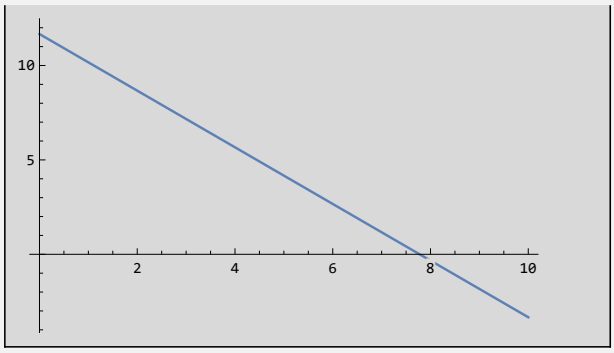
$$\{\{Lq0(0.116667L - 0.15x)\}\}$$

定义列为瞬间的衍生

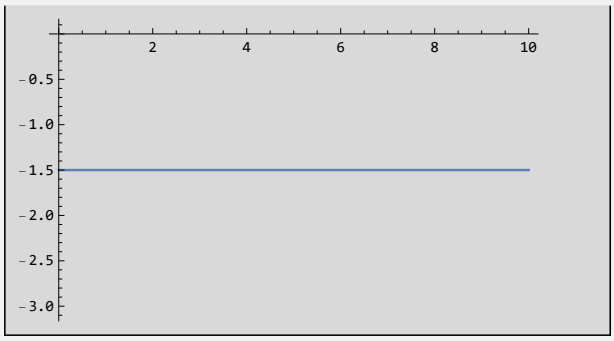
V=D[M,{x,1}]

$$\{\{-0.15Lq0\}\}$$

q0=1; L=10; Plot[M,{x,0,10}]



Plot[V,{x,0,10}]



准确的表格和瞬间图表

Clear[L,q0];

w[x_]:=q0(1 − x/L)

Vsup= − Integrate[w[x],{x,0,L}]

$$-\frac{Lq0}{2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Msup=Integrate[$w[x]x$,{x,0,L}]

$$\frac{L^2 \text{q0}}{6}$$

Vexact=Integrate[$w[x]$,x] + Vsup

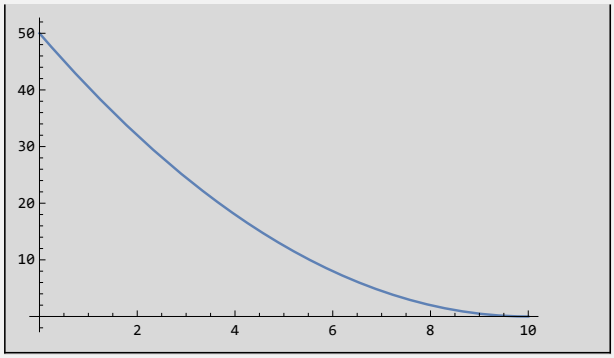
$$-\frac{L\text{q0}}{2} + \text{q0}x - \frac{\text{q0}x^2}{2L}$$

Mexact=Integrate[Vexact,x] + Msup

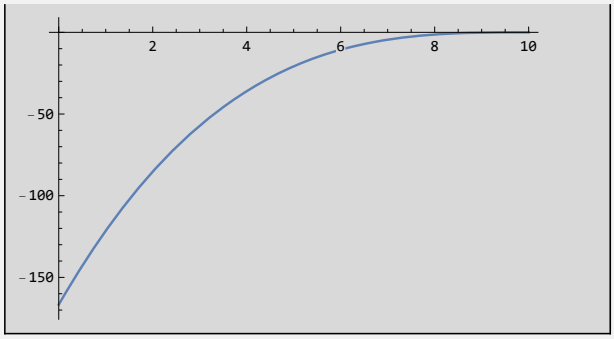
$$\frac{L^2 \text{q0}}{6} - \frac{L\text{q0}x}{2} + \frac{\text{q0}x^2}{2} - \frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

q0= **− 10**; L=**10**;

Plot[Vexact,{x,0,L}]



Plot[Mexact,{x,0,L}]



Clear[L,q0,v,V,M,v2,v3,solution,v,delv,del2v,d2v,d2delv,delU,delW,UW,A,B,solution2]

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

虚拟力量

定义 分布荷载 (注意方向的转向 x 轴)

```
q=q0x1/L
```

$$\frac{q0x1}{L}$$

瞬间由于真实的荷载

```
M=Integrate[q(x-x1),{x1,0,x}]
```

$$\frac{q0x^3}{6L}$$

因虚拟 荷载 的瞬间

```
delM=x
```

$$x$$

虚拟内部 应变能 和外部 虚功

```
delU=Integrate[MdelM/EI,{x,0,L}]
```

$$\frac{L^4 q0}{30EI}$$

```
delW=1v
```

$$v$$

解决为 $\delta U - \delta W = 0$

```
Solve[delU==delW,v]
```

$$\left\{\left\{v \to \frac{L^4 q0}{30EI}\right\}\right\}$$

```
Clear[v,q,M,delV,delU,delM]
```

势能

定义函数 v 和 荷载 q

```
v1[x_]:=a1x^2+a2x^3
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

q=qo(1 − x/L)

$$\text{qo}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

解决为 a 和 b 至于 v_2 和 v_3

solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1}\to-\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

更新表达式 v

v=v1[x]/.solution

$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

内部 应变能

d2v=Simplify[D[v,{x,2}]]

$$\left\{\frac{2(L(8\text{v2}-\text{v3})+6(-4\text{v2}+\text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

M=EId2v

$$\left\{\frac{2\text{EI}(L(8\text{v2}-\text{v3})+6(-4\text{v2}+\text{v3})x)}{L^3}\right\}$$

U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L}]

$$\left\{\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

潜在的外部工作

W=Integrate[qv,{x,0,L},Assumptions → L > 0]

$$\left\{\frac{4L\text{qov2}}{15}+\frac{L\text{qov3}}{60}\right\}$$

势能

PE=Simplify[U − W]

$$\left\{-\frac{1}{60}L\text{qo}(16\text{v2}+\text{v3})+\frac{2\text{EI}\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)}{L^3}\right\}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

eq1=*D*[PE,v2]

$$\left\{-\frac{4Lqo}{15}+\frac{2EI(128v2-40v3)}{L^3}\right\}$$

eq2=*D*[PE,v3]

$$\left\{-\frac{Lqo}{60}+\frac{2EI(-40v2+14v3)}{L^3}\right\}$$

solution=*N*[Solve[{eq1==**0**,eq2==**0**},{v2,v3}]]

$$\left\{\left\{v2\to\frac{0.0114583L^4qo}{EI},v3\to\frac{0.0333333L^4qo}{EI}\right\}\right\}$$

Clear[solution,eq2,eq1,PE,*W*,*U*,*M*,d2v,v1,*v*,solution,*q*]

雷莱里茨方法

定义 位移

v=a1*x*^**2** + a2*x*^**3**

$$a1x^2+a2x^3$$

二、取出第二个衍生品, 并确定时刻

d2v=*D*[*v*,{*x*,**2**}]

$$2a1+6a2x$$

M=Simplify[d2vEI]

$$2EI(a1+3a2x)$$

流动能量、工作和潜在能量

U=**1**/(**2**EI)Integrate[*M*^**2**,{*x*,**0**,*L*}]

$$\frac{4a1^2EI^2L+12a1a2EI^2L^2+12a2^2EI^2L^3}{2EI}$$

W=Integrate[q0(**1** − *x*/*L*)*v*,{*x*,**0**,*L*}]

$$\frac{1}{12}a1L^3q0+\frac{1}{20}a2L^4q0$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

PE=**U** − **W**

$$\frac{4\text{a1}^2\text{EI}^2L+12\text{a1a2EI}^2L^2+12\text{a2}^2\text{EI}^2L^3}{2\text{EI}}-\frac{1}{12}\text{a1}L^3\text{q0}-\frac{1}{20}\text{a2}L^4\text{q0}$$

潜力能源的部分衍生物 a_1 和 a_2

A=**D**[PE,a1]

$$\frac{8\text{a1EI}^2L+12\text{a2EI}^2L^2}{2\text{EI}}-\frac{L^3\text{q0}}{12}$$

B=**D**[PE,a2]

$$\frac{12\text{a1EI}^2L^2+24\text{a2EI}^2L^3}{2\text{EI}}-\frac{L^4\text{q0}}{20}$$

solution=Solve[{**A**==**0**,**B**==**0**},{a1,a2}]

$$\left\{\left\{\text{a1}\to\frac{7L^2\text{q0}}{120\text{EI}},\text{a2}\to-\frac{L\text{q0}}{40\text{EI}}\right\}\right\}$$

N[%]

$$\left\{\left\{\text{a1}\to\frac{0.0583333L^2\text{q0}}{\text{EI}},\text{a2}\to-\frac{0.025L\text{q0}}{\text{EI}}\right\}\right\}$$

v/.solution

$$\left\{\frac{7L^2\text{q0}x^2}{120\text{EI}}-\frac{L\text{q0}x^3}{40\text{EI}}\right\}$$

最大 位移

v/.solution/.*x* → **L**

$$\left\{\frac{L^4\text{q0}}{30\text{EI}}\right\}$$

Clear[*v*,d2v,**M**,**U**,**W**,PE,**A**,**B**,solution]

附加 势能

分布荷载

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
q=q0x1/L
```

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

瞬间是由真实的荷载加上幻想点荷载引起的。P 结尾的 Cantilever

```
M=Integrate[q(x - x1),{x1,0,x}] + Px
```

$$Px + \frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

内部 应变能

```
U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]
```

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3P^2}{3\text{EI}} + \frac{L^4P\text{q0}}{15\text{EI}} + \frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}\right)$$

位移

```
solution=DSolve[{v''[x]==M/EI,v'[L]==0,v[L]==0},v[x],x]
```

$$\left\{\left\{v[x] \to \frac{40L^4P + 4L^5\text{q0} - 60L^3Px - 5L^4\text{q0}x + 20LPx^3 + \text{q0}x^5}{120\text{EI}L}\right\}\right\}$$

```
vmax=v[x]/.solution/.x → 0
```

$$\left\{\frac{40L^4P + 4L^5\text{q0}}{120\text{EI}L}\right\}$$

外部工作潜力

```
q=q0x/L
```

$$\frac{\text{q0}x}{L}$$

```
W=Pvmax + Integrate[qv[x],{x,0,L}]/.solution
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4P\text{q0}}{30\text{EI}} + \frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}} + \frac{P\left(40L^4P + 4L^5\text{q0}\right)}{120\text{EI}L}\right\}\right\}$$

```
CPE=W - U
```

$$\left\{\left\{\frac{L^4P\text{q0}}{30\text{EI}} + \frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}} + \frac{P\left(40L^4P + 4L^5\text{q0}\right)}{120\text{EI}L} + \frac{1}{2}\left(-\frac{L^3P^2}{3\text{EI}} - \frac{L^4P\text{q0}}{15\text{EI}} - \frac{L^5\text{q0}^2}{252\text{EI}}\right)\right\}\right\}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

D[CPE,P]/.P->0

$$\left\{\left\{\frac{L^4 \text{q0}}{30 \text{EI}}\right\}\right\}$$

Clear[U,W,M,q,CPE,vmax,solution]

卡斯蒂格利亚诺第二理论

分布荷载

q=q0x1/L

$$\frac{\text{q0x1}}{L}$$

瞬间是由真实的荷载加上一个虚构的点荷载. P 结尾的 Cantilever

M=Integrate[q(x − x1),{x1,0,x}] + Px

$$Px + \frac{\text{q0}x^3}{6L}$$

内部 应变能

U=1/2Integrate[M^2/EI,{x,0,L}]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{L^3 P^2}{3 \text{EI}} + \frac{L^4 P \text{q0}}{15 \text{EI}} + \frac{L^5 \text{q0}^2}{252 \text{EI}}\right)$$

采取蒸汽能源衍生品

v=D[U,P]/.P → 0

$$\frac{L^4 \text{q0}}{30 \text{EI}}$$

Clear[U,M,q,v]

卡斯蒂格利亚诺的第一理论

定义函数 v 和 q

v1[x_]:=a1x^2 + a2x^3

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

q=qo$(1-x/L)$
$$\text{qo}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

解决为 a 和 b 至于 v_2 和 v_3

solution=Solve[{v1[L/2]==v2,v1[L]==v3},{a1,a2}]
$$\left\{\left\{\text{a1}\to-\frac{-8\text{v2}+\text{v3}}{L^2},\text{a2}\to-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})}{L^3}\right\}\right\}$$

更新表达式 v

v=v1[x]/.solution
$$\left\{-\frac{(-8\text{v2}+\text{v3})x^2}{L^2}-\frac{2(4\text{v2}-\text{v3})x^3}{L^3}\right\}$$

vmax=v1[L]
$$\text{a1}L^2+\text{a2}L^3$$

内部 应变能

d2v=D[v,{x,2}]
$$\left\{-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right\}$$

M=EId2v + Pvmax
$$\left\{\left(\text{a1}L^2+\text{a2}L^3\right)P+\text{EI}\left(-\frac{2(-8\text{v2}+\text{v3})}{L^2}-\frac{12(4\text{v2}-\text{v3})x}{L^3}\right)\right\}$$

U=Integrate[M^2/(2EI),{x,0,L},Assumptions → $L>0$]
$$\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14\text{EIv3}^2}{L^3}\right\}$$

Simplify[U]
$$\left\{\frac{\text{a1}^2L^8P^2+\text{a2}^2L^{10}P^2+8\text{a2EI}L^5P(-2\text{v2}+\text{v3})+4\text{EI}^2\left(64\text{v2}^2-40\text{v2v3}+7\text{v3}^2\right)+2\text{a1}L^4P\left(\text{a2}L^5P+4\text{EI}(-2\text{v2}+\text{v3})\right)}{2\text{EI}L^3}\right\}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

$D[U,\text{vmax}]$

$$\partial_{\text{a1}L^2+\text{a2}L^3}\left\{\frac{\text{a1}^2L^5P^2}{2\text{EI}}+\frac{\text{a1a2}L^6P^2}{\text{EI}}+\frac{\text{a2}^2L^7P^2}{2\text{EI}}-8\text{a1}LP\text{v2}-8\text{a2}L^2P\text{v2}+\frac{128\text{EIv2}^2}{L^3}+4\text{a1}LP\text{v3}+4\text{a2}L^2P\text{v3}-\frac{80\text{EIv2v3}}{L^3}+\frac{14}{}\right.$$

I.2.15 蒙特卡洛模拟建筑对侧 荷载 的线性弹性反应

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。
列出例子在 §53.2.2.1.

```
% ========================================================================
% MONTE CARLO SIMULATION -- LATERAL DRIFT OF A 4-STORY SHEAR BUILDING
% ========================================================================
% Estimates the probability of exceeding a drift limit for a linear
% elastic shear-frame building under random lateral loads and random
% member stiffnesses.
%
% STRUCTURAL MODEL:
%   A 4-story shear building where each story lateral drift is:
%       delta_i = V_i / k_i = V_i * H^3 / (12 * sum(EI_i))
%   where V_i = cumulative shear at story i (sum of loads above),
%   k_i = 12*EI/H^3 = lateral stiffness (fixed-fixed column formula),
%   and two columns contribute per story.
%
%   Total roof drift = u1 + u2 + u3 + u4.
%
% RANDOM VARIABLES (all independent Gaussian):
%   F1..F4   : lateral floor loads       mean=Fbar,  CoV=40%
%   EI1..EI8 : column bending stiffness  mean=EIbar, CoV=20%
%
% NOTE: Normal distributions can produce negative F and EI values
%   (~0.6% probability at CoV=0.4). For a rigorous study use lognormal.
%
% UNITS: any consistent set (e.g. kN,m or kip,in).
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 - Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
Fbar    = 20;            % mean lateral floor load      [force]
sigmaF  = Fbar * 0.4;    % std dev of load  (CoV=40%)

EIbar   = 10000;         % mean column bending stiffness [force.length^2]
sigmaEI = EIbar * 0.2;   % std dev of EI    (CoV=20%)

H    = 4;       % story height                    [length]
ULIM = 0.1;     % drift limit (failure threshold) [length]
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
40
41 % ------------------------------------------------------------------------
42 % Section 2 - Monte Carlo sampling
43 % ------------------------------------------------------------------------
44 NSIM = 1000000;   % 1e6 simulations: reliable for PF down to ~1e-4
45
46 F1 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
47 F2 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
48 F3 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
49 F4 = Fbar + sigmaF * randn(NSIM, 1);
50
51 EI1 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 1 columns
52 EI2 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
53 EI3 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 2 columns
54 EI4 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
55 EI5 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 3 columns
56 EI6 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
57 EI7 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);  % story 4 columns
58 EI8 = EIbar + sigmaEI * randn(NSIM, 1);
59
60 % ------------------------------------------------------------------------
61 % Section 3 - Story drifts (vectorised over all simulations)
62 % ------------------------------------------------------------------------
63 u4 =  F4                  ./ (EI7 + EI8) / 12 * H^3;
64 u3 = (F3 + F4)            ./ (EI5 + EI6) / 12 * H^3;
65 u2 = (F2 + F3 + F4)       ./ (EI3 + EI4) / 12 * H^3;
66 u1 = (F1 + F2 + F3 + F4) ./ (EI1 + EI2) / 12 * H^3;
67
68 u = u1 + u2 + u3 + u4;   % total roof drift
69
70 % ------------------------------------------------------------------------
71 % Section 4 - Statistics and failure probability
72 % ------------------------------------------------------------------------
73 UM  = mean(u);
74 US  = std(u);
75 COV = US / UM;
76
77 indic = (u > ULIM);   % 1 = failure (drift exceeds limit), 0 = safe
78 PF    = mean(indic);  % fraction of simulations in failure = P(u > ULIM)
79
80 % ------------------------------------------------------------------------
81 % Section 5 - Report
82 % ------------------------------------------------------------------------
83 fprintf('=== Monte Carlo Results (%d simulations) ===\n', NSIM);
84 fprintf('  Mean drift          UM  = %.5f\n', UM);
85 fprintf('  Std deviation       US  = %.5f\n', US);
86 fprintf('  Coeff of variation  COV = %.4f  (%.1f%%)\n', COV, COV*100);
87 fprintf('  Drift limit        ULIM = %.4f\n', ULIM);
88 fprintf('  Failure probability  PF = %.2e\n', PF);
89 fprintf('  Std error on PF        = %.2e\n', sqrt(PF*(1-PF)/NSIM));
```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

I.2.16 以色列 单元

下一篇: 重复 Hinton and Owen, 1977 Finite Element Programming.

计算机实施一个数字化整合的以色列参数单元 如下总结。

但首先, 假设这个操作必须在一个功能中进行。呼叫 **斯蒂夫** 作为引入论点, **青春**, **小**, **小。类型**, `ndime`, `ndofn`, `ngaus`. 相反, 它将计算刚度矩阵**凯尔** 以 单元 **伊利姆**.

1. 恢复单元地质和材料属性目前的 单元
2. 零的刚度矩阵
3. 呼叫功能 `DMA` 要设置宪法 矩阵 $\mathbf{D}^e$ 单元的
4. 进入 (被遗弃) 覆盖所有集成点的路径
   (a) 查看当前点的样品位置 (ξ_p, η_q) (`s , t`) 他们的重量 (**威格**)
   (b) 通话 形函数 日常 `SFR` 给予 ξ_p, η_q 谁会回来形函数的 N_i^e (`SFR`) 以及衍生品 $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ 和 $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ (**衍生**) 在此点 ξ_p, η_q
   (c) 下一篇:Subroutin (**雅各布**) 被授予 N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}$ 和 $\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}$ 在点 ξ_p, η_q 将返回卡特西亚形函数衍生品 $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ (**卡特**), 雅可比矩阵的 $\mathbf{J}^e$ (**雅克**), 其相反 $\mathbf{J}^{e-1}$ (**雅西**), 其 行列式 $\det \mathbf{J}^e$ (**雅克**) 和 The x 和 y 协调到目前为止 ξ_p, η_q
   (d) 呼叫应变矩阵 (**比特币**) 日常, 如 N_i^e, $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$, at ξ_p, η_q 将返回应变 矩阵 $\mathbf{B}_i^e$ (**巴马**)
   (e) 呼叫一个日常 (`DBM`) 要评估 $\mathbf{D}^e\mathbf{B}_i^e$ (`DBM`)
   (f) 评估 $\mathbf{B}_i^{eT}\mathbf{D}^e\mathbf{B}_j^e \det \mathbf{J}^e \times$ 集成重量, 并将其集成到 单元 刚度矩阵 $\mathbf{K}_{ij}^e$
   (g) 聚集 $\mathbf{D}^e\mathbf{B}^e$ (**香水** 在 应力 序列中进行后续评估压力来自节点转移。
5. 编写 刚度矩阵

推荐的变量列表:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

天下, 天下	指数, 尺寸数量 (2D 为 2D)
安德烈, 安德鲁	指数, 每个节点的 自由度 号
尼尔, 尼尔	指数, 单元的数字
天下, 天下。	指数、指数和加斯规则的数量
内奥德, nnode	指数, 按 单元 的节点数量
天文, 天文	使用的加斯点数量
类型	飞机 1 应力; 飞机 2 应变
波斯	泊松比
年轻人	杨氏模量

艾尔科德 (无奈, 无奈)	地点列的 nodal cartesian 坐标单元 目前正在考虑 $\begin{bmatrix} x(\xi_1,\eta_1) & \cdots & x(\xi_8,\eta_8) \\ y(\xi_1,\eta_1) & \cdots & y(\xi_8,\eta_8) \end{bmatrix}$
s	ξ 样品点协调
t	η 样品点协调
Gpcod(天下, 天下)	卡特西亚区的地理坐标 Gauss 对 单元 的评分目前正在考虑中 $\begin{bmatrix} x(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & x(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \\ y(\xi_{G_1},\eta_{G_1} & \cdots & y(\xi_{G_5},\eta_{G_5}) & \cdots \end{bmatrix}$
波斯 (mga)	ξ 加斯点的坐标
威格 (mga)	重量因素 Gauss 点
形状 (尼奥德)	形函数 与当前的每个节点相关单元 在 (ξ_p,η_p) $\begin{bmatrix} N_1(\xi_p,\eta_p) \\ \vdots N_8(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
衍生 (无奈, 无奈)	形函数 衍生品在样品中点 (ξ_p,η_p) 在 单元 中 $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
卡特 (无奈, 无奈)	卡特西亚形函数相关衍生品与当前 单元 的节点在任何时刻都样本 (ξ_p,η_p) 在 单元 中 $\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x}(\xi_p,\eta_p) \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y}(\xi_p,\eta_p) \end{bmatrix}$
雅各布	行列式 的 雅可比矩阵 样品在任何点 (ξ_p,η_p) 在 单元 中
雅克 (天下, 天下)	雅可比矩阵 在样品点
雅西 (天下, 天下)	回归 雅可比矩阵 在样品中点
巴马 (天下, NEVAB)	单元 应变 矩阵 在任何地方 element $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{B}_8 \end{bmatrix}$ 哪里 $\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$
DBM(伊斯特里, 伊瓦布)	商店 **DB**

```
% ========================================================================
% ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENTS -- Q4, Q8, Q9 PLANE ELEMENTS
% ========================================================================
% A library of functions implementing Gaussian quadrature-based stiffness
% matrix assembly for 2D isoparametric elements under plane stress or
% plane strain conditions.
%
% SUPPORTED ELEMENT TYPES:
%   Q4  : 4-node bilinear quadrilateral        (nnode = 4)
%   Q8  : 8-node serendipity quadrilateral      (nnode = 8)
%   Q9  : 9-node Lagrangian quadrilateral       (nnode = 9)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%
% ISOPARAMETRIC CONCEPT:
%   The same shape functions N_i(s,t) are used to interpolate both the
%   geometry and the displacement field:
%
%     x(s,t) = sum_i N_i(s,t) * x_i    (geometry mapping)
%     u(s,t) = sum_i N_i(s,t) * u_i    (displacement interpolation)
%
%   where (s,t) are natural coordinates in [-1,1]^2.
%
% STIFFNESS MATRIX:
%   K_e = integral_(-1)^(1) integral_(-1)^(1) B^T * D * B * |J| ds dt
%
%   approximated by Gauss quadrature:
%   K_e approx sum_i sum_j w_i * w_j * B^T(s_i,t_j) * D * B(s_i,t_j) * |J(s_i,t_j)|
%
% NATURAL COORDINATE NODE ORDERING (counter-clockwise):
%
%   Q4:           Q8/Q9:
%   4---3         4--7--3
%   |   |         8  9  6
%   1---2         1--5--2
%
%   (s increases right, t increases upward)
%
% STRUCTURE OF THIS FILE:
%   Part 1  -- Script: plot Q8/Q9 shape functions over the reference element
%   Part 2  -- function stiff    : assemble element stiffness matrices
%   Part 3  -- function dmat     : constitutive matrix D (plane stress/strain)
%   Part 4  -- function sfr      : shape functions and derivatives N, dN/ds, dN/dt
%   Part 5  -- function jacob    : Jacobian J, J^-1, |J|, Cartesian derivatives
%   Part 6  -- function bmatps   : strain-displacement matrix B and D*B
%
% LNODS ARRAY FORMAT (input to stiff):
%   lnods(e, 1)       : element number
%   lnods(e, 2)       : Young's modulus E for element e
%   lnods(e, 3)       : Poisson's ratio nu for element e
%   lnods(e, 4:3+nnode): global node numbers of element e
%
% COORD ARRAY FORMAT:
%   coord(n, 1)       : global node number
%   coord(n, 2:3)     : x, y coordinates of node n
% ================================================================================


% ================================================================================
% PART 1 -- SCRIPT: Plot Q8 and Q9 shape functions
% ================================================================================
% Plots surface and contour views of selected shape functions over the
% reference element [-1,1]^2 for visual verification.
%
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Node 1 (corner) and Node 8 (midside) are shown for both Q8 and Q9
% to illustrate how the bubble function N9 modifies the corner shapes.

xi  = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate xi  (horizontal)
eta = -1 : 1/20 : 1;    % natural coordinate eta (vertical)

% Column vectors for outer products
XI  = xi';
ETA = eta';

% --- Q8/Q9 intermediate (midside/bubble) shape functions ---
% These are computed first because the corner functions depend on them.
N9 = (1 - ETA.^2) * (1 - xi.^2);             % bubble (centre node, Q9 only)
N8 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 - xi);            % midside: left edge
N7 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 + eta);           % midside: top edge
N6 = 0.5*(1 - ETA.^2) * (1 + xi);            % midside: right edge
N5 = 0.5*(1 - XI.^2)  * (1 - eta);           % midside: bottom edge

% --- Q8 corner shape functions (no bubble term) ---
N4_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 + eta) - 0.5*(N7 + N8);
N3_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 + eta) - 0.5*(N6 + N7);
N2_Q8 = 0.25*(1 + XI)*(1 - eta) - 0.5*(N5 + N6);
N1_Q8 = 0.25*(1 - XI)*(1 - eta) - 0.5*(N8 + N5);

% Plot Q8 corner node 1
figure('Name', 'Q8 Shape Functions');
subplot(2,2,1);
meshc(xi, eta, N1_Q8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q8 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,2,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q8);
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 1 (corner): contour');

% Plot Q8 midside node 8
subplot(2,2,3);
meshc(xi, eta, N8);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q8 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,2,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8);
clabel(C, h);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');
title('Q8 -- Node 8 (midside): contour');

% --- Q9 shape functions: subtract bubble contribution from Q8 shapes ---
N1_Q9 = N1_Q8 - 0.25*N9;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
N8_Q9 = N8    - 0.50*N9;

figure('Name', 'Q9 Shape Functions');
subplot(2,3,1);
meshc(xi, eta, N1_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_1');
title('Q9 -- Node 1 (corner): surface');

subplot(2,3,2);
[C, h] = contour(xi, eta, N1_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 1 (corner): contour');

subplot(2,3,3);
meshc(xi, eta, N8_Q9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_8');
title('Q9 -- Node 8 (midside): surface');

subplot(2,3,4);
[C, h] = contour(xi, eta, N8_Q9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 8 (midside): contour');

subplot(2,3,5);
meshc(xi, eta, N9);
xlabel('\xi');  ylabel('\eta');  zlabel('N_9');
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): surface');

subplot(2,3,6);
[C, h] = contour(xi, eta, N9);
clabel(C, h);
title('Q9 -- Node 9 (centre bubble): contour');


% ========================================================================
% PART 2 -- FUNCTION: stiff
% ========================================================================
% Assembles element stiffness matrices for all elements using Gauss
% quadrature.  Returns all element matrices stacked in a single array.
%
% INPUTS:
%   ngaus  : number of Gauss points per direction
%   posgp  : Gauss point positions  (1 x ngaus)
%   weigp  : Gauss point weights    (1 x ngaus)
%   type   : problem type  (1 = plane stress,  2 = plane strain)
%   nelem  : number of elements
%   lnods  : connectivity + material array  [nelem x (3+nnode)]
%   coord  : node coordinates  [nnodes x 3]  (col1=node#, col2=x, col3=y)
%   nnode  : nodes per element  (4, 8, or 9)
%
% OUTPUT:
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   KELEM  : stacked element stiffness matrices  [nelem*2*nnode x 2*nnode]
%            Row block ielem: KELEM(2*nnode*(ielem-1)+1 : 2*nnode*ielem, :)

function KELEM = stiff(ngaus, posgp, weigp, type, nelem, lnods, coord, nnode)

fprintf('Assembling element stiffness matrices...\n');
tic;

stifsize  = 2 * nnode;        % DOFs per element (2 per node: u and v)
KELEM     = zeros(stifsize * nelem, stifsize);

for ielem = 1 : nelem

    % --- Extract material properties from lnods ---
    young = lnods(ielem, 2);
    poiss = lnods(ielem, 3);

    % --- Extract element node coordinates ---
    % elcod: 2 x nnode matrix  [x; y] for each node in order
    elcod = zeros(2, nnode);
    for inode = 1 : nnode
        global_node = lnods(ielem, inode+3);
        row         = find(coord(:,1) == global_node);
        elcod(:, inode) = coord(row, 2:3)';
    end

    % --- Constitutive matrix ---
    D = dmat(young, poiss, type);

    % --- Gauss quadrature over the reference element ---
    kelem = zeros(stifsize);
    for igaus = 1 : ngaus
        for jgaus = 1 : ngaus
            s = posgp(igaus);
            t = posgp(jgaus);
            W = weigp(igaus) * weigp(jgaus);

            [shape, deriv]            = sfr(s, t, nnode);
            [cartd, ~, ~, djac, ~]    = jacob(shape, deriv, elcod);
            [bmat, dbmat]             = bmatps(shape, cartd, D);

            % Accumulate:  K += w * B^T * D * B * |J|
            kelem = kelem + W * bmat' * dbmat * djac;
        end
    end

    % --- Store in stacked output array ---
    startrow = stifsize * (ielem-1) + 1;
    endrow   = stifsize * ielem;
    KELEM(startrow:endrow, :) = kelem;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
end

fprintf('Done. Elapsed: %.4f sec\n\n', toc);

end   % stiff


% ========================================================================
% PART 3 -- FUNCTION: dmat
% ========================================================================
% Returns the 3x3 constitutive matrix D for isotropic linear elasticity
% under either plane stress or plane strain assumptions.
%
% PLANE STRESS (type=1): thin plate, sigma_zz = 0
%   D = E/(1-v^2) * [1, v,       0     ]
%                   [v, 1,       0     ]
%                   [0, 0, (1-v)/2     ]
%
% PLANE STRAIN (type=2): thick body constrained in z, eps_zz = 0
%   D = E/((1+v)(1-2v)) * [1-v,   v,        0    ]
%                         [ v,  1-v,        0    ]
%                         [ 0,    0,   (1-2v)/2  ]
%
% Strain vector convention: [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]

function D = dmat(young, poiss, type)

E = young;
v = poiss;

if type == 1
    % Plane stress
    D = E/(1-v^2) * [ 1,     v,        0     ;
                      v,     1,        0     ;
                      0,     0,   (1-v)/2    ];
else
    % Plane strain
    D = E/((1+v)*(1-2*v)) * [ 1-v,    v,        0       ;
                              v,    1-v,        0       ;
                              0,     0,    (1-2*v)/2    ];
end

end   % dmat


% ========================================================================
% PART 4 -- FUNCTION: sfr  (Shape Function Routine)
% ========================================================================
% Computes shape functions N_i(s,t) and their natural-coordinate
% derivatives dN_i/ds, dN_i/dt at a single Gauss point (s,t).
%
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% The Q8 and Q9 shape functions are built hierarchically:
%   - Midside nodes are constructed from bilinear products
%   - Corner nodes are the bilinear shapes minus contributions of
%     adjacent midside nodes (to enforce partition of unity)
%   - Q9 adds the bubble function N9 and subtracts its contribution
%     from all other nodes
%
% INPUTS:
%   s, t   : natural coordinates of the evaluation point  [-1,1]
%   nnode  : 4 (Q4), 8 (Q8), or 9 (Q9)
%
% OUTPUTS:
%   shape  : nnode x 1 vector of shape function values
%   deriv  : 2 x nnode matrix of derivatives  [dN/ds; dN/dt]

function [shape, deriv] = sfr(s, t, nnode)

if nnode == 9
    % --- Q9: 9-node Lagrangian element ---
    % Node 9 is the interior bubble: N9 = (1-s^2)*(1-t^2)
    N9 = (1-s^2)*(1-t^2);

    % Midside nodes (edges)
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % left midside
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t) - 0.5*N9;    % top midside
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2) - 0.5*N9;    % right midside
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t) - 0.5*N9;    % bottom midside

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8 - 0.25*N9;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7 - 0.25*N9;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6 - 0.25*N9;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8 - 0.25*N9;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8; N9];

    % Derivatives of N9
    dN9ds = -2*s*(1-t^2);
    dN9dt = -2*t*(1-s^2);

    % Derivatives of midside nodes
    dN8ds = -0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN8dt = -t*(1-s)     - 0.5*dN9dt;
    dN7ds = -s*(1+t)     - 0.5*dN9ds;
    dN7dt =  0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;
    dN6ds =  0.5*(1-t^2) - 0.5*dN9ds;
    dN6dt = -t*(1+s)     - 0.5*dN9dt;
    dN5ds = -s*(1-t)     - 0.5*dN9ds;
    dN5dt = -0.5*(1-s^2) - 0.5*dN9dt;

    % Derivatives of corner nodes
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds - 0.25*dN9ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt - 0.25*dN9dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds - 0.25*dN9ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt - 0.25*dN9dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds - 0.25*dN9ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt - 0.25*dN9dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds, dN9ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt, dN9dt ];

elseif nnode == 8
    % --- Q8: 8-node serendipity element (no interior node) ---

    % Midside nodes
    N8 = 0.5*(1-s)*(1-t^2);
    N7 = 0.5*(1-s^2)*(1+t);
    N6 = 0.5*(1+s)*(1-t^2);
    N5 = 0.5*(1-s^2)*(1-t);

    % Corner nodes
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t) - 0.5*N7 - 0.5*N8;
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t) - 0.5*N6 - 0.5*N7;
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N6;
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t) - 0.5*N5 - 0.5*N8;

    shape = [N1; N2; N3; N4; N5; N6; N7; N8];

    dN8ds = -0.5*(1-t^2);   dN8dt = -t*(1-s);
    dN7ds = -s*(1+t);        dN7dt =  0.5*(1-s^2);
    dN6ds =  0.5*(1-t^2);   dN6dt = -t*(1+s);
    dN5ds = -s*(1-t);        dN5dt = -0.5*(1-s^2);

    dN4ds = -0.25*(1+t) - 0.5*dN7ds - 0.5*dN8ds;
    dN4dt =  0.25*(1-s) - 0.5*dN7dt - 0.5*dN8dt;
    dN3ds =  0.25*(1+t) - 0.5*dN6ds - 0.5*dN7ds;
    dN3dt =  0.25*(1+s) - 0.5*dN6dt - 0.5*dN7dt;
    dN2ds =  0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN6ds;
    dN2dt = -0.25*(1+s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN6dt;
    dN1ds = -0.25*(1-t) - 0.5*dN5ds - 0.5*dN8ds;
    dN1dt = -0.25*(1-s) - 0.5*dN5dt - 0.5*dN8dt;

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds, dN5ds, dN6ds, dN7ds, dN8ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt, dN5dt, dN6dt, dN7dt, dN8dt ];

else
    % --- Q4: 4-node bilinear element ---
    N4 = 0.25*(1-s)*(1+t);
    N3 = 0.25*(1+s)*(1+t);
    N2 = 0.25*(1+s)*(1-t);
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
    N1 = 0.25*(1-s)*(1-t);

    shape = [N1; N2; N3; N4];

    dN4ds = -0.25*(1+t);  dN4dt =  0.25*(1-s);
    dN3ds =  0.25*(1+t);  dN3dt =  0.25*(1+s);
    dN2ds =  0.25*(1-t);  dN2dt = -0.25*(1+s);
    dN1ds = -0.25*(1-t);  dN1dt = -0.25*(1-s);

    deriv = [dN1ds, dN2ds, dN3ds, dN4ds ;
             dN1dt, dN2dt, dN3dt, dN4dt ];
end

end   % sfr


% ==========================================================================
% PART 5 -- FUNCTION: jacob
% ==========================================================================
% Computes the Jacobian matrix and related quantities needed to transform
% shape function derivatives from natural to Cartesian coordinates.
%
% JACOBIAN MATRIX:
%   J = deriv * elcod^T    (2x2 matrix)
%
%   [dX/ds  dY/ds]   [dN/ds] * [x_1 y_1]
%   [dX/dt  dY/dt] = [dN/dt]   [x_2 y_2]
%                              [  ...   ]
%
% CARTESIAN DERIVATIVES:
%   [dN/dx]        [dN/ds]
%   [dN/dy] = J^-1 [dN/dt]
%
% WARNING: if |J| <= 0 the element is distorted (inverted or collapsed).
%   This function does not check for this condition -- the caller should
%   verify djac > 0 for all Gauss points.
%
% INPUTS:
%   shape  : nnode x 1 shape function values (used for xy interpolation)
%   deriv  : 2 x nnode natural-coordinate derivatives
%   elcod  : 2 x nnode element node coordinates  [x; y]
%
% OUTPUTS:
%   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
%   jacm   : 2x2 Jacobian matrix J
%   jaci   : 2x2 Jacobian inverse J^-1
%   djac   : scalar determinant |J|
%   xy     : 2x1 physical coordinates at the Gauss point

function [cartd, jacm, jaci, djac, xy] = jacob(shape, deriv, elcod)

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
jacm  = deriv * elcod';   % J = dN/ds * [x; y]^T
jaci  = inv(jacm);        % J^-1
djac  = det(jacm);        % |J| (must be > 0 for valid element)
cartd = jaci * deriv;     % Cartesian derivatives: J^-1 * dN/d(s,t)
xy    = elcod * shape;    % Physical coordinates at Gauss point

end   % jacob


% ===================================================================
% PART 6 -- FUNCTION: bmatps  (B matrix for plane stress/strain)
% ===================================================================
% Assembles the strain-displacement matrix B and the product D*B.
%
% For 2D plane problems the strain vector is:
%   eps = [eps_xx; eps_yy; gamma_xy]
%
% The B matrix maps nodal displacements to strains:
%   eps = B * u_e
%
% For node i the 3x2 sub-block of B is:
%   [dN_i/dx,      0    ]
%   [    0,    dN_i/dy  ]
%   [dN_i/dy,  dN_i/dx  ]
%
% These sub-blocks are assembled column-pair by column-pair.
%
% INPUTS:
%   shape  : shape function values (not used directly here but available)
%   cartd  : 2 x nnode Cartesian shape function derivatives
%   D      : 3x3 constitutive matrix
%
% OUTPUTS:
%   bmat   : 3 x 2*nnode strain-displacement matrix B
%   dbmat  : 3 x 2*nnode product D*B

function [bmat, dbmat] = bmatps(shape, cartd, D) %#ok<INUSL>

nnode  = size(cartd, 2);
numcols = 2 * nnode;          % total DOF columns (u and v for each node)
bmat   = zeros(3, numcols);

for inode = 1 : nnode
    col = 2*inode - 1;        % column pair: [col, col+1] for node inode
    bmat(:, col:col+1) = [ cartd(1,inode),       0          ;
                                0,          cartd(2,inode)  ;
                           cartd(2,inode),  cartd(1,inode)  ];
end

dbmat = D * bmat;

```

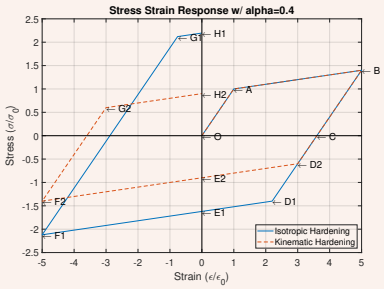

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
471 end    % bmatps
```

I.3 第三部分: 材料模型与宪法行为

本部分讨论了物质行为, 包括塑性, 蒸发和非线性构成模型不同类型的材料。

I.3.1 增長 塑性



作者:Ben Gallagher

```
% ========================================================================
% INCREMENTAL PLASTICITY -- STRESS-STRAIN RESPONSE COMPARISON
% ========================================================================
% Plots the normalised stress-strain response of an elastic-plastic
% material under cyclic loading for two hardening rules:
%
%   1. ISOTROPIC HARDENING:
%      The yield surface expands uniformly in all directions as plastic
%      strain accumulates.  Both tensile and compressive yield stresses
%      increase equally.  This captures strain hardening but not the
%      Bauschinger effect.
%
%   2. KINEMATIC HARDENING (Prager):
%      The yield surface translates in stress space without changing size.
%      After tensile yielding, the compressive yield stress decreases by
%      the same amount as the tensile yield stress increased.  This
%      captures the Bauschinger effect observed in metals.
%
% NORMALISATION:
%   All stresses normalised by the initial yield stress sigma_0 (s_not).
%   All strains normalised by the initial yield strain epsilon_0 (e_not).
%
% LOADING PATH (points A through H):
%   O -> A : elastic loading to initial yield
%   A -> B : plastic loading (hardening)
%   B -> C : elastic unloading, zero stress
%   C -> D : continued unloading to reverse yield
%   D -> E : reverse plastic flow, zero strain
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   E -> F : continued reverse plastic loading
%   F -> G : elastic reloading
%   G -> H : plastic reloading, zero strain
%
% HARDENING PARAMETER:
%   alpha (a) controls the plastic modulus relative to elastic modulus.
%   For a = 0: perfectly plastic (no hardening).
%   For a = 0.4: moderate hardening (used here).
%
% The two hardening rules give identical paths O->A->B->C but diverge
% from point D onward, reflecting their different treatment of the
% back-stress and yield surface evolution.
% ========================================================================

close all; clear; clc;

scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 18;
GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Material parameters
% ------------------------------------------------------------------------
s_not = 1;    % initial yield stress    (normalised: sigma_0 = 1)
e_not = 1;    % initial yield strain    (normalised: epsilon_0 = 1)
a     = 0.4;  % hardening parameter     (plastic modulus ratio)

% ========================================================================
% Section 2 -- Isotropic hardening: key points
% ========================================================================
% Under isotropic hardening the current yield stress after loading to
% point B is (1+a)*s_not.  On reverse loading, yielding occurs when
% the stress has decreased by 2*(1+a)*s_not from the peak.
%
% The slope of each loading segment is E (elastic) or E*a/(1+a) (plastic).
% All coordinates are derived analytically from these assumptions.

% Point A: initial yield (start of plastic flow)
sa = s_not;
ea = e_not;

% Point B: end of forward plastic loading
sb = (1 + a) * s_not;
eb = (1 + 10*a) * e_not;

% Point C: elastic unload to zero stress
sc = 0;
ec = 9*a * e_not;

% Point D: reverse yield (isotropic -- yield surface has expanded)
sd = -(1 + a) * s_not;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
ed = (8*a - 1) * e_not;

% Point E: reverse plastic flow to zero strain
se = -9/10 * (1 + 2*a) * s_not;
ee = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sf = -(1 + 14/5*a) * s_not;
ef = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
sg = (1 + 14/5*a) * s_not;
eg = (1 - 22/5*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
sh = (9/10 + 81/25*a) * s_not;
eh = 0;

% ========================================================================
% Section 3 -- Kinematic hardening: key points
% ========================================================================
% Under kinematic hardening the yield surface translates but does not
% grow.  The yield surface half-width remains s_not throughout.
% Reverse yielding occurs at a lower stress than under isotropic hardening,
% capturing the Bauschinger effect.

% Points A and B: same as isotropic (first loading)
sak = s_not;          eak = e_not;
sbk = (1 + a) * s_not; ebk = (1 + 10*a) * e_not;

% Point C: elastic unload to zero stress
sck = 0;
eck = 9*a * e_not;

% Point D: reverse yield (kinematic -- yield surface has only translated)
sdk = (a - 1) * s_not;
edk = (10*a - 1) * e_not;

% Point E: reverse plastic flow to zero strain
sek = -9/10 * s_not;
eek = 0;

% Point F: end of reverse plastic loading
sfk = -(a + 1) * s_not;
efk = -(1 + 10*a) * e_not;

% Point G: re-load to forward yield
sgk = (1 - a) * s_not;
egk = (1 - 10*a) * e_not;

% Point H: re-load to zero strain
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
shk = 9/10 * s_not;
ehk = 0;

% ========================================================================
% Section 4 -- Assemble path vectors (origin + A through H)
% ========================================================================
x_iso  = [0; ea;  eb;  ec;  ed;  ee;  ef;  eg;  eh ];
y_iso  = [0; sa;  sb;  sc;  sd;  se;  sf;  sg;  sh ];

x_kin  = [0; eak; ebk; eck; edk; eek; efk; egk; ehk];
y_kin  = [0; sak; sbk; sck; sdk; sek; sfk; sgk; shk];

% Axes lines
x_axis = [-5, 5];   y_zero = [0,  0];
y_axis = [0,  0];   x_zero = [-2.5, 2.5];

% ========================================================================
% Section 5 -- Plot
% ========================================================================
hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);
set(gca, 'FontSize', fs);

plot(x_iso, y_iso,  'b-',  'LineWidth', 1.5);   hold on;
plot(x_kin, y_kin,  'r--', 'LineWidth', 1.5);
plot(x_axis, y_zero, 'k');
plot(y_axis, x_zero, 'k');

% --- Point labels ---
% Subscript 1 = isotropic,  subscript 2 = kinematic
lbl = @(x,y,s) text(x, y, ['\leftarrow ' s], ...
                    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontSize', fs);

lbl(0,   0,    'O');
lbl(ea,  sa,   'A');
lbl(eb,  sb,   'B');
lbl(ec,  sc,   'C');

% Isotropic points (suffix 1)
lbl(ed,  sd,   'D_1');
lbl(ee,  se,   'E_1');
lbl(ef,  sf,   'F_1');
lbl(eg,  sg,   'G_1');
lbl(eh,  sh,   'H_1');

% Kinematic points (suffix 2)
lbl(edk, sdk,  'D_2');
lbl(eek, sek,  'E_2');
lbl(efk, sfk,  'F_2');
lbl(egk, sgk,  'G_2');
lbl(ehk, shk,  'H_2');

```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
% --- Formatting ---
title(['Stress-Strain Response  (\alpha = ' num2str(a) ')'], 'FontSize', fs);
xlabel('Strain  (\epsilon / \epsilon_0)',  'FontSize', fs);
ylabel('Stress  (\sigma / \sigma_0)',       'FontSize', fs);
legend('Isotropic Hardening', 'Kinematic Hardening', 'Location', 'southeast');
grid on;
axis on;
set(gca, 'FontSize', fs);

% ========================================================================
% Section 6 -- Export
% ========================================================================
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
FileName = 'Prob-1.eps';
print(FileName, '-depsc');
eps2pdf(FileName, GS, 0);
```

I.3.2 宪法模型

五年來, 科羅拉多大學布爾德是 NEES 领域的一部分, 專注於實時混合模擬。(Saouma and Sivaselvan, 2014).

当网站关闭时 (早期) 由于社区对研究的兴趣不足 (RTHS 是显而易见的挑战性, 远超过“月亮” Shake 桌面测试), 作者决定开发自己的软件, 因为 OpenSees 不太适合这样的努力。

开发的软件 (顺利呼叫) 水星 (Saouma, Kang, and Haussmann, 2012) 首先是以对象为导向的 MATLAB® 由 Kang, 2010 然后重写为 C++, 由 Gary Haussman 博士。

至此日, 以及作者的最佳知识 (和比亚) 实时混合模拟 400+ 自由度 在高非线性 钢筋混凝土 框架 (上一篇: 在 Shake 桌上测试) 它不仅没有被超越, 而且可能是迄今为止最复杂的结构测试之一。(Saouma et al., 2013).

后来, 一位创始人写了 Segura, 2011 谁添加了 Ibarra 模型为 塑性 以及 极限状态 表格模型。它被称为 Mercury++。

请注意, 该代码在 Object Oriented Matlab 中写。

因此, 本节将列出在 Mercury++ 中可用的构成驱动程序。

> 从博士论文 “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation” 由 Kang, 2010 和 MS 的论文 “Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code” 由 Segura, 2011.

I.3.3 二元模型

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% -----------------------------------------------------------------
classdef Bilinear < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        b;                      % strain-hardening coefficient
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect an
    increase of the compression yield envelope through a fraction of the yield strength
    after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect an
    increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield strength after
     a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comShift_Pos;           % committed Shift_Pos from previous step
        comShift_Neg;           % committed Shift_Neg from previous step
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive model
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive model
        Shift_Pos;              % positive shift for isotropic hardening
        Shift_Neg;              % negative shift for isotropic hardening
        flag;                   % flag for load status
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Bilinear(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.b        = material.b;
            mat.a1       = material.a1;
            mat.a2       = material.a2;
            mat.a3       = material.a3;
            mat.a4       = material.a4;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress     = 0;
            mat.TangentE   = mat.InitialE;
            mat.Strain     = 0;
            mat.Strain_min = 0;
            mat.Strain_max = 0;
            mat.Shift_Pos  = 1;
            mat.Shift_Neg  = 1;
            mat.flag       = 0;
        end

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.comStress     = mat.Stress;
            mat.comTangentE   = mat.TangentE;
            mat.comStrain     = mat.Strain;
            mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
            mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
            mat.comShift_Pos  = mat.Shift_Pos;
            mat.comShift_Neg  = mat.Shift_Neg;
            mat.comflag       = mat.flag;
        end

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain     = mat.comStrain;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;
        end

        function getStrain(mat, TrialStrain)
            mat.Strain = TrialStrain;
        end

        function getTangentE(mat)
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
            mat.Stress     = mat.comStress;
            mat.TangentE   = mat.comTangentE;
            mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
            mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
            mat.Shift_Pos  = mat.comShift_Pos;
            mat.Shift_Neg  = mat.comShift_Neg;
            mat.flag       = mat.comflag;

            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;

            if ( abs(del_eps) > 2.2204460492503131e-016 )
                Esh  = mat.b * mat.InitialE;
                epsy = mat.sy0/mat.InitialE;
                c1   = Esh * mat.Strain;
                c2   = mat.Shift_Neg * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c3   = mat.Shift_Pos * mat.sy0 * ( 1 - mat.b );
                c    = mat.comStress + mat.InitialE * del_eps;
                mat.Stress = max( (c1-c2), min( (c1+c3), c ) );
                if ( abs(mat.Stress - c) < 2.2204460492503131e-016 )
                    mat.TangentE = mat.InitialE;
                else
                    mat.TangentE = Esh;
                end

                if (mat.flag == 0)
                    if (del_eps > 0.0)
                        mat.flag = 1;
                    else
                        mat.flag = -1;
                    end
                end

                if ( (mat.flag == 1) && (del_eps < 0.0) )
                    % loading reverstal( + -> - )
                    mat.flag = -1;
                    mat.Strain_max = max(mat.comStrain, mat.Strain_max);
                    mat.Shift_Neg  = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.Strain_min) /
    (2.0 * mat.a2 * epsy) )^0.8;
                end

                if ( (mat.flag == -1) && (del_eps > 0.0) )
                    % loading reverstal( - -> + )
                    mat.flag = 1;
                    mat.Strain_min = min(mat.comStrain, mat.Strain_min);
                    mat.Shift_Pos  = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max - mat.Strain_min) /
    (2.0 * mat.a4 * epsy) )^0.8;
                end
            end
        end

        function getStress(mat)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.4 哈登

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hardening < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial modulus
        sy0;                    % initial yielding stress
        Hiso;                   % isotropic hardening modulus
        Hkin;                   % kinematic hardening modulus
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comPlasticStrain;       % committed PlasticStrain from previous step
        comBackStress;          % committed BackStress from previous step
        comsy;                  % committed sy from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        PlasticStrain;          % uniaxial plastic strain
        BackStress;             % uniaxial back stress
        sy;                     % yield stress
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = Hardening(material)
            mat.Tag      = material.Tag;
            mat.Type     = material.Type;
            mat.InitialE = material.InitialE;
            mat.sy0      = material.sy0;
            mat.Hiso     = material.Hiso;
            mat.Hkin     = material.Hkin;
            mat.rho      = material.rho;
        end

        function Initialization(mat)
            mat.Stress           = 0;
            mat.TangentE         = mat.InitialE;
            mat.Strain           = 0;
            mat.PlasticStrain    = 0;
            mat.BackStress       = 0;
            mat.sy               = mat.sy0;
            mat.comPlasticStrain = 0;
            mat.comBackStress    = 0;
            mat.comsy            = mat.sy0;
        end

```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
63          function commit(mat)     % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
64              mat.comStress         = mat.Stress;
65              mat.comTangentE       = mat.TangentE;
66              mat.comStrain         = mat.Strain;
67              mat.comPlasticStrain = mat.PlasticStrain;
68              mat.comBackStress     = mat.BackStress;
69              mat.comsy             = mat.sy;
70          end
71
72          function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
73              mat.Stress         = mat.comStress;
74              mat.TangentE       = mat.comTangentE;
75              mat.Strain         = mat.comStrain;
76              mat.PlasticStrain = mat.comPlasticStrain;
77              mat.BackStress     = mat.comBackStress;
78              mat.sy             = mat.comsy;
79          end
80
81          function getStrain(mat, TrialStrain)
82              mat.Strain = TrialStrain;
83          end
84
85          function getTangentE(mat)
86              % Material constitutive law
87              eps_p_tr     = mat.comPlasticStrain;    % trial plastic strain
88              back_sig_tr  = mat.comBackStress;       % trial back stress
89              sy_tr        = mat.comsy;               % trial evoluted yielding stress
90              sig_tr       = mat.InitialE * ( mat.Strain - eps_p_tr);  % trial stress
91              %-------------------------------------------------------------------------
92              Mark = sig_tr - back_sig_tr;        % Sign operator
93              %-------------------------------------------------------------------------
94              func = abs(Mark) - sy_tr;           % Yielding function
95              %-------------------------------------------------------------------------
96              if (func <= 0)                      % Elastic
97                  mat.PlasticStrain = eps_p_tr;        % updated plastic strain
98                  mat.BackStress    = back_sig_tr;     % updated back stress
99                  mat.sy            = sy_tr;           % evoluted yielding stress
100                 mat.Stress        = sig_tr;          % updated uniaxial stress
101                 mat.TangentE      = mat.InitialE;    % updated tangent modulus
102             elseif (func > 0)                   % Plastic
103                 del_gamma  = func / ( mat.InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
104                 mat.PlasticStrain = eps_p_tr + del_gamma * sign(Mark);
105                 mat.BackStress    = back_sig_tr + del_gamma * mat.Hkin * sign(Mark);
106                 mat.sy            = sy_tr + mat.Hiso * del_gamma;
107                 mat.Stress        = sig_tr - del_gamma * mat.InitialE * sign(Mark);
108                 mat.TangentE      = mat.InitialE * ( mat.Hiso + mat.Hkin ) / ( mat.
    InitialE + mat.Hiso + mat.Hkin );
109             end
110         end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
111
112         function getStress(mat)
113             mat.Stress = mat.Stress;
114         end
115
116         function allocateMemory(mat,totStep)
117             mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
118         end
119
120         function write2file(mat, fid)
121             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
122         end
123
124          function write2mat(mat, fid)
125              uni_e_s = mat.uni_e_s;
126              save(fid, 'uni_e_s');
127          end
128
129         function getPlot(mat,num)
130             figure(num);
131             plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
132             hold on;grid on;box on;
133             xlabel('Strain');
134             ylabel('Stress');
135         end
136
137         function finalPlot(mat,num)
138             figure(num);
139             plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
140             grid on;box on;
141             title('Strain-Stress relationship');
142             xlabel('Strain');
143             ylabel('Stress');
144         end
145
146     end
147 end
```

I.3.5 催眠

```
1 %% ---------------------------------------------------------------
2 % Copyright 2010 All rights reserved.
3 % Program    : Mercury v.2.11
4 % Email      : christopherlsegura@gmail.com
5 % Revision   : May 10, 2011
6 % Written by : Christopher Segura
7 % Filename   : Hysteresis.m
8 %% ---------------------------------------------------------------
9 classdef Hysteresis < handle
10
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;        % material Tag
        Type;       % material Type
        sy_pos0;    % positive yield Stress
        epsy_pos0;  % positive yield Strain
        sy_neg0;    % negative yield Stress
        epsy_neg0;  % negative yield Strain
        cap_pos0;   % positive capping Stress
        ecap_pos0;  % positive capping Strain
        cap_neg0;   % negative capping Stress
        ecap_neg0;  % negative capping Strain
        res_pos;    % positive residual Stress
        eres_pos0;  % positive residual Strain
        res_neg;    % negative residual Stress
        eres_neg0;  % negative residual Strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density
        %% commit variables
        comStress;     % committed Stress from previous step
        comInitialE;       % committed InitialE from previous step
        comStrain;     % committed Strain from previous step
        comsy_pos;     % committed yeild Stress
        comsy_neg;     % committed yeild Stress
        comcap_pos;
        comcap_neg;
        comepsy_pos;   % positive yield Strain
        comepsy_neg;   % negative yield Strain
        comecap_pos;   % positive cap Strain
        comecap_neg;   % negative cap Strain
        comeres_pos;   % positive residual Strain
        comeres_neg;   % negative residual Strain
        comhys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        coms_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        coms_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        coms_tar_pos;   % positive target Stress
        comeps_tar_pos; % positive target Strain
        coms_tar_neg;   % negative target Stress
        comeps_tar_neg; % negative target Strain
        comstate_flag;  % loading branch
        comupdate_flag; % update loading branch
        comreversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        comenrgy_step;  % step i energy dissipated
        comenrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        comE_unld;      % unloading stiffness
        comE_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        comE_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        comeps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        comeps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        comBeta;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
        comBeta_Unld;
        comnorm_hys;
        comn_exc;
        %% update variables
        Stress;     % uniaxial Stress
        InitialE;       % tangent modulus
        Strain;     % uniaxial Strain
        iniE;       % initial modulus
        E_hrd;      % hardening modulus
        E_sof;      % softening modulus
        sy_pos;     % positive yield Stress
        sy_neg;     % negative yield Stress
        cap_pos;    % positive capping Stress
        cap_neg;    % negative capping Stress
        %
        epsy_pos;   % positive yield Strain
        epsy_neg;   % negative yield Strain
        ecap_pos;   % positive cap Strain
        ecap_neg;   % negative cap Strain
        eres_pos;   % positive residual Strain
        eres_neg;   % negative residual Strain
        hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;  % positive refenerence Stress
        s_ref_neg;  % negative refenerence Stress
        %
        s_tar_pos;   % positive target Stress
        eps_tar_pos; % positive target Strain
        s_tar_neg;   % negative target Stress
        eps_tar_neg; % negative target Strain
        state_flag;  % loading branch
        update_flag; % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;  % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;      % unloading stiffness
        E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        eps_pt5;     % positive unloading inflection Strain
        eps_pt10;    % negative unloading inflection Strain
        Beta;        % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;   % unloading modulus dissipation parameter
        norm_hys;    % normalized hysteretic energy
        n_exc;       % number excursions/cycles

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    methods
        function mat = Hysteresis(material)
            mat.Tag          = material.Tag;
            mat.Type         = material.Type;
            mat.sy_pos0      = material.sy_pos0;
            mat.epsy_pos0    = material.epsy_pos0;
            mat.sy_neg0      = material.sy_neg0;
            mat.epsy_neg0    = material.epsy_neg0;
            mat.cap_pos0     = material.cap_pos0;
            mat.ecap_pos0    = material.ecap_pos0;
            mat.cap_neg0     = material.cap_neg0;
            mat.ecap_neg0    = material.ecap_neg0;
            mat.res_pos      = material.res_pos;
            mat.eres_pos0    = material.eres_pos0;
            mat.res_neg      = material.res_neg;
            mat.eres_neg0    = material.eres_neg0;
            mat.lamda_hys    = material.lamda_hys;
            mat.det_rate     = material.det_rate;
            mat.rho          = material.rho;
        end % function Hysteresis

        function Initialization(mat)
            mat.Stress      = 0;
            mat.Strain      = 0;
            mat.sy_pos      = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos    = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE        = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.InitialE        = mat.iniE;
            mat.sy_neg      = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg    = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos     = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos    = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd       = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.epsy_pos0
    );
            mat.cap_neg     = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg    = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.ecap_pos0
    );
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
            mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
            mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
            mat.state_flag = 1;
            mat.update_flag = mat.state_flag;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.reversal_flag = 1;
            mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
            mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
            mat.E_unld = mat.iniE;
            mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
            mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
            mat.eps_pt5   = 0;
            mat.eps_pt10  = 0;
            mat.norm_hys  = 0;
            mat.n_exc     = 0;

        end % function Initialization

        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
            mat.comStress      = mat.Stress;
            mat.comInitialE        = mat.InitialE;
            mat.comStrain      = mat.Strain;
            mat.comsy_pos      = mat.sy_pos;
            mat.comsy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.comcap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.comcap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.comepsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.comepsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.comecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.comecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.comeres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.comeres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.comhys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.coms_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.coms_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.coms_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.comeps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.coms_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.comeps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.comstate_flag  = mat.state_flag;
            mat.comupdate_flag = mat.update_flag;
            mat.comreversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.comenrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.comenrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.comE_unld      = mat.E_unld;
            mat.comE_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.comE_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.comeps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.comeps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.comnorm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.comn_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
210         function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
211             mat.Stress      = mat.comStress;
212             mat.InitialE        = mat.comInitialE;
213             mat.Strain      = mat.comStrain;
214             mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
215             mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
216             mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
217             mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
218             mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
219             mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
220             mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
221             mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
222             mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
223             mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
224             mat.hys_dis_cap = mat.comhys_dis_cap;
225             mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
226             mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
227             mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
228             mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
229             mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
230             mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
231             mat.state_flag  = mat.comstate_flag;
232             mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
233             mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
234             mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
235             mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
236             mat.E_unld      = mat.comE_unld;
237             mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
238             mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
239             mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
240             mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
241             mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
242             mat.n_exc       = mat.comn_exc;
243         end % function revert
244
245         function getStrain(mat, TrialStrain)
246             mat.Strain = TrialStrain;
247         end
248
249         function getTangentE(mat)
250 %             mat.Strain     = mat.comStrain;
251             mat.Stress     = mat.comStress;
252             mat.InitialE       = mat.comInitialE;
253             mat.state_flag = mat.comupdate_flag;
254             mat.update_flag = mat.comupdate_flag;
255             mat.reversal_flag = mat.comreversal_flag;
256             mat.enrgy_step  = mat.comenrgy_step;
257             mat.enrgy_prvs  = mat.comenrgy_prvs;
258             mat.sy_pos      = mat.comsy_pos;
259             mat.sy_neg      = mat.comsy_neg;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.cap_pos     = mat.comcap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.comcap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.comepsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.comepsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.comecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.comecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.comeres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.comeres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.coms_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.coms_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.coms_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.comeps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.coms_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.comeps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.comE_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.comE_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.comE_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.comeps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.comeps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.comnorm_hys;
            mat.n_exc       = mat.comn_exc;
            %-----------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
            %-----------------------------------------------------------------
        if (del_eps >= 0) && (mat.Stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4) % residual
                    ref_Stress = mat.res_pos;
                    ref_Strain = mat.eres_pos;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps < 0) && (mat.Stress > 0) % positive unloading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading(mat);
            elseif (del_eps <= 0) && (mat.Stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9) % residual
                    ref_Stress = mat.res_neg;
                    ref_Strain = mat.eres_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end
            elseif (del_eps > 0) && (mat.Stress < 0) % negative loading
                [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading(mat);
            end

            mat.Stress = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);

            if (mat.comStress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.comStress/mat.Stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.comStress));
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
311                 else % reloading
312                     if (mat.Stress >= 0)
313                         mat.enrgy_step = 0;
314                         step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt10)*mat.Stress;
315                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
316                     else
317                         mat.enrgy_step = 0;
318                         step = 0.5*(mat.Strain - mat.eps_pt5)*mat.Stress;
319                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
320                     end
321                 end
322             else
323                 step = del_eps*(mat.comStress + 0.5*(mat.Stress - mat.comStress));
324             end
325             % update energy in excursions
326             mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
327             mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
328             % normalized hysteretic energy
329             mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;
330 
331         end
332 
333         function getStress(mat)
334             mat.Stress = mat.Stress;
335         end
336 
337         function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
338             switch mat.state_flag
339                 case -1
340                     if (mat.Strain < 0)
341                         mat.update_flag = -1;
342                     elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
343                         mat.update_flag = 1;
344                     elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
345                         mat.update_flag = 2;
346                     elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
347                         mat.update_flag = 3;
348                     else
349                         mat.update_flag = 4;
350                     end
351                 case 1
352                     if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
353                         mat.update_flag = 1;
354                     elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
355                         mat.update_flag = 2;
356                     elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
357                         mat.update_flag = 3;
358                     else
359                         mat.update_flag = 4;
360                     end
361                 case 2
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.Strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_Stress = mat.sy_neg;
                    ref_Strain = mat.epsy_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_Stress = mat.cap_pos;
                    ref_Strain = mat.ecap_pos;
                    mat.InitialE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
413                     ref_Stress = mat.res_pos;
414                     ref_Strain = mat.eres_pos;
415                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
416                 case 9 % residual
417                     ref_Stress = mat.res_neg;
418                     ref_Strain = mat.eres_neg;
419                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
420                 case 11
421                     ref_Stress = mat.comStress;
422                     ref_Strain = mat.comStrain;
423                     mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_Strain);
424             end
425         end % function PositiveLoading
426 
427 
428         function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = PosUnloading( mat )
429 
430             if (mat.state_flag == 1)
431                 if (mat.Strain > 0)
432                     mat.update_flag = 1;
433                 elseif (mat.Strain > mat.epsy_neg)
434                     mat.update_flag = -1;
435                 elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
436                     mat.update_flag = 7;
437                 elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
438                     mat.update_flag = 8;
439                 else
440                     mat.update_flag = 9;
441                 end
442             elseif (mat.state_flag == -1)
443                 if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
444                     mat.update_flag = -1;
445                 elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
446                     mat.update_flag = 7;
447                 elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
448                     mat.update_flag = 8;
449                 else
450                     mat.update_flag = 9;
451                 end
452 %             elseif (mat.state_flag == 4)
453 %                 mat.update_flag = 4;
454             elseif (mat.state_flag == 9)
455                 mat.update_flag = 9;
456             else
457                 % update target state
458                 if (mat.reversal_flag == 1)
459                     if (mat.comStrain > mat.eps_tar_pos)
460                         mat.eps_tar_pos = mat.comStrain;
461                         mat.s_tar_pos   = mat.comStress;
462                     end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
463                 end
464                 % determine Strain at pt 5
465                 mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;
466 
467                 if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
468                     mat.update_flag = 12; % unloading
469                 elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
470                     mat.update_flag = 13; % reloading to target
471                 else
472                     if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
473                         mat.update_flag = 7; % neg hardening
474                     elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
475                         mat.update_flag = 8; % neg softening
476                     else
477                         mat.update_flag = 9; % neg residual
478                     end
479                 end
480             end
481 
482             switch mat.update_flag
483                 case -1
484                     ref_Stress = 0;
485                     ref_Strain = 0;
486                     mat.InitialE   = mat.iniE;
487                 case 1
488                     ref_Stress = mat.sy_pos;
489                     ref_Strain = mat.epsy_pos;
490                     mat.InitialE   = mat.iniE;
491                 case 4
492                     ref_Stress = mat.res_pos;
493                     ref_Strain = mat.eres_pos;
494                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
495                 case 7
496                     ref_Stress = mat.s_tar_neg;
497                     ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
498                     mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
499                 case 8
500                     ref_Stress = mat.cap_neg;
501                     ref_Strain = mat.ecap_neg;
502                     mat.InitialE   = mat.E_sof;
503                 case 9
504                     ref_Stress = mat.res_neg;
505                     ref_Strain = mat.eres_neg;
506                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
507                 case 12
508                     ref_Stress = mat.comStress;
509                     ref_Strain = mat.comStrain;
510                     mat.InitialE   = mat.E_unld;
511                 case 13
512                     ref_Stress = 0;
513                     ref_Strain = mat.eps_pt5;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
514                     mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_Strain);
515             end
516
517             % update unloading modulus
518             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4) && (mat.update_flag ~= 9)
519                 % estimate energy in step
520                 Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);
521                 enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress + 0.5*(
    Stress_new - mat.comStress)));
522                 if (mat.comreversal_flag == 1)
523                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
524                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
525                 end
526                 % determine Strain at pt 5
527                 mat.eps_pt5 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;
528
529                 if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
530                     mat.reversal_flag = -1;
531                     mat.update_flag = 12; %unloading
532                 else
533                     mat.reversal_flag = 1;
534                     % update cyclic parameters on negative side
535                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
536                     mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
537                     mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
538                     mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
539                     mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
540                     mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat
    .E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
541                     mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    ecap_neg);
542                     mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
543                     mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat
    .E_sof);
544                     Stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
545                     if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
546                         mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg -
    mat.epsy_neg);
547                     else
548                         mat.s_tar_neg = Stress_tar_chk;
549                     end
550                     if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
551                         mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
552                         mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
553                     end
554
555                     if (mat.Strain > mat.eps_pt5)
556                         mat.update_flag = 12; %unloading
557                     elseif (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end

                    if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_Stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_Stress = mat.cap_neg;
                        ref_Strain = mat.ecap_neg;
                        mat.InitialE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_Stress = mat.res_neg;
                        ref_Strain = mat.eres_neg;
                        mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_Stress = mat.comStress;
                        ref_Strain = mat.comStrain;
                        mat.InitialE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_Stress = 0;
                        ref_Strain = mat.eps_pt5;
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_Strain);
                end
            end
        end % function PosUnloading

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
608         function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegativeLoading( mat )
609
610             switch mat.state_flag
611                 case 1
612                     if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
613                         mat.update_flag = -1;
614                     elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
615                         mat.update_flag = 7;
616                     elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
617                         mat.update_flag = 8;
618                     else
619                         mat.update_flag = 9;
620                     end
621                 case -1
622                     if (mat.Strain > mat.epsy_neg)
623                         mat.update_flag = -1;
624                     elseif (mat.Strain > mat.ecap_neg)
625                         mat.update_flag = 7;
626                     elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
627                         mat.update_flag = 8;
628                     else
629                         mat.update_flag = 9;
630                     end
631                 case 4
632                     mat.update_flag = 4;
633                 case 7
634                     if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
635                         mat.update_flag = 7;
636                     elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
637                         mat.update_flag = 8;
638                     else
639                         mat.update_flag = 9;
640                     end
641                 case 8
642                     if (mat.Strain > mat.eres_neg)
643                         mat.update_flag = 8;
644                     else
645                         mat.update_flag = 9;
646                     end
647                 case 9
648                     mat.update_flag = 9;
649
650                 otherwise
651                     if (mat.Strain > mat.eps_tar_neg)
652                         mat.update_flag = 13;
653                     else
654                         if (mat.Strain > mat.ecap_neg)
655                             mat.update_flag = 7;
656                         elseif (mat.Strain > mat.eres_neg)
657                             mat.update_flag = 8;
658                         else
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
659                             mat.update_flag = 9;
660                         end
661                     end
662             end
663 
664             switch mat.update_flag
665                 case -1
666                     ref_Stress = 0;
667                     ref_Strain = 0;
668                     mat.InitialE   = mat.iniE;
669                 case 4
670                     ref_Stress = mat.res_pos;
671                     ref_Strain = mat.eres_pos;
672                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
673                 case 7
674                     ref_Stress = mat.s_tar_neg;
675                     ref_Strain = mat.eps_tar_neg;
676                     mat.InitialE   = mat.E_hrd_neg;
677                 case 8
678                     ref_Stress = mat.cap_neg;
679                     ref_Strain = mat.ecap_neg;
680                     mat.InitialE   = mat.E_sof;
681                 case 9
682                     ref_Stress = mat.res_neg;
683                     ref_Strain = mat.eres_neg;
684                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
685                 case 13
686                     ref_Stress = mat.comStress;
687                     ref_Strain = mat.comStrain;
688                     mat.InitialE   = (mat.s_tar_neg - ref_Stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_Strain);
689             end
690         end % function NegativeLoading
691 
692 
693         function [ ref_Stress, ref_Strain, mat ] = NegUnloading( mat )
694 
695             if (mat.state_flag == -1)
696                 if (mat.Strain < 0)
697                     mat.update_flag = -1;
698                 elseif (mat.Strain < mat.epsy_pos)
699                     mat.update_flag = 1;
700                 elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
701                     mat.update_flag = 2;
702                 elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
703                     mat.update_flag = 3;
704                 else
705                     mat.update_flag = 4;
706                 end
707             elseif (mat.state_flag == 1)
708                 if (mat.Strain < mat.epsy_pos)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
%             elseif (mat.state_flag == 9)
%                 mat.update_flag = 9;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.comStrain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.comStrain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.comStress;
                    end
                end
                % determine Strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;

                if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_Stress = mat.sy_neg;
                    ref_Strain = mat.epsy_neg;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_Stress = 0;
                    ref_Strain = 0;
                    mat.InitialE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_Stress = mat.s_tar_pos;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
760                     ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
761                     mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
762                 case 3
763                     ref_Stress = mat.cap_pos;
764                     ref_Strain = mat.ecap_pos;
765                     mat.InitialE   = mat.E_sof;
766                 case 4
767                     ref_Stress = mat.res_pos;
768                     ref_Strain = mat.eres_pos;
769                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
770                 case 9
771                     ref_Stress = mat.res_neg;
772                     ref_Strain = mat.eres_neg;
773                     mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
774                 case 10
775                     ref_Stress = mat.comStress;
776                     ref_Strain = mat.comStrain;
777                     mat.InitialE   = mat.E_unld;
778                 case 11
779                     ref_Stress = 0;
780                     ref_Strain = mat.eps_pt10;
781                     mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_Strain);
782 
783             end
784 
785             % update unloading modulus
786             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4) && (mat.update_flag ~= 9)
787                 % estimate energy in step
788                 Stress_new = ref_Stress + mat.InitialE*(mat.Strain - ref_Strain);
789                 enrgy_step = abs((mat.Strain - mat.comStrain)*(mat.comStress + 0.5*(
    Stress_new - mat.comStress)));
790                 if (mat.comreversal_flag == 1)
791                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
792                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
793                 end
794                 % determine Strain at pt 10
795                 mat.eps_pt10 = mat.comStrain - mat.comStress/mat.E_unld;
796 
797                 if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
798                     mat.reversal_flag = -1;
799                     mat.update_flag = 10; % unloading
800                 else
801                     mat.reversal_flag = 1;
802                     % update cyclic parameters on positive side
803                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
804                     mat.E_hrd_pos    = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
805                     mat.sy_pos       = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
806                     mat.epsy_pos     = mat.sy_pos/mat.iniE;
807                     mat.s_ref_pos    = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (mat
    .E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
                    Stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
                    if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
                        mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
                    else
                        mat.s_tar_pos = Stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
                        mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
                        mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
                    end

                    if (mat.Strain < mat.eps_pt10)
                        mat.update_flag = 10; % unloading
                    elseif (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end

                    if (mat.Strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.Strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.Strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_Stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_Strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.InitialE   = mat.E_hrd_pos;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    case 3
                        ref_Stress = mat.cap_pos;
                        ref_Strain = mat.ecap_pos;
                        mat.InitialE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_Stress = mat.res_pos;
                        ref_Strain = mat.eres_pos;
                        mat.InitialE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_Stress = mat.comStress;
                        ref_Strain = mat.comStrain;
                        mat.InitialE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        ref_Stress = 0;
                        ref_Strain = mat.eps_pt10;
                        mat.InitialE   = (mat.s_tar_pos - ref_Stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_Strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                display('**************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

        function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end % methods

end % classdef
```

I.3.6 修正的吉夫雷 Monegotto Pinto

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%% ---------------------------------------------------------------
classdef ModifiedGiuffreMonegottoPinto < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        InitialE;               % initial moduous
        sy0;                    % initial yielding stress
        b;                      % strain-hardening coefficient
        R0;                     % during first loading, R0 is the value of the parameter R which is dependent on the absolute strain
        cR1;                    % Experimentally determined parameters to be defined together with R0
        cR2;                    % Experimentally determined parameters to be defined together with R0
        a1;                     % isotropic hardening parameter which reflect an increase of the compression yield envelope through a fraction of the yield strength after a plastic strain a2*sy0/InitialE
        a2;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a1
        a3;                     % isotropic hardening parameter which reflect an increase of the tension yield envelope through a fraction of the yield strength after a plastic strain a4*sy0/InitialE
        a4;                     % isotropic hardening parameter with respcect to a3
        rho;                    % density
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStress_r;            % committed Stress_r from previous step
        comStrain_r;            % committed Strain_r from previous step
        comStress_o;            % committed Stress_o from previous step
        comStrain_o;            % committed Strain_o from previous step
        comStrain_max;          % committed Strain_max from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comStrain_m;            % committed Strain_p from previous step
        comflag;                % committed flag from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial strain
        Stress_r;               % stress at the point of strain reversal
        Strain_r;               % strain at the point of strain reversal
        Stress_o;               % stress at the point of intersection of the two asymptotes
        Strain_o;               % strain at the point of intersection of the two asymptotes
        Strain_max;             % maximum strain in analysis of constitutive model
        Strain_min;             % minimum strain in analysis of constitutive model
        Strain_m;               % strain at the previous maximum or minimum strain reversal point
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
48          flag;                   %
49      end
50
51      properties (SetAccess=public)
52          uni_e_s
53          uni_tangentE
54      end
55
56      methods
57          function mat = ModifiedGiuffreMonegottoPinto(material)
58              mat.Tag      = material.Tag;
59              mat.Type     = material.Type;
60              mat.InitialE = material.InitialE;
61              mat.sy0      = material.sy0;
62              mat.b        = material.b;
63              mat.R0       = material.R0;
64              mat.cR1      = material.cR1;
65              mat.cR2      = material.cR2;
66              mat.a1       = material.a1;
67              mat.a2       = material.a2;
68              mat.a3       = material.a3;
69              mat.a4       = material.a4;
70              mat.rho      = material.rho;
71          end
72
73          function Initialization(mat)
74              mat.Stress     = 0;
75              mat.TangentE   = mat.InitialE;
76              mat.Strain     = 0;
77              mat.Stress_r   = 0;
78              mat.Strain_r   = 0;
79              mat.Stress_o   = 0;
80              mat.Strain_o   = 0;
81              mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
82              mat.Strain_min = -mat.sy0/mat.InitialE;
83              mat.Strain_m   = 0;
84              mat.flag       = 0;
85          end
86
87          function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
88              mat.comStress     = mat.Stress;
89              mat.comTangentE   = mat.TangentE;
90              mat.comStrain     = mat.Strain;
91              mat.comStress_r   = mat.Stress_r;
92              mat.comStrain_r   = mat.Strain_r;
93              mat.comStress_o   = mat.Stress_o;
94              mat.comStrain_o   = mat.Strain_o;
95              mat.comStrain_max = mat.Strain_max;
96              mat.comStrain_min = mat.Strain_min;
97              mat.comStrain_m   = mat.Strain_m;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
98              mat.comflag       = mat.flag;
99          end
100
101         function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
102             mat.Stress     = mat.comStress;
103             mat.TangentE   = mat.comTangentE;
104             mat.Strain     = mat.comStrain;
105             mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
106             mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
107             mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
108             mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
109             mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
110             mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
111             mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
112             mat.flag       = mat.comflag;
113         end
114
115         function getStrain(mat, TrialStrain)
116             mat.Strain = TrialStrain;
117         end
118
119         function getTangentE(mat)
120             mat.Stress     = mat.comStress;
121             mat.TangentE   = mat.comTangentE;
122             mat.Stress_r   = mat.comStress_r;
123             mat.Strain_r   = mat.comStrain_r;
124             mat.Stress_o   = mat.comStress_o;
125             mat.Strain_o   = mat.comStrain_o;
126             mat.Strain_max = mat.comStrain_max;
127             mat.Strain_min = mat.comStrain_min;
128             mat.Strain_m   = mat.comStrain_m;
129             mat.flag       = mat.comflag;
130
131             Esh   = mat.b * mat.InitialE;
132             eps_y = mat.sy0/mat.InitialE;
133
134             del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
135
136             if (mat.flag == 0)
137                 if ( del_eps == 0 ) mat.flag  = 0;
138                 elseif ( del_eps > 0 )
139                     mat.flag       = 1;
140                     mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
141                     mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
142                     mat.Strain_o   =  mat.Strain_max;
143                     mat.Stress_o   =  mat.sy0;
144                     mat.Strain_m   =  mat.Strain_max;
145                     mat.common(eps_y);
146                 elseif ( del_eps < 0 )
147                     mat.flag        = -1;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    mat.Strain_max =  mat.sy0/mat.InitialE;
                    mat.Strain_min = -mat.Strain_max;
                    mat.Strain_o   =  mat.Strain_min;
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0;
                    mat.Strain_m   =  mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
                end
            elseif (mat.flag == 1)
                if ( del_eps > 0 )
                    mat.flag = 1;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps < 0 )
                    % reversal ( + -> - )
                    mat.flag       = -1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_max = max(mat.Strain_max, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a1 * ( (mat.Strain_max - mat.Strain_min
)/(2.0*mat.a2*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (-mat.sy0 * shift + Esh * eps_y * shift - mat.
Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = -mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o + eps_y *
shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_min;
                    mat.common(eps_y);
                end
            elseif (mat.flag == -1)
                if ( del_eps < 0 )
                    mat.flag = -1;
                    mat.common(eps_y);
                elseif ( del_eps > 0 )
                    mat.flag       = 1;
                    mat.Strain_r   = mat.comStrain;
                    mat.Stress_r   = mat.comStress;
                    mat.Strain_min = min(mat.Strain_min, mat.comStrain);
                    shift          = 1 + mat.a3 * ( (mat.Strain_max-mat.Strain_min
)/(2.0*mat.a4*eps_y) )^0.8;
                    mat.Strain_o   = (mat.sy0 * shift - Esh * eps_y * shift - mat.
Stress_r + mat.InitialE * mat.Strain_r) / (mat.InitialE - Esh);
                    mat.Stress_o   = mat.sy0 * shift + Esh * (mat.Strain_o - eps_y *
shift);
                    mat.Strain_m   = mat.Strain_max;
                    mat.common(eps_y);
                end
            end
        end

        function common(mat,eps_y)
            xi     = abs( (mat.Strain_m - mat.Strain_o)/ eps_y );
            R      = mat.R0 - mat.R0*mat.cR1*xi/(mat.cR2+xi);
            e_rate = (mat.Strain - mat.Strain_r)/(mat.Strain_o - mat.Strain_r);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            dummy1 = 1.0 + abs(e_rate)^R;
            dummy2 = dummy1^(1/R);
            mat.Stress   = mat.b * e_rate + (1.0 - mat.b) * e_rate/dummy2;
            mat.Stress   = mat.Stress * (mat.Stress_o - mat.Stress_r) + mat.Stress_r;
            mat.TangentE = mat.b + (1.0 - mat.b)/(dummy1 * dummy2);
            mat.TangentE = mat.TangentE * (mat.Stress_o - mat.Stress_r)/(mat.Strain_o -
    mat.Strain_r);
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.7 改造城区公园

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Program    : Mercury v.2.01
% Email      : kkd0724@hanafos.com
% Revision   : November 16, 2010
% Written by : Dae-Hung Kang
%% -----------------------------------------------------------------
classdef ModifiedKentPark < handle

    properties (SetAccess=private)
        % Input variables
        Tag;                    % material tag
        Type;                   % material type
        sc;                     % maximum compressive concrete stress
        ec;                     % compressive strain when compressive stress reaches
    maximum compressive one
        scu;                    % compressive stress at 20 % of maximum compressive one
        ecu;                    % compressive strain with respect to compressive stress
    at 20 % of maximum compressive stress
        lambda;                 % historical factor
        st;                     % maximum tensile concrete stress
        Ets;                    % tensile concrete modulus
        rho;                    % density
        % Computed variable with input variables
        InitialEc;              % Initial compressive concrete modulus
        % commit variables
        comStress;              % committed Stress from previous step
        comTangentE;            % committed TangentE from previous step
        comStrain;              % committed Strain from previous step
        comStrain_min;          % committed Strain_min from previous step
        comdelta_Strain_pt;     % committed delta_Strain_pt from previous step
        % update variables
        Stress;                 % uniaxial stress
        TangentE;               % tangent modulus
        Strain;                 % uniaxial stress
        Strain_min;             % minimum stress in analysis of constitutive model
        delta_Strain_pt;        % strain with respect to incremental strain at previous
    step
    end

    properties (SetAccess=public)
        uni_e_s
        uni_tangentE
    end

    methods
        function mat = ModifiedKentPark(material)
            mat.Tag    = material.Tag;
            mat.Type   = material.Type;
            mat.sc     = material.sc;
            mat.ec     = material.ec;
            mat.scu    = material.scu;
            mat.ecu    = material.ecu;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
51            mat.lambda = material.lambda;
52            mat.st     = material.st;
53            mat.Ets    = material.Ets;
54            mat.rho    = material.rho;
55        end
56
57        function Initialization(mat)
58            mat.Stress          = 0;
59            mat.InitialEc       = 2*mat.sc/mat.ec;
60            mat.TangentE        = mat.InitialEc;
61            mat.Strain          = 0;
62            mat.Strain_min      = 0;
63            mat.delta_Strain_pt = 0;
64        end
65
66        function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
67            mat.comStress          = mat.Stress;
68            mat.comTangentE        = mat.TangentE;
69            mat.comStrain          = mat.Strain;
70            mat.comStrain_min      = mat.Strain_min;
71            mat.comdelta_Strain_pt = mat.delta_Strain_pt;
72        end
73
74        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
75            mat.Stress          = mat.comStress;
76            mat.TangentE        = mat.comTangentE;
77            mat.Strain          = mat.comStrain;
78            mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
79            mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;
80        end
81
82        function getStrain(mat, TrialStrain)
83            mat.Strain = TrialStrain;
84        end
85
86        function getTangentE(mat)
87            mat.Stress          = mat.comStress;
88            mat.TangentE        = mat.TangentE;
89            mat.Strain_min      = mat.comStrain_min;
90            mat.delta_Strain_pt = mat.comdelta_Strain_pt;
91
92            del_eps = mat.Strain - mat.comStrain;
93
94            if ( abs(del_eps) > 2.220446049250313e-016 )
95                if (mat.Strain < mat.Strain_min)
96                    [mat.Stress,mat.TangentE] = mat.compression(mat.Strain);
97                    mat.Strain_min = mat.Strain;
98                else
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    eps_R = (mat.scu-mat.lambda*mat.InitialEc*mat.ecu)/(mat.InitialEc
    *(1.0-mat.lambda));
                    sig_R = mat.InitialEc * eps_R;
                    [sig_p_min, dummy] = mat.compression(mat.Strain_min);
                    E_R    = (sig_p_min - sig_R)/(mat.Strain_min - eps_R);
                    eps_pt = mat.Strain_min - sig_p_min/E_R;
                    if (mat.Strain < eps_pt)
                        sig_min      = sig_p_min + E_R * (mat.Strain - mat.Strain_min);
                        sig_max      = E_R * 0.5 * (mat.Strain - eps_pt);
                        mat.Stress   = mat.comStress + mat.InitialEc * del_eps;
                        mat.TangentE = mat.InitialEc;
                        if (mat.Stress < sig_min)
                            mat.Stress   = sig_min;
                            mat.TangentE = E_R;
                        end
                        if (mat.Stress >= sig_max)
                            mat.Stress = sig_max;
                            mat.TangentE = 0.5*E_R;
                        end
                    else
                        eps_pn = eps_pt + mat.delta_Strain_pt;
                        if (mat.Strain <= eps_pn)
                            [sig_cn, mat.TangentE] = mat.tension(mat.delta_Strain_pt);
                            if (mat.delta_Strain_pt ~= 0.0)
                                mat.TangentE = sig_cn/mat.delta_Strain_pt;
                            else
                                mat.TangentE = mat.InitialEc;
                            end
                            mat.Stress = mat.TangentE * (mat.Strain - eps_pt);
                        else
                            del_eps = mat.Strain - eps_pt;
                            [mat.Stress, mat.TangentE] = mat.tension(del_eps);
                            mat.delta_Strain_pt = del_eps;
                        end
                    end
                end
            end
        end

        function [sigma, modulus]=compression(mat, epsilon)
            ratLocal = epsilon/mat.ec;
            if (epsilon >= mat.ec)
                sigma   = mat.sc * ratLocal * (2.0 - ratLocal);
                modulus = mat.InitialEc * (1.0 - ratLocal);
            else
                if (epsilon > mat.ecu)
                    sigma   = (mat.scu - mat.sc) * (epsilon - mat.ec) / (mat.ecu - mat.
    ec) + mat.sc;
                    modulus = (mat.scu - mat.sc) / (mat.ecu - mat.ec);
                else
                    sigma   = mat.scu;
```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
                    modulus = 2.2204460492503131e-016;
                end
            end
        end

        function [sigma, modulus]=tension(mat, delta_epsilon)
            eps0 = mat.st/mat.InitialEc;
            epsu = mat.st * (1.0/mat.Ets + 1.0/mat.InitialEc);
            if (delta_epsilon <= eps0)
                sigma = delta_epsilon * mat.InitialEc;
                modulus = mat.InitialEc;
            else
                if (delta_epsilon<=epsu)
                    sigma   = mat.st - mat.Ets * (delta_epsilon-eps0);
                    modulus = -mat.Ets;
                else
                    sigma   = 0.0;
                    modulus = 2.2204460492503131e-016;
                end
            end
        end

        function getStress(mat)
            mat.Stress = mat.Stress;
        end

        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_e_s(1:totStep,1:2)    = 0;
        end

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.Strain, mat.Stress);
        end

         function write2mat(mat, fid)
             uni_e_s = mat.uni_e_s;
             save(fid, 'uni_e_s');
         end

        function getPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.Strain, mat.Stress,'o');
            hold on;grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

        function finalPlot(mat,num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_e_s(:,1), mat.uni_e_s(:,2));
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            grid on;box on;
            title('Strain-Stress relationship');
            xlabel('Strain');
            ylabel('Stress');
        end

    end
end
```

I.3.8 伊巴拉

I.3.8.1 催眠

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : Hysteresis.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef Hysteresis < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;        % material tag
        type;       % material type
        sy_pos0;    % positive yield stress
        epsy_pos0;  % positive yield strain
        sy_neg0;    % negative yield stress
        epsy_neg0;  % negative yield strain
        cap_pos0;   % positive capping stress
        ecap_pos0;  % positive capping strain
        cap_neg0;   % negative capping stress
        ecap_neg0;  % negative capping strain
        res_pos;    % positive residual stress
        eres_pos0;  % positive residual strain
        res_neg;    % negative residual stress
        eres_neg0;  % negative residual strain
        lamda_hys;  % hysteretic disipation constant
        det_rate;   % hysteresis deterioration exponent "c"
        rho;        % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
37
38      properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
39          %% update variables
40          stress;     % uniaxial stress
41          tanE;       % tangent modulus
42          strain;     % uniaxial strain
43          iniE;       % initial modulus
44          E_hrd;      % hardening modulus
45          E_sof;      % softening modulus
46          sy_pos;     % positive yield stress
47          sy_neg;     % negative yield stress
48          cap_pos;    % positive capping stress
49          cap_neg;    % negative capping stress
50          %
51          epsy_pos;   % positive yield strain
52          epsy_neg;   % negative yield strain
53          ecap_pos;   % positive cap strain
54          ecap_neg;   % negative cap strain
55          eres_pos;   % positive residual strain
56          eres_neg;   % negative residual strain
57          hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
58          s_ref_pos;  % positive refenerence stress
59          s_ref_neg;  % negative refenerence stress
60          %
61          s_tar_pos;   % positive target stress
62          eps_tar_pos; % positive target strain
63          s_tar_neg;   % negative target stress
64          eps_tar_neg; % negative target strain
65          state_flag;  % loading branch
66          update_flag; % update loading branch
67          reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
68          enrgy_step;  % step i energy dissipated
69          enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
70          E_unld;      % unloading stiffness
71          E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
72          E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
73          eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
74          eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
75          Beta;        % hysteretic dissipation parameter
76          Beta_Unld;   % unloading modulus dissipation parameter
77          norm_hys;    % normalized hysteretic energy
78          n_exc;       % number excursions/cycles
79
80          %% commit variables
81          com_stress;     % committed stress from previous step
82          com_tanE;       % committed tanE from previous step
83          com_strain;     % committed strain from previous step
84          com_sy_pos;     % committed yeild stress
85          com_sy_neg;     % committed yeild stress
86          com_cap_pos;
87          com_cap_neg;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
        com_Beta_Unld;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;

    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = Hysteresis(info)
            mat.tag         = info{1};
            mat.type        = info{2};
            mat.sy_pos0     = info{3};
            mat.epsy_pos0   = info{4};
            mat.sy_neg0     = info{5};
            mat.epsy_neg0   = info{6};
            mat.cap_pos0    = info{7};
            mat.ecap_pos0   = info{8};
            mat.cap_neg0    = info{9};
            mat.ecap_neg0   = info{10};
            mat.res_pos     = info{11};
            mat.eres_pos0   = info{12};
            mat.res_neg     = info{13};
            mat.eres_neg0   = info{14};
            mat.lamda_hys   = info{15};
            mat.det_rate    = info{16};
            mat.rho         = info{17};
            mat.Initialization();

```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
139         end % function Hysteresis
140 
141         function Initialization(mat)
142             mat.stress     = 0;
143             mat.strain     = 0;
144             mat.sy_pos     = mat.sy_pos0;
145             mat.epsy_pos   = mat.epsy_pos0;
146             mat.iniE       = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
147             mat.tanE       = mat.iniE;
148             mat.sy_neg     = mat.sy_neg0;
149             mat.epsy_neg   = mat.epsy_neg0;
150             mat.cap_pos    = mat.cap_pos0;
151             mat.ecap_pos   = mat.ecap_pos0;
152             mat.E_hrd      = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.epsy_pos0
    );
153             mat.cap_neg    = mat.cap_neg0;
154             mat.ecap_neg   = mat.ecap_neg0;
155             mat.eres_pos   = mat.eres_pos0;
156             mat.eres_neg   = mat.eres_neg0;
157             mat.E_sof      = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.ecap_pos0
    );
158             mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
159             mat.s_ref_pos = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
160             mat.s_ref_neg = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
161             % initialize variables
162             mat.s_tar_pos = mat.sy_pos;
163             mat.eps_tar_pos = mat.epsy_pos;
164             mat.s_tar_neg = mat.sy_neg;
165             mat.eps_tar_neg = mat.epsy_neg;
166             mat.state_flag = 1;
167             mat.update_flag = mat.state_flag;
168             mat.reversal_flag = 1;
169             mat.enrgy_step = 0;  % step i energy dissipated
170             mat.enrgy_prvs = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
171             mat.E_unld = mat.iniE;
172             mat.E_hrd_pos = mat.E_hrd;
173             mat.E_hrd_neg = mat.E_hrd;
174             mat.eps_pt5    = 0;
175             mat.eps_pt10   = 0;
176             mat.norm_hys   = 0;
177             mat.n_exc      = 0;
178 
179         end % function Initialization
180 
181         function commit(mat)     % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
182             mat.com_stress      = mat.stress;
183             mat.com_tanE        = mat.tanE;
184             mat.com_strain      = mat.strain;
185             mat.com_sy_pos      = mat.sy_pos;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.com_sy_neg      = mat.sy_neg;
            mat.com_cap_pos     = mat.cap_pos;
            mat.com_cap_neg     = mat.cap_neg;
            mat.com_epsy_pos    = mat.epsy_pos;
            mat.com_epsy_neg    = mat.epsy_neg;
            mat.com_ecap_pos    = mat.ecap_pos;
            mat.com_ecap_neg    = mat.ecap_neg;
            mat.com_eres_pos    = mat.eres_pos;
            mat.com_eres_neg    = mat.eres_neg;
            mat.com_hys_dis_cap = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos   = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg   = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos   = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg   = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag  = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step  = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs  = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld      = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos   = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg   = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5     = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10    = mat.eps_pt10;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain     = TrialStrain;
            mat.stress     = mat.com_stress;
            mat.tanE       = mat.com_tanE;
            mat.state_flag = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-----------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-----------------------------------------------------------------
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
287             if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
288                 if (mat.state_flag == 4) % residual
289                     ref_stress = mat.res_pos;
290                     ref_strain = mat.eres_pos;
291                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
292                 else
293                     [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
294                 end
295             elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
296                 [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);
297             elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
298                 if (mat.state_flag == 9) % residual
299                     ref_stress = mat.res_neg;
300                     ref_strain = mat.eres_neg;
301                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
302                 else
303                     [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
304                 end
305             elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
306                 [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);
307             end
308 
309             mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
310 
311             if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
312                 if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
313                     step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
314                 else % reloading
315                     if (mat.stress >= 0)
316                         mat.enrgy_step = 0;
317                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
318                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
319                     else
320                         mat.enrgy_step = 0;
321                         step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
322                         mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
323                     end
324                 end
325             else
326                 step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
327             end
328             % update energy in excursions
329             mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
330             mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
331             % normalized hysteretic energy
332             mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;
333 
334         end % function materialStateDetermination
335 
336 
337         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
338             switch mat.state_flag
339                 case -1
340                     if (mat.strain < 0)
341                         mat.update_flag = -1;
342                     elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
343                         mat.update_flag = 1;
344                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
345                         mat.update_flag = 2;
346                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
347                         mat.update_flag = 3;
348                     else
349                         mat.update_flag = 4;
350                     end
351                 case 1
352                     if (mat.strain < mat.epsy_pos)
353                         mat.update_flag = 1;
354                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
355                         mat.update_flag = 2;
356                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
357                         mat.update_flag = 3;
358                     else
359                         mat.update_flag = 4;
360                     end
361                 case 2
362                     if (mat.strain < mat.ecap_pos)
363                         mat.update_flag = 2;
364                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
365                         mat.update_flag = 3;
366                     else
367                         mat.update_flag = 4;
368                     end
369                 case 3
370                     if (mat.strain < mat.eres_pos)
371                         mat.update_flag = 3;
372                     else
373                         mat.update_flag = 4;
374                     end
375                 case 4
376                     mat.update_flag = 4;
377                 case 9
378                     mat.update_flag = 9;
379 
380                 otherwise
381                     if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
382                         mat.update_flag = 11;
383                     else
384                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
385                             mat.update_flag = 2;
386                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
387                             mat.update_flag = 3;
388                         else
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end


            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain > 0)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
                    mat.update_flag = 7;
                elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                    mat.update_flag = 8;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
439                 else
440                     mat.update_flag = 9;
441                 end
442             elseif (mat.state_flag == -1)
443                 if (mat.strain > mat.epsy_neg)
444                     mat.update_flag = -1;
445                 elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
446                     mat.update_flag = 7;
447                 elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
448                     mat.update_flag = 8;
449                 else
450                     mat.update_flag = 9;
451                 end
452             elseif (mat.state_flag == 9)
453                 mat.update_flag = 9;
454             else
455                 % update target state
456                 if (mat.reversal_flag == 1)
457                     if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
458                         mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
459                         mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
460                     end
461                 end
462                 % determine strain at pt 5
463                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
464 
465                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
466                     mat.update_flag = 12; % unloading
467                 elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
468                     mat.update_flag = 13; % reloading to target
469                 else
470                     if (mat.strain > mat.ecap_neg)
471                         mat.update_flag = 7; % neg hardening
472                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
473                         mat.update_flag = 8; % neg softening
474                     else
475                         mat.update_flag = 9; % neg residual
476                     end
477                 end
478             end
479 
480             switch mat.update_flag
481                 case -1
482                     ref_stress = 0;
483                     ref_strain = 0;
484                     mat.tanE   = mat.iniE;
485                 case 1
486                     ref_stress = mat.sy_pos;
487                     ref_strain = mat.epsy_pos;
488                     mat.tanE   = mat.iniE;
489                 case 4
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
            end

            % update unloading modulus
            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    9)

                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update cyclic parameters on negative side
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.7172e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat
    .E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.2971e-24, mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    =  min(-1.0922e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat
    .E_sof);
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg -
    mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                        mat.update_flag = 12; %unloading
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end

                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
584                         ref_stress = mat.s_tar_neg;
585                         ref_strain = mat.eps_tar_neg;
586                         mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
587                     case 8
588                         ref_stress = mat.cap_neg;
589                         ref_strain = mat.ecap_neg;
590                         mat.tanE   = mat.E_sof;
591                     case 9
592                         ref_stress = mat.res_neg;
593                         ref_strain = mat.eres_neg;
594                         mat.tanE   = mat.iniE/100000;
595                     case 12
596                         ref_stress = mat.com_stress;
597                         ref_strain = mat.com_strain;
598                         mat.tanE   = mat.E_unld;
599                     case 13
600                         ref_stress = 0;
601                         ref_strain = mat.eps_pt5;
602                         mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
603                 end
604             end
605         end % function PosUnloading
606 
607 
608         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )
609 
610             switch mat.state_flag
611                 case 1
612                     if (mat.strain > mat.epsy_neg)
613                         mat.update_flag = -1;
614                     elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
615                         mat.update_flag = 7;
616                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
617                         mat.update_flag = 8;
618                     else
619                         mat.update_flag = 9;
620                     end
621                 case -1
622                     if (mat.strain > mat.epsy_neg)
623                         mat.update_flag = -1;
624                     elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
625                         mat.update_flag = 7;
626                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
627                         mat.update_flag = 8;
628                     else
629                         mat.update_flag = 9;
630                     end
631                 case 4
632                     mat.update_flag = 4;
633                 case 7
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7;
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 8
                    if (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8;
                    else
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
685                 case 13
686                     ref_stress = mat.com_stress;
687                     ref_strain = mat.com_strain;
688                     mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
689             end
690         end % function NegativeLoading
691 
692 
693         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )
694 
695             if (mat.state_flag == -1)
696                 if (mat.strain < 0)
697                     mat.update_flag = -1;
698                 elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
699                     mat.update_flag = 1;
700                 elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
701                     mat.update_flag = 2;
702                 elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
703                     mat.update_flag = 3;
704                 else
705                     mat.update_flag = 4;
706                 end
707             elseif (mat.state_flag == 1)
708                 if (mat.strain < mat.epsy_pos)
709                     mat.update_flag = 1;
710                 elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
711                     mat.update_flag = 2;
712                 elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
713                     mat.update_flag = 3;
714                 else
715                     mat.update_flag = 4;
716                 end
717             elseif (mat.state_flag == 4)
718                 mat.update_flag = 4;
719             else
720                 % update target state
721                 if (mat.reversal_flag == 1)
722                     if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
723                         mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
724                         mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
725                     end
726                 end
727                 % determine strain at pt 10
728                 mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
729 
730                 if (mat.strain < mat.eps_pt10)
731                     mat.update_flag = 10; % unloading
732                 else
733                     if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
734                         mat.update_flag = 11;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
735                     else
736                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
737                             mat.update_flag = 2;
738                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
739                             mat.update_flag = 3;
740                         else
741                             mat.update_flag = 4;
742                         end
743                     end
744                 end
745             end
746 
747             switch mat.update_flag
748                 case -1
749                     ref_stress = mat.sy_neg;
750                     ref_strain = mat.epsy_neg;
751                     mat.tanE   = mat.iniE;
752                 case 1
753                     ref_stress = 0;
754                     ref_strain = 0;
755                     mat.tanE   = mat.iniE;
756                 case 2
757                     ref_stress = mat.s_tar_pos;
758                     ref_strain = mat.eps_tar_pos;
759                     mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
760                 case 3
761                     ref_stress = mat.cap_pos;
762                     ref_strain = mat.ecap_pos;
763                     mat.tanE   = mat.E_sof;
764                 case 4
765                     ref_stress = mat.res_pos;
766                     ref_strain = mat.eres_pos;
767                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
768                 case 9
769                     ref_stress = mat.res_neg;
770                     ref_strain = mat.eres_neg;
771                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
772                 case 10
773                     ref_stress = mat.com_stress;
774                     ref_strain = mat.com_strain;
775                     mat.tanE   = mat.E_unld;
776                 case 11
777                     ref_stress = 0;
778                     ref_strain = mat.eps_pt10;
779                     mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
780 
781             end
782 
783             % update unloading modulus
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
784             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4)
785                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
786                     % estimate energy in step
787                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
788                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
789                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
790                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
791                 end
792                 % determine strain at pt 10
793                 mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
794
795                 if (mat.strain < mat.eps_pt10)
796                     mat.reversal_flag = -1;
797                     mat.update_flag = 10; % unloading
798                 else
799                     mat.reversal_flag = 1;
800                     % update cyclic parameters on positive side
801                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
802                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
803                     mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
804                     mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
805                     mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
806                     mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
807                     mat.ecap_pos    = max(1.12961e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (mat
    .E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
808                     mat.cap_pos     = max(1.09123e-26, mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
809                     mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
810                     mat.eres_pos    = max(1.95315e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
811                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
812                     if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
813                         mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
814                     else
815                         mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
816                     end
817                     if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
818                         mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
819                         mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
820                     end
821
822                     if (mat.strain < mat.eps_pt10)
823                         mat.update_flag = 10; % unloading
824                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
825                         mat.update_flag = 11; % reloading to target
826                     else
827                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
828                             mat.update_flag = 2; % hardening
829                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
830                             mat.update_flag = 3; % softening
831                         else
832                             mat.update_flag = 4; % residual
833                         end
834                     end
835 
836                     if (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
837                         mat.update_flag = 11; % reloading to target
838                     else
839                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
840                             mat.update_flag = 2; % hardening
841                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
842                             mat.update_flag = 3; % softening
843                         else
844                             mat.update_flag = 4; % residual
845                         end
846                     end
847                 end
848 
849                 switch mat.update_flag
850                     case 2
851                         ref_stress = mat.s_tar_pos;
852                         ref_strain = mat.eps_tar_pos;
853                         mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
854                     case 3
855                         ref_stress = mat.cap_pos;
856                         ref_strain = mat.ecap_pos;
857                         mat.tanE   = mat.E_sof;
858                     case 4
859                         ref_stress = mat.res_pos;
860                         ref_strain = mat.eres_pos;
861                         mat.tanE   = mat.iniE/100000;
862                     case 10
863                         ref_stress = mat.com_stress;
864                         ref_strain = mat.com_strain;
865                         mat.tanE   = mat.E_unld;
866                     case 11
867                         ref_stress = 0;
868                         ref_strain = mat.eps_pt10;
869                         mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
870                 end
871             end
872         end % function NegUnloading
873 
874 
875         function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )
876 
877             % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
878             E_t     = mat.hys_dis_cap;
879             E_step  = enrgy_step;
880             c       = mat.det_rate;
881             E_pre   = mat.enrgy_prvs;
882 
883             mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
884             mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;
885 
886             if (mat.Beta > 1)
887                 mat.Beta = 0.999;
888                 display('**************************')
889                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
890                 display('**************************')
891             elseif (mat.Beta < 0)
892                 mat.Beta = 0.999;
893                 display('**************************')
894                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
895                 display('**************************')
896             end
897             if (mat.Beta_Unld > 1)
898                 mat.Beta_Unld = 0.999;
899                 display('**************************')
900                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
901                 display('**************************')
902             elseif (mat.Beta_Unld < 0)
903                 mat.Beta_Unld = 0.999;
904                 display('**************************')
905                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
906                 display('**************************')
907             end
908 
909         end % function BetaFunc
910 
911 
912         function allocateMemory(mat,totStep)
913             mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
914         end % function allocateMemory
915 
916         function write2storage(mat,istep)
917             mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
918         end % function write2storage
919 
920         function write2file(mat, fid)
921             fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
922         end % function write2file
923 
924         function write2mat(mat, fid)
925             uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
926             save(fid, 'uni_strain_stress');
927         end % function write2mat
928 
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.8.2 混凝土 Pinch

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : HysteresisPinch.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
        cap_pos;        % positive capping stress
        cap_neg;        % negative capping stress
        epsy_pos;       % positive yield strain
        epsy_neg;       % negative yield strain
        ecap_pos;       % positive cap strain
        ecap_neg;       % negative cap strain
        eres_pos;       % positive residual strain
        eres_neg;       % negative residual strain
        hys_dis_cap;    % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;      % positive refenerence stress
        s_ref_neg;      % negative refenerence stress
        s_tar_pos;      % positive target stress
        eps_tar_pos;    % positive target strain
        s_tar_neg;      % negative target stress
        eps_tar_neg;    % negative target strain
        state_flag;     % loading branch
        update_flag;    % update loading branch
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;     % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;     % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;         % unloading stiffness
        E_hrd_pos;      % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;      % negative hardening stiffness
        eps_pt5;        % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;       % negative unloading inflection strain
        Beta;           % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;      % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;    % positive break point reference stress
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
78          s_bpref_neg;    % negative break point reference stress
79          eps_bp_pos;     % positive break point strain
80          eps_bp_neg;     % negative break point strain
81          s_bp_pos;       % positive break point stress
82          s_bp_neg;       % negative break point stress
83          norm_hys;       % normalized hysteretic energy
84          n_exc;          % number excursions/cycles
85          %% commit variables
86          % inputs
87          com_stress;     % committed stress from previous step
88          com_tanE;       % committed tanE from previous step
89          com_strain;     % committed strain from previous step
90          com_sy_pos;     % committed yeild stress
91          com_sy_neg;     % committed yeild stress
92          com_cap_pos;
93          com_cap_neg;
94          com_epsy_pos;   % positive yield strain
95          com_epsy_neg;   % negative yield strain
96          com_ecap_pos;   % positive cap strain
97          com_ecap_neg;   % negative cap strain
98          com_eres_pos;   % positive residual strain
99          com_eres_neg;   % negative residual strain
100         com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
101         com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
102         com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
103         com_s_tar_pos;   % positive target stress
104         com_eps_tar_pos; % positive target strain
105         com_s_tar_neg;   % negative target stress
106         com_eps_tar_neg; % negative target strain
107         com_state_flag;  % loading branch
108         com_update_flag; % update loading branch
109         com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
110         com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
111         com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
112         com_E_unld;      % unloading stiffness
113         com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
114         com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
115         com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
116         com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
117         com_Beta;
118         com_Beta_Unld;
119         com_s_bpref_pos;
120         com_s_bpref_neg;
121         com_eps_bp_pos;
122         com_eps_bp_neg;
123         com_s_bp_pos;
124         com_s_bp_neg;
125         com_norm_hys;
126         com_n_exc;
127     end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
128
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag          = info{1};
            mat.type         = info{2};
            mat.sy_pos0      = info{3};
            mat.epsy_pos0    = info{4};
            mat.sy_neg0      = info{5};
            mat.epsy_neg0    = info{6};
            mat.cap_pos0     = info{7};
            mat.ecap_pos0    = info{8};
            mat.cap_neg0     = info{9};
            mat.ecap_neg0    = info{10};
            mat.res_pos      = info{11};
            mat.eres_pos0    = info{12};
            mat.res_neg      = info{13};
            mat.eres_neg0    = info{14};
            mat.lamda_hys    = info{15};
            mat.det_rate     = info{16};
            mat.kappa_f      = info{17};
            mat.kappa_d      = info{18};
            mat.rho          = info{19};
            mat.Initialization();

        end % function HysteresisPinch

        function Initialization(mat)
            mat.stress       = 0;
            mat.strain       = 0;
            mat.sy_pos       = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos     = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE         = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE         = mat.iniE;
            mat.sy_neg       = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg     = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos      = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos     = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd        = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.
    epsy_pos0);
            mat.cap_neg      = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg     = mat.ecap_neg0;
            mat.eres_pos     = mat.eres_pos0;
            mat.eres_neg     = mat.eres_neg0;
            mat.E_sof        = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.
    ecap_pos0);
            mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
            mat.s_ref_pos    = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
            mat.s_ref_neg    = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
            % initialize variables
            mat.s_tar_pos        = mat.sy_pos;
            mat.eps_tar_pos      = mat.epsy_pos;
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
177             mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
178             mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
179             mat.state_flag      = 1;
180             mat.update_flag     = mat.state_flag;
181             mat.reversal_flag   = 1;
182             mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
183             mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
184             mat.E_unld          = mat.iniE;
185             mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
186             mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
187             mat.eps_pt5         = 0;
188             mat.eps_pt10        = 0;
189             mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
190             mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
191             mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
192             mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
193             mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.eps_tar_pos -
    mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
194             mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.eps_tar_neg - mat
    .eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
195             mat.norm_hys        = 0;
196             mat.n_exc           = 0;
197
198         end % function Initialization
199
200         function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
201             mat.com_stress          = mat.stress;
202             mat.com_tanE            = mat.tanE;
203             mat.com_strain          = mat.strain;
204             mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
205             mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
206             mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
207             mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
208             mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
209             mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
210             mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
211             mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
212             mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
213             mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
214             mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
215             mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
216             mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
217             mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
218             mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
219             mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
220             mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
221             mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
222             mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
223             mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
224             mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain          = TrialStrain;
            mat.stress          = mat.com_stress;
            mat.tanE            = mat.com_tanE;
            mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-------------------------------------------------------------
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);

            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
377         end % function materialStateDetermination
378 
379 
380         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)
381 
382             switch mat.state_flag
383                 case -1
384                     if (mat.strain < 0)
385                         mat.update_flag = -1;
386                     elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
387                         mat.update_flag = 1;
388                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
389                         mat.update_flag = 2;
390                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
391                         mat.update_flag = 3;
392                     else
393                         mat.update_flag = 4;
394                     end
395                 case 1
396                     if (mat.strain < mat.epsy_pos)
397                         mat.update_flag = 1;
398                     elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
399                         mat.update_flag = 2;
400                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
401                         mat.update_flag = 3;
402                     else
403                         mat.update_flag = 4;
404                     end
405                 case 2
406                     if (mat.strain < mat.ecap_pos)
407                         mat.update_flag = 2;
408                     elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
409                         mat.update_flag = 3;
410                     else
411                         mat.update_flag = 4;
412                     end
413                 case 3
414                     if (mat.strain < mat.eres_pos)
415                         mat.update_flag = 3;
416                     else
417                         mat.update_flag = 4;
418                     end
419                 case 4
420                     mat.update_flag = 4;
421                 case 9
422                     mat.update_flag = 9;
423 
424                 otherwise
425                     if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
426                         mat.update_flag = 21;
427                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                case 21 % loading to break point
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
            end
        end % function PositiveLoading


```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
477         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )
478 
479             if (mat.state_flag == 1)
480                 if (mat.strain > 0)
481                     mat.update_flag = 1;
482                 elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
483                     mat.update_flag = -1;
484                 elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
485                     mat.update_flag = 7;
486                 elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
487                     mat.update_flag = 8;
488                 else
489                     mat.update_flag = 9;
490                 end
491             elseif (mat.state_flag == -1)
492                 if (mat.strain > mat.epsy_neg)
493                     mat.update_flag = -1;
494                 elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
495                     mat.update_flag = 7;
496                 elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
497                     mat.update_flag = 8;
498                 else
499                     mat.update_flag = 9;
500                 end
501             elseif (mat.state_flag == 9)
502                 mat.update_flag = 9;
503             else
504                 % update target state if reversal
505                 if (mat.reversal_flag == 1)
506                     if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
507                         mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
508                         mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
509                     end
510                 end
511                 % determine strain at pt 5
512                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
513 
514                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
515                     mat.update_flag = 12; % unloading
516                 elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
517                     mat.update_flag = 23; % reloading to break point
518                 elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
519                     mat.update_flag = 13; % reloading to target
520                 else
521                     if (mat.strain > mat.ecap_neg)
522                         mat.update_flag = 7; % neg hardening
523                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
524                         mat.update_flag = 8; % neg softening
525                     else
526                         mat.update_flag = 9; % neg residual
527                     end
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
528                 end
529             end
530 
531             switch mat.update_flag
532                 case -1
533                     ref_stress = 0;
534                     ref_strain = 0;
535                     mat.tanE   = mat.iniE;
536                 case 1
537                     ref_stress = mat.sy_pos;
538                     ref_strain = mat.epsy_pos;
539                     mat.tanE   = mat.iniE;
540                 case 4
541                     ref_stress = mat.res_pos;
542                     ref_strain = mat.eres_pos;
543                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
544                 case 7
545                     ref_stress = mat.s_tar_neg;
546                     ref_strain = mat.eps_tar_neg;
547                     mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
548                 case 8
549                     ref_stress = mat.cap_neg;
550                     ref_strain = mat.ecap_neg;
551                     mat.tanE   = mat.E_sof;
552                 case 9
553                     ref_stress = mat.res_neg;
554                     ref_strain = mat.eres_neg;
555                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
556                 case 12
557                     ref_stress = mat.com_stress;
558                     ref_strain = mat.com_strain;
559                     mat.tanE   = mat.E_unld;
560                 case 13
561                     ref_stress = mat.s_bp_neg;
562                     ref_strain = mat.eps_bp_neg;
563                     mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
564                 case 23
565                     ref_stress = 0;
566                     ref_strain = mat.eps_pt5;
567                     mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
568             end
569 
570             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    9)
571                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
572                     % estimate energy in step
573                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
574                     enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    % update flag
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    % update reversal flag
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update flag to signal initial directional loadin
                    if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on negative side
                    % Note: values must remain negative although exhaustion
                    % of hysteretic energy may make them positive
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat
.E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat.
E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
                        mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg -
mat.epsy_neg);
                    else
                        mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
                    end
                    if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
                        mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
                        mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
                    end
                    % determine break-point
                    mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
                    mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
    eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;

                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7; % neg hardening
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8; % neg softening
                        else
                            mat.update_flag = 9; % neg residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 7
                        ref_stress = mat.s_tar_neg;
                        ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                    case 8
                        ref_stress = mat.cap_neg;
                        ref_strain = mat.ecap_neg;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 9
                        ref_stress = mat.res_neg;
                        ref_strain = mat.eres_neg;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 12
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 13
                        ref_stress = mat.s_bp_neg;
                        ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                    case 23
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt5;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
                end
            end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
669         end % function PosUnloading
670 
671 
672         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )
673 
674             switch mat.state_flag
675                 case 1
676                     if (mat.strain > mat.epsy_neg)
677                         mat.update_flag = -1;
678                     elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
679                         mat.update_flag = 7;
680                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
681                         mat.update_flag = 8;
682                     else
683                         mat.update_flag = 9;
684                     end
685                 case -1
686                     if (mat.strain > mat.epsy_neg)
687                         mat.update_flag = -1;
688                     elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
689                         mat.update_flag = 7;
690                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
691                         mat.update_flag = 8;
692                     else
693                         mat.update_flag = 9;
694                     end
695                 case 4
696                     mat.update_flag = 4;
697                 case 7
698                     if (mat.strain > mat.ecap_neg)
699                         mat.update_flag = 7;
700                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
701                         mat.update_flag = 8;
702                     else
703                         mat.update_flag = 9;
704                     end
705                 case 8
706                     if (mat.strain > mat.eres_neg)
707                         mat.update_flag = 8;
708                     else
709                         mat.update_flag = 9;
710                     end
711                 case 9
712                     mat.update_flag = 9;
713 
714                 otherwise
715                     if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
716                         mat.update_flag = 23;
717                     elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
718                         mat.update_flag = 13;
719                     else
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end
        end % function NegativeLoading


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )

            if (mat.state_flag == -1)
                if (mat.strain < 0)
                    mat.update_flag = -1;
                elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 1)
                if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                    mat.update_flag = 1;
                elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                    mat.update_flag = 2;
                elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                    mat.update_flag = 3;
                else
                    mat.update_flag = 4;
                end
            elseif (mat.state_flag == 4)
                mat.update_flag = 4;
            else
                % update target state
                if (mat.reversal_flag == 1)
                    if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
                        mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
                        mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
                    end
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
820                 case -1
821                     ref_stress = mat.sy_neg;
822                     ref_strain = mat.epsy_neg;
823                     mat.tanE   = mat.iniE;
824                 case 1
825                     ref_stress = 0;
826                     ref_strain = 0;
827                     mat.tanE   = mat.iniE;
828                 case 2
829                     ref_stress = mat.s_tar_pos;
830                     ref_strain = mat.eps_tar_pos;
831                     mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
832                 case 3
833                     ref_stress = mat.cap_pos;
834                     ref_strain = mat.ecap_pos;
835                     mat.tanE   = mat.E_sof;
836                 case 4
837                     ref_stress = mat.res_pos;
838                     ref_strain = mat.eres_pos;
839                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
840                 case 9
841                     ref_stress = mat.res_neg;
842                     ref_strain = mat.eres_neg;
843                     mat.tanE   = mat.iniE/100000;
844                 case 10
845                     ref_stress = mat.com_stress;
846                     ref_strain = mat.com_strain;
847                     mat.tanE   = mat.E_unld;
848                 case 11
849                     if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
850                         ref_stress = mat.s_bp_pos;
851                         ref_strain = mat.eps_bp_pos;
852                     else
853                         ref_stress = 0;
854                         ref_strain = mat.eps_pt10;
855                     end
856                     mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
857                 case 21
858                     ref_stress = 0;
859                     ref_strain = mat.eps_pt10;
860                     mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
861
862             end
863
864             if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4)
865                 if (mat.com_reversal_flag == 1)
866                     % estimate energy in step
867                     stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
868                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
869                     % update unloading modulus
870                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
871                     mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
872                 end
873                 % determine strain at pt 10
874                 mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
875
876                 if (mat.strain < mat.eps_pt10)
877                     mat.reversal_flag = -1;
878                     mat.update_flag = 10; % unloading
879                 else
880                     mat.reversal_flag = 1;
881                     % set flag to signal initial directional loading for bp
882                     if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
883                        targ_flag = 1;
884                     else
885                         targ_flag = 0;
886                     end
887                     % update cyclic parameters on positive side
888                     % Note: values must remain positive althought they may
889                     % become negative as hysteretic energy is exhausted
890                     enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
891                     [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
892                     mat.E_hrd_pos    = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
893                     mat.sy_pos       = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
894                     mat.epsy_pos     = mat.sy_pos/mat.iniE;
895                     mat.s_ref_pos    = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
896                     mat.ecap_pos     = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (
    mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
897                     mat.cap_pos      = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
898                     mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
899                     mat.eres_pos     = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
900                     % adjust target values if necessary
901                     stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
902                     if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
903                         mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
904                     else
905                         mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
906                     end
907                     if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
908                         mat.s_tar_pos    = mat.res_pos;
909                         mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
910                     end
911                     % determine break-point
912                     mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    if (targ_flag == 1)
                        mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
                    end
                    mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
                    mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;

                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11; % reloading to target
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2; % hardening
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3; % softening
                        else
                            mat.update_flag = 4; % residual
                        end
                    end
                end

                switch mat.update_flag
                    case 2
                        ref_stress = mat.s_tar_pos;
                        ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                    case 3
                        ref_stress = mat.cap_pos;
                        ref_strain = mat.ecap_pos;
                        mat.tanE   = mat.E_sof;
                    case 4
                        ref_stress = mat.res_pos;
                        ref_strain = mat.eres_pos;
                        mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                    case 10
                        ref_stress = mat.com_stress;
                        ref_strain = mat.com_strain;
                        mat.tanE   = mat.E_unld;
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
962                         ref_strain = mat.eps_pt10;
963                         mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
964                 end
965             end
966         end % function NegUnloading
967 
968 
969         function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )
970 
971             % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
972             E_t     = mat.hys_dis_cap;
973             E_step  = enrgy_step;
974             c       = mat.det_rate;
975             E_pre   = mat.enrgy_prvs;
976 
977             mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
978             mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;
979 
980             if (mat.Beta > 1)
981                 mat.Beta = 0.999;
982                 display('***************************')
983                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
984                 display('***************************')
985             elseif (mat.Beta < 0)
986                 mat.Beta = 0.999;
987                 display('***************************')
988                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
989                 display('***************************')
990             end
991             if (mat.Beta_Unld > 1)
992                 mat.Beta_Unld = 0.999;
993                 display('***************************')
994                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
995                 display('***************************')
996             elseif (mat.Beta_Unld < 0)
997                 mat.Beta_Unld = 0.999;
998                 display('***************************')
999                 display('Hysteretic Energy Exhausted')
1000                display('***************************')
1001            end
1002
1003        end % function BetaFunc
1004
1005
1006        function allocateMemory(mat,totStep)
1007            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
1008        end % function allocateMemory
1009
1010        function write2storage(mat,istep)
1011            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.3.9 极限状态 Shear 标签

```
%% ---------------------------------------------------------------
% Copyright 2010 All rights reserved.
% Program    : Mercury v.2.11
% Email      : christopherlsegura@gmail.com
% Revision   : May 10, 2011
% Written by : Christopher Segura
% Filename   : HysteresisPinch.m
%% ---------------------------------------------------------------
classdef HysteresisPinch < handle

    properties (SetAccess=protected,Hidden)
        % Input variables
        tag;            % material tag
        type;           % material type
        sy_pos0;        % positive yield stress
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        epsy_pos0;      % positive yield strain
        sy_neg0;        % negative yield stress
        epsy_neg0;      % negative yield strain
        cap_pos0;       % positive capping stress
        ecap_pos0;      % positive capping strain
        cap_neg0;       % negative capping stress
        ecap_neg0;      % negative capping strain
        res_pos;        % positive residual stress
        eres_pos0;      % positive residual strain
        res_neg;        % negative residual stress
        eres_neg0;      % negative residual strain
        lamda_hys;      % hysteretic disipation constant
        det_rate;       % hysteresis deterioration exponent "c"
        kappa_f;        % stress pinching break point factor
        kappa_d;        % strain pinching break point factor
        rho;            % density

    end % properties (SetAccess=protected,Hidden)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public)
        %% Storage for output
        uni_strain_stress   % Storage of uniaxial strain and stress
    end %  properties (SetAccess=public,GetAccess=public)

    properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)
        %% update variables
        stress;         % uniaxial stress
        tanE;           % tangent modulus
        strain;         % uniaxial strain
        iniE;           % initial modulus
        E_hrd;          % hardening modulus
        E_sof;          % softening modulus
        sy_pos;         % positive yield stress
        sy_neg;         % negative yield stress
        cap_pos;        % positive capping stress
        cap_neg;        % negative capping stress
        epsy_pos;       % positive yield strain
        epsy_neg;       % negative yield strain
        ecap_pos;       % positive cap strain
        ecap_neg;       % negative cap strain
        eres_pos;       % positive residual strain
        eres_neg;       % negative residual strain
        hys_dis_cap;    % hysteretic dissipation capacity
        s_ref_pos;      % positive refenerence stress
        s_ref_neg;      % negative refenerence stress
        s_tar_pos;      % positive target stress
        eps_tar_pos;    % positive target strain
        s_tar_neg;      % negative target stress
        eps_tar_neg;    % negative target strain
        state_flag;     % loading branch
        update_flag;    % update loading branch
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
        reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        enrgy_step;     % step i energy dissipated
        enrgy_prvs;     % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        E_unld;         % unloading stiffness
        E_hrd_pos;      % positive hardening stiffness
        E_hrd_neg;      % negative hardening stiffness
        eps_pt5;        % positive unloading inflection strain
        eps_pt10;       % negative unloading inflection strain
        Beta;           % hysteretic dissipation parameter
        Beta_Unld;      % unloading modulus dissipation parameter
        s_bpref_pos;    % positive break point reference stress
        s_bpref_neg;    % negative break point reference stress
        eps_bp_pos;     % positive break point strain
        eps_bp_neg;     % negative break point strain
        s_bp_pos;       % positive break point stress
        s_bp_neg;       % negative break point stress
        norm_hys;       % normalized hysteretic energy
        n_exc;          % number excursions/cycles
        %% commit variables
        % inputs
        com_stress;     % committed stress from previous step
        com_tanE;       % committed tanE from previous step
        com_strain;     % committed strain from previous step
        com_sy_pos;     % committed yeild stress
        com_sy_neg;     % committed yeild stress
        com_cap_pos;
        com_cap_neg;
        com_epsy_pos;   % positive yield strain
        com_epsy_neg;   % negative yield strain
        com_ecap_pos;   % positive cap strain
        com_ecap_neg;   % negative cap strain
        com_eres_pos;   % positive residual strain
        com_eres_neg;   % negative residual strain
        com_hys_dis_cap;     % hysteretic dissipation capacity
        com_s_ref_pos;  % positive refenerence stress
        com_s_ref_neg;  % negative refenerence stress
        com_s_tar_pos;   % positive target stress
        com_eps_tar_pos; % positive target strain
        com_s_tar_neg;   % negative target stress
        com_eps_tar_neg; % negative target strain
        com_state_flag;  % loading branch
        com_update_flag; % update loading branch
        com_reversal_flag;  % flag for unloading stiffness
        com_enrgy_step;  % step i energy dissipated
        com_enrgy_prvs;  % energy dissipated in previous steps 1 to (i-1)
        com_E_unld;      % unloading stiffness
        com_E_hrd_pos;   % positive hardening stiffness
        com_E_hrd_neg;   % negative hardening stiffness
        com_eps_pt5;     % positive unloading inflection strain
        com_eps_pt10;    % negative unloading inflection strain
        com_Beta;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        com_Beta_Unld;
        com_s_bpref_pos;
        com_s_bpref_neg;
        com_eps_bp_pos;
        com_eps_bp_neg;
        com_s_bp_pos;
        com_s_bp_neg;
        com_norm_hys;
        com_n_exc;
    end % properties (SetAccess=public,GetAccess=public,Hidden)

    methods (Access=public)
        function mat = HysteresisPinch(info)
            mat.tag          = info{1};
            mat.type         = info{2};
            mat.sy_pos0      = info{3};
            mat.epsy_pos0    = info{4};
            mat.sy_neg0      = info{5};
            mat.epsy_neg0    = info{6};
            mat.cap_pos0     = info{7};
            mat.ecap_pos0    = info{8};
            mat.cap_neg0     = info{9};
            mat.ecap_neg0    = info{10};
            mat.res_pos      = info{11};
            mat.eres_pos0    = info{12};
            mat.res_neg      = info{13};
            mat.eres_neg0    = info{14};
            mat.lamda_hys    = info{15};
            mat.det_rate     = info{16};
            mat.kappa_f      = info{17};
            mat.kappa_d      = info{18};
            mat.rho          = info{19};
            mat.Initialization();

        end % function HysteresisPinch

        function Initialization(mat)
            mat.stress       = 0;
            mat.strain       = 0;
            mat.sy_pos       = mat.sy_pos0;
            mat.epsy_pos     = mat.epsy_pos0;
            mat.iniE         = mat.sy_pos0/mat.epsy_pos0;
            mat.tanE         = mat.iniE;
            mat.sy_neg       = mat.sy_neg0;
            mat.epsy_neg     = mat.epsy_neg0;
            mat.cap_pos      = mat.cap_pos0;
            mat.ecap_pos     = mat.ecap_pos0;
            mat.E_hrd        = (mat.cap_pos0 - mat.sy_pos0)/(mat.ecap_pos0 - mat.
    epsy_pos0);
            mat.cap_neg      = mat.cap_neg0;
            mat.ecap_neg     = mat.ecap_neg0;
```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
168             mat.eres_pos    = mat.eres_pos0;
169             mat.eres_neg    = mat.eres_neg0;
170             mat.E_sof       = (mat.res_pos - mat.cap_pos0)/(mat.eres_pos0 - mat.
    ecap_pos0);
171             mat.hys_dis_cap = mat.lamda_hys*mat.sy_pos*mat.epsy_pos; % hysteretic
    dissipation capacity
172             mat.s_ref_pos   = mat.cap_pos - (mat.ecap_pos*mat.E_sof);
173             mat.s_ref_neg   = mat.cap_neg - (mat.ecap_neg*mat.E_sof);
174             % initialize variables
175             mat.s_tar_pos       = mat.sy_pos;
176             mat.eps_tar_pos     = mat.epsy_pos;
177             mat.s_tar_neg       = mat.sy_neg;
178             mat.eps_tar_neg     = mat.epsy_neg;
179             mat.state_flag      = 1;
180             mat.update_flag     = mat.state_flag;
181             mat.reversal_flag   = 1;
182             mat.enrgy_step      = 0;  % step i energy dissipated
183             mat.enrgy_prvs      = 0;  % energy dissipated in previous steps 0 to (i-1)
184             mat.E_unld          = mat.iniE;
185             mat.E_hrd_pos       = mat.E_hrd;
186             mat.E_hrd_neg       = mat.E_hrd;
187             mat.eps_pt5         = 0;
188             mat.eps_pt10        = 0;
189             mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
190             mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
191             mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
192             mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
193             mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.eps_tar_pos -
    mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
194             mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.eps_tar_neg - mat
    .eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
195             mat.norm_hys        = 0;
196             mat.n_exc           = 0;
197
198         end % function Initialization
199
200         function commit(mat)    % Store values at previous steps for the use in
    constitutive model
201             mat.com_stress          = mat.stress;
202             mat.com_tanE            = mat.tanE;
203             mat.com_strain          = mat.strain;
204             mat.com_sy_pos          = mat.sy_pos;
205             mat.com_sy_neg          = mat.sy_neg;
206             mat.com_cap_pos         = mat.cap_pos;
207             mat.com_cap_neg         = mat.cap_neg;
208             mat.com_epsy_pos        = mat.epsy_pos;
209             mat.com_epsy_neg        = mat.epsy_neg;
210             mat.com_ecap_pos        = mat.ecap_pos;
211             mat.com_ecap_neg        = mat.ecap_neg;
212             mat.com_eres_pos        = mat.eres_pos;
213             mat.com_eres_neg        = mat.eres_neg;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.com_hys_dis_cap     = mat.hys_dis_cap;
            mat.com_s_ref_pos       = mat.s_ref_pos;
            mat.com_s_ref_neg       = mat.s_ref_neg;
            mat.com_s_tar_pos       = mat.s_tar_pos;
            mat.com_eps_tar_pos     = mat.eps_tar_pos;
            mat.com_s_tar_neg       = mat.s_tar_neg;
            mat.com_eps_tar_neg     = mat.eps_tar_neg;
            mat.com_state_flag      = mat.state_flag;
            mat.com_update_flag     = mat.update_flag;
            mat.com_reversal_flag   = mat.reversal_flag;
            mat.com_enrgy_step      = mat.enrgy_step;
            mat.com_enrgy_prvs      = mat.enrgy_prvs;
            mat.com_E_unld          = mat.E_unld;
            mat.com_E_hrd_pos       = mat.E_hrd_pos;
            mat.com_E_hrd_neg       = mat.E_hrd_neg;
            mat.com_eps_pt5         = mat.eps_pt5;
            mat.com_eps_pt10        = mat.eps_pt10;
            mat.com_s_bpref_pos     = mat.s_bpref_pos;
            mat.com_s_bpref_neg     = mat.s_bpref_neg;
            mat.com_eps_bp_pos      = mat.eps_bp_pos;
            mat.com_eps_bp_neg      = mat.eps_bp_neg;
            mat.com_s_bp_pos        = mat.s_bp_pos;
            mat.com_s_bp_neg        = mat.s_bp_neg;
            mat.com_norm_hys    = mat.norm_hys;
            mat.com_n_exc       = mat.n_exc;

        end % function commit

        function revert(mat)     % Store values at previous steps to revert all values
    when failing at current step
            mat.stress      = mat.com_stress;
            mat.tanE        = mat.com_tanE;
            mat.strain      = mat.com_strain;
            mat.sy_pos      = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg      = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos     = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg     = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos    = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg    = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos    = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg    = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos    = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg    = mat.com_eres_neg;
            mat.hys_dis_cap = mat.com_hys_dis_cap;
            mat.s_ref_pos   = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg   = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos   = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg   = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.state_flag  = mat.com_state_flag;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            mat.update_flag = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_step  = mat.com_enrgy_step;
            mat.enrgy_prvs  = mat.com_enrgy_prvs;
            mat.E_unld      = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos   = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg   = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5     = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10    = mat.com_eps_pt10;
            mat.s_bpref_pos   = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg   = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos    = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg    = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos      = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg      = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;

        end % function revert

        function materialStateDetermination(mat, TrialStrain)
            mat.strain          = TrialStrain;
            mat.stress          = mat.com_stress;
            mat.tanE            = mat.com_tanE;
            mat.state_flag      = mat.com_update_flag;
            mat.update_flag     = mat.com_update_flag;
            mat.reversal_flag   = mat.com_reversal_flag;
            mat.enrgy_prvs      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.sy_pos          = mat.com_sy_pos;
            mat.sy_neg          = mat.com_sy_neg;
            mat.cap_pos         = mat.com_cap_pos;
            mat.cap_neg         = mat.com_cap_neg;
            mat.epsy_pos        = mat.com_epsy_pos;
            mat.epsy_neg        = mat.com_epsy_neg;
            mat.ecap_pos        = mat.com_ecap_pos;
            mat.ecap_neg        = mat.com_ecap_neg;
            mat.eres_pos        = mat.com_eres_pos;
            mat.eres_neg        = mat.com_eres_neg;
            mat.s_ref_pos       = mat.com_s_ref_pos;
            mat.s_ref_neg       = mat.com_s_ref_neg;
            mat.s_tar_pos       = mat.com_s_tar_pos;
            mat.eps_tar_pos     = mat.com_eps_tar_pos;
            mat.s_tar_neg       = mat.com_s_tar_neg;
            mat.eps_tar_neg     = mat.com_eps_tar_neg;
            mat.enrgy_step      = mat.com_enrgy_step;
            mat.E_unld          = mat.com_E_unld;
            mat.E_hrd_pos       = mat.com_E_hrd_pos;
            mat.E_hrd_neg       = mat.com_E_hrd_neg;
            mat.eps_pt5         = mat.com_eps_pt5;
            mat.eps_pt10        = mat.com_eps_pt10;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
            mat.s_bpref_pos     = mat.com_s_bpref_pos;
            mat.s_bpref_neg     = mat.com_s_bpref_neg;
            mat.eps_bp_pos      = mat.com_eps_bp_pos;
            mat.eps_bp_neg      = mat.com_eps_bp_neg;
            mat.s_bp_pos        = mat.com_s_bp_pos;
            mat.s_bp_neg        = mat.com_s_bp_neg;
            mat.norm_hys    = mat.com_norm_hys;
            mat.n_exc       = mat.com_n_exc;
            %-----------------------------------------------------------------
            del_eps = mat.strain - mat.com_strain;
            %-----------------------------------------------------------------
            if (del_eps >= 0) && (mat.stress >= 0) % positive loading
                if (mat.state_flag == 4)
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps < 0) && (mat.stress > 0) % positive unloading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading(mat);

            elseif (del_eps <= 0) && (mat.stress <= 0) % negative loading
                if (mat.state_flag == 9)
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                else
                    [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading(mat);
                end

            elseif (del_eps > 0) && (mat.stress < 0) % negative loading
                [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading(mat);

            end

            mat.stress = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);

            if (mat.com_stress/del_eps < 0) % unloading
                if (mat.com_stress/mat.stress > 0) % unloading
                    step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
                else % reloading
                    if (mat.stress >= 0)
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt10)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
                    else
                        mat.enrgy_step = 0;
                        step = 0.5*(mat.strain - mat.eps_pt5)*mat.stress;
                        mat.n_exc = mat.n_exc + 0.5;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
                    end
                end
            else
                step = del_eps*(mat.com_stress + 0.5*(mat.stress - mat.com_stress));
            end
            % update energy in excursions
            mat.enrgy_step = mat.enrgy_step + step;
            mat.enrgy_prvs = mat.enrgy_prvs + step;
            % normalized hysteretic energy
            mat.norm_hys = mat.lamda_hys*mat.enrgy_prvs/mat.hys_dis_cap;

        end % function materialStateDetermination


        function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PositiveLoading(mat)

            switch mat.state_flag
                case -1
                    if (mat.strain < 0)
                        mat.update_flag = -1;
                    elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 1
                    if (mat.strain < mat.epsy_pos)
                        mat.update_flag = 1;
                    elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 2
                    if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                        mat.update_flag = 2;
                    elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 3
                    if (mat.strain < mat.eres_pos)
                        mat.update_flag = 3;
                    else
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
                        mat.update_flag = 4;
                    end
                case 4
                    mat.update_flag = 4;
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        mat.update_flag = 21;
                    elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
                        mat.update_flag = 11;
                    else
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1 % elastic
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1 % elastic
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2 % hardening
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3 % softening
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4 % residual
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9 % residual
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 11 % loading to target state
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
468                     mat.tanE    = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
469                 case 21 % loading to break point
470                     ref_stress = mat.com_stress;
471                     ref_strain = mat.com_strain;
472                     mat.tanE    = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
473             end
474         end % function PositiveLoading
475
476
477         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = PosUnloading( mat )
478
479             if (mat.state_flag == 1)
480                 if (mat.strain > 0)
481                     mat.update_flag = 1;
482                 elseif (mat.strain > mat.epsy_neg)
483                     mat.update_flag = -1;
484                 elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
485                     mat.update_flag = 7;
486                 elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
487                     mat.update_flag = 8;
488                 else
489                     mat.update_flag = 9;
490                 end
491             elseif (mat.state_flag == -1)
492                 if (mat.strain > mat.epsy_neg)
493                     mat.update_flag = -1;
494                 elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
495                     mat.update_flag = 7;
496                 elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
497                     mat.update_flag = 8;
498                 else
499                     mat.update_flag = 9;
500                 end
501             elseif (mat.state_flag == 9)
502                 mat.update_flag = 9;
503             else
504                 % update target state if reversal
505                 if (mat.reversal_flag == 1)
506                     if (mat.com_strain > mat.eps_tar_pos)
507                         mat.eps_tar_pos = mat.com_strain;
508                         mat.s_tar_pos   = mat.com_stress;
509                     end
510                 end
511                 % determine strain at pt 5
512                 mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
513
514                 if (mat.strain > mat.eps_pt5)
515                     mat.update_flag = 12; % unloading
516                 elseif (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
```

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
                    mat.update_flag = 23; % reloading to break point
                elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                    mat.update_flag = 13; % reloading to target
                else
                    if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                        mat.update_flag = 7; % neg hardening
                    elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                        mat.update_flag = 8; % neg softening
                    else
                        mat.update_flag = 9; % neg residual
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = mat.sy_pos;
                    ref_strain = mat.epsy_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 12
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 13
                    ref_stress = mat.s_bp_neg;
                    ref_strain = mat.eps_bp_neg;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt5;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    9)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 5
                mat.eps_pt5 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain > mat.eps_pt5)
                    % update flag
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 12; %unloading
                else
                    % update reversal flag
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % update flag to signal initial directional loadin
                    if (mat.eps_tar_neg == mat.epsy_neg)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on negative side
                    % Note: values must remain negative although exhaustion
                    % of hysteretic energy may make them positive
                    enrgy_step = (mat.eps_pt5 - mat.com_strain)*(mat.com_stress + 0.5*(0
     - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_neg;
                    mat.sy_neg      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_neg;
                    mat.epsy_neg    = mat.sy_neg/mat.iniE;
                    mat.s_ref_neg   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_neg;
                    mat.ecap_neg    = min(-1.8912e-26,(mat.s_ref_neg - mat.sy_neg + (mat
    .E_hrd_neg*mat.epsy_neg))/(mat.E_hrd_neg - mat.E_sof));
                    mat.cap_neg     = min(-1.1272e-24,mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.
    ecap_neg);
                    mat.eps_tar_neg = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_neg;
                    mat.eres_neg    = min(-1.8912e-24,(mat.res_neg - mat.s_ref_neg)/mat.
    E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_neg + mat.E_sof*mat.eps_tar_neg;
                    if (mat.eps_tar_neg > mat.ecap_neg)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
611                         mat.s_tar_neg = mat.sy_neg + mat.E_hrd_neg*(mat.eps_tar_neg -
    mat.epsy_neg);
612                     else
613                         mat.s_tar_neg = stress_tar_chk;
614                     end
615                     if (mat.s_tar_neg > mat.res_neg)
616                         mat.s_tar_neg   = mat.res_neg;
617                         mat.eps_tar_neg = mat.eres_neg;
618                     end
619                     % determine break-point
620                     mat.eps_bp_neg      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_neg;
621                     if (targ_flag == 1)
622                         mat.eps_bp_neg      = 0; % initial directional loading
623                     end
624                     mat.s_bpref_neg     = mat.kappa_f*mat.s_tar_neg;
625                     mat.s_bp_neg        = ((mat.eps_bp_neg - mat.eps_pt5)/(mat.
    eps_tar_neg - mat.eps_pt5))*mat.s_bpref_neg;
626 
627                     if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
628                         mat.update_flag = 23; % reloading to break point
629                     elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
630                         mat.update_flag = 13; % reloading to target
631                     else
632                         if (mat.strain > mat.ecap_neg)
633                             mat.update_flag = 7; % neg hardening
634                         elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
635                             mat.update_flag = 8; % neg softening
636                         else
637                             mat.update_flag = 9; % neg residual
638                         end
639                     end
640                 end
641 
642                 switch mat.update_flag
643                     case 7
644                         ref_stress = mat.s_tar_neg;
645                         ref_strain = mat.eps_tar_neg;
646                         mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
647                     case 8
648                         ref_stress = mat.cap_neg;
649                         ref_strain = mat.ecap_neg;
650                         mat.tanE   = mat.E_sof;
651                     case 9
652                         ref_stress = mat.res_neg;
653                         ref_strain = mat.eres_neg;
654                         mat.tanE   = mat.iniE/100000;
655                     case 12
656                         ref_stress = mat.com_stress;
657                         ref_strain = mat.com_strain;
658                         mat.tanE   = mat.E_unld;
659                     case 13
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
660                         ref_stress = mat.s_bp_neg;
661                         ref_strain = mat.eps_bp_neg;
662                         mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
663                     case 23
664                         ref_stress = 0;
665                         ref_strain = mat.eps_pt5;
666                         mat.tanE   = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
667                 end
668             end
669         end % function PosUnloading
670
671
672         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegativeLoading( mat )
673
674             switch mat.state_flag
675                 case 1
676                     if (mat.strain > mat.epsy_neg)
677                         mat.update_flag = -1;
678                     elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
679                         mat.update_flag = 7;
680                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
681                         mat.update_flag = 8;
682                     else
683                         mat.update_flag = 9;
684                     end
685                 case -1
686                     if (mat.strain > mat.epsy_neg)
687                         mat.update_flag = -1;
688                     elseif (mat.strain > mat.ecap_neg)
689                         mat.update_flag = 7;
690                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
691                         mat.update_flag = 8;
692                     else
693                         mat.update_flag = 9;
694                     end
695                 case 4
696                     mat.update_flag = 4;
697                 case 7
698                     if (mat.strain > mat.ecap_neg)
699                         mat.update_flag = 7;
700                     elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
701                         mat.update_flag = 8;
702                     else
703                         mat.update_flag = 9;
704                     end
705                 case 8
706                     if (mat.strain > mat.eres_neg)
707                         mat.update_flag = 8;
708                     else
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                        mat.update_flag = 9;
                    end
                case 9
                    mat.update_flag = 9;

                otherwise
                    if (mat.strain > mat.eps_bp_neg) && (mat.eps_pt5 > mat.eps_bp_neg)
                        mat.update_flag = 23;
                    elseif (mat.strain > mat.eps_tar_neg)
                        mat.update_flag = 13;
                    else
                        if (mat.strain > mat.ecap_neg)
                            mat.update_flag = 7;
                        elseif (mat.strain > mat.eres_neg)
                            mat.update_flag = 8;
                        else
                            mat.update_flag = 9;
                        end
                    end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 7
                    ref_stress = mat.s_tar_neg;
                    ref_strain = mat.eps_tar_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_neg;
                case 8
                    ref_stress = mat.cap_neg;
                    ref_strain = mat.ecap_neg;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 13
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_neg - ref_stress)/(mat.eps_tar_neg -
    ref_strain);
                case 23
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
758                     mat.tanE    = (mat.s_bp_neg - ref_stress)/(mat.eps_bp_neg -
    ref_strain);
759             end
760         end % function NegativeLoading
761
762
763         function [ ref_stress, ref_strain, mat ] = NegUnloading( mat )
764
765             if (mat.state_flag == -1)
766                 if (mat.strain < 0)
767                     mat.update_flag = -1;
768                 elseif (mat.strain < mat.epsy_pos)
769                     mat.update_flag = 1;
770                 elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
771                     mat.update_flag = 2;
772                 elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
773                     mat.update_flag = 3;
774                 else
775                     mat.update_flag = 4;
776                 end
777             elseif (mat.state_flag == 1)
778                 if (mat.strain < mat.epsy_pos)
779                     mat.update_flag = 1;
780                 elseif (mat.strain < mat.ecap_pos)
781                     mat.update_flag = 2;
782                 elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
783                     mat.update_flag = 3;
784                 else
785                     mat.update_flag = 4;
786                 end
787             elseif (mat.state_flag == 4)
788                 mat.update_flag = 4;
789             else
790                 % update target state
791                 if (mat.reversal_flag == 1)
792                     if (mat.com_strain < mat.eps_tar_neg)
793                         mat.eps_tar_neg = mat.com_strain;
794                         mat.s_tar_neg   = mat.com_stress;
795                     end
796                 end
797                 % determine strain at pt 10
798                 mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;
799
800                 if (mat.strain < mat.eps_pt10)
801                     mat.update_flag = 10; % unloading
802                 else
803                     if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
804                         mat.update_flag = 21;
805                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
806                         mat.update_flag = 11;
807                     else
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                        if (mat.strain < mat.ecap_pos)
                            mat.update_flag = 2;
                        elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
                            mat.update_flag = 3;
                        else
                            mat.update_flag = 4;
                        end
                    end
                end
            end

            switch mat.update_flag
                case -1
                    ref_stress = mat.sy_neg;
                    ref_strain = mat.epsy_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 1
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = 0;
                    mat.tanE   = mat.iniE;
                case 2
                    ref_stress = mat.s_tar_pos;
                    ref_strain = mat.eps_tar_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
                case 3
                    ref_stress = mat.cap_pos;
                    ref_strain = mat.ecap_pos;
                    mat.tanE   = mat.E_sof;
                case 4
                    ref_stress = mat.res_pos;
                    ref_strain = mat.eres_pos;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 9
                    ref_stress = mat.res_neg;
                    ref_strain = mat.eres_neg;
                    mat.tanE   = mat.iniE/100000;
                case 10
                    ref_stress = mat.com_stress;
                    ref_strain = mat.com_strain;
                    mat.tanE   = mat.E_unld;
                case 11
                    if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                        ref_stress = mat.s_bp_pos;
                        ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                    else
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                    end
                    mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                case 21
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    ref_stress = 0;
                    ref_strain = mat.eps_pt10;
                    mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);

            end

            if (mat.update_flag ~= -1) && (mat.update_flag ~= 1) && (mat.update_flag ~=
    4)
                if (mat.com_reversal_flag == 1)
                    % estimate energy in step
                    stress_new = ref_stress + mat.tanE*(mat.strain - ref_strain);
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    % update unloading modulus
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_unld = (1 - mat.Beta_Unld)*mat.E_unld;
                end
                % determine strain at pt 10
                mat.eps_pt10 = mat.com_strain - mat.com_stress/mat.E_unld;

                if (mat.strain < mat.eps_pt10)
                    mat.reversal_flag = -1;
                    mat.update_flag = 10; % unloading
                else
                    mat.reversal_flag = 1;
                    % set flag to signal initial directional loading for bp
                    if (mat.eps_tar_pos == mat.epsy_pos)
                       targ_flag = 1;
                    else
                        targ_flag = 0;
                    end
                    % update cyclic parameters on positive side
                    % Note: values must remain positive althought they may
                    % become negative as hysteretic energy is exhausted
                    enrgy_step = (mat.eps_pt10 - mat.com_strain)*(mat.com_stress +
    0.5*(0 - mat.com_stress));
                    [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step );
                    mat.E_hrd_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.E_hrd_pos;
                    mat.sy_pos      = (1 - mat.Beta)*mat.sy_pos;
                    mat.epsy_pos    = mat.sy_pos/mat.iniE;
                    mat.s_ref_pos   = (1 - mat.Beta)*mat.s_ref_pos;
                    mat.ecap_pos    = max(1.912361e-26,(mat.s_ref_pos - mat.sy_pos + (
    mat.E_hrd_pos*mat.epsy_pos))/(mat.E_hrd_pos - mat.E_sof));
                    mat.cap_pos     = max(1.02391e-26,mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.
    ecap_pos);
                    mat.eps_tar_pos = (1 + mat.Beta)*mat.eps_tar_pos;
                    mat.eres_pos    = max(1.35915e-24,(mat.res_pos - mat.s_ref_pos)/mat.
    E_sof);
                    % adjust target values if necessary
                    stress_tar_chk  = mat.s_ref_pos + mat.E_sof*mat.eps_tar_pos;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
902                     if (mat.eps_tar_pos < mat.ecap_pos)
903                         mat.s_tar_pos = mat.sy_pos + mat.E_hrd_pos*(mat.eps_tar_pos -
    mat.epsy_pos);
904                     else
905                         mat.s_tar_pos = stress_tar_chk;
906                     end
907                     if (mat.s_tar_pos < mat.res_pos)
908                         mat.s_tar_pos   = mat.res_pos;
909                         mat.eps_tar_pos = mat.eres_pos;
910                     end
911                     % determine break-point
912                     mat.eps_bp_pos      = (1 - mat.kappa_d)*mat.eps_tar_pos;
913                     if (targ_flag == 1)
914                         mat.eps_bp_pos      = 0; % initial directional loading
915                     end
916                     mat.s_bpref_pos     = mat.kappa_f*mat.s_tar_pos;
917                     mat.s_bp_pos        = ((mat.eps_bp_pos - mat.eps_pt10)/(mat.
    eps_tar_pos - mat.eps_pt10))*mat.s_bpref_pos;
918
919                     if (mat.strain < mat.eps_bp_pos) && (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
920                         mat.update_flag = 21;
921                     elseif (mat.strain < mat.eps_tar_pos)
922                         mat.update_flag = 11; % reloading to target
923                     else
924                         if (mat.strain < mat.ecap_pos)
925                             mat.update_flag = 2; % hardening
926                         elseif (mat.strain < mat.eres_pos)
927                             mat.update_flag = 3; % softening
928                         else
929                             mat.update_flag = 4; % residual
930                         end
931                     end
932                 end
933
934                 switch mat.update_flag
935                     case 2
936                         ref_stress = mat.s_tar_pos;
937                         ref_strain = mat.eps_tar_pos;
938                         mat.tanE   = mat.E_hrd_pos;
939                     case 3
940                         ref_stress = mat.cap_pos;
941                         ref_strain = mat.ecap_pos;
942                         mat.tanE   = mat.E_sof;
943                     case 4
944                         ref_stress = mat.res_pos;
945                         ref_strain = mat.eres_pos;
946                         mat.tanE   = mat.iniE/100000;
947                     case 10
948                         ref_stress = mat.com_stress;
949                         ref_strain = mat.com_strain;
950                         mat.tanE   = mat.E_unld;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    case 11
                        if (mat.eps_pt10 < mat.eps_bp_pos)
                            ref_stress = mat.s_bp_pos;
                            ref_strain = mat.eps_bp_pos;
                        else
                            ref_stress = 0;
                            ref_strain = mat.eps_pt10;
                        end
                        mat.tanE   = (mat.s_tar_pos - ref_stress)/(mat.eps_tar_pos -
    ref_strain);
                    case 21
                        ref_stress = 0;
                        ref_strain = mat.eps_pt10;
                        mat.tanE   = (mat.s_bp_pos - ref_stress)/(mat.eps_bp_pos -
    ref_strain);
                end
            end
        end % function NegUnloading


        function [ mat ] = BetaFunc( mat, enrgy_step )

            % Note: for unloading modulus E_t = 2*E_t
            E_t     = mat.hys_dis_cap;
            E_step  = enrgy_step;
            c       = mat.det_rate;
            E_pre   = mat.enrgy_prvs;

            mat.Beta = ((E_step + mat.enrgy_step)/(E_t - E_pre))^c;
            mat.Beta_Unld = ((E_step + mat.enrgy_step)/(2*E_t - E_pre))^c;

            if (mat.Beta > 1)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta < 0)
                mat.Beta = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            end
            if (mat.Beta_Unld > 1)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
                display('***************************')
            elseif (mat.Beta_Unld < 0)
                mat.Beta_Unld = 0.999;
                display('***************************')
                display('Hysteretic Energy Exhausted')
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
                display('**************************')
            end

        end % function BetaFunc


        function allocateMemory(mat,totStep)
            mat.uni_strain_stress(1:totStep,1:2) = 0;
        end % function allocateMemory

        function write2storage(mat,istep)
            mat.uni_strain_stress(istep, 1:2) = [mat.strain, mat.stress];
        end % function write2storage

        function write2file(mat, fid)
            fprintf(fid,'%f %f \n', mat.strain, mat.stress);
        end % function write2file

        function write2mat(mat, fid)
            uni_strain_stress = mat.uni_strain_stress; %#ok<*NASGU>
            save(fid, 'uni_strain_stress');
        end % function write2mat

        function getPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.strain, mat.stress,'-o');
            hold on;grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function getPlot

        function finalPlot(mat, unit, num)
            figure(num);
            plot(mat.uni_strain_stress(:,1), mat.uni_strain_stress(:,2));
            grid on;box on;
            title(['Uniaxial strain-stress of ',mat.type]);
            xlabel(['strain (',unit{1,2},'/',unit{1,2},')']);
            ylabel(['stress (',unit{1,1},'/',unit{1,2},'^2']);
        end % function finalPlot

    end % methods

end % classdef
```

I.4 第四部分: 数据驱动的方法和参数识别

此部分涵盖使用自动参数识别和模型定义技术 MATLAB® 优化和数据分析。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

I.4.1 参数识别计划

此附件列出完整的 MATLAB 源代码, 如 §65.6 对于非线性最小方位的参数识别程序, 这些参数分为 MATLAB 的 **李克强** 优化器与外部终端 单元 溶剂 (雅典). 该程序是数据驱动的: 所有配置都是从 Excel 分布表中阅读的 (**标签**:`xlsx`), 允许改进优化问题, 而不修改代码。该计划在每个功能的评估中执行 (1) 在临时输入文件中更新模型参数, (2) 发射外部溶剂, (3) 阅读和集成解决者的预测, (4) 计算机废物, 以及 (5) 更新实时的 Dashboard 一个持久的日志记录到 Excel 文件中的所有 iterations。

I.4.2 主节目和核心乐队

乐队在入口点开始 **主** `M`, 它简单地将函数文件夹添加到路径和呼叫 **帕里登记** `()`. 主要功能 **标识** `M` 阅读从分布表的配置, 启动所有数据结构, 在初始猜测中进行诊断干燥运行 x_0 然后, 发射了 **李克强** 优化。尼日利亚功能 `minfunc` 在每个功能评估中, 呼叫并实施整个链: 参数更新、溶剂启动、输出分配、剩余计算和板块更新。當地助理函數登錄評估資料到 CSV 檔案, 並管理一個小進步窗口。

```
clear;close all;clc
addpath(fullfile(fileparts(mfilename('fullpath')), 'functions'));

ParIdentification();
```

Listing I.1: Main.m – Entry point

```
function ParIdentification()
%PARIDENTIFICATION Main function for parameter identification using
    lsqnonlin.
%
%   Reads control data from Log.xlsx, initializes the optimization,
%   and runs lsqnonlin with ATENA as the external solver.
%   minfunc is a nested function with direct access to all shared
    variables.

%--------------------------------
% Read control data from spreadsheet
%--------------------------------
S = readInputSheet('Log.xlsx', 'Input');

%-----------------------------------------------
% Read initial values, lower and upper bounds
%-----------------------------------------------
[x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
S.lb = lb;
S.ub = ub;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%--------------------------------------------
% Create temp file for optimization
%--------------------------------------------
inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);

%--------------------------------------------
% Initialize PI sheet in log file (row-wise)
%--------------------------------------------
piSheetName = initPISheet('Log.xlsx', S, x0);

%--------------------------------------------
% Initialize counters and dashboard handles
%--------------------------------------------
nFnEval      = 0;
nIter        = 0;
X            = x0;
hDashboard   = [];
hProgress    = [];
isDryRunCall = false;
lastIterTic  = tic;

%--------------------------------------------
% Keep last successful dry-run results
%--------------------------------------------
predictedLast = [];
resLast       = [];

%--------------------------------------------
% Open persistent CSV log for all evaluations
%--------------------------------------------
logFID = fopen('minfunc_log.csv', 'w');
fprintf(logFID, 'call,%s,residual_norm,status\n', strjoin(S.modelPar,
    ','));

%============================================================
% PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS
%============================================================
fprintf('\n=== PRE-OPTIMIZATION DIAGNOSTICS ===\n');
fprintf('x0 : '); fprintf('%10.4f ', x0);   fprintf('\n');
fprintf('lb : '); fprintf('%10.4f ', S.lb); fprintf('\n');
fprintf('ub : '); fprintf('%10.4f ', S.ub); fprintf('\n');

inBounds = all(x0 >= S.lb & x0 <= S.ub);
fprintf('x0 within bounds: %s\n', mat2str(inBounds));
if ~inBounds
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    fclose(logFID);
    error('ParIdentification:boundsViolation', ...
          'x0 violates bounds - fix extractEvaluateValues before continuing.');
end

fprintf('\nCalling minfunc(x0) as dry run...\n');
isDryRunCall = true;
try
    r_test = minfunc(x0);
    fprintf('Residuals : '); fprintf('%12.6f ', r_test); fprintf('\n');
    fprintf('Any NaN   : %d\n', any(isnan(r_test)));
    fprintf('Any Inf   : %d\n', any(isinf(r_test)));
catch ME
    fprintf('minfunc THREW AN ERROR:\n  %s\n', ME.message);
    fclose(logFID);
    rethrow(ME);
end
isDryRunCall = false;
fprintf('=====================================\n\n');

%-------------------------------------------------------------
% Keep the existing dashboard windows, but clear the dry-run
% history so it does not count as part of the optimization.
% Then replot the dry run as iteration 0 at Fn eval = 0.
%-------------------------------------------------------------
if ~isempty(hDashboard) && isstruct(hDashboard) && ...
   isfield(hDashboard, 'res') && ishghandle(hDashboard.res)

    ud = get(hDashboard.res, 'UserData');
    if isstruct(ud)
        if isfield(ud, 'relErrHist'), ud.relErrHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'absResHist'), ud.absResHist(:) = nan; end
        if isfield(ud, 'xHist'),      ud.xHist(:)      = nan; end
        if isfield(ud, 'fEvalVec'),   ud.fEvalVec(:)   = nan; end
        ud.nE = 0;
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end
end

% Reset counters so the dry run does not count
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Replot dry run as iteration 0 at function evaluation 0
if ~isempty(predictedLast) && ~isempty(resLast)
    hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x0, predictedLast, resLast, ...
                             0, false, true);
end

% Reset again so the actual optimization starts clean
nFnEval = 0;
nIter   = 0;
X       = x0;

% Start timing from the first true iteration of the real run
lastIterTic = tic;

% Save checkpoint for crash recovery / re-diagnostics
save('debug_checkpoint.mat', 'S', 'x0');
fprintf('Checkpoint saved to debug_checkpoint.mat\n\n');

%=========================================================
% RUN OPTIMIZATION
%=========================================================
[x, resnorm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, @minfunc);

%---------------------------------------------
% Close log and report results
%---------------------------------------------
fclose(logFID);

fprintf('\n=== Optimization completed ===\n');
fprintf('Exit flag : %d\n',   exitflag);
fprintf('Iterations: %d\n',   output.iterations);
fprintf('Func evals: %d\n',   output.funcCount);
fprintf('Norm resid: %.6e\n', resnorm);
fprintf('Identified parameters:\n');
for k = 1:numel(S.modelPar)
    fprintf('  %s = %.6g\n', S.modelPar{k}, x(k));
end

% Timestamped save of final result
resultFile = sprintf('result_%s.mat', datestr(now, 'yyyymmdd_HHMMSS'));
save(resultFile, 'x', 'resnorm', 'res', 'exitflag', 'output', 'S', 'x0');
fprintf('Results saved to %s\n', resultFile);
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

Listing I.2: ParIdentification.m – Main function and nested objective function (part 1 of 2)

```
154 %==========================================================
155 % NESTED OBJECTIVE FUNCTION
156 %==========================================================
157     function res = minfunc(x)
158     %MINFUNC Objective function called by lsqnonlin at every function
        evaluation.
159 
160         nFnEval = nFnEval + 1;
161         nPar    = numel(S.modelPar);
162 
163         %------------------------------------------
164         % Determine if this is a true optimization iteration.
165         % Important: the diagnostic dry run must NOT be logged
166         % as a real iteration.
167         %------------------------------------------
168         isIteration = ~isDryRunCall && ...
169                       ((mod(nFnEval, nPar + 1) == 0) || (nFnEval ==
        1));
170 
171         %------------------------------------------
172         % Update progress window
173         %------------------------------------------
174         hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
        S.modelPar);
175         fprintf('   Function evaluation #%d\n', nFnEval);
176 
177         %------------------------------------------
178         % Write current parameters to temp input file
179         %------------------------------------------
180         updateEvaluateValues(inpFileTemp, S.modelPar, x,
        ~isDryRunCall);
181 
182         %------------------------------------------
183         % Run ATENA
184         %------------------------------------------
185         fprintf('%s  Launching ATENA...\n', datestr(now));
186         [status, cmdout] = runAnalysis(S.exeName, inpFileTemp, ...
187                                        S.AtenaOut, S.AtenaMsg,
        S.AtenaErr);
188 
189         if status ~= 0
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            warning('ATENA failed at evaluation #%d:\n%s', nFnEval,
    cmdout);
            res = ones(size(S.fieldAggValues));
            predictedLast = nan(size(S.fieldAggValues));
            resLast       = res;

            if ~isDryRunCall
                logEval(logFID, nFnEval, x, NaN, 'ATENA_FAIL');
            end

            return
        end

        %----------------------------------------
        % Preserve a copy of the ATENA output file
        % after each successful true optimization run.
        % The dry run is deliberately skipped to avoid
        % overwriting out-1.out before the real run starts.
        %----------------------------------------
        if ~isDryRunCall
            [pth, nam, ext] = fileparts(S.outFile);
            outCopy = fullfile(pth, sprintf('%s-%d%s', nam, nFnEval,
    ext));

            if isfile(S.outFile)
                [copyOK, copyMsg] = copyfile(S.outFile, outCopy);
                if ~copyOK
                    warning('Could not copy ATENA output file at
    evaluation #%d:\n%s', ...
                            nFnEval, copyMsg);
                else
                    fprintf('   Copied ATENA output to %s\n', outCopy);
                end
            else
                warning('Expected ATENA output file not found at
    evaluation #%d:\n%s', ...
                        nFnEval, S.outFile);
            end
        end

        %----------------------------------------
        % Read model predictions
        %----------------------------------------
        ModelPredValues = readModelPredValues(S.outFile, S.modelPred);

```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
231         %-----------------------------------------
232         % Compute aggregated predictions
233         %-----------------------------------------
234         predicted = cellfun(@(f) f(ModelPredValues), S.fieldAggFcn);
235 
236         %-----------------------------------------
237         % Compute residuals
238         %-----------------------------------------
239         res      = predicted - S.fieldAggValues;
240         norm_res = norm(res);
241 
242         predictedLast = predicted;
243         resLast       = res;
244 
245         %-----------------------------------------
246         % Guard against NaN/Inf from bad ATENA output
247         %-----------------------------------------
248         if any(~isfinite(res))
249             warning('NaN/Inf in residuals at eval #%d - substituting
    1e6', nFnEval);
250             res(~isfinite(res)) = 1e6;
251             norm_res = norm(res);
252             resLast  = res;
253 
254             if ~isDryRunCall
255                 logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'NAN_IN_RES');
256             end
257         else
258             if ~isDryRunCall
259                 logEval(logFID, nFnEval, x, norm_res, 'OK');
260             end
261         end
262 
263         fprintf('   Norm of residual: %.6e\n', norm_res);
264 
265         %-----------------------------------------
266         % Update progress window with norm
267         %-----------------------------------------
268         hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, x,
    S.modelPar, norm_res);
269 
270         %-----------------------------------------
271         % Update dashboard
272         %-----------------------------------------
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, x, predictedLast, resLast, ...
                                 nFnEval, isIteration, isDryRunCall);

        %----------------------------------------
        % Log true iterations to Excel and save snapshot
        %----------------------------------------
        if isIteration
            nIter = nIter + 1;
            fprintf('   === Iteration #%d completed, norm = %.6e ===\n', nIter, norm_res);

            X = [X; x(:)'];

            iterTime_hr = toc(lastIterTic) / 3600;
            lastIterTic = tic;

            predOverTarget = nan(size(predictedLast));
            mask = isfinite(predictedLast) & ...
                   isfinite(S.fieldAggValues) & ...
                   (S.fieldAggValues ~= 0);

            predOverTarget(mask) = predictedLast(mask) ./ S.fieldAggValues(mask);

            logIterationToSheet('Log.xlsx', piSheetName, nIter, x, ...
                                predOverTarget, resLast, iterTime_hr);

            save(sprintf('iter_%03d.mat', nIter), ...
                 'x', 'norm_res', 'res', 'nIter', 'nFnEval', ...
                 'predictedLast', 'predOverTarget', 'iterTime_hr');
        end

    end % minfunc

end % ParIdentification


%==========================================================
% LOCAL HELPER: write one line to the CSV evaluation log
%==========================================================
function logEval(fid, callNum, x, normVal, status)
    if isnan(normVal)
        normStr = 'NaN';
    else
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        normStr = sprintf('%.8f', normVal);
    end
    xStr = strjoin(arrayfun(@(v) sprintf('%.6f', v), x(:)', ...
        'UniformOutput', false), ',');
    fprintf(fid, '%d,%s,%s,%s\n', callNum, xStr, normStr, status);
end


%=========================================================================
% LOCAL FUNCTION: progress window
%=========================================================================
function hProgress = updateProgressWindow(hProgress, nFnEval, nIter, ...
    x, parNames, normRes)
%UPDATEPROGRESSWINDOW Create or update a small progress window.

    if isempty(hProgress) || ~ishandle(hProgress)
        hProgress = figure('Name',        'Optimization Progress', ...
                           'NumberTitle', 'off', ...
                           'MenuBar',     'none', ...
                           'ToolBar',     'none', ...
                           'Resize',      'off', ...
                           'Position',    [20 20 320 400], ...
                           'Color',       [0.95 0.95 0.95]);

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblFnEval', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 360 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblIter', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 330 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', 'Tag', 'lblNorm', ...
            'Units', 'pixels', 'Position', [10 300 300 28], ...
            'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
            'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
            'HorizontalAlignment', 'left');

        nPar = numel(parNames);
        for k = 1:nPar
            yPos = 270 - (k - 1) * 25;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
            uicontrol(hProgress, 'Style', 'text', ...
                'Tag', sprintf('lblPar%d', k), ...
                'Units', 'pixels', ...
                'Position', [10 yPos 300 22], ...
                'FontSize', 9, ...
                'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95], ...
                'HorizontalAlignment', 'left');
        end
    end

    setfield_text(hProgress, 'lblFnEval', sprintf('Function evaluations: %d', nFnEval));
    setfield_text(hProgress, 'lblIter',   sprintf('Iterations completed: %d', nIter));

    if nargin >= 6 && ~isempty(normRes)
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', sprintf('Norm of residual: %.4e', normRes));
    else
        setfield_text(hProgress, 'lblNorm', 'Norm of residual: ...');
    end

    for k = 1:numel(x)
        setfield_text(hProgress, sprintf('lblPar%d', k), ...
            sprintf('  %s = %.6g', parNames{k}, x(k)));
    end

    drawnow;
end


function setfield_text(hFig, tag, str)
    h = findobj(hFig, 'Tag', tag);
    if ~isempty(h)
        set(h, 'String', str);
    end
end
```

Listing I.3: ParIdentification.m – Nested objective function and local helpers (part 2 of 2)

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

I.4.3 数据 I/O 和 Spreadsheet 集成

本部分包含所有负责从 Excel 控制表中阅读配置的功能, 从 ATENA 输入文件中提取模型参数和界限, 并管理 迭代日志。和 **阅读** `Input` 函数通过基于关键词的搜索模式阅读所有解决方案选项、参数名称、预测名称和集成表达式。和 **外文评估** 和 **更新评估** 函数分别在输入文件中的评估线进行分解和修改。模型预测产量是由 **阅读 优点**, 从 ATENA 输出文件中阻止数据, 并为每个请求的数量提取最终监控值。最后，**入口信** 和 **标签** 函数管理 Excel 文件中的序列式 迭代日志, 记录 迭代次数、时间表、过渡时间、参数值、预测到目标的比率和剩余。

```
function S = readInputSheet(filename, sheetName)
%READINPUTSHEET Read optimization input data from Excel sheet.
if nargin < 1 || isempty(filename);  filename  = 'Log.xlsx'; end
if nargin < 2 || isempty(sheetName); sheetName = 'Input';    end
    raw = readcell(filename, 'Sheet', sheetName);
    S.exeName        = readScalarByKey(raw, 'exeName');
    S.inpFile        = readScalarByKey(raw, 'inpFile');
    S.outFile        = readScalarByKey(raw, 'outFile');
    S.modelPar       = readTextVectorByKey(raw, 'modelPar');
    S.modelPred      = readTextVectorByKey(raw, 'modelPred');
    S.fieldAggExpr   = readTextVectorByKey(raw, 'fieldAggExp');
    S.fieldAggValues = readNumericVectorByKey(raw, 'fieldAggValues');
    S.fieldAggFcn    = buildFieldAggFunctions(S.fieldAggExpr,
   S.modelPred);
    S.maxFunEval     = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxFunEval'));
    S.maxIter        = str2double(readScalarByKey(raw, 'maxIter'));
    S.tolFun         = str2double(readScalarByKey(raw, 'tolFun'));
    S.tolX = str2double(readScalarByKey(raw, 'StepTol'));
    S.algorithm      = readScalarByKey(raw, 'algorithm');
    S.display        = readScalarByKey(raw, 'display');
    S.fdStepSize     = str2double(readScalarByKey(raw,
   'FiniteDifferenceStepSize'));
    S.fdType         = readScalarByKey(raw, 'FiniteDifferenceType');

    S.AtenaOut=[S.inpFile '.out'];
    S.AtenaErr=[S.inpFile '.err'];
    S.AtenaMsg=[S.inpFile '.msg'];
    S.inpFile=[S.inpFile '.inp'];
end
```

Listing I.4: readInputSheet.m – Read all configuration from Excel

```
function [x, lb, ub] = extractEvaluateValues(filename, names)
%EXTRACTEVALUATEVALUES Extract EVALUATE values and bounds from input
    file.
%
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   Reads each EVALUATE line of the form:
%       EVALUATE "Name = /*# Name */ value"   // Recommended range lb - ub
%   and returns the current values, lower bounds, and upper bounds for the
%   requested parameter names. Bounds are set to NaN if not present on the line.
%
%   Inputs:
%       filename - path to the input file (e.g. S.inpFile)
%       names    - cell array of parameter names (e.g. S.modelPar)
%
%   Outputs:
%       x  - current parameter values  [1 x n]
%       lb - lower bounds              [1 x n]
%       ub - upper bounds              [1 x n]
%
%   Example:
%       [x0, lb, ub] = extractEvaluateValues(S.inpFile, S.modelPar);
    if ischar(names) || isstring(names); names = cellstr(names); end
    txt   = fileread(filename);
    lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');
    lookupX  = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupLB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    lookupUB = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
    numPat = '([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][+-]?\d+)?)';
    for i = 1:numel(lines)
        line = strtrim(lines{i});
        if ~strncmpi(line, 'EVALUATE', 8); continue; end
        tok = regexp(line, ...
['EVALUATE\s+"([A-Za-z0-9_]+)\s*=\s*/\*#\s*[A-Za-z0-9_]+\s*\*/\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if isempty(tok); continue; end
        varName = strtrim(tok{1});
        varVal  = str2double(tok{2});
        lookupX(varName) = varVal;
        tokBounds = regexp(line, ...
            ['Recommended\s+range\s+' numPat '\s*-\s*' numPat], ...
            'tokens', 'once');
        if ~isempty(tokBounds)
            lookupLB(varName) = str2double(tokBounds{1});
            lookupUB(varName) = str2double(tokBounds{2});
        else
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            lookupLB(varName) = NaN;
            lookupUB(varName) = NaN;
        end
    end
    x  = NaN(1, numel(names));
    lb = NaN(1, numel(names));
    ub = NaN(1, numel(names));
    for i = 1:numel(names)
        key = char(names{i});
        if isKey(lookupX,  key); x(i)  = lookupX(key);  end
        if isKey(lookupLB, key); lb(i) = lookupLB(key); end
        if isKey(lookupUB, key); ub(i) = lookupUB(key); end
    end
end
```

Listing I.5: extractEvaluateValues.m – Parse EVALUATE lines from input file

```
function inpFileTemp = createTempInputFile(inpFile)
%CREATETEMPINPUTFILE Create a temporary copy of the input file for optimization.
%
%   Creates a working copy of the input file that will be continuously
%   overwritten during the optimization iterations, leaving the original
%   input file untouched.
%
%   Input:
%       inpFile     - path to the original input file (e.g. S.inpFile)
%
%   Output:
%       inpFileTemp - path to the temporary copy (e.g. 'input_temp.dat')
%
%   Example:
%       inpFileTemp = createTempInputFile(S.inpFile);
    [folder, name, ext] = fileparts(inpFile);
    inpFileTemp = fullfile(folder, [name '_temp' ext]);
    [ok, msg]   = copyfile(inpFile, inpFileTemp);
    if ~ok; error('Could not copy %s to %s: %s', inpFile, inpFileTemp, msg); end
end
```

Listing I.6: createTempInputFile.m – Create working copy of input file

```
function updateEvaluateValues(filename, names, Xnew, verbose)
    if nargin < 4
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        verbose = true;
    end
%UPDATEEVALUATEVALUES Overwrite EVALUATE values in input file with new values.
%
%   Reopens the input file and replaces the numeric values associated with
%   each parameter name in 'names' with the corresponding new values in
%   Xnew. The file format expected is:
%       EVALUATE "ParName = /*# ParName */ oldvalue"

    if numel(names) ~= numel(Xnew)
        error('names and Xnew must have the same number of elements.');
    end

    txt = fileread(filename);

    for k = 1:numel(names)
        name     = char(names{k});
        valueStr = num2str(Xnew(k), '%.15g');

        pattern = ['(EVALUATE\s+"', regexptranslate('escape', name), ...
                   '\s*=\s*/\*#\s*', regexptranslate('escape', name), ...
   '\s*\*/\s*)([-+]?\d*\.?\d+(?:[eEdD][-+]?\d+)?)(\")'];

        % Check whether the parameter line is found
        tok = regexp(txt, pattern, 'tokens', 'once');

        if isempty(tok)
            warning('Parameter %s not found in file %s.', name, filename);
            continue
        end

        oldValueStr = tok{2};

        repl   = ['$1' valueStr '$3'];
        txtNew = regexprep(txt, pattern, repl, 'once');

        if strcmp(strtrim(oldValueStr), strtrim(valueStr))
            if verbose
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
                fprintf('Parameter %s matched; value unchanged
    (%s)\n', name, valueStr);
            end
        else
            if verbose
                fprintf('Parameter %s updated: %s -> %s\n', name,
    oldValueStr, valueStr);
            end
        end

        txt = txtNew;
    end

    fid = fopen(filename, 'w');
    if fid == -1
        error('Could not open %s for writing.', filename);
    end
    cleaner = onCleanup(@() fclose(fid));
    fwrite(fid, txt, 'char');
end
```

Listing I.7: updateEvaluateValues.m – Overwrite parameters in input file

```
function ModelPredValues = readModelPredValues(outFile, modelPred)
%READMODELPREDVALUES  Read the last monitored value for each modelPred
    string
%                     from an ATENA output file (monitors.csv /
    output.dat).
%
%  Each block in the file has the structure:
%
%    Output data for request ;
    MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000 ;
%    Data for the monitored output: ...
%    ; Step ; 5 ; Iteration ; 60 ; at Time ; 5 ;
%    ----...---- ;
%    Id ;  Time ;  Step ;  X(1) ;            <- header  (skipped)
%    Units ;  day ;  None ;  m ;             <- units   (skipped)
%    1 ;  0. ;  0. ;  0. ;                  <- data rows
%    ...
%    6 ;  5. ;  5. ;  0.0013112 ;           <- LAST data row -> value
    kept
%
%  The value of interest is the LAST numeric token on the LAST data row
%  (i.e. the last non-empty field before the trailing ";").  This
    handles
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%  blocks with 1 output column (X(1) only) as well as blocks with 3 columns
%  (X(1), X(2), X(3)), where the relevant displacement has been pre-selected
%  by the monitor definition.
%
%  Matching is case-insensitive: modelPred = 'SAB_86m_X' matches
%  'MONITOR_SET_2_SAB_86M_X_|108309|_DISPLACEMENTS #100000'.
%
%  INPUT
%    outFile   - path to the ATENA output file
%    modelPred - char, string, or cell array of strings to look up
%
%  OUTPUT
%    ModelPredValues - 1 x numel(modelPred) double (NaN if not found)

% --- normalise modelPred to a cell array of char
if ischar(modelPred) || isstring(modelPred)
    modelPred = cellstr(modelPred);
end
nPred = numel(modelPred);

% --- read file
txt   = fileread(outFile);
lines = regexp(txt, '\r\n|\n|\r', 'split');

% --- initialise state machine
lookup     = containers.Map('KeyType','char','ValueType','double');
currentKey = '';   % modelPred entry currently being accumulated
lastVal    = NaN;  % last valid numeric value seen in current block

% --- pattern for the block-header line
headerPat = 'Output\s+data\s+for\s+request\s*;\s*([^;]+)\s*;';

for i = 1:numel(lines)
    line = strtrim(lines{i});

    % ---- detect a new block header
    tok = regexp(line, headerPat, 'tokens', 'once');
    if ~isempty(tok)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        % save whatever we accumulated for the previous block
        if ~isempty(currentKey)
            lookup(currentKey) = lastVal;
        end

        requestName = upper(strtrim(tok{1}));
        currentKey  = '';
        lastVal     = NaN;

        % find which modelPred (if any) this block belongs to
        for j = 1:nPred
            candidate = char(modelPred{j});
            if contains(requestName, upper(candidate))
                currentKey = candidate;   % keep original spelling as key
                break
            end
        end
        continue
    end

    % ---- only process data lines when inside a matching block -------
    if isempty(currentKey)
        continue
    end

    % skip separator, header, and units lines
    if isempty(line) ...
            || startsWith(line, '-') ...
            || startsWith(line, 'Id') ...
            || startsWith(line, 'Units') ...
            || startsWith(line, 'Data') ...
            || startsWith(line, ';')          % summary line "  ; Step ; 5 ..."
        continue
    end

    % ---- parse a data row ---------------------------------------------
    % Data rows look like:  "    6 ;         5. ;         5. ;  0.0013112 ;"
    % Split on ";", strip whitespace, drop empty tokens.
    cols = strsplit(line, ';');
    cols = strtrim(cols);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    cols = cols(~cellfun(@isempty, cols));   % remove trailing empty field

    % A valid data row must start with an integer Id (first field is a
    % non-negative integer or a number with a trailing dot like "6.").
    if isempty(cols)
        continue
    end
    firstNum = str2double(cols{1});
    if isnan(firstNum) || firstNum < 0 || firstNum ~= floor(firstNum)
        % not a numeric data row (e.g. a stray text line)
        % allow "6." style (floor(6.) == 6)
        if ~(~isnan(firstNum) && firstNum == floor(firstNum))
            continue
        end
    end

    % The value of interest is the LAST numeric token in the row.
    % (For a 3-component block the monitor definition selects one direction,
    %  which happens to be the last populated column.)
    v = NaN;
    for k = numel(cols):-1:1
        candidate_v = str2double(cols{k});
        if ~isnan(candidate_v)
            v = candidate_v;
            break
        end
    end
    if ~isnan(v)
        lastVal = v;   % keep updating; loop ends on the last row
    end
end

% --- save the final block
% -------------------------------------------------
if ~isempty(currentKey)
    lookup(currentKey) = lastVal;
end

% --- assemble output vector
% ------------------------------------------------
ModelPredValues = NaN(1, nPred);
for i = 1:nPred
    key = char(modelPred{i});
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    if isKey(lookup, key)
        ModelPredValues(i) = lookup(key);
    end
end

end
```

Listing I.8: readModelPredValues.m – Extract monitored outputs from ATENA output

```
function piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%INITPISHEET Create a new PI #n sheet in row-wise format.
%
%   piSheetName = initPISheet(logFile, S, x0)
%
%   Creates the next available sheet named PI #1, PI #2, ...
%   and writes:
%     - row 1: headers
%     - row 2: iteration 0 (initial guess x0)
%
%   Columns are:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
    <Pred/Target...> | <Residual...>

    %-----------------------------------------------------------------
    % Determine next available PI sheet name
    %-----------------------------------------------------------------
    [~, sheetNames] = xlsfinfo(logFile);
    if isempty(sheetNames)
        sheetNames = {};
    end

    n = 1;
    while any(strcmp(sheetNames, sprintf('PI #%d', n)))
        n = n + 1;
    end
    piSheetName = sprintf('PI #%d', n);

    nPar = numel(S.modelPar);
    nAgg = numel(S.fieldAggExpr);

    %-----------------------------------------------------------------
    % Build header row
    %-----------------------------------------------------------------
    headers = cell(1, 3 + nPar + nAgg + nAgg);
    c = 1;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    headers{c} = 'Iter';          c = c + 1;
    headers{c} = 'Timestamp';     c = c + 1;
    headers{c} = 'IterTime_hr';   c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        headers{c} = S.modelPar{k};
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:nAgg
        headers{c} = sprintf('PredTarget_%02d', k);
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:nAgg
        headers{c} = sprintf('Residual_%02d', k);
        c = c + 1;
    end

    %-----------------------------------------------------------------
    % Build iteration-0 row
    %-----------------------------------------------------------------
    row0 = cell(1, numel(headers));
    c = 1;

    row0{c} = 0;                                          c = c + 1;
    row0{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS'); c = c + 1;
    row0{c} = 0;                                          c = c + 1;

    for k = 1:nPar
        row0{c} = x0(k);
        c = c + 1;
    end

    % Leave blank for Pred/Target and Residual columns
    for k = 1:(2*nAgg)
        row0{c} = [];
        c = c + 1;
    end

    %-----------------------------------------------------------------
    % Write to Excel
    %-----------------------------------------------------------------
    warning('off', 'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
    xlswrite(logFile, headers, piSheetName, 'A1');
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
    xlswrite(logFile, row0,     piSheetName, 'A2');
    warning('on',  'MATLAB:xlswrite:AddSheet');
end
```

Listing I.9: initPISheet.m – Create new PI log sheet with headers

```
function logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x,
   predOverTarget, res, iterTime_hr)
%LOGITERATIONTOSHEET Append one iteration as one row to the PI sheet.
%
%   logIterationToSheet(logFile, sheetName, nIter, x, predOverTarget,
   res, iterTime_hr)
%
%   Appends a new row with:
%     Iter | Timestamp | IterTime_hr | <parameters...> |
   <Pred/Target...> | <Residual...>

    if nargin < 7
        error('logIterationToSheet requires 7 inputs.');
    end

    x = x(:).';
    predOverTarget = predOverTarget(:).';
    res = res(:).';

    [~, ~, raw] = xlsread(logFile, sheetName);

    if isempty(raw)
        nextRow = 1;
    else
        nextRow = size(raw, 1) + 1;
    end

    row = cell(1, 3 + numel(x) + numel(predOverTarget) + numel(res));
    c = 1;

    row{c} = nIter;                                  c = c + 1;
    row{c} = datestr(now, 'dd-mmm-yyyy HH:MM:SS');   c = c + 1;
    row{c} = iterTime_hr;                            c = c + 1;

    for k = 1:numel(x)
        row{c} = x(k);
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:numel(predOverTarget)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        if isfinite(predOverTarget(k))
            row{c} = predOverTarget(k);
        elseif isnan(predOverTarget(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
    end

    for k = 1:numel(res)
        if isfinite(res(k))
            row{c} = res(k);
        elseif isnan(res(k))
            row{c} = 'NaN';
        else
            row{c} = 'Inf';
        end
        c = c + 1;
    end

    range = sprintf('A%d', nextRow);
    xlswrite(logFile, row, sheetName, range);
end
```

Listing I.10: logIterationToSheet.m – Append iteration row to PI log

I.4.4 优化工作流和辅助功能

此部分包含其余的公共功能, 实施优化路径和实时板, 以及所有私人助理功能。和 **跑步分析** 函数将外部 ATENA 溶剂作为背景过程启动, 并捕获其控制台输出。和 **拉丁文** 功能取代 MATLAB 的原生 **李克强** 优化, 应用从控制表中阅读的溶剂选项, 并根据参数界限计算适应性容量。和 **更新** 函数保留了两个直播板的图像: 一个显示废物 (预测 VS 目标和绝对剩余在日志规模) 其它跟踪参数在所有功能评估中进化, 与探测评估和真实的 iterations 之间的区别。在私人助理中 **职位** / **私人** 文件夹提供低级别的工具, 用于从分布表中阅读配置数据, 从用户定义表达式构建集成功能, 并在搜索过程中正常化文本。

```
function [status, cmdout] = runAnalysis(exeName, inpFile, outFile,
    msgFile, errFile)
    % Kill any lingering ATENA processes before starting
    [~, exeOnly, ext] = fileparts(exeName);
    system(sprintf('taskkill /F /IM "%s%s" /T 2>nul', exeOnly, ext));
    pause(3); % give OS time to release file locks

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    cmd = sprintf('"%s" /O "%s" "%s" "%s" "%s" /num_unused_threads=2',
    ...
        exeName, inpFile, outFile, msgFile, errFile);
    [status, cmdout] = system(cmd, '-echo');
end
```

Listing I.11: runAnalysis.m – Launch external ATENA solver

```
function [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0,
    minfunc)
%RUNLSQNONLIN Set up and run lsqnonlin using solver options from
    Log.xlsx.
%
%   Tunable options (read from Excel):  Display, MaxFunEvals, MaxIter,
%                                       TolFun, TolX (dimensionless,
%                                       scaled internally by
    mean(lb+ub)/2),
%                                       Algorithm,
    FiniteDifferenceStepSize,
%                                       FiniteDifferenceType
%   Hardwired options:                  TypicalX=mean(lb,ub)
%
%   Example:
%       [x, norm, res, exitflag, output] = runLSQnonlin(S, x0, lb, ub,
    @minfunc);
    lb       = S.lb;
    ub       = S.ub;
    typicalX = (ub - lb) ./ 2;
    TolX     = S.tolX .* mean(typicalX);

    options = optimoptions('lsqnonlin', ...
        'Algorithm',                S.algorithm, ...
        'Display',                  S.display, ...
        'MaxFunctionEvaluations',   S.maxFunEval, ...
        'MaxIterations',            S.maxIter, ...
        'FunctionTolerance',        S.tolFun, ...
        'StepTolerance',            TolX, ...
        'FiniteDifferenceStepSize', S.fdStepSize, ...
        'FiniteDifferenceType',     S.fdType, ...
        'TypicalX',                 typicalX)

    [x, norm, res, exitflag, output] = lsqnonlin(minfunc, x0, lb, ub,
    options);
end
```

Listing I.12: runLSQnonlin.m – Configure and run optimizer

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
function hDashboard = updatePlots(hDashboard, S, X, xCur, predicted,
    res, nFnEval, isIteration, isIterZero)
%UPDATEPLOTS  Real-time dashboard, two separate figures.
%
%  Figure 1 "Residuals"  -- 2 rows x nAgg cols
%    Row 1 : predicted / target  (reference line at 1)
%    Row 2 : |residual| on log scale
%
%  Figure 2 "Parameters" -- 2 rows x ceil(nPar/2) cols
%    Row 1 : first  half of modelPar
%    Row 2 : second half of modelPar
%    Both  : grey probe dots (every fnEval), filled blue at true
    iterations,
%            dashed red lb / green ub lines.
%
%  X-axis everywhere: function-evaluation number.
%  True iterations fall at eval numbers nPar+1, 2*(nPar+1), ...
%
%  hDashboard is a struct with fields .res and .par; pass [] on first
    call.

    if nargin < 9
        isIterZero = false;
    end

    nAgg   = numel(S.fieldAggExpr);
    nPar   = numel(S.modelPar);
    nHalf  = ceil(nPar / 2);
    nHalf2 = nPar - nHalf;

    % ---------------------------------------------------------------
    % Build compact aggregate labels for titles
    % ---------------------------------------------------------------
    aggLabels = S.fieldAggExpr;
    for k = 1:nAgg
        lbl = aggLabels{k};
        lbl = regexprep(lbl, '^S([A-Z]{2}_)', '$1');
        aggLabels{k} = lbl;
    end

    % ---------------------------------------------------------------
    % Create figures on first call
    % ---------------------------------------------------------------
    needCreate = isempty(hDashboard) || ~isstruct(hDashboard) || ...
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                ~isfield(hDashboard,'res') ||
~ishandle(hDashboard.res) || ...
                ~isfield(hDashboard,'par') ||
~ishandle(hDashboard.par);

 if ~needCreate
     ud_check = get(hDashboard.res, 'UserData');
     if ~isstruct(ud_check) || ~isfield(ud_check, 'relErrHist') ||
...
        ~isfield(ud_check, 'xHist') || ...
        size(ud_check.relErrHist, 2) ~= nAgg || ...
        size(ud_check.xHist, 2) ~= nPar
         try, close(hDashboard.res); end %#ok<TRYNC>
         try, close(hDashboard.par); end %#ok<TRYNC>
         needCreate = true;
     end
 end

 if needCreate
     scr = get(0, 'ScreenSize');

     % Figure 1: residuals -- upper half of screen
     fw1 = min(scr(3) * 0.98, nAgg * 220 + 120);
     fh1 = min(scr(4) * 0.48, 520);
     hDashboard.res = figure( ...
         'Name',        'Optimization -- Residuals', ...
         'NumberTitle', 'off', ...
         'Position',    [4, scr(4)*0.48, fw1, fh1]);

     % Figure 2: parameters -- lower half of screen
     parCols = max(nHalf, nHalf2);
     fw2 = min(scr(3) * 0.60, parCols * 230 + 100);
     fh2 = min(scr(4) * 0.44, 460);
     hDashboard.par = figure( ...
         'Name',        'Optimization -- Parameters', ...
         'NumberTitle', 'off', ...
         'Position',    [4, 30, fw2, fh2]);

     % History stored in Figure 1 UserData
     MAXEVAL = 10000;
     ud.relErrHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
     ud.absResHist = nan(MAXEVAL, nAgg);
     ud.xHist      = nan(MAXEVAL, nPar);
     ud.fEvalVec   = nan(1, MAXEVAL);
     ud.nE         = 0;
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
        set(hDashboard.res, 'UserData', ud);
    end

    % ---------------------------------------------------------------
    % Append current evaluation to history
    % ---------------------------------------------------------------
    ud    = get(hDashboard.res, 'UserData');
    nE    = ud.nE + 1;
    ud.nE = nE;

    if nE > size(ud.relErrHist, 1)
        growBy = 10000;
        ud.relErrHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.absResHist(end+growBy, nAgg) = nan;
        ud.xHist(end+growBy, nPar)      = nan;
        ud.fEvalVec(end+growBy)         = nan;
    end

    ud.fEvalVec(nE) = nFnEval;
    ud.xHist(nE, :) = xCur(:)';

    for k = 1:nAgg
        if S.fieldAggValues(k) == 0
            ud.relErrHist(nE, k) = nan;
        else
            ud.relErrHist(nE, k) = predicted(k) / S.fieldAggValues(k);
        end
        ud.absResHist(nE, k) = abs(res(k));
    end
    set(hDashboard.res, 'UserData', ud);

    ev = ud.fEvalVec(1:nE);

    % True-iteration eval numbers
    nIterSoFar  = size(X, 1);
    iterEvalNos = (nPar + 1) * (1:nIterSoFar);
    iterEvalNos(iterEvalNos > nFnEval) = [];
    nIterPlot   = numel(iterEvalNos);

    % Keep eval 0 visible when present
    xMin = min([0 ev]);
    xMax = max([5 nFnEval + ceil(0.05 * max(nFnEval,1) + 1)]);
    xlimVec = [xMin, xMax];

    % ---------------------------------------------------------------
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
    % Global y-limits for residual row on log scale
    % -------------------------------------------------------------------
    absRaw   = ud.absResHist(1:nE, :);
    absClean = absRaw(~isnan(absRaw) & isfinite(absRaw) & absRaw > 0);

    if isempty(absClean)
        absMin = 1e-12;
        absMax = 1;
    else
        absMin = min(absClean);
        absMax = max(absClean);

        if absMin <= 0 || ~isfinite(absMin)
            absMin = 1e-12;
        end
        if absMax <= absMin || ~isfinite(absMax)
            absMax = 10 * absMin;
        end

        absMin = 10^(floor(log10(absMin)));
        absMax = 10^(ceil(log10(absMax)));
    end
```

Listing I.13: updatePlots.m – Real-time dashboard figures (part 1 of 4)

```
    % ===================================================================
    % FIGURE 1 -- Residuals
    % ===================================================================
    figure(hDashboard.res);

    for k = 1:nAgg

        % ---- Row 1: relative error ----
        ax = subplot(2, nAgg, k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
        grid(ax, 'on');
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, ud.relErrHist(1:nE, k), 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.30 0.30 0.30], ...
             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);
        yline(ax, 1, '--r', 'LineWidth', 1.4);

        if isIterZero && nE > 0
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            scatter(ax, ev(nE), ud.relErrHist(nE, k), 36, 'r',
    'filled');
        end

        title(ax, makeTwoLineTitle(aggLabels{k}), ...
              'Interpreter', 'none', ...
              'FontSize', 8, 'FontWeight', 'normal');

        if k == 1
            ylabel(ax, 'Pred / Target');
        end

        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);

        ydata = ud.relErrHist(1:nE, k);
        ydata = ydata(~isnan(ydata) & isfinite(ydata));
        if isempty(ydata)
            ylim(ax, [0, 2]);
        elseif all(ydata >= 0) && all(ydata <= 2)
            ylim(ax, [0, 2]);
        else
            yMin = min(ydata);
            yMax = max(ydata);
            if yMin == yMax
                pad = max(0.1 * max(abs(yMax),1), 0.1);
            else
                pad = 0.10 * (yMax - yMin);
            end
            ylim(ax, [yMin - pad, yMax + pad]);
        end

        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');

        % ---- Row 2: absolute residual on log scale ----
        ax = subplot(2, nAgg, nAgg + k);
        cla(ax); hold(ax, 'on');
        grid(ax, 'on');
        set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

        absPlot = ud.absResHist(1:nE, k);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        absPlot(~isfinite(absPlot)) = nan;
        absPlot(absPlot <= 0) = 1e-12;

        plot(ax, ev, absPlot, '-', ...
             'Color', [0.72 0.72 0.72], 'LineWidth', 0.7);
        plot(ax, ev, absPlot, 'o', ...
             'MarkerSize', 3.5, 'Color', [0.15 0.15 0.15], ...
             'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

        if isIterZero && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 44, 's', ...
                    'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'k');
        elseif isIteration && nE > 0
            y0 = ud.absResHist(nE, k);
            if ~isfinite(y0) || y0 <= 0
                y0 = 1e-12;
            end
            scatter(ax, ev(nE), y0, 36, 'r', 'filled');
        end

        if k == 1
            ylabel(ax, '|Residual|');
        end
        xlabel(ax, 'Fn eval');
        xlim(ax, xlimVec);
        set(ax, 'YScale', 'log');
        ylim(ax, [absMin, absMax]);
        applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);
        hold(ax, 'off');
    end
```

Listing I.14: updatePlots.m – Residuals figure (part 2 of 4)

```
    % ================================================================
    % FIGURE 2 -- Parameters
    % ================================================================
    figure(hDashboard.par);

    parCols = max(nHalf, nHalf2);

    for row = 1:2
        if row == 1
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
            idxList = 1:nHalf;
        else
            idxList = nHalf + (1:nHalf2);
        end

        for col = 1:numel(idxList)
            k  = idxList(col);
            ax = subplot(2, parCols, (row - 1) * parCols + col);
            cla(ax); hold(ax, 'on');
            grid(ax, 'on');
            set(ax, 'GridAlpha', 0.20);

            % All probes -- grey line + open circles
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), '-', ...
                 'Color', [0.78 0.78 0.78], 'LineWidth', 0.7);
            plot(ax, ev, ud.xHist(1:nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 4, 'Color', [0.50 0.50 0.50], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 0.8);

            % True iterations -- filled blue
            if nIterPlot > 0
                scatter(ax, iterEvalNos(1:nIterPlot), X(1:nIterPlot,
k)', ...
                        50, [0.12 0.47 0.71], 'filled', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'none');
            end

            % Iteration 0 -- filled black square
            if isIterZero && nE > 0
                scatter(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 48, 's', ...
                        'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor',
'k');
            end

            % Current probe -- bold open black circle
            plot(ax, ev(nE), ud.xHist(nE, k), 'o', ...
                 'MarkerSize', 7, 'Color', [0 0 0], ...
                 'MarkerFaceColor', 'none', 'LineWidth', 1.3);

            % Bounds
            yline(ax, S.lb(k), '--r', 'LineWidth', 1.1, ...
                  'Label', 'lb', 'LabelHorizontalAlignment', 'left',
...
                  'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');
            yline(ax, S.ub(k), '--', 'Color', [0.13 0.55 0.13], ...
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                    'LineWidth', 1.1, ...
                    'Label', 'ub', 'LabelHorizontalAlignment', 'left',
    ...
                    'FontSize', 8, 'FontWeight', 'bold');

            title(ax, S.modelPar{k}, 'Interpreter', 'none', ...
                    'FontSize', 9, 'FontWeight', 'bold');
            xlabel(ax, 'Fn eval');
            if col == 1
                ylabel(ax, 'Value');
            end
            xlim(ax, xlimVec);
            applyIntegerXTicks(ax, xlimVec);

            span = S.ub(k) - S.lb(k);
            if span <= 0
                span = max(abs(S.ub(k)), 1);
            end
            margin = 0.12 * span;
            ylim(ax, [S.lb(k) - margin, S.ub(k) + margin]);

            hold(ax, 'off');
        end
    end

    drawnow limitrate;
end
```

Listing I.15: updatePlots.m – Parameters figure (part 3 of 4)

```
% ========================================================================
function out = makeTwoLineTitle(in)
% Try to insert one sensible line break for long aggregate expressions.

    out = strtrim(in);

    if numel(out) <= 16
        return
    end

    % Prefer to break after the last '+' before midpoint
    mid = floor(numel(out) / 2);
    idx = find(out(1:mid) == '+', 1, 'last');

    % If none, break after the first '+' after midpoint
    if isempty(idx)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        idx2 = find(out(mid+1:end) == '+', 1, 'first');
        if ~isempty(idx2)
            idx = mid + idx2;
        end
    end

    % If still none, try '/'
    if isempty(idx)
        idx = find(out(1:mid) == '/', 1, 'last');
        if isempty(idx)
            idx2 = find(out(mid+1:end) == '/', 1, 'first');
            if ~isempty(idx2)
                idx = mid + idx2;
            end
        end
    end

    % If still none, try a blank near midpoint
    if isempty(idx)
        leftBlank  = find(out(1:mid) == ' ', 1, 'last');
        rightBlank = find(out(mid+1:end) == ' ', 1, 'first');
        if ~isempty(leftBlank)
            idx = leftBlank;
        elseif ~isempty(rightBlank)
            idx = mid + rightBlank;
        end
    end

    if isempty(idx)
        return
    end

    if idx < numel(out)
        out = [strtrim(out(1:idx)) sprintf('\n')
   strtrim(out(idx+1:end))];
    end
end

% ========================================================================
function applyIntegerXTicks(ax, xlimVec)
% Use integer ticks when the range is small, otherwise use a
   reasonable set.

    x0 = floor(xlimVec(1));
    x1 = ceil(xlimVec(2));
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    span = x1 - x0;

    if span <= 10
        xticks(ax, x0:x1);
    elseif span <= 20
        xticks(ax, x0:2:x1);
    else
        step = max(5, ceil(span / 6));
        xticks(ax, x0:step:x1);
    end
end
```

Listing I.16: updatePlots.m – Local helper functions (part 4 of 4)

```
function fcns = buildFieldAggFunctions(exprs, predNames)
    fcns = cell(size(exprs));
    for i = 1:numel(exprs)
        expr = exprs{i};
        [~,idx] = sort(cellfun(@length, predNames), 'descend');
        predNamesSorted = predNames(idx);
        for k = 1:numel(predNamesSorted)
            name = predNamesSorted{k};
            j    = find(strcmp(predNames, name), 1, 'first');
            pattern = ['(?<![A-Za-z0-9_])' regexptranslate('escape',
   name) '(?![A-Za-z0-9_])'];
            expr = regexprep(expr, pattern, sprintf('x(%d)', j));
        end
        fcns{i} = str2func(sprintf('@(x) (%s)', expr));
    end
end
```

Listing I.17: Private helpers – buildFieldAggFunctions.m

```
function [r,c] = findKey(raw, key)
    r   = [];
    c   = [];
    key = normalizeText(key);
    for i = 1:size(raw,1)
        x = raw{i,2};
        if isMissingLike(x); continue; end
        if strcmpi(normalizeText(x), key); r = i; c = 2; return; end
    end
end

function tf = isMissingLike(x)
    tf = false;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    if isempty(x);                                      tf = true; return; end
    if iscell(x);                                       tf = true; return; end
    if isnumeric(x) && isscalar(x) && isnan(x); tf = true; return; end
    if ischar(x) && isempty(strtrim(x));                tf = true; return; end
    try; if any(ismissing(x)); tf = true; return; end; catch; end
end

function s = normalizeText(x)
    s = toText(x);
    s = strrep(s, char(160), ' ');
    s = strtrim(s);
end
```

Listing I.18: Private helpers – findKey.m, isMissingLike.m, normalizeText.m

```
function val = readScalarByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    val = '';
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); val = toText(x); return; end
    end
end

function vals = readTextVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = {};
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x); vals{end+1} = toText(x); end %#ok<AGROW>
    end
end

function vals = readNumericVectorByKey(raw, key)
    [r,c] = findKey(raw, key);
    if isempty(r); error('Key "%s" not found in sheet.', key); end
    vals = [];
    for j = c+1:size(raw,2)
        x = raw{r,j};
        if ~isMissingLike(x)
            if isnumeric(x); vals(end+1) = x; %#ok<AGROW>
            else;            vals(end+1) = str2double(toText(x)); end
   %#ok<AGROW>
        end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    end
end
```

Listing I.19: Private helpers – read*ByKey functions

```
function s = toText(x)
    if isempty(x); s = ''; return; end
    try; if any(ismissing(x)); s = ''; return; end; catch; end
    if isstring(x);       s = char(x);
    elseif ischar(x);     s = x;
    elseif isnumeric(x); s = num2str(x);
    else;                 s = char(x);
    end
    s = strtrim(s);
end

function letter = xlsColLetter(n)
%XLSCOLLETTER Convert column number to Excel column letter (1=A, 2=B,
    ...).
    letter = '';
    while n > 0
        rem    = mod(n-1, 26);
        letter = [char(65+rem) letter];
        n      = floor((n-1) / 26);
    end
end
```

Listing I.20: Private helpers – toText.m, xlsColLetter.m

I.5 第五部分: 数值和统计基础

本部分涵盖基本的数值技术和统计样品采集方法 主条目: 信任区 量化和强大的模型估计。

I.5.1 莱文伯格 - 马库尔德

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

此脚本支持 数值 示例 65.6. 它重复了 iteration table。它使用相同的剩余条约, 规模为矩阵, 和蒸发规则与衍生上方。

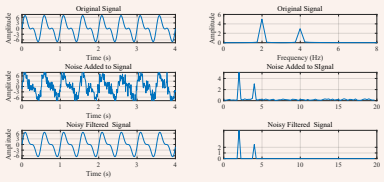
```
x = (0:4)';
y = 6 ./ (2 + x);

theta  = [4; 1];
lambda = 1.0e-2;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
phi = @(th) 0.5 * sum((th(1) ./ (th(2) + x) - y).^2);
fprintf('%2d  %11s  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
        0, '--', theta(1), theta(2), phi(theta));

accepted = 0;
while accepted < 5
    a = theta(1);
    b = theta(2);

    g = a ./ (b + x);
    r = g - y;
    J = [1 ./ (b + x), -a ./ (b + x).^2];

    A = J' * J;
    D = diag(diag(A));
    delta = (A + lambda * D) \ (-J' * r);

    trial = theta + delta;
    phiCurrent = 0.5 * (r' * r);
    phiTrial   = phi(trial);

    if phiTrial < phiCurrent
        theta = trial;
        accepted = accepted + 1;
        fprintf('%2d  %11.1e  %12.6f  %12.6f  %14.6e\n', ...
                accepted, lambda, theta(1), theta(2), phiTrial);
        lambda = lambda / 10;
    else
        lambda = lambda * 10;
    end
end
```

I.5.2 数值 技术

I.5.3 FFT 和 Butterworth 过滤器




```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)
% ========================================================================
% Demonstrates the DFT/FFT for signal analysis and noise filtering.
%
% THEORY:
%   The Discrete Fourier Transform decomposes a time-domain signal into
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%   its constituent frequency components.  For a signal sampled at rate
%   fs = 1/dt over N samples, the DFT output Y = fft(y) gives:
%     Y(k)      : complex amplitude at frequency k/(N*dt)  [Hz]
%     |Y(k)|/N  : one-sided amplitude spectrum (for k = 0..N/2)
%   The second half of Y (k > N/2) are complex conjugates of the first.
%
% FILTERING APPROACH (hard threshold):
%   Fourier coefficients with |Y(k)| < threshold are zeroed out.
%   fix(Y/500)*500 rounds each coefficient down to the nearest multiple
%   of 500, effectively zeroing those with |Y| < 500.
%   This removes broadband noise while preserving dominant frequency peaks.
%   The threshold (500) is chosen empirically -- examine the amplitude
%   spectrum to select an appropriate value for a given signal.
%
% SIGNAL:  y(t) = 3*sin(4*2pi*t) + 5*sin(2*2pi*t)
%   Two sinusoids: 4 Hz (amplitude 3) and 2 Hz (amplitude 5).
%   Both peaks should be clearly visible in the amplitude spectrum.
% ========================================================================

clear; close all; clc;

GS    = 'c:/Program Files/gs/gs9.53.3/bin/gswin64.exe';
scrsz = get(0, 'ScreenSize');
fs    = 14;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Verify FFT round-trip on a random signal
% ------------------------------------------------------------------------
x_rand  = rand(1, 10);
Y_rand  = fft(x_rand);
x_recov = real(ifft(Y_rand));   % imaginary part is ~machine epsilon
fprintf('FFT round-trip error (should be ~0): %.2e\n', norm(x_rand - x_recov));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Construct the test signal
% ------------------------------------------------------------------------
dt = 1/100;           % sampling interval [s]  (sampling rate = 100 Hz)
et = 4;               % signal duration   [s]
t  = 0 : dt : et;   % time vector
N  = length(t);

y = 3*sin(4*2*pi*t) + 5*sin(2*2*pi*t);   % two-frequency signal

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- FFT of the clean signal
% ------------------------------------------------------------------------
Y        = fft(y);
n_half   = floor(N/2);
amp_spec = abs(Y) / n_half;

freq = (0:79) / (2 * n_half * dt);   % frequency axis for first 80 bins [Hz]
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
59
60 % ------------------------------------------------------------------------
61 % Section 4 -- Add noise and compute spectrum
62 % ------------------------------------------------------------------------
63 noise = randn(1, N);
64 ey    = y + 2*noise;       % corrupted signal (noise amplitude = 2)
65 eY    = fft(ey);
66 e_amp = abs(eY) / n_half;
67
68 % ------------------------------------------------------------------------
69 % Section 5 -- Filter: zero Fourier coefficients below threshold
70 % ------------------------------------------------------------------------
71 threshold = 500;
72 fY        = fix(eY / threshold) * threshold;   % zero small coefficients
73 cy        = real(ifft(fY));                     % filtered time-domain signal
74 cY        = fft(cy);
75 c_amp     = abs(cY) / n_half;
76
77 % ------------------------------------------------------------------------
78 % Section 6 -- Plot: 3 rows x 2 columns (time | frequency domain)
79 % ------------------------------------------------------------------------
80 hf1 = figure('Position', [1, scrsz(4)/4.5, scrsz(3)/2.5, scrsz(4)/2.0]);
81
82 subplot(3,2,1);
83 plot(t, y, 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
84 axis([0, et, -7.5, 7.5]);
85 xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
86 title('Clean signal -- time domain');
87 set(gca, 'FontSize', fs);
88
89 subplot(3,2,2);
90 plot(freq, amp_spec(1:80), 'b', 'LineWidth', 2);  grid on;
91 axis([0, 8, 0, 6]);
92 xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
93 title('Clean signal -- spectrum');
94 set(gca, 'FontSize', fs);
95
96 subplot(3,2,3);
97 plot(t, ey, 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
98 axis([0, et, -7.5, 7.5]);
99 xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
100 title('Noisy signal -- time domain');
101 set(gca, 'FontSize', fs);
102
103 subplot(3,2,4);
104 plot(freq, e_amp(1:80), 'r', 'LineWidth', 1);  grid on;
105 axis([0, 8, 0, 6]);
106 xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
107 title('Noisy signal -- spectrum');
108 set(gca, 'FontSize', fs);
109
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
subplot(3,2,5);
plot(t, cy, 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, et, -7.5, 7.5]);
xlabel('Time [s]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- time domain');
set(gca, 'FontSize', fs);

subplot(3,2,6);
plot(freq, c_amp(1:80), 'g', 'LineWidth', 2);  grid on;
axis([0, 8, 0, 6]);
xlabel('Frequency [Hz]');  ylabel('Amplitude');
title('Filtered signal -- spectrum');
set(gca, 'FontSize', fs);

set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
print('fft-example.eps', '-depsc');
eps2pdf('fft-example.eps', GS, 0);
```

I.5.4 单一价值分解

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- SVD FOR ILL-CONDITIONED SYSTEMS
% ========================================================================
% Demonstrates the use of Singular Value Decomposition to solve a severely
% ill-conditioned linear system where the standard backslash operator
% gives unreliable results due to near-singularity.
%
% THEORY:
%   Any mxn matrix A decomposes as  A = U * S * V^T
%   where U (mxm) and V (nxn) are orthogonal, and S (mxn) is diagonal
%   with non-negative singular values sigma_1 >= sigma_2 >= ... >= 0.
%
%   The Moore-Penrose pseudo-inverse is:
%       A^+ = V * S^+ * U^T
%   where  S^+(i,i) = 1/sigma_i  if sigma_i > threshold,  else 0.
%
%   Setting near-zero singular values to zero (Tikhonov regularisation)
%   prevents amplification of numerical noise in near-null directions.
%
% ILL-CONDITIONING:
%   The matrix A below has one near-zero singular value (~1e-15).
%   Condition number kappa(A) = sigma_max/sigma_min approx 1e15, meaning round-off
    errors
%   of order epsilon_machine approx 1e-16 are amplified to O(1) in the solution.
%   The SVD solution discards the near-zero singular value and returns
%   the minimum-norm least-squares solution instead.
% ========================================================================

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
clc; clear;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Define the ill-conditioned system
% ------------------------------------------------------------------------
% Rows of A are nearly identical -> A is nearly singular.
A = [1,  1        ;
     1,  1 + 1e-15];
b = [2;  2 + 1e-15];

fprintf('Condition number of A: %.2e\n', cond(A));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Direct solution (unreliable for near-singular systems)
% ------------------------------------------------------------------------
direct_solution = A \ b;
fprintf('\nDirect solution (A \\ b):\n');
disp(direct_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*direct_solution - b));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- SVD decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
[U, S, V] = svd(A);

fprintf('\nSingular values:\n');
disp(diag(S)');

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Regularised pseudo-inverse
% ------------------------------------------------------------------------
% Threshold: singular values below this are treated as zero.
% Choosing threshold = 1e-6 discards the ~1e-15 singular value
% while keeping the O(1) singular value intact.
threshold = 1e-6;

S_plus = zeros(size(S'));       % pseudo-inverse of S (note: transposed size)
for i = 1 : min(size(S))
    if S(i,i) > threshold
        S_plus(i,i) = 1 / S(i,i);
    end
    % values below threshold remain zero (regularised)
end

A_plus       = V * S_plus * U';    % Moore-Penrose pseudo-inverse
svd_solution = A_plus * b;

fprintf('SVD regularised solution:\n');
disp(svd_solution);
fprintf('Residual ||A*x - b||: %.2e\n', norm(A*svd_solution - b));
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

I.5.5 预条件

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

```
% ========================================================================
% NUMERICAL TECHNIQUES -- CHOLESKY PRECONDITIONING
% ========================================================================
% Demonstrates how preconditioning reduces the condition number of a
% symmetric positive definite (SPD) linear system, which accelerates
% convergence of iterative solvers such as PCG (preconditioned conjugate
% gradient).
%
% THEORY:
%   For an SPD matrix A, the Cholesky decomposition gives A = L * L^T.
%   Using M = L * L^T (= A) as the preconditioner:
%
%   LEFT preconditioning:   solve  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
%   RIGHT preconditioning:  solve  (A M^{-1}) y = b,  then x = M^{-1} y
%
%   When M = A exactly, M^{-1}A = I and the condition number drops to 1.
%   This is pedagogically illustrative but practically useless -- the cost
%   of applying M^{-1} = A^{-1} is the same as solving the original system.
%
%   In practice, an INCOMPLETE Cholesky factorisation (ichol in MATLAB)
%   is used as a cheaper approximation to A, giving a useful preconditioner.
%
% NOTE ON inv():
%   Using inv(M) explicitly is numerically inferior to the backslash
%   operator (M\b).  Here inv() is replaced by M\ for correctness.
%   The original used inv(M)*A -- replaced with M\A throughout.
%
% MATRIX CONSTRUCTION:
%   A = Q * D * Q^T  where D = diag([1, 0.1, 0.01]) and Q is orthogonal.
%   This guarantees A is SPD with eigenvalues {1, 0.1, 0.01} and
%   condition number kappa(A) = 1/0.01 = 100.
% ========================================================================

clear; clc;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Construct a symmetric positive definite matrix
% ------------------------------------------------------------------------
D = diag([1, 0.1, 0.01]);    % prescribed eigenvalues -> kappa(A) = 100

rng(1, 'twister');            % fixed seed for reproducibility
[Q, ~] = qr(rand(3));         % random orthogonal matrix via QR
A = Q * D * Q';               % SPD matrix with known eigenstructure
b = ones(3, 1);

fprintf('Matrix A:\n');  disp(A);
fprintf('Eigenvalues of A:    ');  fprintf('%.4f  ', eig(A)');  fprintf('\n');
fprintf('Condition number of A: %.4e\n\n', cond(A));
```

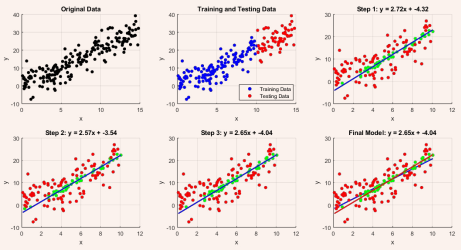

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Cholesky decomposition
% ------------------------------------------------------------------------
L = chol(A, 'lower');   % A = L * L^T  (lower triangular factor)
M = L * L';             % preconditioning matrix (= A here)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Left preconditioning:  (M^{-1} A) x = M^{-1} b
% ------------------------------------------------------------------------
A_left = (M\A + (M\A)') / 2;   % enforce symmetry after solve
b_left = M \ b;
x_left = A_left \ b_left;

kappa_left = cond(A_left);
fprintf('Left preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       '); fprintf('%.4f  ', eig(A_left)'); fprintf('\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_left);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Right preconditioning:  (A M^{-1}) y = b
% ------------------------------------------------------------------------
A_right = (A/M + (A/M)') / 2;
x_right = A_right \ b;

kappa_right = cond(A_right);
fprintf('Right preconditioning:\n');
fprintf('  Eigenvalues:       '); fprintf('%.4f  ', eig(A_right)'); fprintf('\n');
fprintf('  Condition number:  %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  Ratio (orig/precond): %.4e\n\n', cond(A)/kappa_right);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Summary
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('--- Summary ---\n');
fprintf('  Original matrix:             kappa = %.4e\n', cond(A));
fprintf('  Left  preconditioned:        kappa = %.4e\n', kappa_left);
fprintf('  Right preconditioned:        kappa = %.4e\n', kappa_right);
fprintf('  (kappa = 1 is expected when M = A exactly)\n');
fprintf('  In practice use ichol() for an approximate, cheaper M.\n');
```

I.5.6 随机样本共识 (拉纳克)

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



计划进行随机样品共识, §65.3.2.

```
% ========================================================================
% RANDOM SAMPLE CONSENSUS (RANSAC) -- ROBUST LINE FITTING
% ========================================================================
% RANSAC is a robust estimation algorithm that fits a model to data
% containing a large fraction of outliers.  Unlike least squares, which
% minimises the sum of all residuals (making it sensitive to outliers),
% RANSAC iteratively finds the model supported by the most inliers.
%
% ALGORITHM:
%   Repeat n_iterations times:
%     1. Randomly select the minimum number of points needed to define
%        the model (2 points for a line).
%     2. Fit the model to these points.
%     3. Count how many other data points are within distance threshold
%        of the fitted model -> these are the "inliers".
%     4. If this inlier count is the best so far, save this model.
%   Return the model with the most inliers.
%
% DISTANCE METRIC:
%   For a line  y = m*x + c  (or equivalently  m*x - y + c = 0),
%   the perpendicular distance from point (x_i, y_i) to the line is:
%       d_i = |m*x_i - y_i + c| / sqrt(m^2 + 1)
%   A point is an inlier if d_i < threshold.
%
% NUMBER OF ITERATIONS:
%   The theoretical number of iterations needed to find at least one
%   outlier-free sample with probability p is:
%       n_iter = log(1-p) / log(1 - (1-e)^s)
%   where e = outlier ratio, s = sample size (2 for a line), p = 0.99.
%   For e=0.4, s=2: n_iter approx 11.  Using 1000 iterations is very conservative.
%
% STRUCTURE:
%   The script runs RANSAC 'visualize_steps' independent times on the
%   training set, showing the best model found at each run.  The final
%   panel shows the best model across all runs.
%
% UNITS: dimensionless (synthetic data).
% ========================================================================

clear; close all; clc;

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Parameters
% ------------------------------------------------------------------------
n_points       = 200;     % total number of data points
outlier_ratio  = 0.4;     % fraction of points that are outliers
threshold      = 0.5;     % inlier distance threshold (perpendicular)
n_iterations   = 1000;    % RANSAC iterations per run
visualize_steps = 4;      % number of independent RANSAC runs to display

rng('shuffle');            % non-reproducible seed (use rng(42) for reproducibility)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate synthetic data
% ------------------------------------------------------------------------
% True model: y = true_slope * x + true_intercept + Gaussian noise
% Outliers are added by shifting a random subset by a large random amount.

x              = sort(rand(1, n_points) * 15);   % x values in [0, 15]
true_slope     = 2.0;
true_intercept = 0.5;

y = true_slope * x + true_intercept + randn(1, n_points) * 3;  % noisy inliers

% Add outliers: shift selected points by up to +/-10 in y
n_outliers      = round(outlier_ratio * n_points);
outlier_indices = randperm(n_points, n_outliers);
y(outlier_indices) = y(outlier_indices) + (rand(1, n_outliers) - 0.5) * 20;

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Train / test split
% ------------------------------------------------------------------------
% RANSAC is applied only to the training set.
% The test set is shown for visual reference but not used in fitting.

train_ratio = 0.7;
n_train     = round(train_ratio * n_points);
x_train     = x(1 : n_train);
y_train     = y(1 : n_train);
x_test      = x(n_train+1 : end);
y_test      = y(n_train+1 : end);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Plot original data and train/test split
% ------------------------------------------------------------------------
figure('Position', [100, 100, 1200, 600]);

subplot(2, 3, 1);
scatter(x, y, 30, 'k', 'filled');
title('Original Data  (inliers + outliers)');
xlabel('x');  ylabel('y');
grid on;
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
93
94  subplot(2, 3, 2);
95  scatter(x_train, y_train, 30, 'b', 'filled');
96  hold on;
97  scatter(x_test,  y_test,  30, 'r', 'filled');
98  title('Train / Test Split');
99  xlabel('x');  ylabel('y');
100 legend('Training (70%)', 'Testing (30%)', 'Location', 'best');
101 grid on;
102
103 % ------------------------------------------------------------------------
104 % Section 5 -- RANSAC: run visualize_steps independent trials
105 % ------------------------------------------------------------------------
106 % Each trial runs the full RANSAC loop and finds the best model for that run.
107 % Results are stored for comparison and final selection.
108
109 models         = cell(1, visualize_steps);   % best [slope, intercept] per run
110 inliers_count  = zeros(1, visualize_steps);  % number of inliers per run
111
112 for step = 1 : visualize_steps
113
114     best_inliers = [];
115     best_model   = [];
116
117     for iter = 1 : n_iterations
118
119         % --- Sample 2 points at random ---
120         idx      = randperm(length(x_train), 2);
121         x_samp   = x_train(idx);
122         y_samp   = y_train(idx);
123
124         % Skip degenerate case (two identical x values -> vertical line)
125         if x_samp(1) == x_samp(2)
126             continue;
127         end
128
129         % --- Fit line through the 2 sample points ---
130         slope     = diff(y_samp) / diff(x_samp);
131         intercept = y_samp(1) - slope * x_samp(1);
132
133         % --- Compute perpendicular distances from all training points ---
134         % Line equation:  slope*x - y + intercept = 0
135         distances = abs(slope * x_train - y_train + intercept) / sqrt(slope^2 + 1);
136
137         % --- Count inliers (points within distance threshold) ---
138         inliers = find(distances < threshold);
139
140         % --- Update best model if this has more inliers ---
141         if length(inliers) > length(best_inliers)
142             best_inliers = inliers;
143             best_model   = [slope, intercept];
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
        end

    end   % RANSAC iteration loop

    % Store results for this run
    models{step}         = best_model;
    inliers_count(step) = length(best_inliers);

    % --- Plot this run ---
    outlier_idx = setdiff(1:length(x_train), best_inliers);

    subplot(2, 3, step + 2);
    scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');   % all points (grey)
    hold on;
    scatter(x_train(best_inliers), y_train(best_inliers), 30, 'g', 'filled');  % inliers
    scatter(x_train(outlier_idx),  y_train(outlier_idx),  30, 'r', 'filled');  %
    outliers

    plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
    plot(plot_x, best_model(1)*plot_x + best_model(2), 'b-', 'LineWidth', 2);

    title(sprintf('Run %d:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
                  step, best_model(1), best_model(2), length(best_inliers)));
    xlabel('x');  ylabel('y');
    legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Model', 'Location', 'best');
    grid on;

end   % step loop

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Final model: best across all runs
% ------------------------------------------------------------------------
[~, best_step]  = max(inliers_count);
final_model     = models{best_step};

% Re-identify inliers for the final model
final_distances = abs(final_model(1)*x_train - y_train + final_model(2)) ...
                  / sqrt(final_model(1)^2 + 1);
final_inliers   = find(final_distances < threshold);
final_outliers  = setdiff(1:length(x_train), final_inliers);

subplot(2, 3, 6);
scatter(x_train, y_train, 30, [0.7 0.7 0.7], 'filled');
hold on;
scatter(x_train(final_inliers), y_train(final_inliers), 30, 'g', 'filled');
scatter(x_train(final_outliers), y_train(final_outliers), 30, 'r', 'filled');

plot_x = linspace(min(x_train), max(x_train), 100);
plot(plot_x, final_model(1)*plot_x + final_model(2), 'r-', 'LineWidth', 2);

title(sprintf('Best Model:  y = %.2fx + %.2f  (%d inliers)', ...
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
              final_model(1), final_model(2), length(final_inliers)));
xlabel('x');  ylabel('y');
legend('All', 'Inliers', 'Outliers', 'Best Model', 'Location', 'best');
grid on;

fprintf('\n--- RANSAC Results ---\n');
fprintf('True model:  slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', true_slope, true_intercept);
fprintf('RANSAC best: slope = %.2f,  intercept = %.2f\n', final_model(1), final_model
    (2));
fprintf('Inliers: %d / %d training points\n', length(final_inliers), n_train);
```

I.5.7 拉丁 Hypercube

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。
覆盖在 §64.3.3.2.

```
%% Latin Hypercube Sampling (LHS) vs. Monte Carlo Sampling
% Demonstration and comparison of LHS with classical Monte Carlo sampling.
% The code uses only ASCII characters so that it is safe inside lstlisting.
% It also avoids norminv, so no Statistics and Machine Learning Toolbox
% is required.

clearvars; close all; clc;

%% Parameters
N = 100;          % Number of samples used in the main comparison
n_vars = 2;       % Number of input variables
seed = 42;        % Random seed for reproducibility
n_rep = 200;      % Replications used for the convergence comparison

rng(seed, 'twister');

%% 1. LATIN HYPERCUBE SAMPLING (LHS)
% ===================================

% Generate an N-by-n_vars Latin hypercube design in [0,1].
lhs_samples = lhs_design(N, n_vars);

% Transform the two columns to the desired marginal distributions.
% Variable 1: Uniform [10,20]
lhs_var1 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 1);

% Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)
lhs_var2 = normal_icdf(lhs_samples(:, 2), 15, 3);

lhs_all = [lhs_var1, lhs_var2];

%% 2. MONTE CARLO SAMPLING (MCS)
% ================================

```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Mixed-distribution Monte Carlo sample.
mcs_var1 = 10 + 10 * rand(N, 1);      % Uniform [10,20]
mcs_var2 = 15 + 3 * randn(N, 1);      % Normal (mu=15, sigma=3)

mcs_all = [mcs_var1, mcs_var2];

% A second uniform variable is needed for the uniform-uniform comparison.
mcs_uniform_var2 = 10 + 10 * rand(N, 1);
lhs_uniform_var2 = 10 + 10 * lhs_samples(:, 2);

%% 3. VISUALIZATION: TWO-DIMENSIONAL COMPARISON
% ================================================

figure('Position', [100, 100, 1200, 500]);

% Uniform distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 1);
scatter(mcs_var1, mcs_uniform_var2, 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Monte Carlo Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

% Uniform distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 2);
scatter(lhs_var1, lhs_uniform_var2, 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Uniform [10,20]');
title('Latin Hypercube Sampling: Uniform Marginals');
grid on; axis square;
xlim([8, 22]); ylim([8, 22]);

% Mixed distributions - Monte Carlo
subplot(2, 2, 3);
scatter(mcs_all(:, 1), mcs_all(:, 2), 25, 'b', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Monte Carlo Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

% Mixed distributions - Latin hypercube
subplot(2, 2, 4);
scatter(lhs_all(:, 1), lhs_all(:, 2), 25, 'r', 'filled');
xlabel('Variable 1: Uniform [10,20]');
ylabel('Variable 2: Normal (mu=15, sigma=3)');
title('Latin Hypercube Sampling: Mixed Marginals');
grid on;
xlim([8, 22]); ylim([6, 24]);

```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
  sgtitle(sprintf('LHS vs. MCS Comparison (N = %d)', N), ...
  'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

  %% 4. STATISTICAL COMPARISON OF MEAN ESTIMATION
  % ================================================

  % Model response:
  %     Y = X1 + 0.5*X2
  %
  % The theoretical mean is:
  %     E[Y] = E[X1] + 0.5*E[X2] = 15 + 0.5*15 = 22.5

  true_mean = 22.5;
  sample_sizes = 10:5:N;

  mean_lhs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
  mean_mcs_conv = zeros(length(sample_sizes), 1);
  rmse_lhs = zeros(length(sample_sizes), 1);
  rmse_mcs = zeros(length(sample_sizes), 1);

  for i = 1:length(sample_sizes)
  n_samp = sample_sizes(i);

  lhs_estimates = zeros(n_rep, 1);
  mcs_estimates = zeros(n_rep, 1);

  for rep = 1:n_rep
  % Fresh LHS design of size n_samp.
  u_lhs = lhs_design(n_samp, n_vars);
  x1_lhs = 10 + 10 * u_lhs(:, 1);
  x2_lhs = normal_icdf(u_lhs(:, 2), 15, 3);
  y_lhs_rep = x1_lhs + 0.5 * x2_lhs;
  lhs_estimates(rep) = mean(y_lhs_rep);

  % Fresh classical Monte Carlo sample of the same size.
  x1_mcs = 10 + 10 * rand(n_samp, 1);
  x2_mcs = 15 + 3 * randn(n_samp, 1);
  y_mcs_rep = x1_mcs + 0.5 * x2_mcs;
  mcs_estimates(rep) = mean(y_mcs_rep);
  end

  mean_lhs_conv(i) = mean(lhs_estimates);
  mean_mcs_conv(i) = mean(mcs_estimates);

  rmse_lhs(i) = sqrt(mean((lhs_estimates - true_mean).^2));
  rmse_mcs(i) = sqrt(mean((mcs_estimates - true_mean).^2));
  end

  figure('Position', [100, 100, 1000, 400]);

  % Average estimated mean over repeated designs
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
  subplot(1, 2, 1);
  plot(sample_sizes, mean_lhs_conv, 'o-', ...
  'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
  hold on;
  plot(sample_sizes, mean_mcs_conv, 's-', ...
  'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
  plot([min(sample_sizes), max(sample_sizes)], ...
  [true_mean, true_mean], '--k', ...
  'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'True Mean');
  xlabel('Number of Samples');
  ylabel('Mean of Estimated Means');
  title(sprintf('Mean Estimate over %d Replications', n_rep));
  legend('Location', 'best');
  grid on;

  % Root-mean-square error of the mean estimator
  subplot(1, 2, 2);
  semilogy(sample_sizes, rmse_lhs, 'o-', ...
  'Color', 'r', 'LineWidth', 2, ...
  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'LHS');
  hold on;
  semilogy(sample_sizes, rmse_mcs, 's-', ...
  'Color', 'b', 'LineWidth', 2, ...
  'MarkerSize', 6, 'DisplayName', 'MCS');
  xlabel('Number of Samples');
  ylabel('RMSE of Estimated Mean');
  title('Convergence of Mean-Estimation Error');
  legend('Location', 'best');
  grid on;

  sgtitle('Convergence Analysis: LHS vs. MCS', ...
  'FontSize', 14, 'FontWeight', 'bold');

  %% 5. SUMMARY STATISTICS FOR THE MAIN N-SAMPLE DESIGNS
  % ======================================================

  y_lhs = lhs_all(:, 1) + 0.5 * lhs_all(:, 2);
  y_mcs = mcs_all(:, 1) + 0.5 * mcs_all(:, 2);

  lhs_error = abs(mean(y_lhs) - true_mean);
  mcs_error = abs(mean(y_mcs) - true_mean);

  fprintf('\n========== SUMMARY (N = %d) ==========\n\n', N);
  fprintf('TRUE MEAN: %.4f\n\n', true_mean);

  fprintf('LHS RESULTS:\n');
  fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_lhs));
  fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_lhs));
  fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', lhs_error);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
188
189   fprintf('MCS RESULTS:\n');
190   fprintf('  Estimated Mean: %.4f\n', mean(y_mcs));
191   fprintf('  Std. Dev.:      %.4f\n', std(y_mcs));
192   fprintf('  Absolute Error: %.4f\n\n', mcs_error);
193
194   fprintf('REPLICATED CONVERGENCE RESULTS AT N = %d:\n', N);
195   fprintf('  LHS RMSE: %.6f\n', rmse_lhs(end));
196   fprintf('  MCS RMSE: %.6f\n', rmse_mcs(end));
197
198   if rmse_mcs(end) > 0
199   fprintf('  LHS RMSE is %.2f%% of MCS RMSE.\n', ...
200   100 * rmse_lhs(end) / rmse_mcs(end));
201   end
202
203   %% LOCAL FUNCTIONS
204   % ==================
205
206   function samples = lhs_design(n_samples, n_variables)
207   %LHS_DESIGN Generate an n_samples-by-n_variables LHS design in [0,1].
208
209   samples = zeros(n_samples, n_variables);
210
211   for j = 1:n_variables
212   % One random point inside each of the n_samples strata.
213   within_stratum = rand(n_samples, 1);
214
215   % Randomly permute the strata independently for each variable.
216   ranks = randperm(n_samples)';
217
218   samples(:, j) = ...
219   (ranks - 1 + within_stratum) / n_samples;
220   end
221   end
222
223   function x = normal_icdf(u, mu, sigma)
224   %NORMAL_ICDF Inverse CDF of a normal distribution without norminv.
225
226   % Guard against exact endpoints before applying erfinv.
227   u = min(max(u, eps), 1 - eps);
228
229   x = mu + sigma * sqrt(2) .* erfinv(2 .* u - 1);
230   end
```

I.5.8 巴伐利亚回归以四方基础

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

编码, 例如在 § 65.5.4.

```
1 %% Bayesian Regression with a Quadratic Basis
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Metropolis--Hastings sampling for
%   y = theta_1*x1^2 + theta_2*x2 + epsilon,
%   epsilon ~ N(0,sigma^2).
%
% The model is quadratic in predictor x1 but linear in the unknown
% parameters theta_1 and theta_2. With Gaussian priors and known sigma,
% the posterior is Gaussian and can be computed analytically. This provides
% an independent audit of the MCMC results.

clear; close all; clc;

%% 1. Generate synthetic data

rng(42,'twister');

n = 50;
x1 = rand(n,1);
x2 = rand(n,1);
theta_true = [2;3];
sigma = 1;

X = [x1.^2, x2];
y = X*theta_true + sigma*randn(n,1);

fprintf('\n=== Synthetic Data Generated ===\n');
fprintf('Number of observations: %d\n',n);
fprintf('True theta_1 (coefficient of x1^2): %.4f\n',theta_true(1));
fprintf('True theta_2 (coefficient of x2):   %.4f\n',theta_true(2));
fprintf('Known noise standard deviation:     %.4f\n',sigma);

%% 2. Define independent Gaussian priors

mu_prior = [0;0];
sigma_prior = [10;10];
prior_precision = diag(1./sigma_prior.^2);

fprintf('\n=== Prior Distributions ===\n');
fprintf('theta_j ~ N(0,10^2),  j = 1,2\n');

%% 3. Exact posterior for independent verification
% For this linear-Gaussian example,
%   Sigma_post^{-1} = X''X/sigma^2 + Sigma_prior^{-1},
%   mu_post = Sigma_post*(X''y/sigma^2 + Sigma_prior^{-1}*mu_prior).

post_precision = (X.'*X)/sigma^2 + prior_precision;
post_cov_exact = post_precision\eye(2);
post_mean_exact = post_precision\((X.'*y)/sigma^2 + ...
    prior_precision*mu_prior);
post_sd_exact = sqrt(diag(post_cov_exact));

fprintf('\n=== Exact Gaussian Posterior ===\n');
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
fprintf('Exact posterior mean theta_1: %.6f\n',post_mean_exact(1));
fprintf('Exact posterior mean theta_2: %.6f\n',post_mean_exact(2));
fprintf('Exact posterior SD theta_1:   %.6f\n',post_sd_exact(1));
fprintf('Exact posterior SD theta_2:   %.6f\n',post_sd_exact(2));

%% 4. Metropolis--Hastings MCMC
% A symmetric Gaussian random-walk proposal is used, so proposal-density
% terms cancel from the Metropolis--Hastings acceptance ratio.

fprintf('\n=== Metropolis--Hastings MCMC Sampling ===\n');

n_iterations = 10000;
burn_in = 2000;
proposal_sd = [0.5;0.5];

theta_samples = zeros(n_iterations,2);
theta_current = [0;0];
logposterior_current = compute_logposterior( ...
    y,X,theta_current,sigma,mu_prior,sigma_prior);
n_accepted = 0;

fprintf('Running %d MCMC iterations...\n',n_iterations);
fprintf('Proposal standard deviations: [%.3f, %.3f]\n', ...
    proposal_sd(1),proposal_sd(2));

for iter = 1:n_iterations
    theta_proposal = theta_current + proposal_sd.*randn(2,1);
    logposterior_proposal = compute_logposterior( ...
        y,X,theta_proposal,sigma,mu_prior,sigma_prior);

    log_alpha = logposterior_proposal - logposterior_current;

    if log(rand) < min(0,log_alpha)
        theta_current = theta_proposal;
        logposterior_current = logposterior_proposal;
        n_accepted = n_accepted + 1;
    end

    theta_samples(iter,:) = theta_current.';

    if mod(iter,1000) == 0
        fprintf('Iteration %d/%d (acceptance rate: %.1f%%)\n', ...
            iter,n_iterations,100*n_accepted/iter);
    end
end

acceptance_rate = n_accepted/n_iterations;
fprintf('\nFinal acceptance rate: %.1f%%\n',100*acceptance_rate);

%% 5. Remove burn-in and compute posterior summaries

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
theta_samples_post = theta_samples(burn_in+1:end,:);
n_samples_final = size(theta_samples_post,1);

theta1_samples = theta_samples_post(:,1);
theta2_samples = theta_samples_post(:,2);

theta_mean = mean(theta_samples_post,1).';
theta_sd = std(theta_samples_post,0,1).';
theta1_ci = empirical_percentile(theta1_samples,[2.5,97.5]);
theta2_ci = empirical_percentile(theta2_samples,[2.5,97.5]);

C = corrcoef(theta1_samples,theta2_samples);
posterior_correlation = C(1,2);

fprintf('\n=== MCMC Posterior Summary ===\n');
fprintf('Post-burn-in samples: %d\n',n_samples_final);
fprintf('Burn-in:              %d\n',burn_in);

fprintf('\nParameter theta_1:\n');
fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(1));
fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(1));
fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(1));
fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(1));
fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(1));
fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
    theta1_ci(1),theta1_ci(2));

fprintf('\nParameter theta_2:\n');
fprintf('  True value:          %.6f\n',theta_true(2));
fprintf('  MCMC posterior mean: %.6f\n',theta_mean(2));
fprintf('  Exact posterior mean:%.6f\n',post_mean_exact(2));
fprintf('  MCMC posterior SD:   %.6f\n',theta_sd(2));
fprintf('  Exact posterior SD:  %.6f\n',post_sd_exact(2));
fprintf('  95%% credible interval:[%.6f, %.6f]\n', ...
    theta2_ci(1),theta2_ci(2));

fprintf('\nPosterior correlation theta_1/theta_2: %.6f\n', ...
    posterior_correlation);

%% 6. Least-squares comparison

theta_ls = X\y;

fprintf('\n=== Least-Squares Comparison ===\n');
fprintf('Least-squares theta_1: %.6f\n',theta_ls(1));
fprintf('Least-squares theta_2: %.6f\n',theta_ls(2));
fprintf('Difference LS - MCMC mean: [%.6f, %.6f]\n', ...
    theta_ls(1)-theta_mean(1),theta_ls(2)-theta_mean(2));

%% 7. Elementary single-chain diagnostics
% This compact example uses one chain. For production analyses, use multiple
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% dispersed chains and report R-hat and effective sample size.

max_lag = 50;
acf_theta1 = compute_acf_manual(theta1_samples,max_lag);
acf_theta2 = compute_acf_manual(theta2_samples,max_lag);
acf_bound = 1.96/sqrt(n_samples_final);

thin_factor = 10;
iter_post = (burn_in+1):n_iterations;
iter_thin = iter_post(1:thin_factor:end);
theta1_thin = theta1_samples(1:thin_factor:end);
theta2_thin = theta2_samples(1:thin_factor:end);

%% 8. Posterior-predictive samples
% Future observation noise is included. If the noise term is omitted, the
% band represents uncertainty in the posterior mean response, not the full
% posterior-predictive distribution.

x1_pred = linspace(0,1,20).';
x2_pred = 0.5*ones(size(x1_pred));
X_pred = [x1_pred.^2,x2_pred];

n_samples_pred = 1000;
y_pred_samples = zeros(numel(x1_pred),n_samples_pred);

for i = 1:n_samples_pred
    idx = randi(n_samples_final);
    theta_draw = theta_samples_post(idx,:).';
    y_pred_samples(:,i) = X_pred*theta_draw + ...
        sigma*randn(size(x1_pred));
end

y_pred_mean = mean(y_pred_samples,2);
y_pred_lower = row_percentile(y_pred_samples,2.5);
y_pred_upper = row_percentile(y_pred_samples,97.5);

%% 9. Visualization

fig = figure('Position',[100,100,1350,900],'Color','w');

% Panel 1: trace plot theta_1
subplot(3,3,1);
plot(iter_thin,theta1_thin,'b-','LineWidth',0.6);
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_1');
title('Trace plot: \theta_1');
grid on;

% Panel 2: trace plot theta_2
subplot(3,3,2);
plot(iter_thin,theta2_thin,'r-','LineWidth',0.6);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
xlabel('Iteration');
ylabel('\theta_2');
title('Trace plot: \theta_2');
grid on;

% Panel 3: observed versus posterior-mean fitted response
y_fitted = X*theta_mean;
lims = [min([y;y_fitted]),max([y;y_fitted])];
subplot(3,3,3);
scatter(y,y_fitted,30,'filled');
hold on;
plot(lims,lims,'k--','LineWidth',1.2);
xlabel('Observed y');
ylabel('Posterior-mean fitted y');
title('Observed versus fitted');
axis equal;
xlim(lims); ylim(lims);
grid on;

% Panel 4: posterior density theta_1
subplot(3,3,4);
histogram(theta1_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','b','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(1),theta_true(1)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(1),theta_mean(1)],ylims,'r-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_1: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(1),theta_sd(1)));
grid on;

% Panel 5: posterior density theta_2
subplot(3,3,5);
histogram(theta2_samples,40,'Normalization','pdf', ...
    'FaceColor','r','EdgeColor','k');
hold on;
ylims = ylim;
plot([theta_true(2),theta_true(2)],ylims,'g--','LineWidth',2);
plot([theta_mean(2),theta_mean(2)],ylims,'b-','LineWidth',2);
xlabel('\theta_2');
ylabel('Posterior density');
title(sprintf('\theta_2: mean=%.3f, SD=%.3f', ...
    theta_mean(2),theta_sd(2)));
grid on;

% Panel 6: joint posterior
subplot(3,3,6);
scatter(theta1_samples(1:10:end),theta2_samples(1:10:end), ...
    10,'b','filled');
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
hold on;
plot(theta_true(1),theta_true(2),'go','MarkerSize',10,'LineWidth',2);
plot(theta_mean(1),theta_mean(2),'r*','MarkerSize',12,'LineWidth',2);
xlabel('\theta_1');
ylabel('\theta_2');
title(sprintf('Joint posterior (corr.=%.3f)',posterior_correlation));
grid on;

% Panel 7: ACF theta_1
subplot(3,3,7);
stem(0:max_lag,acf_theta1,'b','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'r--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'r--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_1');
grid on;

% Panel 8: ACF theta_2
subplot(3,3,8);
stem(0:max_lag,acf_theta2,'r','Marker','none','LineWidth',1.2);
hold on;
plot([0,max_lag],[acf_bound,acf_bound],'b--','LineWidth',1);
plot([0,max_lag],[-acf_bound,-acf_bound],'b--','LineWidth',1);
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');
title('ACF: \theta_2');
grid on;

% Panel 9: posterior-predictive distribution
subplot(3,3,9);
fill([x1_pred;flipud(x1_pred)], ...
    [y_pred_upper;flipud(y_pred_lower)], ...
    'b','FaceAlpha',0.20,'EdgeColor','none');
hold on;
plot(x1_pred,y_pred_mean,'b-','LineWidth',2);
xlabel('x_1, with x_2=0.5');
ylabel('Future y');
title('Posterior-predictive distribution');
grid on;

sgtitle('Bayesian Regression with a Quadratic Basis: MCMC Results');

fprintf('\n=== Diagnostic Summary ===\n');
fprintf(['Acceptance rate: %.1f%% ', ...
    '(20-50%% is a useful heuristic here)\n'],100*acceptance_rate);
if acceptance_rate < 0.20
    fprintf('Acceptance is low: decrease proposal_sd.\n');
elseif acceptance_rate > 0.50
    fprintf('Acceptance is high: increase proposal_sd.\n');
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
else
    fprintf('Acceptance rate is in the intended heuristic range.\n');
end
fprintf('Inspect trace plots and ACF decay.\n');
fprintf(['This single-chain example does not compute R-hat; ', ...
    'use multiple chains for production work.\n']);
fprintf(['Credible intervals account for measurement noise and prior ', ...
    'information under the assumed model; they do not automatically ', ...
    'account for model discrepancy.\n']);

fprintf('\n=== ANALYSIS COMPLETE ===\n');

% Optional export:
% exportgraphics(fig,'Bayesian_quadratic_basis_MCMC.pdf', ...
%     'ContentType','vector');

%% Local functions
% Local functions in MATLAB scripts require MATLAB R2016b or later.

function loglik = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma)
    residuals = y-X*theta;
    n = numel(y);
    loglik = -0.5*(residuals.'*residuals)/sigma^2 ...
        - n*log(sigma) - 0.5*n*log(2*pi);
end

function logprior = compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior)
    z = (theta-mu_prior)./sigma_prior;
    logprior = -0.5*(z.'*z) ...
        - sum(log(sigma_prior)) ...
        - 0.5*numel(theta)*log(2*pi);
end

function logposterior = compute_logposterior( ...
        y,X,theta,sigma,mu_prior,sigma_prior)
    logposterior = compute_loglikelihood(y,X,theta,sigma) ...
        + compute_logprior(theta,mu_prior,sigma_prior);
end

function acf = compute_acf_manual(x,max_lag)
    x = x(:)-mean(x);
    denominator = sum(x.^2);
    acf = zeros(max_lag+1,1);
    acf(1) = 1;

    for lag = 1:max_lag
        acf(lag+1) = ...
            sum(x(1:end-lag).*x(1+lag:end))/denominator;
    end
end

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
function q = empirical_percentile(x,p)
    x = sort(x(:));
    n = numel(x);
    h = 1+(n-1)*(p(:)/100);
    lo = floor(h);
    hi = ceil(h);
    w = h-lo;
    q = ((1-w).*x(lo)+w.*x(hi)).';
end

function q = row_percentile(A,p)
    q = zeros(size(A,1),1);
    for i = 1:size(A,1)
        qi = empirical_percentile(A(i,:),p);
        q(i) = qi(1);
    end
end
```

I.5.9 马尔科链 Monte Carlo Simulation

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。
示例的代码在 §65.5.4.

```
% Generate synthetic data
n = 50; % Number of data points
x1 = rand(n, 1); % Random values for x1
x2 = rand(n, 1); % Random values for x2
theta_true = [2; 3]; % True parameter values
sigma = 1; % Standard deviation of noise
y = theta_true(1) * x1.^2 + theta_true(2) * x2 + sigma * randn(n, 1); % Generate data
    with noise

% Define prior and likelihood
log_prior = @(theta) -0.5 * sum(theta.^2 / 10^2); % Gaussian prior with mean 0 and
    variance 10^2
log_likelihood = @(theta) -0.5 * sum((y - theta(1) * x1.^2 - theta(2) * x2).^2 / sigma
    ^2); % Likelihood function

% MCMC sampling parameters
num_samples = 10000; % Number of MCMC samples
theta_samples = zeros(num_samples, 2); % Storage for parameter samples
theta_current = [0; 0]; % Initial guess for parameters

% MCMC sampling loop
for i = 1:num_samples
% Propose new parameters
theta_proposal = theta_current + randn(2, 1) * 0.1; % Gaussian proposal distribution

% Compute log acceptance ratio
log_acceptance_ratio = ...
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
log_likelihood(theta_proposal) + log_prior(theta_proposal) ...
- log_likelihood(theta_current) - log_prior(theta_current);

% Accept or reject the proposal
if log(rand) < log_acceptance_ratio
theta_current = theta_proposal; % Accept the proposal
end

% Store the current sample
theta_samples(i, :) = theta_current;
end

% Analyze the results
theta_mean = mean(theta_samples, 1); % Posterior mean of parameters
theta_ci = quantile(theta_samples, [0.025, 0.975]); % 95% credible intervals

% Display results
fprintf('Estimated theta: [%f, %f]\n', theta_mean(1), theta_mean(2));
fprintf('95%% CI for theta1: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 1), theta_ci(2, 1));
fprintf('95%% CI for theta2: [%f, %f]\n', theta_ci(1, 2), theta_ci(2, 2));

% Plot posterior distributions
figure;
subplot(1, 2, 1);
histogram(theta_samples(:, 1), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_1 Posterior');
xlabel('\theta_1');
ylabel('Density');
grid on;

subplot(1, 2, 2);
histogram(theta_samples(:, 2), 30, 'Normalization', 'pdf');
title('\theta_2 Posterior');
xlabel('\theta_2');
ylabel('Density');
grid on;
```

I.6 第六部分: 优化和参数匹配

此部分讨论了使用 Levenberg-Marquardt 算法的非线性最低方位优化和曲线匹配。

I.6.1 莱文伯格 - 马库尔德

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。
提到 §65.4.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

I.6.2 定制实施

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT ALGORITHM -- CUSTOM IMPLEMENTATION
% ========================================================================
% Fits a nonlinear model to noisy data using the Levenberg-Marquardt (LM)
% algorithm, implemented from scratch (not using MATLAB's lsqnonlin).
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
%
% ALGORITHM:
%   LM is a trust-region method that interpolates between two extremes:
%     - Gauss-Newton (lambda -> 0):  fast quadratic convergence near solution
%     - Gradient descent (lambda -> infinity): robust far from solution
%
%   At each iteration, the parameter update solves:
%       (J^T J + lambda * I) * delta = J^T * r
%
%   where:
%     J     : Jacobian matrix  [n x p]  (partial derivatives of residuals)
%     r     : residual vector  [n x 1]  (y_observed - y_model)
%     lambda: damping parameter (controls interpolation between GN and GD)
%     delta : parameter update  [p x 1]
%
%   If the update reduces the cost, accept it and decrease lambda (-> GN).
%   If not, reject it and increase lambda (-> GD).
%
% JACOBIAN (analytical, for this model):
%   dr_i/d(beta_1) = -exp(beta_2 * x_i)
%   dr_i/d(beta_2) = -beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
%
%   NOTE: this code uses the Jacobian of the MODEL (not the residuals),
%   so J here has the opposite sign from the Jacobian of the residuals.
%   The normal equations J^T J delta = J^T r remain correct as written.
%
% NOTE ON LAMBDA ADAPTATION:
%   This implementation uses a FIXED lambda throughout all iterations.
%   A proper LM implementation adapts lambda based on whether the update
%   improves the cost (reduce lambda) or worsens it (increase lambda).
%   Fixed lambda works here because the problem is well-conditioned and
%   the initial guess is close to the solution, but it is not general.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % fixed seed for reproducibility

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);     % 20 equally spaced points in [0, 2]
true_params = [1.0; 1.0];             % true beta_1 and beta_2

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));   % add Gaussian noise (std = 0.1)

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and algorithm parameters
% ------------------------------------------------------------------------
model    = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta     = [0.5; 0.5];   % initial guess (deliberately away from truth)
lambda   = 0.01;          % damping parameter (fixed -- see NOTE above)
tol      = 1e-6;          % convergence threshold on ||delta_beta||
max_iter = 100;           % maximum number of iterations

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Levenberg-Marquardt iteration
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('%-8s  %-12s  %-10s  %-10s  %-12s\n', ...
        'Iter', 'Cost', 'beta_1', 'beta_2', '||delta||');

for iter = 1 : max_iter

    % --- Model predictions at current parameters ---
    f = model(beta, x);

    % --- Residuals: r = y_observed - y_model  (column vector) ---
    r = (y - f)';

    % --- Jacobian of the model output w.r.t. parameters ---
    % J(i,1) = d(model)/d(beta_1) at x_i = exp(beta_2 * x_i)
    % J(i,2) = d(model)/d(beta_2) at x_i = beta_1 * x_i * exp(beta_2 * x_i)
    J = [ exp(beta(2) * x)',  ...
          beta(1) * x' .* exp(beta(2) * x)' ];

    % --- Normal equations with damping: (J^T J + lambda*I) delta = J^T r ---
    JTJ        = J' * J;
    JTr        = J' * r;
    delta_beta = (JTJ + lambda * eye(2)) \ JTr;

    % --- Update parameters ---
    beta = beta + delta_beta;

    % --- Report progress ---
    cost = 0.5 * sum(r.^2);
    fprintf('%-8d  %-12.6f  %-10.6f  %-10.6f  %-12.2e\n', ...
            iter, cost, beta(1), beta(2), norm(delta_beta));

    % --- Check convergence ---
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    if norm(delta_beta) < tol
        fprintf('\nConverged after %d iterations.\n', iter);
        break;
    end

    if iter == max_iter
        fprintf('\nWARNING: maximum iterations reached without convergence.\n');
    end

end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results
% ------------------------------------------------------------------------
fprintf('\n--- Summary ---\n');
fprintf('True parameters:  beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1), true_params
    (2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta(1), beta(2));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
% ------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit,   'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('Levenberg-Marquardt:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', beta(1), beta(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```

I.6.3 使用内置功能

```
% ========================================================================
% LEVENBERG-MARQUARDT FITTING -- MATLAB BUILT-IN (lsqcurvefit)
% ========================================================================
% Fits the same exponential model as the custom LM implementation using
% MATLAB's lsqcurvefit, which provides a production-quality Levenberg-
% Marquardt solver with adaptive damping, convergence diagnostics, and
% confidence interval estimation.
%
% MODEL:  y(x) = beta_1 * exp(beta_2 * x)
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%
% COMPARISON WITH CUSTOM IMPLEMENTATION:
%   The previous script (levenberg_marquardt.m) built LM from scratch
%   with a FIXED damping parameter lambda.  lsqcurvefit uses an ADAPTIVE
%   lambda strategy: lambda decreases when updates improve the cost
%   (accelerating convergence near the solution) and increases when they
%   don't (recovering robustness far from it).  This is the correct
%   implementation of the Levenberg-Marquardt trust-region method.
%
% lsqcurvefit INTERFACE:
%   [beta, resnorm, residual, exitflag, output, lambda, jacobian]
%       = lsqcurvefit(model, beta0, x, y, lb, ub, options)
%
%   model    : function handle @(beta,x) returning model predictions
%   beta0    : initial parameter guess
%   x, y     : observed data
%   lb, ub   : lower/upper bounds ([] = none)
%   resnorm  : sum of squared residuals at the solution
%   jacobian : Jacobian at the solution (used for confidence intervals)
%
% CONFIDENCE INTERVALS:
%   nlparci(beta, residual, 'Jacobian', jacobian) returns approximate
%   95% confidence intervals based on the linearised model at the solution.
%
% EXPECTED RESULT: beta approx [1.0, 1.0]
% ========================================================================

clear; close all; clc;

rng(0);   % same seed as custom implementation for direct comparison

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- Generate synthetic data  (identical to custom LM script)
% ------------------------------------------------------------------------
x           = linspace(0, 2, 20);
true_params = [1.0, 1.0];

y_true = true_params(1) * exp(true_params(2) * x);
y      = y_true + 0.1 * randn(size(y_true));

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Model and solver setup
% ------------------------------------------------------------------------
model = @(beta, x) beta(1) * exp(beta(2) * x);

beta0 = [0.5, 0.5];   % initial guess (same as custom implementation)

options = optimoptions('lsqcurvefit',                ...
    'Algorithm',    'levenberg-marquardt',           ...  % LM with adaptive lambda
    'Display',      'iter',                          ...  % show iteration history
    'TolFun',       1e-10,                           ...  % function tolerance
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
    'TolX',         1e-10,                          ...  % parameter tolerance
    'MaxIterations', 400);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Fit the model
% -------------------------------------------------------------------------
[beta_opt, resnorm, residual, exitflag, output, ~, jacobian] = ...
    lsqcurvefit(model, beta0, x, y, [], [], options);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Results and confidence intervals
% -------------------------------------------------------------------------
ci = nlparci(beta_opt, residual, 'Jacobian', full(jacobian));

fprintf('\n--- Results ---\n');
fprintf('True parameters:   beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', true_params(1),
    true_params(2));
fprintf('Fitted parameters: beta_1 = %.4f,  beta_2 = %.4f\n', beta_opt(1), beta_opt(2));
fprintf('Residual norm (sum of squared residuals): %.6e\n', resnorm);
fprintf('\n95%% Confidence Intervals:\n');
fprintf('  beta_1: [%.4f, %.4f]\n', ci(1,1), ci(1,2));
fprintf('  beta_2: [%.4f, %.4f]\n', ci(2,1), ci(2,2));
fprintf('\nSolver exit flag: %d  (%s)\n', exitflag, output.message);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Plot
% -------------------------------------------------------------------------
x_fit = linspace(min(x), max(x), 200);
y_fit = model(beta_opt, x_fit);

figure;
scatter(x, y, 60, 'ro', 'filled', 'DisplayName', 'Observed data');
hold on;
plot(x_fit, y_fit, 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'LM fitted model');
plot(x_fit, true_params(1)*exp(true_params(2)*x_fit), ...
     'k--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'True model');
hold off;

xlabel('x');
ylabel('y');
title(sprintf('lsqcurvefit LM:  \\beta_1=%.3f, \\beta_2=%.3f', ...
              beta_opt(1), beta_opt(2)));
legend('Location', 'northwest');
grid on;
```

I.7 第七部分: 地震可靠性和不确定性

本部分适用于上面的方法, 包括概率性危险性分析和性能为基础的设计。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

I.7.1 地震 危险性分析

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。
代码为 §67.13.

```
% ========================================================================
% SEISMIC HAZARD ANALYSIS AND DEAGGREGATION
% ========================================================================
% Demonstrates two core products of Probabilistic Seismic Hazard Analysis
% (PSHA) for a site:
%
% PART 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:
%   Plots the annual probability of exceeding a given ground motion
%   intensity level (here: Peak Ground Acceleration, PGA in units of g).
%
%   The hazard curve is the fundamental output of PSHA.  For a given
%   intensity measure IM:
%       lambda(IM > x) = annual rate of exceedance of level x
%
%   A common design target:
%     lambda = 0.002/year (2% probability in 50 years) -> "2/50" level
%     lambda = 0.02/year  (10% probability in 50 years) -> "10/50" level
%
%   Here the hazard curve is modelled by a simple exponential decay:
%       lambda(PGA) = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
%   This is synthetic -- a real hazard curve is computed by integrating
%   over all earthquake sources, magnitudes, and distances.
%
% PART 2 -- SEISMIC HAZARD DEAGGREGATION:
%   For a given hazard level (e.g. Sa(T=1s) = 0.8g), deaggregation
%   identifies which (magnitude, distance) scenarios contribute most
%   to the hazard at that level.
%
%   The scatter plot shows:
%     - x-axis: source-to-site distance R [km]
%     - y-axis: earthquake magnitude M
%     - marker size: proportional to fractional contribution to hazard
%     - marker color: same contribution scale
%
%   The dominant scenario (largest marker) defines the "controlling
%   earthquake" used for ground motion selection in structural analysis.
%
% NOTE: Both the hazard curve and deaggregation data here are SYNTHETIC.
%   In practice these are computed using software such as OpenSHA, HAZUS,
%   or the USGS Unified Hazard Tool, integrating over catalogued faults
%   and ground motion prediction equations (GMPEs).
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ------------------------------------------------------------------------
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% Section 1 -- Seismic hazard curve
% ------------------------------------------------------------------------
% PGA levels at which the annual exceedance rate is evaluated
pga_values = linspace(0.05, 0.5, 10);   % PGA in units of g

% Synthetic hazard model: lambda = lambda_0 * exp(-decay_rate * PGA)
lambda_0    = 0.15;   % exceedance rate at PGA = 0 (extrapolated)  [1/year]
decay_rate = 5;       % steepness of the hazard curve               [1/g]

exceedance_probs = lambda_0 * exp(-decay_rate * pga_values);

% Reference hazard levels (horizontal lines on the plot)
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 years  approx 0.000404/year
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 years approx 0.002107/year

figure;
semilogy(pga_values, exceedance_probs, 'b-o', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LineWidth', 1.5, ...
      'LabelHorizontalAlignment', 'left');

xlabel('Peak Ground Acceleration  (g)',           'FontSize', 12);
ylabel('Annual Probability of Exceedance',        'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Curve',                     'FontSize', 13);
grid on;
set(gca, 'YScale', 'log');
set(gca, 'YTick', [1e-3, 5e-3, 1e-2, 5e-2, 1e-1, 5e-1, 1]);
ylim([1e-3, 1]);

saveas(gcf, 'hazard_curve.png');

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Seismic hazard deaggregation
% ------------------------------------------------------------------------
% Each entry represents a (magnitude, distance) scenario and its
% fractional contribution to the hazard at Sa(T=1s) = 0.8g.
% Contributions must sum to 1.0 for a complete deaggregation.

magnitudes    = [6.0,  6.5,  7.0,  7.3,  7.5,  7.8];   % moment magnitude Mw
distances     = [15,   20,   30,   35,   40,   50  ];    % closest distance [km]
contributions = [0.10, 0.20, 0.25, 0.30, 0.10, 0.05];   % fractional contributions

fprintf('Total contribution (should sum to 1.0): %.2f\n', sum(contributions));

% Identify the controlling (dominant) scenario
[~, ctrl_idx] = max(contributions);
fprintf('Controlling scenario: M=%.1f, R=%d km (contribution=%.0f%%)\n', ...
        magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx), contributions(ctrl_idx)*100);

```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
figure;
scatter(distances, magnitudes, 300 * contributions, contributions, 'filled');
hold on;
% Highlight the controlling earthquake
scatter(distances(ctrl_idx), magnitudes(ctrl_idx), ...
        300 * contributions(ctrl_idx), 'k', 'LineWidth', 2);
text(distances(ctrl_idx)+1, magnitudes(ctrl_idx), ...
     sprintf('  Controlling\n  M=%.1f, R=%dkm', magnitudes(ctrl_idx), distances(ctrl_idx
    )), ...
     'FontSize', 10);

cb = colorbar;
cb.Label.String = 'Fractional contribution to hazard';
clim([0, 0.5]);

xlabel('Closest Source-to-Site Distance  (km)', 'FontSize', 12);
ylabel('Moment Magnitude  M_w',                 'FontSize', 12);
title('Seismic Hazard Deaggregation  at  S_a(T=1.0 s) = 0.8g', 'FontSize', 13);
grid on;
set(gca, 'YTick', [6.0, 6.2, 6.5, 6.8, 7.0, 7.2, 7.3, 7.5, 7.8]);
xlim([0, 60]);  ylim([5.5, 8.5]);

saveas(gcf, 'deaggregation_plot.png');
```

I.7.2 基于性能 地震工程

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

符合例子的代码 §72.4.

```
% ========================================================================
% PERFORMANCE-BASED EARTHQUAKE ENGINEERING (PBEE) -- NUMERICAL EXAMPLE
% ========================================================================
% Implements the four-step PBEE framework (PEER methodology) relating
% ground shaking intensity to structural response, damage, and loss.
%
% THE PBEE FRAMEWORK (Pacific Earthquake Engineering Research Center):
%   The total loss lambda(DV) is computed by integrating over all
%   intermediate variables via the triple integral:
%
%   lambda(DV > dv) = int int int  P(DV>dv|DM) |dP(DM|EDP)| |dP(EDP|IM)| |dlambda(IM)|
%
%   where:
%     IM  : Intensity Measure       (e.g. spectral acceleration Sa)
%     EDP : Engineering Demand Parameter  (e.g. interstory drift ratio theta)
%     DM  : Damage Measure          (damage state: None/Slight/Moderate/...)
%     DV  : Decision Variable       (repair cost, downtime, casualties)
%
% THE FOUR STEPS IMPLEMENTED HERE:
%
%   Step 1 -- Seismic hazard curve: lambda(Sa)
```


由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%     Annual rate of exceeding each Sa level at the site.
%     Synthetic exponential model; in practice from PSHA.
%
%   Step 2 -- IDA curve: theta = f(Sa)
%     Maps Sa to peak interstory drift via a power-law fit to
%     Incremental Dynamic Analysis results.
%
%   Step 3 -- Fragility curves: P(DM >= ds | theta)
%     Lognormal cumulative distribution functions giving probability of
%     reaching or exceeding each damage state as a function of drift.
%     Parameters: median theta_m (drift at 50% probability) and dispersion beta.
%
%   Step 4 -- Loss analysis: E[DV]
%     (a) Deterministic: E[DV] = sum_i P(DS=i) * consequence_i
%     (b) Monte Carlo: sample damage states and accumulate loss statistics
%
% NOTE ON MONTE CARLO DAMAGE STATE SAMPLING:
%   The cumulative probability vector is used to assign damage states via
%   inverse CDF sampling:  state = find(U < cumsum(P), 1, 'first').
%   The vectorised implementation below replaces the original scalar loop.
% ========================================================================

clc; clear; close all;

% ========================================================================
% STEP 1 -- SEISMIC HAZARD CURVE:  lambda(Sa)
% ========================================================================
% Annual exceedance rate as a function of spectral acceleration.
% Model: lambda(Sa) = A * exp(-B * Sa)   (synthetic exponential decay)

A          = 0.5;   % rate at Sa=0  [exceedances/year]
B          = 2.0;   % decay rate    [1/g]
Sa_values  = linspace(0, 1.5, 100);   % Sa range  [g]

lambda_values = A * exp(-B * Sa_values);

% Reference hazard levels
lambda_2_50  = 1 - (1-0.02)^(1/50);   % 2% in 50 yr  approx 4.0e-4 /yr
lambda_10_50 = 1 - (1-0.10)^(1/50);   % 10% in 50 yr approx 2.1e-3 /yr

figure('Name', 'PBEE Step 1: Hazard Curve');
semilogy(Sa_values, lambda_values, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
yline(lambda_2_50,  'r--', '2% in 50 yr',  'LabelHorizontalAlignment','left');
yline(lambda_10_50, 'k--', '10% in 50 yr', 'LabelHorizontalAlignment','left');
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Annual Rate of Exceedance  \lambda');
title('Step 1 -- Seismic Hazard Curve');
grid on;

% ========================================================================
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% STEP 2 -- IDA CURVE:  theta = f(Sa)
% ========================================================================
% Interstory drift ratio (EDP) as a function of Sa (IM).
% Power-law model fit to Incremental Dynamic Analysis:
%   theta(Sa) = C1 * Sa^C2

C1 = 0.02;   % scaling constant
C2 = 0.9;    % exponent (< 1: slightly concave, typical of ductile systems)

theta_values = C1 * Sa_values.^C2;

figure('Name', 'PBEE Step 2: IDA Curve');
plot(Sa_values, theta_values, 'r', 'LineWidth', 2);
xlabel('Spectral Acceleration  S_a  (g)');
ylabel('Interstory Drift Ratio  \theta');
title('Step 2 -- Incremental Dynamic Analysis (IDA) Curve');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 3 -- FRAGILITY CURVES:  P(DS >= ds | theta)
% ========================================================================
% Lognormal fragility functions for four damage states.
% P(DS >= ds | theta) = Phi( [ln(theta) - ln(theta_m)] / beta )
%
% Parameters:
%   theta_m : median drift (50% probability of reaching this DS)
%   beta    : lognormal dispersion (total {chap:trustregion} in capacity)

beta              = 0.4;
fragility_medians = [0.005, 0.010, 0.020, 0.050];   % median drifts [rad]
fragility_labels  = {'Light', 'Moderate', 'Severe', 'Collapse'};
theta_range       = linspace(0.001, 0.1, 200);

figure('Name', 'PBEE Step 3: Fragility Curves');
hold on;
colors = {'b', 'g', 'r', 'k'};
for i = 1 : length(fragility_medians)
    P = normcdf((log(theta_range) - log(fragility_medians(i))) / beta);
    plot(theta_range, P, colors{i}, 'LineWidth', 2, 'DisplayName', fragility_labels{i});
end
xlabel('Interstory Drift Ratio  \theta  (rad)');
ylabel('Probability  P(DS \geq ds | \theta)');
title('Step 3 -- Fragility Curves');
legend('Location', 'east');
grid on;

% ========================================================================
% STEP 4a -- DETERMINISTIC LOSS ANALYSIS:  E[DV]
% ========================================================================
% Expected consequences given probabilities from fragility analysis
% at a specific hazard level.
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
%
% NOTE: probabilities here are P(DS = ds_i) at a given drift level,
% not P(DS >= ds_i).  They should sum to 1.0 for a complete loss model.

ds_probs     = [0.9, 0.6, 0.1, 0.0];   % P(DS = ds_i) -- NOTE: sums to 1.6,
                                       % suggesting these are P(DS>=ds_i)
                                       % not exclusive probabilities.
                                       % Preserved from original.
repair_costs_det = [0.1,  0.5,   2.0,  10.0];   % repair cost  [$M]
downtime_det     = [2,    14,    60,   300 ];    % downtime     [days]
casualties_det   = [0.0,  0.01,  0.1,   5.0];  % casualties   [%]

E_loss       = sum(ds_probs .* repair_costs_det);
E_downtime   = sum(ds_probs .* downtime_det);
E_casualties = sum(ds_probs .* casualties_det);

fprintf('\n--- Step 4a: Deterministic Loss ---\n');
fprintf('Expected repair cost: $%.2f M\n',    E_loss);
fprintf('Expected downtime:    %.1f days\n',  E_downtime);
fprintf('Expected casualties:  %.3f%%\n',     E_casualties);

% =========================================================================
% STEP 4b -- MONTE CARLO LOSS ESTIMATION
% =========================================================================
% Sample damage states using exclusive probabilities (sum to 1.0) and
% accumulate repair cost, downtime, and casualty statistics.
%
% DAMAGE STATES: None, Slight, Moderate, Extensive, Complete
%
% VECTORISED SAMPLING:
%   For each sample U ~ Uniform[0,1], the damage state is the first
%   state for which cumsum(P) > U.  Equivalent to inverse CDF sampling.

num_samples = 100000;

% Exclusive probabilities (sum to 1.0)
ds_probs_mc  = [0.60, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01];
cum_probs    = cumsum(ds_probs_mc);

% Consequences per damage state
rc_mc  = [0,    0.03,  0.15,  0.50,  2.00];   % repair cost [M$]
dt_mc  = [0,    1,     7,     21,    60  ];    % downtime    [days]
cas_mc = [0,    0.005, 0.02,  0.10,  0.50];   % casualties  [%]

% Vectorised inverse CDF sampling (replaces scalar loop)
U             = rand(num_samples, 1);
damage_states = sum(U >= cum_probs, 2) + 1;   % state index 1..5

rc_results  = rc_mc(damage_states);
dt_results  = dt_mc(damage_states);
cas_results = cas_mc(damage_states);
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
175
176 % Statistics
177 E_rc   = mean(rc_results);   SD_rc  = std(rc_results);
178 E_dt   = mean(dt_results);   SD_dt  = std(dt_results);
179 E_cas  = mean(cas_results);  SD_cas = std(cas_results);
180
181 fprintf('\n--- Step 4b: Monte Carlo Loss (%d samples) ---\n', num_samples);
182 fprintf('Repair cost: $%.3f M  (SD: $%.3f M,  CV: %.2f)\n', E_rc,  SD_rc,  SD_rc/E_rc);
183 fprintf('Downtime:    %.2f days (SD: %.2f days, CV: %.2f)\n', E_dt,  SD_dt,  SD_dt/E_dt
    );
184 fprintf('Casualties:  %.4f%%  (SD: %.4f%%,   CV: %.2f)\n',   E_cas, SD_cas, SD_cas/E_cas
    );
185
186 % ========================================================================
187 % STEP 4b -- PLOTS: Loss distributions
188 % ========================================================================
189 figure('Name', 'PBEE Step 4b: Loss Distributions');
190
191 subplot(1,3,1);
192 histogram(rc_results,  'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'b');
193 xlabel('Repair Cost  ($M)');  ylabel('Probability');
194 title('Repair Cost Distribution');
195 xline(E_rc, 'r--', sprintf('E=\\$%.2fM', E_rc), 'LineWidth', 1.5);
196 grid on;
197
198 subplot(1,3,2);
199 histogram(dt_results,  'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'r');
200 xlabel('Downtime  (days)');  ylabel('Probability');
201 title('Downtime Distribution');
202 xline(E_dt, 'b--', sprintf('E=%.1f d', E_dt), 'LineWidth', 1.5);
203 grid on;
204
205 subplot(1,3,3);
206 histogram(cas_results, 'Normalization', 'probability', 'FaceColor', 'g');
207 xlabel('Casualties  (%)');  ylabel('Probability');
208 title('Casualty Distribution');
209 xline(E_cas, 'k--', sprintf('E=%.3f%%', E_cas), 'LineWidth', 1.5);
210 grid on;
211
212 sgtitle('Step 4b -- Monte Carlo Loss Distributions');
213
214 saveas(gcf, 'loss_distributions.png');
```

I.8 第八部分: 有用

混合用途功能和工具。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

I.8.1 身份

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

创建身份的代码, 如在 chapter H

```
% Book Chapter Identicon Generator with separate filename and title
% ================================================================
% ============================================================================
% BOOK CHAPTER IDENTICON GENERATOR
% ============================================================================
% Generates a unique visual "identicon" -- a small symmetric icon derived
% deterministically from a chapter title -- for use as a chapter header
% or visual identifier in the book.
%
% HOW IT WORKS:
%   1. The chapter title string is hashed into a 32-element integer array
%      using a simple position-weighted ASCII accumulation (simpleHash).
%   2. The hash values are mapped onto a 5x5 grid, with the left half
%      mirrored to the right for left-right symmetry.
%   3. Each non-zero cell is assigned a shape type (1=rounded square,
%      2=triangle-left, 3=triangle-right, 4=circle) and a color drawn
%      from a hue-shifted palette derived from the hash.
%   4. The result is rendered as a pixel image (300x300) alongside a
%      colour-mapped view of the raw pattern matrix.
%
% INPUTS (prompted interactively):
%   filename_input : base name for the output PDF  (e.g. 'C-14')
%   title_input    : chapter title string used to generate the hash
%
% OUTPUT:
%   <filename_input>.pdf  -- figure saved as PDF
%
% NOTE ON HASH QUALITY:
%   simpleHash() is intentionally simple (not cryptographic).  Its purpose
%   is only to produce visually distinct patterns for different chapter
%   titles, not to be collision-resistant.  Titles that differ by only
%   one character will produce clearly different icons in practice.
%
% NOTE ON PERFORMANCE:
%   The shape-drawing loops iterate over individual pixels (up to 60x60
%   per cell).  For cell_size=60 and a 5x5 grid this is 90,000 pixels --
%   fast enough interactively.  Increasing cell_size will slow rendering
%   quadratically.  Vectorised alternatives using meshgrid exist but
%   are left as-is for readability.
% ============================================================================

clear; clc;

% ---------------------------------------------------------------------------
% Section 1 -- User inputs
% ---------------------------------------------------------------------------
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

```
filename_input = input('Enter filename for PDF (e.g., C-14): ', 's');
if isempty(filename_input)
    filename_input = 'C-14';
end

title_input = input('Enter chapter title (e.g., Performance Based Earthquake Engineering
    ): ', 's');
if isempty(title_input)
    title_input = 'Performance Based Earthquake Engineering';
end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 2 -- Generate hash from chapter title
% -------------------------------------------------------------------------
hash_values = simpleHash(title_input);
hash_str    = num2str(hash_values);

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 3 -- Build the 5x5 pattern matrix
% -------------------------------------------------------------------------
% Each cell is assigned an integer 0..4:
%   0 = empty (white)
%   1 = rounded square
%   2 = triangle (lower-left fill)
%   3 = triangle (lower-right fill)
%   4 = circle
%
% Only the left half + centre column are computed from the hash;
% the right half is mirrored for symmetry.

grid_size = 5;
pattern   = zeros(grid_size);

for i = 1 : grid_size
    % Left half (columns 1 .. floor(n/2))
    for j = 1 : floor(grid_size/2)
        hash_idx        = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j)    = mod(hash_values(hash_idx), 5);
        pattern(i, grid_size-j+1) = pattern(i,j);   % mirror
    end
    % Centre column (for odd grid size)
    if mod(grid_size, 2) == 1
        j        = ceil(grid_size/2);
        hash_idx = mod((i-1)*grid_size + j - 1, length(hash_values)) + 1;
        pattern(i,j) = mod(hash_values(hash_idx), 5);
    end
end

% -------------------------------------------------------------------------
% Section 4 -- Build colour palette from hash
% -------------------------------------------------------------------------
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
% Base hue derived from first three hash values; four colours at 90-degree
% hue intervals for variety.

base_hue = mod(sum(hash_values(1:3)), 360) / 360;
colors   = [ hsv2rgb([mod(base_hue,        1), 0.8, 0.9]) ;   % primary
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.25, 1), 0.7, 0.9]) ;   % complementary 1
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.50, 1), 0.8, 0.8]) ;   % complementary 2
             hsv2rgb([mod(base_hue + 0.75, 1), 0.7, 0.85]) ]; % complementary 3

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 5 -- Render pixel image
% ------------------------------------------------------------------------
cell_size = 60;                                    % pixels per grid cell
img_size  = grid_size * cell_size;
identicon = ones(img_size, img_size, 3);           % white RGB background

for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size

        value = pattern(i,j);
        if value == 0, continue; end   % empty cell

        % Pixel bounding box for this cell (with padding)
        padding   = ceil(cell_size * 0.05);
        row_start = (i-1)*cell_size + 1 + padding;
        row_end   =  i   *cell_size     - padding;
        col_start = (j-1)*cell_size + 1 + padding;
        col_end   =  j   *cell_size     - padding;

        % Colour selection based on position and value
        color_idx = mod(i*j + value, 4) + 1;
        color     = colors(color_idx, :);

        switch value

            case 1  % Rounded square
                % Pixels near the four corners are masked out to create
                % the rounded effect.
                corner_r = ceil(cell_size * 0.15);
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        tl = (r-row_start)^2 + (c-col_start)^2;
                        tr = (r-row_start)^2 + (c-col_end  )^2;
                        bl = (r-row_end  )^2 + (c-col_start)^2;
                        br = (r-row_end  )^2 + (c-col_end  )^2;
                        in_corner = ...
                            (r < row_start+corner_r && c < col_start+corner_r && tl >
    corner_r^2) || ...
                            (r < row_start+corner_r && c > col_end  -corner_r && tr >
    corner_r^2) || ...
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
                            (r > row_end  -corner_r && c < col_start+corner_r && bl > corner_r^2) || ...
                            (r > row_end  -corner_r && c > col_end  -corner_r && br > corner_r^2);
                        if ~in_corner
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 2  % Triangle: lower-left fill (hypotenuse from top-left to bottom-right)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        if row_start+r <= img_size && col_start+c <= img_size
                            identicon(row_start+r, col_start+c, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 3  % Triangle: lower-right fill (hypotenuse from top-right to bottom-left)
                h = row_end - row_start;
                w = col_end - col_start;
                for r = 0 : h
                    fill_width = ceil((r/h) * w);
                    for c = 0 : fill_width
                        cc = col_end - c;
                        if row_start+r <= img_size && cc > 0 && cc <= img_size
                            identicon(row_start+r, cc, :) = color;
                        end
                    end
                end

            case 4  % Circle: filled disk within the padded cell
                cr     = (row_start + row_end) / 2;
                cc_ctr = (col_start + col_end) / 2;
                radius = (row_end - row_start) / 2 * 0.9;
                for r = row_start : row_end
                    for c = col_start : col_end
                        if sqrt((r-cr)^2 + (c-cc_ctr)^2) <= radius
                            identicon(r, c, :) = color;
                        end
                    end
                end

        end   % switch
    end
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

```
end

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 6 -- Compose figure
% ------------------------------------------------------------------------
fig = figure('Position', [100, 100, 800, 400], 'Color', 'none');

% Left panel: rendered identicon with grid lines
subplot('Position', [0.05, 0.12, 0.45, 0.75]);
imshow(identicon);
hold on;
for k = 1 : grid_size-1
    line([0, img_size], [k*cell_size, k*cell_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], 'LineWidth',
     1);
    line([k*cell_size, k*cell_size], [0, img_size], 'Color', [0.6,0.6,0.6], 'LineWidth',
     1);
end
hold off;

% Right panel: colour-mapped pattern matrix with value labels
subplot('Position', [0.52, 0.12, 0.45, 0.75]);
imagesc(pattern);
colormap(hsv(5));
axis square;  grid on;
set(gca, 'Color', 'none');
for i = 1 : grid_size
    for j = 1 : grid_size
        text(j, i, num2str(pattern(i,j)), ...
             'HorizontalAlignment', 'center', ...
             'Color', 'w', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 14, ...
             'EdgeColor', 'k', 'Margin', 1);
    end
end

% Top annotation: chapter title + first 16 hash digits
title_text = [title_input, '  |  Hash: ', hash_str(1:min(16,length(hash_str))), '...'];
annotation('textbox', [0.1, 0.91, 0.8, 0.07], ...
           'String', title_text, 'EdgeColor', 'none', ...
           'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 14, ...
           'FontWeight', 'bold', 'Color', [0.2, 0.2, 0.2]);

% ------------------------------------------------------------------------
% Section 7 -- Export
% ------------------------------------------------------------------------
output_filename = [filename_input, '.pdf'];
print(fig, '-dpdf', output_filename);
fprintf('Saved to: %s\n', output_filename);


% ========================================================================
% LOCAL FUNCTION: simpleHash
```


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

```
% ================================================================================
% Produces a 32-element integer array from a string by accumulating
% position-weighted ASCII values modulo 256.
%
% This is NOT a cryptographic hash -- it is designed only to produce
% visually distinct patterns for different chapter titles.
%
% For each character str(i) and each output slot j:
%   hash(position_factor) += char_code(i) * i    (mod 256)
%
% where position_factor = mod(i*j, 32) + 1 distributes contributions
% across all 32 output slots.

function hash_values = simpleHash(str)

hash_values = zeros(1, 32);

for i = 1 : length(str)
    char_code = double(str(i));
    for j = 1 : min(32, length(str))
        slot              = mod(i*j, 32) + 1;
        hash_values(slot) = mod(hash_values(slot) + char_code * i, 256);
    end
end

end   % simpleHash
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

J MathCad 例子

下面的页面包含从我的介绍到结构分析的工作室任务 (3525) 走路。许多这些问题也被介绍为工作例子在书中; 然而, 无法创建文本解决方案和随后的相应解决方案之间的混合链接。

这些解决方案, 虽然不一定是完美的或最佳的, 由先生准备。克里斯托弗·塞古拉

所有问题都通过 Mathcad 解决了, 我希望学生使用它在所有任务中, 因为学习是简单的, 并且很容易开始。

在这里,Mathcad 被用作计算援助而不是替代 解析 理性。方程式被输入到自然数学分数中, 并以书面方式进行评估; 单位是明确和一致处理的; 变化在整个工作表上自动传播, 允许假设、计算和结果在单一文件中共存。与此同时, 其有限的象征性抽象和算法控制意味着它应该补充 - 而不是取代 - 手衍生和概念理解。法定使用, 可以澄清结构性理智; 用不批判性, 可以隐藏它。讽刺的是,Mathcad 提交也使学术错误的识别更容易, 因为复制解决方案倾向于重复相同的结构、评分和错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Structural Analysis Example Problems

Victor E. Saouma

Prepared by Christopher Segura
Summer 2011

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

List of Examples

2.1 Stress Vectors
2.2 Stress Vectors 2
2.3 Principal Stresses
2.4 Stress Tensor Operations
2.5 Stress Transformation
2.6 Stress Transformation 2
2.7 Strain Invariants & Principal Strains
2.8 Equilibrium Equation
2.9 Stress-Strain
2.10 Stress-Strain 2
3.1 Displacement by Double Integration
4.1 Live Load Reduction
4.2 Wind Load
4.3 Earthquake Load on a Frame
4.4 Earthquake Load on a Tall Building
4.5 Hysdrostatic Load
4.6 Thermal Expansion/Stress
5.1 Statically Indeterminate Cable Structure
5.2 Simply Supported Beam
5.3 Parabolic Load
5.4 Three Span Beam
5.5 Three Hinged Gable Frame
5.6 Inclined Supports
7.1 Truss, Method of Joints
7.2 3D Truss
7.3 Truss I, Matrix Method
7.4 Truss II, Matrix Method
7.5 Truss, Method of Sections
8.1 Funicular Cable Structure
8.2 Design of Suspension Bridge
10.1 Simple Shear and Moment Diagram
10.2 Frame Shear and Moment Diagram
10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load
10.4 Shear and Moment Diagrams for Frame
10.5 Shear and Moment Diagrams for Inclined Frame
10.6 3D Frame
11.1 Three Hinged Arch, Point Loads
11.2 Semi-Circular Arch
11.3 Statically Indeterminate Arch
11.4 Semi-circular Box Girder
11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load
11.6 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Uniform Load
12.1 Moment Area, Cantilevered Beam
12.2 Moment Area, Simply Supported Beam
12.3 Maximum Deflection
12.4 Frame Deflection
12.5 Frame Subjected to Temperature Loading
12.6 Conjugate Beam
12.7 Conjugate Beam 2
13.1 Deflection of a Cantilever Beam

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection
13.3 Deflection of a Frame
13.4 Rotation of a Frame

13.5 Truss Deflection
13.6 Torsional and Flexural Deformation
13.7 Flexural and Shear Deformation in a Beam
13.8 Thermal Effects in a Beam
13.9 Deflection of a Truss
13.10 Thermal Deflection of a Truss: I
13.11 Thermal Deflection of a Truss: II
13.12 Truss with Initial Camber
13.13 Prestressed Concrete Beam with Continuously Variable I
14.1 Steel Building Frame Analysis
14.2 Analysis of Irregular Building Frame
14.3 Redundant Truss Analysis
14.4 Truss with Two Redundants
14.5 Analysis of Nonprismatic Members
14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Beams
14.7 Rectangular Frame, External Load
14.8 Frame with Temperature and Support Displacements
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change
15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads
16.1 Propped Cantilever Beam
16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection
16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection
16.4 Frames, Slope Deflection
16.5 Box Culvert, Slope Deflection
16.6 Continuous Beam
16.7 Continuous Beam, Simplified Method
16.8 Continuous Beam, Inintial Settlement
16.9 Frame
16.10 Frame with Side Load
17.1 Beam
17.2 Frame

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.1 Stress Vectors

For the following stress tensor at point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} := \sigma = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine the traction (or stress vector) **t** passing through P and parallel to the plane ABC where A(4,0,0), B(0,2,0) and C(0,0,6)

Solution:

The vector normal to the plane can be found by taking the cross products of vectors AB and AC

$$\mathbf{N} = AB \times AC = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 12\,e_1 + 24\,e_2 + 8\,e_3$$

The unit normal of N is given by

$$\mathbf{n} = \frac{3}{7}e_1 + \frac{6}{7}e_2 + \frac{2}{7}e_3$$

$$n := \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Hence the stress vector traction will be

$$t := n \cdot \sigma = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

and thus

$$\mathbf{t} = -\frac{9}{7}e_1 + \frac{5}{7}e_2 + \frac{10}{7}e_3$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.2 Stress Vectors 2

The state of stress through a continuum is given with respect to the cartesian axes by

$$\sigma(x) := \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5(x_2)^2 & 0 \\ 5(x_2)^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot MPa$$

Determine the stress vector at $P(1,1,\sqrt{3})$ of the plane that is normal to the tangent to the cylindrical surface $(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4$ at P

Solution:

Vector Equation

$$v(x) := (x_2)^2 + (x_3)^2 - 4$$

Gradient

$$Vect1(x) := \nabla_x v(x) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot x_2 \\ 2\cdot x_3 \end{pmatrix}$$

For $x_2 := 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 := \sqrt{4 - (x_2)^2} = 1.732$

Normalized Vector

$$n := \frac{x}{|x|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.866 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(x)\cdot n = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 1.732 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.3 Principal Stresses

The stress tensor is given at a point by point P

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine the principal stress values and the corresponding directions

Solution:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Simplifying the determinant

$$\left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \text{ simplify } \rightarrow -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0$$

thus the roots are

$$\lambda := -(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-4) = 0 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Note that those are the three eigenvalues of the stress vector. If we let the x_1 axis be the one corresponding to the direction of λ_2 and n_i^2 be the direction cosines of this axis, then we have

$$(3-\lambda_2)n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + n_3^{\,2} = 0 \rightarrow 5\cdot n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + n_3^{\,2} = 0$$

$$n_1^{\,2} + (0-\lambda_2)\cdot n_2^{\,2} + 2n_3^{\,2} = 0 \rightarrow n_1^{\,2} + 2\cdot n_2^{\,2} + 2\cdot n_3^{\,2} = 0 \qquad n_1^{\,2} = 0 \qquad n_2^{\,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad n_3^{\,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_1^{\,2} + 2\cdot n_2^{\,2} + (0-\lambda_2)n_3^{\,2} = 0 \rightarrow n_1^{\,2} + 2\cdot n_2^{\,2} + 2\cdot n_3^{\,2} = 0$$

Similarly, if we let x_2 be the one corresponding to the direction of λ_1 and n_i^1 be the direction cosines of this axis,

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\left(3-\lambda_1\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow 2\cdot n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_1\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad n_2^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad n_3^{\,1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Finally, if we let x_3 be the one corresponding to the direction of λ_3 and n_i^3 be the direction cosines of this axis,

$$\left(3-\lambda_3\right)n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0\rightarrow -n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)\cdot n_2^{\,2}+2n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}-4\cdot n_2^{\,2}+2\cdot n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}+\left(0-\lambda_3\right)n_3^{\,2}=0\rightarrow n_1^{\,2}+2\cdot n_2^{\,2}-4\cdot n_3^{\,2}=0$$

$$n_1^{\,3}=-\frac{2}{\sqrt{6}}\qquad n_2^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\qquad n_3^{\,3}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_{pd}:=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.4 Stress Tensor Operations

For the following stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Determine directly the three Invariants I_σ, II_σ and III_σ
b) Determine the principal stresses and principal stress directions
c) Show that the transformation tensor of direction cosines transforms the original stress tensor into the diaganol axes stress tensor
d) Recompute the three invariants from the principal stresses
e) Split the stress tensor into its spherical and deviator parts
f) Show that the first invariant of the deviator is zero

Solution:

a) $I_\sigma := \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} = 20$

$II_\sigma := \sigma_{1,1}\cdot\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\cdot\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\cdot\sigma_{1,1} - \sigma_{1,2}\cdot\sigma_{2,1} = 123$

$III_\sigma := |\sigma| = 216$

b) $\sigma_p := \text{eigenvals}(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

$n_p := \text{eigenvecs}(\sigma) = \begin{pmatrix} -0.707 & 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $n_p^{\,T}\cdot\sigma\cdot n_p = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

d) $I_{\sigma pd} := \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2} + \sigma_{p_3} = 20$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$II_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2} + \sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} + \sigma_{p_3}\cdot\sigma_{p_1} = 123$$

$$III_{\sigma pd} := \sigma_{p_1}\cdot\sigma_{p_2}\cdot\sigma_{p_3} = 216$$

e) $\sigma_{mean} := \frac{I_{\sigma pd}}{3} = 6.667$

$$\sigma_{sperical} := \begin{pmatrix} \sigma_{mean} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{mean} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{mean} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.667 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 6.667 \end{pmatrix}$$

f) $$\sigma_{deviator} := \sigma - \sigma_{sperical} = \begin{pmatrix} -0.667 & -3 & 0 \\ -3 & -0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 \end{pmatrix}$$

2.5 Stress Transformation

Show that the transformation tensor of direction cosines for the stress tensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

transforms the original stress tensor into the diaganol principal axes stress tensor

Solution:

$$n_{pd} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} := n_{pd}\cdot\sigma\cdot n_{pd}^{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2.6 Stress Transformation 2

The octahedral plane is the plane which makes equal angles with the principal stress directions. Show that the shear stress on this plane, the so-called octahedral shear stress, is given by

$$\sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{III}-\sigma_I)^2}$$

Solution:

$$v := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$n := \left(\frac{v}{|v|}\right)^T = (0.577 \quad 0.577 \quad 0.577)$$

$$\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \begin{pmatrix}\sigma_I & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{II} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{III}\end{pmatrix}$$

$$t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot\sigma(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \rightarrow (0.577\cdot\sigma_I \quad 0.577\cdot\sigma_{II} \quad 0.577\cdot\sigma_{III})$$

$$tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := n\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T \rightarrow 0.333\cdot\sigma_I + 0.333\cdot\sigma_{II} + 0.333\cdot\sigma_{III}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) := \sqrt{t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot t(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})^T - tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})\cdot tn(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III})}$$

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{0.222\cdot\sigma_I^2 - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{II} - 0.222\cdot\sigma_I\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{II}^2 - 0.222\cdot\sigma_{II}\cdot\sigma_{III} + 0.222\cdot\sigma_{III}^2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$t_{shear}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) - \sigma_{oct}(\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}) = 0$$

2.7 Strain Invariants & Principal Strains

Determine the planes of principal strains for the following strain tensor

$$E := \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

The strain invariants are given by

$$I_E = E_{ii} = 2$$

$$II_E = \frac{1}{2}\cdot\left(E_{ij}\cdot E_{ij} - E_{ii}\cdot E_{jj}\right) = -1 + 3 = 2$$

$$III_E = \left|E_{ij}\right| = -3$$

The principal strains by

$$E_{ij} - \lambda\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$E_1 = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = 2.3$$

$$E_2 = \lambda_2 = 1$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$E_3 = \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} = -1.3$$

The eigenvectors for $E_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ give the principal directions n^1

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-\frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,1} \\ n_{2,1} \\ n_{3,1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n_{1,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{2,1} \\ -n_{2,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,1} \\ -n_{3,1}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1}$$

$$n_{3,1} = 0$$

$$n^1 \cdot n^1 = 1$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{13}+13}{12}+1\right)\cdot\left(n_{2,1}\right)^2 = 1$$

$$n_{2,1} = 0.6$$

$$n_{1,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot n_{2,1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}\cdot 0.6 = 0.8$$

$$n^1 = (0.8 \quad 0.6 \quad 0)$$

For the second eigenvector λ_2=1

$$\begin{pmatrix} 1-1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1,2} \\ n_{2,2} \\ n_{3,2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -\left(n_{2,2}\right)+\sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}\cdot n_{2,2} \\ -(n_{2,2}) + \sqrt{3}\cdot n_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n^2 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Finally, the third eigenvector can be obtained by the same manner, but more easily from

$$n^3 = n^1 \times n^2 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.6e_1 - 0.8e_2$$

Therefore

$$a_i^j = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} \qquad a := \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a\cdot E\cdot a^T = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3 \end{pmatrix}$$

2.8 Equilibrium Equations

In the absence of body forces, does the following stress distribution

$$T(x,\nu) = \begin{bmatrix} (x_2)^2 + \nu\left[(x_1)^2 - (x_2)^2\right] & -2\cdot\nu\cdot x_1\cdot x_2 & 0 \\ -2\nu\cdot x_1\cdot x_2 & (x_1)^2 + \nu\left[(x_2)^2 - (x_1)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & \nu\left[(x_1)^2 + (x_2)^2\right] \end{bmatrix}$$

where v is a constant, satisfy equilibrium?

Solution:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{1j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{13} = 2\cdot\nu\cdot x_1 - 2\cdot\nu\cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}T_{2j} = \frac{\partial}{\partial x_1}T_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{23} = -2\cdot\nu\cdot x_2 + 2\cdot\nu\cdot x_2 = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{3j} = \frac{\partial}{\partial x_1} T_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2} T_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3} T_{33} = 0$$

Therefore, equilibrium is satisfied.

2.9 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Lagrangian strain tensor is given by

$$E := \begin{pmatrix} 30 & 50 & 20 \\ 50 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

and the material is steel with $\lambda := 119.2\,\text{GPa}$ and $\mu := 79.2\,\text{GPa}$

Solution:

$$C := \begin{pmatrix} \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\cdot\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mu \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 119.2\cdot\text{GPa} & 119.2\cdot\text{GPa} & 277.6\cdot\text{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 158.4\cdot\text{GPa} \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\gamma := \begin{pmatrix} E_{1,1} \\ E_{2,2} \\ E_{3,3} \\ E_{1,2} \\ E_{1,3} \\ E_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} \\ 3 \times 10^{-5} \\ 5 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$\sigma := C \cdot \gamma = \begin{pmatrix} 0.01667 \\ 0.01826 \\ 0.01667 \\ 0.00792 \\ 0.00317 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot GPa$$

2.10 Stress-Strain

Determine the stress tensor at a point where the Cauchy stress tensor is given by

$$\sigma := \begin{pmatrix} 100 & 42 & 6 \\ 42 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

with $E := 207GPa$, $\mu := 79.2GPa$, and $\nu := 0.3$

Solution:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{207\cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207\cdot GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0.001}{GPa} & -\frac{0.001}{GPa} & \frac{1}{207\cdot GPa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0.013}{GPa} \end{pmatrix}$$

$$s := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{2,2} \\ \sigma_{3,3} \\ \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -2 \\ 15 \\ 42 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

$$\gamma := S\cdot s = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} \\ -1.763 \times 10^{-4} \\ -6.957 \times 10^{-5} \\ 5.303 \times 10^{-4} \\ 7.576 \times 10^{-5} \\ 0 \times 10^{0} \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} \gamma_1 & \frac{\gamma_4}{2} & \frac{\gamma_5}{2} \\ \frac{\gamma_4}{2} & \gamma_2 & \frac{\gamma_6}{2} \\ \frac{\gamma_5}{2} & \frac{\gamma_6}{2} & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.643 \times 10^{-4} & 2.652 \times 10^{-4} & 3.788 \times 10^{-5} \\ 2.652 \times 10^{-4} & -1.763 \times 10^{-4} & 0 \times 10^{0} \\ 3.788 \times 10^{-5} & 0 \times 10^{0} & -6.957 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3.1 Displacement by Double Integration

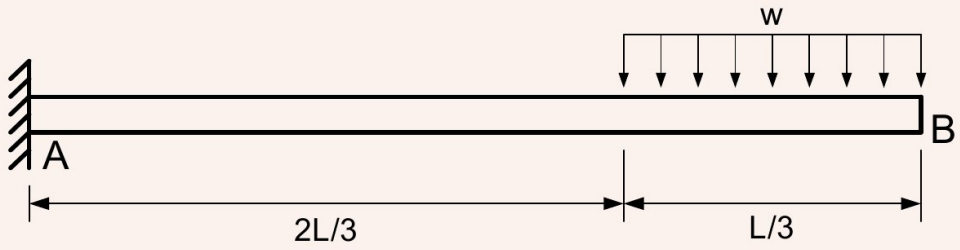
Determine the deflection at B for the following cantilevered beam.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

At $0 \le x \le \frac{2L}{3}$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x + C_1$$

However we have at x=0, dy/dx=0, C_1=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 + C_2$$

Again we have at x=0, y=0, C_2=0

At $\frac{2L}{3} \le x \le L$

1. Moment Equation

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}y = M_x = \frac{w\cdot L}{3}\cdot x - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2 - w\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)\cdot\left(\frac{x - \frac{2L}{3}}{2}\right)$$

2. Integrate Once

$$E\cdot I\cdot\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{w\cdot L}{6}\cdot x^2 - \frac{5}{18}\cdot w\cdot L^2\cdot x - \frac{w}{6}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 + C_3$$

Applying the boundary condition at $x = \frac{2L}{3}$, we must have $\frac{dy}{dx}$ equal to the value coming frmo the left C_3=0

3. Integrate Twice

$$E\cdot I\cdot y = \frac{w\cdot L}{18}\cdot x^3 - \frac{5\cdot w\cdot L^2}{36}\cdot x^2 - \frac{w}{24}\cdot\left(x - \frac{2L}{3}\right)^4 + C_4$$

Again following the same argument as above, C_4=0

Substituting for x=L we obtain

$$y = \frac{163}{1944}\cdot\frac{wL^4}{E\cdot I}$$

4.1 Live Load Reduction

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

A four storey office building has interior columns spaced 30ft apart in the two directions. If the flat roof loading is 50 lb/ft^2, determine the reduced live load supported by a typical interior column located on the ground level

Solution:

$L_0 := 50psf$

$A_T := 30ft \cdot 30ft = 900 \cdot ft^2$

$K_{LL} := 4$

$L_{floor}(L_0, A_T, K_{LL}) := L_0 \cdot \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{K_{LL} \cdot A_T}}\right) \cdot psf$

$L_{floor} := L_{floor}\left(\frac{L_0}{psf}, \frac{A_T}{ft^2}, K_{LL}\right) = 25 \cdot psf$

$Reduction := \frac{L_{floor}}{L_0} = 50 \cdot \%$

$L_{roof} := 0.6 \cdot L_0 = 30 \cdot psf$

$F_1 := \left(3 \cdot L_{floor} \cdot A_T + L_{roof} \cdot A_T\right) = 94.5 \cdot kip$

Note that without reduction the total load woul dhave been

$F_2 := 4 \cdot L_0 \cdot A_T = 180 \cdot kip$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

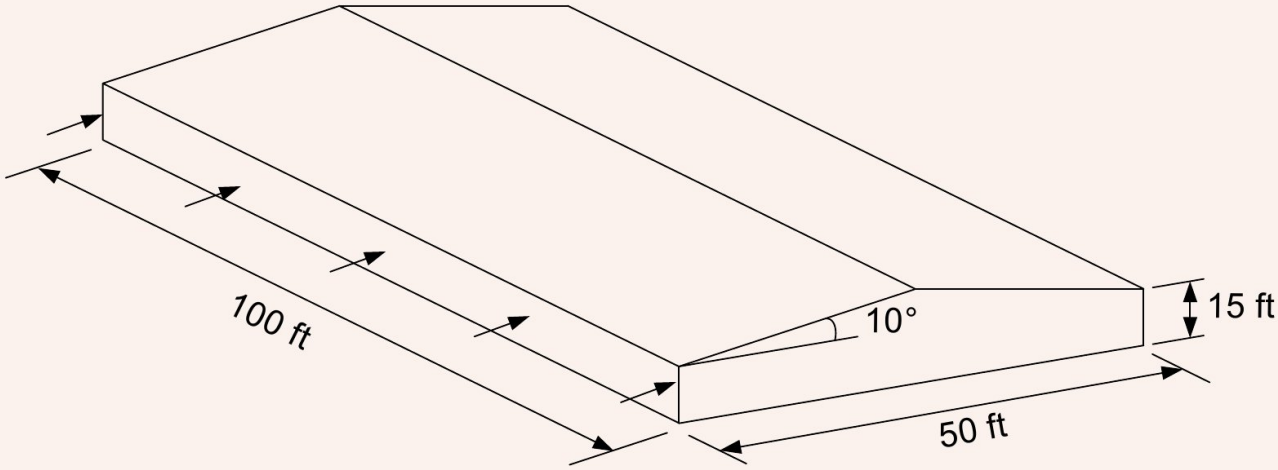
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.2 Wind Load

Wind blows on the side of the fully enclosed agricultural building located on open flat terrain in Oklahoma. Determine the external pressure acting on the roof. Also, what is the internal pressure in the building which acts on the roof? Use linear interpolation to determine q_h and C_p.



Solution:

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, V, I\right) := 0.00256 \cdot K_z \cdot K_{Zt} \cdot K_d \cdot V^2 \cdot I \cdot psf$$

$K_{Zt} := 1$

$K_d := 1$

$V := 90mph$

$I := 0.87$

$$q_z\left(K_z, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) \rightarrow 18.04 \cdot K_z \cdot psf$$

$K_{z15} := 0.85$

$$q_{z15} := q_z\left(K_{z15}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 15.334 \cdot psf$$

$K_{z20} := 0.9$

$$q_{z20} := q_z\left(K_{z20}, K_{Zt}, K_d, \frac{V}{mph}, I\right) = 16.236 \cdot psf$$

$$h := 15ft + \frac{1}{2} \cdot 25ft \cdot \tan(10deg) = 17.204 \cdot ft$$

$$\frac{q_h - q_{z15}}{h - 15ft} = \frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$q_h := \left(\frac{q_{z20} - q_{z15}}{20ft - 15ft}\right)\cdot(h - 15ft) + q_{z15}$$

$$q_h = 15.732\cdot psf$$

External pressure on windward side of roof

$$p(q_h, G, C_p) := q_h\cdot G\cdot C_p\cdot psf$$

$$G := 0.85$$

$$L := 50ft$$

$$\frac{h}{L} = 0.344$$

$$\frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.9 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.9 - \frac{-0.9 - -0.7}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.775$$

$$p_{Windward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -10.367\cdot psf$$

External pressure on leeward side of roof

$$\frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25} = \frac{-0.5 - C_p}{0.5 - \frac{h}{L}}$$

$$C_p := -0.5 - \frac{-0.5 - -0.3}{0.5 - 0.25}\cdot\left(0.5 - \frac{h}{L}\right)$$

$$C_p = -0.375$$

$$p_{Leeward} := p\left(\frac{q_h}{psf}, G, C_p\right) = -5.018\cdot psf$$

Internal pressure

$$p_{int}(q_h, G, C_{pi}) := -q_h\cdot G\cdot C_{pi}$$

$$C_{pi1} := 0.18$$

$$C_{pi2} := -0.18$$

$$p_{int1} := p_{int}(q_h, G, C_{pi1}) = -2.407\cdot psf$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

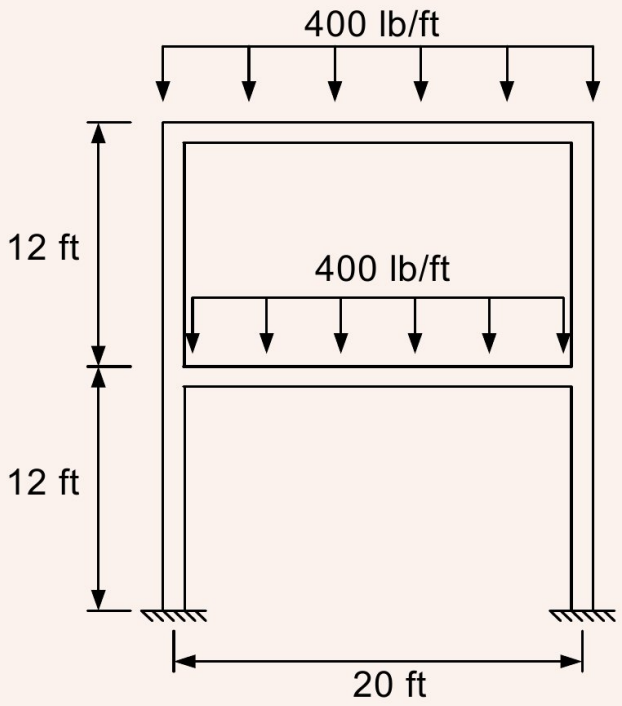
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$p_{int2} := p_{int}(q_h, G, C_{pi2}) = 2.407 \cdot psf$

4.3 Earthquake Load on a Frame

Determine the approximate earthquake forces for the ductile hospital frame structure shown below. The dead load for each floor is $DL := 200 \frac{lbf}{ft}$ and the live load is $LL := 400 \frac{lbf}{ft}$. The structure is built on soft clay. Use DL+0.5LL as the weight of each floor. The building is in seismic zone 3.



Solution:

1. The fundamental period of vibration is

$$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot sec$$

$C_t := 0.03$

$h := 24ft$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{ft}\right) = 0.325\ s$

2. The C coefficient is

$$C(S,T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$S := 2.0$

$C := C\left(S, \frac{T}{sec}\right) = 5.286 > 2.75$

Use $C := 2.75$

3. The other coefficients are $Z := 0.3,\ I := 1.25,\ R_W := 12$

4. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{2.75}{12} = 0.23 > 0.075 \quad \text{OK!}$$

5. The total vertical load is

$L := 20ft$ frame width

$W := 2\cdot(DL + 0.5\cdot LL)\cdot L = 16000\cdot lbf$

6. The total seismic base shear is

$$V := \frac{Z\cdot I\cdot C}{R_W}\cdot W = 1375\cdot lbf$$

7. Since T < 0.7sec, there is no whiplash
8. The toal load on each floor is given by

$h_1 := 12ft$

$h_2 := 24ft$

$$F_2 := \frac{V\cdot h_2}{h_1 + h_2} = 916.7\cdot lbf$$

$$F_1 := \frac{V\cdot h_1}{h_1 + h_2} = 458.3\cdot lbf$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.4 Earthquake Load on a Tall Building

Determine the approximate critical lateral loading for a 25 storey, ductile, rigid space frame concrete structure in the short direction. The rigid frames are spaced 25 ft apart in the cross section and 20 ft in the longitudinal direction. The plan dimension of the building is 175x100 ft, and the structure is 25(12ft)=300 ft high. This office building is located in an urban environment with a wind velocity of $V := 70\text{mph}$ and in seismic zone 4. For this investigation, an average building total dead load of $DL := 192\text{psf}$ is used. Soil conditions are unknown.

Solution:

1. The total building weight is

$L := 100\text{ft}$

$B := 175\text{ft}$

$W := DL \cdot L \cdot B \cdot 25 = 84000 \cdot \text{kip}$

2. The fundamental period of vibration for a rigid frame is

$$T(C_t, h_n) := C_t \cdot h_n^{\frac{3}{4}} \cdot \text{sec}$$

$C_t := 0.03$

$h := 25 \cdot 12\text{ft} = 300 \cdot \text{ft}$

$T := T\left(C_t, \frac{h}{\text{ft}}\right) = 2.16\,\text{s}$ > 0.7s OK!

3. The C coefficient is

$$C(S, T) := \frac{1.25 \cdot S}{T^{\frac{2}{3}}}$$

$S := 1.5$

$C := C\left(S, \frac{T}{\text{sec}}\right) = 1.12$ < 2.75

4. The other coefficients are $Z := 0.4$, $I := 1$, $R_W := 12$

5. Check

$$\frac{C}{R_W} = \frac{1.12}{12} = 0.093 > 0.075 \text{ OK!}$$

6. The total seismic base shear along the critical short direction is

$$V := \frac{Z \cdot I \cdot C}{R_W} \cdot W = 3139 \cdot \text{kip}$$

7. Since T > 0.7sec, the whiplash effect must be considered

$$F_t := 0.07 \cdot \frac{T}{\text{sec}} \cdot V = 475 \cdot \text{kip}$$

Hence the total triangular load is

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$F_{tot} := V - F_t = 2664 \cdot kip$

8. Let us check if wind load governs. From table xx we conservatively assume a uniform wind pressure of 29 psf resulting in a total lateral force of

$p := 29psf$

$P_w := p \cdot h \cdot B = 1522.5 \cdot kip$ < 3108 kip

The magnitude of the total seismic load is clearly larger than the totoal wind force

4.5 Hydrostatic Load

The basement of a building is 12 ft below grade. Ground water is located 9 ft below grade. What thickness concrete slab is required to exactly balance the hydrostatic uplift?

Solution:

The hydrostatic pressure must be countered by the pressure caused by the weight of the concrete. Since p=γh we equate the two pressures and solve for h, the height of the concrete slab.

$h := 12ft$

$h_{water} := 9ft$

$d := h - h_{water} = 3 \cdot ft$

$\gamma_{water} := 62.4 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{concrete} := 150 \frac{lbf}{ft^2}$

$\gamma_{water} \cdot d = \gamma_{concrete} \cdot h$

$h := \frac{\gamma_{water} \cdot d}{\gamma_{concrete}} = 15 \cdot in$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4.6 Thermal Expansion/Stress

A low-rise building is enclosed along one side by a 100 ft-long clay masonry ($\alpha := 3.6\cdot10^{-6}\frac{in}{in\cdot\Delta°F}$, $E := 2400000psi$)bearing wall.

The structure was built at a temperature of $T := 60\Delta°F$ and is located in the northern part of the United States where the temperature range is between $T_{low} := -20\cdot\Delta°F$ and $T_{high} := 120\cdot\Delta°F$.

Solution:

1. Assume that the wall can move freely with no restraint from cross-walls and foundations. The wall expansion and contraction (summer and winter) are given by

$$\Delta L = \alpha\cdot\Delta T\cdot L$$

$$\Delta L_{Summer} := \alpha\cdot(T_{high} - T)\cdot 100ft = 0.26\cdot in$$

$$\Delta L_{Winter} := \alpha\cdot(T_{low} - T)\cdot 100ft = -0.35\cdot in$$

2. We now assume (conservatively) that the free movement cannot occur (ΔL=0) hence the resulting stress would be equal to

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta L}{L} = E\cdot\frac{\alpha\cdot\Delta T\cdot L}{L} = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma = E\cdot\alpha\cdot\Delta T$$

$$\sigma_{Summer} := E\cdot\alpha\cdot(T_{high} - T) = 518\cdot psi$$

$$\sigma_{Winter} := E\cdot\alpha\cdot(T_{low} - T) = -691\cdot psi$$

Note the tensile stress being beyond the masonry capacity. Cracking will occur.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

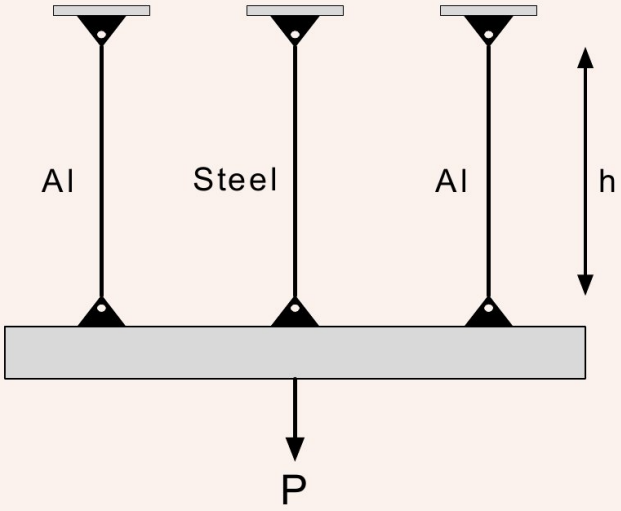
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.1 Statically Indeterminate Cable Structures

A rigid plate is supported by two aluminum cables and a steel one. Determine the force in each cable.



If the rigid plate supports a load P, determine the stress in each of the three cables.

Solution:

1. We have three unknowns and only two independent equations of equilibrium. Hence the problem is statically indeterminate to the first degree.

$$\sum M_z = 0 \quad P_{Al}^{left} = P_{Al}^{right}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2P_{Al} + P_{St} = P$$

Thus we effectively have two unknowns and one equation

2. We need to have a third equation to solve for the three unknowns. This will be derived from the compatability of the displacements in all three cables i.e. all three displacements must be equal:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

displacements in all three cables for all three displacements must be equal.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Combine to obtain

$$\Delta L = \frac{PL}{AE}$$

$$\frac{P_{Al}\cdot L}{E_{Al}\cdot A_{Al}} = \frac{P_{St}\cdot L}{E_{St}\cdot A_{St}} \quad \frac{P_{Al}}{P_{St}} = \frac{(EA)_{Al}}{(EA)_{St}}$$

or $-(EA)_{St}\cdot P_{Al} + (EA)_{Al}\cdot P_{St} = 0$

3. Solution of this system of two equations with two unknowns yield:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{Al} \\ P_{St} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -(EA)_{St} & (EA)_{Al} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot(EA)_{Al} + (EA)_{St}} \cdot \begin{bmatrix} (EA)_{Al} & -1 \\ (EA)_{St} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

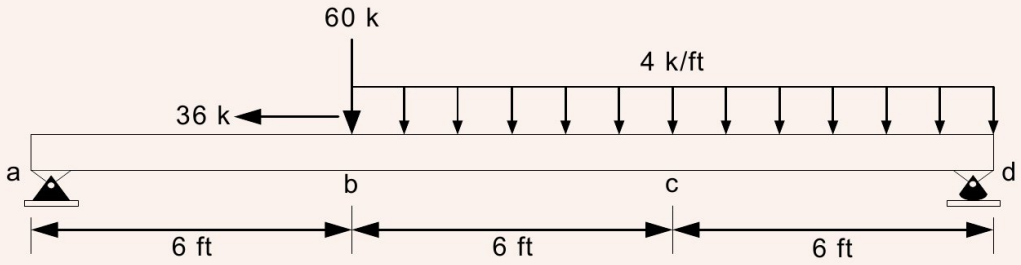
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.2 Simply Supported Beam

Determine the reactions of the simply supported beam shown below.



The beam has 3 reactions. We have 3 equations of static equilibrium. Hence it is statically determinate.

Solution:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0 \quad R_{ax} - 36\text{kip} = 0$

$\sum F_y = 0 \quad R_{ay} + R_{dy} - 60\text{kip} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} = 0$

$\sum M_z^{\,c} = 0 \quad 12\cdot R_{ay} - 6\cdot R_{dy} - 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} = 0$

or

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 108\text{kip} \\ 360\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36\text{kip} \\ 56\text{kip} \\ 52\text{kip} \end{pmatrix}$$

Alternatively we could have used another set of equations:

$\sum M_z^{\,a} = 0 \quad 60\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} - R_{dy}\cdot 18\text{ft} = 0 \quad R_{dy} = 52\text{kip}$

$\sum M_z^{\,d} = 0 \quad R_{ay}\cdot 18\text{ft} - 60\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 12\text{ft} = 0 \quad R_{ay} = 56\text{kip}$

Check:

$\sum F_y = 0 \quad 56\text{kip} + 52\text{kip} - 60\text{kip} - 48\text{kip} = -0\cdot\text{kip}$

5.3 Parabolic Load

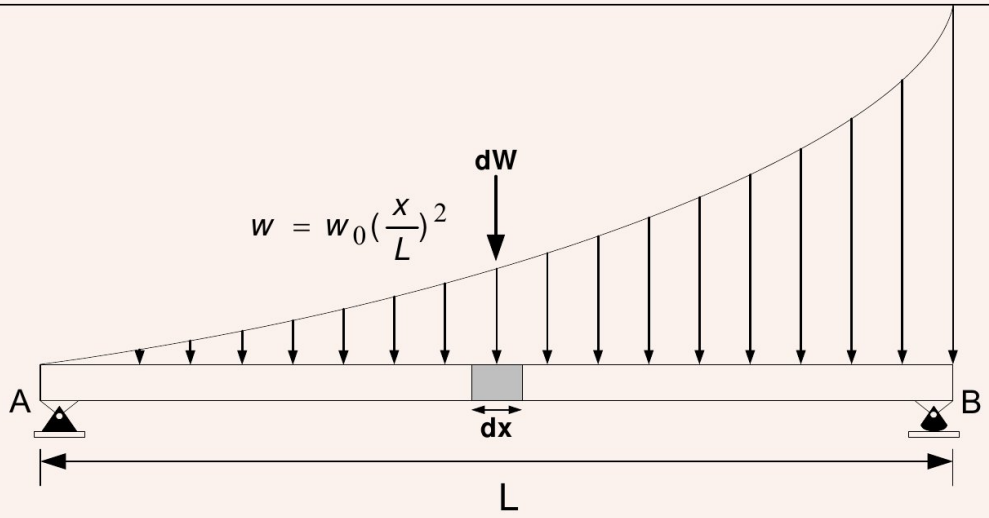
Determine the reactions of the simply supported beam of length L subjected to a parabolic load $w = w_0\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

Since there are no axial forces, there are two unknowns and two equations of equilibrium. We have two equations of equilibrium ($\sum F_y$ and $\sum M$), we judiciously start with the second one, as it would directly give us the reaction at B. Considering an infinitesimal element of length dx, weight dW, an moment dM:

$$\sum M_z^A = 0 \qquad \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \times x - R_B \cdot L = 0$$

$$R_B = \frac{1}{L} \cdot w_0 \cdot \left(\frac{L^4}{4L^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L$$

With R_B determined, we solve for R_A from

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L - \int_{x=0}^{x=L} w_0 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = 0$$

$$R_A = \frac{w_0}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot w_0 \cdot L = \frac{1}{12} \cdot w_0 \cdot L$$

5.4 Three Span Beam

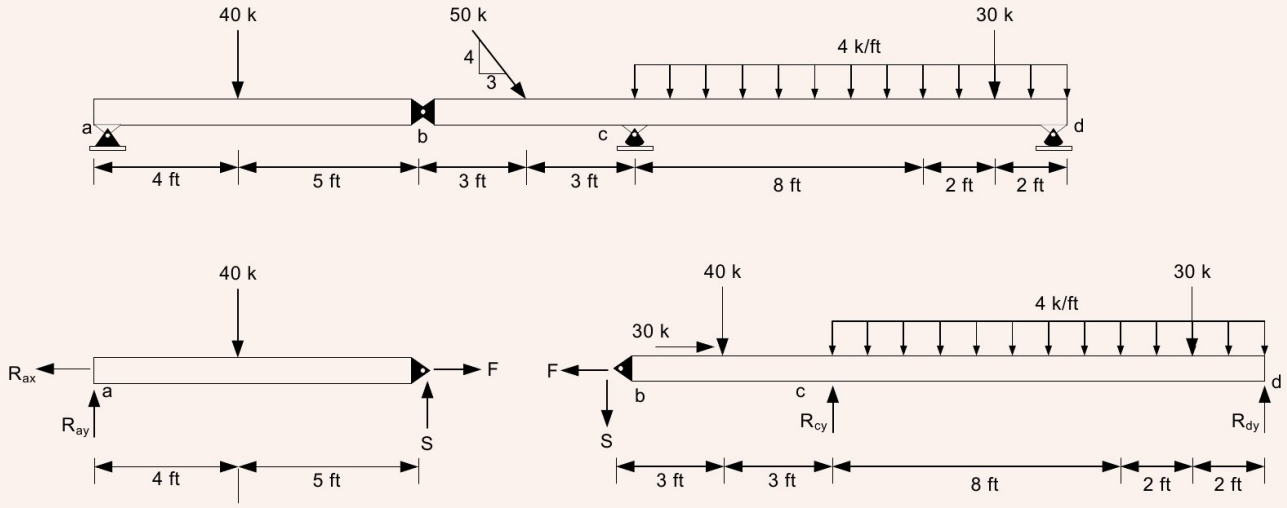
Determine the reactions of the following three span beam

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

We have 4 unknowns (R_{ax},R_{ay},R_{cy}, and R_{dy}), three equations of equilibrium and one equation of condition ($\sum M_b = 0$), thus the structure is statically determinate. Though there are many approaches to solve for those four unknowns (all of them correct), a few are simpler to pursue. In this case, it is easiest to "break" the structure into substructures and examine the free body diagram of each one of them separately.

1. Isolating ab:

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad 9\text{ft}\cdot R_{ay} - 40\text{kip}\cdot 5\text{ft} = 0 \qquad R_{ay} := \frac{40\text{kip}\cdot 5\text{ft}}{9\text{ft}} = 22.2\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,a} = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 4\text{ft} - S\cdot 9\text{ft} = 0 \qquad S := \frac{40\text{kip}\cdot 4\text{ft}}{9\text{ft}} = 17.8\cdot\text{kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} := 30\text{kip}$$

2. Isolating bd:

$$\sum M_z^{\,d} = 0 \qquad -S\cdot 18\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} - 4\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 2\text{ft} + R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{cy} := \frac{S\cdot 18\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 15\text{ft} + 4\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 2\text{ft}}{12\text{ft}} = 105.7\cdot\text{kip}$$

$$\sum M_z^{\,c} = 0 \qquad -S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft} - R_{dy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{dy} := \frac{-S\cdot 6\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 3\text{ft} + 4\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft}\cdot 6\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{12\text{ft}} = 30.1\cdot\text{kip}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Check

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 40\text{kip} + R_{cy} - 4\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip} + R_{dy} = -0\cdot\text{kip} \qquad \text{OK!}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

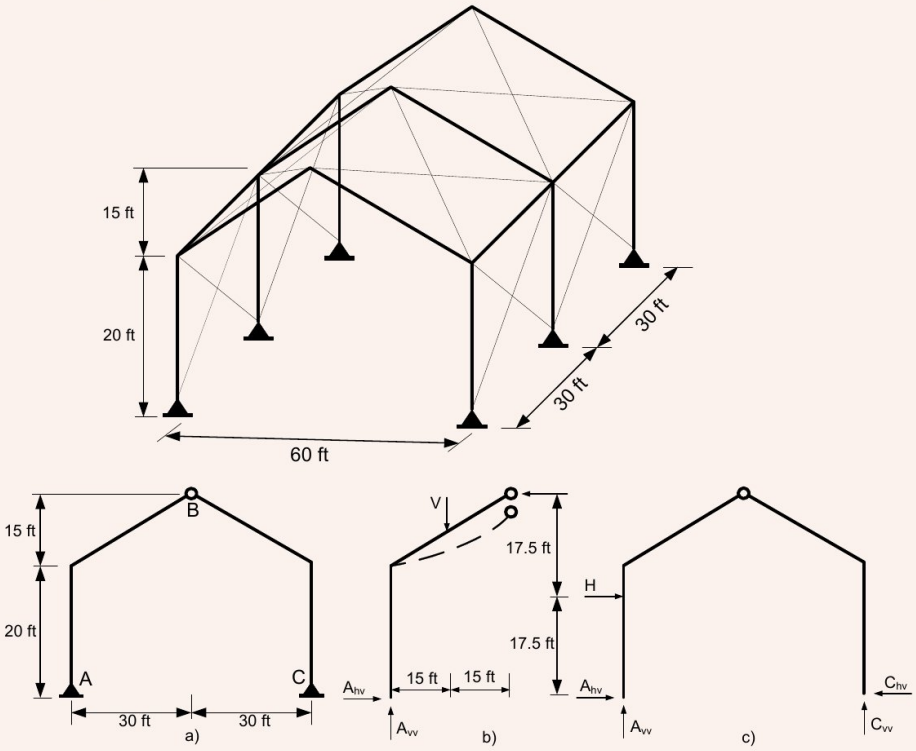
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.5 Three Hinged Gable Frame

The three-hinged gable frames are spaced at 30 ft on center. Determine the reactions components on the frame due to: 1) Roof dead load of 20 psf of roof area; 2) Snow load of 30 psf of horizontal projection; 3) Wind load of 15 psf of vertical projection. Determine the critical design values for the horizontal and vertical reactions.



Solution:

1. Due to smmetry, there is no vertical force transmitted by the hinge for snow and dead load, and thus we can consider only the left (or right) side of the frame.
2. Point equivalent loads:
   a) Roof dead load per one side of frame is

$$DL := 20psf \cdot 30ft \cdot \sqrt{(30ft)^2 + (15ft)^2} = 20.12 \cdot kip$$

   b) Snow load per one side of frame is

$$SL := 30psf \cdot 30ft \cdot 30ft = 27 \cdot kip$$

   c) Wind load per per frame (ignoring the suction) is

$$WL := 15psf \cdot 30ft \cdot 35ft = 15.75 \cdot kip$$

3. There are 4 reactions, 3 equations of equilibrium and one equation of condition; therefore, statically determinate. Alternatively, by symmetry there is no shear at the hinge, and we would have for the substructure two reactions at the support and one (horizontal) at the hinge.
4. The relationship between the horizontal and vertical reactions at A due to a centered vertical load, A_{hv} and A_{vv} respectively is determined by taking the moment with respect to the hinge (b):

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum M_z^B = 0 \qquad 15 \cdot V - 30 \cdot A_{vv} + 35 \cdot A_{hv} = 0$

$\sum F_y = 0 \qquad A_{vv} - V = 0$

$A_{hv} = \frac{15 A_{vv}}{35}$

Substituting for roof dead and snow load we obtain:

$A_{vvDL} := DL = 20.12 \cdot kip \qquad B_{vvDL} := A_{vvDL} = 20.12 \cdot kip$

$A_{hvDL} := \frac{15 A_{vvDL}}{35} = 8.62 \cdot kip \qquad B_{hvDL} := A_{hvDL} = 8.62 \cdot kip$

$A_{vvSL} := SL = 27 \cdot kip \qquad B_{vvSL} := A_{vvSL} = 27 \cdot kip$

$A_{hvSL} := \frac{15 A_{vvSL}}{35} = 11.57 \cdot kip \qquad B_{hvSL} := A_{hvSL} = 11.57 \cdot kip$

5. The reactions due to wind load (blowing from left) are determined as follows:
   a) Vertical reaction at A is determined by considering the entire structure and taking the moment with respect to C (c)

$\sum M_z^C = 0 \qquad 15.75 kip \cdot \left(\frac{20ft + 15ft}{2} \right) - 60ft \cdot A_{vh} = 0$

$A_{vh} := \frac{WL \cdot \left(\frac{20ft + 15ft}{2} \right)}{60ft} = 4.59 \cdot kip$

A_{vh} is the vertical reaction at A due to the horizontal load, and from equilibrium of forces in the y-direction, we have

$C_{vh} := -A_{vh} = -4.59 \cdot kip$

(note that wind load does not have any vertical component)

   b) The horizontal reaction at B is determined by considering the right substructure and taking the moment with respect to the internal hinge at B

$\sum M_z^B = 0 \qquad 35ft \cdot C_{hh} - C_{vh} \cdot 30ft = 0$

$C_{hh} := \frac{C_{vh} \cdot 30ft}{35ft} = -3.94 \cdot kip$

   c) Horizontal reactino at A is taken by considering the entire structure and summing forces in the x-direction

$\sum F_x = 0 \qquad WL + C_{hh} - A_{hh} = 0$

$A_{hh} := WL + C_{hh} = 11.81 \cdot kip$

   and note that A carries most of the horizontal load.

6. Finally, the supports should be designed for the most critical (plausible) combination of reactions

$H := A_{hvDL} + A_{hvSL} + A_{hh} = 32.01 \cdot kip$

$V := A_{vvDL} + A_{vvSL} + A_{vh} = 51.72 \cdot kip$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

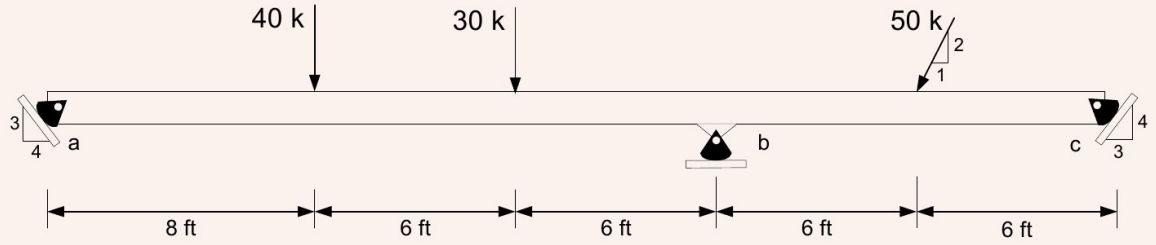
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5.6 Inclined Supports

Determine the reactions of the following two span beam resting on inclined supports.



Solution:

A priori we would identify 5 reactions; however, we do have 2 equations of condition (one at each inclined support), thus with three equations of equilibrium, we have a statically determinate system.

$$\sum M_z^{\,b} = 0 \qquad R_{ay}\cdot 20\text{ft} - 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} - 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 0$$

$$R_{ay}\cdot 20\text{ft} - R_{cy}\cdot 12\text{ft} = 40\text{kip}\cdot 12\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 6\text{ft} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 6\text{ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) - \frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 0$$

$$R_{cy} = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}R_{ay} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\right) = \frac{9}{16}\cdot R_{ay} - 16.77\text{kip}$$

$$\frac{9}{16}\cdot R_{ay} - R_{cy} = 16.77\text{kip}$$

Solving for those two equations:

$$\begin{pmatrix} 20 & -12 \\ \frac{9}{16} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 391.672\ \text{kip} \\ 16.77\text{kip} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{ay} \\ R_{cy} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 14.37\text{kip} \\ -8.69\text{kip} \end{pmatrix}$$

The horizontal components of the reactions at a and c are

$$R_{ax} := \frac{3}{4}\cdot R_{ay} = 10.78\cdot\text{kip}$$

$$R_{cx} := -\frac{4}{3}\cdot R_{cy} = 11.59\cdot\text{kip}$$

Finally, we solve for R...

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Finally, we solve for R_{by}

$$\sum M_z^{a} = 0 \qquad 40\text{kip}\cdot 8\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 14\text{ft} - R_{by}\cdot 20\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26\text{ft} - R_{cy}\cdot 32\text{ft} = 0$$

$$R_{by} := \frac{40\text{kip}\cdot 8\text{ft} + 30\text{kip}\cdot 14\text{ft} + 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right)\cdot 26\text{ft} - R_{cy}\cdot 32\text{ft}}{20\text{ft}} = 109.04\cdot\text{kip}$$

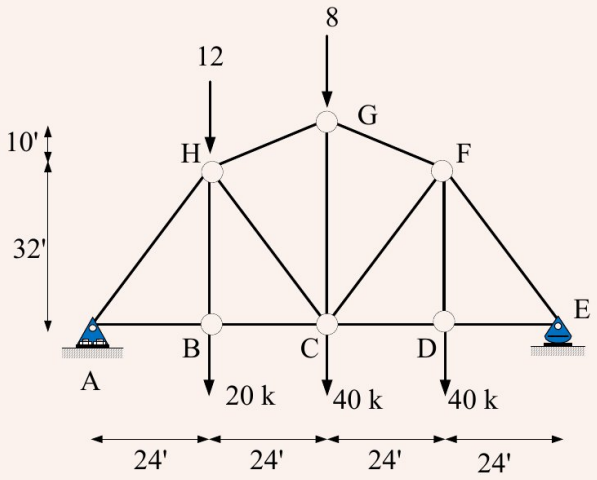
We check our results

$$\sum F_y = 0 \qquad R_{ay} - 40\text{kip} - 30\text{kip} - 50\text{kip}\cdot\sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{by} + R_{cy} = 0\cdot\text{kip} \quad \text{OK!}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{ax} - 50\text{kip}\cdot\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{2}{1}\right)\right) + R_{cx} = 0\cdot\text{kip} \quad \text{OK!}$$

7.1 Truss Method of Joints

Using the method of joints, analyze the following truss



Solution:

1. R=3, m=13, 2j=16, and m+R=2j
2. We compute the reactions

$$\sum M_z^{E} = 0 \qquad (20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 72\text{ft} + (40\text{kip} + 8\text{kip})\cdot 48\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 24\text{ft} - R_{Ay}\cdot 96\text{ft} = 0$$

$$R_{Ay} := \frac{(20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 72\text{ft} + (40\text{kip} + 8\text{kip})\cdot 48\text{ft} + 40\text{kip}\cdot 24\text{ft}}{96\text{ft}}$$

$$\boxed{R_{Ay} = 58\cdot\text{kip}}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad 20\text{kip} + 12\text{kip} + 40\text{kip} + 8\text{kip} + 40\text{kip} - R_{Ay} - R_{Ey} = 0$$

$$R_{Ey} := 20\text{kip} + 12\text{kip} + 40\text{kip} + 8\text{kip} + 40\text{kip} - R_{Ay}$$

$$\boxed{R_{Ey} = 62\cdot\text{kip}}$$

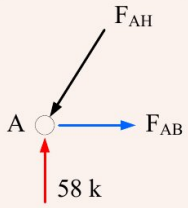
3. Consider each joint separately:
   Node A: Clearly AH is under compression and AB is under tension

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum F_y = 0$ $\quad -F_{AHy} + R_{Ay} = 0$

$F_{AHy} := -R_{Ay} = -58 \cdot kip$

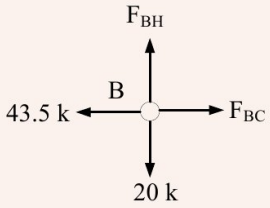
$L_y := 32ft \qquad L_x := 24ft \qquad L := \sqrt{L_y^2 + L_x^2} = 40 \cdot ft$

$F_{AH} := \frac{L}{L_y} \cdot F_{AHy} = -72.5 \cdot kip$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad -F_{AHx} + F_{AB} = 0$

$F_{AB} := \frac{L_x}{L_y} \cdot R_{Ay} = 43.5 \cdot kip$ Tension

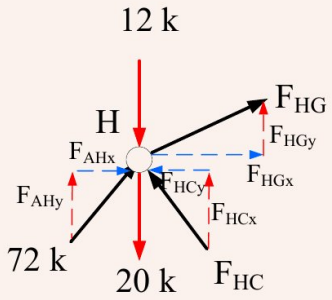
Node B:



$\sum F_x = 0$ $\quad \boxed{F_{BC} := 43.5kip}$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad \boxed{F_{BH} := 20kip}$ Tension

Node H:



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{AHx} - F_{HCx} - F_{HGx} = 0$

$$43.5\text{kip} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} = 0$$

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{AHy} + F_{HCy} - 12\text{kip} - F_{HGy} - 20\text{kip} = 0$:

$$58\text{kip} + \frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} \cdot F_{HC} - \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \cdot F_{HG} - 12\text{kip} - 20\text{kip} = 0$$

This can be most conveniently written as

$$\begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix}$$

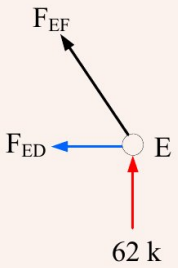
Solving we obtain

$$\begin{pmatrix} F_{HC} \\ F_{HG} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \\ -\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}} & \frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 43.5\text{kip} \\ 26\text{kip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 52 \end{pmatrix} \cdot \text{kip}$$

$\boxed{F_{HC} = -7.5 \cdot \text{kip}}$ Compression

$\boxed{F_{HG} = 52 \cdot \text{kip}}$ Tension

Node E:



$\sum F_y = 0$ $\quad F_{EFy} := 62\text{kip}$

$$\boxed{F_{EF} := \frac{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (32\text{ft})^2}}{32\text{ft}} \cdot 62\text{kip} = 77.5 \cdot \text{kip}} \text{ Compression}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

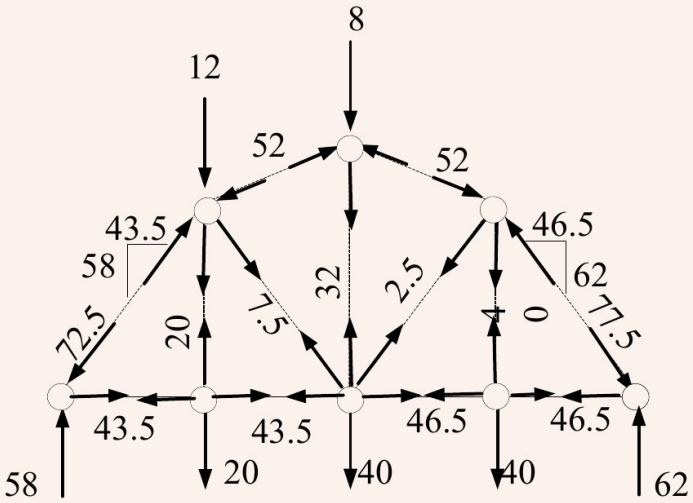
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_x = 0$ $F_{ED} = F_{EFx}$:

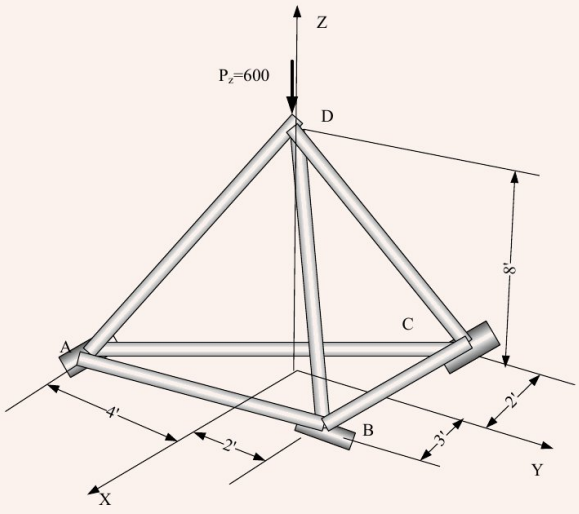
$$F_{ED} := 24\frac{ft}{32ft}\cdot 62kip = 46.5\cdot kip$$ Tension

The results of the analysis are summarized below



4. We would check our calculations by verifying equilibrium of forces at a node not previously used, such as *D*.

7.2 3D Truss



Solution:

1. Consider the free body diagram of the entire truss

$\sum M_{AB} = 0$ $C_z\cdot 5ft - 600\cdot 3ft = 0$ $C_z := \frac{600\cdot 3ft}{5ft}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$C_z = 360$

$\sum M_{CB} = 0$ $\quad 600\cdot 2\text{ft} - A_z\cdot 6\text{ft} = 0$ $\quad A_z := \dfrac{600\cdot 2\text{ft}}{6\text{ft}}$

$A_z = 200$

$\sum F_z = 0$ $\quad B_z + 200 + 360 - 600 = 0$ $\quad B_z := 600 - 200 - 360$

$B_z = 40$

$\sum F_x = 0$ $\quad B_x := 0$

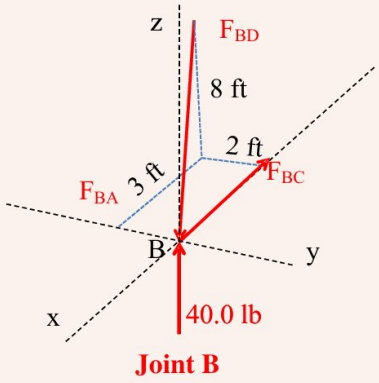
$\sum F_y = 0$ $\quad A_y - C_y = 0$

$\sum M_z = 0$ $\quad A_y\cdot 3\text{ft} + C_y\cdot 2\text{ft} = 0$ $\quad A_y = C_y = 0$

$A_y := 0$

$C_y := 0$

2. Consider the free body diagram of joint B



$L_{BD} := \sqrt{(2\text{ft})^2 + (3\text{ft})^2 + (8\text{ft})^2} = 8.775\cdot\text{ft}$

$\sum F_z = 0$ $\quad \dfrac{-8\text{ft}}{L_{BD}}\cdot F_{BD} + 40 = 0$

$F_{BD} := 40\cdot\dfrac{-L_{BD}}{8\text{ft}} = -43.875$ Compression

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

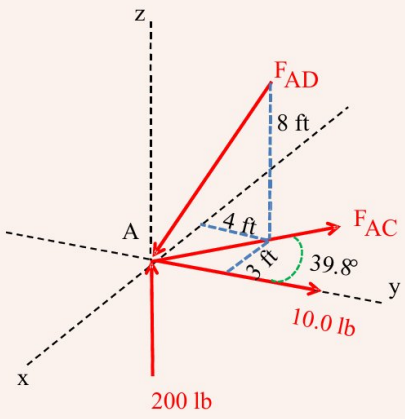
$\sum F_x = 0$ $\quad F_{BDx} - F_{BC} = 0$

$$F_{BDx} := \frac{-3\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 15$$ Tension

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$$F_{BDy} := \frac{-2\,ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$$ Tension

3. FBD of joint A



$$L_{AD} := \sqrt{(8\,ft)^2 + (3\,ft)^2 + (4\,ft)^2} = 9.434\,ft$$

$\sum F_z = 0$ $\quad \frac{-8\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} + 200 = 0$

$$F_{AD} := 200 \cdot \frac{-L_{AD}}{8\,ft} = -235.85$$ Compression

$\sum F_x = 0$ $\quad F_{ADx} - F_{ACx} = 0$

$$\tan(\alpha) = \frac{5\,ft}{6\,ft} \qquad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8\,deg$$

$$\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot F_{AD} - F_{AC} \cdot \sin(\alpha) = 0$$

$$F_{AC} := \frac{\frac{3\,ft}{L_{AD}} \cdot -F_{AD}}{\sin(39.8\,deg)} = 117.2$$ Tension

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

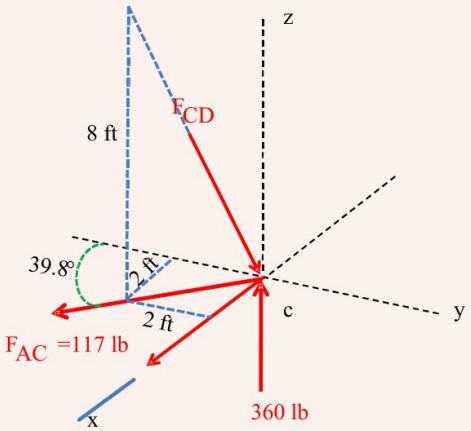
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{BDy} - F_{BA} = 0$

$\tan(\alpha) = \frac{5ft}{6ft}$ $\quad \alpha := \operatorname{atan}\left(\frac{5}{6}\right) = 39.8 \cdot deg$

$F_{BA} := \frac{-2ft}{L_{BD}} \cdot F_{BD} = 10$ Tension

5. Joint C



$L_{CD} := \sqrt{(8ft)^2 + (2ft)^2 + (2ft)^2} = 8.485 \cdot ft$

$\sum F_z = 0$ $\quad F_{CDz} + 360 = 0$ $\quad \frac{-8ft}{L_{CD}} \cdot F_{CD} + 360 = 0$

$F_{CD} := -360 \cdot \frac{-L_{CD}}{-8ft} = -381.8$ Compression

7.3 Truss I, Matrix Method

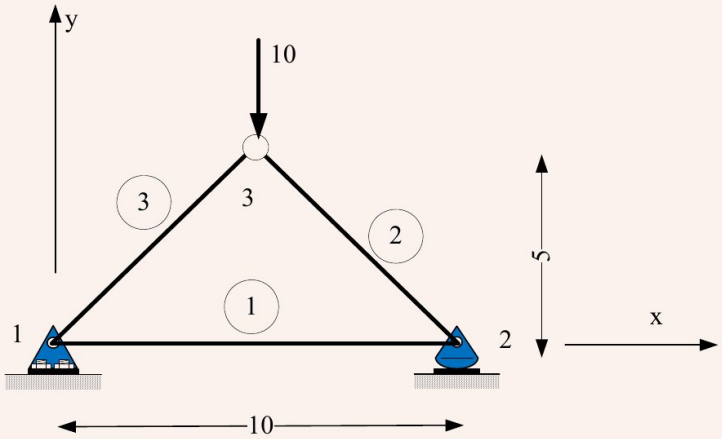
Determine all member forces for the following truss

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. We first determine the direction cosines

Member 1 (Nodes 1-2)

Node1: $\alpha_{11} := 1$ $\beta_{11} := 0$ Node2: $\alpha_{21} := -1$ $\beta_{21} := 0$

Member 2 (Nodes 2-3)

Node2: $\alpha_{22} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{22} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ Node3: $\alpha_{32} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{32} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$

Member 3 (Nodes 3-1)

Node2: $\alpha_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ $\beta_{33} := \frac{-\sqrt{2}}{2} = -0.707$ Node3: $\alpha_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ $\beta_{31} := \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{31} & 1 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & 0 & \beta_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7.071 \\ -7.071 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

7.4 Truss II, Matrix Method

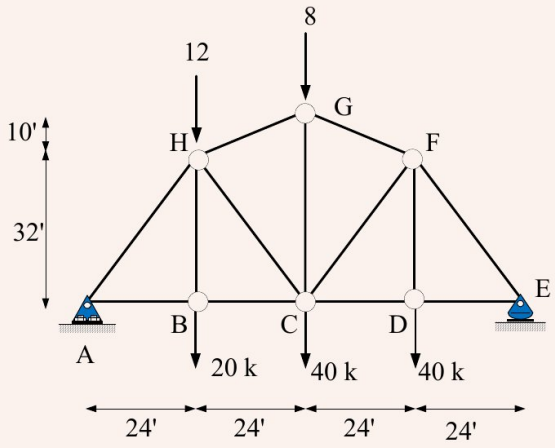
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

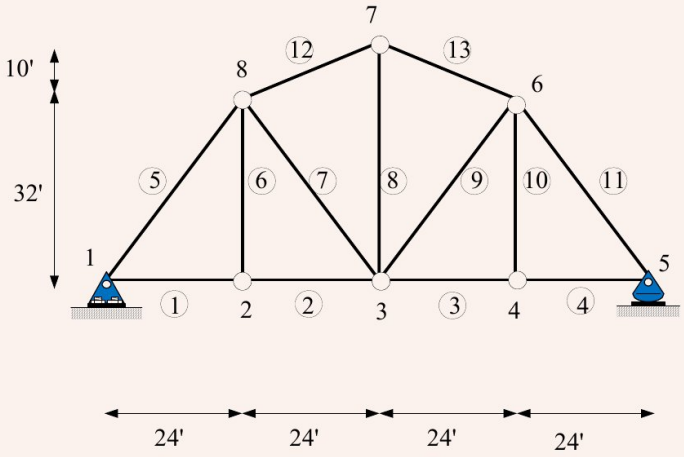
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Set up the statics matrix for the truss shown below



Solution:



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. We first determine the direction cosines

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}}=0.6$$

$$\frac{32\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(32\text{ft})^2}}=0.8$$

$$\frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}}=0.385$$

$$\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2+(10\text{ft})^2}}=0.923$$

2. Next we write the equations of equilibrium

2. Next we write the equations of equilibrium

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}
F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\\F_7\\F_8\\F_9\\F_{10}\\F_{11}\\F_{12}\\F_{13}\\R_{1x}\\R_{1y}\\R_{5y}
\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}
0\\0\\0\\-20\\0\\-40\\0\\-40\\0\\0\\0\\0\\0\\-8\\0\\-12
\end{pmatrix}=0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

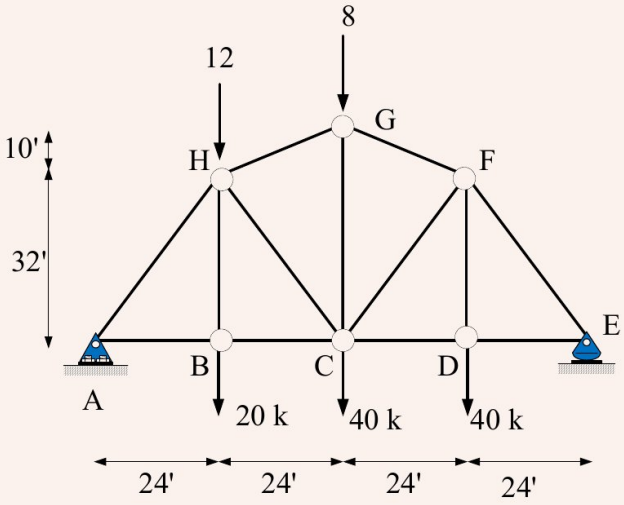
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{5y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & -0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.923 & 0.923 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0.385 & -0.385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.923 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.385 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|r|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 43.5 \\ 2 & 43.5 \\ 3 & 46.5 \\ 4 & 46.5 \\ 5 & -72.5 \\ 6 & 20 \\ 7 & 7.479 \\ 8 & 32.033 \\ 9 & 2.479 \\ 10 & 40 \\ 11 & -77.5 \\ 12 & -51.991 \\ 13 & -51.991 \\ 14 & 0 \\ 15 & 58 \\ 16 & 62 \\ \hline \end{array}$$

7.5 Truss, Method of Sections

Determine F_{BC} and F_{HG} in the truss below



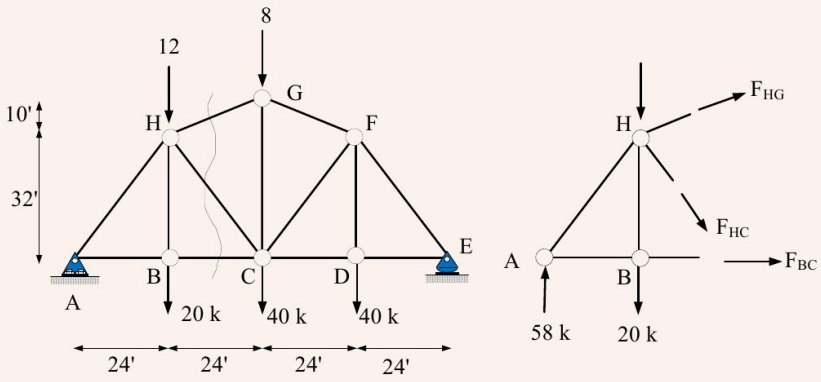
Solution:

Cutting through members HG, HC, and BC, we first take the summation of forces with respect to H:

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



$\sum M_z^H = 0$ $\quad R_{Ay}\cdot 24\text{ft} - F_{BC}\cdot 32\text{ft} = 0$

$R_{Ay} := 58\text{kip}$ (From previous example)

$F_{BC} := \frac{24\text{ft}}{32\text{ft}}\cdot R_{Ay} = 43.5\cdot\text{kip}$ Tension

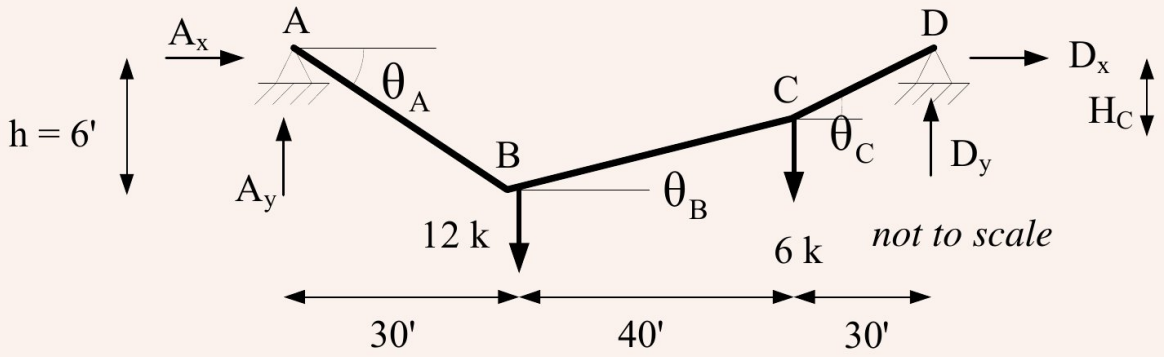
$\sum M_z^C = 0$ $\quad 58\text{kip}\cdot 48\text{ft} - (20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 24\text{ft} - F_{HGx}\cdot 32\text{ft} - F_{HGy}\cdot 24\text{ft} = 0$

$$58\text{kip}\cdot 48\text{ft} - (20\text{kip} + 12\text{kip})\cdot 24\text{ft} - 32\text{ft}\cdot F_{HG}\cdot\frac{24\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} - 24\text{ft}\cdot F_{HG}\cdot\frac{10\text{ft}}{\sqrt{(24\text{ft})^2 + (10\text{ft})^2}} = 0$$

$F_{HG} := 52\text{kip}$ Compression

8.1 Funicular Cable Structures

Determine the reactions and the tensions for the cable structure shown below



Solution:

We have 4 external reactions, however the horizontal ones are equal and we can use any one of a number of equations of conditions in additiona to the three equations of equilibrium. First, we solve for the vertical reactions A_y, D_y and then for the horizontal ones (which are equal and opposite ($|H| = A_x = -D_x$). For this problem we could use the following 3 equations of static equilibrium $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0$, however since we do not have any force in the x direction, the first equation is of no avail. Instead, we will consider the following set $\Sigma F_{..} = \Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$. Alternatively, we can consider the problem as one with 8

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

unknowns (A_x, A_y, D_x, D_y, θ_A, θ_B, θ_C, and h_C), to be solved through the 2 equations of equilibrium expressed at each of the four points of interesect.

1. Solve for D_y

$$\sum M_z^{A} = 0 \qquad 12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft} - D_y\cdot 100\text{ft} = 0$$

$$D_y := \frac{12\text{kip}\cdot 30\text{ft} + 6\text{kip}\cdot 70\text{ft}}{100\text{ft}} = 7.8\cdot\text{kip}$$

2. Solve for A_y

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 12\text{kip} - 6\text{kip} + D_y = 0$$

$$A_y := 12\text{kip} + 6\text{kip} - D_y = 10.2\cdot\text{kip}$$

3. Solve for the horizontal force by isolating the free body diagram AB

$$\sum M_z^{B} = 0 \qquad A_y\cdot 30\text{ft} - H\cdot 6\text{ft} = 0$$

$$H := \frac{A_y\cdot 30\text{ft}}{6\text{ft}} = 51\cdot\text{kip}$$

4. Solve for the sag at point C by isolating the free body diagram CD

$$\sum M_z^{C} = 0 \qquad -D_y\cdot 30\text{ft} + H\cdot h_c = 0$$

$$h_c := \frac{30\text{ft}\,D_y}{H} = 4.6\cdot\text{ft}$$

5. Solve for the cable internal forces or tractions in this case

$$\tan(\theta_A) = \frac{6\text{ft}}{30\text{ft}} \qquad \theta_A := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft}}{30\text{ft}}\right) = 11.31\cdot\text{deg}$$

$$T_{AB} := \frac{H}{\cos(\theta_A)} = 52.01\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_B) = \frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}} \qquad \theta_B := \operatorname{atan}\left(\frac{6\text{ft} - h_c}{40\text{ft}}\right) = 2.02\cdot\text{deg}$$

$$T_{BC} := \frac{H}{\cos(\theta_B)} = 51.03\cdot\text{kip}$$

$$\tan(\theta_C) = \frac{h_c}{30\text{ft}} \qquad \theta_C := \operatorname{atan}\left(\frac{h_c}{30\text{ft}}\right) = 8.7\cdot\text{deg}$$

$$T_{CD} := \frac{H}{\cos(\theta_C)} = 51.59\cdot\text{kip}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

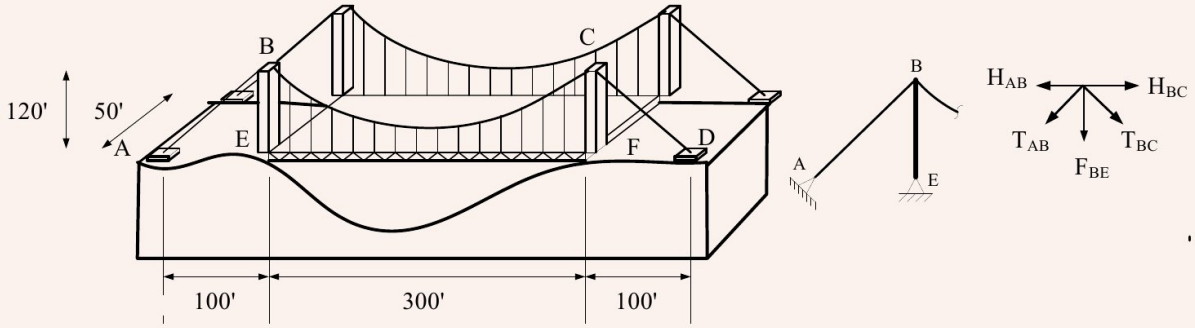
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8.2 Design of Suspension Bridge

Design the following 4 lane suspension bridge by selecting the cable diameters assuming an allowable cable strength of $\sigma_{all} := 190ksi$.. The bases of the tower are hinged in order to avoid large bending moments. The total dead load is estimated at 200 psf. Assume a sag to span ratio of 1/5.



Solution:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. The dead load is carried by each cable with one half the total deal load or $p_1 := \frac{1}{2}\cdot 200\text{psf}\cdot 50\text{ft} = 5\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$

2. Using the HS 20 truck (or its distributed equivalent load of 0.64kip/ft per lane), the uniform additional load per cable is

$$p_2 := 2\cdot 0.64\,\frac{\text{kip}}{\text{ft}} = 1.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$$

Thus the total design load is

$$p := p_1 + p_2 = 6.28\cdot\frac{\text{kip}}{\text{ft}}$$

3. The thrust H is determined by

$$L := 300\text{ft}$$
$$h := 60\text{ft}$$
$$H := \frac{p\cdot L^2}{8\cdot h} = 1177.5\cdot\text{kip}$$

4. The maximum tension is

$$r := \frac{1}{5} \quad \text{sag to span ratio}$$

$$T_{max} := H\cdot\sqrt{1 + 16r^2} = 1508\cdot\text{kip}$$

5. Note that if we used the approximate formula we woul dhave obtained

$$T_{maxApp} := H\cdot\left(1 + 8\cdot r^2\right) = 1554.3\cdot\text{kip}$$

6. The required cross sectional area of the cable along the main span should be equal to

$$A := \frac{T_{max}}{\sigma_{all}} = 7.94\cdot\text{in}^2$$

which corresponds to a diameter

$$d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.18\cdot\text{in}$$

7. We seek to determine the cable force in AB. Since the pylon cannot take any horizontal force, we should have the horizontal component of T_{max} equal and opposite to the horizontal component of T_{AB} or

$$T_{AB} := H\cdot\frac{\sqrt{(100\text{ft})^2 + (120\text{ft})^2}}{100\text{ft}} = 1839\cdot\text{kip}$$

The cable area should be

$$A := \frac{T_{AB}}{\sigma_{all}} = 9.68\cdot\text{in}^2$$

which corresponds to a diameter

$$d := \sqrt{\frac{4\cdot A}{\pi}} = 3.51\cdot\text{in}$$

8. To determine the vertical load acting on the pylon, we must add the vertical components of T_{max} and T_{AB} (V_{BC} and V_{AB} respectively). We can determine V_{BC} from H and T_{max}, thus

$$P := \frac{120\text{ft}}{100\text{ft}}\cdot H + \sqrt{T_{max}^2 - H^2} = 2355\cdot\text{kip}$$

Using A36 steel with an allowable stress of $\sigma_{A36} := 21\text{ksi}$, the cross sectional area of the tower should be

$$A := \frac{P}{\sigma_{A36}} = 112\cdot\text{in}^2$$

Note that buckling of such a tower might govern the final dimensions

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. If the cables were to be anchored to a concrete block, the volume of the block shoul dbe at least equal to

$$V := \frac{\frac{120\,ft}{100\,ft}\cdot H}{150\,\frac{lbf}{ft^3}} = 9420\cdot ft^3$$

10.1 Simple Shear and Moment Diagram

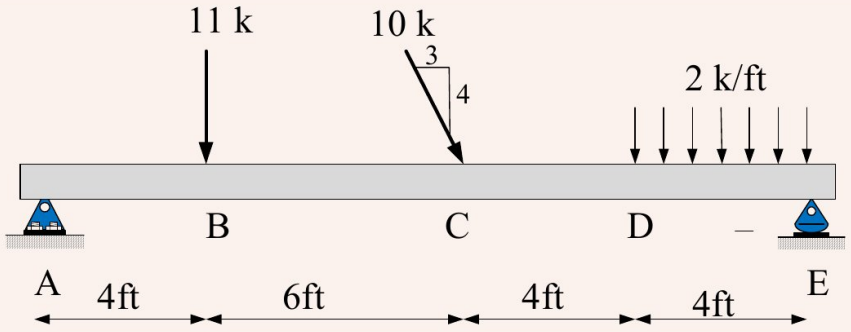
Draw the shear and moment diagram for the beam shown below.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

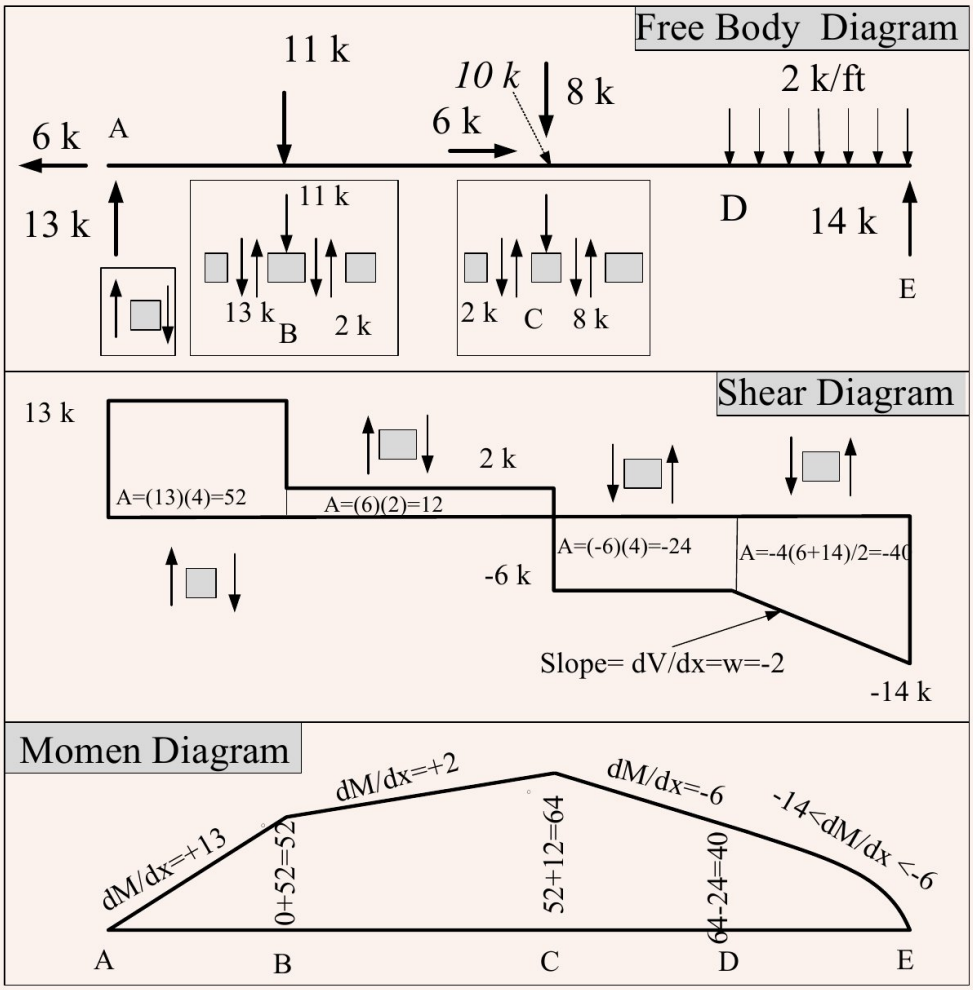
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

The free body diagram is drawn below



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Reactions are determined from the equilibrium equations

$$\sum F_x = 0 \qquad -A_x + 6\text{kip} = 0 \qquad A_x := 6\text{kip}$$

$$\sum M_A = 0 \qquad 11\text{kip}\cdot 4\text{ft} + 10\text{kip}\cdot\frac{3}{5}\cdot 10\text{ft} + 2\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 4\text{ft}\cdot 16\text{ft} - E_y\cdot 18\text{ft} = 0$$

$$E_y := \frac{11\text{kip}\cdot 4\text{ft} + 10\text{kip}\cdot\frac{4}{5}\cdot 10\text{ft} + 2\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 4\text{ft}\cdot 16\text{ft}}{18\text{ft}} = 14\cdot\text{kip}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 11\text{kip} - 10\text{kip}\cdot\frac{4}{5} - 2\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 4\text{ft} + E_y = 0$$

$$A_y := 11\text{kip} + 8\text{kip} + 2\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot 4\text{ft} - E_y = 13\cdot\text{kip}$$

Shear are determined next

1. At A the shear is equal to the reaction and is positive.
2. At B the shear drops (negative load) by 11 k to 2 k
3. At C it drops again by 8 k to -6 k
4. It stays constant up to D and then it decreases (constant negative slope since the load is uniform and negative) by 2 k per linear foot up to -14 k
5. As a check, -14 k is also the reaction previously determined at E.

Moment is determined last

1. The moment at A is zero (hinge support)
2. The change in moment between A and B is equal to the area under the corresponding shear diagram, or
   $\Delta M_{BA} := 13\text{kip}\cdot 4\text{ft} = 52\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$
3. Changes between other points are determined the same by taking the area under the shear diagram

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

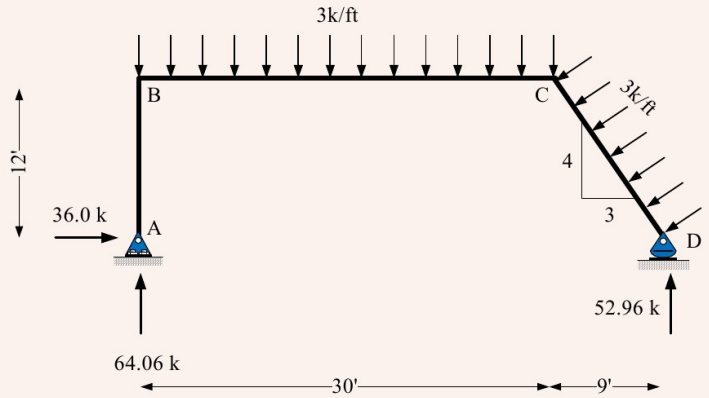
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

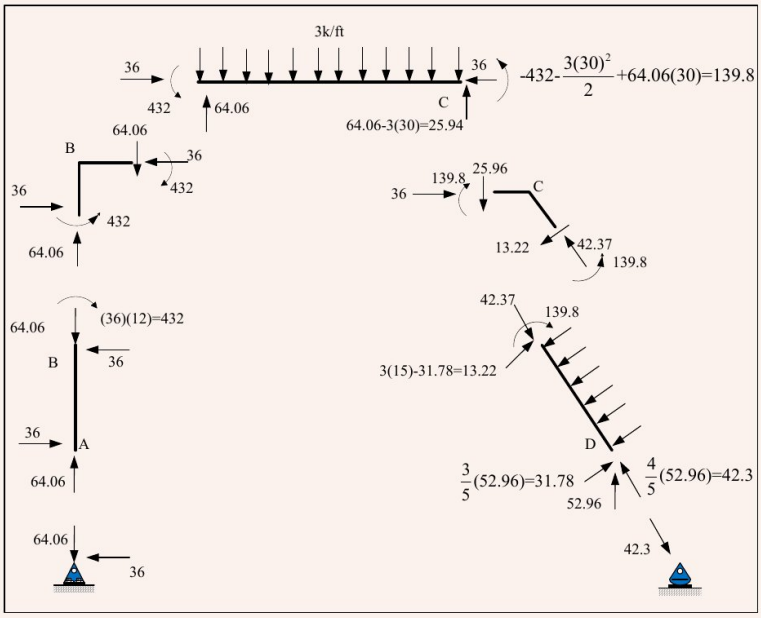
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

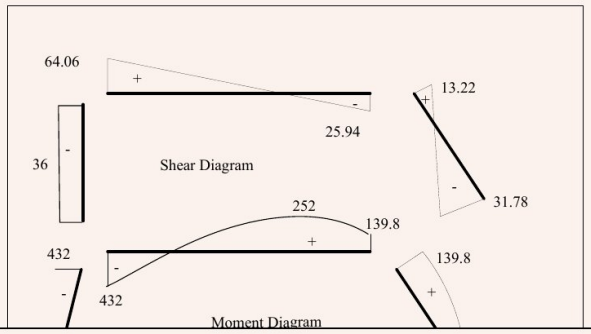
10.2 Frame Shear and Moment Diagram

Draw the shear and moment diagram of the following frame



Solution:



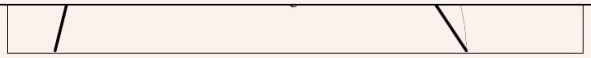


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Reactions are determined first

$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ax} - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 0 \qquad \boxed{R_{Ax} := \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft = 36\cdot kip}$

$\sum M_A = 0 \qquad 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft - R_{Dy}\cdot 39ft = 0$

$$\boxed{R_{Dy} := \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft\cdot 15ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 34.5ft - \frac{4}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft\cdot 6ft}{39ft} = 52.96\cdot kip}$$

$\sum F_y = 0 \qquad R_{Ay} - 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft - \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft + R_{Dy} = 0$

$$\boxed{R_{Ay} := 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 30ft + \frac{3}{5}\cdot 3\,\frac{kip}{ft}\cdot 15ft - R_{Dy} = 64.04\cdot kip}$$

We isolate each member and draw its free body diagram for each force component.

Shear

1. For A-B the shear is constant, equal to the horizontal reaction at A and negative according to our previously defined sign convention, $V_A := -36kip$
2. For member B-C at B, the shear must be equal to the vertical force which was transmitted along A-B, and which is equal to the vertical reaction at A, $V_B := R_{Ay} = 64.04\cdot kip$
3. Since B-C is subjected to a uniform load, the shear along B-C will have a slope equal to -3 and in terms of x (measured from B to C) is equal to
   $V_{BC}(x) := R_{Ay} - 3x$
4. The shear along C-D is obtained by decomposing the vertical reaction at D into axial and shear components. Thus, at D the shear is equal to $\frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 31.78\cdot kip$ and is negative. Based on our sign convention for the load, the slope of the shear must be equal to -3 along C-D. Thus the shear at point C is such that $V_c - \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} = -\frac{3}{5}\cdot R_{Dy}$ or
   $V_c := \frac{5}{3}\cdot 9ft\cdot 3\,\frac{kip}{ft} - \frac{3}{5}\cdot R_{Dy} = 13.22\cdot kip$. The equation for shear is given by (for x going from C to D)
   $V_{CD}(x) := V_c - 3x$

Moment

1. Along A-B, the moment is zero at A (since we have a hinge) and its slope is equal to the shear, thus at B the moment is equal to $-36kip\cdot 12ft = -432\cdot kip\cdot ft$
2. Along B-C, the moment is equal todx

$$M_{BC} = M_B + \int_0^x V_{BC}(x)\,dx = -432kip\cdot ft + \int_0^x \left(R_{Ay} - 3x\right)dx = -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot x - \frac{3x^2}{2}$$

which is a parabola. Substituting for x=30, we obtain at node C:

$$\boxed{M_C := -432kip\cdot ft + R_{Ay}\cdot 30ft - \frac{3\,\frac{kip}{ft}\cdot (30ft)^2}{2} = 139.2\cdot kip\cdot ft}$$

dM_{BC}

Victor E. Saouma

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. If we need to determine the maximum moment along B-C, we know that $\frac{dV_{BC}}{dx} = 0$ at the point where where V_{BC}=0, that is $V_{BC}(x) = R_{Ay} - 3x = 0, x_{max} := \frac{R_{Ay}}{3\frac{kip}{ft}} = 21.3 \cdot ft$. In other words, the maximum moment occurs where the shear is zero. Thus

$$M_{BCmax} := -432kip \cdot ft + R_{Ay} \cdot x_{max} - \frac{3\frac{kip}{ft} \cdot (x_{max})^2}{2} = 251.5 \cdot kip \cdot ft$$

4. Finally, along C-D the moment varies quadratically (since we had a linear shear), the moment first increases (positive shear), and then decreases (negative shear). The moment along C-D is given by

$$M_{CD} = M_C + \int_0^x V_{CD}(x)\,dx = M_C + \int_0^x (V_c - 3x)\,dx = M_C + V_c \cdot x - \frac{3x^2}{2}$$ which is a parabola. Substituting for x =15ft, we obtain at node D

$$M_D := M_C + V_c \cdot 15ft - 3\frac{\frac{kip}{ft} \cdot (15ft)^2}{2} = -0 \cdot kip \cdot ft$$ OK!

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

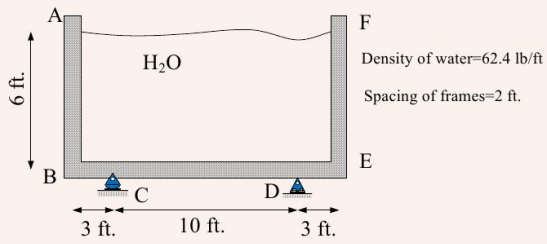
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

10.3 Frame Shear and Moment Diagram: Hydrostatic Load

The frame shown below is the structural support of a flume. Assuming that the frames are spaced 2 ft apart along the length of the flume,

1. Determine all internal member end actions
2. Draw the shear and moment diagrams
3. Locate and compute maximum internal bending moments
4. If this is a reinforced concrete frame, show the location of reinforcement

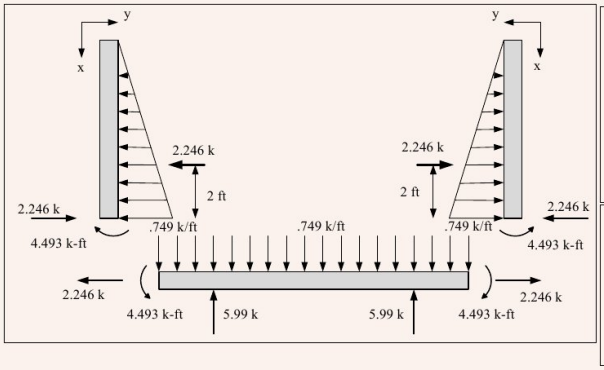


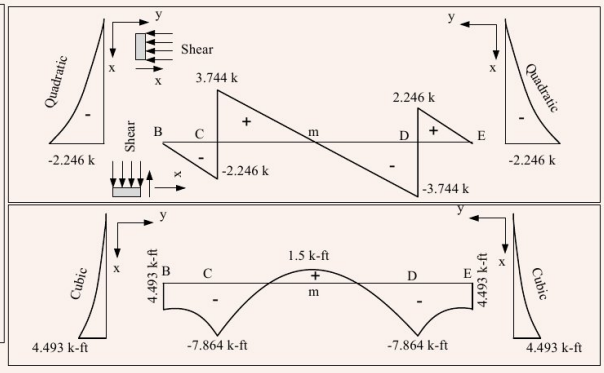
Solution:

The hydrostatic pressure causes lateral forces on the vertical members which can be treated as cantilevers fixed at the lower end. The pressure is linear and is given by $p(\gamma, h) := \gamma \cdot h$. Since each frame supports a 2 ft wide section of the flume, the equation for *w* (pounds/ft) is

$$w(h) := 2\text{ft} \cdot 62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \cdot h \rightarrow \frac{124.8 \cdot h \cdot \text{lbf}}{\text{ft}^2}$$

At the base $w_{base} := w(6\text{ft}) = 0.749 \cdot \frac{\text{kip}}{\text{ft}}$. Note that this is both the lateral pressure on the end walls as well as the uniform load on the horizontal members.





结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

End Actions

1. Base force at B is $F_{Bx} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 6ft = 2.246 \cdot kip$
2. Base moment at B is $M_B := \frac{1}{3} F_{Bx} \cdot 6ft = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
3. End forces at B for member B-E are equal and opposite
4. Reaction at C is $R_{Cy} := \frac{1}{2} w_{base} \cdot 16ft = 5.99 \cdot kip$

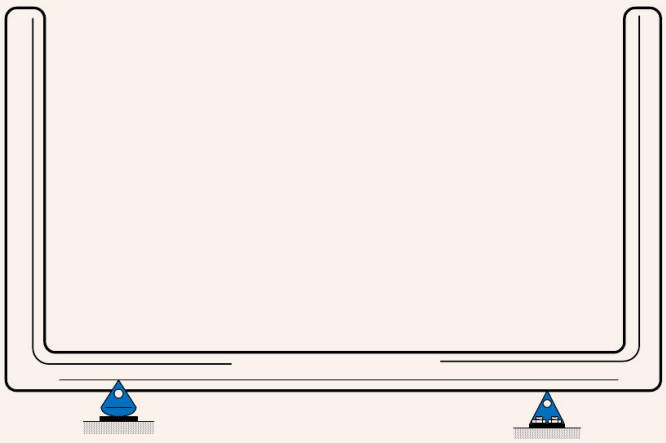
Shear forces

1. Base at B the shear force was determined eariler and was equal to $F_{Bx} = 2.246 \cdot kip$. Based on the orientation of the x-y axis, this is a negative shear.
2. The vertical shear at B is zero (neglecting the weight of A-B)
3. The shear to the left of C is $V_{Cleft} := 0 - w_{base} \cdot 3ft = -2.246 \cdot kip$
4. The shear to the right of C is $V_{Cright} := V_{Cleft} + R_{Cy} = 3.744 \cdot kip$

Moment diagrams

1. At the base: B $M_B = 4.493 \cdot kip \cdot ft$
2. At the support C, $M_C := -M_B - w_{base} \cdot 3ft \cdot \frac{3ft}{2} = -7.862 \cdot kip \cdot ft$
3. The maximum moment is equal to $M_{max} := M_C + w_{base} \cdot 5ft \cdot \frac{5ft}{2} = 1.498 \cdot kip \cdot ft$

Design: Reinforcement should be placed along the fibers which are under tension, that is on the side of the negative moment. The figure below schematically illustrates the location of the flexural reinforcement.



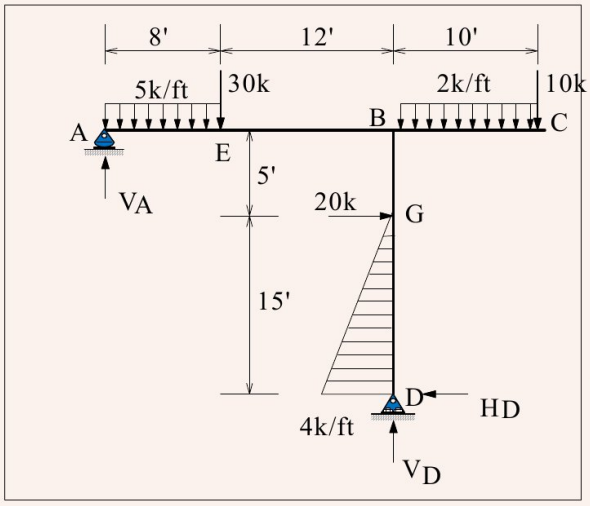
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

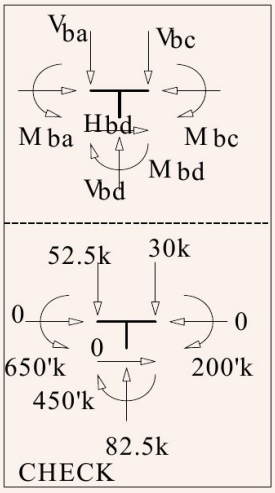
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

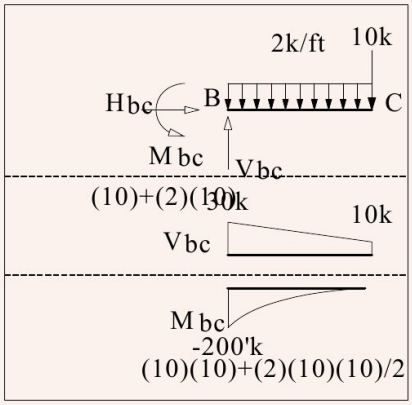
审阅稿

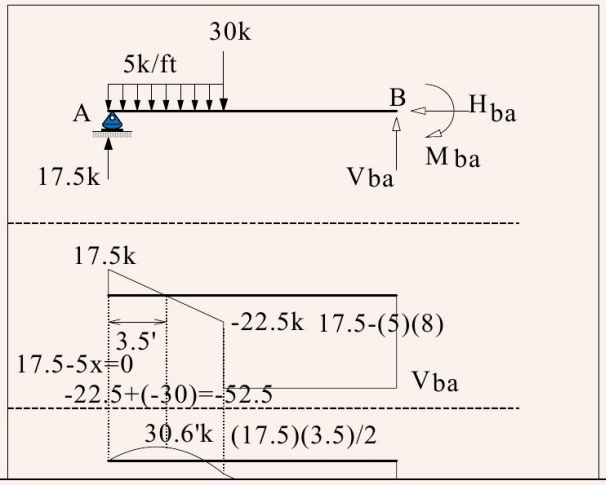
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

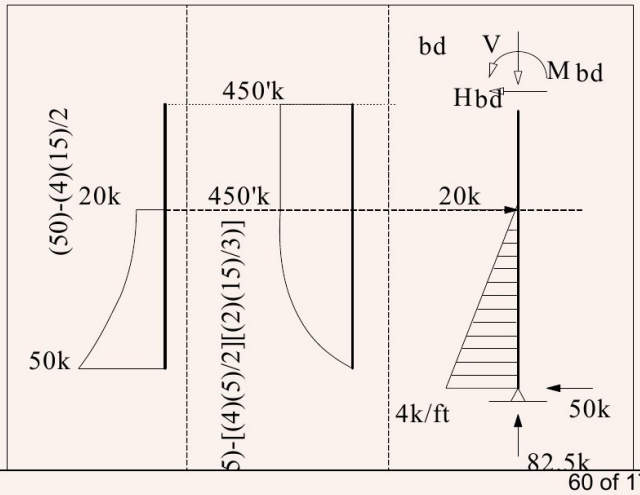
10.4 Shear Moment Diagrams for Frame









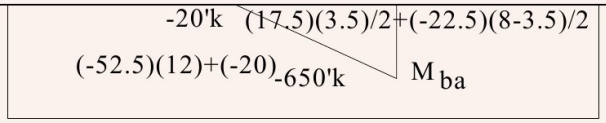


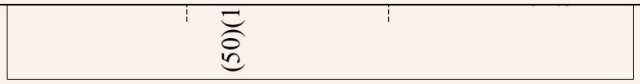
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

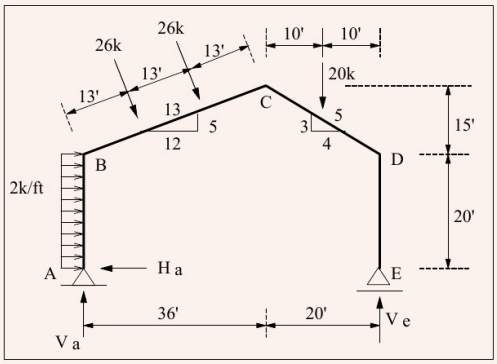
审阅稿

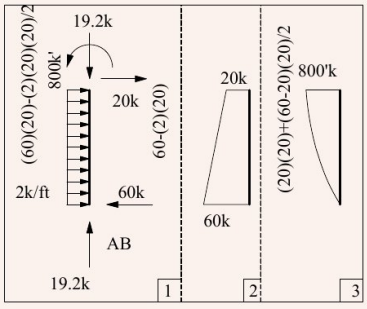
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

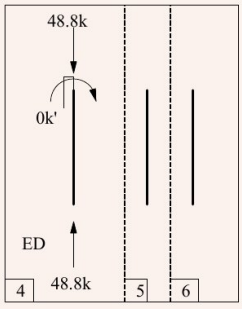


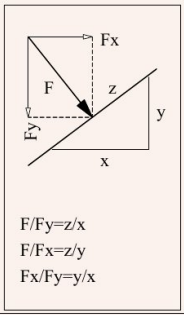


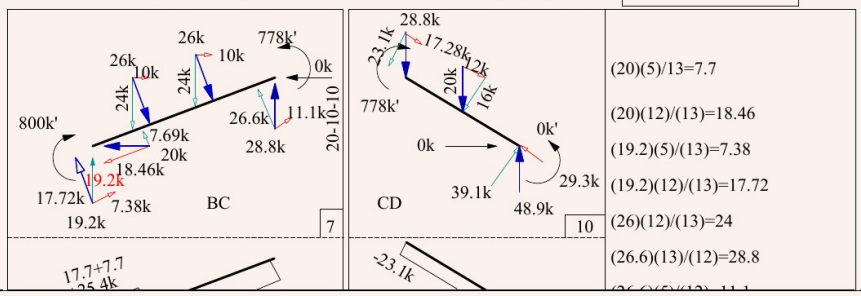
10.5 Shear Moment Diagrams for Inclined Frame









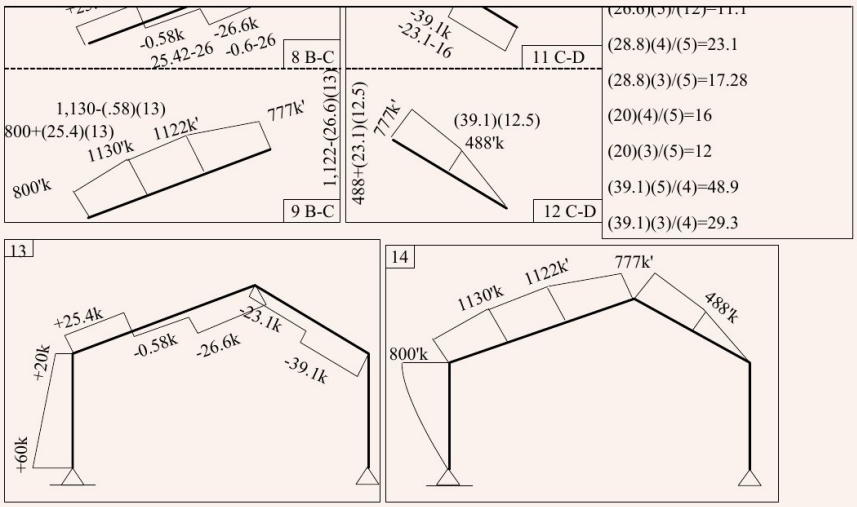


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

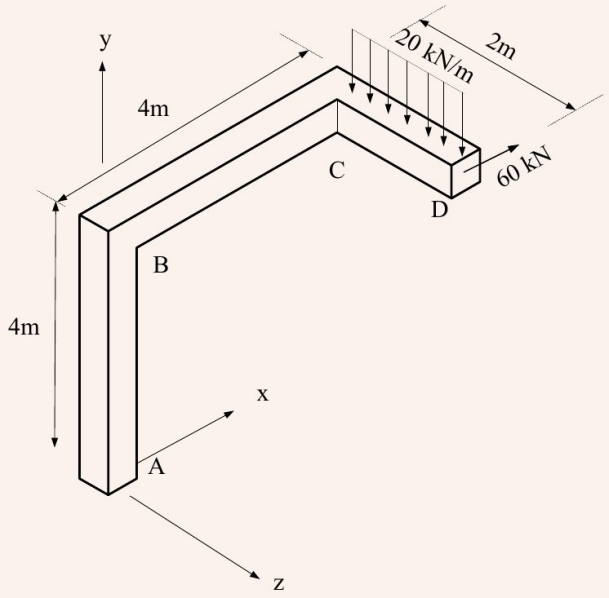
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



10.6 3D Frame



1. The frame has a total of 6 reactions (3 forces and 3 moments) at the support, and we have a total of 6 equations of equilibrium, thus it is statically determinate.
2. Each member has the following internal forces (defined in terms of the local coordinate system of each member x' - y'- z' such that x is along the member)

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	Internal Forces					
Member	Axial	Shear		Moment		Torsion
	$N_{x'}$	$V_{y'}$	$V_{z'}$	$M_{y'}$	$M_{z'}$	$T_{x'}$
C - D		✓	✓	✓	✓	
B - C	✓		✓	✓	✓	✓
A - B	✓	✓		✓	✓	✓

3. The numerical calculations for the analysis of the three dimensional frame are quite simple, however the main complexity stems from the difficulty in visualizing the inter-relations between internal forces of adjacent members.
4. In this particular problem, rather than starting by determining the reactions, it is easier to determined the internal forces at the end of each member starting with member C-D. Note that temporarily we adopt a sign convention which is compatible with the local coordinate systems.

C-D

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m = 40\cdot kN$$

$$\sum F_{z'} = 0 \qquad V_{z'C} := 60kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'C} := -60kN\cdot 2m = -120\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'C} := 20\frac{kN}{m}\cdot 2m\cdot\frac{2m}{2} = 40\cdot kN\cdot m$$

B-C

$$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'B} := V_{z'C} = 60\cdot kN$$

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'B} := V_{y'C} = 40\cdot kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'B} := M_{y'C} = -120\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'B} := V_{y'C}\cdot 4m = 160\cdot kN\cdot m$$

$$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'B} := -M_{z'C} = -40\cdot kN\cdot m$$

A-B

$$\sum F_{x'} = 0 \qquad N_{x'A} := V_{y'B} = 40\cdot kN$$

$$\sum F_{y'} = 0 \qquad V_{y'A} := N_{x'B} = 60\cdot kN$$

$$\sum M_{y'} = 0 \qquad M_{y'A} := -T_{x'B} = 40\cdot kN\cdot m$$

$$\sum M_{z'} = 0 \qquad M_{z'A} := M_{z'B} + N_{x'B}\cdot 4m = 400\cdot kN\cdot m$$

$$\sum T_{x'} = 0 \qquad T_{x'A} := M_{y'B} = -120\cdot kN\cdot m$$

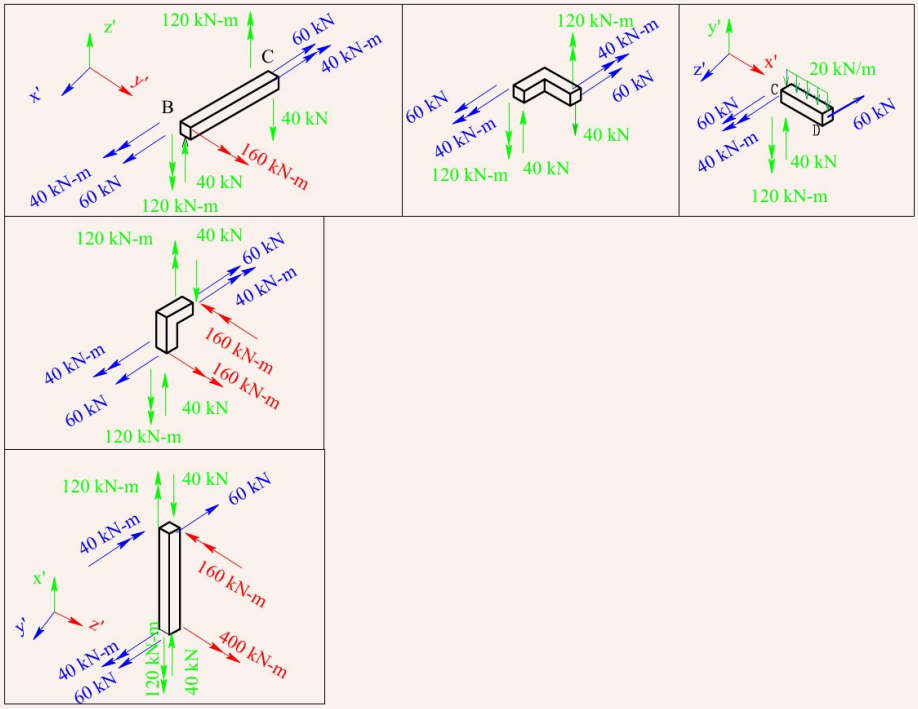
The interaction between axial forces N and shear V as well as between moments M and torsion T is clearly highlighted by this

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

example.

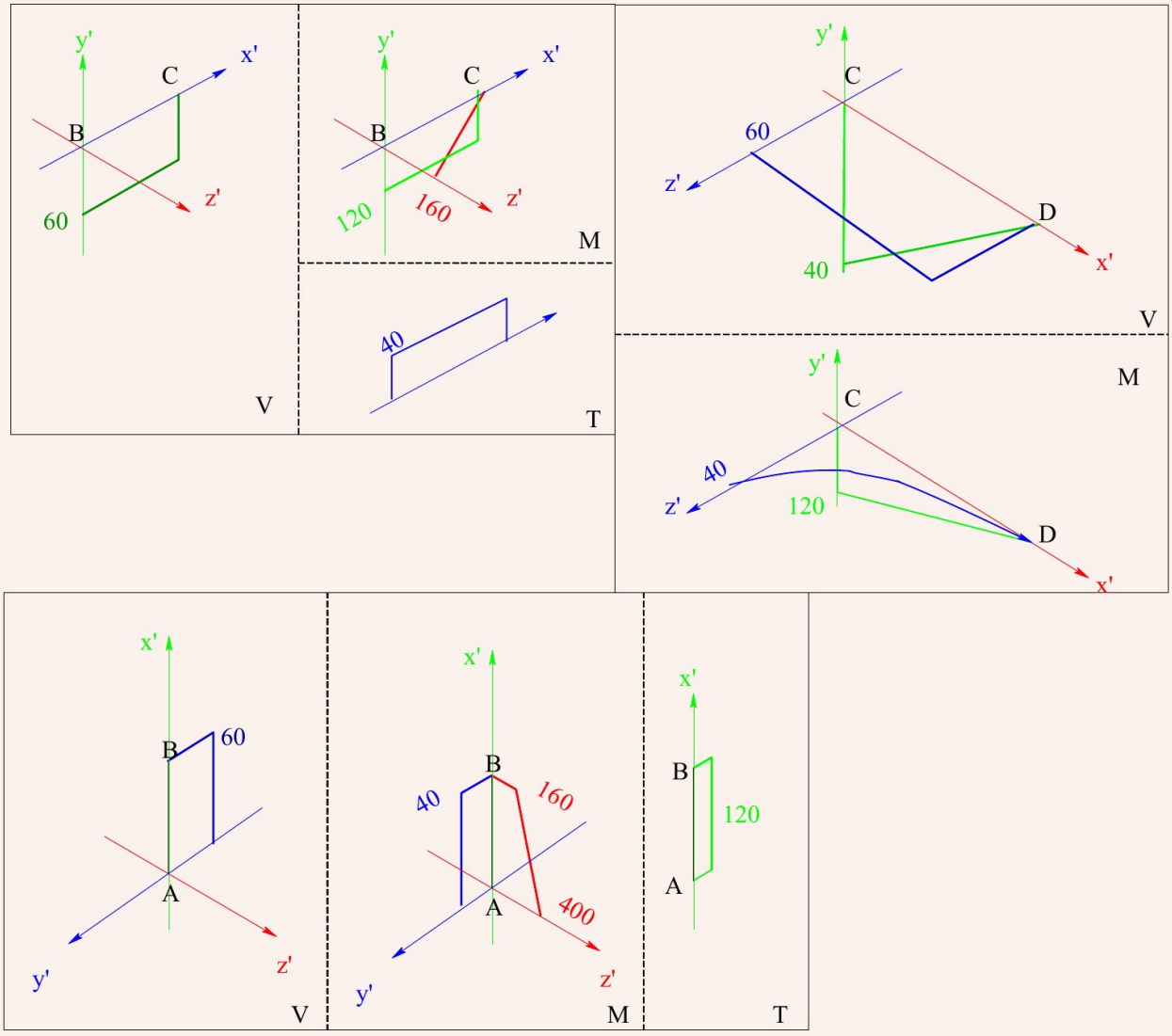


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

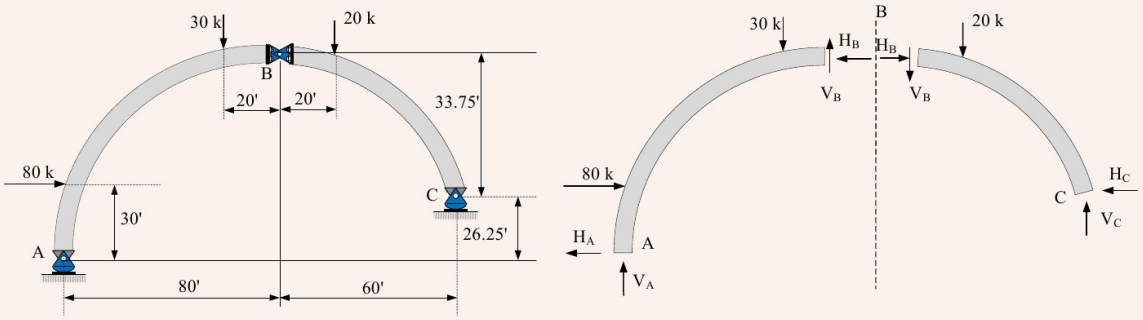
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.1 Three Hinged Arch, Point Loads

Determine the reactions of the three-hinged arch shown below



Solution:

Four unknowns, three equations of equilibrium, one equation of condition - staticall determinate

$$\sum M_z^C = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + 80\,kip\cdot(30\,ft - 26.25\,ft) - 30\,kip\cdot(60\,ft + 20\,ft) - 20\,kip\cdot(60\,ft - 20\,ft) + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 30\,kip\cdot 80\,ft + 20\,kip\cdot 40\,ft - 80\,kip\cdot 3.75\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 140\,ft + R_{Ax}\cdot 26.25\,ft = 2900\,kip\cdot ft}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad 80\,kip - R_{Ax} - R_{Cx} = 0$$

$$\boxed{R_{Ax} + R_{Cx} = 80\,kip}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Ay} + R_{Cy} - 30\,kip - 20\,kip = 0$$

$$\boxed{R_{Ay} + R_{Cy} = 50\,kip}$$

$$\sum M_z^B = 0 \qquad R_{Ax}\cdot 60\,ft - 80\,kip\cdot 30\,ft - 30\,kip\cdot 20\,ft + R_{Ay}\cdot 80\,ft = 0$$

$$R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 80\,kip\cdot 30\,ft + 30\,kip\cdot 20\,ft$$

$$\boxed{R_{Ay}\cdot 80\,ft + R_{Ax}\cdot 60\,ft = 3000\,kip\cdot ft}$$

Solving those four equations simultaneously we have:

$$\begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 140 & 26.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 60 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2900 \\ 80 \\ 50 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ay} \\ R_{Ax} \\ R_{Cy} \\ R_{Cx} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Ay \\ Ax \\ Cy \\ Cx \end{pmatrix} \cdot kip = \begin{pmatrix} 15.1 \\ 29.8 \\ 34.9 \\ 50.2 \end{pmatrix} \cdot kip$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

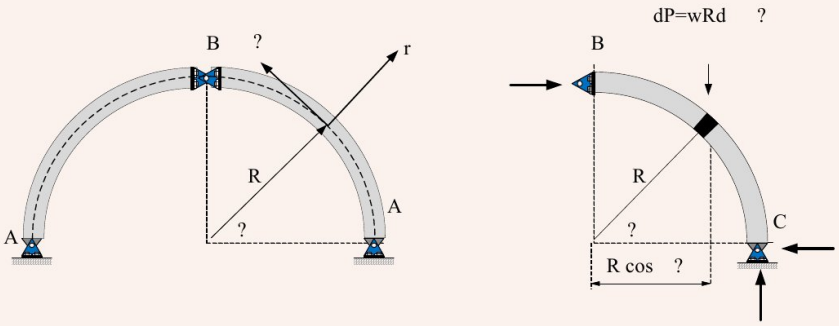
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We can check our results by considering the summation with respect to B from the right:

$$\sum M_z^B = 0 \qquad -20\,kip\cdot 20\,ft - R_{Cx}\cdot 33.75\,ft + R_{Cy}\cdot 60\,ft = -0\cdot kip\cdot ft$$

11.2 Semi-Circular Arch

Determine the reactions of the three-hinged staticall determinate semi-circular arch under its own dead weight *w* (per unit arc length s, where ds=rdθ



Solution:

Reactions The reactions can be determined by **integrating** the load over the entire structure

1. Vertical Reaction is determined first

$$\sum M_A = 0 \qquad -C_y\cdot 2R + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta\cdot R(1+\cos(\theta)) = 0$$

$$C_y = \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(1+\cos(\theta))\,d\theta = \frac{\pi\,wR}{2}$$

2. Horizontal Reactions are determined next

$$\sum M_B = 0 \qquad -C_x\cdot R + C_y\cdot R - \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} wR\,d\theta\cdot R\cos(\theta) = 0$$

$$C_z = \frac{\pi\,wR}{2} - \frac{wR}{2}\cdot\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR$$

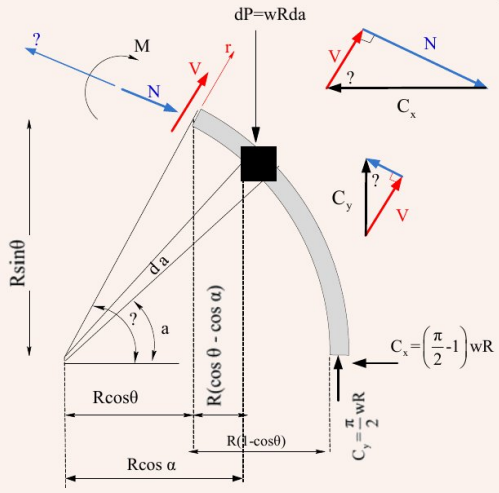
Internal Forces can now be determined

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



1. Shear Forces: Considering the free body diagram of the arch, and summing the forces in the radial direction ($\Sigma F_R=0$)

$$-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cos(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\sin(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\sin(\theta)+V=0$$

$$V=wR\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\cos(\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Axial Forces: Similarly, if we consider the summation of forces in the axial direction ($\Sigma F_\theta=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cos(\theta)-\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot\cos(\theta)+N=0$$

$$N=wR\cdot\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\sin(\theta)\right]$$

2. Moment: Now we can consider the third equation of equilibrium ($\Sigma M_z=0$)

$$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot wR\cdot R\sin(\theta)+\frac{\pi}{2}\cdot wR\cdot R\cdot(1-\cos(\theta))+\int_{\alpha=0}^{\theta} wR\,d\alpha\cdot R(\cos(\alpha)-\cos(\theta))+M=0$$

$$M=wR^2\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

Deflection are determined last

1. The real curvature ϕ is obtained by dividing the moment by EI

$$\phi=\frac{M}{EI}=\frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-\sin(\theta))+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]$$

2. The virtual force $\delta\cdot\bar{P}$ will be a unit vertical point load in the direction of the desired deflection, causing a virtual internal moment

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

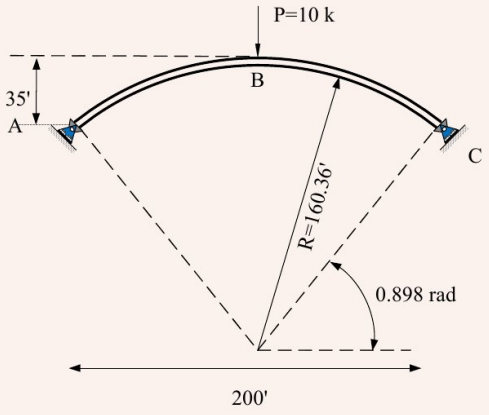
$$\delta\cdot\overline{M} = \frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta)) \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

3. Hence, application of the virtual work equation yields:

$$1\cdot\Delta = 2\cdot\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{wR^2}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1 - \sin(\theta)) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\theta)\right]\cdot\left[\frac{R}{2}\cdot(1 - \cos(\theta) - \sin(\theta))\right]\cdot R\, d\theta = \frac{wR^4}{16EI}\cdot\left(7\cdot\pi^2 - 18\cdot\pi - 12\right)$$

11.3 Statically Indeterminate Arch

Determine the value of the horizontal reaction component of the indicated two-hinged solid rib arch, as caused by a concentrated vertical load of 10 k at the center line of the span. Consider shearing, axial, and flexural strains. Assume the rib is a W24x130 with a total area of 38.21 in^2, that it has a web area of 13.70 in^2, a moment of inertia equal to 4,000 in^4, E of 30,000 k/in^2, and a shearinf modulus of 13,000 k/in^2.



Solution:

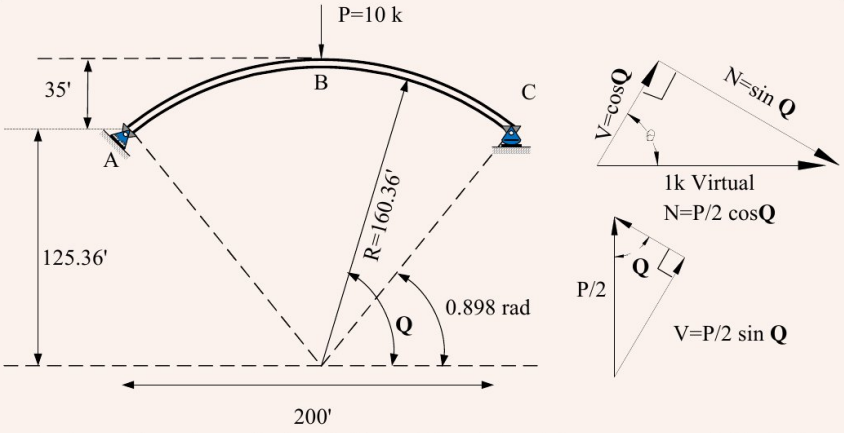
1. Consider that end C is placed on rollers, as shown below.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



A unit ficticious horizontal force is applied at C. The axial and shearinf components of this ficticious force and of the vertical reaction at C, acting on any section θ in the right half of the rib, are shown at the right end of the rib in the figure above.

2. The expression for the horizontal displacement of C is

$$1\cdot\Delta_{Ch} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{V}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{N}{AE}\,ds$$

3. From the figure above, for the rib from C to B

$$M = \frac{P}{2}\cdot(100 - R\cdot\cos\theta)$$

$$\delta\cdot\overline{M} = 1\cdot(R\cdot\sin\theta - 125.36\,ft)$$

$$V = \frac{P}{2}\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{V} = \cos\theta$$

$$N = \frac{P}{2}\cdot\cos\theta$$

$$\delta\cdot\overline{N} = -\sin\theta$$

$$ds = R\,d\theta$$

4. If the above values are substituted in the equation for the horizontal displacement of C and integrated between the limits of 0.898 and π/2, the result will be

$$\Delta_{Ch} = 22.55\,in + 0.023\,in - 0.003\,in$$

$$\Delta_{Ch} := 22.57\,in$$

5. The load P is now assumed to be removed fro mthe rib, and a real horizontal force of 1 k is assumed to act toward the right at C in conjunction with the ficticious force of 1 k acting to the right at the same point. The horizontal displacement of C will be given by

$$\delta_{ChCh} = 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{\overline{M}}{EI}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{V}\cdot\frac{\overline{V}}{A_W\cdot G}\,ds + 2\cdot\int_C^B \delta\cdot\overline{N}\cdot\frac{\overline{N}}{AE}\,ds = 2.309\,in + 0.002\,in + 0.002\,in$$

$\delta_{\sim\sim} := 2.313\,in$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\delta_{ChCh} := 2.309\,in$

6. The value of the horizontal reaction component will be

$$H_C := \frac{\Delta_{Ch}}{\delta_{ChCh}} \cdot kip = 9.76 \cdot kip$$

7. If only flexural strains are considered, the result would be

$$H_G := \frac{22.55\,in}{2.309\,in} \cdot kip = 9.77 \cdot kip$$

Comments

1. For the given rib and the single concentrated load at the center of the span it is obvious that the effects of shearing and axial strains are insignificant and can be disregarded.
2. Eroneous conclusions as to the relative importance of shearing and axial strains in the usual solid rib may be drawn, however, from the values in the equation for Δ_{Ch}. These indicated that the effects of the shearing strains are much more significant thatn those of the axial strains. This is actually the case for the single concentrated load chosen for the demonstration, but only because the rib does not approximate the funicular polygon for the single load. As a result, the shearing components on most sections of the rib are more important than would otherwise be the case.
3. The usual arch encountered in practice, however, is subjected to a series of loads, and the axis of the rib will approximate the funicular polygon for these loads. In other words, the line of pressure is nearly perpindicular to the right section at all points along the rib. Consequently, the shearing components are so small that the shearing strains are insignificant and are neglected
4. Axial strains, resulting in rib shortening, become increasingly important as the rise-to-span ratio of the arch decreases. It is advisable to determine the effects of the rib by considering flexural strains only, and then to check for effects or rib shortening.

11.4 Semi-Circular Box Girder

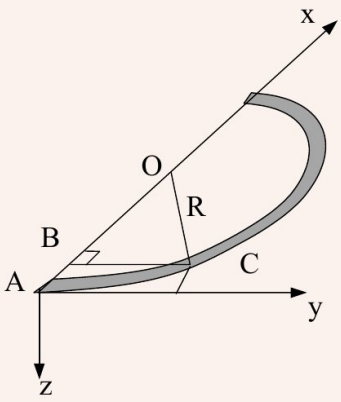
Determine the reactions of the semi-circular cantilevered box girder subjected to its own weight w.

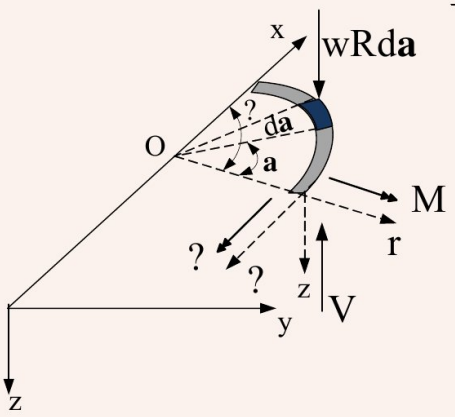
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura





Solution:

Reactions are again determined first

From geometry we have OA=R, OB=Rcosθ, CD = BA = OA - OB = R - Rcosθ, EB = R(1+cosθ) and BC = Rsinθ. The moment arms for the moments with respect to the x and y axis are BC and EB respectively. Applying three equations of equilibrium we obtain

$$F_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta = 0 \qquad \boxed{F_z^A = wR\pi}$$

$$M_z^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot \sin\theta = 0 \qquad \boxed{M_z^A = 2 \cdot w \cdot R^2}$$

$$M_y^A - \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} wR\,d\theta \cdot R \cdot (1 + \cos\theta) = 0 \qquad \boxed{M_y^A = -w \cdot R^2 \cdot \pi}$$

Internal Forces are determined next

1. Shear Force:

$$\sum F_Z = 0 \qquad V - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha = 0$$

$$\boxed{V = wR\theta}$$

2. Bending Moment:

$$\sum M_R = 0 \qquad M - \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{M = wR^2 \cdot (1 - \cos\theta)}$$

3. Torsion:

$$\sum M_\theta = 0 \qquad T + \int_0^{\theta} wR\,d\alpha \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha) = 0$$

$$\boxed{T = -wR^2 \cdot (\theta - \sin\theta)}$$

Deflection are determined last

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

We assume a rectangular cross-section of width b and heigh d=2b and a Poisson's ratio of $\nu := 0.3$

1. Noting that the member will be subjected to both flexural and torsional deformations, we seek to determine the two stiffnesses.

2. The flexural stiffness EI is given by $EI = E\cdot\frac{b\cdot d^3}{12} = \frac{2Eb^4}{3}$

3. The torsional stiffness of solid rectangular sections $J = kb^3\cdot d$ where b is the shorter side of the section, d is the longer,

   and k is a factor equal to 0.229 for d/b=2. Hence $G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{E}{2.6}$, and $GJ = \frac{E}{2.6}\cdot 0.229\cdot b^4 = 0.176E\cdot b^4$.

4. Considering both flexural and torsional deformations, and replacing dx by rdθ:

$$\delta\cdot\overline{M}\cdot\Delta = \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI_Z}\cdot R\,d\theta + \int_0^{\pi}\delta\cdot\overline{T}\cdot\frac{T}{GJ}\cdot R\,d\theta$$

   where the real moments were given above.

5. Assuming a virtual downward force $\delta\cdot\overline{P} = 1$, we have

$$\delta\cdot\overline{M} = R\cdot\sin\theta$$

$$\delta\cdot\overline{T} = -R\cdot(1-\cos\theta)$$

6. Substituting these expressions into the equation for displacement (in 4)

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^2}{EI}\cdot\int_0^{\pi}(R\cdot\sin\theta)\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta + \frac{w\cdot R^2}{GJ}\cdot\int_0^{\pi}(\theta-\sin\theta)\cdot R\cdot(1-\cos\theta)\cdot R\,d\theta$$

$$1\cdot\Delta = \frac{w\cdot R^4}{EI}\cdot\int_0^{\pi}\left[(\sin\theta-\sin\theta\cdot\cos\theta) + \frac{1}{0.265}\cdot(\theta-\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta)\right]\,d\theta$$

$$\boxed{\Delta = 20.56\cdot\frac{w\cdot R^4}{EI}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

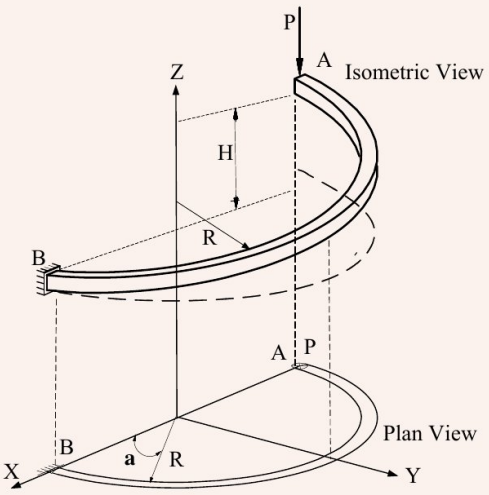
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

11.5 Internal Forces in an Helicoidal Cantilevered Girder, Point Load

Determine the internal forces N, V_s, and V_w and the internal moments T, M, and M_w along the helicoidal cantilevered girder.



Solution:

1. We first determine the geometry in terms of the angle θ

$$x(R,\theta) := R\cdot\cos(\theta) \qquad y(R,\theta) := R\cdot\sin(\theta) \qquad z(H,\theta) := \frac{H}{\pi}\cdot\theta$$

2. To determine the unit vector **n** at any point we need the derivatives

$$dx(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}x(R,\theta) \rightarrow -R\cdot\sin(\theta) \qquad dy(R,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}y(R,\theta) \rightarrow R\cdot\cos(\theta) \qquad dz(H,\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}z(H,\theta) \rightarrow \frac{H}{\pi}$$

and then determine the unit vector

$$\mathbf{n} = \frac{-R\cdot\sin(\theta)\mathbf{i} + R\cdot\cos(\theta)\cdot\mathbf{j} + \frac{H}{\pi}\cdot\mathbf{k}}{\left[R^2\cdot(\sin\theta)^2 + R^2\cdot(\cos\theta)^2 + \left(\frac{H}{\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\left[-\sin\theta\cdot\mathbf{i} + \cos\theta\cdot\mathbf{j} + \left(\frac{H}{\pi\cdot R}\right)\cdot\mathbf{k}\right]$$

Since the denominator depends only on the geometry, it will be designated K.

3. The strong bending axis lies in a horizontal plane, and its unit vector can thus be determined

$$\mathbf{n}\times\mathbf{k} = \frac{1}{K}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi\cdot R}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{K}\cdot(\cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{j})$$

and the absolute magnitude of this vector $|\mathbf{n}\times\mathbf{k}| = \frac{1}{K}$, and thus

$$\mathbf{s} = \cos\theta\cdot\mathbf{i} + \sin\theta\cdot\mathbf{i}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The unit vector along the weak axis is determined

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \frac{1}{K} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & \frac{H}{\pi \cdot R} \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \sin\theta \cdot \mathbf{i} - \frac{H}{\pi \cdot R} \cdot \cos\theta \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

5. With the geometry definition completed, we now examine the equilibrium equations.

$$\sum F = 0 \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{P}$$

$$\sum M_b = 0 \qquad \mathbf{M} = -\mathbf{L} \times \mathbf{P}$$

where

$$\mathbf{L} = (R - R \cdot \cos\theta) \cdot \mathbf{i} + (0 - R \cdot \sin\theta) \cdot \mathbf{j} + \left(0 - \frac{\theta}{\pi} \cdot H\right) \cdot \mathbf{k}$$

and

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{P} = R \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 - \cos\theta & -\sin\theta & \frac{-\theta}{\pi} \cdot \frac{H}{R} \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = PR \cdot \left[-\sin\theta \cdot \mathbf{i} - (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

and

$$\mathbf{M} = PR \cdot \left[\sin\theta \cdot \mathbf{i} + (1 - \cos\theta) \cdot \mathbf{j} \right]$$

6. Finally, the components of the force $\mathbf{F} = -Pk$ and the moment $\mathbf{M}$ are obtained by appropriate dot products with the unit vectors

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{K} \cdot P \cdot \frac{H}{\pi \cdot R}$$

$$V_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 0$$

$$V_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{K} \cdot P$$

$$T = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = -\frac{PR}{K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$M_s = \mathbf{M} \cdot \mathbf{s} = PR \cdot \sin\theta$$

$$M_w = \mathbf{M} \cdot \mathbf{w} = -\frac{PH}{\pi \cdot K} \cdot (1 - \cos\theta)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

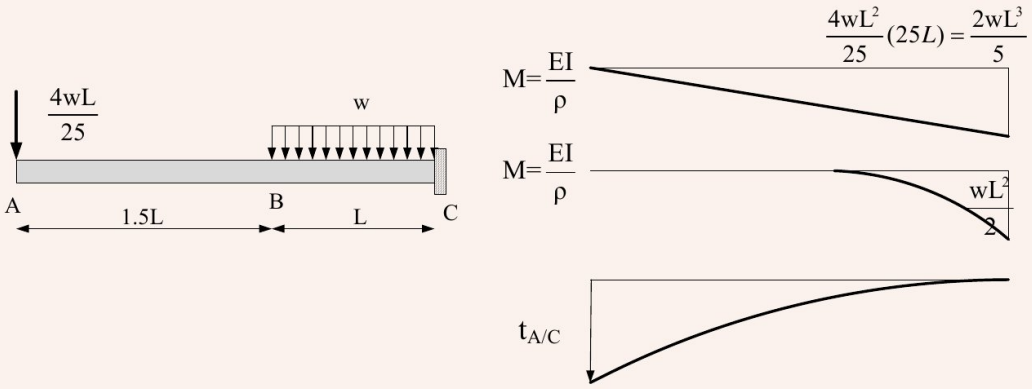
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.1 Moment Area, Cantilevered Beam

Determine the deflection at Point A



Solution:

$$EIt_{AC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2w\cdot L^2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5L}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5L}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-w\cdot L^2}{2}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{9L}{4}\right) = \frac{-29w\cdot L^4}{24}$$

Thus,

$$\Delta_A = \frac{-29w\cdot L^4}{24\cdot E\cdot I}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

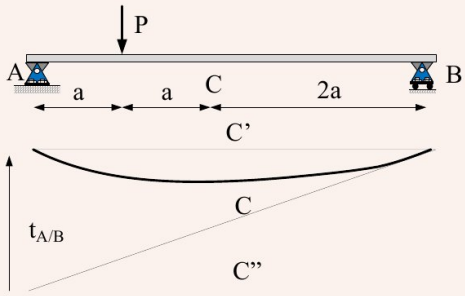
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

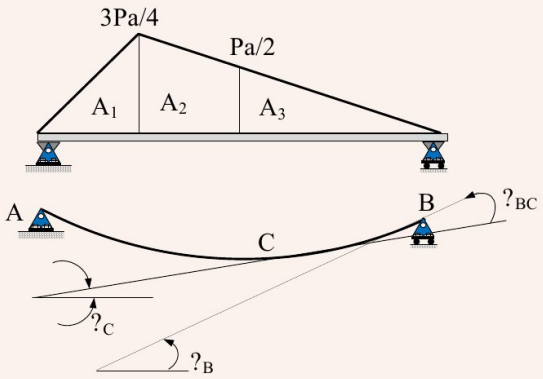
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

12.2 Moment Area, Simply Supported Beam

Determine Δ_C and θ_C for the following example





Solution:

Deflection Δ_C is determined from $\Delta_C = c'\cdot c = c'\cdot c'' - c''\cdot c$, $c''\cdot c = t_{CB}$, and $c'\cdot c'' = \frac{t_{AB}}{2}$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) + \left(\frac{3P\cdot a}{4}\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)\cdot\left(a + \frac{3a}{3}\right)\right] = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}$$

This is positive, thus above tangent from B

$$t_{CB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I}$$

Positive, thus above tangent from B. Finally,

$$\boxed{\Delta_C = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\right) - \frac{P\cdot a^3}{3\cdot E\cdot I} = \frac{11}{12}\cdot\frac{P\cdot a^3}{E\cdot I}}$$

Rotationa θ_C is

$$\theta_{BC} = \theta_B - \theta_C \Rightarrow \theta_C = \theta_B - \theta_{BC}$$

$$\theta_{BC} = A_3$$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{L}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

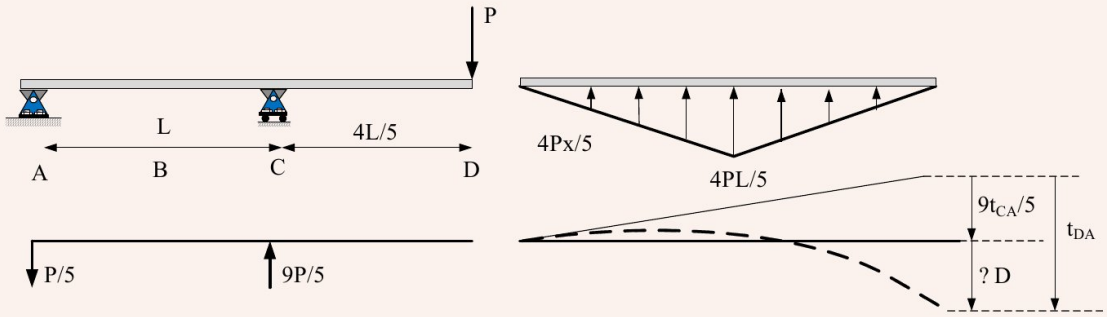
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\theta_C = \frac{5P\cdot a^3}{2\cdot E\cdot I}\cdot\frac{1}{4a} - \left(\frac{P\cdot a}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{2}\right) = \frac{P\cdot a^2}{8E\cdot I}$$

12.3 Maximum Deflection

Determine the deflection at D and the maximum deflection at B



Solution:

Deflection at D:

$$\Delta_D = t_{DA} - \frac{9}{5}\cdot t_{CA}$$

$$EIt_{CA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{-2P\cdot L^3}{15}$$

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$EIt_{DA} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot L\cdot\left(\frac{17L}{15}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-4P\cdot L}{5}\right)\cdot\left(\frac{4L}{5}\right)\cdot\left(\frac{8L}{15}\right) = \frac{-234P\cdot L^3}{375}$$

$$t_{DA} = \frac{-234P\cdot L^3}{375E\cdot I}$$

Substituting we obtain

$$\Delta_D = \frac{-48}{125}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Maximum Deflection at B:

$$t_{CA} = \frac{-2P\cdot L^3}{15E\cdot I}$$

$$\theta_A = \frac{t_{CA}}{L} = \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I}$$

$$\theta_{AB} = \frac{1}{E\cdot I}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4P\cdot x}{5}\right)\cdot x\right] = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I}$$

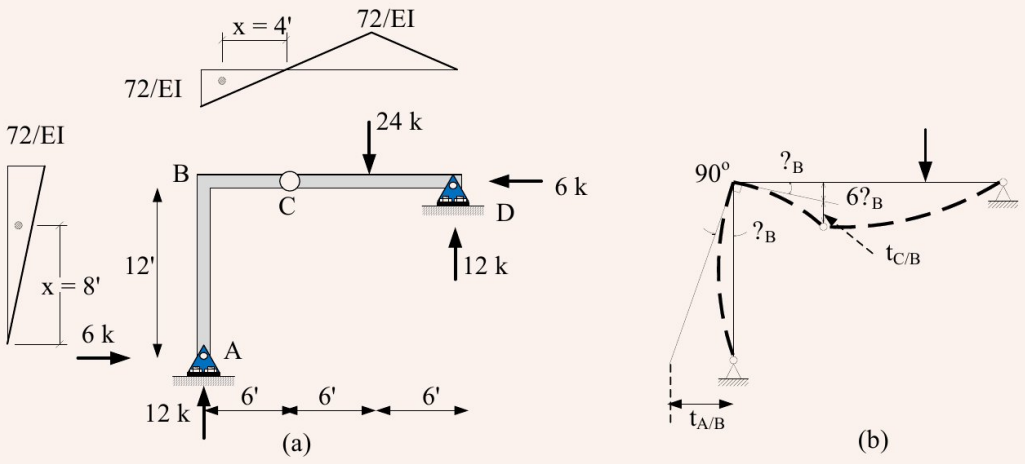
$$\theta_A = \theta_{AB} \Rightarrow \frac{-2P\cdot L^2}{15E\cdot I} = \frac{-2}{5}\cdot\frac{P\cdot x^2}{E\cdot I} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta_{max} = \left(\frac{4P\cdot x}{5\cdot E\cdot I}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}\right) \text{ at } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\Delta_{max} = \frac{4\cdot P\cdot L^3}{45\cdot\sqrt{3}\cdot E\cdot I}}$$

12.4 Frame Deflection

Complete the following example problem

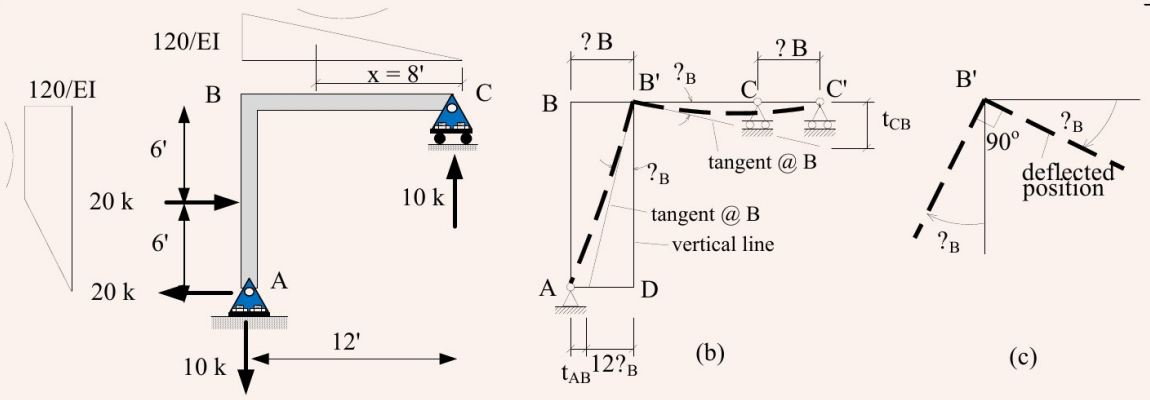


结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

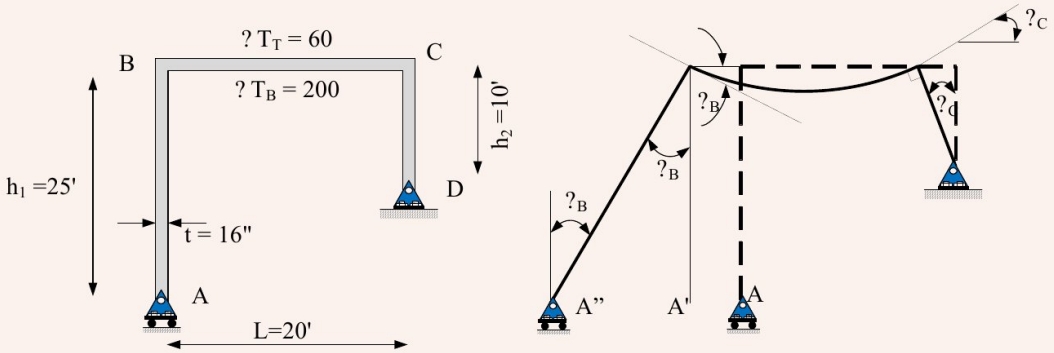
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



12.5 Frame Subjected to Temperature Loading

Neglecting axial deformation, compute displacement at A for the following frame



Solution:

1. First let us sketch the deformed shape

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

2. BC flexes => $\theta_B = \theta_C \neq 0$

3. Rigid hinges at B and C with no load on AB and CD

4. Deflection at A

$$\Delta_A = A{\cdot}A'' = A{\cdot}A' + A'{\cdot}A''$$

$$A{\cdot}A' = \Delta_B = \Delta_C = \left|\theta_C\right|{\cdot}h_2$$

$$A'{\cdot}A'' = \left|\theta_B\right|{\cdot}h_1$$

5. We need to compute θ_B and θ_C

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{L}$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B \quad \text{OR} \quad \theta_C = \frac{t_{BC}}{L}$$

6. In order to apply the curvature area theorem, we need a curvature (or moment diagram)

$$\frac{1}{\rho} = \alpha{\cdot}\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right) = \frac{M}{E{\cdot}I}$$

7.

$$t_{CB} = A{\cdot}\frac{L}{2} \Rightarrow \left|\theta_B\right| = A{\cdot}\left(\frac{L}{2}\right){\cdot}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{A}{2} \quad \text{OR} \quad \theta_B = \frac{-A}{2}$$

8.

$$\theta_{CB} = A$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_B$$

$$\theta_C = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

9. From above

$$\Delta_A = \left|\theta_C\right|{\cdot}h_2 + \left|\theta_B\right|{\cdot}h_1 = \frac{A}{2}{\cdot}h_2 + \frac{A}{2}{\cdot}h_1 = \frac{A}{2}\left(h_1 + h_2\right)$$

$$A = \alpha{\cdot}\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right){\cdot}L$$

$$\Delta_A = \alpha{\cdot}\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right){\cdot}L{\cdot}\left(\frac{1}{2}\right){\cdot}\left(h_1 + h_2\right)$$

10. Substitute

$$\Delta_A := \left(6.5{\cdot}10^{-6}\right){\cdot}(200 - 60){\cdot}\frac{20\text{ft}}{16\text{in}}{\cdot}\frac{1}{2}{\cdot}35\text{ft}$$

$$\boxed{\Delta_A = 2.867{\cdot}\text{in}}$$

11. Other numerical values

$$\theta_B = \theta_C = \frac{A}{2}$$

$$\theta_B := \frac{1}{2}\left(6.5{\cdot}10^{-6}\right){\cdot}\left(\frac{200 - 60}{16\text{in}}\right){\cdot}20\text{ft} = 0.006825{\cdot}\text{rad}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\theta_C := \theta_B = 0.006825$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} = \alpha\cdot\left(\frac{T_B - T_T}{h}\right)$$

$$\rho := \frac{1}{\left[\left(6.5\cdot10^{-6}\right)\cdot\left(\frac{200-60}{16in}\right)\right]} = 1465.2\cdot ft$$

12. In order to get M, we need E and I. Note the difference with other statically determinate structures; the stiffer the beam, the higher the moment; the higher the moment, the higher the stress? NO!!

13. $$\sigma = \frac{M\cdot y}{I} = \frac{E\cdot I}{\rho}\cdot\frac{y}{I} = \frac{E\cdot y}{\rho}$$

14. ρ is constant => BC is on arc of circle M is constant and $\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2}$ => $\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = c$ => $y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$

15. The slope is a parabola

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2\cdot y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Let us get curvature from the parabola slope and compare it with ρ

$$y = \frac{cx^2}{2} + dx + e$$

$$\frac{dy}{dx} = cx + d$$

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = c$$

at x=0, y=o, thus e=0

at x=0, $\frac{dy}{dx} = \theta_B = -0.006825rad$, thus $d = -0.006825rad$

at x=20 ft, $\frac{dy}{dx} = \theta_C = 0.006825rad$, thus $c(20ft) - 0.006825 = 0.006825$, thus $c = 6.825\cdot10^{-4}$

$$y = 6.825\cdot10^{-4}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 10x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6.825\cdot10^{-4}\cdot(x-10)$$

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = 6.825\cdot10^{-4}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\phi := 6.825 \cdot 10^{-4}$$

$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.2 \cdot ft \quad \text{as expected!}$$

If we were to use the exact curvature formula $\dfrac{\dfrac{d^2 \cdot y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$$\phi := \frac{6.825 \cdot 10^{-4}}{\left[1 + (0.006825)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.000682$$

$$\rho := \frac{1}{\phi} \cdot ft = 1465.3 \cdot ft$$

12.6 Conjugate Beam

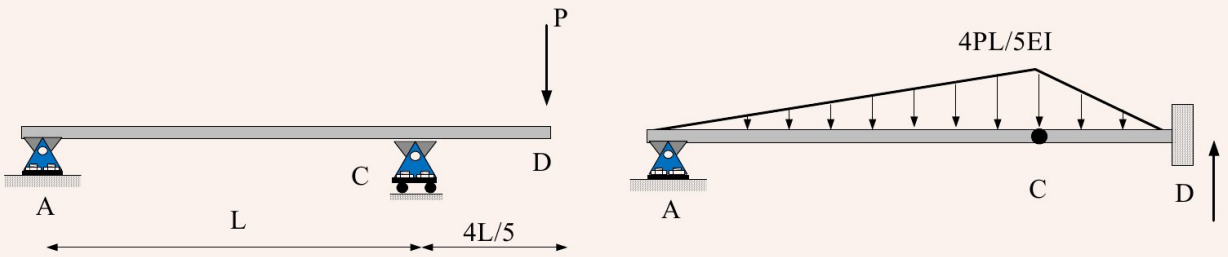
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Analyze the following beam



Solution:

3 equations of equilibrium and 1 equation of condition = 4 = number of reactions. Deflection at D = Shear at D of the corresponding conjugate beam (Reaction at D) Take AC and ΣM with respect to C

$$R_A \cdot (L) - \left(\frac{4P \cdot L}{5E \cdot I}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$R_A = \frac{2 \cdot P \cdot L^3}{15E \cdot I}$$

(Slope in real beam at A) As computed before. Let us dram the moment diagram for the conjugate beam

$$M = \frac{P}{EI} \cdot \left(\frac{2}{15} \cdot L^2 \cdot x - \frac{2}{15} \cdot x^3\right) = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 \cdot x - x^3\right)$$

Point of maximum moment (Δ_{max}) occurs when $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left(L^2 - 3x^2\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

as previously determined

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M = \frac{2 \cdot P}{15 \cdot E \cdot I} \cdot \left[L^2 \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3\right]$$

$$M = \frac{4P \cdot L^3}{45 \cdot \sqrt{3} \cdot E \cdot I} \text{ as before}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

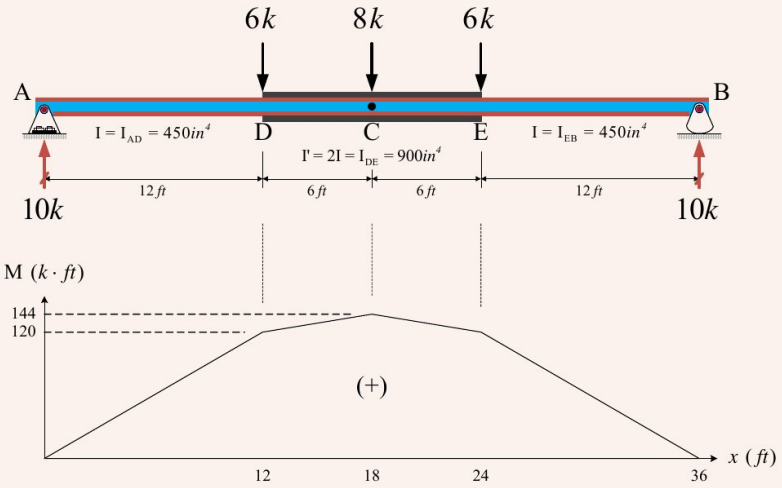
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

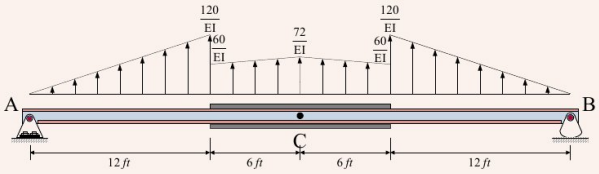
12.7 Conjugate Beam

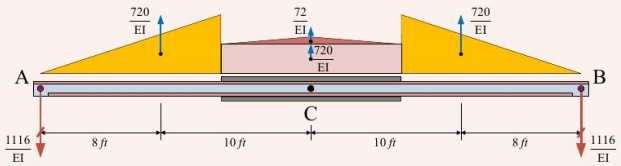
Analyze the following beam

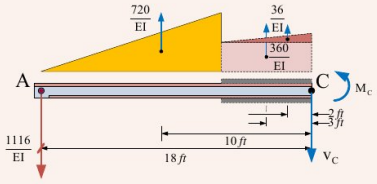


Solution:

From simple observation, the reactions at A and B are equal to 10 k. The elastic load on the conjugate beam is then shown below.







We next seek to determine the internal moment at C' in the conjugate beam. It is obtained from equilibrium:

$$\sum M_z^B = 0 \qquad \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft - \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft - \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft - \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft + M_{C'} = 0$$

$E := 29\cdot 10^3 ksi$

$I := 450in^4$

$\Delta_C = M_{C'}$

$$\Delta_{C'} := \frac{720\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 10ft + \frac{360\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 3ft + \frac{36\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 2ft - \frac{1116\cdot kip\cdot ft^2}{E\cdot I}\cdot 18ft = -1.554\cdot in$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

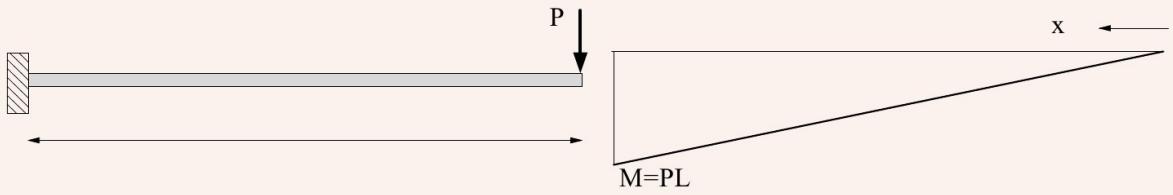
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.1 Deflection of a Cantilever Beam

Determine the deflection of the cantilever beam with span L under a point load P at its free end. Assume constant EI.



Solution:

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2\cdot E\cdot I}\,dx$$

$$M = -P\cdot x$$

$$U(P, L, EI) := \frac{P^2}{2\cdot EI}\cdot \int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\frac{1}{2}\cdot P\cdot \Delta_f = \frac{L^3\cdot P^2}{6\cdot EI}$$

$$\boxed{\Delta_f = \frac{P\cdot L^3}{3\cdot EI}}$$

Note that the solution of this problem was facilitated by the fact thatΔ_f is co-alligned with P.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

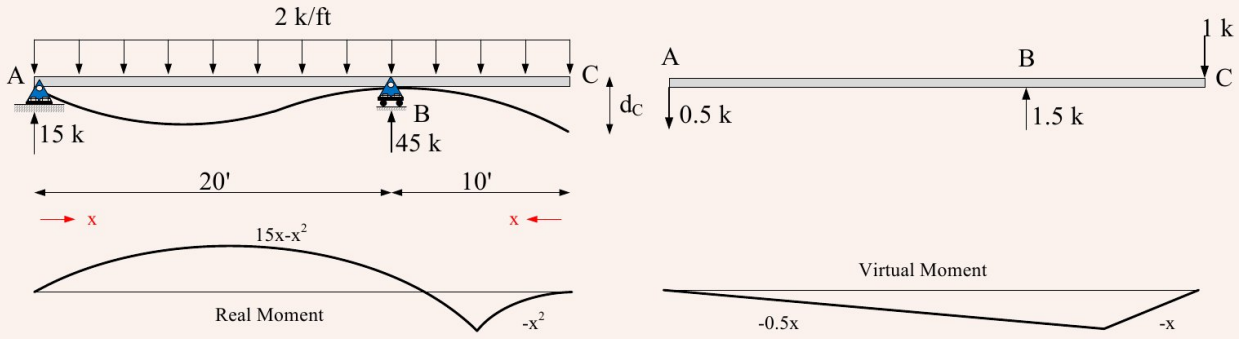
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.2 Beam Deflection

Determine the deflection at point C. $E := 29000ksi$, $I := 100in^4$



Solution:

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	$15x - x^2$	- 0.5x
BC	C	$- x^2$	- x

For the virtual force method, we need to have two expressions for the moment, one due to the real load, and the other to the (unit) virtual one.

$$\Delta_C \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1 \cdot \Delta_C = \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx$$

$$\Delta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.5x) \cdot \left(\frac{15x - x^2}{EI} \right) dx + \int_0^{10} (-x) \cdot \left(\frac{-x^2}{EI} \right) dx \rightarrow \frac{2500}{EI}$$

$$\Delta_C := \frac{2500kip \cdot ft^3}{E \cdot I} = 1.49 \cdot in$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

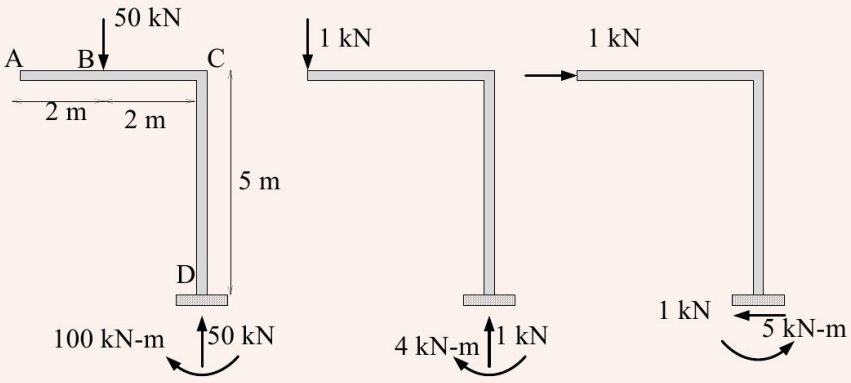
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

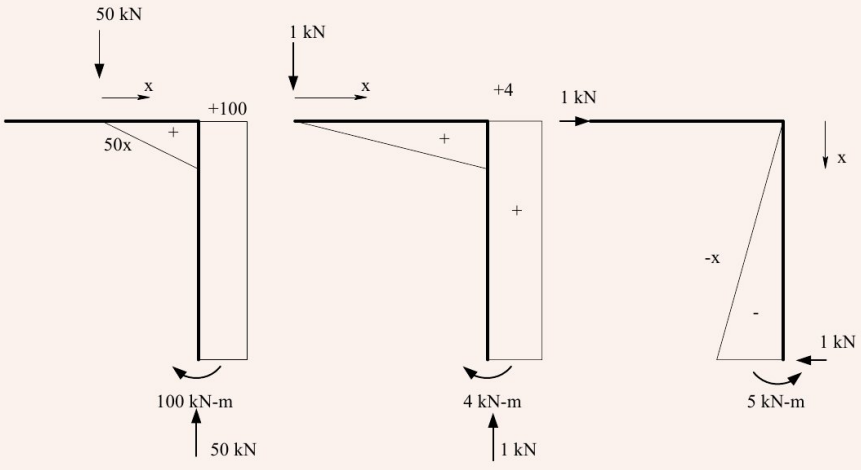
13.3 Deflection of a Frame

Determine both the vertical and horizontal deflection at A for the frame shown. $E := 200 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}$, $I := 200 \cdot 10^6 mm^4$



Solution:

To analyze the frame we must determine analytical expressions for the moments along each member for the real load and the two virtual ones. One virtual load is a unit horizontal load at A, and the other a unit vertical one at A



Element	x = 0	M	δM_v	δM_h
AB	A	0	- x	0
BC	B	- 50x	- 2 - x	0
CD	C	100	4	- x

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the inside of the frame. Substitution yields:

$$\Delta_v \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_v = \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_v(EI) := \int_0^2 -x \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (-2 - x) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 4 \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow \frac{7000}{3 \cdot EI}$$

$$\Delta_v := \frac{7000\text{kN} \cdot \text{m}^3}{3 \cdot E \cdot I} = 5.833 \cdot \text{cm}$$

Similarly for the horizontal displacement

$$\Delta_h \cdot \delta \cdot \bar{P} = \int_0^L \delta \cdot \bar{M}(x) \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

$$1\Delta_h = \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx$$

$$\Delta_h(EI) := \int_0^2 0 \cdot \frac{(0)}{EI}\, dx + \int_0^2 (0) \cdot \frac{(-50x)}{EI}\, dx + \int_0^5 -x \cdot \frac{100}{EI}\, dx \rightarrow -\frac{1250}{EI}$$

$$\Delta_h := \frac{-1250\text{kN} \cdot \text{m}^3}{E \cdot I} = -3.125 \cdot \text{cm}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

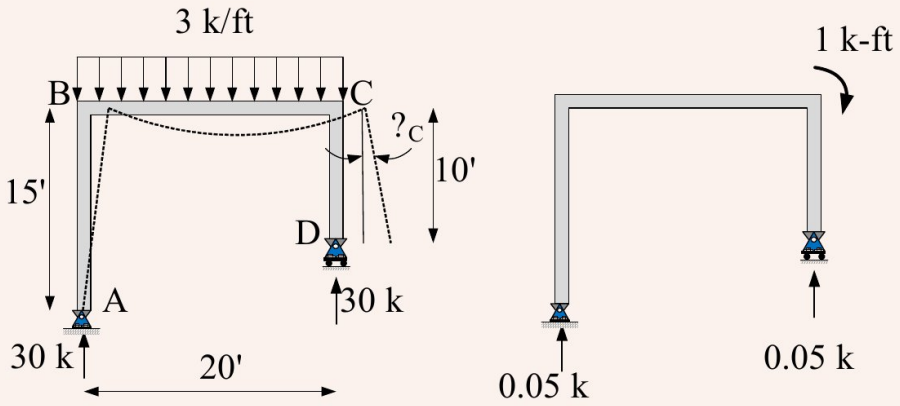
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.4 Rotation of a Frame

Determine the rotation of joint C for the frame shown. $E := 29000\text{ksi}$, $I := 240\text{in}^4$



Solution:

In this problem the virtual force is a unit moment applied at joint C, $\delta\cdot\overline{M_e}$. It will cause an internal moment $\delta\cdot\overline{M_i}$.

Element	x = 0	M	δM
AB	A	0	0
BC	B	$30x - 1.5x^2$	- 0.05x
CD	D	0	0

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that moments are considered positive when they produce compression on the outside of the frame. Substitution yields:

$$\theta_C \cdot \delta \cdot \overline{M_e} = \int_0^L \delta \cdot \overline{M} \cdot \frac{M(x)}{EI_z}\, dx$$

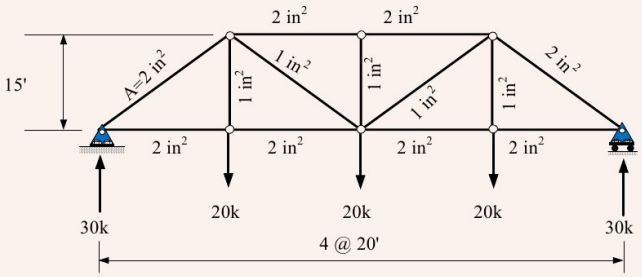
$$1 \cdot \theta_C = \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx$$

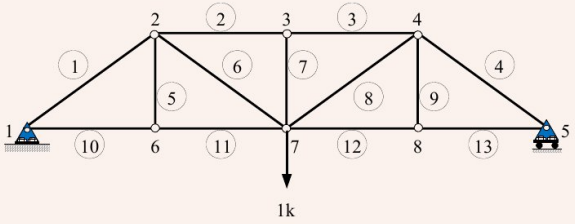
$$\theta_C(EI) := \int_0^{20} (-0.05x) \cdot \left(\frac{30x - 1.5x^2}{EI} \right) dx \rightarrow -\frac{1000}{EI}$$

$$\theta_C := \frac{-1000\,kip \cdot ft^2}{E \cdot I} = -0.021 \cdot rad$$

13.5 Truss Deflection

Determine the vertical deflection of joint 7 in the truss shown $E := 30000ksi$





Solution:

Two analyses are required. One with the real load, and the other using a unit vertical load at joint 7. Results for those analyses are summarized below. Note that advantage was taken of the symmetric load and structure.

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	A in^2	L ft	P^e kip	δP kip	δPPL/A $k\text{-}ft/in^2$	n	nδPPL/A $k\text{-}ft/in^2$
1 & 4	2	25	-50	-0.083	518.75	2	1037.5
10 & 13	2	20	40	0.67	268	2	536
11 & 12	2	20	40	0.67	268	2	536
5 & 9	1	15	20	0	0	2	0
6 & 8	1	25	16.7	0.83	346.5	2	693
2 & 3	2	20	-53.3	-1.33	708.9	2	1417.8
7	1	15	0	0	0	1	0
Total							4220.3

$$\Delta\cdot\delta\cdot\bar{P} = \int_0^L \delta\cdot\bar{P}\cdot\frac{P}{A\cdot E}\,dx$$

$$1\cdot\Delta = \Sigma\delta\cdot\bar{P}_e\cdot\frac{P_e\cdot L}{A\cdot E}$$

$$\Delta := \frac{4220.3\,\frac{kip\cdot ft}{in^2}}{E} = 1.688\cdot in$$

13.6 Torsional and Flexural Deformation

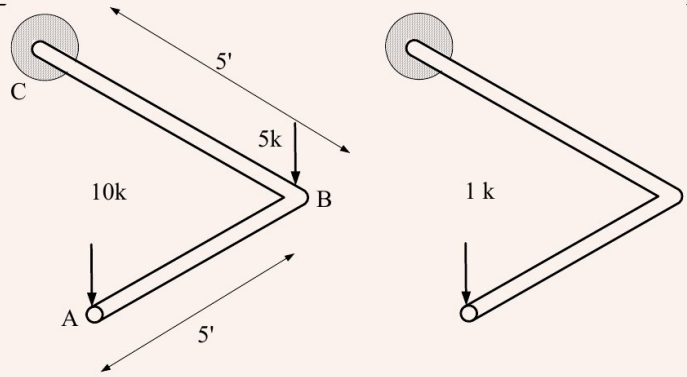
Determine the vertical deflection at A in the structure shown. $E := 30000ksi$, $I := 144in^4$, $G := 12000ksi$, $J := 288in^4$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. In this problem we have both flexural and torsional deformation. Hence we should determine the internal moment and torsion distribution for both the real and the unit virtual load.
2. Then we will use the following relation

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

3. The moment and torsion expressions are given by

Element	x = 0	M	δM	T	δT
AB	A	10x	x	0	0
BC	B	15x	x	50	5

4. Substituting

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta_A = \int \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx + \int \bar{\delta}\cdot\bar{T}\cdot\frac{T}{GJ}\,dx$$

$$1\cdot\Delta_A = \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{EI}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{EI}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{GJ}\,dx$$

$$\Delta_A(E,I,G,J) := \int_0^5 x\cdot\frac{10x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 x\cdot\frac{15x}{E\cdot I}\,dx + \int_0^5 5\cdot\frac{50}{G\cdot J}\,dx \rightarrow \frac{3125}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250}{G\cdot J}$$

$$\Delta_A := \frac{3125\,kip\cdot ft^3}{3\cdot E\cdot I} + \frac{1250\,kip\cdot ft^3}{G\cdot J} = 1.042\cdot in$$

13.7 Flexural and Shear Deformations in a Beam

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Determine the deflection of a cantilevered beam, of length L, subjected to an end force P due to both flexural and shear deformations. Assumed G=0.4E and a square solid beam cross section.

Solution:

1. The virtual work equation is

$$\bar{\delta}\cdot\bar{P}\cdot\Delta = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}\cdot(x)\cdot d\phi(x)\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}\cdot(x)\cdot\gamma_{xy}(x)\,dx = \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx + \int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx$$

2. The first integral yields for M=Px, and $\bar{\delta}\cdot M = 1\cdot x$

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\,dx = \frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx$$

$$\frac{P}{EI}\cdot\int_0^L x^2\,dx \rightarrow \frac{94280057135446.5\cdot N\cdot ft^3}{EI}$$

3. The second integral represents the contribution of the shearing action to the total internal virtual work and hence to the total displacement.

4. Both the real shear V and the virtual shear $\bar{\delta}\cdot\bar{V}$ are constant along the length of the member, hence

$$\int_0^L \bar{\delta}\cdot\bar{V}(x)\cdot\lambda\cdot\frac{V(x)}{GA}\,dx = \frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx$$

$$\frac{\lambda}{GA}\cdot\int_0^L 1\cdot(P)\,dx \rightarrow \frac{374606093684.841\cdot N\cdot GPa\cdot ft}{GA}$$

5. Since $\lambda := 1.2$ for a square beam; hence

$$I = \frac{h^4}{12} \quad \text{and} \quad A = h^2$$

then

$$\Delta = \frac{P\cdot L}{3\cdot E}\cdot\left(\frac{12L^2}{h^4} + \frac{9}{h^2}\right) = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left(\frac{1.33L^2}{h^2} + 1\right)$$

6. Choosing $L := 20ft$ and $h := 1.5ft$ (L/h=13.3)

$$\Delta = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot\left[1.33\cdot\left(\frac{20ft}{1.5ft}\right)^2 + 1\right] = \frac{3P\cdot L}{E\cdot h^2}\cdot(237 + 1)$$

Thus the flexural deformation is 237 times the shear displacement. This comparison reveals why we normally neglect shearing deformation in beams. As the beam get shorter or deeper, or as L/h decreases, the flexural deformation decreases relative to the shear displacement. At L/h=5, the flexural deformation has reduced to $1.33\cdot 5^2 = 33.25$ times the shear displacement.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

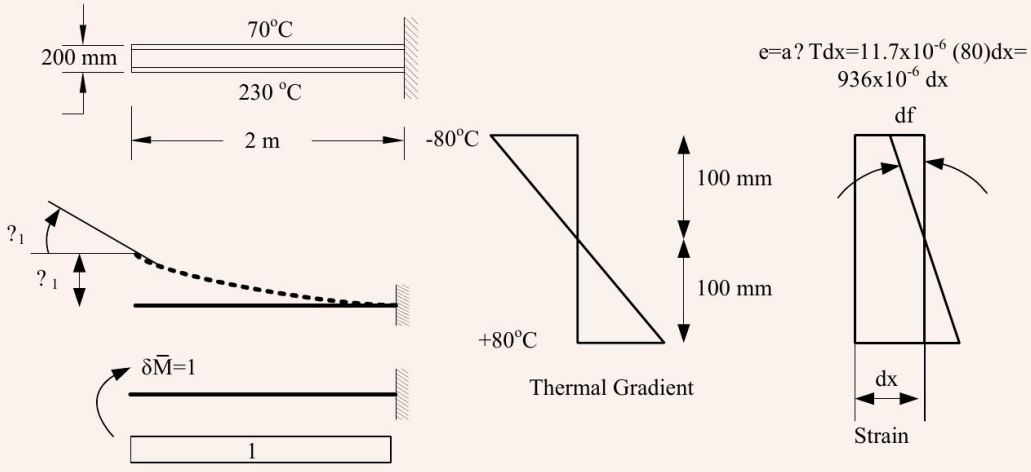
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.8 Thermal Effects in a Beam

Consider the cantilever beam shown. If the beam is a steel, wide flange section, 2 m long and 200 mm deep, what is the angle of rotation, θ_1, at the end of the beam caused by the temperature effect? The original uniform temperature of the beam was 40C.



Solution:

1. The external vurtual force conforming to the desired real displacement θ_1 is a moment $\delta\cdot\overline{M} = 1$ at the tip of the cantilever, producing an external work term of moment times rotation. The internal virtual force system for this cantilever beam is a uniform moment $\delta\cdot\overline{M_{int}} = 1$.
2. The real internal deformation results from (a) the average beam temperature of 150C, which is 110C above that of the original temperature, and (b) the temperature gradient of 160C across the depth of the beam.
3. The first part of the thermal effect produces only a lengthening of the beam and does not enter into the work equation since the virtual loading produces no axial force corresponding to an axial chnge in length of the beam.
4. The second effect (thermal gradient) produces rotation $d\phi$, and an internal virtual work term of $\int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$
5. We determine the value of $d\phi$ by considering an extreme fiber thermal strain as shown above. The angular rotation in the length dx is the extreme fiber thermal strain divided by half the beam depth.

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon}{y} = \phi$$

$$1\cdot\theta_1 = \int_0^L \delta\cdot\overline{M}\cdot\phi\, dx$$

$$\theta_1 = \int_0^L 1\cdot\frac{\alpha\cdot\left(T_B - T_T\right)}{h}\, dx$$

$$\theta_1 := \frac{11.7\cdot10^{-6}\,\frac{m}{m}\cdot(230 - 70)\cdot 2m}{0.2m} = 0.01872\cdot rad$$

6. This example raises the following points
   a) The value of θ_1 would be the same for any shape of 200 mm deep steel beam that has its neutal axis of bending at middepth

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

b) Curvature is produced only by thermal gradient and is independent of absolute temperature values.
c) The calculation of rotations by the method of virtual forces is simple and straightforward; the applied virtual force is a moment acting at a point where rotation is to be calculated.
d) Internal angular deformation $d\phi$ has been calculated for an effect other than load-induced stresses. This extension of the method of virtual forces to treat inelastic displacements is obvious - all we need to know is a method for determining the inelastic internal deformations.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

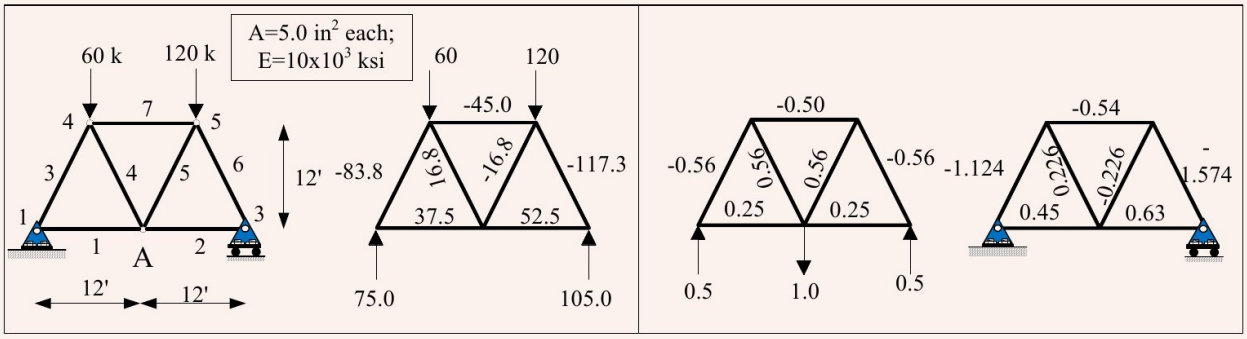
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.9 Deflection of a Truss

Determine the deflection at node 2 for the truss shown



Solution:

Member	δP kip	P^e kip	L ft	A in^2	E ksi	δPPL/AE
1	0.25	37.5	12	5	10×10^3	22.5×10^{-4}
2	0.25	52.5	12	5	10×10^3	31.5×10^{-4}
3	-0.56	-83.8	13.42	5	10×10^3	125.9×10^{-4}
4	0.56	16.8	13.42	5	10×10^3	25.3×10^{-4}
5	0.56	-16.8	13.42	5	10×10^3	-25.3×10^{-4}
6	-0.56	-117.3	13.42	5	10×10^3	176.6×10^{-4}
7	-0.5	-45	12	5	10×10^3	54×10^{-4}
Total						410.5×10^{-4}

The deflection is thus given by

$$\delta \cdot \bar{P} \cdot \Delta = \sum_{n=1}^{7} \left(\delta \cdot \bar{P}_e \cdot \frac{PL}{AE} \right)$$

$$\Delta := 410.5 \cdot 10^{-4} \cdot ft = 0.493 \cdot in$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

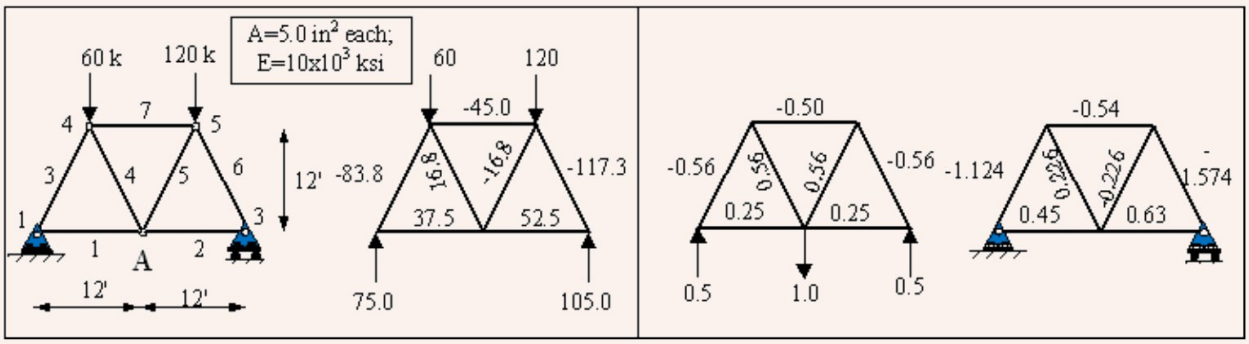
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.10 Thermal Deflection of a Truss; I

The truss shown is built such that the lower chords are shielded from the rays of the sun. On a summer day the lower chords are 30F cooler than the rest of the truss members. What is the magnitude of the vertical displacement at joint 2 as a result of this temperature difference?



Solution:

1. The virtual force system remains identical to that of the previous example because the desired displacement component is the same.
2. The real internal displacements are made up of the shortening of those members of the truss that are shielded from the sun.
3. Both the bottom chord members 1 and 2 thus shorten by

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\Delta L := \left(0.0000128 \frac{\text{in}}{\text{in} \cdot \Delta°\text{F}}\right)(30 \cdot \Delta°\text{F}) \cdot 12\text{ft} = 0.0553 \cdot \text{in}$$

4. Then,

$$1 \cdot \Delta = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P} \cdot \Delta L$$

$$\Delta := 0.25(-\Delta L) + 0.25(-\Delta L)$$

$$\Delta = -0.0276 \cdot \text{in}$$

5. The negative sign n the displacement indicates that it is in opposite sense of the displacement; the assumed direction is always identical to the direction of the applied virtual force.
6. Note that the same result would be obtained if we had considered the internal displacements to be made up of lengthening of all truss members above the bottom chord.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

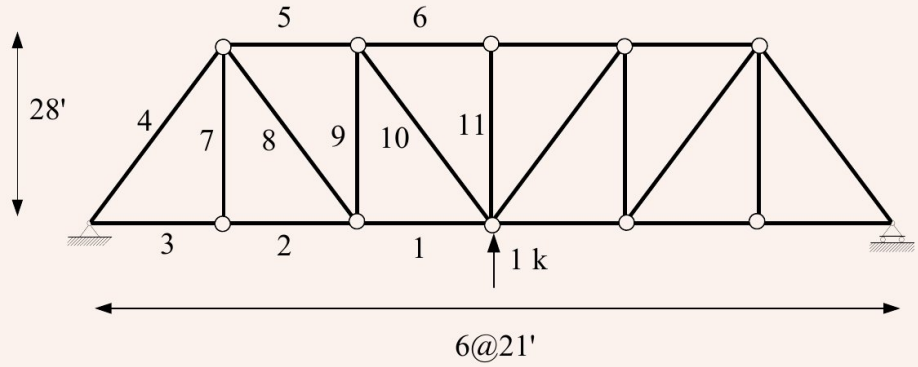
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.11 Thermal Deflection of a Truss; II

A six panel highway bridge is constructed with sidewalks outside the trusses so that the bottom chords are shaded. What will be the vertical deflection component of the bottom chord at the center of the bridge when the temperature of the bottom chord is 40F (ΔT) below that of the top chord, endposts, and webs? (coefficient of steel thermal expansion is $\alpha := 0.0000065 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$



Solution:

1. The deflection is given by

$$\Delta \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{P} = \int_0^L \bar{\delta} \cdot \bar{P} \cdot \frac{P}{AE}\, dx = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P}_i \cdot \frac{P_i \cdot L_i}{AE} = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P}_i \cdot \Delta L_i = \sum \bar{\delta} \cdot \bar{P}_i \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

where ΔL is the temperature change in length of each member, and $\bar{\delta} \cdot \bar{P}$ are the member virtual internal forces

2. Taking advantage of symmetry (Note that we ignor members 1-3 because we assumed that they had the reference temperature, and all other members are subjected to a relative temperature increase of 40F)

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
4	35	0.0091	0.625	0.00568
5	21	0.00546	0.75	0.00409
6	21	0.00546	1.13	0.00616
7	0	0	0	0
8	35	0.0091	-0.625	-0.00568
9	28	0.00728	0.5	0.00364
10	35	0.0091	-0.625	-0.00568
11	0	0	0	0
Total				0.00821

3. Hence the total deflection is

$$\Delta := 2 \cdot 0.00821\,ft = 0.197 \cdot in$$

4. A more efficient solution would have consisted in considering members 1, 2, and 3 only and applying ΔT=-40F, we would obtain

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

the same displacement.
5. Note that the forces in members 1, 2, and 3 (-0.75, -0.375, and -0.375 respectively) were not included in the table because the corresponding ΔT=0.
6. A simple solution would have $\Delta T := -40 \cdot \Delta°F$ in members 1, 2,and 3 thus

Member	L ft	αΔTL	δP kip	δPΔL
1	21	-0.00546	-0.75	0.004095
2	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
3	21	-0.00546	-0.375	0.0020475
Total				0.00819

$\Delta := 2 \cdot 0.00819 ft = 0.197 \cdot in$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

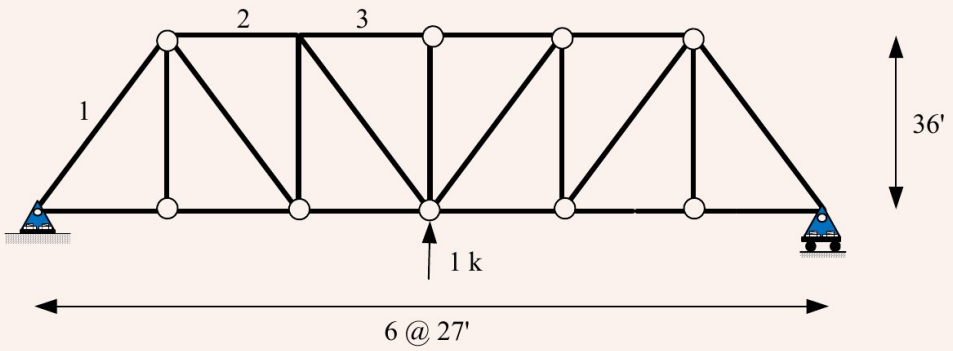
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.12 Truss with Initial Camber

It is desired to provide 3 in. of camber at the center of the truss shown below by fabricating the endposts and top chord members additionally long. How much should the length of each endpost and each panel of the top chord be increased?



Solution:

1. Assume that eachtop chord is increased 0.1 in.

Member	δP_{int} kip	ΔL in	$\delta P \Delta L$
1	0.625	0.1	0.0625
2	0.75	0.1	0.075
3	1.125	0.1	0.1125
Total			0.25

Thus,

$$2 \cdot 0.25\text{in} = 0.5 \cdot \text{in}$$

2. Since the structure is linear and elastic, the required increase of length for each section will be

$$\frac{3\text{in}}{0.5\text{in}} \cdot 0.1\text{in} = 0.6 \cdot \text{in}$$

3. If we use the practical value of 0.625in

$$\boxed{\frac{0.625\text{in} \cdot 0.5\text{in}}{0.1\text{in}} = 3.125 \cdot \text{in}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

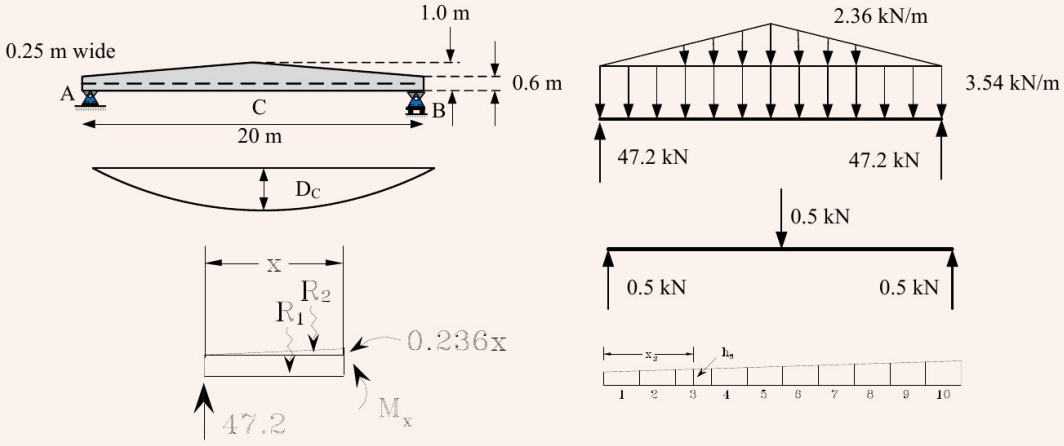
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

13.13 Prestressed Conrete Beam with Continuously Variable I

A prestressed concrete beam is made of variable depth for proper location of the straight pretensioning tendon. Determine the midspan displacement (point c) produced by the dead weight of the girder. The concrete weighs $w := 23.6\frac{kN}{m^3}$ and has $E := 25000MPa$. The beam is 0.25m wide.



Solution:

1. We seek an expression for the real moment M. This is accomplished by first determining the reactions and then considering the free body diagram.
2. We have the intermediary resultant forces

$$R_1(x) := 0.25m \cdot x \cdot 0.6m \cdot w \rightarrow \frac{3.54 \cdot kN \cdot x}{m}$$

$$R_2(x) := \frac{1}{2} \cdot 0.25m \cdot x \cdot \frac{0.4m}{10m} \cdot x \cdot w \rightarrow \frac{0.118 \cdot kN \cdot x^2}{m^2}$$

Hence,

$$M(x) := 47.2x - 3.54x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) - 0.118x^2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow 47.2 \cdot x + -0.039 \cdot x^3 + -1.77 \cdot x^2$$

3. The moment of inertia of the rectangular beam varies continuously and is given, for the left half of the beam, by

$$I(x) = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$I(x) := \frac{1}{12}\cdot(0.25)\cdot(0.6 + 0.04x)^3 \rightarrow 0.021\cdot(0.04\cdot x + 0.6)^3$$

4. Thus, the real angle changes produced by the dead load bending are

$$d\phi = \frac{M}{EI}\cdot dx = \frac{47.2\cdot x + -0.039\cdot x^3 + -1.77\cdot x^2}{E\cdot\left(\frac{1}{48}\right)\cdot(0.6 + 0.04x)^3}$$

5. The virtual force system corresponding to the desired displacement is shown above with $\delta\cdot\overline{M} = \frac{1}{2}\cdot x$ for the left half of the span.

Since the beam is symmetrical, the virtual work equations can be evaluated for only one half of the beam and the final answer is then obtained by multiplying the half-beam result by two.

6. The direct evaluation of the integral $\int \delta\cdot\overline{M}\, d\phi$ is difficult beause of the expression for dϕ. Hence we shall use a numerical procedure, replacing the $\int \delta\cdot\overline{M}\cdot\left(\frac{M}{EI}\right) dx$ with the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$, where each quantity in the summation is evaluated at the center of the interval Δx and held constant over the interval length. As Δx becomes very short, the solution approaches the exact answer.

7. An interval length of 1 meter, giving 10 elements in the half length of the beam, is chosen to establish an accurate result.

8. The internal virtual work quantity is then

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\, dx \sim \sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}\cdot\Delta x\right] = \sum \delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{E\left(\frac{0.25}{12}\right)\cdot h^3}\cdot\Delta x = \frac{48}{E}\cdot\sum\left[\delta\cdot\overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)}{h^3}\cdot\Delta x\right]$$

9. The summation for the 10 elements in the left half of the beam gives

Segment	x	h	h^3	M	δM	$M\delta M/h^3$
1	0.5	0.62	0.238	23.2	0.25	24
2	1.5	0.66	0.288	66.7	0.75	174
3	2.5	0.7	0.343	106.4	1.25	388
4	3.5	0.74	0.405	150	1.75	648
5	4.5	0.78	0.475	173	2.25	820
6	5.5	0.82	0.551	200	2.75	998
7	6.5	0.86	0.636	222	3.25	1134
8	7.5	0.9	0.729	238	3.75	1224
9	8.5	0.94	0.831	250	4.25	1279
10	9.5	0.98	0.941	256	4.75	1292
Total						7981

10. The SI units should be checked for consistency. Letting the virtual force carry the units of kN, the virtual moment has the

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

units of m-kN, and the units of the equation

$$\frac{1}{kN}\cdot\frac{(m\cdot kN)\cdot(m\cdot kN)}{\frac{MN}{m^2}\cdot m^4}\cdot m = \frac{m}{1000} = mm$$

11. Then

$$\int_0^L \frac{\delta\cdot\overline{M}\cdot M}{EI}\,dx$$

$$2\cdot\left(\frac{48}{25000}\right)\cdot 7981\cdot 1\cdot mm = 30.65\cdot mm$$

and the deflection at midspan is

$$\Delta_c := 30.65\ mm$$

12. Acceptably accurate results may be obtained with considerably fewer elements (longer intervals Δx). Using four elements with centers at 2, 5, 8, and 10, the $\sum \delta\cdot\overline{M}\left(\frac{M}{EI}\right)\Delta x$ is

$$3(174) + 3\cdot(820) + 3\cdot(1224) + 1\cdot(1292) = 7946$$

which is only 0.4% lower than the 10 element solution. If we go to two elements, 3 and 8, we obtain a summation of $5\cdot 388 + 5\cdot 1224 = 8060$ which is 1% high. A one element solution, with x=5m and h=0.8m, gives a summation of 9136 which is 14.4% high and much less accurate than the 2 element solution.

13. Finally, it should be noted that the calculations involved in this example are essentially identical to those necessary in the moment area method.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.1 Steel Building Frame Analysis

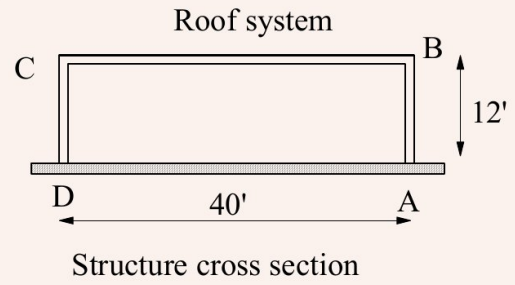
A small, mass-produced industrial building is to be framed in structural steel with a typical cross as shown below. The engineer is considering three different designs for the frame: (a) for poor or unknown soil conditions, the foundation for the frame may not be able to develop any dependable horizontal forces at its bases. In this case the idealized base conditions are a hinge at one of the bases and a roller at the other; (b) for excellent soil conditions with properly designed foundations, the base of the frame legs will have no tendency to move horizontally, and the idealized base condition is that of hinges at both points A and D; and (c) a design intermediate to the above cases, with a steel tie member capable of carrying only tension running between points A and D in the floor of the building. The foundations would not be expected to provide any horizontal restraint for this latter case, and the hinge-roller details at points A and D would apply. Critical design loads for a frame of this type are usually the gravity loads (deal load + snow load) and the combination of dead load and wind load. We will restrict our attention to the first condition, and will use a snow load of $S := 30\text{psf}$ and an estimated total dead load of $D := 20\text{psf}$. With frames spaced at $\text{spacing} := 15\text{ft}$ on centers along the length of the building, the design load is $w_{total} := \text{spacing}\cdot(S + D) = 750\cdot\frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$. If the frame is made of steel beam sections 21 in. deep and weight 62 lb/ft of length (W 21x62), and the member for design (c) is tentatively chosen as a 2 in^2 bar, determine the bending moment digrams for the three designs and discuss the alternate solutions

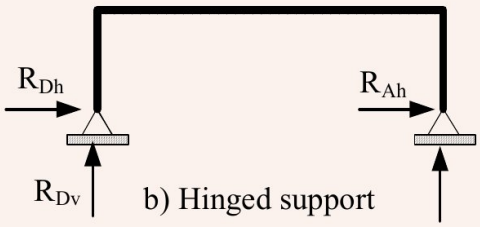
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

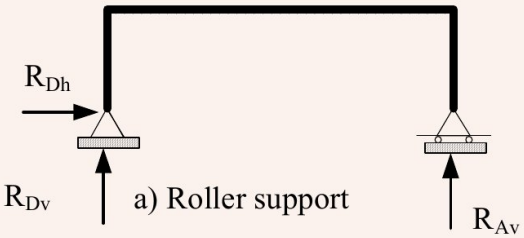
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

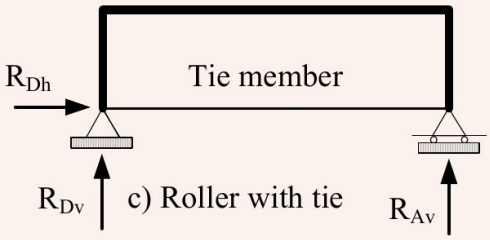
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



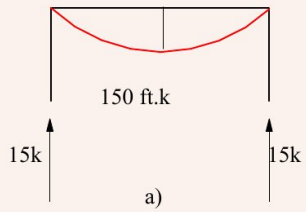


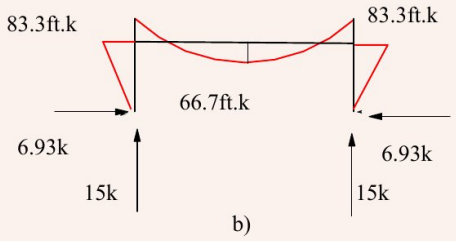


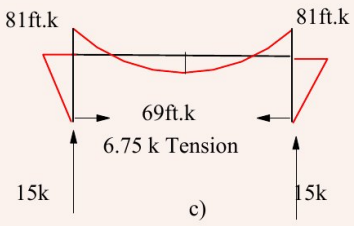


Solution:

Structure a This frame is statically determinate since it has three possible unknown external forces acting on it. Final bending moments are shown below.





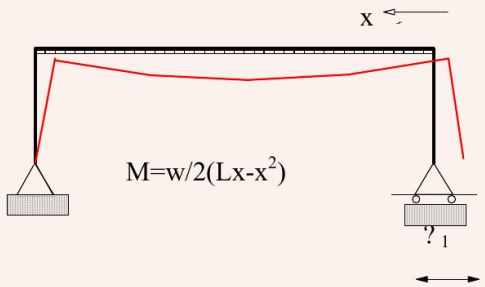


Structure b Hinging both legs of the frame results in another unknown force, making the structure statically indeterminate to the first degree (one redundant).
1. A lateral release at point A is chosen, with the redundant shearing force R1. The displacement Δ_1 in the primary structure, as a result of the real loading, shown in the figure below, is computed by virtual work.
2. The virtual force system produces virtual bending moment $\delta \cdot \overline{M}$, which is uniform across the top member of the frame.

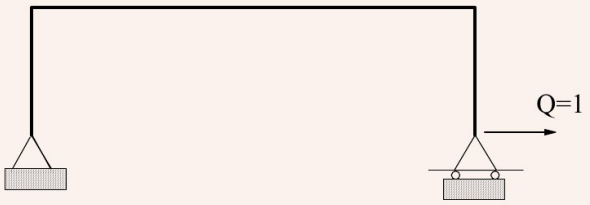
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

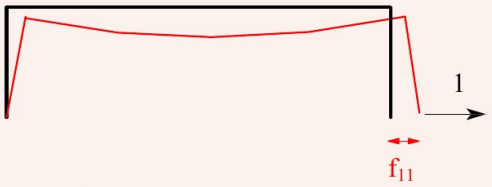
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



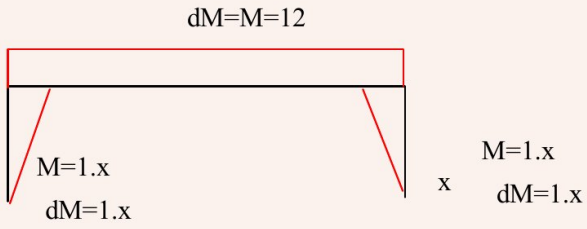
a) Moment caused by actual load on primary structure



b) Virtual forces



c) Real load for determining f_{11}



d) Moments produced by virtual forces and unit redundant

The virtual moment acting through the real angle changes given the internal work term

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} \delta\cdot\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}\,dx$$

3. Equating this to the external virtual work of $1\cdot\Delta_1$, we have

$$1\cdot\Delta_1 = \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3$$

$$\Delta_1(EI) := \int_0^{40} 12\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.75\left(40x - x^2\right)}{EI}\,dx\cdot kip\cdot ft^3 \rightarrow \frac{48000\cdot ft^3\cdot kip}{EI}$$

4. The equation of consistent displacement is $\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$. The flexibility coefficient f_{11} is computed by applying a unit horizontal force at the release and determining the displacement at the same point.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

5. It is seen that the real loading and the virtual loading are identical for the calculations, and

$$1 \cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right)$$

or

$$f_{11}(EI) := 2\left(\int_0^{12} x \cdot \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12 \cdot \frac{12}{EI}\,dx\right) \cdot kip \cdot ft^3 \rightarrow \frac{6912 \cdot ft^3 \cdot kip}{EI}$$

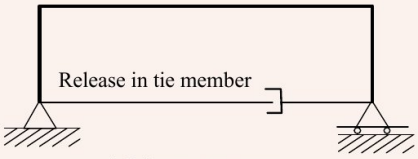
6. solving for R1

$$\frac{1}{EI} \cdot \left(48000 + 6912 R_1\right) = 0$$

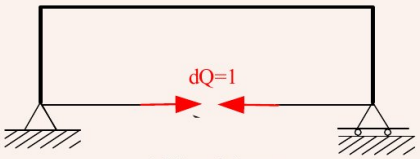
or

$$R_1 := \frac{48000}{6912} \cdot kip = 6.944 \cdot kip$$

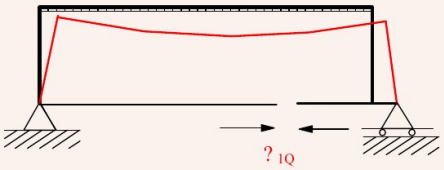
Structure c The frame with the horizontal tie between the points A and D has three unknown external forces. However, the structure is statically indeterminate to the first degree since the tie member provides one degree of internal redundancy.
1. The logical release to choose is a longintudinal release in the tie member, with the associated longitudinal displacement and axial force.
2. The primary structure is the frame with the tie member released.



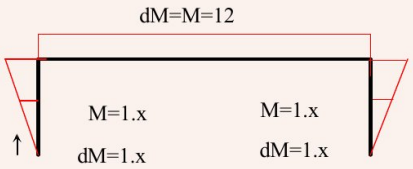
a) Primary structure



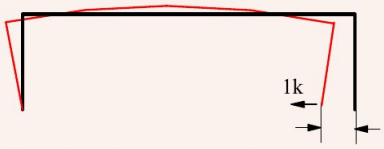
c) Virtual forces



b) Actual loading on primary structure



e) Moments produced by virtual forces and unit redundants



d) Real loading for computing f_{11} f_{11}

The compatability equation is based on the fact that the displacement at the release must be zero; that is, relative displacement of the two sections of the tie at the point of release must be zero, or

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

where

Δ_1 displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Δ_1 = displacement at release 1 in the primary structure, produced by the loading

f_{11} = relative displacement at release 1 for a unit axial force in the member

R_1 = force in the tie member in the original structure

3. Virtual work is used to determine both displacement terms.
4. The value of Δ_1 is identical to the displacement for structure (b) because the tie member has no forces (and consequently no deformation) in the primary structure. Thus,

$$\Delta_1 := \frac{48000\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} = 2.083\cdot\text{in}$$

5. The flexibility coefficient f_{11} is composed of two separate effects: a flexural displacement due to the flexibility of the frame, and the axial displacement of the stressed tie member. The virtual and real loadins for this calculation are shown in the previous figure.

$$1\cdot f_{11} = 2\left(\int_0^{12} x\cdot\frac{x}{EI}\,dx + \int_0^{20} 12\cdot\frac{12}{EI}\,dx\right) + \delta\cdot P\cdot\frac{PL}{EA}$$

$$1f_{11} = \frac{6912}{EI} + \frac{1\cdot 1\cdot 40}{EA}$$

$$f_{11} := \left(\frac{6912\text{kip}\cdot\text{ft}^3}{30000\text{ksi}\cdot 1327\text{in}^4} + \frac{40\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}}{30000\text{ksi}\cdot 2\text{in}^2}\right)\cdot\frac{1}{\text{kip}} = 0.308\cdot\frac{\text{in}}{\text{kip}}$$

6. The equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 = 0$$

or

$$R_1 := \frac{-\Delta_1}{f_{11}} = -6.764\cdot\text{kip}$$

7. The two displacement terms in the equation must carry opposite signs to account for their differences in direction.

Comments The bending moment in the frame differes only slightly from that of structure (b). In other words, the tie member has such high axial stiffness that it provides nearly as much restraint as the foundation of structure (b). Frames with tie members are used widely in industrial buildings. A lesson to be learned here is that it is easy to provide high stiffness through an axially loaded member.
The maximum moment in frames (b) and (c) is about 55% of the maximum moment in frame (a). This effect of continuity and redundancy is typical - the positive bending moments in the members are lowered while the joint moments are increased and a more economical design can be realized. Finally, we should notice that the vertical reactions at the bases of the columns do not change with the degree of horizontal restraint at the bases.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

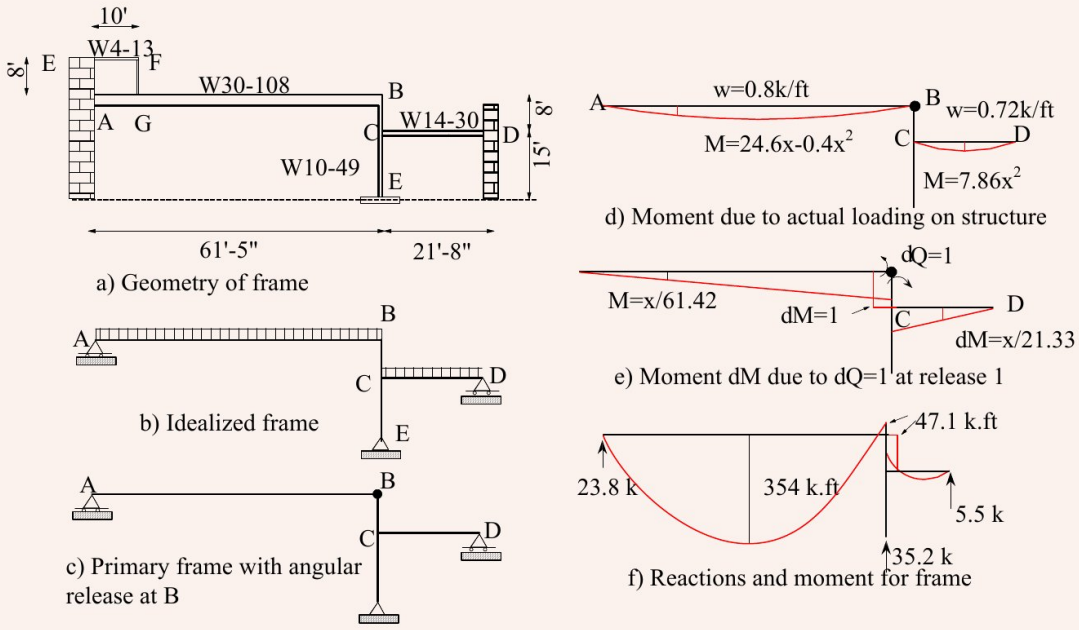
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.2 Analysis of Irregular Building Frame

The structural steel frame for the Church of the Holy Spirit, Penfield, New York is shown below. In this example we will discuss the idealization of the structure and then determine the forces and bending moments acting on the frame.



Solution:

1. The two main horizontal members of the frame are supported at points A and D by masonry walls.
2. The connection used at these points is not intended to transmit axial forces from the frame to the wall; accordingly, the axial forces in the horizontal members are assumed to be zero and the joints at A and D are idealized as rollers that transmit vertical forces only.
3. The base joint E is designed to resist both horizontal and vertical loads, but not moment, and is assumed to be a hinge.
4. Finally, joints B and C are designed to provide continuity and will be taken as rigid; that is, the angles of intersection of the members at the joint do not change with applied loading.
5. The frame is simplified for analysis by removing the small 4 in. wide flange members EF and FG and replacing their load effect by applying the roof load with acts on EF directly to the segment AG.
6. the idealized frame is shown above.
7. The dead load on the higher portion of the frame is $p_{AB} := 25\text{psf}$ times the frame spacing of $\text{spacing} := 13.33\text{ft}$, or

$w_{AB} := p_{AB} \cdot \text{spacing} = 333 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$ along the frame.

8. The dead load on CD is less beacuse the weight of the frame member is substantially smaller, and the dead load is about

$p_{CD} := 19\text{psf}$, or $w_{CD} := p_{CD} \cdot \text{spacing} = 253 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

9. Snow load is $S := 35\text{psf}$ over both areas, or $w_{Snow} := S \cdot \text{spacing} = 467 \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{ft}}$.

10. The total loads are then

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member AB: $w_{totAB} := w_{AB} + w_{Snow} = 0.8 \cdot \frac{kip}{ft}$

Member CD: $w_{totCd} := w_{CD} + w_{Snow} = 0.72 \cdot \frac{kip}{ft}$

11. the frame has four unknown reaction components and therefore has one redundant. Although several different releases are possible, we choose an angular (bending) release at point B.
12. The resulting primary structure is shown as (c) in the figure above, where the redundant quantitity R1 is the bending moment at point B.
13. The equation of compatability is

$$\theta_1 + f_{11} \cdot M_1 = 0$$

where θ_1 is the relative angular rotation corresponding to release 1 as produced by the actual loading, and f_{11} is the flexibility coefficient for a unit moment acting at the release.

14. From virtual work we have

$$1 \cdot \theta_1 = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

and

$$1 \cdot f_{11} = \int \delta\overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\, dx$$

where $\delta\overline{M}$ and M are defined in (e) in the figure above.

15. Then

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) := \left[\frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \frac{x}{61.42} \cdot \left(24.6x - 0.4x^2\right) dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \frac{x}{21.33} \cdot \left(7.68x - 0.36x^2\right) dx \right]$$

$$\theta_1(EI_{AB}, EI_{CD}) \rightarrow \frac{291.31658667}{EI_{CD}} + \frac{7763.6329512000000002}{EI_{AB}}$$

16. With $I_{AB} := 4470in^4$ and $I_{CD} := 290in^4$

$$\theta_1(E) := \left(\frac{291}{E \cdot I_{CD}} + \frac{7764}{E \cdot I_{AB}}\right) \cdot in^4 \rightarrow \frac{118411}{43210 \cdot E}$$

17. Similarly

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) := \frac{1}{EI_{AB}} \cdot \int_0^{61.42} \left(\frac{x}{61.42}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{CD}} \cdot \int_0^{21.33} \left(\frac{x}{21.33}\right)^2 dx + \frac{1}{EI_{BC}} \cdot \int_0^{8} (1)^2 dx$$

$$f_{11}(EI_{AB}, EI_{CD}, EI_{BC}) \rightarrow \frac{8}{EI_{BC}} + \frac{20.473}{EI_{AB}} + \frac{7.11}{EI_{CD}}$$

18. With $I_{BC} := 273in^4$

$$f_{11}(E) := \left(\frac{8}{E \cdot I_{BC}} + \frac{20.473}{E \cdot I_{AB}} + \frac{7.11}{E \cdot I_{CD}}\right) \cdot in^4 \text{ simplify } \rightarrow \frac{0.058}{E}$$

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $kip \cdot ft^2$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Note that the numerators of θ_1 and f_{11} have units of $\frac{}{in^4}$

19. Applying the compatability equation,

$$\frac{118411}{43210\cdot E}+\frac{0.058}{E}\cdot M_1 = 0$$

and the bending moment at point B is

$$M_1 := \frac{-\frac{118411}{43210\cdot E}}{\frac{0.058}{E}}\cdot kip\cdot ft = -47.248\cdot kip\cdot ft$$

The reactions and moments in the structure are given in (f) in the figure above.

20. Once we have M_1, the structure is by now statically determinate and from statics we can complete the shear and moment diagrams.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

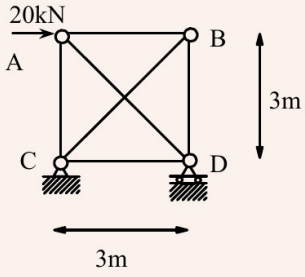
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

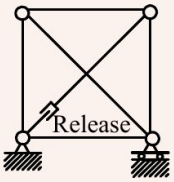
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.3 Redundant Truss Analysis

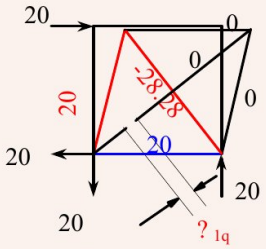
Determine the bar forces in the steel truss shown below using the flexibility method. The truss is part of a supporting tower for a tank, and the 20 kN horizontal load is produced by wind loading on the tank.



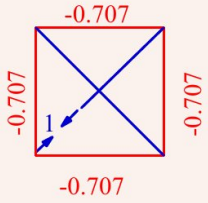
a) Original Structure



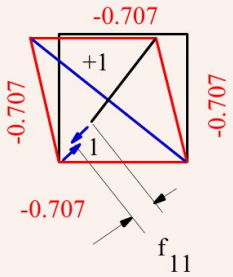
b) Primary structure



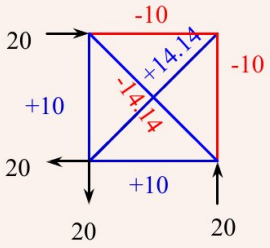
c) Primary structure subjected to real load



d) Virtual load on primary structure



e) Action of unit force corresponding to redundant R_1



f) Final results

Solution:

1. Applying the criteria for indeterminancy $2 \cdot 4 = 8$ equations, 6 members + 3 reactions => one degree of indeterminancy. A logitudnial release in any of the six bars may be chosen.
2. Because the truss members carry only axial load, the longitudinal release is identical to actually cutting the member and removing its axial force capability from the truss.
3. In analyzing the trusses with double diaganols it is both convenient and customary to select the release in one of the diganol members because the resulting primary structure will be the conventional truss to which we are accustomed.
4. Choosing the diagonal member BC for the release, we cut it and remove its axial stiffness from the structure. The primary structure is shown in (b) in the figure above.
5. The analysis problem reduces to applying an equation of compatability to the changes in length of the release member. The relative displacement Δ_1 of the two cut ends of member BC, as producued by the real loading, is shown in (d) in the figure above.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. The displacement is always measured along the length of the redundant member, and since the redundant is unstressed at this stage of the analysis, the displacement Δ_1 is equal to the relative displacement of joint B with respect to joint C.
7. This displacement must be eliminated by the relative displacements of the cut ends of member BC when the redundant force is acting on the member. The latter displacement is written in terms of the axial flexibility coefficient f_{11}, and the desired equation of consistent deformation is

$$\Delta_1 + f_{11} \cdot R_1 = 0$$

8. The quantity Δ_1 is given by

$$1 \cdot \Delta_1 = \sum \bar{\delta \cdot P} \left(\frac{PL}{AE} \right)$$

where $\bar{\delta \cdot P}$ and P are given in (d) and (e) in the figure above, respectively

9. Similarly,

$$f_{11} = \sum \bar{\delta \cdot P} \left(\frac{\bar{P} \cdot L}{AE} \right)$$

10. Evaluating these summations in tabular form:

Member	P kN	δP kN	L m	δPPL	δPPL
AB	0	-0.707	3	0	1.5
BD	0	-0.707	3	0	1.5
CD	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AC	20	-0.707	3	-42.42	1.5
AD	-28.28	1	4.242	-119.96	4.242
BC	0	1	4.242	0	4.242
Total				-204.8	14.484

11. Since A = constant for each member

$$\Delta_1 = \sum \bar{\delta \cdot P} \left(\frac{PL}{AE} \right) = \frac{-204.8}{AE} \cdot kN^2 \cdot m \quad \text{and} \quad f_{11} = \frac{14.484}{AE} \cdot kN^2 \cdot m$$

then

$$\frac{1}{AE} \cdot \left(-204.8 + 14.484 \cdot R_1 \right) = 0$$

12. the solution for the redundant force value is $R_1 := \frac{204.8}{14.484} \cdot kN = 14.14 \cdot kN$
13. The final values for forces in each of the truss members are given by superimposing the forces due to the redundant and the forces due to the real loading.
14. The real loading forces are shown in (c) in the figure above, while the redundant force effect is computed by multiplying the member forces in (d) in the figure above by 2.83, the value of the redundant.

Member	δP kN	R_1δP kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	28.28	14.14

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

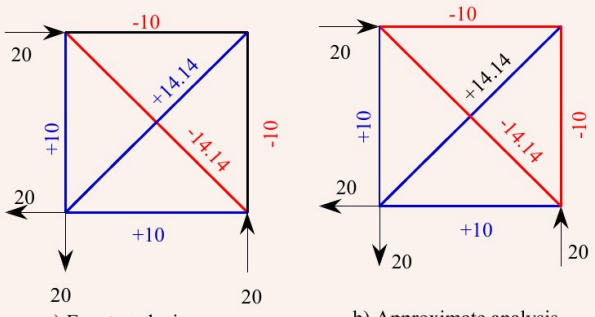
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	δP kN	$R_1\delta P$ kN	P kN	P_{total} kN
AB	-0.707	-10	0	-10
BD	-0.707	-10	0	-10
CD	-0.707	-10	20	10
AC	-0.707	-10	20	10
AD	1	14.14	-28.28	-14.14
BC	1	14.14	0	14.14

15. It is informative to compare the member forces from this solution to the approximate analysis obtained by assuming that the double diagonals each carry half the total shear in the panel. The comparison is given in the figure below



a) Exact analysis

b) Approximate analysis

It reveals that the approximate analysis is the same as the exact analysis for this particular truss. The reason for this is that the stiffness provided by each of the diagonal members (against "shear" deformation of the rectangular panel) is the same, and therefore they each carry an equal portion of the total shear accross the panel.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.4 Truss with Two Redundants

Another panel with a second redundant member is added to the truss of the preceeding example

Solution:

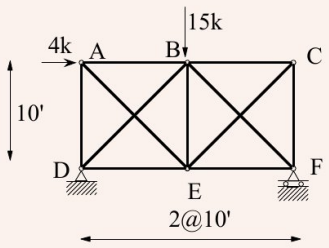
1. The twice redundant truss is converted to a determinate primary structure by releasing two members of the truss; we choose two diagonals (DB and BF).
2. Releasing both diagonals in a single panel, such as members AE and DB, is inadmissible since it leads to an unstable truss form.
3. The member forces and required displacements for the real loading and for the two redundant forces in members DB and BF are given in the figure below.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

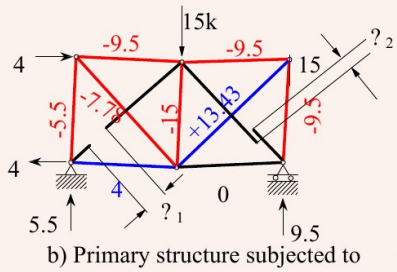
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

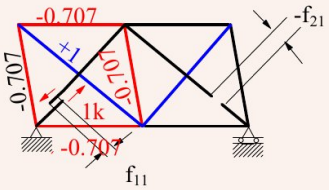
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



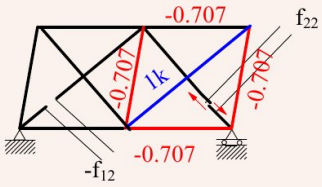
a) Original structure; all A=4 in^2



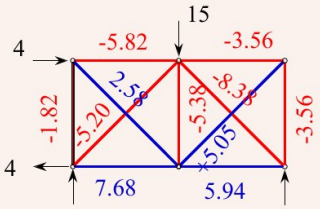
b) Primary structure subjected to real load



c) Action to unit force R_1=1



d) Action of unit force R2=1



e) Final results

4. Although the rela loading ordinarily stresses all members of the entire truss, we see that the unit forces corresponding to the redundant stress only those members in the panel that contain the redundant; all other bar forces are zero.
5. Recognizing this fact enables us to solve the double diagonal truss problem more rapidly than a frame with multiple redundants.
6. The virtual work equations for computing the six required displacements (two due to load and four flexibilities) are

$$1\cdot\Delta_1 = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot\Delta_2 = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{PL}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{11} = \sum \delta\cdot\overline{P}_1\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$$1\cdot f_{21} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_1\cdot L}{AE}\right)$$

$f_{12} = f_{21}$ by reciporocal theorem

$$1\cdot f_{22} = \sum \delta\cdot\overline{P}_2\left(\frac{\overline{P}_2\cdot L}{AE}\right)$$

7. If we assume tension in a truss member as positive, use tensile unit loads when computing the flexibility coeeficients corresponding to the redundants, and let all displacement terms carry their own signs, then in the for the redundants a positive value of force indicates tension while a negative value menas the member is in compression.
8. The calculation of f_{22} involves only the six members in the left panel of the truss; f_{21} invloves only member BE.
9. The simple used for performing the displacement analyses, as summarized in tabular form, leads one quickly to the compatability equations which state that the cut ends of both redundant members must match (there can be no gaps or overlaps of members in the actual structure).

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Member	P	P_1	P_2	Δ_1	Δ_1	f_{11}	f_{21}	f_{22}
				$\delta P_1 PL$	$\delta P_2 PL$	$\delta P_1 P_1 L$	$\delta P_2 P_1 L$	$\delta P_2 P_2 L$
AB	-9.5	-0.707	0	806	0	60	0	0
BC	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
CF	-9.5	0	-0.707	0	806	0	0	60
EF	0	0	-0.707	0	0	0	0	60
DE	4	-0.707	0	-340	0	60	0	0
AD	-5.5	-0.707	0	466	0	60	0	0
AE	7.78	1	0	1322	0	170	0	0
BE	-15	-0.707	-0.707	1272	1272	60	60	60
CE	13.43	0	1	0	2280	0	0	170
BD	0	1	0	0	0	170	0	0
BF	0	0	1	0	0	0	0	170
Total				3528	5164	580	60	580

10. The equations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

or

$$\frac{1}{AE}\cdot\begin{pmatrix}580 & 60\\ 60 & 580\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\end{pmatrix} = \frac{-1.}{AE}\cdot\begin{pmatrix}3528\\ 5164\end{pmatrix}$$

11. The final set of forces in the truss is obtained by adding up, for each member, the three separate effects. In terms of the forces shown in the figure above, the force in any member is given by $F = P + R_1\cdot\overline{P_1} + R_2\cdot\overline{P_2}$

Member	P	P_1	P_2	R_1P_1	R_2P_2	P_{total}
AB	-9.5	-0.707	0	3.676	0	-5.82
BC	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
CF	-9.5	0	-0.707	0	5.925	-3.56
EF	0	0	-0.707	0	5.925	5.94
DE	4	-0.707	0	3.676	0	7.68
AD	-5.5	-0.707	0	3.676	0	-1.82
AE	7.78	1	0	-5.2	0	2.58
BE	-15	-0.707	-0.707	3.676	5.925	-5.38
CE	13.43	0	1	0	-8.38	5.05
BD	0	1	0	-5.2	0	-5.2
BF	0	0	1	0	-8.38	-8.38

14.5 Analysis of Nonprismatic Members

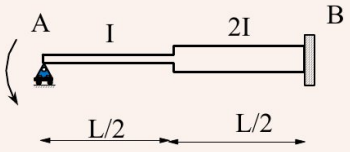
The nonprismatic beam is loaded with an end moment M_A at its hinged end A. Determine the moment induced at the fixed end B by this loading.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

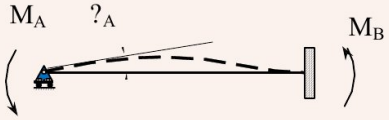
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



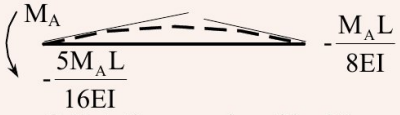
a) Beam with end B fixed



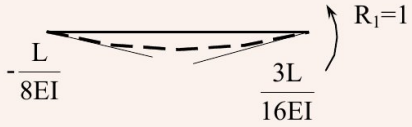
b) Elastic curve



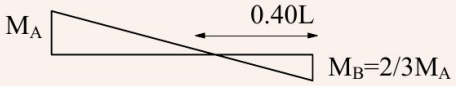
c) Primary structure



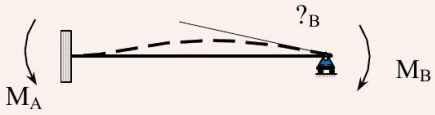
d) Rotations produced by M_A



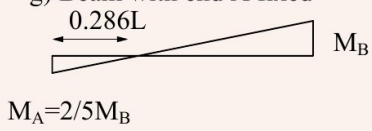
e) Rotations produced by a unit value of redundant R_1



f) Moment diagram for A hinged, B fixed



g) Beam with end A fixed



h) Moment diagram for A fixed, B hinged

Solution:

1. The beam has one redundant force; we select M_B as the redundant R_1, and obtain the primary structure shown in the figure above. It can be shown that the flexibility coefficients for unit moments applied at each end are those in (d) and (e) in the figure above, with a sing convention of counterclockwise as positive.
2. The equation of consistent displacement at B is

$$\frac{-M_A \cdot L}{8E \cdot I} + \frac{3}{16} \cdot \frac{L}{E \cdot I} \cdot R_1 = 0$$

and the value of M_B is

$$M_B = R_1 = \frac{2}{3} \cdot M_A$$

3. The resulting moment diagram is given in (f). We note that the inflection point is 0.4L from the fixed end. If the beam had a uniform value of I across its span, the inflection point would be L/3 from the fixed end. Thus the inflection point shifts toward the section of reduced stiffness.
4. The end rotation θ_A is given by

$$\theta_A = \frac{5}{16} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot M_A \right) \cdot \frac{L}{E \cdot I} = \frac{11}{48} \cdot \frac{M_A \cdot L}{E \cdot I}$$

5. The ratio of the applied end moment to rotation $\frac{M_A}{\theta_A}$ is called the rotational stiffness and is

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{48}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

6. If we now reverse the boundary conditions, making A fixed and B hinged, and repeat the analysis for an applied moment M_B, the resulting moment diagram will be as given in (h) in the above figure. The moment induced at end A is only 40% of the applied end moment M_B. The inflection point is 0.286L from the fixed end A. The corresponding end rotation θ_B in (g) in the figure above is

$$\theta_B = \frac{11}{80}\cdot\frac{M_B\cdot L}{E\cdot I}$$

7. The rotational stiffness $\frac{M_B}{\theta_B}$ is

$$\frac{M_A}{\theta_A} = \frac{80}{11}\cdot\frac{E\cdot I}{L}$$

8. A careful comparison of the rotational stiffnesses, and of the moment diagrams in (f) and (h) in the figure above, illustrate the fact that flexural sections of increased stiffness attract more moment, and that inflection points always shift in the direction of decreased stiffness.
9. The approach illustrated here may be used to determine moments and end rotations in any type of non-prismatic member. The end rotations need in the force analysis may be calculated by either virtual work or moment area (or by other methods). Complex variations in EI are handles by numerical integration of the virtual work equation or by approximating the resultant M/EI area and their locations in the moment area method.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.6 Fixed End Moments for Nonprismatic Members

The beam of the previous example

Solution:

1. The beam has two redundant forces and we select M_A and M_B. Releasing these redundants, R_1 and R_2, we obtain the primary sturcture.
2. The equations of consistent deformations are

$$\Delta_1 + f_{11}\cdot R_1 + f_{12}\cdot R_2 = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}\cdot R_1 + f_{22}\cdot R_2 = 0$$

where R_1 is M_A and R_2 is M_B.

3. The values of Δ_1 and Δ_2, the end rotations produced by the real loading on the primary structure, can be computed by the virtual work method.
4. The flexibility coefficients are also separately derived (not yet in these notes)
5. We define counterclockwise end moments and rotations as positive and obtain

$$\frac{L}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{16} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-1}{8} & \frac{3}{16}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}R_1\\ R_1\end{pmatrix} = \frac{w\cdot L^3}{E\cdot I}\cdot\begin{pmatrix}-0.352\\ 0.0273\end{pmatrix}$$

from which

$$\boxed{R_1 = M_A = 0.0742 w\cdot L^2}$$

$$\boxed{R_2 = M_B = -0.0961 w\cdot L^2}$$

6. The stiffer end of the beam attracts 30% more than the flexible end.
7. For a prismatic beam with constant I, the fixed end moments are equal in magnitude ($M_A = -M_B = \frac{w\cdot L^2}{12}$) and intermediate in value between the two end moments determiend above.
8. Fixed end moments are an essential part of indeterminate analysis based on the displacement (stiffness) method and will be used exclusively in the Moment Distribution method.

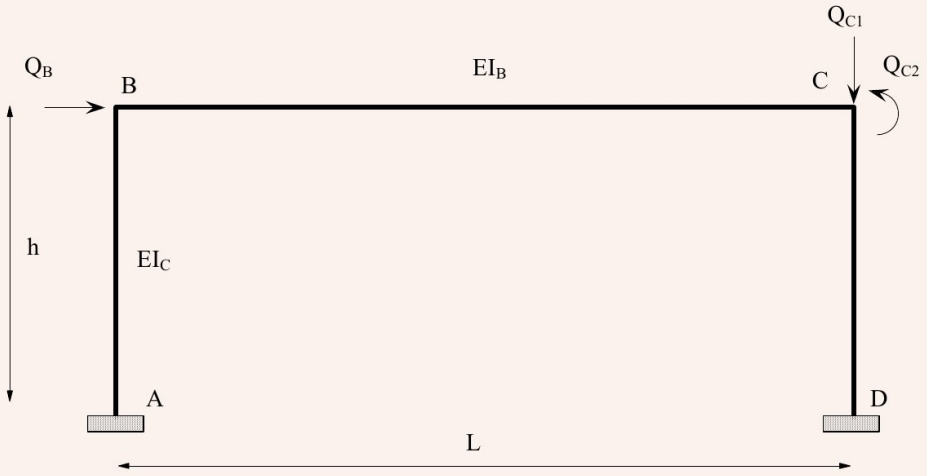
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

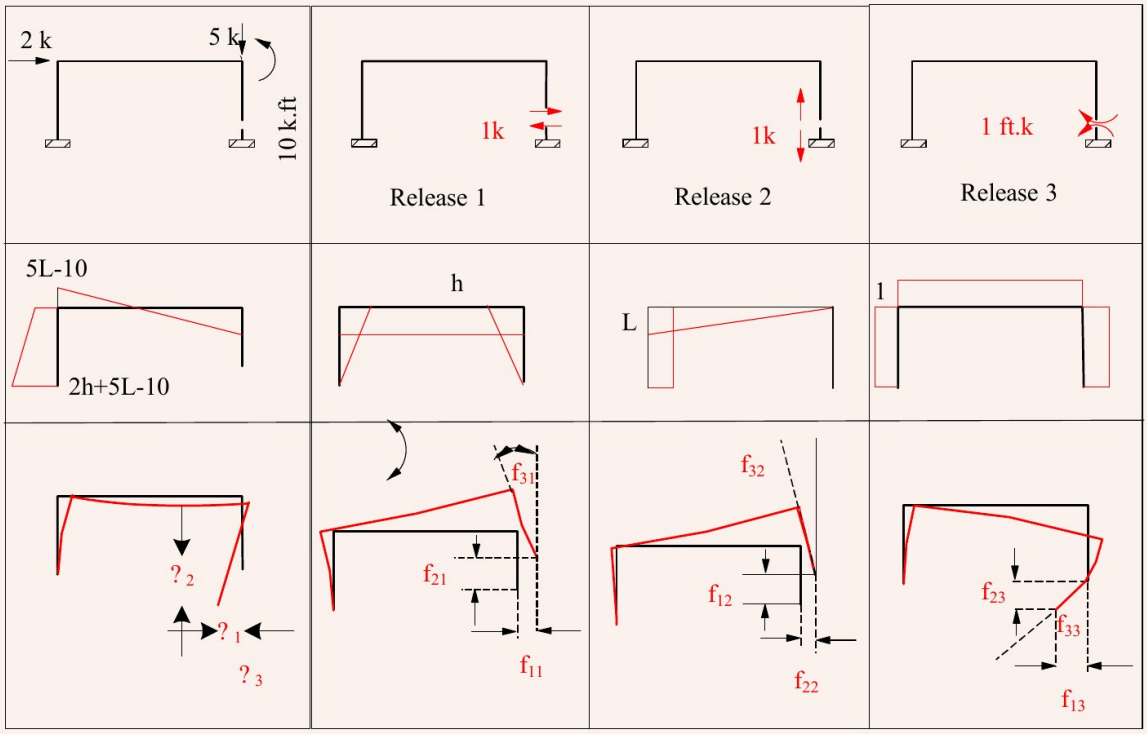
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.7 Rectangular Frame; External Load



Solution:

1. The structure is statically indeterminate to the third degree, and the displacements (flexibility terms) are shown in the figure above.
2. In order to evaluate the 9 flexibility terms, we refer tot he table.



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

3. Substituting $h := 10ft$, $L := 20ft$, and $EI_B = EI_C = EI$, the flexibility matrix then becomes

$$f = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} 2667 & 3000 & -300 \\ 3000 & 6667 & -400 \\ -300 & -400 & 40 \end{pmatrix}$$

and the vector of displacements for the primary structure is

$$\Delta = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

where the units are kips and feet.

4. The inverse of the flexibility matrix is

$$f^{-1} = 10^{-3}\cdot EI\cdot\begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix}$$

5. Hence the reactions are determined from

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} := 10^{-3}\cdot EI\cdot\begin{pmatrix} 2.4 & 0 & 18 \\ 0 & 0.375 & 3.75 \\ 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix}\cdot\left[\frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -12833 \\ -31333 \\ 1800 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{pmatrix} 1.601 \\ -5 \\ 7.007 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

14.8 Frame with Temperature and Support Displacements

The single bay frame, of the previous example, has a height $h := 10\text{ft}$ and span $L := 20\text{ft}$ and its two supportsrigidly connected and is constructed of reinforced concrete. It supports a roof and wall partitions in such a manner that linear temperature variation occurs across the depth of the frame members when inside and outside temperatures differ. Assume the member depth is constant at 1 ft, and that the structure was built with fixed bases A and D at a temperature of 85F. The temperature is now 70F inside and 20F outside. We wish to determine the reactions at D under these conditions. Assume that the coefficient of linear expansion of reinforced concrete is $\alpha := 0.0000055 \cdot \frac{1}{\Delta°F}$.

Solution:

1. Our analysis proceeds as before, with the [D] vector interpreted appropriately. The three releases shown in the previous example, will be used.
2. The first stage in the analysis is the computation of the relative displacements $\Delta_{1\Delta}, \Delta_{2\Delta}, \Delta_{3\Delta}$, of the primary structure caused by temperature effects. These diaplcements are caused by two effects: axial shortening of the members because of the drop in average temperature (a middepth of the members), and curvature of the members because of the temperature gradient.
3. In the following discussion the contributions to the displacements due to the axial strain are denoted with a single prime (') and those due to curvature by a double prime (").
4. Consider the axial strain first. A unit length of frame member shortens as a result of the temperature decrease from 85F to 45F at the midepth of the member. the strain is therefore

$$\alpha\Delta T := \alpha \cdot 40 \cdot \Delta°F = 0.00022$$

5. The effect of axial strain on the relative displacements needs little analysis. The horizontal member shortens by an amount $\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = 0.0044 \cdot \text{ft}$. The shortening of the vertical members results in no relative displacement in the vertical direction. No rotation occurs.
6. We therefore have $\Delta'_{1\Delta} := -\alpha\Delta T \cdot 20\text{ft} = -0.0044 \cdot \text{ft}$, $\Delta'_{2\Delta} := 0\text{ft}$, and $\Delta'_{3\Delta} := 0\text{rad}$
7. The effect of curvature must also be considered. A frame element of length dx undergoes an angular strain as a result of the temperature gradient. The change in length at an extreme fiber is

$$\varepsilon(dx) := \alpha \cdot 25 \cdot \Delta°F \cdot dx \rightarrow 0.0001375 \cdot dx$$

8. With the resulting real rotation of the cross section

$$d\phi(dx) := \frac{\varepsilon(dx)}{0.5} \cdot \text{rad} \rightarrow 0.000275 \cdot dx \cdot \text{rad}$$

9. The relative displacements of the primary structure at D are found by the virtual force method.
10. A virtual force $\delta \cdot \overline{Q}$ is applied in the direction of the desired displacement and the resulting moment diagram $\delta \cdot \overline{M}$ determined.
11. The virtual work equation

$$\delta \cdot \overline{Q} \cdot \Delta = \int \delta \cdot \overline{M}\, d\phi$$

is used to obtain each of the desired displacements at D.
12. The results, which you should verify, are

$$\Delta''_1 := 0.0828\text{ft}$$

$$\Delta''_2 := 0.1104\text{ft}$$

$$\Delta''_3 := -0.01104\text{rad}$$

13. Combining the effects of axial and rotational strain, we have

$$\Delta_1 := \Delta'_{1\Delta} + \Delta''_1 = 0.0784 \cdot \text{ft}$$

$$\Delta_2 := \Delta'_{2\Delta} + \Delta''_2 = 0.1104 \cdot \text{ft}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$\Delta_3 := \Delta'_{3\Delta} + \Delta''_3 = -0.01104 \cdot \text{rad}$

14. We now compute the reduntants caused by temperature effects

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0784 \\ -0.1104 \\ 0.01104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0106 \\ 0.355 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

where the units are kips and feet.

15. You should construct the moment diagram for the structure using the values of the redundant found in the analysis.
16. Notice the stiffness term EI does not cancel out in this case. Internal forces and reactions in a statically indeterminate subject to effects other than loads (such as temperature) are dependent on the actual stiffnesses of the structure.
17. The effects of axial strain caused by forces in the members have been neglected in this analsis. This is usual for low frames where bending strain dominates behavior. To illustrate the significance of this assumption, consider member BC. We have found $R_1 = 10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$. The tension in BC has this same value, resulting in a strain for the member of $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{EI}{EA}$ .For a rectangular member, $\frac{I}{A} = \frac{b \cdot d^3}{12 \cdot bd} = \frac{d^2}{12}$. In our case d=1ft, therefore the axial strain is $10.6 \cdot 10^{-6} \cdot (0.0833) = 8.83 \times 10^{-7}$, which is several orders of magnitude smaller than the temperature strain computed for the same member. We may therefore rest assured that neglecting axial strain caused by forces does not affect the values of the redundants in a significant manner for this structure.
18. Now considert the effects of foundation movement on the same structure. The intermediate frame behavior depends on a structure that we did not design: the earth. The earth is an essential part of nearly all structures, and we must understand the effects of foundation behavior on structural behavior. for the purposes of this example, assume that a foundation has revealed the possibility of a clockwise rotation of the support at D of 0.001 radians and a downward movement of the support at D of 0.12 ft. We wish to evaluate the redundants R_1, R_2, and R_3 caused by this foundation movement.
19. No analysis is needed to determine the values of $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, and $\Delta_{3\Delta}$ for the solution of the redundants. These displacements are found directly from the support movements, with proper consideration, of the originally chosen sign convention which defined the positive direction of the relative displacements. From the given support displacements, we find $\Delta_{1\Delta} := 0$, $\Delta_{2\Delta} := 0.12\text{ft}$, and $\Delta_{3\Delta} := 0.001\text{rad}$. Can you evaluate these quantities for a casr in which the displacements occured at A instead of D?
20. The values of the redundants is given by

$$R = f^{-1} \cdot (-\Delta)$$

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = 10^{-3} \cdot EI \cdot \begin{pmatrix} 18 & 3.75 & 197.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.12 \\ 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -252.5 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot EI$$

with units in kips and feet.

21. A moment diagram may now be constructed, and other internal force quantities computed from the now known values of the redundants. The redundants have been evaluated separately for effects of temperature and foundation settlement. These effects may be combined with those due to loading using the principle of superposition.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

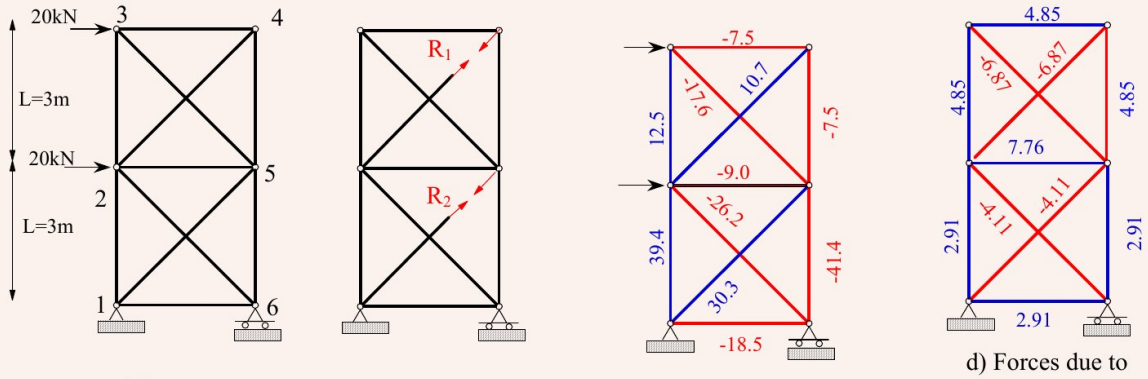
14.9 Braced Bent with Loads and Temperature Change

The struss shown below represents an internal braced bent in an enclosed shed, with lateral loads of 20 kN at the panel points. A temperature drop of 30C may occur on the other members (members 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, and 5-6). We wish to analyze the truss for loading and for temperature effects.

Solution:

1. The first step in the analysis is the definition of the two redundants. The choice of forces in diagonals 2-4 and 1-5 as redundants facilitates the computations because some of the load effects are easy to analyze.
2. The computations are organized in tabular form in Table ??. The first column gives the force in each bar caused by a unit load (1 kN) corresponding to release 1. These are denoted p_i and also represent the bar force $\frac{\overline{q_1}}{\delta\cdot\overline{Q_1}}$ caused by a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ applied at the same location. Column 3 lists the same quantitiy for a unit load and for a virutal force $\delta\cdot\overline{Q_2}$ applied at release 2. These three columns constitute a record of the truss analysis needed for this problem.

Verticals: 500 mm^2 ; Webs: 250 mm^2; E=200,000 N/mm^2; a=1.0x10^{-5}/ ºC



a) Structure b) Redundant forces c) Forces due to lateral load d) Forces due to temperature drop

3. Column 4 gives the value of L/EA for each bar in terms of L_c/EA_c of the vertical members. This is useful because the term L/EA cancels out in some of the calculations.
4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1p} and Δ_{2p} corresponding to the releases and

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The method of virtual work is applied directly to compute the displacements Δ_{1Q} and Δ_{2Q} corresponding to the releases and caused by the actual loads. Apply a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at release 1. The internal virtual forces $\overline{q_1}$ are found in column 2. The internal virtual work $\overline{q_1}\cdot\Delta l$ is found in column 5 as the product of columns 1, 2 and 4. The summation of column 5 is $\Delta_{1q} = -122.42\cdot\frac{L_c}{EA_c}$. Similarly, column 6 is the product of columns 1, 3, and 4, giving $\Delta_{2q} = -273.12\cdot\frac{L_c}{EA_c}$.

5. The same method is used to compute the flexibilities. In this case, the real loading is a unit load corresponding to release 1 leading to f_{11} and f_{21}, and then to release 2 leading to f_{12} and f_{22}. Column 7 shows the computation for f_{11}. It is the product of column 2, representing force due to the real unit load with column 2 representing force due to a virtual force $\delta\cdot\overline{Q_1}$ at the same location (release 1) multiplied by column 4 to include the L_c/EA_c term. Column 8 derives from columns 2, 3, and 4 and leads to f_{21}. Columns 9 and 10 are the computations for the remaining flexibilities.

6. We have assumed that a temperature drop of 30C occurs in the outer members. The corresponding length changes are found in column 11. Again using the virtual work method, column 12 tabulates the internal virtual work of th virtual forces through displacements Δl where for each bar, $\Delta l = \alpha l \Delta T$. Column 12 is therefore the product of columsn 2 and 11. The summation of the elements of column 12 is the displacement Δl corresponding to release 1. Column 13 repeats this process for Δ_2 corresponding to release 2.

7. The tabulated information provides the necessary terms for a matrix solution of the problem. We have

$$f = \begin{pmatrix} 8.66 & 1 \\ 1 & 8.66 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta q = \begin{pmatrix} -122.42 \\ -273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c}$$

$$\Delta_\Delta = \begin{pmatrix} 6.36 \\ 4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c$$

therefore

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 0.117 & -0.0134 \\ -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}$$

8. The redundant forces due to the applied load are

$$R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_Q\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} 122.42 \\ 273.12 \end{pmatrix}\cdot\frac{L_c}{EA_c} = \begin{pmatrix} 10.66 \\ 30.32 \end{pmatrix}$$

9. Thus $R_1 = 10.66\text{kN},\ R_2 = 30.32\text{kN}$

10. The redundant forces due to the temperature drop are $R = f^{-1}\cdot\left(-\Delta_\Delta\right)$

$$R = \begin{pmatrix} -0.0134 & 0.117 \end{pmatrix}\cdot\frac{EA_c}{L_c}\cdot\begin{pmatrix} -6.36 \\ -4.24 \end{pmatrix}\cdot 10^{-4}\cdot L_c = \begin{pmatrix} -6.87 \\ -4.11 \end{pmatrix}\cdot 10^{-5}\cdot EA_c$$

11. Thus with $E := 200\frac{kN}{mm^2},\ A_c := 500mm^2$

$$R_1 := -6.87\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -6.87\cdot kN$$

$$R_2 := -4.11\cdot 10^{-5}\cdot E\cdot A_c = -4.11\cdot kN$$

12. Using the redundant forces from each of these analyses, the remainder of the bar forces are computed by simple equilibrium.

Victor E. Saouma

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

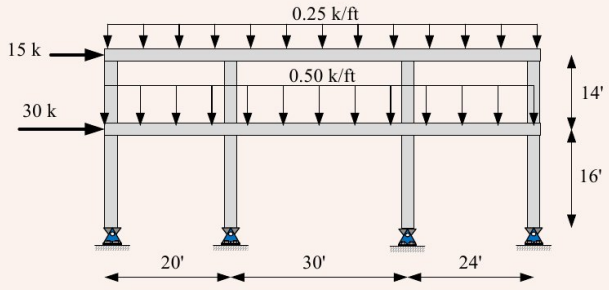
审阅稿

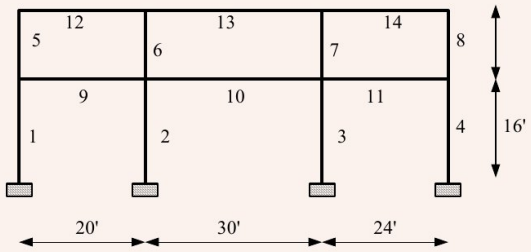
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Table ?? contains such computations. The bar forces in any bar is the force in column 1 added to that in column 2 multiplied by R_1 plus that is column 3 multiplied by R_2. This follows from the fact that columns 2 and 3 are bar forces caused by a force of unitiy corresponding to each of the redundants. The results of the calcultations are shown for the applied loading and for the temperature drop. The forces caused by the temperature drop are similar in magnitude to those caused by wind load in this example. Temperature differences, shrinkage, support settlement, or tolerance errors can cause important effects in statically indeterminate structures.

15.1 Approximate Analysis of a Frame Subjected to Vertical and Horizontal Loads

Draw the shear and moment diagrams for the following frame.





Solution:

The analysis should be conducted in conjunction with the free body diagram shown below.

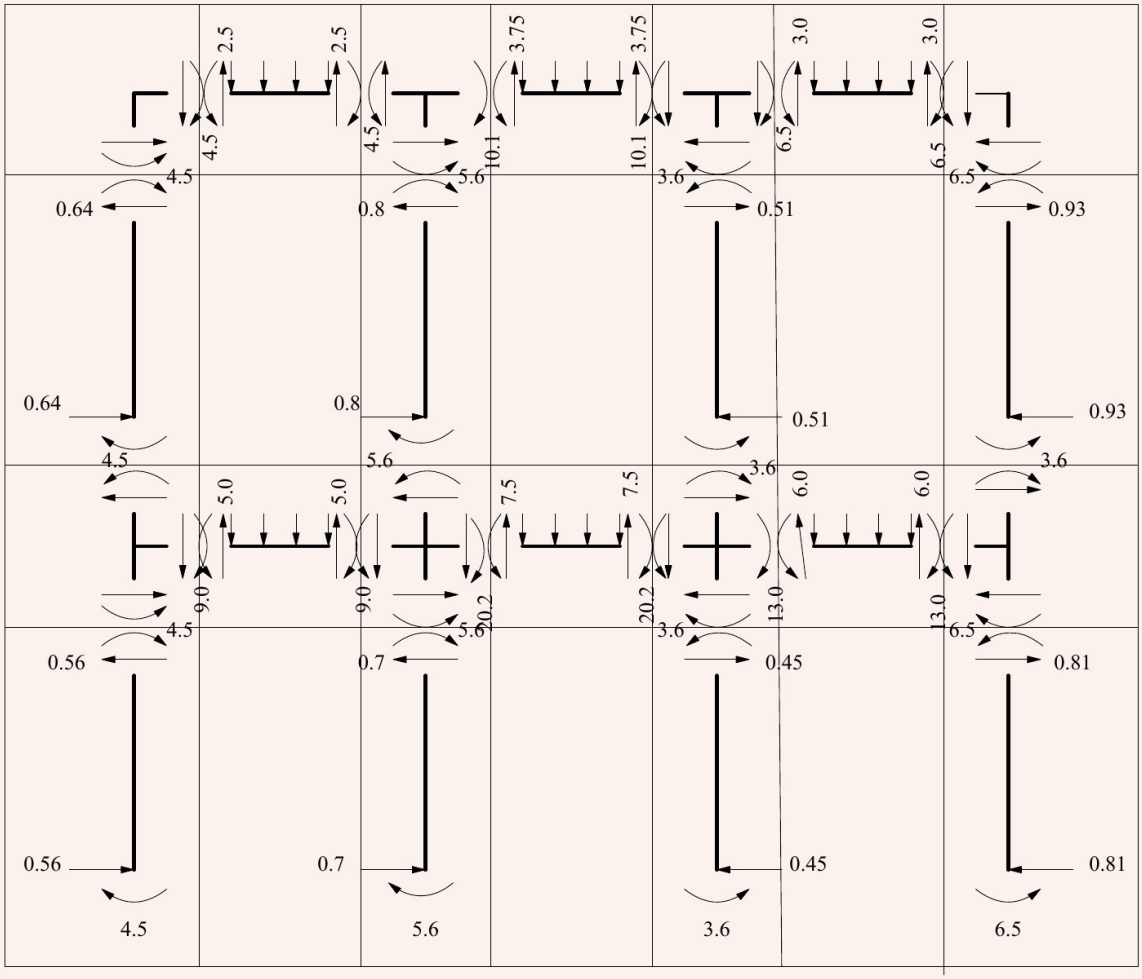
Vertical Loads

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Gravity Loads

$w_{12} := 0.25 \frac{kip}{ft}$ $w_{13} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{14} := w_{12} = 0.25 \cdot \frac{kip}{ft}$

$w_9 := 0.5 \frac{kip}{ft}$ $w_{10} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$ $w_{11} := w_9 = 0.5 \cdot \frac{kip}{ft}$

Approximate Equations

$M_{left}(w, L) := -0.045 \cdot w \cdot L^2$ Maximum negative moment at girder end

$M_{cent}(w, L) := 0.08 \cdot w \cdot L^2$ Maximum positive moment

1. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{left}(w_{12}, 20ft) = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12cnt} := M_{cent}(w_{12}, 20ft) = 8 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{13lft} := M_{left}(w_{13}, 30ft) = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13cnt} := M_{cent}(w_{13}, 30ft) = 18 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := M_{13lft} = -10.125 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{left}(w_{14}, 24ft) = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14cnt} := M_{cent}(w_{14}, 24ft) = 11.52 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := M_{14lft} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

2. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{left}(w_9, 20ft) = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9cnt} := M_{cent}(w_9, 20ft) = 16 \cdot kip \cdot ft$

$M_{9rgt} := M_{9lft} = -9 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10lft} := M_{left}(w_{10}, 30ft) = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10cnt} := M_{cent}(w_{10}, 30ft) = 36 \cdot kip \cdot ft$

$M_{10rgt} := M_{10lft} = -20.25 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11lft} := M_{left}(w_{11}, 24ft) = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11cnt} := M_{cent}(w_{11}, 24ft) = 23.04 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := M_{11lft} = -12.96 \cdot kip \cdot ft$

3. Top Column Moments

$M_{5top} := M_{12lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{5bot} := -M_{5top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6top} := -M_{12rgt} + M_{13lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6bot} := -M_{6top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7top} := -M_{13rgt} + M_{14lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8top} := -M_{14rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

4. Bottom Column Moments

$M_{1top} := M_{5bot} + M_{9lft} = -4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{1bot} := -M_{1top} = 4.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2top} := M_{6bot} - M_{9rgt} + M_{10lft} = -5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2bot} := -M_{2top} = 5.625 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := M_{7bot} - M_{10rgt} + M_{11lft} = 3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -3.645 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := M_{8bot} - M_{11rgt} = 6.48 \cdot kip \cdot ft$

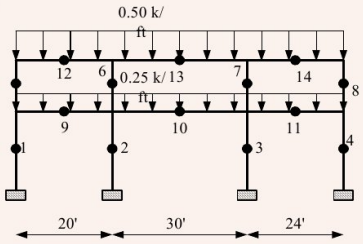
$M_{4bot} := -M_{4top} = -6.48 \cdot kip \cdot ft$

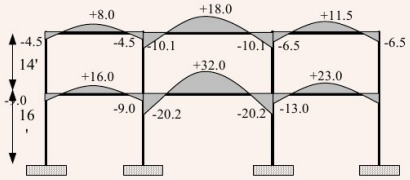
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

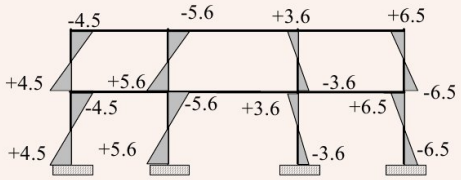
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura







5. Top Girder Shear

$$V_{12lft} := \frac{w_{12} \cdot 20ft}{2} = 2.5 \cdot kip$$

$$V_{12rgt} := -V_{12lft} = -2.5 \cdot kip$$

$$V_{13lft} := \frac{w_{13} \cdot 30ft}{2} = 3.75 \cdot kip$$

$$V_{13rgt} := -V_{13lft} = -3.75 \cdot kip$$

$$V_{14lft} := \frac{w_{14} \cdot 24ft}{2} = 3 \cdot kip$$

$$V_{14rgt} := -V_{14lft} = -3 \cdot kip$$

6. Bottom Girder Shear

$$V_{9lft} := \frac{w_{9} \cdot 20ft}{2} = 5 \cdot kip$$

$$V_{9rgt} := -V_{9lft} = -5 \cdot kip$$

$$V_{10lft} := \frac{w_{10} \cdot 30ft}{2} = 7.5 \cdot kip$$

$$V_{10rgt} := -V_{10lft} = -7.5 \cdot kip$$

$$V_{11lft} := \frac{w_{11} \cdot 24ft}{2} = 6 \cdot kip$$

$$V_{11rgt} := -V_{11lft} = -6 \cdot kip$$

7. Column Shears

$h_5 := 14ft$ $h_6 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_7 := h_5 = 14 \cdot ft$ $h_8 := h_5 = 14 \cdot ft$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$h_1 := 16ft$ $h_2 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_3 := h_1 = 16 \cdot ft$ $h_4 := h_1 = 16 \cdot ft$

$$V_5 := \frac{M_{5top}}{\frac{h_5}{2}} = -0.643 \cdot kip$$

$$V_6 := \frac{M_{6top}}{\frac{h_6}{2}} = -0.804 \cdot kip$$

$$V_7 := \frac{M_{7top}}{\frac{h_7}{2}} = 0.521 \cdot kip$$

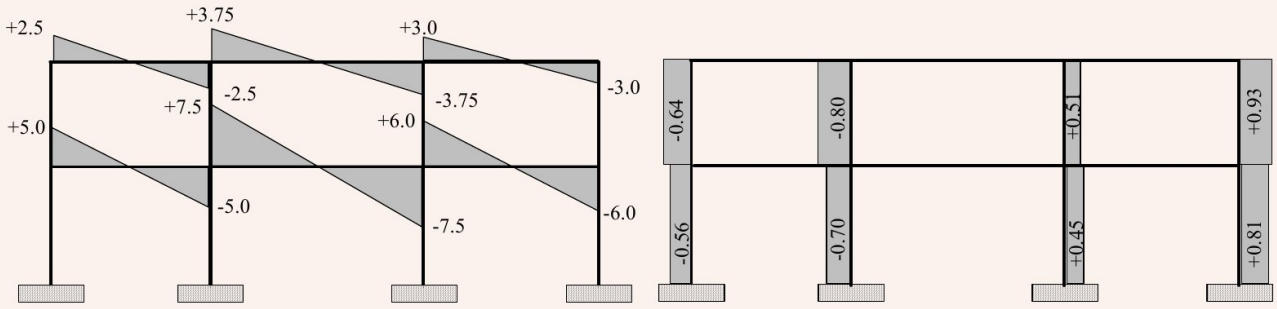
$$V_8 := \frac{M_{8top}}{\frac{h_8}{2}} = 0.926 \cdot kip$$

$$V_1 := \frac{M_{1top}}{\frac{h_1}{2}} = -0.563 \cdot kip$$

$$V_2 := \frac{M_{2top}}{\frac{h_2}{2}} = -0.703 \cdot kip$$

$$V_3 := \frac{M_{3top}}{\frac{h_3}{2}} = 0.456 \cdot kip$$

$$V_4 := \frac{M_{4top}}{\frac{h_4}{2}} = 0.81 \cdot kip$$



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

8. Top Column Axial Forces

$P_5 := V_{12lft} = 2.5 \cdot kip$

$P_6 := -V_{12rgt} + V_{13lft} = 6.25 \cdot kip$

$P_7 := -V_{13rgt} + V_{14lft} = 6.75 \cdot kip$

$P_8 := -V_{14rgt} = 3 \cdot kip$

9. Bottom Chord Axial Forces

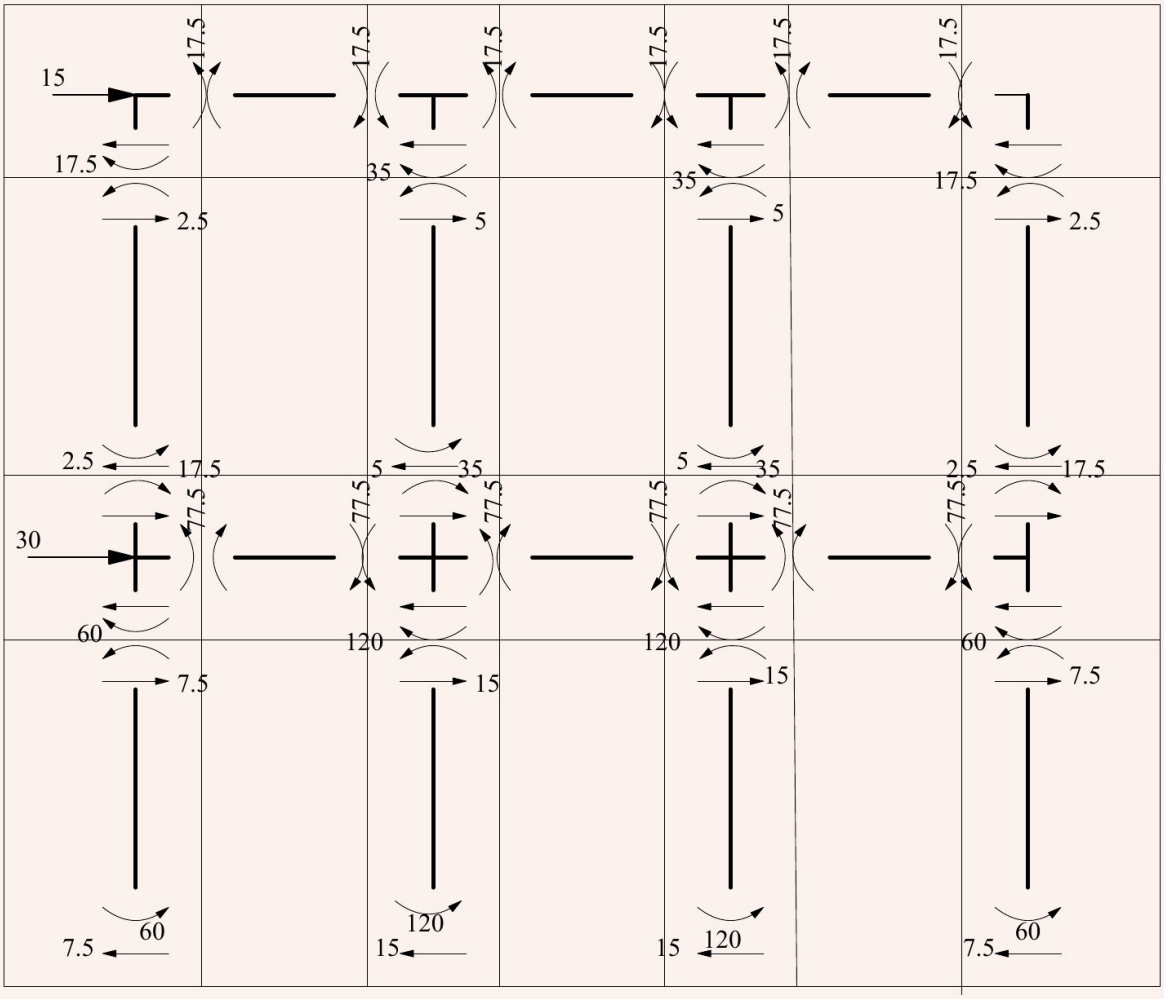
$P_1 := P_5 + V_{9lft} = 7.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = 18.75 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 20.25 \cdot kip$

$P_4 := P_8 - V_{11rgt} = 9 \cdot kip$

Horizontal Loads



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Horizontal Loads

$F_5 := 15\,kip$

$F_1 := 30\,kip$

Approximate Equations

$V_{ext}(F,n) := \frac{F}{2 \cdot n}$

$n_{bays} := 3$

1. Column Shears

$V_5 := V_{ext}(F_5, n_{bays}) = 2.5 \cdot kip$

$V_6 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_7 := 2 \cdot V_5 = 5 \cdot kip$

$V_8 := V_5 = 2.5 \cdot kip$

$V_1 := V_{ext}(F_1 + F_5, n_{bays}) = 7.5 \cdot kip$

$V_2 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_3 := 2 \cdot V_1 = 15 \cdot kip$

$V_4 := V_1 = 7.5 \cdot kip$

2. Top Column Moments

$M_{5top} := \frac{V_5 \cdot h_5}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{5bot} := -M_{5top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6top} := \frac{V_6 \cdot h_6}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{6bot} := -M_{6top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7top} := \frac{V_7 \cdot h_7}{2} = 35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{7bot} := -M_{7top} = -35 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8top} := \frac{V_8 \cdot h_8}{2} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{8bot} := -M_{8top} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

3. Bottom Column Moments

$M_{1top} := \frac{V_1 \cdot h_1}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{1bot} := -M_{1top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{2top} := \frac{V_2 \cdot h_2}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{\blacksquare} := -M_{\blacksquare} = -120 \cdot kip \cdot ft$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{2bot} := -M_{2top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3top} := \frac{V_3 \cdot h_3}{2} = 120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{3bot} := -M_{3top} = -120 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4top} := \frac{V_4 \cdot h_4}{2} = 60 \cdot kip \cdot ft$

$M_{4bot} := -M_{4top} = -60 \cdot kip \cdot ft$

4. Top Girder Moments

$M_{12lft} := M_{5top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{12rgt} := -M_{12lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13lft} := M_{12rgt} + M_{6top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{13rgt} := -M_{13lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14lft} := M_{13rgt} + M_{7top} = 17.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{14rgt} := -M_{14lft} = -17.5 \cdot kip \cdot ft$

5. Bottom Girder Moments

$M_{9lft} := M_{1top} - M_{5bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

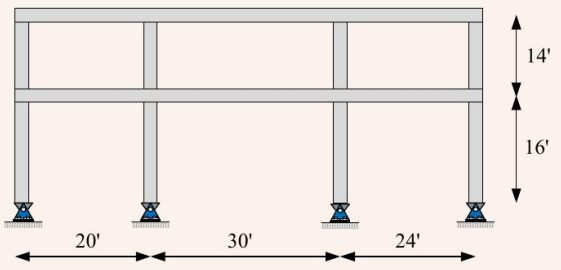
$M_{9rgt} := -M_{9lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

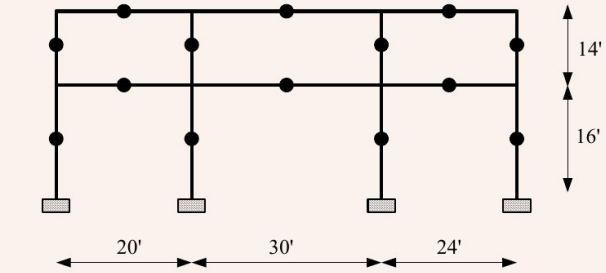
$M_{10lft} := M_{9rgt} + M_{2top} - M_{6bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

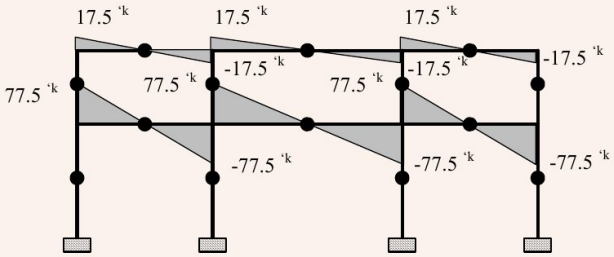
$M_{10rgt} := -M_{10lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$

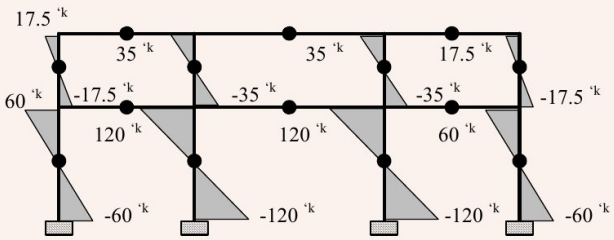
$M_{11lft} := M_{10rgt} + M_{3top} - M_{7bot} = 77.5 \cdot kip \cdot ft$

$M_{11rgt} := -M_{11lft} = -77.5 \cdot kip \cdot ft$









结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

6. Top Girder Shear

$V_{12lft} := \frac{-2 \cdot M_{12lft}}{20ft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{12rgt} := V_{12lft} = -1.75 \cdot kip$

$V_{13lft} := \frac{-2 \cdot M_{13lft}}{30ft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{13rgt} := V_{13lft} = -1.167 \cdot kip$

$V_{14lft} := \frac{-2 \cdot M_{14lft}}{24ft} = -1.458 \cdot kip$

$V_{14rgt} := V_{14lft} = -1.458 \cdot kip$

7. Bottom Girder Shear

$V_{9lft} := \frac{-2 \cdot M_{9lft}}{20ft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{9rgt} := V_{9lft} = -7.75 \cdot kip$

$V_{10lft} := \frac{-2 \cdot M_{10lft}}{30ft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{10rgt} := V_{10lft} = -5.167 \cdot kip$

$V_{11lft} := \frac{-2 \cdot M_{11lft}}{24ft} = -6.458 \cdot kip$

$V_{11rgt} := V_{11lft} = -6.458 \cdot kip$

8. Top Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_5 := -V_{12lft} = 1.75 \cdot kip$

$P_6 := V_{12rgt} - V_{13lft} = -0.583 \cdot kip$

$P_7 := V_{13rgt} - V_{14lft} = 0.292 \cdot kip$

$P_8 := V_{14rgt} = -1.458 \cdot kip$

8. Bottom Column Axial Forces (+ve tension, -ve compression)

$P_1 := P_5 - V_{9lft} = 9.5 \cdot kip$

$P_2 := P_6 - V_{10rgt} + V_{9lft} = -3.167 \cdot kip$

$P_3 := P_7 - V_{11rgt} + V_{10lft} = 1.583 \cdot kip$

$P_4 := P_8 + V_{11rgt} = -7.917 \cdot kip$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

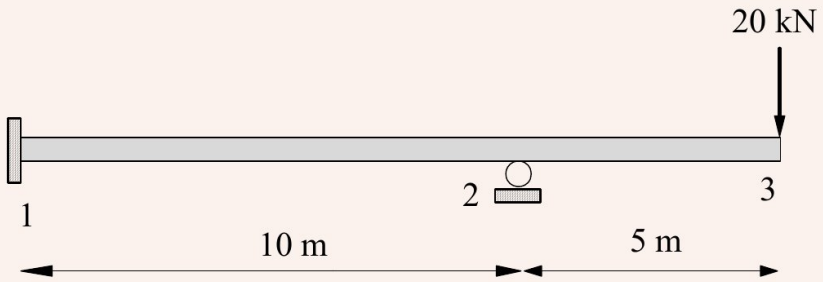
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.1 Propped Cantilever Beam

Find the end moments for the beam



Solution:

1. The beam is kinematicall indeterminate to the third degreee (θ_2, Δ_3, θ_3), however by replacing the overhang by a fixed end moment equal to 100 kN-m at support 2, we reduce the degreee of kinematic indeterminancy to one (θ_2).
2. The equilibrium relation is

$$M_{21} - 100\text{kN}\cdot\text{m} = 0$$

3. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\cdot\theta_1 + \theta_2\right) = \frac{2}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_1 + 2\cdot\theta_2\right) = \frac{4}{10}\cdot E\cdot I\cdot\theta_2$$

4. Substituting into the equilibrium equations

$$\theta_2 = \frac{10}{4E\cdot I}\cdot M_{21} = \frac{250}{EI}$$

or

$$\boxed{M_{12} = \frac{2}{10}\cdot EI\cdot\theta_2 = \frac{2\cdot EI}{10}\cdot\frac{250}{EI} = 50\text{kN}\cdot\text{m}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

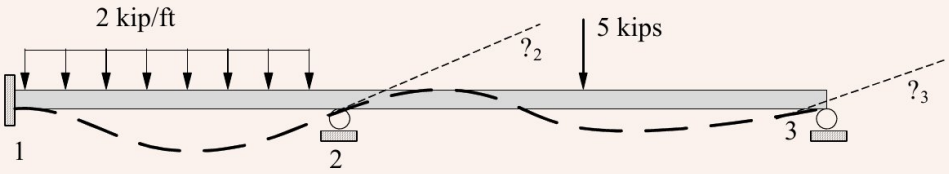
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

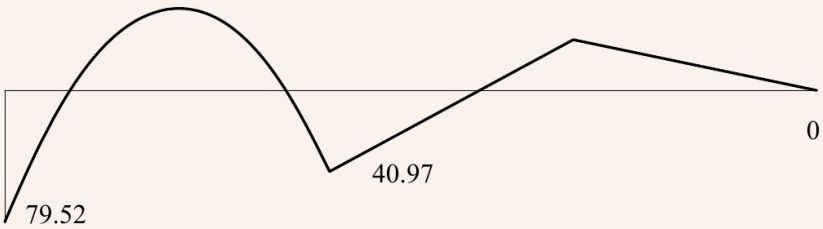
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.2 Two-Span Beam, Slope Deflection

Draw the moment diagram for the two span beam





Solution:

1. The unknows are θ_2 and θ_3
2. The equilibrium relations are

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{21} + M_{23} = 0$

$M_{32} = 0$

3. The fixed end moments are given by

$$M_{12F} = -M_{21F} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad M_{12F} := \frac{-\left(-2\,\frac{kip}{ft}\right)\cdot(20ft)^2}{12} = 66.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23F} = -M_{32F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{23F} := \frac{-(-5kip)(30ft)}{8} = 18.75 \cdot kip \cdot ft$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{2EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{12F} = \frac{EI}{10} \cdot \theta_2 + M_{12F}$$

$$M_{21} = 2 \cdot E \cdot K_{12} \cdot (2\theta_2) + M_{21F} = \frac{4EI}{L_1} \cdot \theta_2 + M_{21F} = \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F}$$

$$M_{23} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (2\theta_2 + \theta_3) + M_{23F} = \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F}$$

$$M_{32} = 2 \cdot E \cdot K_{23} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{2EI}{L_2} \cdot (\theta_2 + 2\theta_3) + M_{32F} = \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F}$$

5. Substituting in the equilibrium equations

$$\frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + M_{21F} + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 + M_{23F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{15} \cdot \theta_3 = 47.917\ kip \cdot ft$$

$$\frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 + M_{32F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{EI}{15} \cdot \theta_2 + \frac{EI}{7.5} \cdot \theta_3 = 18.75\ kip \cdot ft$$

or

$$EI \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} EI\theta_2 \\ EI\theta_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 718.755 \\ 281.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128.473 \\ 76.388 \end{pmatrix}$$

6. Substituting for the moments

$$M_{12} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{10} + M_{12F} = 79.514 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{21} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{5} - M_{12F} = -40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{23} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{7.5} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{15} + M_{23F} = 40.972 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{32} := \frac{EI\theta_2 \cdot kip \cdot ft}{15} + \frac{EI\theta_3 \cdot kip \cdot ft}{7.5} - M_{23F} = -0 \cdot kip \cdot ft$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.3 Two-Span Beam, Slope Deflection, Initial Deflection

Determine the end moments for the previous problem if the middle support settles by 6 in.

Solution:

1. Since we are performing a linear elastic analysis, we can separately analyze the beam for support settlement, and then add the moments to those due to the applied loads.
2. The unknowns are θ_2 and θ_3
3. The equilibrium relations are

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$M_{32} = 0$$

4. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{10}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta}{L_{12}}\right) = \frac{2EI}{20}\cdot\left(2\theta_2 + 3\cdot\frac{0.5}{20}\right) = \frac{EI}{5}\cdot\theta_2 + \frac{3EI}{400}$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{15}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 - 3\frac{\Delta}{L_{23}}\right) = \frac{2EI}{30}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3 + 3\cdot\frac{0.5}{30}\right) = \frac{EI}{15}\cdot\theta_2 + \frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3 + \frac{EI}{300}$$

5. Substituting into the equilibrium equations

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{3}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3=\frac{-13EI}{1200}$$

$$\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}=0 \qquad \frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3=\frac{-EI}{300}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=EI\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}100 & 20\\ 20 & 40\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-13}{4}\\ -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{11}{360}\\ -\frac{7}{720}\end{pmatrix}$$

6. Thus the additional moments due to the settlement are

$$M_{12}(EI):=\frac{EI}{10}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{225}$$

$$M_{21}(EI):=\frac{EI}{5}\cdot\theta_2+\frac{3EI}{400}\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{EI}{720}$$

$$M_{23}(EI):=\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_2+\frac{EI}{15}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -0.0013888888888888888889\cdot EI$$

$$M_{32}(EI):=\frac{EI}{15}\cdot\theta_2+\frac{EI}{7.5}\cdot\theta_3+\frac{EI}{300}\ \text{simplify}\ \rightarrow -3.7037037037037037e\text{-}24\cdot EI$$

16.4 Frame, Slope Deflection

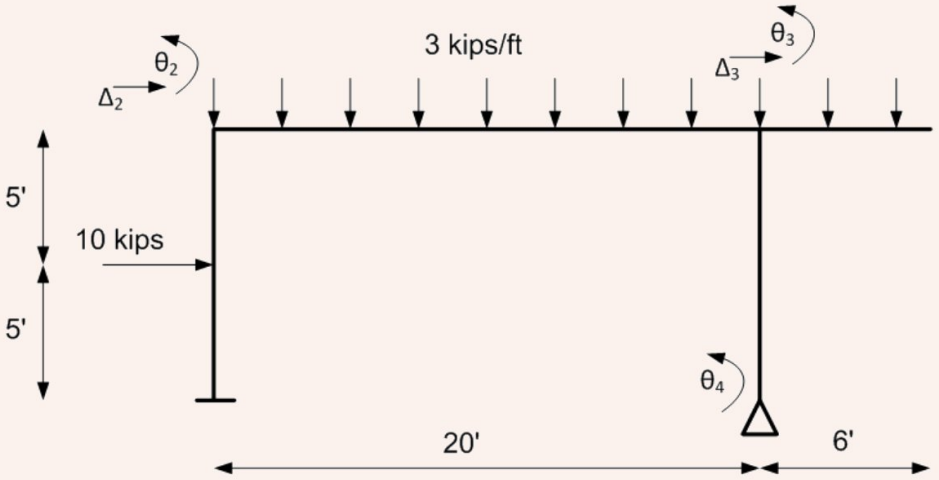
Determine the end moments for the frame

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The effect of the 35 cantilever can be included by replacing it with its end moment.

$$M_3 = -w \cdot L \cdot \frac{L}{2} \qquad M_3 := 3\frac{kip}{ft} \cdot 6ft \cdot 6\frac{ft}{2} = 54 \cdot kip \cdot ft$$

2. The unknown displacements and rotations are

   Δ_2 and θ_2 at joint 2

   θ_3 and θ_4 at joints 3 and 4

   We observe that due to the lack of symmetry, there will be a lateral displacement in the frame, and neglecting axial deformations, $\Delta_2 = \Delta_3$

3. The equilibrium relations are

$$M_{23} + M_{32} = 0$$

$$M_{32} + M_{34} = -54kip \cdot ft$$

$$M_{43} = 0$$

$$V_{12} + V_{43} - 10kip = 0$$

   Thus we have four unknown displacements and four equations. However, the last two equations are in terms of of the shear forces, and we need to have them in terms of the end moments. This can be achieved through the following equilibrium relations

$$V_{12} = \frac{M_{12} + M_{21} + 50}{L_{12}}$$

$$V_{43} = \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}}$$

   Hence, all four equations are now in terms of the moments.

4. The fixed end moments for member 23 are

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

4. The fixed end moments for member 23 are

$$M_{21F} = \frac{-PL}{8} \qquad M_{21F} := \frac{-10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{8} = -12.5\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{23F} = \frac{-w\cdot L^2}{12} \qquad M_{21F} := \frac{-3\frac{\text{kip}}{\text{ft}}\cdot(20\text{ft})^2}{12} = -100\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

5. The member end moments in terms of the rotations are

$$M_{12} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{12F} = 0.2EI\cdot\left(\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) + 12.5$$

$$M_{21} = 2\cdot E\cdot K_{12}\cdot\left(2\theta_2 - 3\frac{\Delta_2}{L_{12}}\right) + M_{21F} = 0.2EI\cdot\left(2\theta_2 - 0.3\Delta_2\right) - 12.5$$

$$M_{23} = 2\cdot E\cdot K_{23}\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + M_{23F} = 0.1EI\cdot\left(2\theta_2 + \theta_3\right) + 100$$

$$M_{32} = 2\cdot E\cdot K_{32}\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) + M_{32F} = 0.1EI\cdot\left(\theta_2 + 2\theta_3\right) - 100$$

$$M_{34} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(2\theta_3 + \theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

$$M_{43} = 2\cdot E\cdot K_{34}\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 3\frac{\Delta_2}{L_{34}}\right) = 0.2EI\cdot\left(\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2\right) + 100$$

6. Substituting into the equilibrium equations and dividing by EI

$$6\theta_2 + \theta_3 - 0.6\Delta_2 = \frac{-875}{EI}$$

$$\theta_2 + 6\theta_3 + 2\theta_4 - 0.6\Delta_2 = \frac{460}{EI}$$

$$\theta_3 + 2\theta_4 - 0.3\Delta_2 = 0$$

and the last equilibrium equation is obtained by substituting V_{12} and V_{43} and multiplying by 10/EI

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 0.4\Delta_2 = \frac{-83.3}{EI}$$

or

$$EI\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -0.6 \\ 1 & 6 & 2 & -0.6 \\ 0 & 1 & 2 & -0.3 \\ 1 & 1 & 1 & -0.4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -875 \\ 460 \\ 0 \\ -83.3 \end{pmatrix}$$

which will give

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{pmatrix} -294.8 \\ 68.4 \\ -240.6 \\ -1375.7 \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

7. Substituting into the slope deflection equations gives the end moments

$$\begin{pmatrix} M_{12} \\ M_{21} \\ M_{23} \\ M_{32} \\ M_{34} \\ M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -47.88 \\ 47.88 \\ -115.8 \\ 61.78 \\ 0 \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

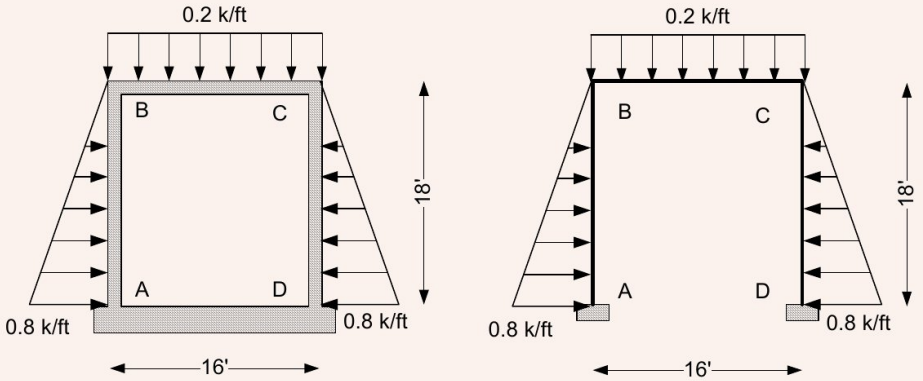
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.5 Box Culvert Slope Deflection

Draw the shear and moment diagram for the following box girder



Solution:

1. From symmetry $\theta_B = -\theta_C$, and at the base $\theta_A = \theta_D = 0$.
2. The fixed end moments are given by

$$FEM_{BC} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{BC} := \frac{0.2\frac{kip}{ft}\cdot(16ft)^2}{12} = 4.267\cdot kip\cdot ft$$

$$FEM_{CB} = \frac{-w \cdot L^2}{12} \qquad FEM_{CB} := -\frac{0.2\frac{kip}{ft}\cdot(16ft)^2}{12} = -4.267\cdot kip\cdot ft$$

$$FEM_{AB} = \frac{w \cdot L^2}{20} \qquad FEM_{AB} := \frac{0.8\frac{kip}{ft}\cdot(18ft)^2}{20} = 12.96\cdot kip\cdot ft$$

$$FEM_{BA} = \frac{-\left(w \cdot L^2\right)}{30} \qquad FEM_{BA} := -\frac{0.8\frac{kip}{ft}\cdot(18ft)^2}{30} = -8.64\cdot kip\cdot ft$$

3. The moments are given by

$$M_{BC} = \frac{2EI}{16}\cdot\left(2\theta_B + \theta_C\right) + FEM_{BC} = \frac{EI}{8}\cdot\theta_B + 4.267$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}\cdot\left(2\theta_B + 0\right) + FEM_{BA} = \frac{2EI}{9}\cdot\theta_B - 8.64$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}\cdot\left(2\theta_B\right) + FEM_{AB} = \frac{EI}{9}\cdot\theta_B + 12.96$$

4. Equilibrium at joint B

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\frac{2EI}{9}\cdot\theta_B - 8.64 + \frac{EI}{8}\cdot\theta_B + 4.267 = 0$$

$$\theta_B(EI) := \frac{8.64 - 4.267}{\frac{2EI}{9} + \frac{EI}{8}} \rightarrow \frac{12.594}{EI}$$

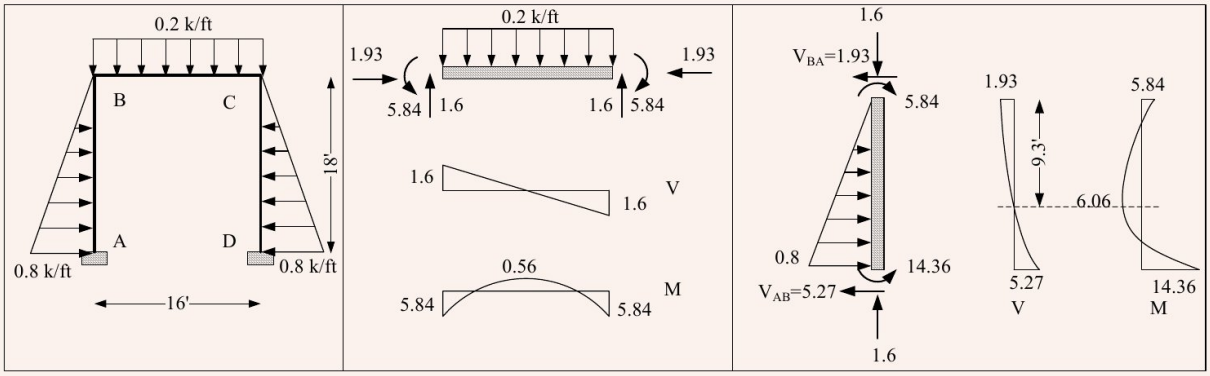
5. Substitute θ_B to get the moments

$$M_{BC} := \left[\frac{EI}{8}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 4.267\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 5.841\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{AB} := \left[\frac{EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) + 12.96\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow 14.359\cdot ft\cdot kip$$

$$M_{BA} := \left[\frac{2EI}{9}\cdot\left(\frac{12.594}{EI}\right) - 8.64\right]\cdot kip\cdot ft \rightarrow -5.841\cdot ft\cdot kip$$

6. Member forces are determined from statics. Careful, the moment diagram is now based on the so-called "design" sign convention.



结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

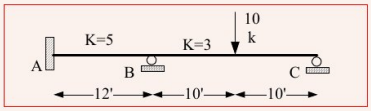
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

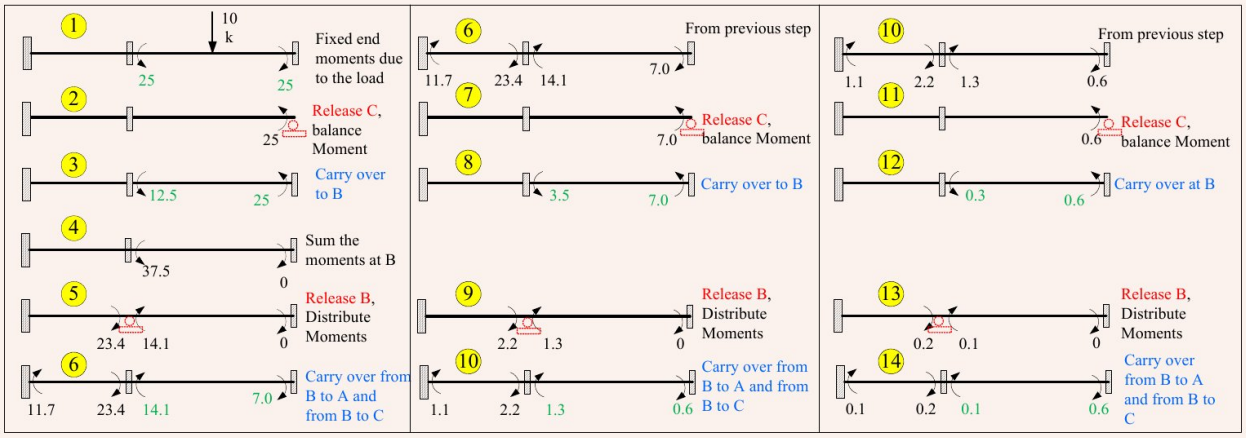
审阅稿

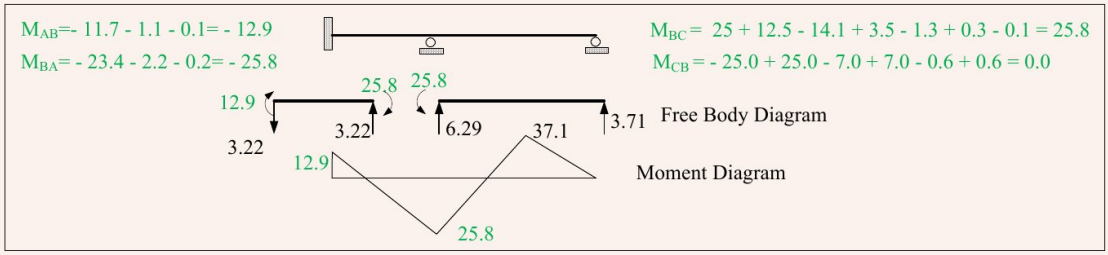
Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.6 Continuous Beam

Solve for the moments at A and B by moment distribution, using (a) the ordinary method, and (b) the simplified method.







Solution:

For this example the fixed-end moments are computed as follows:

$$M_{BCF} = \frac{PL}{8} \qquad M_{BCF} := \frac{10\text{kip}\cdot 20\text{ft}}{8} = 25\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$M_{CBF} := -M_{BCF} = -25 \cdot kip \cdot ft$

2. Since the relative stiffness is given in each span, the distribution factors are

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{\Sigma K} = \frac{5}{\infty + 5} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{5}{5 + 3} = 0.625$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{3}{5 + 3} = 0.375$$

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{\Sigma K} = \frac{3}{3} = 1$$

3. The balancing computations are shown below.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	3	3
DF	0	0.625	0.375	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-11.7	-23.4	-14.1	-7
			3.5	7
	-1.1	-2.2	-1.3	-0.6
			0.3	0.6
	-0.1	-0.2	-0.1	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

4. The above solution is that referred to as the ordinary method, so named to designate the manner of handling the balancing at the simple support at C. It is known, of course, that the final moment must be zero at this support because it is simple
5. Consequently, the first step is to balance the fixed-end moment at C to zero. The carry-over is then amde immediately to B. When B is balanced, however, a carry-over must be made back to C simply because the relative stiffness of BC is based on end C of this span being fixed. It is apparent, however, that the moment carried back to C (in this case -7.0) cannot exist at this joint. Accordingly, it is immediately balanced out, and a carry-over is again made to B, this carry-over being considerably smaller than the first. Now B is again balanced, and the process continues until the numbers involved become too small to have any practical value.
6. Alternatively, we can use the simplified method. It was previously shown that if the support at C is simple and a moment is applied at B, then the resistance of the span BC to this moment is reduced to three-fourths the value it would have had wit C fixed. Consequently, the relative stiffness of span BC is reduced to three-fourths of the value given, it will not be necessary to carry over to C.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
K	5	5	2.25	3
DF	0	0.69	0.31	1
FEM			25	-25
			12.5	25
	-12.9	-25.8	-11.7	
Total	-12.9	-25.8	25.8	0

7. From the standpoint of work involved, the advantage of the simplified method is obvious. It should always be used when the external (terminal) end of a member rests on a simple support, but it does not apply when a structure is continuous at a simple support. Attention is called to the fact that when the opposite end of the member is simply supported, the reduction factor for the stiffness is always 3/4 for a prismatic member but a variable quantity for a nonprismatic member.
8. One valuable feature of the tabular arrangement is that of dropping down one line for each balancing operation and making the carry-over on the same line. The practice clearly indicates the order of balancing the joints, which in turn makes it possible to check back in the event of an error. Moreover, the placing of the carry-over on the same line with the balancing moments definitely decreases the chances of omitting a carry-over.
9. The correctness of the answers may ina sense be checked by verifying $\Sigma M = 0$ at each joint. However, even though the final answers satisfy this equation at every join, this is in no way a check on the inital fixed end moments. These fixed end moments, therefore, should be checked with great care before beginning the balancing operation. Moreover, it occasionally happens that conpensating errors are made in the balancing, and these errors will not be apparent when cheking $\Sigma M = 0$ at each joint.

10. To draw the final shear and moment diagram, we start by drawing the free body diagram of each beam segment with the computed moments, and then solve from statics for the reactions

$12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft} - 12\text{ft}\,V_A = 0$ $\quad V_A := \dfrac{12.9\text{kip}\cdot\text{ft} + 25.8\text{kip}\cdot\text{ft}}{12\text{ft}} = 3.225\cdot\text{kip}$

$V_A + V_{BL} = 0$ $\quad V_{BL} := -V_A = -3.225\cdot\text{kip}$

$25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft} - 20\text{ft}\cdot V_{BR} = 0$ $\quad V_{BR} := \dfrac{25.8\text{kip}\cdot\text{ft} + 10\text{kip}\cdot 10\text{ft}}{20\text{ft}} = 6.29\cdot\text{kip}$

$6.29\text{kip} + V_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_C := 10\text{kip} - 6.29\text{kip} = 3.71\cdot\text{kip}$

$-V_{BL} - V_{BR} + R_B = 0$ $\quad R_B := V_{BL} + V_{BR} = 3.065\cdot\text{kip}$

Check: $R_A + R_B + R_C - 10\text{kip} = 0$ $\quad V_A + R_B + V_C - 10\text{kip} = 0\cdot\text{kip}$

$M_{BC} := V_C\cdot 10\text{ft} = 37.1\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

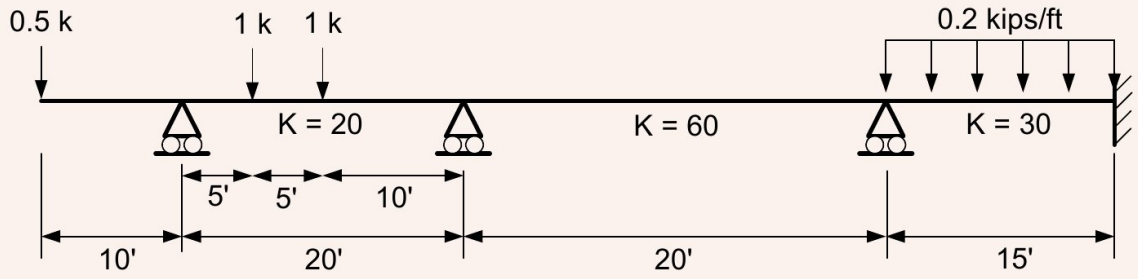
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.7 Continuous Beam

Using the simplified method of moment distribution, find the moments in the following continuous beam. The values of I as indicated by the various values of K, are different for the various spans. Determine the values of the reactions, draw the shear and bending moment diagrams, and sketch the deflected structure.



Solution:

1. Fixed-end moments

$$M_{AOF} := -0.5kip \cdot 10ft = -5 \cdot kip \cdot ft$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

For the 1 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2} \qquad M_{ABF1} := \frac{1kip \cdot 5ft \cdot (15ft)^2}{(20ft)^2} = 2.812 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2} \qquad M_{BAF1} := \frac{1kip \cdot (5ft)^2 \cdot 15ft}{(20ft)^2} = 0.938 \cdot kip \cdot ft$$

For the 4 kip load:

$$M_{ABF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{ABF4} := \frac{4kip \cdot 20ft}{8} = 10 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF4} := -M_{ABF4} = -10 \cdot kip \cdot ft$$

For the uniform load:

$$M_{CDF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{CDF} := \frac{0.2\frac{kip}{ft} \cdot (15ft)^2}{12} = 3.75 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -3.75 \cdot kip \cdot ft$$

2. The balancing operation is shown below

Joint	A		B		C		D
Member	AO	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	0	20	15	60	60	40	40
DF	0	1	0.2	0.8	0.6	0.4	0
FEM	-5	12.8	-10.9			3.8	-3.8
		-7.8	-3.9				
			2.9	11.9	5.9		
				-2.9	-5.8	-3.9	-1.9
			0.6	2.3	1.1		
				-0.3	-0.7	-0.4	-0.2
			0.1	0.2			
Total	-5	5	-11.2	11.2	0.5	-0.5	-5.9

3. The only new point in this example is the method of handling the overhanging end. It is obvious that the final internal moment at A must be 5 kip-ft and, accordingly, the first step is to balance out 7.8 kip-ft of the fixed end moment at AB, leaving the required 5

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

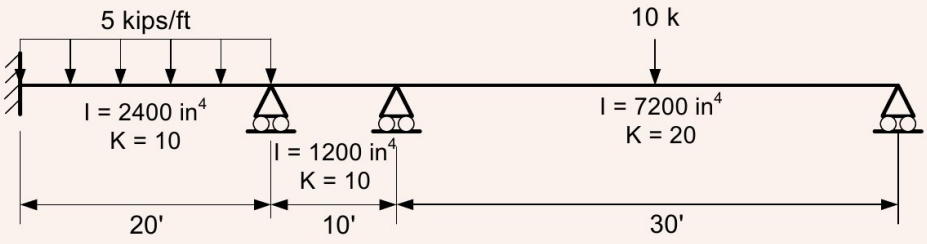
审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

kip-ft for the internal moment at AB. Since the relative stiffness of BA has been reduced to three-fourths of its original value, to permit considering the support at A as simple in balancing, no carry-over from B to A is required.
4. The easiest way to determine the reactions is to consider each span as a free body. End shears are first determined as caused by the loads alone on each span and, following this, the end shears caused by the end moments are computed. These two shears are added algebraically to obtain the net end shear for each span. An algebraic summation of the end shears at any support will give the total reaction.

16.8 Continuous Beam, Initial Settlement

For the following beam find the moments at A, B, and C by moment distribution. The support at C settles by 0.1 in. Use
$E := 30000ksi$



Solution:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

1. Fixed-end moments

Uniform load:

$$M_{ABF} = \frac{w \cdot L^2}{12} \qquad M_{ABF} := \frac{5\,\frac{kip}{ft} \cdot (20ft)^2}{12} = 166.667 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{BAF} := -M_{ABF} = -166.667 \cdot kip \cdot ft$$

Concentrated load:

$$M_{CDF} = \frac{P \cdot L}{8} \qquad M_{CDF} := \frac{10kip \cdot 30ft}{8} = 37.5 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := -M_{CDF} = -37.5 \cdot kip \cdot ft$$

Moments caused by deflection:

$$M_{BCF} = \frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{BCF} := \frac{6 \cdot E \cdot 1200in^4 \cdot 0.1in}{(10ft)^2} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CBF} := M_{BCF} = 125 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{CDF} = -\frac{6EI \cdot \Delta}{L^2} \qquad M_{CDF} := -\frac{6 \cdot E \cdot 7200in^4 \cdot 0.1in}{(30ft)^2} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

$$M_{DCF} := M_{CDF} = -83.333 \cdot kip \cdot ft$$

2. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	10	10	15	20
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	1
	167	-167			38	-38
			125	125	-83	-83
					60	121
FEM			-28	-56	-84	
	17	35	35	17		
			-3	-7	-10	
	1	2	1			
Total	185	-130	130	79	-79	0

The fixed-end moments caused by a settlement of supports have the same sign at both ends of each span adjacent to the settling support. The above computations have been carried to the nearest kip-ft, which for the moments of the magnitudes involved, would be significantly close for purposes of design.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.9 Frame

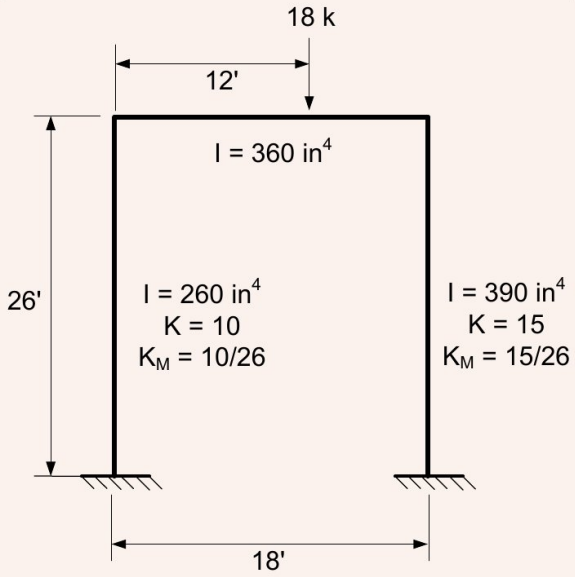
Find all moments by moment distribution for the following frame. Draw the bending moment diagram and the deflected structure.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura



Solution:

1. The first step is to perform the usual moment distribution. The reader should fully understand that this balancing operation adjusts the internal moments at the ends of the members by a series of corrections as the joints are considered to rotate, until $\Sigma M = 0$ at each joint. The reader should also realize that during this balancing operation no translation of any joint is permitted.
2. The fixed-end moments are

$$M_{BCF} := \frac{18\text{kip}\cdot 12\text{ft}\cdot(6\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = 24\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

$$M_{CBF} := -\frac{18\text{kip}\cdot 6\text{ft}\cdot(12\text{ft})^2}{(18\text{ft})^2} = -48\cdot\text{kip}\cdot\text{ft}$$

3. Moment distribution

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM			24	-48		
			13.7	27.4	20.6	10.3
	-6.3	-12.6	-25.1	-12.5		
			3.6	7.1	5.4	2.7
	-0.6	-1.2	-2.4	-1.2		
			0.3	0.7	0.5	0.2
		-0.1	-0.2			
Total	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2

4. The final moments listed in the table are correct only if there is no translation of any joint. It is therefore necessary to determine

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

whether or not, with the above moments existing, there is any tendency for side lurch of the top of the frame.
5. If the frame is divided into three free bodies, the result will be as shown below.

Inspection of this sketch indicates that if the moments of the first balance exist in the frame, there is a net force of $1.53\text{kip} - 0.8\text{kip} = 0.73\cdot\text{kip}$ tending to sway the frame to the left. In order to prevent side-sway, and thus allow these moments to exist (temporarily for the purpose of the analysis), it is necessary that an imaginary horizontal force ce considered to act to the right at B or C. This force is designated as the artificial joint restraint (abbreviated as AJR) and is shown below.

6. This illustration shows the complete load system which would have to act on the structure if the final moments of the first balance are to be correct. The AJR, however, cannot be permitted to remain, and thus its effect must be cancelled. This may be accomplished by finding the moments in the frame resulting from a force equal but opposite to the AJR and applied at the top.
7. Although it is not possible to make a direct solution for the moments resulting from this force, they may be determined inddirectly. Assume some unknown force P acts on the frame, as shown below, and causes it to deflect laterally to the left, without joint rotation, through some distance Δ. Now, regardless of the value of P and the value of the resulting Δ, the fixed-end moments induced in the ends of the columns must be proprtional to the respective values of K_M.

Recalling that the fixed end moment is $M_F = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2} = 6EK_M\cdot\Delta$, where $K_M = \frac{1}{L^2} = \frac{K}{L}$ we can write

$$\Delta = \frac{M_{ABF}}{6E\cdot K_M} = \frac{M_{DCF}}{6E\cdot K_M}$$

$$\frac{M_{ABF}}{M_{DCF}} = \frac{K_{MAB}}{K_{MDC}} = \frac{10}{15}$$

These fixed-end moments could, for example, have values of -10 and -15 kip-ft, or -20 and -30, or -30 and -45, or any other combination so long as the above ratio is maintained. The proper procedure is to choose values for the fixed-end moments of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. This will result in the same accuracy for the results of the balance for the side-sway correction that was realized in the first balance for the real loads. Accordingly, it will be assumed that P, and the resulting Δ, are of such magnitude as to result in fixed-end moments shown below.
8. Obviously $\Sigma M = 0$ is not satisfied for joints B and C in this deflected frame. Therefore, these joints must rotate until equilibrium is reached. The effect of this rotation is determined in the distribution below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
K	10	10	20	20	15	15
DF	0	0.333	0.667	0.571	0.429	0
FEM	-30	-30			-45	-45
			12.9	25.8	19.2	9.6
	2.8	5.7	11.4	5.7		
			-1.6	-3.3	-2.4	-1.2
	0.2	0.5	1.1	0.5		
				-0.3	-0.2	-0.1
Total	-27	-23.8	23.8	28.4	-28.4	-36.7

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

9. During the rotation of joints B and C, as represented by the above distribution, the value of Δ has remained constant, with P varying in magnitude as required to maintain Δ.
10. It is now possible to determine the final value of P simply by adding the shears in the columns. The shear in any member, without external loads applied along its length, is obtained by adding the end moments algebraically and dividing by the length of the member. The final value of P is the force necessary to maintain the deflection of the frame after the joints have rotated. In other words, it is the force which will be consistent with the displacement and internal moments of the structure as determined by the second balancing operation. Hence this final value of P will be called the consistent joint force (abbreviated as CJF).
11. The consistent joint force is given by

$$CJF := \frac{27kip\cdot ft + 23.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{28.4kip\cdot ft + 36.7kip\cdot ft}{26ft} = 4.458\cdot kip$$

and inspection clearly indicates that the CJF must act to the left.
12. Obviously, then, the results of the last balance above are moments which will exist in the frame when a force of 4.45 kip acts to the left at the top level. It is necessary, however, to determine the moments resulting from a force of 0.73 kip acting to the left at the top level, and some as yet unknown factor "z" times 4.45 kip will be used to represent this force acting to the left.
13. The free body diagram for the member BC is shown above. $\Sigma H = 0$ must be satisfied for this figure, and if forces to the left are considered as positive, the result is $4.45z - 0.73 = 0$, and

$$z := \frac{0.73}{4.45} = 0.164$$

If this factor is applied to the moments obtained from the second balance, the result will be the moments caused by a force of 0.73 kip acting to the left at the top level. If these moments are then added to the moments obtained from the first balance, the result will be the final moments for the frame, the effect of the AJR having been cancelled. The combintaion of moments is shown below.

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-6.9	-13.9	13.9	-26.5	26.5	13.2
z x M from 2nd balance	-4.4	-3.9	3.9	4.7	-4.7	-6
Final Moments	-11.3	-17.8	17.8	-21.8	21.8	7.2

14. If the moments are correct, the shears in the two columns of the frame shoul dbe equal and opposite to satisfy $\Sigma H = 0$ for the entire frame. This check is expressed

$$\frac{11.3kip\cdot ft + 17.8kip\cdot ft}{26ft} + \frac{-21.8kip\cdot ft + -7.2kip\cdot ft}{26ft} = 0\cdot kip$$

and

$$1.12kip - 1.11kip = 0.01\cdot kip \text{ (nearly)}$$

The signs of all moments taken from the previous table have been reversed to give the correct signs for the end moments external to the columns. It will be remembered that the moments considered in moment distribution are always internal for each member. However, the above check actually considers each column as a free body and so external moments must be used.
15. The moment under the 18 kip load is obtained by treating BC as a free body:

$$M_{18} := 5.77kip\cdot 12ft - 17.8kip\cdot ft = 51.44\cdot kip\cdot ft$$

16. The direction of side lurch may be determined from the obvious fact that the frame will always lurch in a direction opposite to the AJR. If required, the magnitude of this side lurch may be found. The procedure which follows will apply.

A force P of sufficient magnitude to result in the indicated column moments and the lurch Δ was applied to the frame. During the second balance this value of Δ was held constant as the joints B and C rotated, and the value of P was considered to vary as necessary. The final value of P was found to be 4.45 kip. Since Δ was held constant, however, its magnitude may be determined from the equation $M = 6EI\cdot\frac{\Delta}{L^2}$, where M is the fixed-end moment for either column, I is the moment of inertia for that column, and L is the length. This Δ will be the lurch for 4.45 kip acting at the top level. For any other force acting horizontally, Δ would vary proportially and thus the final lurch of the frame would be the factor z multiplied by Δ determined above.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

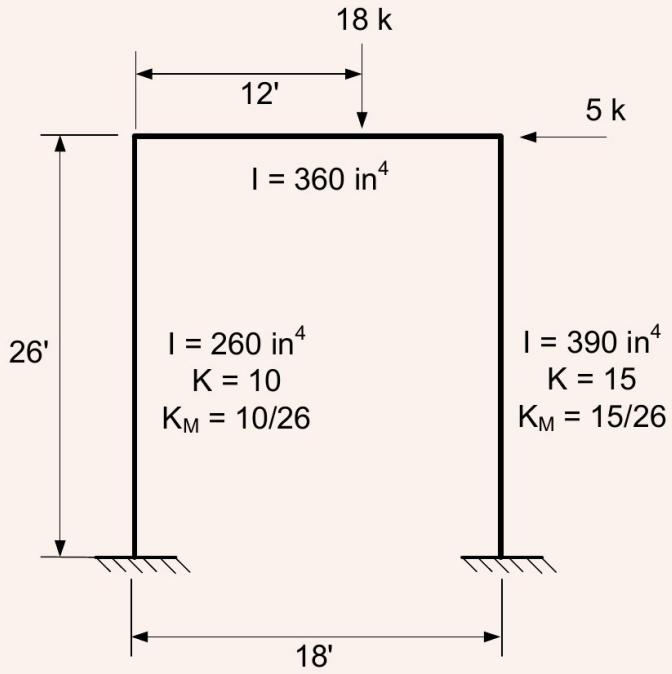
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

16.10 Frame with Side Load

Find by moment distribution the moments in the following frame



Solution:

The first balance will give the results shown

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0

A check of the member BC as a free body for $\Sigma H = 0$ will indicate that an AJR is necessary as follows:

$$AJR + 0.84kip - 0.87kip - 5kip = 0$$

from which

$$AJR := 5kip + 0.87kip - 0.84kip = 5.03 \cdot kip$$ in the direction assumed

The values of K_M for the two columns are shown, with K_M for column CD being K/2L because of the pin at the bottom. The horizontal displacement Δ of the top of the frame is assumed to cause the fixed-end moments shown there. These moments are proportional to the values of K_M and of approximately the same order of magnitude as the original fixed-end moments due to the real loads. The results of balancing out these moments are

AB	BA	BC	CB	CD	DC
-34.4	-28.4	28.4	23.6	-23.6	0

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$CJF := \frac{34.4kip\cdot ft + 28.4kip\cdot ft + 23.6kip\cdot ft}{26ft} = 3.323\cdot kip$$

and

$$5.03 - 3.32z = 0$$

from which

$$z := \frac{5.03kip}{CJF} = 1.514$$

The final results are

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
M from 1st balance	-7.2	-14.6	14.6	-22.5	22.5	0
z x M 2nd balance	-52.1	-43	43	35.8	-35.8	0
Final moments	-59.3	-57.6	57.6	13.3	-13.3	0

If these final moments are correct, the sum of the column shears will be 5 kip

$$\Sigma V := \frac{59.3\cdot kip\cdot ft + 57.6kip\cdot ft + 13.3kip\cdot ft}{26ft} = 5.01\cdot kip$$

The 5 kip horizontal load acting at C enters into the problem only in connection withthe determination of the AJR. If this load had been applied to the column CD between the ends, it would have resulted in intial fixed-end moments in CD and these would be computed in the usual way. In addition, such a load would have enetered into the determination of the AJR, since the horizontal reaction of CD against the right end of BC would have been computed by treating CD as a free body.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

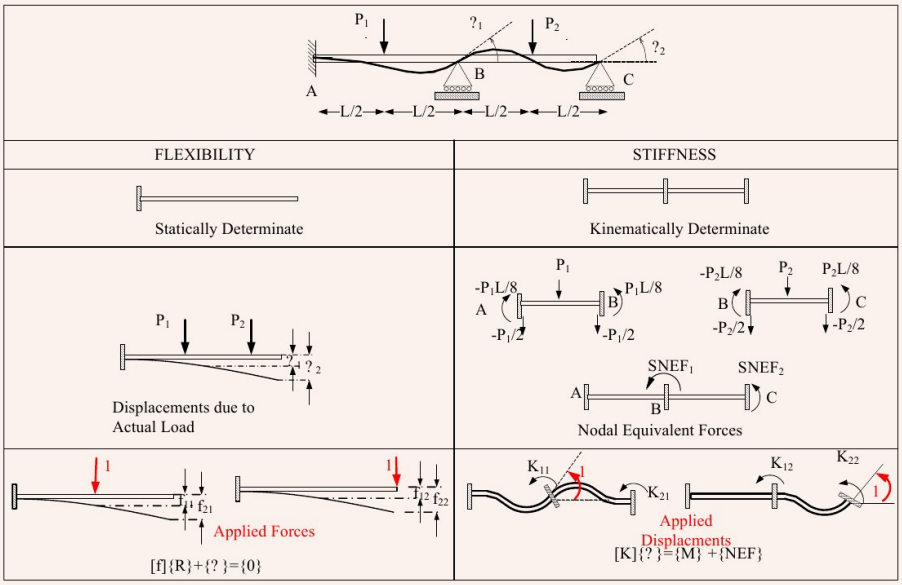
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

17.1 Beam

Considering the figure, let $P_1 = 2P$, $M = PL$, $P_2 = P$, and $P_2 = P$. Solve for the displacements.



Solution:

1. Using the previously defined sign convention (counterclockwise positive)

$$\Sigma NEF_1 = \frac{P_1 \cdot L}{8} - \frac{P_2 \cdot L}{8} = \frac{2P \cdot L}{8} - \frac{P \cdot L}{8} = \frac{P \cdot L}{8}$$

$$\Sigma NEF_2 = \frac{P \cdot L}{8}$$

2. If it takes 4EI/L (k_{44AB}) to rotate AB and 4EI/L (k_{22BC}) to rotate BC, it will take a total force of 8EI/L to simultaneously rotate AB and BC (Note that a rigid joint is assumed)

3. Hence, K_{11} which is the sum of the rotational stiffnesses at global d.o.f. 1, will be equal to $K_{11} = \frac{8EI}{L}$; similarly, $K_{21} = \frac{2EI}{L}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

(k_{42BC})

4. If we rotate dof 2 by a unit angle, then we will have $K_{22} = \frac{4EI}{L}$ and $K_{12} = \frac{2EI}{L}$

5. The equilibrium relation can be written as

$$\begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PL \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

We note that the matrix corresponds to the structure's stiffness matrix, and not the augmented one.

6. The two by two matrix is next inverted

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} PL + \frac{PL}{8} \\ \frac{PL}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ \frac{-5}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix}$$

7. Next we need to determine both the reactions and the internal forces.
8. Recall that for each element $\mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}$, and in this case $\mathbf{p} = \mathbf{P}$ and $\boldsymbol{\delta} = \Delta$ for element AB. The element stiffness matrix has been previously derived, and in the case of the global and local d.o.f. are the same.
9. hence, the equilibrium equation for element AB, at the element level, can be written as

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2P}{2} \\ \frac{2PL}{8} \\ \frac{2P}{2} \\ \frac{-2PL}{8} \end{pmatrix}$$

Solving

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{107}{56} \cdot P & \frac{31}{56} \cdot PL & \frac{5}{56} \cdot P & \frac{5}{14} \cdot PL \end{pmatrix}$$

10. Similarly, for element BC:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{112} \cdot \frac{P \cdot L^2}{EI} \\ 0 \\ \frac{-5}{} \cdot \frac{P \cdot L^2}{} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 112 & EI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

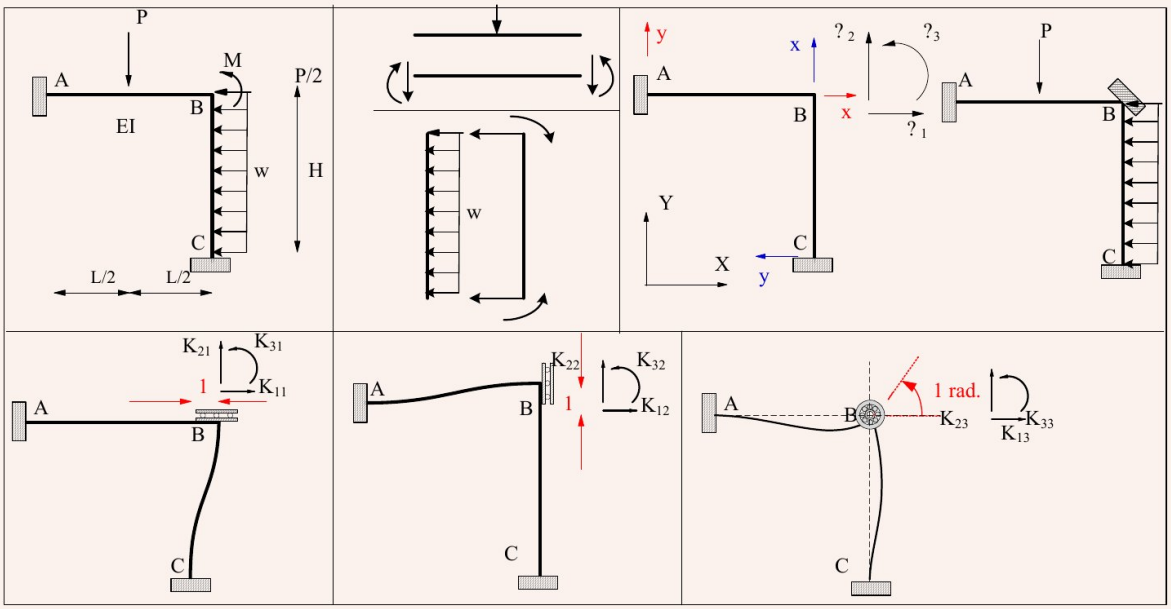
or

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\cdot P & \frac{9}{14}\cdot PL & \frac{-1}{7}\cdot P & 0 \end{pmatrix}$$

11. This simple example calls for the following observations:
    a) Node A has contributions from element AB only, while node B has contributions from both AB and BC
    b) We observe that $p_{3AB} \neq p_{1BC}$ even though they both correspond to a shear force at node B, the difference between them is equal to the reaction at B. Similarly, $p_{4AB} \neq p_{2BC}$ due to the externally applied moment at B
    c) From this analysis, we can draw the complete free body diagram and then the shear and moment diagrams which is what the engineer is most interested in for design purposes.

17.2 Frame

Whereas in the first example all local coordinate systems were identical to the global one, in this example we consider the orthogonal frame shown below.



Solution:

1. Assuming axial deformations, we do have three global degress of freedom Δ_1, Δ_2, and θ_3.
2. Constrain all degrees of freedom, and thus make the structure kineamatically determinate.
3. Determine the nodal equivalent forces for each element in its own local coordinate system (the first three values are associated with the first node, and the last three with the second node):

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

with the first node, and the last three with the second node):

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-P}{2} & \frac{-PL}{8} & 0 & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} \end{pmatrix} \quad \text{Member AB}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & v_1 & m_1 & p_2 & v_2 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{-w\cdot H^2}{12} & 0 & \frac{-wH}{2} & \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix} \quad \text{Member BC}$$

4. Summing the nodal equivalent forces at node B in global coordinates we have

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-wH}{2} & \frac{-P}{2} & \frac{PL}{8} - \frac{w\cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

5. Next, we apply a unit displacement in each of the three global degrees of freedom, and we seek to determine the structure global stiffness matrix. Each entry K_{ij} of the global stiffness matrix will correspond to the internal force in degreee of freedome i, due to a unit displacement in degree of freedom j.

6. Recalling the force displacement relations derived earlier, we can assemble the global stiffness matrix in terms of contributions from both AB and BC.

		K_{i1} Δ_1	K_{i2} Δ_2	K_{i3} Δ_3
K_{1j}	AB	EA/L	0	0
	BC	$12EI/H^3$	0	$6EI/H^2$
K_{2j}	AB	0	$12EI/L^3$	$-6EI/L^2$
	BC	0	EA/H	0
K_{3j}	AB	0	$-6EI/L^2$	4EI/L
	BC	$6EI/H^2$	0	4EI/H

7. Summing up, the structure global stiffness matrix [**K**] is

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}$$

8. The global equation of equilibrium can now be written

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} \\ 0 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{wH}{2} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{2} + \frac{w\cdot H^2}{2} \end{pmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} H^2 & L^2 & L & H \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 12 \end{pmatrix}$$

9. Solve for the displacements

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-P}{2} - \frac{wH}{2} \\ \frac{-P}{2} \\ M + \frac{PL}{8} - \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

10. To obtain the element internal forces, we will multiply each element stiffness matrix by the local displacements. For element AB, the local and global coordinates match, thus

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{-PL}{8} \end{pmatrix}$$

11. For element BC, the local and global coordinates do not match, hence we will need to transform the dispalcements from their global to their local components. But since vector (displacement and load) and matrix transformation have not yet been covered, we not by inspection that the relationship between global and local coordinates for element BC is

Local	δ_1	δ_2	θ_3	δ_4	δ_5	θ_6
Global	0	0	0	Δ_2	$-\Delta_1$	θ_3

and we observe that there are no local or global displacements associated with dof 1-3; Hence, the internal forces for element BC are given by:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

Structural Analysis
Prof. Victor Saouma
Prepared by Christopher Segura

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta_2 \\ -\Delta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ -\frac{w \cdot H^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wH}{2} \\ \frac{w \cdot H^2}{12} \end{pmatrix}$$

Note that the element is defined as going from C to B hence x,y,z correspond to Y, -X, Z.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

审阅稿

K 地震记录过滤 (快速转型)

摘要

此附件解释了使用 *Fast Fourier Transform* 过滤地震加速度记录 *(FFT) Butterworth* 过滤方法 理论将信号代表性从时间域转移到频率域, 分解信号为不同频率的组成部分和同位功能。通过操纵频率内容, 可以删除不需要的噪音和高频组件, 同时保持记录的物理意义部分。附件涵盖了 *Fourier* 系列和转型的数学基础, 实用过滤算法以及在结构设计和分析中常用的强动地震记录应用。

K.1 如何处理 Fourier 转型 2682

可能需要从地震记录中过滤高频 (特别是强动记录。). 此部分解释了简单的程序。

我们习惯于在时间域中考虑一个信号, 即 $f(t)$. 但是, 在频率领域考虑它们有好处。

Fourier 系列提供了一个替代的方式来代表数据: 而不是作为时间函数的信号宽度, 我们以不同频率所包含的信息数量来代表信号。图 K.1 显示时间和频率域中的附加噪音的和谐信号。

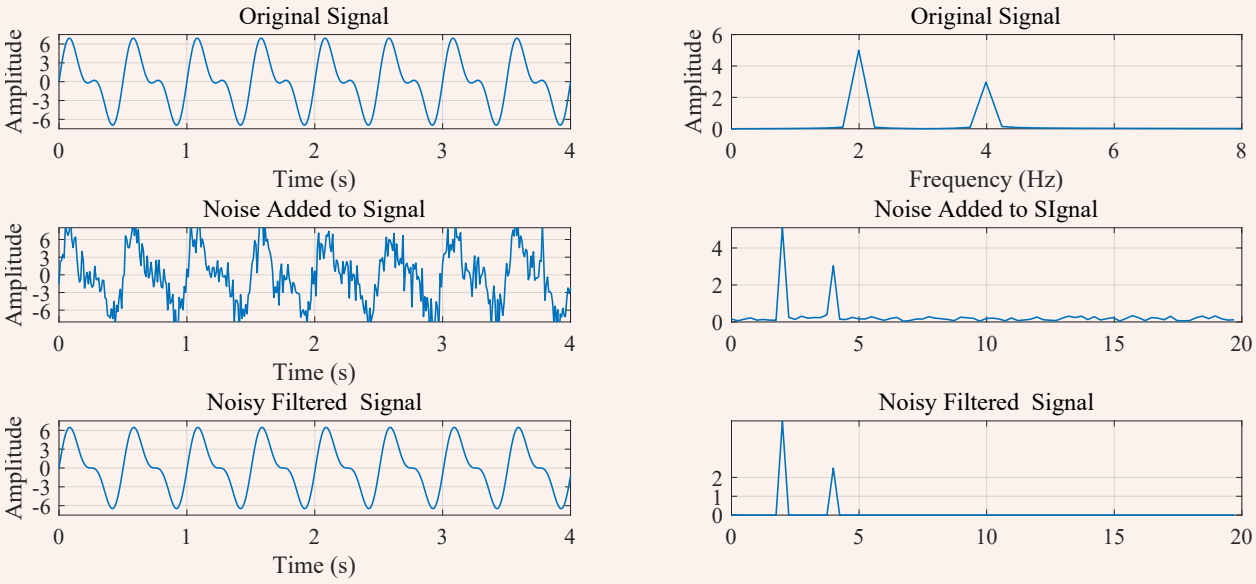


图 K.1: Butterworth 过滤信号的例子

审阅稿

4 Fourier transforms 使我们能够将一个信号从时间域转移到频率域, 通过将其分解为不同频率的阴道和同胞的集合。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi\omega t} \mathrm{d}t$$

$$x(t) \overset{\text{FFT}}{\longrightarrow} X(\omega)$$

5 而相反的 FFT 将我们从频率域带回时间域, 通过:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{2i\pi\omega t} \mathrm{d}\omega$$

$$X(\omega) \overset{\text{FFT}^{-1}}{\longrightarrow} x(t)$$

6 一旦我们在频率域, 特殊过滤器 (特别是所谓的 Butterworth 过滤器), 可以使用, 直到我们回到时间域 (与过滤数据). 其中一些最常见的 Butterworth 过滤器包括, 图 K.2:

$$|H(j\omega)|^2 = \begin{cases} \text{Low pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \\ \text{High pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band pass} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_U}{\omega}\right)^{2n}} \\ \text{Band stop} & \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^{2n}} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_U}\right)^{2n}} \end{cases}$$

哪里 ω, ω_L, ω_U, 和 n 是频率、底部和顶部过滤器的频率, 分别是过滤机的顺序。

K.1 如何处理 Fourier 转型

在实践中, 有两种不同的情况出现:

(a) 转变一个持续的功能 $x(t)$ 是需要的。
(b) 需要完成记录的数据集的转换 (地震工程的常见案例).

(a) Fourier 转变一个持续的功能

以持久的功能 $x(t)$ 定义为 $(-\infty, \infty)$ 福利转型被定义为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

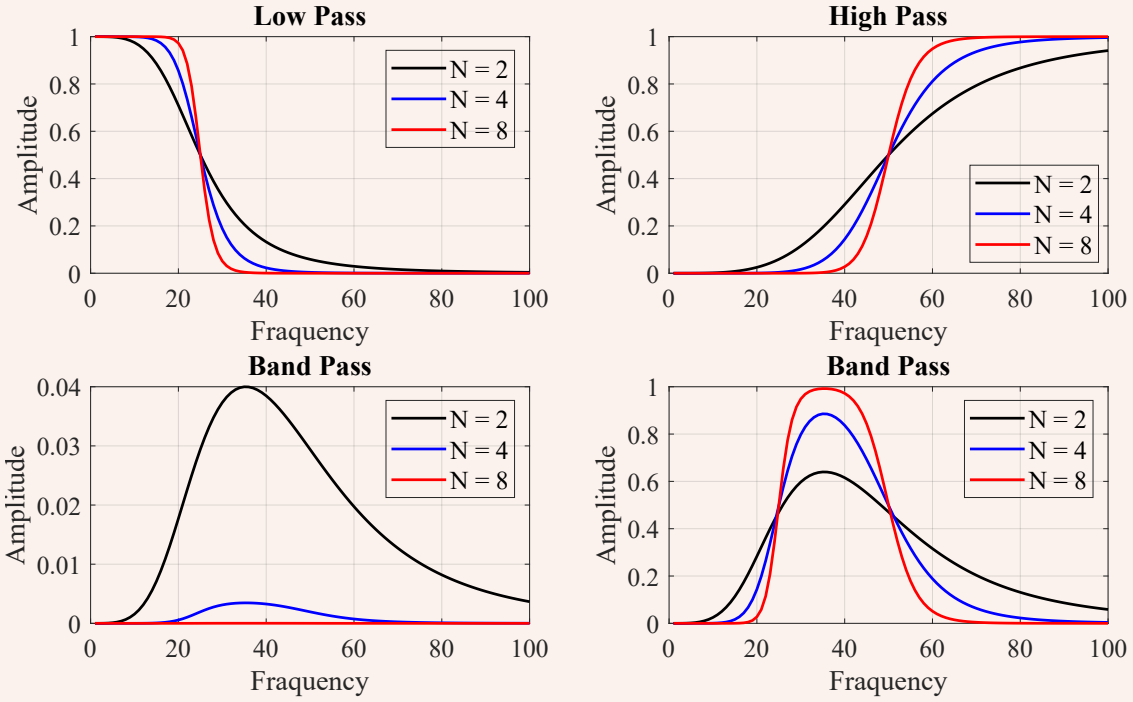


图 K.2: 不同类型的 Butterworth 过滤器的比较 n

程序是:

1. 定义函数 $x(t)$ 分析的。
2. 将其替换为整体。
3. 评估整体 (分析, 如果可能的话).

例如, 考虑到和谐功能。

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t).$$

使用 Euler 的身份,

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right),$$

转型收益的冲动 $\omega = \pm\omega_0$ 表明一个纯粹的和谐能量在单一频率上含有能量。

在许多结构应用中, 特别是振动分析, 关闭形状转换被用来理解频率内容、响声和稳定性行为。

(b) Fourier 转换一个终端数据集 (DFT 和 FFT)

在地震工程中, 我们不处理连续功能, 而是用样品数据:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$$

以统一时间间隔进行样本 Δt.

总长度是

$$T = N\Delta t,$$

样品频率是

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}.$$

可怕的 Fourier 转型 (DFT) 被定义为

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

相反的转变是

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi kn/N}.$$

快速四人转型 (FFT) 它只是一个有效的数值算法来计算 DFT 在 $O(N \log N)$ 行动而不是 $O(N^2)$.

频率分辨率和尼基斯特频率

两个重要量直接从样品理论中跟随:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \tag{K.1}$$

$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}. \tag{K.2}$$

- Δf 确定频率分辨率。
- f_{Nyquist} 它是可以代表的最高频率, 而无需连接。

因此, 对于地震记录:

- 高样品率 $\rightarrow$ 更大的尼基斯特频率。
- 长寿 $\rightarrow$ 更好的频率分辨率。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

地震记录的实用程序

基于地震的加速度记录:

1. 取消意思 (基准修正).
2. 可选使用窗口 (汉宁, 哈明).
3. 计算 FFT。
4. 通过选择的过滤器函数多重 $H(\omega)$.
5. 计算相反的 FFT。
6. 接收结果的真实部分。

它产生了过滤的时间历史。

该程序在一 MATLAB® 代码在 §I.5.3.

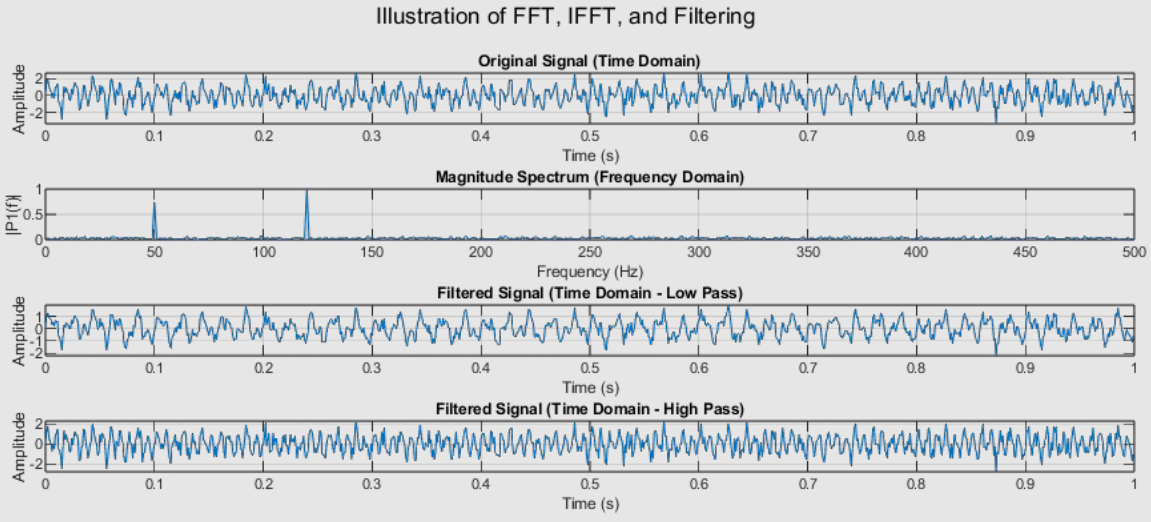
例题 K.1: FFT

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

组合信号是通过将两个同位素组成部分与频率相结合而形成的。$f_1 = 50$ Hz 和 $f_2 = 120$ Hz. 随机噪音被添加到信号模拟一个更现实的场景。

FFT 用于将信号转化为频率域, 揭示光谱组件及其大小。

IFFT 从其频率域代表性中重建原始信号, 展示转变的可逆性质。



- **原始信号:** 时间域信号显示同步组件的结合效应和添加噪音。
- **频率频谱:** FFT 揭示主导频率组件 (50 Hz 和 120 Hz) 在信号中。
- **低通道过滤信号:** 低通道过滤器会消除高频噪音, 并将组件保持在切割频率以下。(100 Hz).
- **高通过滤信号:** 高通道过滤器移除低频组件, 保持高于切割频率的组件 (100 Hz).

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- **重建信号:** IFFT 精确重建过滤和原始信号, 证明转型可逆转。

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

L 关于线性阿尔及利亚的评论

摘要

由于一个结构的分辨到极限数量的节点, 解决方案将基于矩阵。在某个时候, 一个矩阵将不得不 "逆转" 解决移居问题。

因此, 本章节将为读者提供线性算法的简短概述, 尽管我们依赖于构建在函数为矩阵逆转 (如如 入口 在 *MATLAB*® 或 主持人:`inv(a)` 在 *Python*), 不同选项背后的算法应该有时被理解。

L.1 关于矩阵 2687
L.1.1 定义 2687
L.1.2 基本 矩阵 操作 2689
L.1.3 定义者 2690
L.1.4 投资 2691
L.2 线性方程式的解决方案 2691
L.2.1 策略 2691
L.2.2 解体 2692
L.2.3 间接方法 2698
L.3 矩阵 特性和计算改进 2698
L.3.1 独特性和排名 2698
L.3.2 自我价值与自我 vectors . . . 2699
L.3.3 条件号 2700
L.3.4 条件前 2700
L.4 例子 2702
L.4.1 例题 L.1: Gauss 排除 2703
L.4.2 例题 L.2: 加乌斯 - 约旦排除 . 2704
L.4.3 例题 L.3: **lu** 解体 2705
L.4.4 例题 L.4: 霍尔斯基的分裂 . . 2706
L.4.5 例题 L.5: 加斯西德尔 2707
L.4.6 例题 L.6: 盖斯 • 塞德尔 . . . 2708
L.4.7 例题 L.7: 单一价值分解 . . . 2708
L.4.8 例题 L.8: 预条件 2709

L.1 关于矩阵

L.1.1 定义

矩阵:

$$[A] = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

我们将指示矩阵的尺寸为 $\mathbf{A}_{m\times n}$, and refer to an individual term of the matrix as A_{ij}. 请注意, 当分子和 vectors 通常在类型时, 会出现大胆的面孔, 或者用手写的时, $\tilde{A}$.

维克特: 是一个 柱 矩阵:

$$\{X\} = \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{Bmatrix}$$

一个序列 向量 将是

$$\mathbf{C}^T = \lfloor C \rfloor = \lfloor \begin{array}{ccccccc} B_1 & B_2 & \dots & B_i & \dots & B_m \end{array} \rfloor$$

请注意, 尺寸、vectors 和 matrices 是 0 序列 1 的 tensors。2 相应。

广场 矩阵: 它们是具有平等数量的行和列的矩阵。$\mathbf{A}_{m\times m}$

同义: $A_{ij} = A_{ji}$

身份 矩阵: 是平方 矩阵 , 其所有输入均为除一号等于一号的字符外, 零。经常被称为如 $\mathbf{I}$, 和

$$I_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ 1, & if\, i = j \end{cases}$$

字体 矩阵: 是平方 矩阵 , 其所有输入均为除了与零不同的图形术语。经常是被称为 $\mathbf{D}$, 和

$$D_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i \neq j \\ \neq 0, & if\, i = j \end{cases}$$

上方三角 矩阵: 这是一个平方 矩阵 与其所有输入等于零, 除非沿着和超越图表。经常是被称为 $\mathbf{U}$, 和

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i > j \\ \neq 0, & if\, i \leq j \end{cases}$$

下方三角形矩阵: 这是一个平方 矩阵 与其所有输入等于零, 除非在 diagonal 沿线和下方。经常是被称为 $\mathbf{L}$, 和

$$L_{ij} = \begin{cases} 0, & if\, i < j \\ \neq 0, & if\, i \geq j \end{cases}$$

正统矩阵: $\mathbf{A}_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B}_{m\times n}$ 是说是正义的, 如果 $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$

四方 矩阵 $\mathbf{C}_{m\times m}$ 是正统的 if $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$

矩阵的跟踪: $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

主持人: 例如, 在 矩阵 中有矩阵。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hline 10 & 3 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 &= [4]\,[3 \;\; 2] = [12 \;\; 8] \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 14 & 34 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

像我们在个人 矩阵 上运行一样在子矩阵上运作单元.

L.1.2 基本 矩阵 操作

1. **转换:** 由 矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 是另一個 矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T_{n\times m}$ 这样的那 $B_{ij} = A_{ji}$ 請注意這
$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$
2. **添加 (微笑):** $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n} + \mathbf{C}_{m\times n}$; $A_{ij} = B_{ij} + C_{ij}$
3. **Scalar 多元化:** $\mathbf{B} = k\cdot\mathbf{A}$; $B_{ij} = kA_{ij}$
4. **矩阵 多元化:** 兩個数字是可能的, 如果第一列的列等于第二列的行数。
$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{m\times n} &= \mathbf{B}_{m\times p}\cdot\mathbf{C}_{p\times n} \\
A_{ij} &= \underbrace{\lfloor\mathbf{B}_i\rfloor_{1\times p}\cdot\left\{\mathbf{C}_j\right\}_{p\times 1}}_{1\times 1} \\
&= \sum_{r=1}^{p} B_{ir}C_{rj}
\end{aligned}
$$

矩阵产品的一些重要特性包括:

合伙人: $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

分布式: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

非交换性: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

L.1.3 定义者

5 矩阵 的 行列式 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 被称为 $\det \mathbf{A}$ 或 $|\mathbf{A}|$ 它被重复定义为

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j}$$

哪里 $\mathbf{A}_{1j}$ 是的, $(n-1)$x$(n-1)$ 矩阵 通过排除以以以为列和以以為 柱 的 矩阵 $\mathbf{A}$.

6 為 A 2×2 矩阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a21$$

為 A 3×3 矩阵

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \end{aligned}$$

7 可以挑战写一个计算机程序来计算行列式的 $n\times n$ 矩阵.

8 我们注意到, 一个 $n\times n$ 矩阵 會有 行列式包含 $n!$ 每一个内容都涉及 n 多元化。因此, 如果 $n = 10$ 會有 $10! = 3,628,800$ 各式各樣的内容, 包括 9 因此, 超过 30 万个浮动行动将是以评估 行列式 的目的进行。这就是为什么使用克拉默的规则来解决线性方程式系统是不实用的。

9 抑制剂的一些重要特性:

1. 一个矩阵的转移决定性相当于决定性矩阵

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$$

2. 如果至少一个行或一个柱是线性组合的其他行或列, 然后行列式是零。相反的也是是的, 如果 行列式 等于零, 那么至少一个行或一个柱 是其他行或列的线性组合。
3. 如果线条之间有线性依赖, 那么也有一种列之间和 **相反**.
4. 一个上方或下方三角形矩阵的决定性相当于主要的图形术语。
5. 行列式的两个平方矩阵的产品相当于个体决策者的产品

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

10 独特性和排名正在讨论中 §45.1.1 与硬度矩阵相结合。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

L.1.4 投资

11 广场的逆转 (无人) 矩阵 $\mathbf{A}$ 被称为 $\mathbf{A}^{-1}$ 而且是这样的

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

12 一些观察

1. 矩阵的转换相同于转换。相反的
$$\mathbf{A}^{T^{-1}} = \mathbf{A}^{-1^T}$$
2. 矩阵产品的逆转是产品的逆转。逆转
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$
3. 相同的矩阵的逆转也相同。
4. 相反的 diagonal 矩阵 是另一个 diagonal 一。输入相当于原始 矩阵 的输入的逆转。
5. 三角形矩阵的逆转是三角形模型。
6. 计算机上更有效地解体一个矩阵 ($\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$) 使用上层和下层分解或加斯排除) 而不是转换以 矩阵。

L.2 线性方程式的解决方案

L.2.1 策略

13 正如我们讨论的 §45.2.1 解体是决定关键的步骤 $\mathbf{K}^{-1}$.

14 我们正在寻求解决 $\mathbf{x}$ 在线性方程式中

$$\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

象征性 此操作代表:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

15 一般来说, 这项操作有三种方法:

直接投资 使用 Cramer 的规则 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{[adj\mathbf{A}]}{\mathbf{A}}$. 然而, 这种方法在计算方面非常不有效。$n \geq 3$ 因此, 需要评估 n 高级决策者。它从未被使用 (除了手动转换的 A 2×2 矩阵).

解体: 在最常见的情况下, 我们试图分解

$$\mathbf{A} \to \mathbf{LDU}$$

这种方法具有完成数量的操作, 需要实现分解结果。准确的结果。

间接方法: 或以色列分解技术, 没有 **首位** A 了解所需的操作数量, 以用户定义准确度为约的解决方案。

16 主要解决方案方法显示在表中 L.1.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 L.1: 线性方程式的解决方法

方法	b	直接	$\mathbf{A}^{-1}$
盖斯	是的	是的	No
加斯 - 约旦	是的	是的	No
L - U	No	是的	是的
霍尔斯基	No	是的	是的
盖斯 • 塞德尔	是的	No	No

L.2.2 解体

17 在此类解决方案中, 我们将利用三项基本序列操作, 可在矩阵上使用:

1. 交换两行的位置。
2. 多重一行, 以非零尺寸。
3. 添加或下调一个行中的多个扩展器到另一个行。

L.2.2.1 Gauss 排除

18 将方程式转化为 **艾希隆** 形成和通过后置替代解决未知变量。

$$\mathbf{A}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\} \rightarrow \mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$$

19 序列 echelon 形状是 diagonal 矩阵 在那里, 在一个领先的比例下的所有输入都是零。

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{mm} \end{bmatrix}$$

20 请注意, 这种方法将简单地提供解决方案。$\mathbf{x}$ 而不是为了 $\mathbf{A}^{-1}$.

L.2.2.2 加斯 - 约旦排除

21 方法是加斯消灭的延伸, 而不是转变 $\mathbf{A}$ 进入 $\mathbf{U}$ 它将包含未知变量的方程式转化为 **缩小** *Echelon* **形状** (一个, 主要图表中的所有输入均为 1, 而其他所有输出均为 0 的值。$\mathbf{I}$)

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$$

因此, 不需要背部替代, 可以明确获得矩阵逆转。

22 请注意, 加斯-约旦产生了方程式的解决方案以及原始矩阵的逆转。需要三次 (n^3) 比 Gauss 或 LU 分解更多操作 $(\frac{n^3}{3})$.

23 程序

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- 交换行, 以便所有零输入的行都在底部。
- 换行, 以便最大的、左最不零输入的行在顶部。
- 通过一个扩展器增加顶行, 以便顶行的领先输入成为 1。
- 添加/提取上行的多元到其他行, 以便在 柱 中包含上行领先输入的所有其他输入都是零。
- 重复步骤 2-4 为下一个左最不零输入, 直到所有领先输入为 1。
- 换行, 以便每个非零行的主要输入在上行的主要输出右侧。

L.2.2.3 LU 解体

24 加西亚排除和加西约旦排除都使用增强的矩阵 $[A|b]$, so **b** 必须知道。相反, LU 分解只使用 矩阵 **A**, 所以一旦因子化完成, 它可以适用于任何向量 **b**.

25 事实上, 在某些应用程序中, 可能有意解体矩阵而没有完成 RHS。例如, 在 直接刚度法 我们可能有多个 荷载 案例, 但我们只想转换一次的 刚度矩阵. 这将通过下列分解实现:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{LU}$$

26 解决方案包括:

解体: 矩阵 右手侧 向量

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

背部替代: 右手各方 向量

1. 解决为 $\{\mathbf{y}\}$ 从 $\mathbf{L}\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{b}\}$ 从顶部开始
2. 解决为 $\{\mathbf{x}\}$ 从 $\mathbf{U}\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y}\}$ 从底部开始

27 向量的评论 **y** 与此相同, 与其相同。**b** 在加斯排除中被减少到。

28 算法上:

1. 被告:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

2. 解决:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = u_{11} && a_{12} = u_{12} \cdots && a_{1n} = u_{1n} \\
&a_{21} = l_{21}u_{11} && a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} && a_{2n} = l_{21}u_{1n} + u_{2n} \\
&\vdots \\
&a_{n1} = l_{n1}u_{11} && a_{n2} = l_{n1}u_{12} + l_{n2}u_{22} && a_{nn} = \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn} + u_{nn}
\end{aligned}$$

3. 让:

$$\mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

4. 按行列或列列列

$$\begin{aligned}
l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} && i > j \\
u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} && i \le j \\
l_{ii} &= 1
\end{aligned}$$

计算 单元 l_{ij} 或 u_{ij} 可以随时过写相应的 单元 a_{ij}

29 步骤一步:

$$\begin{aligned}
[A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

30 替代, 柱 由 柱

$$\begin{aligned}
\lfloor\ L_{11}^{\checkmark} \quad L_{21}^{\checkmark} \quad L_{31}^{\checkmark}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}\ \rfloor && \text{Column 1} \\
\lfloor\ L_{11}U_{12} \quad L_{21}U_{12} + L_{22} \quad L_{31}U_{12} + L_{32}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{12}^{\checkmark} \quad L_{22}^{\checkmark} \quad L_{32}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 2} \\
\lfloor\ L_{11}U_{13} \quad L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \quad L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}\ \rfloor &= \lfloor\ A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}\ \rfloor \Rightarrow \lfloor\ U_{13}^{\checkmark} \quad U_{23}^{\checkmark} \quad L_{33}^{\checkmark}\ \rfloor && \text{Column 3}
\end{aligned}$$

每一步, 解决 n 未知的。

31 即使 $\mathbf{A}$ 是同步的 $\mathbf{L}^T \neq \mathbf{U}$.

32 在 MATLAB® `x = A\b` 更受欢迎 `x = inv(A)*b` 如果一个人只是在寻找 $\mathbf{x}$ 和不 $\mathbf{A}^{-1}$. 入口在转换中, 使用 LU 或 LDL 分解。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

33 对于同步矩阵,LU 分解减少到:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad i \leq j \\ l_{ii} &= 1 \\ l_{ij} &= \frac{u_{ji}}{u_{jj}} \end{aligned}$$

L.2.2.4 霍尔斯基的分裂

34 If $\mathbf{A}$ 是同步的 $\mathbf{A}^F$ 是的不是。例如:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ .25 & 1 & \\ .5 & -1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ & 4 & -6 \\ & & 9 \end{bmatrix}$$

35 但是, 我们总是可以分解 $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{U}^{*^T}$$

而对于同步矩阵, 这将减少到

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{L}^* \mathbf{D} \mathbf{L}^{*^T}$$

36 此外, diagonal 矩阵 $\mathbf{D}$ 它可以作为两个矩阵的产物进行因素化: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ 这样:

$$\mathbf{A} \rightarrow \underbrace{[\mathbf{L}^*]\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}[\mathbf{L}^*]^T}_{\mathbf{L}^T}$$

37 步骤一步

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & A_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

38 然后我们可以沿着列跑, 并获得

$$\begin{aligned} \lfloor\ L_{11} \quad L_{21} \quad L_{31}\ \rfloor &= \sqrt{A_{11}} \quad \tfrac{A_{12}}{L_{11}} \quad \tfrac{A_{13}}{L_{11}}\ \rfloor \quad \text{Column 1} \\ \lfloor\ L_{22} \quad L_{32}\ \rfloor &= \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} \quad \tfrac{A_{32} - L_{21}L_{31}}{L_{22}}\ \rfloor \quad \text{Column 2} \\ L_{33} &= \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \quad \text{Column 3} \end{aligned}$$

39 显而易见的 diagonal 术语必须是积极的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

40 这个算法可以总结为:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1}}{l_{jj}} \qquad i > j$$

L.2.2.5 单一价值分解

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

41 单一价值分解 (SVD) 这是一个多元化的数学工具, 它分解任何 $m \times n$ 矩阵 A 三个简单、精确的矩阵。它被表达为:

$$A = U\Sigma V^T$$

哪里:

- U $(m \times m)$ 是正方形矩阵 , 其列为 **单一 vectors** 由 A.
- Σ $(m \times n)$ 是矩阵的图形, 包含 **独特的价值** $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0)$ 由 A.
- V^T $(n \times n)$ 是正方形矩阵 , 其序列为 **单一 vector** 由 A.

42 单一价值 (σ_i) 反映相应单元 vectors 的重要性, 量化每一个为 矩阵 的整体结构做出多少贡献。

43 列的列 U 和 V 形成正统基础的序列和柱空间 A 相应。

44 SVD 转型 A 以更简单的形式, 揭示内在特性, 如等级、范围和零空间。

45 SVD 有多个应用程序, 其中一个是解决线性系统, 特别是对不良条件或单一的矩阵, 传统方法失败。

46 程序如下:

1. SVD 表演
   - 解体 A 进入 U, Σ, 和 V^T.
   - 使用计算工具, 如:
     - 马特拉布: `[U, S, V] SVD(A)`
     - Python 和 Python (纳米): `U, S, Vt = np.linalg.svd(A)`
2. 单一价值分析
   - 检查单元的直径 Σ (独特的价值观).
   - 小或零单值表示: A 可能处于不良条件, 需要调节或过滤以确保稳定的计算。
3. 重建 矩阵
   - 通过重建来验证分解 A:

$$A = U\Sigma V^T$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

4. 解决线性系统为 $Ax = b$:
   - 使用 SVD 表达解决方案:
     $$x = V\Sigma^{+}U^{T}b$$
     哪里 Σ^{+} 是反之亦然的。Σ, 通过转换非零单元值和转移 Σ.
   - 对于不良条件的矩阵:
     - 通过排除单一值在限制之下进行调节, 以稳定计算。
     - 这种方法特别有效, 对于具有非常小单元值的矩阵。
5. 接近 矩阵
   - 用于大小减少或噪音过滤, 切割 Σ 只保留顶部 k 独特的价值 (把其他人放在零。).
   - 重新建造了...k 接近 A:
     $$A_k = U_k\Sigma_k V_k^T$$

47 例如, 给予:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix},$$

1. 计算 SVD:
   - $U =$ 正常基于 A 柱的空间。
   - $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ (singular values).
   - $V^T =$ 正常基于 A 其序列空间。
2. 解决 $Ax = b$ 与 SVD:
   $$x = V\Sigma^{+}U^{T}b$$
3. 调节小单值, 以确保稳定性 A 这是不条件的。

48 事实上,SVD 对于由于近单性或不良调节而难以分解的矩阵特别有效, 为解决方程式、稳定计算和分析矩阵属性的坚实框架。

L.2.2.6 QR 分解

49 QR 解体是线性算法中的基本 矩阵 因素化技术, 其中一个为 矩阵 提供的 $\mathbf{A}$ 它被表达为两个矩阵的产物: $\mathbf{Q}$ 一个正确的 (或统一) 矩阵, 和 $\mathbf{R}$, 一个上方三角 矩阵. 数学上, 这被描述为:

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}.$$

50 这里, $\mathbf{Q}$ 满足 $\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (或 $\mathbf{Q}^{*}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ 在复杂的情况下), 意思是它的列形成一个正统基础。

51 矩阵的评论 $\mathbf{R}$ 它是上方三角形, 在那里下方的所有输入都是零。QR 分解通常适用于直角尺寸矩阵 $m \times n$, 在哪里 $m \geq n$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

L.2.3 间接方法

以色列最适合非常“大型”平衡系统,或者当我们可能有一个初始的“猜想”关于解决方案最受欢迎的方法是 Gauss Seidel。

L.2.3.1 盖斯 • 塞德尔

从我们的线性方程式系统开始

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_{11}x & + & c_{12}y & + & c_{13}z & = & r_1 \\ c_{21}x & + & c_{22}y & + & c_{23}z & = & r_2 \\ c_{31}x & + & c_{32}y & + & c_{33}z & = & r_3 \end{array}$$

解决 1st 平衡为 x_1 使用初步“猜想”为 y, z $(y0, z_0)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{r_1 - c_{12}y_0 - c_{13}z_0}{c_{11}} \\ y_1 &= \frac{r_2 - c_{21}x_1 - c_{23}z_0}{c_{22}} \\ z_1 &= \frac{r_3 - c_{31}x_1 - c_{32}y_1}{c_{33}} \end{aligned}$$

如上 & 如前 ···

注:

1. 二元化过程可以被认为是相匹配的,如果:

$$|\frac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}}{\mathbf{x}^{lk}}| \leq \varepsilon$$

2. 接近可以通过放松加速。

$$x_i^k = \lambda x_i^k + (1 - \lambda)x_i^{k-1}$$

哪里 λ 重量因素是 0 和 2 之间的。低于 1 的值,我们有 **放松**对于价值观,超过 1 我有 **过度放松**. 前者是用于非合并系统的,后者则是用于加速接近的接近。最佳 λ 对于 框架 分析,约为 1.8.

L.3 矩阵 特性和计算改进

L.3.1 独特性和排名

如果 行列式 的 矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 它是零,而矩阵则被称为单一。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

56 正如我们之前所看到的那样, 这意味着至少有一个行或一个柱是其它的线性组合。

57 线性方程式系统的独特性和排名概念与相关方程元矩阵的本值密切相关。

58 基于一个平方 矩阵 $\mathbf{A}$ 尺寸 $n \times n$, 矩阵的独特性是由其决定性的确定。矩阵 是单一的, 如果和只有它的 行列式 是零, 这意味着它缺乏完整的排名。

59 这种条件直接与自己的价值有关。A 行列式是自己的价值的产物。$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, 在哪里 λ_i 是自己的价值观 $\mathbf{A}$. 如果有 特征值 $\lambda_i = 0$, 行列式变成零, 而矩阵则是单一的。

60 矩阵 的排序代表线性独立行或列的最大数量。$\mathbf{A}$, 它符合矩阵的非零属值数量, 考虑到它们的算法多元性。全方位矩阵的尺寸 $n \times n$ 有所有 n 非零的自己的价值。相反, 如果矩阵的排名是 $r < n$ 然后, 准确 $n - r$ 自己的价值是零。

61 从数值的角度来看, 自我价值也会影响系统的调节。矩阵 具有近零的自我值, 即使不单一, 也可能导致 数值 不稳定性, 强调在线系统理论和实践分析中的自我值的重要性。

62 If n 是全球 刚度矩阵 的尺寸, 其中边界条件未考虑 (n = 等同于节点时间的总数 自由度的总数) 要有一个排名 r 同等的 n 减少可能的硬体数量动机 (3 和 6 分别为二、三维).

63 例如, 在 EQ。44.1, 增長 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 有一个 Rank r 小于 n 當時 $\mathbf{K}_{tt}$ 有 $r = n$.

L.3.2 自我价值与自我 vectors

64 线性方程式系统的特殊形式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix}$$

是右手的一面。这是解决方案的多种:

$$\mathbf{A} \{\mathbf{x}\} = \lambda \{\mathbf{x}\}$$

可以重写的, 如

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \{\mathbf{x}\} = \mathbf{0}$$

65 对这个方程式系统的无可争议的解决方案是可能的, 如果和只有 if $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ 是独一无二的或

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

或

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

66 当行列式扩展时, 我们将获得 n^{th} 多元化规则在 λ 它被称为特征性方程式。**A**. 和 n 解决方案 (可以是真实的或复杂的) 是自己的价值观 **A** 而且, 他们每一个 λ_i 满足

$$\mathbf{A}\left\{\mathbf{x}_i\right\} = \lambda_i\left\{\mathbf{x}_i\right\}$$

哪里 $\{\mathbf{x}_i\}$ 是相应的 特征向量.

可以证明:

1. 和 n 实体交响式排序矩阵的自值 n 都是真实的。
2. 自己的 vectors 是正角的, 形成一个正角基础。E_n.

实体值和实体引导器在稳定中使用 (屈曲) 分析, 动态分析, 并评估最终单元的性能。

L.3.3 条件号

67 矩阵的条件号是线性系统溶液敏感度的测量。$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 在计算过程中输入数据或旋转错误的变化。它定量了产量的数量。(解决方案 **x**) 将因某个输入中出现干扰而改变 **b**.

68 为一個平方 矩阵 **A**, if **A** 可 diagonalizable 或 symmetric positive 定义, 条件号在 2 标准中 (光谱标准) 被定义为:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

哪里 λ_{max} 和 λ_{min} 是最大的和最小的自我价值。(绝对价值) 由 **A** 相应。

69 这个定义意味着:

- $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$ 因为 $\lambda_{max} \geq \lambda_{min} > 0$ 对定义的积极矩阵。
- 一个小 $\kappa(\mathbf{A})$ (接近 1) 意思是, 矩阵是良好的条件, 而一个大值表明不良的矩阵.

L.3.4 条件前

本例由 *OpenAI, 2025* 生成，应谨慎解释。读者在接受其结果之前，应仔细评估其有效性。

70 预条件是一种用于转换一个矩阵的技术。**A** 以改善其 数值 属性的方式, 在应用直接方法解决线性系统之前 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. 目标是使问题更容易解决, 无论是通过减少情况的数量 **A** 或通过简化矩阵分解。

71 原始系统 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 被转换为使用 A **首頁** > **矩阵** **M** 以相同的形式:

72 矩阵的评论 **M** 被选为如下:

- **M** 接近 **A** 更容易转换。
- **M** 是无人。

73 我们讨论了两个类型的预条件, 左和右, 桌子 L.2.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 L.2: 上一篇: 左与右之间的比较

视角	左前条件	正确的预条件
预条件 矩阵	$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$
右手侧	转型为 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$	保持不变 (b)
预条件的行动	两者行动 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$	行动在 $\mathbf{A}$ 不知不觉者通过 $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$
当应用	在解决之前, 完全修改系统。	在解决过程中, 只有未知的变更

L.3.4.1 左前提

74 在左前条件下, 我们转换原始线性系统 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 以改善 数值 的稳定性和效率的形式, 通过预复制 矩阵 因子 $\mathbf{A}$ 和右手侧 向量 $\mathbf{b}$ 相反的前条件 矩阵 $\mathbf{M}$. 预先条件的系统写作如下:

$$\underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{A}'}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{b}'}.$$

75 程序:

1. 预条件 矩阵 ($\mathbf{A}'$):
$$\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}.$$
此分類上一篇: 矩阵 的轉換率 预先条件 $\mathbf{M}$ 被选为如下:
   - $\mathbf{M}$ 接近 $\mathbf{A}$ 但是, 更容易转换。
   - $\mathbf{M}$ 改善条件的 $\mathbf{A}'$, 使数值溶剂更稳定。
2. 右手前方 ($\mathbf{b}'$):
$$\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}.$$
右手侧也被转换为保持与前条件的矩阵一致。
3. 解决预条件系统: 新系统是:
$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'.$$
既然前提条件改变了两者 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$ 我们直接解决了 $\mathbf{x}$ 使用标准技术 (例如, LU 分解).

76 步骤是:

1. 计算 $\mathbf{b}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$.
2. 格式前提的 矩阵 $\mathbf{A}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$.
3. 解决 $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 為 $\mathbf{x}$ 使用直接溶剂。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

L.3.4.2 正确的前提

77 我们开始的是:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

1. 引入替代:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y},$$

哪里 $\mathbf{M}$ 是矩阵的前提, 并且 $\mathbf{y}$ 是新 向量 的未知。这种替代意味着原始解决方案 $\mathbf{x}$ 可以使用:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$

2. 替代 $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ 在原始方程式中:

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{y}) = \mathbf{b}. \implies (\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

3. 现在问题要解决:

$$(\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

4. 解体 $\mathbf{A}\mathbf{M}$ 进入:

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

在哪里:

- $\mathbf{L}$ 是低三角 矩阵。
- $\mathbf{U}$ 是上方三角形矩阵。

5. 要解决 $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ 以两步进行:

(a) 解决 $\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{b}$ 为 $\mathbf{z}$ 使用前置替代。
(b) 解决 $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{z}$ 为 $\mathbf{y}$ 使用后向替代。

6. 解决后, 为 $\mathbf{y}$, 恢复原来的未知 向量 $\mathbf{x}$ 使用:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}.$$

78 桌子 L.3 比较单元值分解与 矩阵 预条件。

L.4 例子

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 L.3: 矩阵 预条件和单一值分解的比较 (SVD)

视角	矩阵 预条件	单一价值分解 (SVD)
目的	加速大型系统的 iterative solvers。	分析 矩阵 结构, 并坚定地解决。
矩阵 尺寸	大型、大型的矩阵。	小到中型矩阵。
无条件	改进调节性, 以色列的 Iterative Solver。	直接处理不良条件。
效率	计算效益为 iterative 方法。	计算机上昂贵但准确。
应用	PDE 的 Iterative 解决方案, 大型模拟。	PCA、数据压缩、噪音过滤、坚固的解决方案。
剧本	重复或大规模问题。	高精度, 分析矩阵结构。

L.4.1 例题 L.1: Gauss 排除

在这个第一例子中, 我们只是试图解决未知的向量 $\{\mathbf{x}\}$ 给予:

$$\begin{cases} +10x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 1. \\ -20x_1 & +3x_2 & +20x_3 & = 2. \\ +5x_1 & +3x_2 & +5x_3 & = 6. \end{cases}$$

1. 添加 $\frac{20}{10}$ 第一次等式与第二次等式有人会消除 x_1 第二方程式的定量。
2. 主条目 $\frac{5}{10}$ 第一次等式从第三次等式有人会消除 x_1 第三方程式的定量。

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10.x_3 & = 4. \\ & +2.5x_2 & +7.5x_3 & = 5.5 \end{cases}$$

3. 主条目 $\frac{2.5}{5}$ 第二次方程式的第三个将消除 x_2 最后方程式的定量

$$\begin{cases} 10.x_1 & +x_2 & -5.x_3 & = 1. \\ & +5.x_2 & +10x_3 & = 4. \\ & & +2.5x_3 & = 3.5 \end{cases}$$

4. 现在我们可以从底部取代和解决:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3.5}{2.5} = 1.4 \\ x_2 &= \frac{4. - 10.x_3}{5.} = -2. \\ x_1 &= \frac{1. - x_2 + 5.x_3}{10.} = 1. \end{aligned}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

L.4.2 例题 L.2: 加乌斯 - 约旦排除

在第二个例子中, 我们将确定两者 $\{\mathbf{x}\}$ 和 矩阵 相反 $\mathbf{A}^{-1}$.

操作与第一个相同, 但我们增加了矩阵 $\mathbf{A}$ 由 $\mathbf{I}$: $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ 同时在两个方面进行操作字母。

1. 初始 矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 3 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \end{array}\right\}$$

2. 排除第一 柱:

   (a) 序列 1 = 0.1(列 1)
   (b) 序列 2=(路 2)+20(新一行 1)
   (c) 序列 3=(列 3) -5(新一行 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.1 & -0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 7.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 0.1 \\ 4 \\ 5.5 \end{array}\right\}$$

3. 排除第二 柱

   (a) 序列 2 = 0.2(路 2)
   (b) 序列 1=(列 1)-0.1(新行 2)
   (c) 序列 3=(列 3) -2.5(新行 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.7 & 0.06 & -0.02 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -1.5 & -0.5 & 1 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} 0.02 \\ 0.8 \\ 3.5 \end{array}\right\}$$

4. 排除第三个柱

   (a) 序列 3 = 0.4(列 3)
   (b) 序列 1=(列 1)+0.7(新系列 3)
   (c) 序列 2=(路 2)-2(新系列 3)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.36 & -0.16 & 0.28 \\ 0 & 1 & 0 & 1.6 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & -0.2 & 0.4 \end{array}\right]\underbrace{\left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1.4 \end{array}\right\}}_{\{\mathbf{x}\}}$$

最后的方程式是 $[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}]$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

L.4.3 例题 L.3: lu 解体

被告:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -7 \\ 1 & 6 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

按照上述程序, 它可以分解为:

路 1: $u_{11} = a_{11} = 7; u_{12} = a_{12} = 9; u_{13} = a_{13} = -1; u_{14} = a_{14} = 2$

路 2:

$$\begin{array}{llll} l_{21} & = \frac{a_{21}}{u_{11}} & = \frac{4}{7} & \\ u_{22} & = a_{22} - l_{21}u_{12} & = -5 - 4\frac{9}{7} & = -10.1429 \\ u_{23} & = a_{23} - l_{21}u_{13} & = 2 + 4\frac{1}{7} & = 2.5714 \\ u_{24} & = a_{24} - l_{21}u_{14} & = -7 - 4\frac{2}{7} & = -10.1429 \end{array}$$

路 3:

$$\begin{array}{llll} l_{31} & = \frac{a_{31}}{u_{11}} & = \frac{1}{7} & \\ l_{32} & = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} & = \frac{6-(0.1429)(9)}{-10.1429} & = -0.4647 \\ u_{33} & = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} & = -3 - (0.1429)(-1) - (-0.4647)(2.5714) & = -1.6622 \\ u_{34} & = a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24} & = -4 - (0.1429)(2) - (-0.4647)(-8.1429) & = -8.0698 \end{array}$$

路线 4:

$$\begin{array}{lll} l_{41} & = \frac{a_{41}}{u_{11}} & = \frac{3}{7} \\ l_{42} & = \frac{a_{42} - l_{41}u_{12}}{u_{22}} & = \frac{-2-(0.4286)(9)}{-10.1429} = -0.5775 \\ l_{43} & = \frac{a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23}}{u_{33}} & = \frac{-1-(0.4286)(-1)-(0.5775)(2.5714)}{-1.6622} = 1.2371 \\ u_{44} & = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} & = -5 - (0.4286)(2) - (0.5775)(-8.1429) - (1.2371)(-8.0698) \\ & & = 8.8285 \end{array}$$

或

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .5714 & 1 & 0 & 0 \\ .1429 & -.4647 & 1 & 0 \\ .4286 & .5775 & 1.2371 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & -10.1429 & 2.571 & -8.143 \\ 0 & 0 & -1.662 & -8.069 \\ 0 & 0 & 0 & 8.8285 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

L.4.4 例题 L.4: 霍尔斯基的分裂

被告:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

柱 1:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} &&= \sqrt{4} &&= 2 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} &&= \frac{6}{2} &&= 3 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} &&= \frac{10}{2} &&= 5 \\ l_{41} &= \frac{a_{41}}{l_{11}} &&= \frac{4}{2} &&= 2 \end{aligned}$$

柱 2:

$$\begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} &&= \sqrt{13 - 3^2} &&= 2 \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{13 - (5)(3)}{2} &&= -1 \\ l_{42} &= \frac{a_{42} - l_{41} l_{21}}{l_{22}} &&= \frac{6 - (2)(3)}{2} &&= 0 \end{aligned}$$

柱 3:

$$\begin{aligned} l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} &&= \sqrt{27 - 5^2 - (-1)^2} &&= 1 \\ l_{43} &= \frac{a_{43} - l_{41} l_{31} - l_{42} l_{32}}{l_{33}} &&= \frac{2 - (2)(5) - (0)(-1)}{1} &&= -8 \end{aligned}$$

柱 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{72 - (2)^2 - (0)^2 - (-8)^2} = 2$$

或

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

L.4.5 例题 L.5: 加斯西德尔

$$\begin{cases} 4x & +2y & +3z & = 8. \\ 3x & -5y & +2z & = -14. \\ -2x & +3y & +8z & = 27. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (8 - 2y_n - 3z_n)/4 \\ y_{n+1} &= (-14 - 3x_{n+1} - 2z_n)/(-5) \\ z_{n+1} &= (27 + 2x_{n+1} - 3y_{n+1})/(8) \end{aligned}$$

假设 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 第一個 iteration 將提供

$$\begin{aligned} x_1 &= (8 - 2\times 0 - 3\times 0)/4 &&= 2 \\ y_1 &= (-14 - 3\times 2 - 2\times 0)/(-5) &&= 4 \\ z_1 &= (27 + 2\times 2 - 3\times 4)/(8) &&= 2.375 \end{aligned}$$

第二次 iteration

$$\begin{aligned} x_2 &= (8 - 2\times 4 - 3\times 2.375)/4 &&= -1.781 \\ y_2 &= (-14 - 3\times(-1.781) - 2\times 2.375)/(-5) &&= 2.6814 \\ z_2 &= (27 + 2\times(-1.781) - 3\times 2.681)/8 &&= 1.924 \end{aligned}$$

第三次 iteration

$$\begin{aligned} x_3 &= (8 - 2\times 2.681 - 3\times 1.924)/4 &&= -0.784 \\ y_3 &= (-14 - 3\times(-0.784) - 2\times 1.924)/(-5) &&= 3.099 \\ z_3 &= (27 + 2\times 2\times(-0.784) - 3\times 3.099)/8 &&= 2.017 \end{aligned}$$

伊特。	x	y	z
1	2.000	4.000	2.375
2	-1.781	2.681	1.924
3	-0.784	3.099	2.017
4	-1.062	2.969	1.996
5	-0.982	3.009	2.001
6	-1.006	2.997	2.000
7	-0.998	3.001	2.000
8	-1.001	3.000	2.000
9	-1.000	3.000	2.000
10	-1.000	3.000	2.000

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

L.4.6 例题 L.6: 盖斯 • 塞德尔

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ 2x+y &=& 8 \end{array}\right. \Rightarrow y=-3-x; \rightarrow y=8-2x \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5 \\ y &=& -2 \end{array}\right.$$

以异常的方式解决:

伊特拉	x	y	$N=x^2+y^2$	$\frac{N_i-N_{i-1}}{N_i}$
1	0	3	9	
2	2.5	0.5	6.5	38.00%
3	3.75	-0.75	14.625	55.56%
4	4.375	-1.375	21.03125	30.46%
5	4.6875	-1.6875	24.82031	15.27%
6	4.84375	-1.84375	26.86133	7.60%
7	4.921875	-1.92188	27.91846	3.79%
8	4.960938	-1.96094	28.45618	1.89%
9	4.980469	-1.98047	28.72733	0.94%
10	4.990234	-1.99023	28.86347	0.47%
11	4.995117	-1.99512	28.93169	0.24%
12	4.997559	-1.99756	28.96583	0.12%

L.4.7 例题 L.7: 单一价值分解

我们试图解决 $\mathbf{y}=\mathbf{Ab}$, 在哪里 $\mathbf{A}$ 是非常不良的 矩阵, 与

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+1e-15 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2+1e-15 \end{bmatrix}$$

1. 通过直接解决方案

$$\mathbf{y}\begin{bmatrix} 1.2000 \\ 0.8000 \end{bmatrix}$$

2. 单一价值分解 (SVD) (使用 MATLAB® 命令 `[U, S, V] SVD(A)`

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S}=\begin{bmatrix} 2.0000 & 0 \\ 0 & 0.0000 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{V}=\begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

3. 构建了反向的假设 $\mathbf{S}$ 与正常化和正常化边界为 1e-6。首先, 我们开始

$$\mathbf{S}_{plus}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 查找所有入口 $\mathbf{S}$ 更大于边界的人, 被逆转者取代。

$$\mathbf{S}_{plus}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

5. 计算了反向的偏见 **A** 使用 SVD

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{plus} &= \mathbf{V}\mathbf{S}_{plus}U' \\ &= \begin{bmatrix}-0.7071 & -0.7071\\ -0.7071 & 0.7071\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.7071 & -0.7071\\ -0.7071 & 0.7071\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0.2500 & 0.2500\\ 0.2500 & 0.2500\end{bmatrix}\end{aligned}$$

6. 用 pseudo-inverse 解决问题

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{SVD} &= \mathbf{A}_{plus}\mathbf{b} \\ \begin{bmatrix}0.2500 & 0.2500\\ 0.2500 & 0.2500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2+1e-15\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

A MATLAB®SVD 的代码被授予 §I.5.4.

L.4.8 例题 L.8: 预条件

矩阵 *A* 其属性

1. 當不良條件的 矩阵 **A** 通常是给予的, 在这种情况下我们将合成构建一个使用关系

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\top}$$

   哪里 **D** 是矩阵与预先选择的自值, 并且 **Q** 是任何正方形 矩阵 (尽管它控制了自己的引导者的方向).

2. 我们采取 **D** 由自己的价值组成 $\{1, 0.1, 0.01\}$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}1.0000 & 0 & 0\\ 0 & 0.1000 & 0\\ 0 & 0 & 0.0100\end{bmatrix}$$

3. 要生成 **Q** 我们首先需要一个随机号码的矩阵

$$\mathbf{Random} = \begin{bmatrix}0.4170 & 0.3023 & 0.1863\\ 0.7203 & 0.1468 & 0.3456\\ 0.0001 & 0.0923 & 0.3968\end{bmatrix}$$

4. **Q** 将是一个正确的 矩阵 从 **Random** 通过其 QR 分解, 产生

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}-0.5010 & 0.7769 & -0.3813\\ -0.8654 & -0.4499 & 0.2206\\ -0.0001 & 0.4405 & 0.8978\end{bmatrix}$$

5. 然后我们决定 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\top}$ 取代:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0.3128 & 0.3978 & 0.0309\\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177\\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275\end{bmatrix}$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

6. 自己的价值观 $\mathbf{A}$ 是:
$$\lambda(\mathbf{A}) = \{1.000, 0.100, 0.010\}$$
(如预期, 如 $\mathbf{A}$ 它是由 $\mathbf{D}$).
7. 條件数字 $\mathbf{A}$ is:
$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{1.0}{0.01} = 100.00$$

预条件 矩阵 M 预条件 矩阵 $\mathbf{M}$ 将由霍尔斯基分裂产生的 $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$ 在哪里:
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.5593 & 0 & 0 \\ 0.7112 & 0.5136 & 0 \\ 0.0552 & -0.1109 & 0.1101 \end{bmatrix}$$
和:
$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \begin{bmatrix} 0.3128 & 0.3978 & 0.0309 \\ 0.3978 & 0.7697 & -0.0177 \\ 0.0309 & -0.0177 & 0.0275 \end{bmatrix}$$

左侧预条件

1. 左前条件系统被定义为:
$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{b}_{\text{left-precond}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$
2. 替代
$$\mathbf{A}_{\text{left-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$
3. 左前条件的矩阵的自值是:
$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$
4. 条件号是:
$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$$
5. 条件数的比例是:
$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}})} = 100.00$$

右侧预条件

1. 正义前条件制度被定义为:
$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}$$
2. 如果我们要解决 $\mathbf{y}$ 我们将进行 LU 解体。在此情况下
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
和 $\mathbf{U} = \mathbf{L}^t$ (请注意, 这是一个特殊的案例。$\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{U}$ 是 diagonal。)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. 解决系统, 在兩個步驟, 前進和後退替代
4. 矩阵 是:

$$\mathbf{A}_{\text{right-precond}} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

5. 矩阵 右前条件的自值为:

$$\lambda(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = \{1.000, 1.000, 1.000\}$$

6. 条件号是:

$$\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}}) = 1.00$$

7. 条件数的比例是:

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{\kappa(\mathbf{A}_{\text{right-precond}})} = 100.00$$

结果总结

- 原始 矩阵 的条件号 $\mathbf{A}$: $\kappa(\mathbf{A}) = 100.00$
- 左侧前提后条件号: $\kappa(\mathbf{A}_{\text{left-precond}}) = 1.00$
- 右侧前提后条件号: $\kappa(A_{\text{right-precond}}) = 1.00$
- 左侧前提条件的条件数比例: 100.00
- 对右侧预条件的条件数比例: 100.00

相应的 MATLAB® 代码在 §I.5.5.

替代 A

请注意, 在 MATLAB® 代码, 读者可能想要直接使用

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.99 & 0.98 \\ 0.99 & 1.00 & 0.99 \\ 0.98 & 0.99 & 1.00 \end{bmatrix}$$

谁会付出代价

- 原始 矩阵 的条件号: 4.465028e+02
- 左侧前提后条件号: 1.000000e+00
- 右侧前提后条件号: 1.000000e+00
- 条件数的比例 (原始 / 左前条件): 4.465028e+02
- 条件数的比例 (原始 / 右前条件): 4.465028e+02

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

M 概率与统计

摘要

本章介绍了概率和统计学的基本概念, 这是研究的一个关键领域。许多先进的主题和大多数应用的例子都基于概率模拟。第一章开始解释差异和连续随机变量之间的区别。然后, 它探讨了几个广泛使用的概率分布的特性。最后, 它引入了多种分布和共同的概率功能的概念, 强调它们在模型和分析中的重要性。

M.1 引入概率与统计 2712
M.2 概率的基本概念 2712
M.2.1 定义 *vs.* 概率 2712
M.2.2 定义 2713
M.2.3 条件概率 2714
M.2.4 随机变量类型 2714
M.3 统计工具可靠性分析 2715
M.3.1 累积分配功能 2715
M.3.2 信任间隔 2716
M.4 统计措施 2717
M.4.1 中央趋势的时刻和措施 . . . 2717
M.4.2 变量之间的关系 2720
M.5 分布 2720
M.5.1 统一分布 2720
M.5.2 二元化分布 2725

M.1 引入概率与统计

概率和统计构成了理解的基础 主条目: 信任区 在科学和工程的各个领域的多样性。本章构建了必要的概念, 以模拟随机性并有效分析数据。以下部分探讨基本原则、关键分布和统计措施。

M.2 概率的基本概念

M.2.1 定义 *vs.* 概率

传统上, 结构适度评估是由安全因素表达的。$SF = \frac{C}{D}$, 在哪里 C 是能力 (二、力量) 和 D 是需求 (即, 荷载). 雖然這個評估是相當簡單的理解, 但它遭受了許多限制:) 所有负担均等处理; 2) 3、不区分能力与需求相应的不确定性;) 限制服务负载; 最后, 但不至少 4) 不允许对不同性能模式的不同结构之间的相对可靠性进行比较。另一个重大缺点是, 所有参数都被分配给一个单一的值在分析中, 然后是决定性。

另一方面, 所谓的概率主义方法实际上是对不确定性负责的定义主义方法的延伸。它们包括但不限于需求、能力、分析类型、结果解释等的不确定性。不同概念在概率分析中发挥作用, 取决于项目的目标和预期的结果。这些参数, 在图中显示的 M.1 后来将被解释。

审阅稿

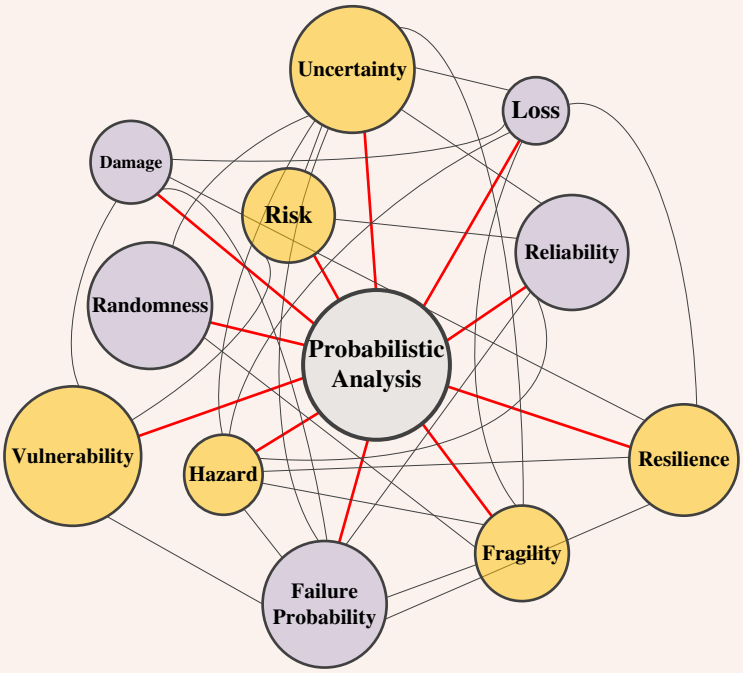


图 M.1: 概率分析中包含的概念相互连接 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

M.2.2 定义

一个事件的可能性, A, 是 0 和 1 之间的分裂。

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

其中一个是可能发生的事件。零是不可能发生的事件的概率。

随机变量 (RV) 这是一个自然过程的结果, 不能肯定地预测。对于一个 RV 的所有可能结果的集合被称为“样品空间”, Ω.

$$P\{\Omega\} = 1$$

随机变量 是“质量”或“量化”, 取决于样品空间中的值类型。定量 RV 表示值, 如 质量, 抗拉强度, 和 弹性 的模块。高品质的 RV 表达性别和种族等价值观。

试验的重复越多, 任何特定事件的相对频率就越接近该事件的概率。这就是所谓的“大数字法”。例如, 如果我们一枚硬币多次滑动, 越多次我们滑动它, 那么分开的“头”数量就越可能接近 1 分之一。

每个序列 $A_1, A_2, \ldots\ldots$ 相互分离事件, 图 M.2:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

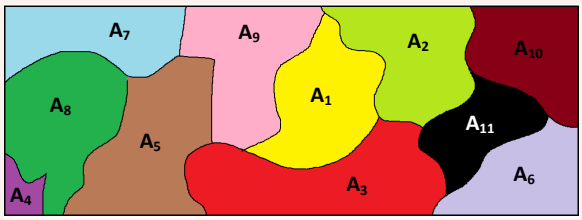


图 M.2: 样品空间的概念和相互分离事件 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

M.2.3 条件概率

条件的概率 A 被授予 B 写作如 $P\{A|B\}$ 被定义为

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

$P\{A \cap B\}$ 它被解释为概率/概率。A 以此为了解, B 已经发生了。

2 事件 A 和 B 他们是“独立”的, 如果

$$P\{A|B\} = P\{A\}$$

or,

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}.P\{B\}$$

意思是知识 B 这种情况不会影响这种可能的 A 会发生。

M.2.4 随机变量类型

If X 是 RV (即在样品空间的 单元 上定义的函数) 最终数量可能的值 $x_i \in R_X$ 与 i 二、二、在哪里 R_X 是 RV 的值范围, 那么它是一个“直播 随机变量.”

可能的 X 有特定的价值 x_i, $p(x_i) = P(X = x_i)$ 有这样一个数字

$$p(x_i) \geq 0$$

对于每一个 i 是 1,2,..... 和

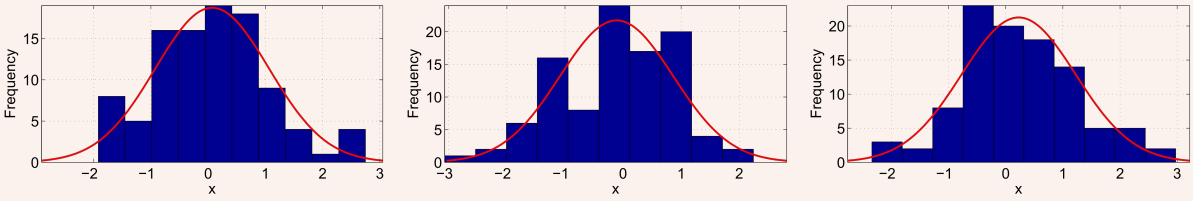
$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

对夫妇的收藏 $(x_i; p(x_i))$, i 二、二..... 被称为“概率分布” 由 X, 在哪个 $p(x_i)$ 是的, “概率质量 功能” 由 X.

对于小型样品, 结果可能不完全反映真正的分销模式。例如, 在图中所有的字体 M.3 只有 100 个随机样品。我们可以看到他们之间的明显差异。

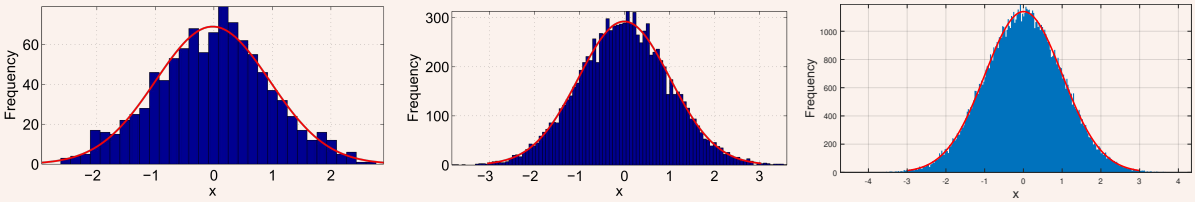
增加样品的数量将有助于。图片中的字体 M.4 基于 1000、10,000 和 100,000 样品, 分别。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 100 samples, first try (b) 100 samples, second try (c) 100 samples, third try

图 M.3: 因 100 个样品而进行三次的歇斯底里的比较



(a) 1,000 samples (b) 10,000 samples (c) 100,000 samples

图 M.4: 因 1000 至 100000 个样品而进行的希斯托格拉姆比较

M.3 统计工具可靠性分析

If R_X 这是一个间隔而不是一个差异性的设置。X 是 A "连续 随机变量。" 这个可能的 $X \in [a,b]$ 是

$$P\left(a \leq X \leq b\right) = \int_a^b f(x)dx$$

哪里 $f(x)$ 是的, "概率 密度 功能" (PDF) 由 X. 总是,

$$f(x) \geq 0$$

和,

$$\int_{R_X} f(x)dx = 1$$

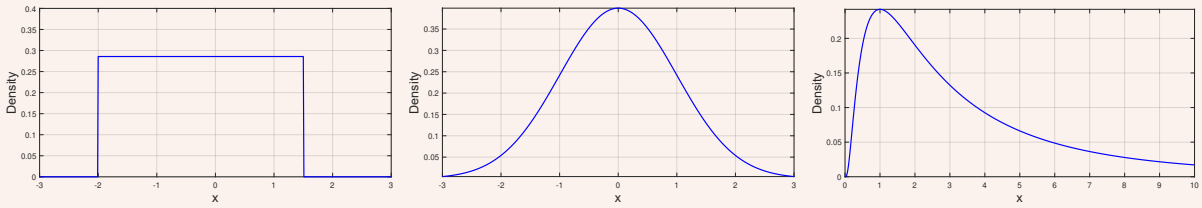
而且, 如果 $x \notin R_X$ 然后, $f(x) = 0$.

形象 M.5 显示三种 PDF 样本, 为三个不同类型的连续功能。这些功能将稍后详细解释。

M.3.1 累积分配功能

这个可能的 $X \leq x$, $P\left(X \leq x\right) = F(x)$ 是的, "累积分配功能" (CDF) 如下所述, 被推翻:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 统一分配 (b) 正常分配 (c) 正常分布

图 M.5: 三个连续分销功能的例子

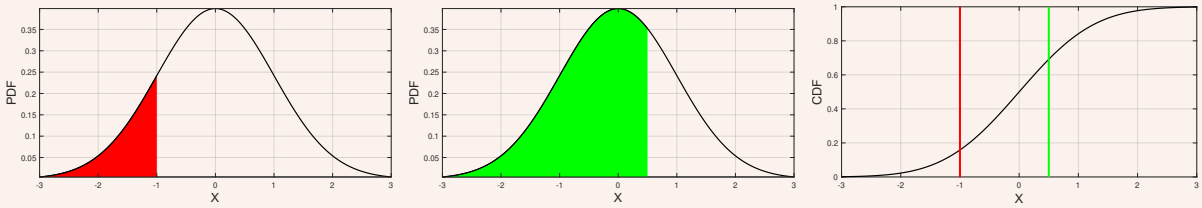
- 以差异为 $X \leq x_n$:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)$$

- 至於持續 $X \leq x$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau) d\tau$$

形象 M.6 显示 PDF 和 CDF 的正常分布关系。



(a) PDF: 低概率 (b) PDF; 高概率 (c) 相应的 CDF

图 M.6: PDF 和 CDF 之间的关系

CDF 的一些关键特征可以如下总结:

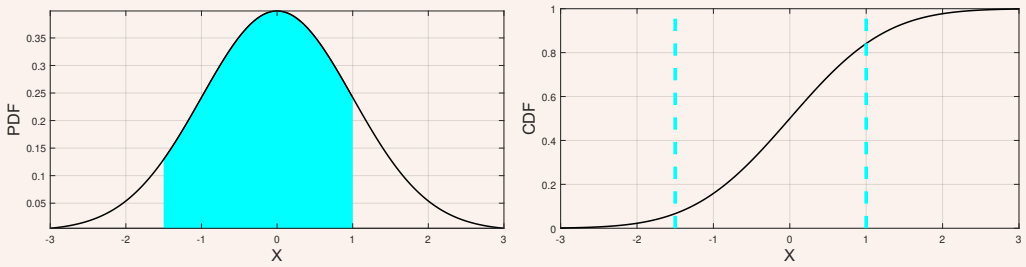
- If $a < b$ 然后, $F(a) < F(b)$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

形象 M.7 显示一个有限的 PDF 和相应的 CDF 的关系。

M.3.2 信任间隔

信任间隔是可能包含真正人口参数的值范围。(是的, 意思是比例。) 一定的信任水平。它量化了 主条目: 信任区 从样品中产生的估计, 图 M.8.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 统一分配 (b) 正常分配

图 M.7: 限制 PDF 和 CDF 之间的关系

人口的意思 μ, 信任间隔计算为:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

在哪里: $\bar{x}$ 样品意思是, z 关键价值 (標準正常分布) 符合信任水平 (是的, $z = 1.96$ 為 95% 信任), σ 人口 标准差, n 样品尺寸。

如果人口 标准差 σ 未知, 样品 标准差 s 它被使用, 而且 t 使用分配:

$$\text{CI} = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

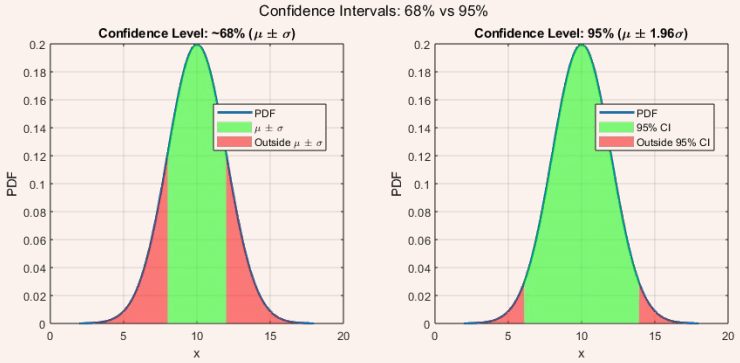


图 M.8: 信任间隔的描述

M.4 统计措施

M.4.1 中央趋势的时刻和措施

时刻是描述一个概率分布的形状和特征的定量测量。每个时刻都捕获了数据的具体方面, 如中央趋势、变量、无形和峰值。最常用的时刻和相关措施如下描述:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

首页 > Mean 平均值是数据的算法平均值, 代表分布的中心趋势:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

平均值指示数据集群在哪里, 并且通常用作位置测量, 图 M.9.

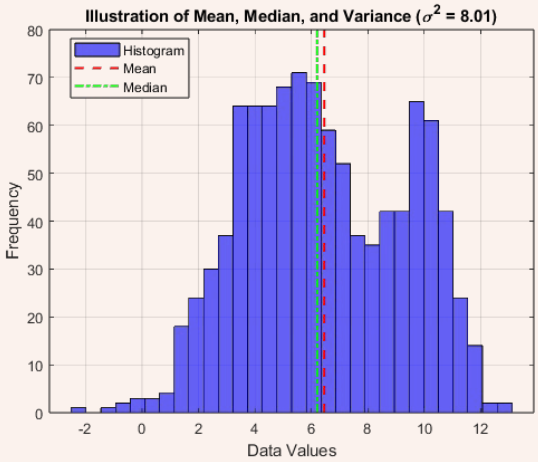


图 M.9: 描述 Mean 和 Median

中间 平均值是数据集的上半和下半分分开的值。

第二次: 变量 变量量化数据的传播或分散在中间:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

它提供了对数据的变异性的洞察力。更大的变量表明更多分散的数据点。

标准差 标准偏差是变量的平方根, 表达在与数据相同的单位, 图。M.10:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

标准差 常用, 因为它比变量更容易解释。

变量的比例 变量的比例 (COV) 是标准差与中等的比例, 提供正常变量测量:

$$\text{COV} = \frac{\sigma}{\mu}$$

COV 特别有用于与不同单位或规模的数据集之间的变量进行比较。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

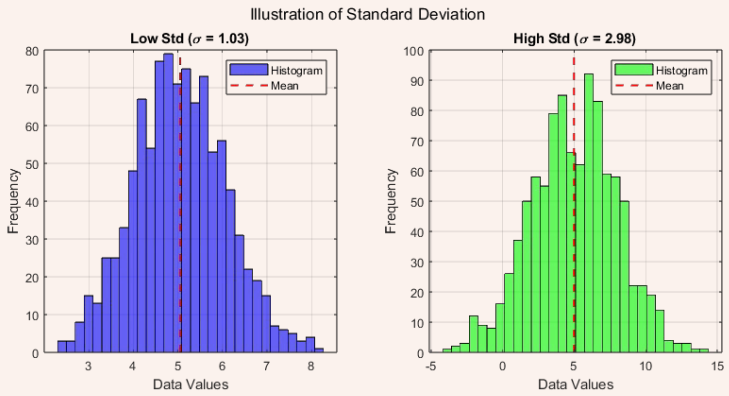


图 M.10: 描述 标准差

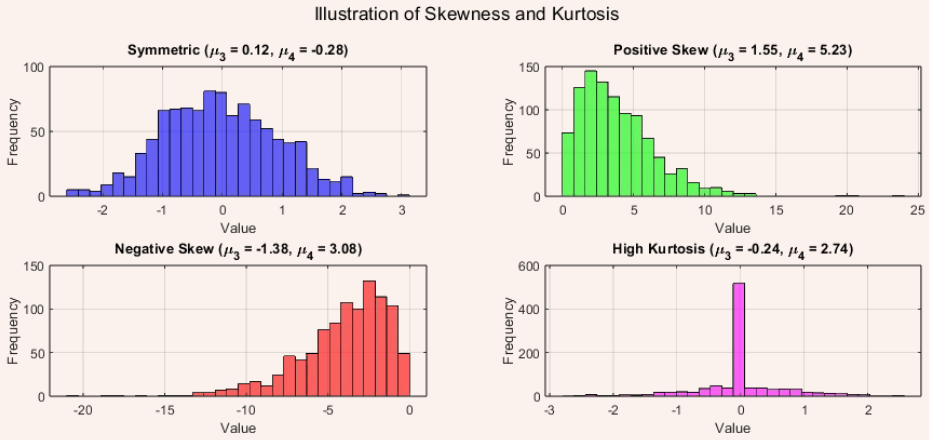


图 M.11: 智慧和库尔托西斯的描述

第三季: 智慧 Skewness 测量数据分布周围的平均值:

$$\text{Skewness} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^3$$

一个积极的弯曲表明在右侧有较长的背部, 而一个负面的弯曲则表明左侧有更长的腰部, 图 M.11.

第四个时刻: 库尔托斯 库尔多斯描述了一个分布与正常分布有关的“平度”或“平面”:

$$\text{Kurtosis} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^4 - 3$$

积极的皮质炎表明尖锐的峰值和重尾, 而负的皮肤炎表现在平滑的分布。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

M.4.2 变量之间的关系

可爱 Covariance 测量两个变量的程度:

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$$

一个积极的可视性表明, 变量倾向于增加或减少在一起, 而一个负面的可视度表明相反的关系。

相应率: ρ_{xy} 是非尺寸的相似程度的测量。

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

相似的比例与 1.0 或 −1.0 表明完美的线性相互关系, 图 M.12. 一个积极的值表明, 变量倾向于增加或下降在一起, 而一个负面的值表现在一个倾向上涨, 而另一个则倾向下跌。零值没有线性相互关系, 一般来说并不意味着独立。

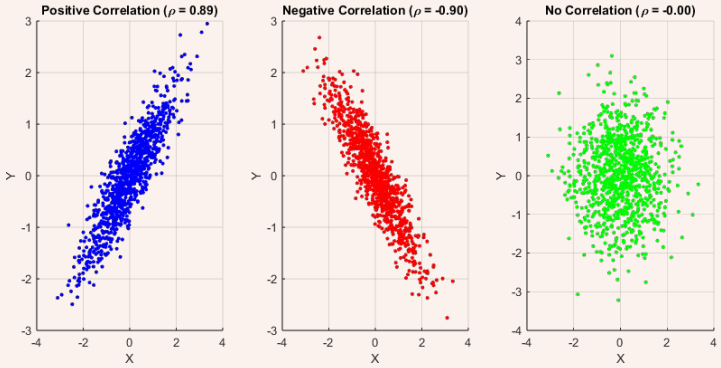


图 M.12: 描述相互关系的因素

M.5 分布

M.5.1 统一分布

在概率分析中, 每个不确定的参数都可以以随机变量和其相关的 PDF 形式呈现。$X \sim f_X(x)$. 此部分展示了一些在民用工程中常用的单型分销模型及其主要特点。最重要的是:

- 统一分配
- 加西亚/正常分布
- 正常分布

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

- Weibull 分布
- 极端价值 (吉普赛) 分配

统一分配

统一分布通常用于代表随机变量与未知时刻和已知的支座。

- 评分: $X \sim \mathcal{U}(a, b)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- CDF:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

- 统计:

$$\begin{cases} \mu_X = \frac{a+b}{2} \\ \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{cases}$$

正常分配

正常分布在许多应用科学和工程领域广泛使用, 以代表测量错误、噪音术语等。

- 评分: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- CDF:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau$$

- 统计:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu \\ \sigma_X = \sigma \end{cases}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

正常分布

Lognormal 分布在许多应用科学和工程领域广泛使用, 以代表测量错误、噪音术语等。

- 评分: $X \sim \mathcal{LN}(\lambda, \zeta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp(-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\zeta^2})$$

- CDF:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\sqrt{2}\zeta}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)$$

  哪里 erf 它被称为错误函数, 并且 Φ 是标准正常分配的累积分配功能。
- 统计:

$$\begin{cases} \mu_X = e^{\lambda+\zeta^2/2} \\ \sigma_X = e^{\lambda+\zeta^2/2}\sqrt{e^{\zeta^2}-1} \end{cases}$$

哪里 λ 和 ζ 是变量的自然逻辑的中等和标准差。

Weibull 分布

这种模型通常用来描述时间到失败类型的变量。它可以用于物质强度和寿命参数, 可用于白色材料。

- 评分: $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- CDF:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

- 统计:

$$\begin{cases} \mu_X = \alpha\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma_X = \alpha\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2} \end{cases}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Gumbel 分布

Gumbel 分布 (一般化极端价值分配类型 I) 用来模拟分配的最大 (或最小) 各式各样的分布样品。

- 评分: $X \sim \mathcal{G}(\mu, \beta)$
- PDF:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta} - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- CDF:

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- 统计:

$$\begin{cases} \mu_X = \mu + \beta\gamma_e \\ \sigma_X = \frac{\pi\beta}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

  哪里 $\gamma_e = 0.577216...$ 是永恒的 Euler。

M.5.1.1 比较

图 M.13 描述了各式各样的分布, 具有以下特点:

在这里, 我们描述了在比较分析中使用的分布的特点, 包括它们的概率密度功能。(PDF 的), 累积分配功能 (CDF), 并采用的 数值 值为每个。

统一分配

- **PDF:** 一个平面曲线之间 a 和 b, 指示范围内的所有值的平等概率。

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{for } a \leq x \leq b$$

- **CDF:** 线性上涨 a 到 b 以 0 开始, 以 1 结束。
- **关键参数:**
  - $a = 0$ 下限的下限。
  - $b = 1$ 上方: 上方。
- **特征:** 同步和平坦, 没有滑动或皮质。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

正常分配

- **PDF:** 通道形状曲线, 对中间的相同性 μ:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- **CDF:** 以 S 形状的曲线, 从 0 开始, 并无形接近 1。
- **关键参数:**
  - $\mu = 0$ 意思 (峰会的位置).
  - $\sigma = 1$: 标准差 (控制扩展).
- **特征:** 相同和模型, 没有滑动和零皮质 (墨西哥).

正常分布

- **PDF:** 一个积极滑动的曲线从 0 开始:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{for } x > 0$$

- **CDF:** 以 S 形状的曲线, 从 0 开始, 并无形接近 1。
- **关键参数:**
  - $\mu = 0$ 是变量的逻辑中的一部分。
  - $\sigma = 0.25$: 变量的 logarithm 的 标准差。
- **特征:** 向右倾斜, 依赖于 σ.

Weibull 分布

- **PDF:** 与形状参数不同 k:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad \text{for } x \geq 0$$

- **CDF:** S 形曲线为 $k > 1$, 从 0 开始, 并以无形的方式接近 1。
- **关键参数:**
  - $k = 1.5$ 形状参数。
  - $\lambda = 1$ 尺寸参数。
- **特征:** 多元化、模拟增加、下降或持续失败率。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Gumbel 分布

- **PDF:** 以近的模式向右滑 μ:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

- **CDF:** 一个无形的 S 形曲线, 从 0 开始, 并以无形的方式接近 1.
- **关键参数:**
  - $\mu = 0$ 位置参数 (峰值位置).
  - $\beta = 1$ 尺寸参数 (控制扩展).
- **特征:** 向右倾斜, 用来模拟极端价值 (例如, 最高降雨量).

此详细描述提供了对分布和 数值 值的全面概述, 并在分析中采用了其参数。

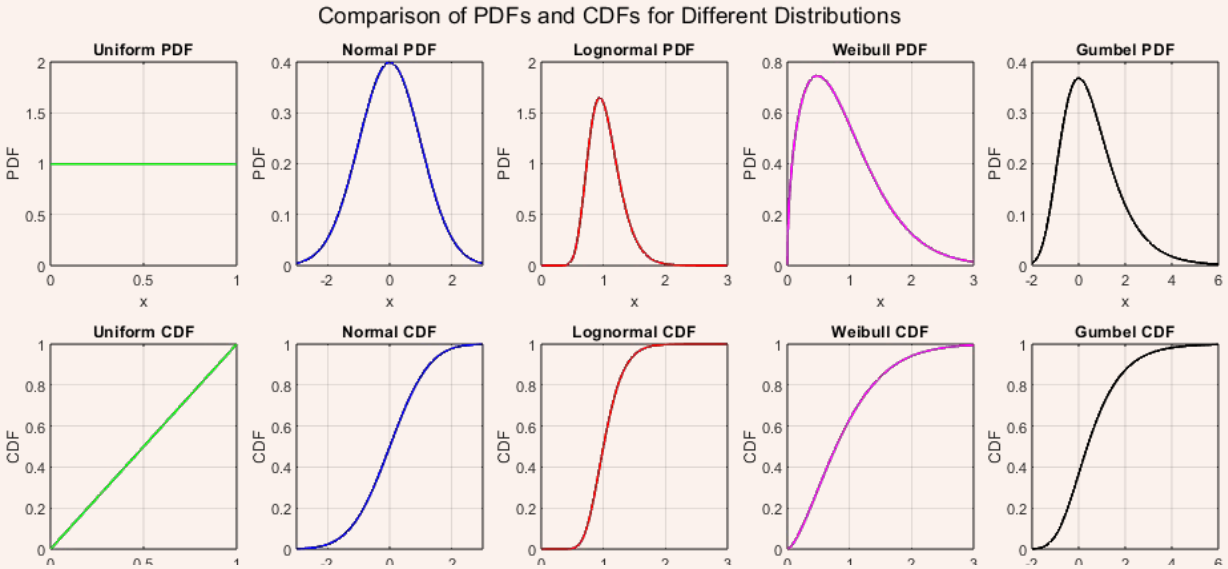


图 M.13: 不同概率的比较 (和累积) 分布功能

M.5.2 二元化分布

比瓦利特分布描述了两种随机变量的共同行为。X 和 Y. 它描述了与所有可能的结果对比相关的概率 (x, y). 这种分布用于理解两个变量之间的关系、依赖和相互关系。

考虑到两个连续随机变量, X 和 Y, 合并累积 Bivariate 分布功能是:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

密度 已定义为

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

or,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此, 这种可能性 $(X,Y) \in A$ is:

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二元性正常分布

在二维案例中 ($k = 2$),Bivariate 正常分布的合并概率密度函数被定义为:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

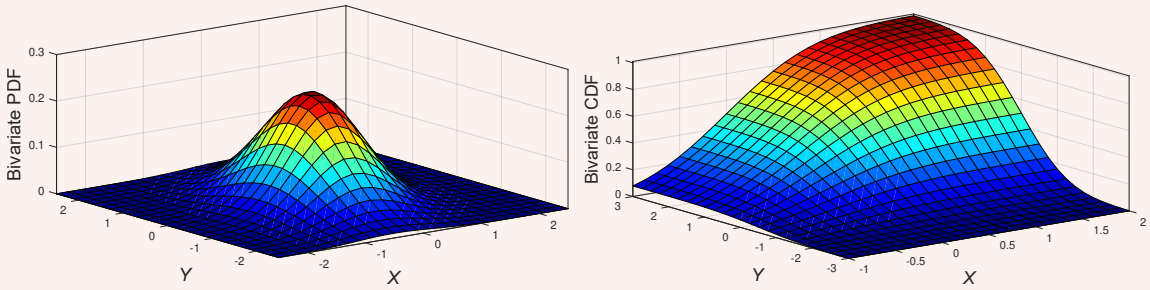
在哪里:

- μ_X 和 μ_Y 是手段的 X 和 Y, 分别, 指示每个变量的中心位置。
- $\sigma_X > 0$ 和 $\sigma_Y > 0$ 这是标准偏差 X 和 Y 相应, 代表每个变量数据的传播或分散。
- ρ 相同的关系是与 X 和 Y 测量两种变量的线性关系的强度和方向。它在范围内 $-1 \leq \rho \leq 1$.

形象 M.14 显示 PDF 和 CDF 样本的 bivariate 正常分布, 其中 $\mu_X = \mu_Y = 0.0$, $\sigma_X = 0.707$ 和 $\sigma_Y = 1.000$.

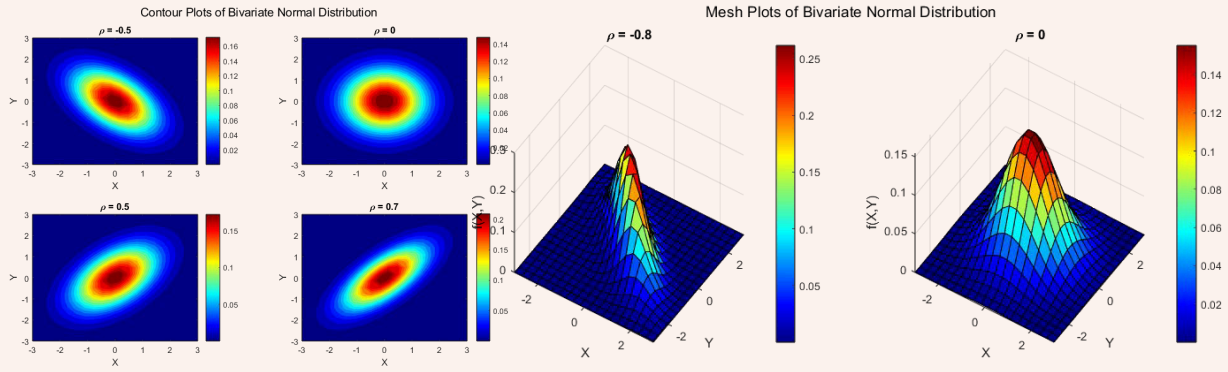
形象 M.15 表明相互关系的影响 ρ 正常分布的比瓦里特。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿



(a) 二元化 PDF (b) 比瓦里亚特 CDF

图 M.14: 二元性正常分布



(a) (b)

图 M.15: 相互关系的影响 ρ 平常分布的 Bivariate

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

N 可靠指标

摘要

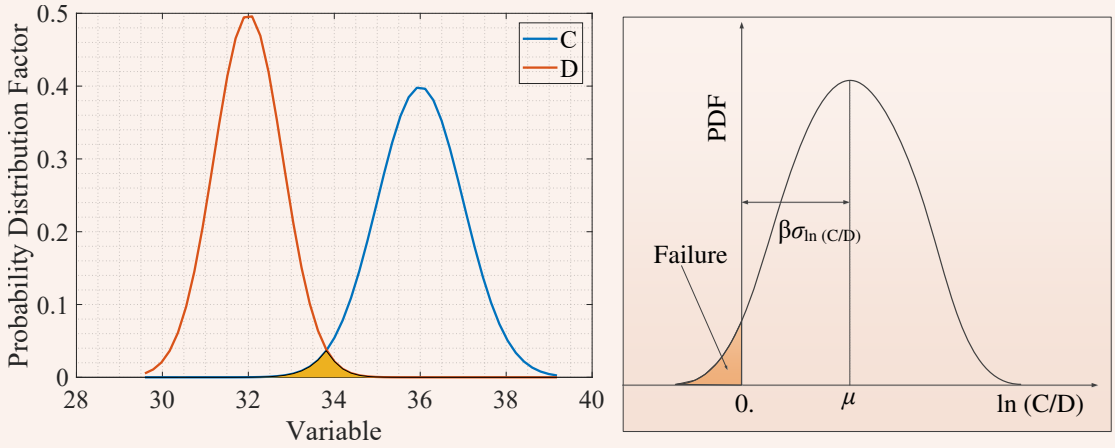
该附件介绍了可靠指标作为结构安全和失败的概率的定量测量。处理结构能力和需求作为随机变量 (通常正常或正常分布), 可靠指标将安全边界定为平均容量和平均需求之间的差异, 由合并的标准差正常化。该附件开发了算法和逻辑方法来计算可靠指标, 它与目标失败的可能性有关, 并将其连接到设计安全因素。该框架支持可行性设计决策和基于性能的工程中使用的风险信息评估, 在不同边界状态中保持规定的结构可靠度水平是设计过程的核心。

第五部分：高级理论与优化

1 可靠指标 是对结构、系统或组件的安全性或可靠性的定量测量。它通常用于在不同负载或环境条件下评估结构或系统失败或崩溃的可能性。

2 可靠指标 是基于故障或崩溃的可能性以及结构或系统的安全边界或安全因素进行计算。它被表达为数值值, 具有较高的值, 表明失败或崩溃的可能性低, 以及更低的值表明故障或崩溃的可能性高。

3 它取决于能力之间的差异。(C) 和需求 (D) 两者都是随机变量。(通常假设是正常的, 尽管在某些情况下, 一个日志正常可能更有偏好。). 因为正常分配的定义在 $[-\infty - \infty]$, 总会有失败的可能性, 图 N.1a.



(a) 需求与能力的概率分布　　(b) 定义 可靠指标

图 N.1: 可靠指标的定义

4 有两种方法可以确定 β 取决于安全边界如何计算。

审阅稿

算法

$$\begin{aligned} M &= C - D \\ \mu_M &= \mu_C - \mu_D \\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2} \\ \beta &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} \\ &= \frac{\mu_C - \mu_D}{\sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_D^2}} \end{aligned}$$

彩虹

$$\begin{aligned} M &= \ln C - \ln D \\ \mu_M &= \mu_C - \mu_D \quad \text{First order} \\ \sigma_M &= \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{\mu_C^2} + \frac{\sigma_D^2}{\mu_D^2}} = \sqrt{V_C^2 + V_D^2} \\ \beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} &= \frac{\ln \mu_C - \ln \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} \\ &= \frac{\ln \mu_C / \mu_D}{\sqrt{V_C^2 + V_D^2}} \end{aligned}$$

5 可靠指标的评论 β 地理定义为 图 N.1b.

6 相应的 **失败的可能性** P_f 相当于阴影区域的比例, 图 N.1b 在曲线下方的整个区域, 并由 $\Phi(-\beta)$ 哪里 Φ 是正常累积概率功能的标准

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{N.1}$$

7 可靠性指数与失败的概率之间的关系显示在图中。N.2.

8 β 选择以反映失败后果, 表 N.1.

9 对于某些组件或某些性能模式的可靠性指标, 可以用于估计结构/系统的整体可靠性的。可以考虑到两种极端情况:

系列系统: 这种系统如果任何一个组件不满意, 就会表现不佳。如果一个系统有 n 序列组件, 不满意的性能的可能性 i 该组件是 p_i 其可靠性 $R_i = 1 - p_i$. 然后系统的可靠性, 或者所有组件都能顺利运行的可能性是

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n \ = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 N.1: 钢材 和 混凝土 结构的选择值

类型 荷载 / 会员	β
艾斯克	
DL + LL; 会员	3.0
DL + LL; 连接	4.5
DL + LL + WL; 会员	3.5
DL + LL + EL; 会员	1.75
这里	
双重失败	3-3.5
英雄失败	3.5-4

平行系统: 这种系统只有在所有组件不满意的情况下才会顺利运行。因此, 可靠性是

$$R = 1 - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n \tag{N.2}$$

[10] 可靠性指数是当前状态的相对测量, 并提供结构性能的定性估计。具有相对较高的可靠性指标的结构预计将表现良好。如果值太低, 那么结构可以被分为危险的。目标值为 β 在桌子上展示 N.2. 此事由图形进一步描述 N.2

表 N.2: 可靠性 钢材 和 混凝土 结构

预期性能	β	失败的可能性
高	5	3 / 10 百万
好	4	3/100,000
超過平均	3	1/1,000
下方平均	2.5	6/1,000
可怜的	2.0	2.3/100
不满意	1.5	7/100
危险	1.0	16/100

例题 N.1: 可靠指标

為一個簡單支持的 梁 (范围 L = 480 英寸, 部分模块 S = 150 in^3, 结果 应力: $\mu_{f_y} = 36$ 李和 $\sigma_{f_y} = 1$ 基), 受点 荷载的约束 $\mu_P = 40$ 吉普赛, 和 $\sigma_P = 1$ 吉普赛

1. 通过两种方法确定 可靠指标

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

审阅稿

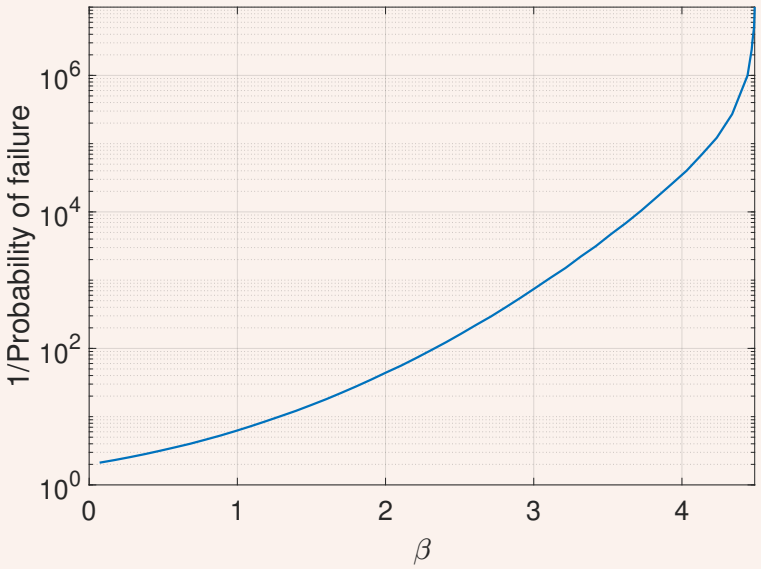


图 N.2: 可靠指标的失败概率 β

2. 通过蒙特卡洛模拟重复学习

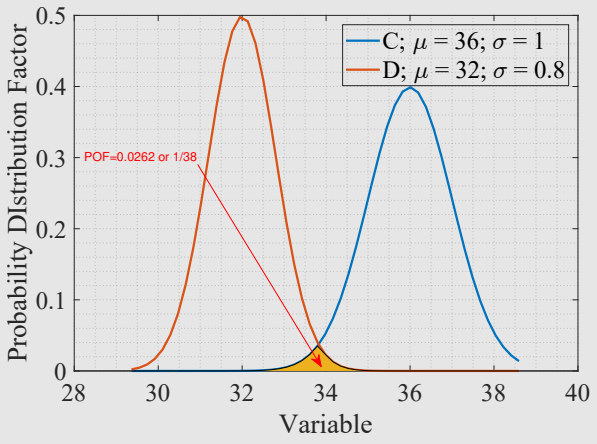
```
clear;clc; close all;
fs=16;font='Times New Roman';opengl software;
%
% Span of the beam(in)
L = 480;
% section modulus (in^3)
S = 150;
% Mean and Standard Deviation (SD) of Capacity,fy, (C) and Load (P)
Mu_C = 36;
SD_C = 1;
Mu_D = 40; % different units than C
SD_D = 1;
%Calculation of mean and SD of Demand (D)
Mu_D = Mu_D*L/4/S;
SD_D = SD_D*L/4/S;
sd=SD_D;md=Mu_D;sc=SD_C;mc=Mu_C;
%=========================================
% POF returns the Probability of Failure
%=========================================
% Approach (I): safety margin (M) = C - D, and C and D are normally distributed.
RI_I = (Mu_C-Mu_D)/sqrt(SD_C^2+SD_D^2);
POF_I = 0.5*(1 + erf(-RI_I/sqrt(2)));
% Approach (II): safety margin (M) = lnC - lnD, and C and D are normally
    distributed.
V_C = (SD_C/Mu_C);
V_D = (SD_D/Mu_D);
```

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

```
RI_II = log(Mu_C/Mu_D)/sqrt(V_C^2+V_D^2);
POF_II = 0.5*(1 + erf(-RI_II/sqrt(2)));
%
fprintf('Approach    beta   1/POF \n');
fprintf('I           %5.2f  %4.0f \n',RI_I,1/POF_I);
fprintf('II          %5.2f  %4.0f \n\n',RI_II,1/POF_II);
%=========================================
% Monte Carlo simulation to determine the probability of failure of the beam
% Approach: random numbers between 0 and 1 are created
% and the corresponding values of C and D are calculated
% using the inverse cumulative distribution function (icdf)
pd_C = makedist('Normal','mu',Mu_C,'sigma',SD_C);
pd_D = makedist('Normal','mu',Mu_D,'sigma',SD_D);
for p = 2:7
  subplot(2,3,p-1)
  SampleSize = 10^p;
  x(p-1)=SampleSize;
  CC = icdf(pd_C,rand(SampleSize,1));
  DD = icdf(pd_D,rand(SampleSize,1));
  N = sum(DD>CC);
  POF_MonteCarlo (p-1) = N/SampleSize;
  % Plot histograms
  bin=(30 : 0.1 : 42);
  plot(bin,hist(CC,bin)/SampleSize,bin,hist(DD,bin)/SampleSize,'LineWidth',2);
  xlim([30 42]);
  grid
  lgnd=legend('C','D');
  set(lgnd, 'Color','none')
  label=['Sample Size =10^' int2str(p)];
  title(label);
  set(gca,'FontName', font,'color', 'none','fontsize',fs/2);
  l=sprintf('%3.0f  %5.2e',p,POF_MonteCarlo (p-1));
  disp(l);
end
```

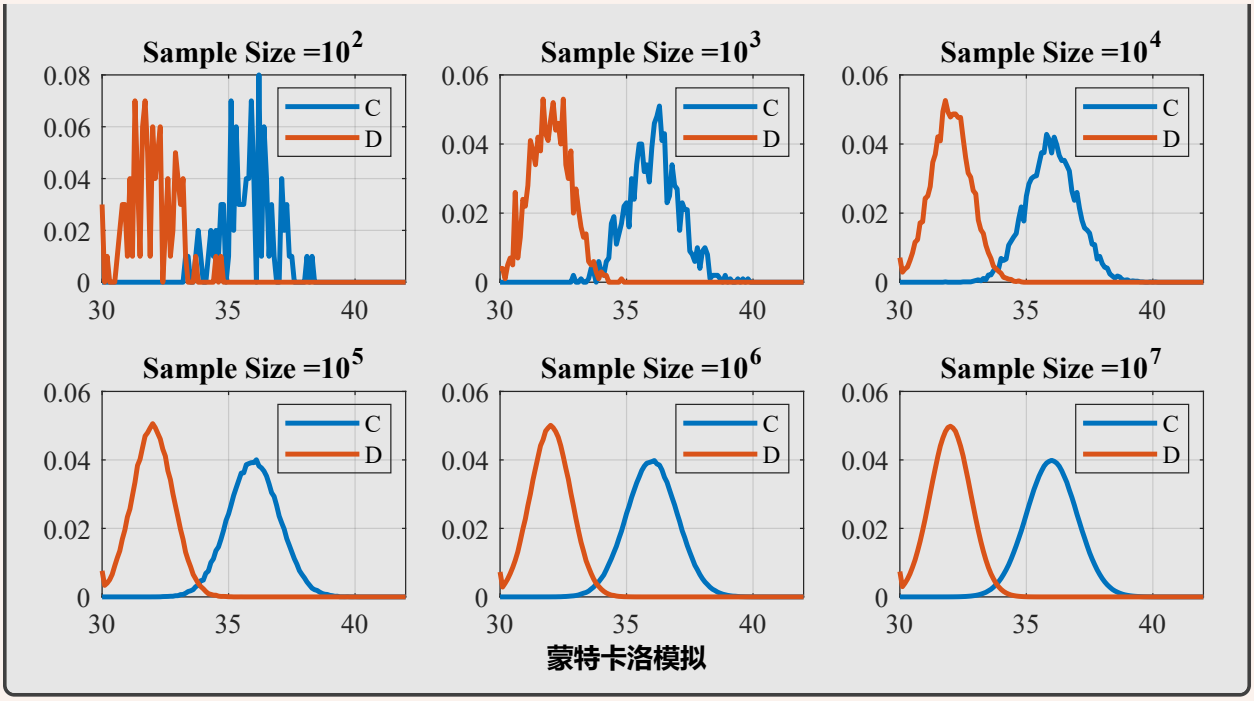


接近	β	1 波夫
I	3.12	1,119
II	3.15	1,232

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

审阅稿



审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。

O 变形物体的机械, 一个初级

摘要

机械就是一切开始的地方。根基于数学, 它为随后的章节提供了一个坚实的基础, 关于变量方法和相应的衍生物。它比真正需要的要多得多。[1] 因此, 这可能对本书的大多数读者有有限的兴趣。

然而, 我坚信, 掌握结构工程的先决条件是对变形物体机械的坚实知识。*(A.K.A* 固体机械*).* 就像一个好建筑师一样, 应该有一个好的命令结构工程.

O.1 引入 2734
O.1.1 评论 2734
O.1.2 装修器 2737
O.1.3 应力的物理解释 2742
O.2 向量字段; 变形体的机械 2743
O.2.1 力量 2743
O.2.2 卡西的应力张量 2743
O.2.3 电影学 2746
O.3 连续介质力学的基本法则 2749
O.3.1 保守法 2749
O.3.2 流动 2750
O.3.3 质量的保留; 连续性方程式 . 2750
O.3.4 保持动力; 运动方程 2751
O.3.5 能源保养: 热力学的第一原则 2753
O.4 宪法方程式 2755
O.4.1 一般 3D 2755
O.4.2 超越性异常案例 2757
O.4.3 2D 案例 2757
O.5 现象观察 2758
O.5.1 充电、驱动和压力控制测试 . 2758
O.5.2 钢材和混凝土的预/后峰材料反应 2759
O.6 变形的位置 2760
O.6.1 实验证据 2760
O.7 边界条件 2763
O.8 彩色图表 2763
O.9 内部力量的概念 2764

O.1 引入

1 对基础设施的先进结构分析进行覆盖, 需要在机械和终端元素的基础上建立坚实的基础。事实上, 本章的目的是提供一个简短的审查。

2 接下来的方法是从严格的 **连续介质力学** 使用 tensorial notation 首先, 然后扩展到更传统地使用的卡特西亚坐标系统。

O.1.1 评论

3 假设张量的概念 (下方定义) 理解, 工程/机械学的评级可以采取不同的形式。提到桌子 O.1.

[1] 事实上, 这个章节以前写过为另一个出版物。(Saouma and Hariri-Ardebili, 2021) 最后, 我决定把它保持在完整性中, 只有微小的变化。

审阅稿

表 O.1: 笔记

	$[A]$	A_{ij}	$\mathbf{A}$	
矩阵	✓	X	✓	$\lfloor x \rfloor [A] \{x\}$ **x.A.x**
张量	X	✓	✓	$x_i A_{ij} x_j$ **x.A.x**

工程师 / Voigt (蒂莫森科) 同步的第二命令发动机经常被写为柱矩阵。这种转换, 以及其他高级发动机中的一个变成柱矩阵, 被称为 Voigt 评分。. Voigt 规则取决于 张量 是否是一种动态量 (如 应力) 或一部电影 (如 应变).

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

矩阵: 结尾 单元, $[A]$, $[\sigma]$, $\{F\}$ 这些可以轻松地与计算中的序列相关。

装修器: 机械卡特西安, F_x, σ_{ij}, C_{ijkl} 和 $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{C}$. 在 张量 评分中, 指数不显示。虽然卡特西亚指数方程仅适用于卡特塞亚坐标, 但张量评级中的表达式是独立于坐标系统的, 并适用于其他坐标体系, 如圆形、曲线等。在指标评级中, 我们在大面字母中显示一个或更大的顺序的紧张器。通常建议使用下级案例字母为顺序一号发动机和上级案件字母用于顺序 2 和以上发动器。我们区分张量评级和矩阵评级, 使用点和列之间的术语, 如在 $\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv a_i b_i$ (“ ” 指一个重复的指标, 在相同顺序中出现的一对折叠。), 和 $\mathbf{A} : \mathbf{B} \equiv A_{ij} B_{ij}$. or $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ 相当于 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$.

[4] 在下面的部分, 我将简要解释最后一个 (张量 / 印第安人) 虽然工程评级可能是最简单和最直观的, 但它往往会导致长而重复的方程式。否则, 张量将导致更短、更紧凑的形状。

[5] 在一般相对性工作中, 爱因斯坦厌倦了写下总结的符号, 其总结范围在下面和上面。(如如 $\sum_{i=1}^{n=3} a_{ij} b_i$) 并指出, 大部分时间的顶层 ($n$) 与空间的尺寸相同。(3 为我们, 4 为他) 当总结涉及两个术语的产品时, 总结超过一个重复指数。(i 在我们的例子中). 因此, 他决定不需要包含总结信号。$\sum$ 如果有重复的指标 (i) 因此, 任何重复的指数都是愚蠢的指标。并在 1 到 3 范围内总结。一个不重复的指数被称为自由指数。并假设从 1 到 3 的值。因此, 这就是所谓的指示记录。也提到爱因斯坦的评论。. 下列规则定义指标评级:

1. 如果有一个字母指数, 则该指数将从 i 到 n (张量的范围). 例如:

$$a_i = a^i = \lfloor \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \rfloor \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \qquad i = 1, 2, 3$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

假设这 $n = 3$.

2. 一重复 (A.K.A 傻瓜) 指数将采取其范围的所有值, 并总结结果的紧张器。例如:

$$a_{1i}x_i = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

3. 张量的订单:

   - 第一個訂單 张量 (如力量) 只有一个免费指数:

   $$a_i = a^i = \lfloor\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ \rfloor$$

   其它第一命令紧张器是 $a_{ij}b_j$, F_{ikk}, $\varepsilon_{ijk}u_jv_k$.
   - 第二次订单 张量 (A.K.A 迪亚迪克) 将有两个免费指标。

   $$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

   其他例子是 A_{ijip}, $\delta_{ij}u_kv_k$.
   - 第四次命令 张量 (如弹性恒久) 将有四个免费指标。

4. 张量的衍生品与 x_i 写作如 $,i$. 例如:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_{,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}; \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}; \quad \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x_k} = T_{i,j,k};$$

6 指标评分的有用性在于以微型形式呈现方程式系统。例如:

$$x_i = c_{ij}z_j \equiv \begin{cases} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3 \end{cases}$$

同样:

$$A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D_{pq}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} \\ A_{12} &= B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22} \\ A_{21} &= B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22} \\ A_{22} &= B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22} \end{aligned}$$

7 使用指标评分, 我们可以重新写下定义的 dot 产品

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_ib_i = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

O.1.2 装修器

8 我们通过引入张量来普遍化一个向量的概念 (**T**) 至于基本上是 **可在** *vectors* **上运行 v 生产其他** *vectors* (或者在紧张器上生产其他紧张!). 我们将此操作指定为 **T**·**v** 或者只是 **Tv**.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{v} \text{ or } u_i = T_{ij}v_j \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{S} \text{ where } \mathbf{S} = \mathbf{T}^T \end{aligned}$$

虽然张量基本上是 vector 的运营商 (或其他紧张) 它也是一种物理数量, 独立于任何特定坐标系统, 但最方便地指定, 参考适当的坐标体系。

9 坦塞经常出现为物理实体, 其组成部分是 vector 之间的线性关系的比例。一个 张量 按排名或顺序分类。顺序零的 张量 在任何坐标系统中都由一个坐标指定, 并且是一个规模。顺序一的张量在太空中有三个协调组成部分, 因此它是一个向量. 一般而言,3D 空间是张量的组件数量。3^n n 是 张量 的顺序。强度和应力是顺序 1 和 2 的通风器。

10 命令 2 的传感器也被称为 **迪亚德** 而且在机械上非常常见。(例如: 应力、应变、无菌).

O.1.2.1 行动

11 两种紧张的总数 (必须有同样的秩序。) 它简单地被定义为:

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{U}_{ij}$$

其次, 大规模增加一 (第二次命令) 张量 是由:

$$\mathbf{S}_{ij} = \lambda\mathbf{T}_{ij}$$

12 兩個發射器的外部產品是张量 , 其組成部分由一個發射機的每個組成員加倍而形成。这产生一个张量与因素发动机的订单总额等的命令。

$$\begin{aligned} a_i b_j &= T_{ij} \quad \text{or} \left\{ \quad \right\}_{n\times 1} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \\ v_i F_{jk} &= b_{ijk} \\ D_{ij} T_{km} &= \phi_{ijkm} \end{aligned}$$

13 兩個壓力器的內部產品: 從每個 张量 的一個指標的縮小

$$\begin{aligned} & a_i b_i \\ a_i E_{ik} &= f_k \quad \text{or} \lfloor \quad \rfloor_{1\times m} \left[\quad \right]_{mxn} = \lfloor \quad \rfloor_{1xn} \\ E_{ij} F_{jm} &= G_{im} \quad \text{or} \left[\quad \right]_{n\times p} \left[\quad \right]_{p\times m} = \left[\quad \right]_{n\times m} \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

14 十字架产品可以定义

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon_{pqr}a_q b_r \mathbf{e}_p = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

在第二方程中, 有一个免费指数。p 因此, 有三个方程式, 有两个重复。(傻瓜) 指数 q 和 r 因此, 每个方程都有九个术语。ε_{pqr} 它被称为转变符号, 并被定义为

$$\varepsilon_{pqr} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i,j,k \text{ 为 1,2,3 的偶排列} \\ & \text{(i.e. if they appear as 1 2 3 1 2)} \\ -1 & \text{若 } i,j,k \text{ 为 1,2,3 的奇排列} \\ & \text{(i.e. if they appear as 3 2 1 3 2)} \\ 0 & \text{若 } i,j,k \text{ 不是 1,2,3 的排列} \\ & \text{（即两个或更多下标取相同值）} \end{cases}$$

两台发动机的规模产品被定义为

$$\mathbf{T} : \mathbf{U} = T_{ij}U_{ij}$$

在任何直角系统中。下一篇 内部产品 股票满意:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{U} &= \mathbf{U} : \mathbf{T} \\ \mathbf{T} : (\mathbf{U} + \mathbf{V}) &= \mathbf{T} : \mathbf{U} + \mathbf{T} : \mathbf{V} \\ \alpha(\mathbf{T} : \mathbf{U}) &= (\alpha\mathbf{T}) : \mathbf{U} = \mathbf{T} : (\alpha\mathbf{U}) \\ \mathbf{T} : \mathbf{T} &> 0 \text{ unless } \mathbf{T} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

O.1.2.2 转角 的轴

15 考虑两组不同的卡特西亚正角协调系统 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 和 $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$, 任何 向量 $\mathbf{v}$ 可以用一个系统或另一个

$$\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j = \overline{v}_j \bar{\mathbf{e}}_j$$

要确定两组组件之间的关系, 我们考虑到点产品 $\mathbf{v}$ 与一 (任何) 基因 vectors

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{v} = \overline{v}_i = v_j(\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

因此, 我们可以定义九个规模值。

$$a_i^j \equiv \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\overline{x}_i, x_j)$$

这些是基因组的九对之间的方向同行。可变的转换将从一个基础转换张量到另一个:

$$\overline{v}_j = a_j^p v_p$$

请注意, 第一和第二方程中的自由指数分别显示在上方和下方指数。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

16 考虑一个向量的转换 $\mathbf{V}$ 从 $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ 协调系统为 $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ 图像 O.1a. 从方程式 O.1

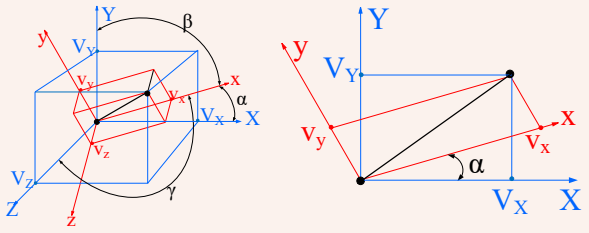
$$V_j = a_j^p \overline{V}_p \text{ or } \left\{ \begin{array}{rcl} V_1 & = & a_1^1\overline{V}_1 + a_1^2\overline{V}_2 + a_1^3\overline{V}_3 \\ V_2 & = & a_2^1\overline{V}_2 + a_1^2\overline{V}_2 + a_2^3\overline{V}_3 \\ V_3 & = & a_3^1\overline{V}_3 + a_1^2\overline{V}_2 + a_3^3\overline{V}_3 \end{array} \right.$$

or,

$$\left\{ \begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} a_x^X & a_x^Y & a_x^Z \\ a_y^X & a_y^Y & a_y^Z \\ a_z^X & a_z^Y & a_z^Z \end{array} \right]}_{a_j^k} \left\{ \begin{array}{c} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{array} \right\} \tag{O.1}$$

哪里 a_i^j 是轴的方向。i 关于轴 j

- $a_x^j = (a_x^X, a_x^Y, a_x^Z)$ 指向的同胞 $\mathbf{x}$ 至于 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{Z}$
- $a_y^j = (a_y^X, a_y^Y, a_y^Z)$ 指向的同胞 $\mathbf{y}$ 至于 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{Z}$
- $a_z^j = (a_z^X, a_z^Y, a_z^Z)$ 指向的同胞 $\mathbf{z}$ 至于 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{Z}$



(a) 3D (b) 2D

图 O.1: 向量 转型

17 2D 案例, 图 O.1b, 变换矩阵 写为

$$T = \left[\begin{array}{cc} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{array} \right]$$

但自从 $\gamma = \frac{\pi}{2} + \alpha$ 和 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 然后, $\cos\gamma = -\sin\alpha$ 和 $\cos\beta = \sin\alpha$ 因此, 变换矩阵变成

$$T = \left[\begin{array}{cc} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array} \right] \tag{O.2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

O.1.2.3 张量 转型

18 转角 二次命令 张量 T_{jq}:

$$\begin{aligned}\overline{u}_j &= T_{jq}\overline{v}_q\\ \overline{u}_i &= a_i^j u_j\\ &= a_i^j T_{jq} v_q\\ &= a_i^j T_{jq} a_p^q \overline{v}_p\end{aligned}$$

但我们也有 $\overline{u}_i = \overline{T}_{ip}\overline{v}_p$ 在障碍系统中, 平衡这两种表达我们获得的

$$\overline{T}_{ip} = a_i^j a_p^q T_{jq}$$

因此,

$$\begin{aligned}\overline{T}_{ip} &= a_i^j a_p^q T_{jq} \text{ 矩阵形式为 } [\overline{T}] = [A]^T[T][A]\\ T_{jq} &= a_i^j a_p^q \overline{T}_{ip} \text{ in Matrix Form } [T] = [A][\overline{T}][A]^T\end{aligned}$$

19 如果我们考虑到 2D 案例, 从方程式 O.2

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ T &= \begin{bmatrix}T_{xx} & T_{xy} & 0\\ T_{xy} & T_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \overline{T} &= \begin{bmatrix}\overline{T}_{xx} & \overline{T}_{xy} & 0\\ \overline{T}_{xy} & \overline{T}_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = A^T T A\end{aligned}$$

替代和简化 ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 和 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$)

$$\begin{Bmatrix}\overline{T}_{xx}\\ \overline{T}_{yy}\\ \overline{T}_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_{xx}\\ T_{yy}\\ T_{xy}\end{Bmatrix}$$

O.1.2.4 交响二级紧张器的主要值

20 连续介质力学中的两个基本紧张器是第二顺序和同步。(应力 和 应变) 我们正在研究这些压缩机的一些重要特性。每個相同的 张量 T_{ij} 在太空中定义的某个点, 它与每个方向有关。(由正常单位指定 n_j) 图像 O.2, 在此时, 由内部产品提供的向量

$$v_i = T_{ij} n_j$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

如果方向是指向的 v_i 是平行的 n_i 内部产品是

$$T_{ij}n_j = \lambda n_i$$

而方向 n_i 被称为主要方向 T_{ij}. 因为 $n_i = \delta_{ij}n_j$ 可以重写为

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0$$

代表四个未知的三方程式系统 n_i 和 λ.

$$\begin{aligned}(T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 &= 0\\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 &= 0\\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 &= 0\end{aligned}$$

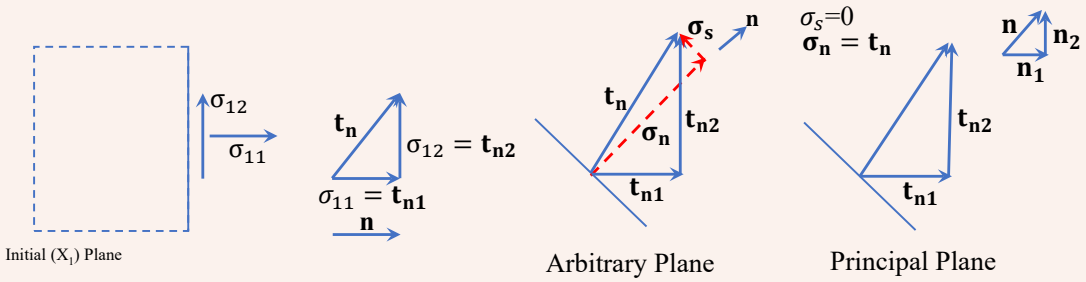


图 O.2: 张量 命令二的主要方向

21 要有非三位一体的解决方案 ($n_i \neq 0$), 对方数的行列式必须是零:

$$\left|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0$$

22 这个行列式的扩展导致以下特征方程式

$$\lambda^3 - I_T\lambda^2 + II_T\lambda - III_T = 0$$

根源被称为主要价值 T_{ij} 和

$$\begin{aligned}I_T &= T_{ii} = \text{tr}\, T_{ij}\\ II_T &= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij})\\ III_T &= |T_{ij}| = \det T_{ij}\end{aligned}$$

第一、第二、第三个不变, 分别称为 T_{ij}. 常见的是要把这些根当作 $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > \lambda_{(3)}$. 至于主要压力, 这些不变可以简化到

$$\begin{aligned}I_T &= T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)}\\ II_T &= -(T_{(1)}T_{(2)} + T_{(2)}T_{(3)} + T_{(3)}T_{(1)})\\ III_T &= T_{(1)}T_{(2)}T_{(3)}\end{aligned}$$

23 对于具有真实组件的同步 张量 , 主要值也是真实的。如果这些值是不同的, 那么三个主要方向是相互正确的。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

O.1.3 应力的物理解释

24 八角飞机是对主要应力方向的每一个角度均等的飞机。O.3 但是, 这架飞机的平常是由

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

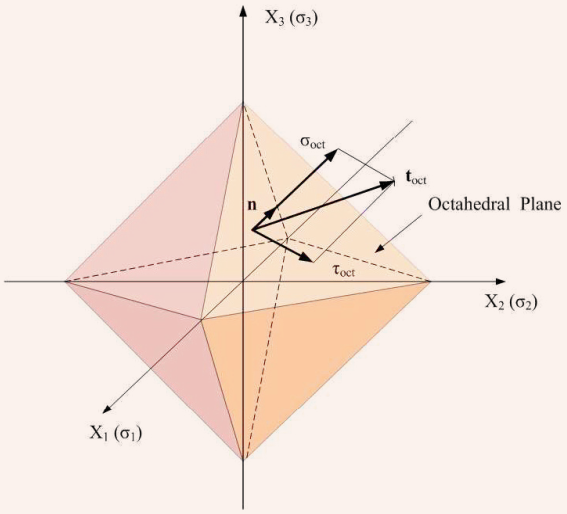


图 O.3: 奥克塔德拉飞机

25 这架飞机上的向量拖动是

$$\mathbf{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\}$$

通常的 应力 的元素在八角层上是由

$$\sigma_{oct} = \mathbf{t}_{oct} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3}\mathbf{I}_1 = \sigma_{hyd}$$

26 剪应力 是由

$$\tau_{oct}^2 = |\mathbf{t}_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9}$$

27 在算法操作中, 可以证明

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

最后, 八角剪应力的方向是由

$$\cos 3\theta = \sqrt{2}\frac{J_3}{\tau_{oct}^3}$$

28 灵活的应变能 (全集) 单位体积可以分为两部分: $U = U_1 + U_2$, 在哪里

$$\begin{array}{rcll} U_1 & = & \frac{1-2\nu}{E} I_1^2 & \text{Dilational energy} \\ U_2 & = & \frac{1+\nu}{E} J_2 & \text{Distortional energy} \end{array}$$

O.2 向量字段; 变形体的机械

O.2.1 力量

29 在连续介质力学中有两种力量

身体力量: 对体内体积或质量的元素, 如重力、电磁场等进行作用。$\mathbf{dF} = \rho \mathbf{b} dVol.$

表面力量: (或 拖动) 是接触部队在其边界表面上对自由体进行作用。这些将被定义为单位区域的强度, 图 O.4 平等 O.3.

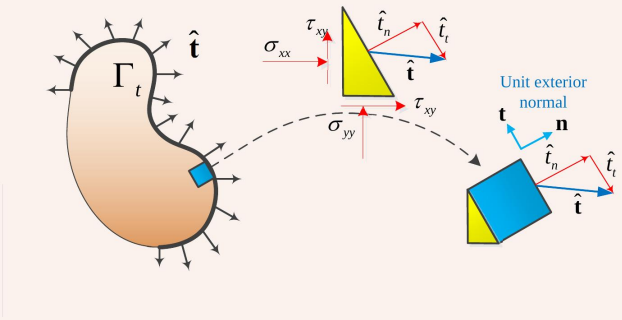


图 O.4: 表面力量

$$\int_\Gamma \mathbf{t} d\Gamma = \mathbf{i}\int_\Gamma t_x d\Gamma + \mathbf{j}\int_\Gamma t_y d\Gamma + \mathbf{k}\int_\Gamma t_z d\Gamma \tag{O.3}$$

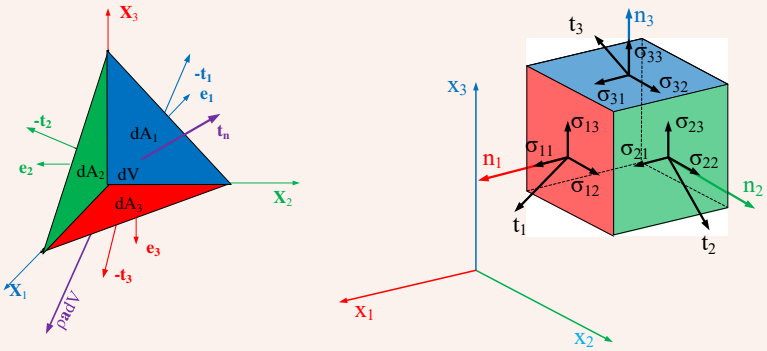
30 我们通常将术语拖动限制在一个身体的实际边缘表面上, 并使用术语压力 vector 为想象的内部表面。飞机上的拖动 vectors perpendicular 到坐标轴是特别有用的。當在三個相互偏向飛機上起作用的引擎被授予時, 在任何其他任意傾斜飛機上的壓力引擎可以用第一套拖動來表達。

O.2.2 卡西的应力张量

31 力量的概念最初是抽象的, 亚里士多德物理学提到 impetus。. 加利利奥和牛顿 (1687) 正式化它。至于压力的概念, 直到 1822 年,Cauchy 提出了包含正常和有意义的组成部分的拖

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

动 vector 的想法。$\mathbf{t} = t_n \mathbf{e}_n + t_t \mathbf{e}_t$. 他的 "天才" 要考虑什么被称为 Cauchy tetrahedron。图像 O.5a 纽顿的第二法则。(或更准确地说, 它的延伸到粒子由 Euler:Euler 的第一法则动作).



(a) 泰特拉德龙　　(b) 压力

图 O.5: 卡西:Tetrahedron 到应力

32 平衡 Cauchy tetrahedron 产量

$$\mathbf{t}dA - \mathbf{t}_1 dA_1 - \mathbf{t}_2 dA_2 - \mathbf{t}_3 dA_3 = \rho dV \mathbf{a}$$

哪里 $\mathbf{a}$ 是加速度和 ρ 质量 密度. 面部的区域是由

$$\begin{aligned} dA_1 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_1 dA \\ dA_2 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_2 dA \\ dA_3 &= \mathbf{n}.\mathbf{e}_1 dA = n_3 dA \end{aligned}$$

取代在平衡方程中, 并考虑到限制案例 $dV \longrightarrow 0$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 \tag{O.4}$$

拖动 vectors 必须有组件

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

33 值得注意的是, 历史上和传统上在连续机械中, 压力被称为 $\mathbf{T}$. 它被替换为 σ. 取代平衡 O.4

$$\begin{aligned} \mathbf{t} =& n_1(\sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3) + n_2(\sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3) \\ &+ n_3(\sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3) \\ =& (n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31})\mathbf{e}_1 + (n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{32})\mathbf{e}_2 \\ &+ (n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23} + n_3\sigma_{33})\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或者只是

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{O.5}$$

34 有一个名为 Cauchy 压力发动机的第二顺序。第一份签名 (i) 指向外面面对正常的方向, 而第二个 (j) 到组件力量的方向, 图 O.5b.

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} \right]}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

以前的方程式在 Continuum 机械的基础上发挥了重要作用。.

35 最后, 看到了评论 (在工程中常用) 它是代表同步的张量的一种方式, 通过减少其顺序。

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{array} \right] \rightarrow \left\lfloor \begin{array}{cccccc} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} \end{array} \right\rfloor$$

36 注意: 我们尚未引入平衡的方程式 (动力方程式).

O.2.2.1 液化和偏差 应力 发动机

37 让 σ 标记平均值 正应力 p:

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\ \boldsymbol{\sigma}$$

38 然后, 应力张量可以写作为两个紧张器的总数:

水晶 应力 在其中, 每个正应力均为 $-p$ 但是, 压力是零的。水位应力产生在一个以色列中没有形状变化的体积变更。

$$\sigma_{hyd} = -p\mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{array} \right]$$

转换器 应力: 原因是形状的变化。

$$\sigma_{dev} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{array} \right]$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

O.2.2.2 应力 州的地质代表性

39 使用三大压力 $\sigma_1, \sigma_2,$ 和 $\sigma_3,$ 作为坐标, 可以构建三维应力空间, 图 O.6. 这种压力代表性被称为 Haigh-Westergaard 的压力空间。

OP $=$ **ON** $+$ **NP**. 前方沿着向量单位的方向。$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ 和 **NP**$\perp$**ON**.

ON 是应力状态的液化组成部分, 轴 $O\xi$ 它被称为水晶轴。ξ 而且, 在这个轴上的每一个点都有 $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = p,$ or $\xi = \sqrt{3}p$. **NP** 代表应力状态的偏离组成部分 (s_1, s_2, s_3) 它是对 ξ 轴。任何在水位轴的平行飞行都被称为偏离飞行, 并被表达为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}) = \xi.$ 一架飞机通过起源, 被称为 π 飞机, 由 $\xi = 0.$ 任何包含水位轴的飞机都被称为梅里迪亚飞机。向量的评论 **NP** 它在梅里迪亚飞机上, 并且 $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}.$

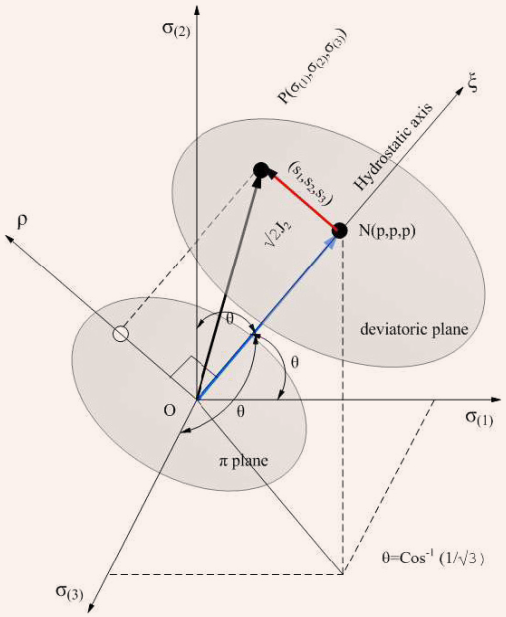


图 O.6: 应力的地质代表性

O.2.3 电影学

O.2.3.1 位置和 位移

40 考虑到一个固体的扭曲, 我们可以有, 图 O.7 两个不同的协调系统:

材料协调 (X_1, X_2, X_3) 定义在不形成的原始坐标系统中, 引发了拉格兰坐标体系。

空间协调 (x_1, x_2, x_3) 被定义为扭曲的协调系统。这是 Eulerian 协调系统的启动。

更具体地说, 在初始配置中, P_0 有位置 向量

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{I}_1 + X_2\mathbf{I}_2 + X_3\mathbf{I}_3$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

在这里, 在物质坐标方面表达的 (X_1, X_2, X_3). 在扭曲的配置中, 粒子 P_0 现在已经转移到新的位置。P 并有下列位置 向量

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

它在太空坐标的意义上表达。位移 向量 $\mathbf{u}$ 连接 P_0 和 P 是可以用物质或空间坐标表达的转移 vector。

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= U_K\mathbf{I}_K \\ \mathbf{u} &= u_k\mathbf{i}_k\end{aligned}$$

O.2.3.2 斯特林

41 如果 位移 格拉迪安和移植本身都很小, 那么 $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 因此,Eulerian 和 Lagrangian infinitesimal 应变的紧张器可以被视为平等。$E_{ij} = E^*_{ij}$.

42 在另一方可以输入替代应变代表, 表 O.2.

表 O.2: 应变 代表性

		位移 格拉迪特	
		小小	大型
位移	小小	拉格兰吉小应变 (卡西)	拉格兰大 应变 (绿色 Lagrange)
	大型	小型 Eulerian 应变	Eulerian Finite 应变 (阿尔曼西 - Eulerian-Almansi)

43 在這本書中, 我們將限制自己在 Lagrangian 应变的代表性。

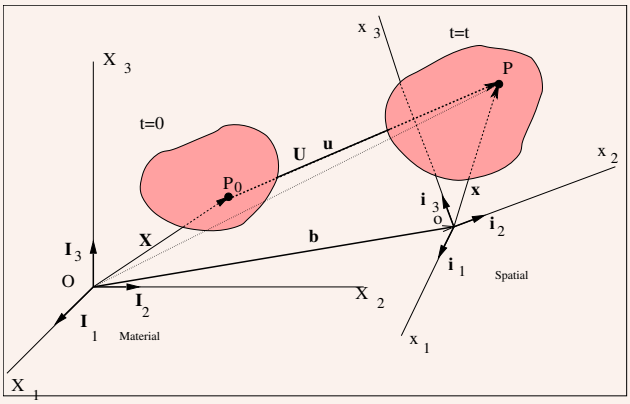


图 O.7: 位置和位移 vectors

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

44 如果大变形被考虑到 (如在屈曲) 卡特西亚坐标系统中的 Eulerian finite 线是:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{O.6}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

45 请注意, 该 (常用的) 工程师 Shear 应变 被定义为

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

46 在大多数情况下, 变形是足够小的四方术语要被推翻, 结果的平衡减少到

$$\begin{array}{lllllllll}
\varepsilon_{xx} & = & \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} & = & \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} & = & \frac{\partial w}{\partial z}; \\
\gamma_{xy} & = & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{xz} & = & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; & \gamma_{yz} & = & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z};
\end{array}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)$$

被称为 Cauchy 应变 . 在终端元素中, 压力经常通过线性操作器表达。**L** :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{array}\right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\end{array}\right]}_{\mathbf{L}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}u_x\\ u_y\\ u_z\end{array}\right\}}_{\mathbf{u}} \tag{O.7}$$

O.3 连续介质力学的基本法则

47 在此部分中, 我们将产生区别方程式, 以应力和变形的方式在一个时刻和时间的变化。它们将适用于任何连续的媒体, 但我们不会有足够的方程式来确定未知的张量字段。为此, 我们需要等待下一个部分, 在那里将引入有关压力和紧张的宪法。

48 只有在构成方程式和边界和初始条件下, 我们才会能够获得一个精确定义的数学问题来解决压力和变形分布或移动或速度领域。

49 我们将总结区别方程式, 本地表达质量, 动力和能量的保存。这些差异方程式的平衡将从整体形式的平等表达的基本次元连续介质力学。

O.3.1 保守法

50 保守法则是古典物理学的基本组成部分。保守法定一个平衡的规模或紧张量在欲 V 被一个表面包围 S. 在其最普遍的形式中, 这样的法律可以表达为

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathcal{A}\mathrm{d}V}_{\text{Rate of variation}}+\underbrace{\int_S \boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}S}_{\text{Exchange by Diffusion}}=\underbrace{\int_V \mathbf{A}\mathrm{d}V}_{\text{Source}}$$

哪里 $\mathcal{A}$ 是利息数量的量 密度 **a** (质量, 线性动力, 能量,...), **A** 是从外部提供的量为密度的速度, 以及 $\boldsymbol{\alpha}$ 是表面 密度 的损失在表面上 S 由 V 它将是正常的表面功能。**n**.

51 因此, 我们将以前的方程式列为: 输入量 (由右手侧提供) 它等于在边界上失去的东西, 并且要改变。$\mathcal{A}$ 什么是利息的数量。不同数量的尺寸是由

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{a}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3})\\ \dim(\boldsymbol{\alpha}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-2}t^{-1})\\ \dim(\mathbf{A}) &= \dim(\mathcal{A}L^{-3}t^{-1})\end{aligned}$$

52 因此, 本节将适用以前的保守法为质量, 动力和能量。结果的差异方程将提供有关固体压缩性方面的额外有趣关系。(古典水力学和塑性理论的重要性), 平衡和应力张量的同位素,

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

以及热力学的第一法则。前三条保守法以及第二条热动力学法则的发言, 构成了常见称为连续介质力学基本法则。

O.3.2 流动

53 在第一条保守法案提到之前, 我们必须定义跨界表面的流动概念。通过表面的流动可以通过在空间中固定的想象表面的考虑图形定义。“中间” 通过它流动。如果我们将一个积极的侧面归咎于表面, 并采取 **n** 在积极的意义上, 然后体积 “材料” 通过无限的表面区域流动 $\mathrm{d}S$ 在时间 dt 相当于基因缸的 体积 $\mathrm{d}S$ 和高的 vdt 与 速度 向量 平行 **v** 图像 O.8.

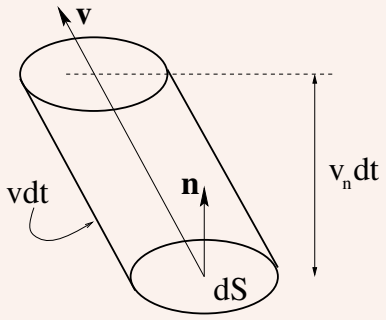


图 O.8: 通过区域流动 $\mathrm{d}S$

(If **v**·**n** 是负的, 那么流量在负方向). 因此, 我们将体积流定义为

$$\text{Volume Flux} = \int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S v_j n_j \mathrm{d}S$$

最后的形式是对直角卡特西亚组件。我们可以普遍化这个定义, 并根据单位区域定义下列流量。$\mathrm{d}S$:

$$\begin{aligned}\text{Mass Flux} &= \int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S \rho v_j n_j \mathrm{d}S\\ \text{Momentum Flux} &= \int_S \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}S = \int_S \rho v_k v_j n_j \mathrm{d}S\\ \text{Heat flux} &= \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_S q_j n_j \mathrm{d}S\end{aligned}$$

O.3.3 质量的保留; 连续性方程式

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ or } \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

54 向量 表格独立于任何坐标的选择。这个方程表明, 速度 vector 领域的差异相当于 $(-1/\rho)(d\rho/dt)$ 测量物质从粒子中流动的速度, 相当于密度减少的单位速度。ρ 在粒子的附近。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

55 如果材料是不可压缩的, 以便在每个物质粒子附近的 密度 保持稳定而移动, 那么连续性方程式采取更简单的形式。

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ or } \mathbf{\nabla \cdot v} = 0$$

56 这是压缩性的条件。.

O.3.4 保持动力; 运动方程

57 一组粒子的总动力的变化时间率相当于对该组粒子行动的所有外部力量的向量总值, 只要牛顿第三法适用。这个原则的连续形式是一个基本的立场。[2] 以 连续介质力学。开始与

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \underbrace{\rho \mathbf{v}}_{\mathcal{A}}\, \mathrm{d}V - \int_S \underbrace{\mathbf{t}}_{\alpha}\, \mathrm{d}S = \int_V \underbrace{\rho \mathbf{b}}_{\mathbf{A}}\, \mathrm{d}V$$

并指出这

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathcal{A}) & = & \rho \mathbf{v} = \frac{m}{L^2 t} \\ \dim(\alpha) & = & \mathbf{t} = \frac{ma}{L^2} = \frac{m}{Lt^2} \\ \dim(\mathbf{A}) & = & = \rho \mathbf{b} = \frac{m}{L^3}\frac{L}{t^2} = \frac{m}{L^2 t^2} \end{array}$$

二、分离理论 (Eq. R.4)

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S \underbrace{v_i n_i}_{\text{flux}}\, dS$$

58 向量函数通过某个封闭表面的流动相当于该函数在由表面包围的 体积 上的差异。我们替代 $t_i = T_{ij} n_j$ 使用分歧理论 (Eq. R.4) 要得到

$$\begin{array}{rcl} \int_V \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) \mathrm{d}V & = & \int_V \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}V \\ \int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \right] \mathrm{d}V & = & 0 \end{array}$$

或自愿的体积

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$$

什么是 Cauchy (首先) 动作方程, 或线性动力原则, 或者更简单的是平衡方程。在 3D 和静态问题中扩展时, 这个方程式产生:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 & = & 0 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 & = & 0 \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 & = & 0 \end{array} \tag{O.8}$$

[2] 投诉: 一项声明, 也称为一个轴子, 被认为是真实的没有证据。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

或

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{T}} + \rho \underbrace{\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{b}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{O.9}$$

59 平等 (O.8) 代表了 Cauchy 的动作方程式。一位新东尼亚人 (无情) 流体 将 应力张量 降至纯正常应力,

$$T_{ij} = \sigma\, \delta_{ij},$$

哪里 σ 标志着 (动态) 正应力 和 δ_{ij} 是的, 克罗纳克德拉 因此,

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = \sigma, \qquad T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

60 将这些关系替换为 Eq。(O.8) 收益

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \rho b_1 = \rho a_1, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \rho b_2 = \rho a_2, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} + \rho b_3 = \rho a_3,$$

哪里 a_i 是加速度粒子的组成部分。

61 引入流体粒子移植

$$a_1 = \ddot{\xi}, \qquad a_2 = \ddot{\eta}, \qquad a_3 = \ddot{\zeta},$$

要注意的是, 在水力学的定义中, 重力被计算为静态水位领域 (因此, 这 $b_i = 0$ 关于增加问题)，该平衡减少到

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \rho \ddot{\xi}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \rho \ddot{\eta}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} = \rho \ddot{\zeta}.$$

62 最后, 使用 $w = \rho g$ 我们得到了

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

这些是用于水力动态分析的关系。

63 我们注意到, 这些方程式也可能来自自由体图表, 假设平衡 (纽顿的第二法则) 考虑到一个无限的单元尺寸 $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2 \times \mathrm{d}x_3$ 图像 O.9.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

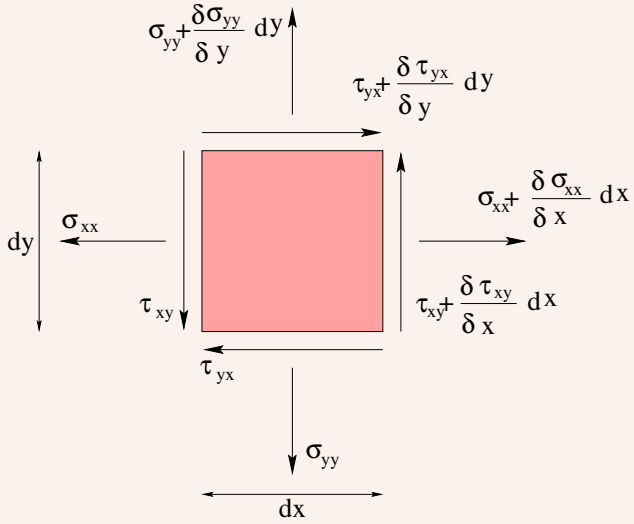


图 O.9: 平衡的压力, 卡特西亚坐标

O.3.5 能源保养: 热力学的第一原则

64 热力学的第一原则是关于在一个 (关闭) 系统和热转移到系统的能量变化。我们将假设唯一的能量转移到系统是通过表面拖动和身体力量在系统上进行的机械工作, 并通过热转移跨境。

65 如果仅考虑到机械量, 则可直接从方程所提供的运动方程中得出能量的储存原则。O.8. 这一点是通过将整合在体积上实现的。V 平等之间的分数产品 O.8 和 速度 v_i.

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \int_V v_i T_{ji,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho b_i v_i \mathrm{d}V$$

考虑左手侧

$$\int_V \rho v_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v^2 \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

代表 动能 的变速时间率 K 在连续中。

66 如果我们考虑热过程, 则总热的连续增加率是由

$$Q = -\int_S q_i n_i \mathrm{d}S + \int_V \rho r \mathrm{d}V$$

Q 有尺寸 [3] 权力, 就是 ML^2T^{-3}, SI 单位是 Watt (W). $\mathbf{q}$ 是每单位区域的热流, 其尺寸为 MT^{-3} 相应的单位是 Wm^{-2}. 最后, r 是每单位的放热恒定 质量, 其尺寸为 $MT^{-3}L^{-4}$ 相应的单位是 Wm^{-6}. 我们有这样

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V = \int_V (v_i T_{ji})_{,j}\mathrm{d}V + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q$$

[3] 工作=$FL = ML^2T^{-2}$ 功率=工作/时间

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

67 接下来, 我们将右侧的第一个整体转换为表面整体, 根据分离理论。(Eq. R.4) 从那以后 $t_i = T_{ij}n_j$ 我们获得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \int_V D_{ij}T_{ij}\mathrm{d}V &= \int_S v_i t_i \mathrm{d}S + \int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V + Q \\ \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q\end{aligned}$$

68 这个方程式将连续的整体机械能量的变化时间率在左侧与右侧表面和身体力量所进行的工作速度有关。

69 如果要考虑机械和非机械能量, 则第一原则规定: **金属的变速时间加内部能量相当于工作速度总和所有其他能量, 供给或从中移除, 连续每单位时间。(热、化学、电磁等。)**. 对于热机连续性, 通常用整体表达来表达内部能量的变化时间率。

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V$$

哪里 u 是每单位的内部能量 质量 或特定内部能量的。我们注意到这 U 它在第一原则上只看起来是差异性, 因此如果我们真的需要评估这个数量, 那么我们必须有一个参考值。U 将是零。

70 尺寸的 U 能量:DIM $U = ML^2T^{-2}$, SI 单位是 Joule。相同的 DIM $u = L^2T^{-2}$ 与 SI 单位的 Joule/Kg。

71 在能源集成方面, 第一原则可以重写为:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho v_i v_i \mathrm{d}V}_{\frac{dK}{dt}=\dot{K}} + \underbrace{\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u \mathrm{d}V}_{\frac{dU}{dt}=\dot{U}}}^{\text{Rate of increase}} = \overbrace{\underbrace{\int_S t_i v_i \mathrm{d}S}^{\text{Exchange}} + \underbrace{\int_V \rho v_i b_i \mathrm{d}V}^{\text{Source}}}^{\frac{dW}{dt}(\mathcal{P}_{ext})}$$

$$+ \overbrace{\underbrace{\int_V \rho r \mathrm{d}V}^{\text{Source}} - \underbrace{\int_S q_i n_i \mathrm{d}S}^{\text{Exchange}}}^{Q(\mathcal{P}_{cal})}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Q \tag{O.10}$$

72 在理想的弹性中, 热转换被认为是无意义的, 并且所有输入工作都被认为以可恢复存储的弹性和电压能量的形式转化为内部能量, 在身体被解载时可以作为工作恢复。

73 然而, 一般而言, 大部分输入工作到变形材料不可恢复存储, 而是由变形过程分散, 导致体温上升, 最终被驱逐出热。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

O.4 宪法方程式

74 胡克[4] 1676 年发表的一篇文章 **天下之人 天上之人**. 只有在 1678 年, 他才出版了关键。(拉丁语) **紧张**,*SIC VIS*, 意思 “如同延伸, 如同力量” 在自己的话语中: **每個春天的力量與它的緊張相同: 即, 如果一個力量伸出或鼓是一個空間, 兩人將它推翻兩次, 三人將其推翻三次, 等等。** 图像 O.10. 有人说, 胡克是 “太少, 太近已知。”

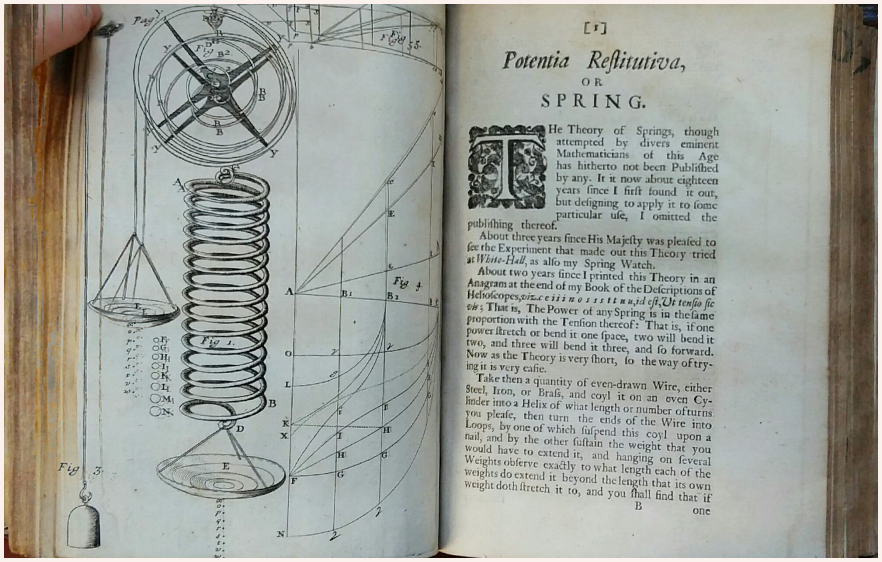


图 O.10: 板 从霍克的讲座上

75 从那时起, 胡克成为弹性的无可争议的父亲。

O.4.1 一般 3D

76 一般化胡克的法则可以写为:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad i,j,k,l = 1,2,3 \tag{O.11}$$

77 和 (第四次命令) 张量 弹性恒久 D_{ijkl} 已有 81 (3^4) 组件; 但是, 由于两者相同性 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 最多有 36 个 $\left(\frac{9(9-1)}{2}\right)$ 不同的弹性术语。

78 为了写下胡克的法则, 双重索引系统经常被一个简单的索引体系取代, 有六个范围:

$$\sigma_k = \overbrace{D_{km}}^{6^2=36}\ \varepsilon_m \qquad k,m = 1,2,3,4,5,6$$

[4]休克, 纽顿的当代人, 非常秘密, 痛苦和嫉妒。(与 Salieri 不同 莫扎特) 因为他觉得他被拒绝了许多发现的信用。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

79 关于 Lame 的常态, 胡克的法则 以色列人被写作为

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij} && \text{or } \mathbf{T} = \lambda\mathbf{I}_E + 2\mu\mathbf{E} \\ E_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\left(T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}T_{kk}\right) && \text{or } \mathbf{E} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\mathbf{I}_T + \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} \end{aligned}$$

80 在工程方面, 常态:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

81 相同的, 在纯粹的相关术语子中 x_1x_3 和 x_2x_3 飞机, 我们有

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = \sigma_{12} &= \tau \quad \text{all other } \sigma_{ij} = 0 \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{\tau}{G} \end{aligned}$$

和 μ 相当于 剪切模量 G. 胡克的法律对伊索特洛普材料在工程恒定的意义上成为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) \text{ or } \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{I}_\varepsilon\right) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \text{ or } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathbf{I}_\sigma \end{aligned}$$

82 当应变方程式扩展到 3D 卡特西亚坐标时, 它会产生:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

83 如果我们转换这个方程式, 我们将获得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & G\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy}(2\varepsilon_{xy}) \\ \gamma_{yz}(2\varepsilon_{yz}) \\ \gamma_{zx}(2\varepsilon_{zx}) \end{Bmatrix} \tag{O.12}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

O.4.2 超越性异常案例

84 对于转向的以色列, 我们可以表达应力-应变关系在

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}\\ \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{11}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}\\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + a_{33}\sigma_{zz}\\ \gamma_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xy}\\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{xy}\\ \gamma_{xz} &= a_{44}\tau_{xz}\end{aligned}$$

和

$$a_{11} = \frac{1}{E};\quad a_{12} = -\frac{\nu}{E};\quad a_{13} = -\frac{\nu'}{E'};\quad a_{33} = -\frac{1}{E'};\quad a_{44} = -\frac{1}{\mu'}$$

哪里 E 是杨氏模量在以色列的飞机和 E' 飞机上的一员是正常的。ν 相应于在紧张应用到飞机时, 以色列的平面中交叉缩小; ν' 相应于在紧张局势正常应用到飞机时, 以色列层的转折缩小; μ' 相应于以色列的飞机和任何正常飞机, 以及 μ 它是伊索特罗比亚飞机的模块。

O.4.3 2D 案例

85 很多时候, 你可以做简单的假设来将 3D 问题缩小为 2D 一个。

飞行器 应变 对于涉及长体的问题, 在 z 方向没有荷载或地质变异, 然后 $\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. 以平等为替代 O.12 我们获得

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}(1-\nu) & \nu & 0\\ \nu & (1-\nu) & 0\\ \nu & \nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

轴心测量 在革命的坚固中, 我们可以使用极协调系统。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}\\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r}\\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}\\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\end{aligned}$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

本构关系 再次类似于 3D/飞机 应变

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{rr}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \tau_{rz}\end{array}\right\}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\begin{array}{cccc}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\\ \gamma_{rz}\end{array}\right\}$$

飞行器 应力 如果长度尺寸在 z 方向较小 比在 x 和 y 方向, 然后 $\tau_{yz}=\tau_{xz}=\sigma_{zz}=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ 整个厚度。再次, 替换为平等 O.12 我们得到了:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{array}\right\} &= \frac{1}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}\\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{1}{1-\nu}\nu(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})\end{aligned}$$

O.5 现象观察

86 我们简要讨论了一些一般现象学方面。与混凝土的分裂测试和反应相关。

O.5.1 充电、驱动和压力控制测试

87 在处理线性和非线性断裂力学的覆盖之前混凝土, 读者必须明白物质和结构反应, 当样品被统一的紧张的负载、移动或压力控制在测试期间。现代测试设备可以编程以适用预定率以 荷载 (以 荷载 细胞为准), 由 位移 (根据内部的测量位移 转换器), 或应变 (以 应变/clip 或其他工具), 图 O.11

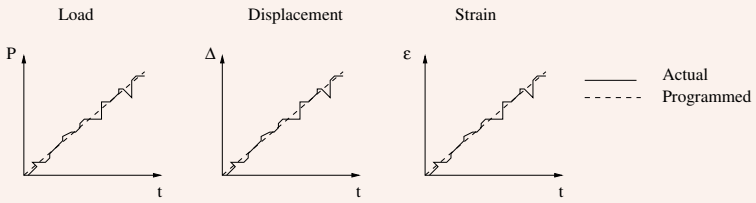


图 O.11: 测试控制

荷载 控制: 交头应用一个增加的荷载无论样本的变形或反应。为所有人材料, 当抗拉强度到达时, 突然出现英格兰失败 样本中积累的 应变能 是突然发行, 一旦最终的 荷载 样品达到, 因此突然失败可能爆炸。

位移 / 打击控制: 十字头适用增加 位移 到样本。用于软化材料将有一个后峰反应, 在应力的逐步下降伴随着 位移 的增加。在这种情况下, 有一个逐步的应变能 释放, 然后转移到表面能量克拉克形成。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

应变 控制: 与 位移 控制相似, 除此之外 feedback 由 ("战略定位") 应变 Gage 或 Clip Gage また是自愿的样品变形 (不一定符合充电方向。). 要实现这个测试一个剪辑或应变的插件必须提供反馈向测试设备发出信号, 以适当调整中风。

88 大多数混凝土分裂测试是在应变控制下进行的。口中放置的相关术语子, 提供样本答案。

89 无论是中风还是应变控制的测试都需要关闭路径实验设置, 通常是昂贵的和直到很久以前, 它还没有广泛使用。

O.5.2 钢材和混凝土的预/后峰材料反应

90 作为混凝土分裂的介绍, 让我们比较前和金属和混凝土的后峰反应, 如图所示图 O.12, 两者都得到了一个应变控制的测试中, 一个未经切割或未经注入的样本。

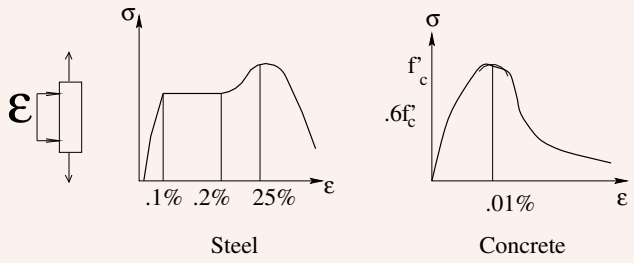


图 O.12: 金属和混凝土的压力曲线

1. **预定**:
   (a) 金属显示线性弹性响应, 以达到应力的产量 σ_{yld}, 和一个大约的应变 0.1%. 随后, 由于内部分散塑料变形应变 到 25% 可以追随应变硬化。
   (b) 混凝土 显示线性反应, 大约为 $0.6f_t'$. 接下来, 内部微折引发非线性反应。到高峰应力 f_t' 和相应的应变大约 0.01%.

   在 荷载 控制下, 只有预峰反应才能测量。
2. **后皮克**:
   (a) 金属对后峰区的反应尚不清楚。它不仅不具有实用性, 而且也被大多夸张。用脖子。
   (b) 混凝土在后峰区的反应是最有趣的, 因为它可以显示额外的压力。混凝土 回应的下降分支在 图 O.12 它是平均物质反应的理想化。更准确的描述应考虑到位置引发的克拉克。因此, 远离本地的克拉克有一个弹性下载, 并在克拉克, 因为一个应变不能正确定义, 一个应力克拉克打开位移是一个更合适的模型。这一点将在下一部分讨论。

   后峰答案只能在 位移 中获取或 应变 控制测试。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

91 在这两种情况下, 压力线下的区域曲线代表能量, 可以被单位吸收。破裂表面, 因此 混凝土 将显示比金属更强烈的反应。

92 经过实验观察, **宏观**混凝土的反应显示一种缓解性反应, 并且将金属对内部的双重反应归功于解散, 我们提出下一个问题, 为什么混凝土是放松?

O.6 变形的位置

O.6.1 实验证据

93 如果我们考虑到一个混凝土样本, 单轴充电的荷载 F, 我们可以通过 LVDT 记录延长 (线性变量 位移 转换器) 按配置 1, 2 或 3, 图 安装 O.13.

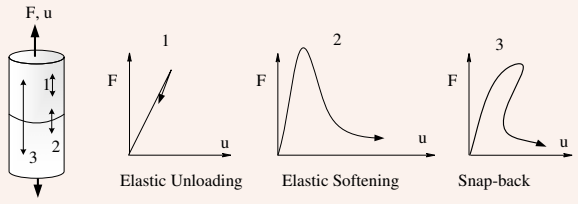


图 O.13: 捕获实验性位置在单轴上载的混凝土样本

94 一旦达到荷载峰值, 并启动破裂, 转换器 1 将记录弹性下载, 2 应变 放松和 3 snap-back。

95 如果我们要通过采取 $\sigma = F/A$, 和 $\varepsilon = u/L$, 很明显, 我们不能提供一个独特的定义应变。穿越克拉克。在此位置, 应变 不能更长的定义, 而不是我们应该以其克拉克开幕式 位移 COD 其次, 它将随之而来。與 应力 (σ 代码).

96 这种能力通过控制下的克拉克传输压力位移 是软化材料的特征。

O.6.1.1 σ 代码图, 希尔伯格的模型

97 从前的讨论中, 很明显, 混凝土软化是由一个应力克拉克开放宽曲线的特点 (而不是压力). 具体的特征化为缓解反应理想情况下应该从单轴测试中获得。这是一个不受折磨的样本。然而, 它已被发现 (Li and Liang, 1986; Hordijk, Reinhardt, and Cornelissen, 1989) 不过, 这些测试不仅如此。敏感, 但显著不同的结果可以从不同地质, 尺寸和测试机器。因此,The 软化曲线往往是通过测试中间地确定的。样品

98 在什么可能是非线性工作中最引用的作品混凝土文学的分裂, 希尔伯格 (Hillerborg, Modéer, and Petersson, 1976) 1976 年提出了一个非常简单和优雅的模型, 已经此前已定义为优质。在此模型中, 克拉克由两个部分组成, 图 O.14:

1. 真正或物理的裂缝, 没有压力可以被传递。在这个区域中, 我们有位移和应力停滞。
2. 虚构的克拉克, 或破产过程区 (FPZ) 比前者先, 其特点是:

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

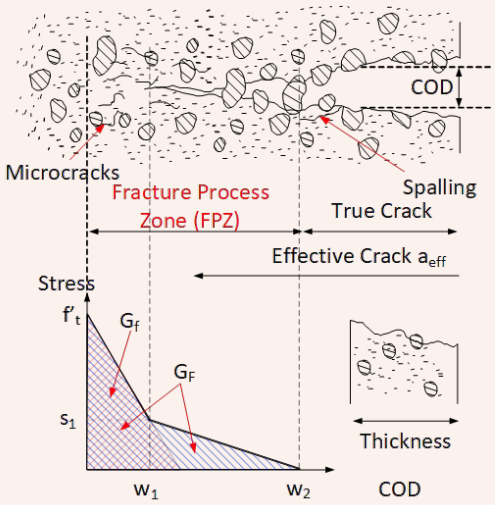


图 O.14: 希勒博格的虚构克拉克模型

(a) 峰值 应力 在其点相当于 抗拉强度 的混凝土
(b) 应力 分布下降 f_t' 在虚构的顶部克拉克到零在物理克拉的顶部

值得注意的是, 沿着 FPZ, 我们有位移不连续性。应力 连续性。

[99] 这个模型是非线性断裂力学中最广泛使用的有限元分析, 但是由于计算复杂性, 少数 “工程师” 结构已被分析。除此之外,

1. 在下降分支中, 有一个通胀点。

   (a) 第一部分与 (不连接) 微波上一篇: 应力自由克拉克
   (b) 第二部分与集合物的桥梁

2. 曲线下的区域, 称为分裂能量 G_F (不要被混淆 G_c 关键能源释放利率) 是需要花费的能量的一部分。创建一个单元的克拉克表面。
3. 通过分析多种测试数据,Bž 安特和哦 (Bažant, 1984) 发现这 G_F 可以预测 (以差异的比例为 16%) 下列实验方程式:

$$G_F = 0.0214(f_t' + 127)f_t'^2\frac{d_a}{E_c} \tag{O.13}$$

   哪里 E_c 和 f_t' 每平方英寸的公斤, d_a 是的, 以英寸的尺寸集成。
4. G_F 或分裂能量。对于 重力 女士, 一个值 1.35×10^{-3} 吉普赛 / In 推荐的, (Saouma et al., 1991). 请注意, 对于 拱 女士来说, 这个值可能是基于实验室测试增加。此外, 实验室测试也可以在恢复的核心上进行更好的指示 G_F, (Brühwiler, E., 1988).
5. 软化图表的形状 ($\sigma - COD$), 一般来说, 一个双线模型对于应变的润滑剂, 应该使用。与图的参考 O.15, 最近很多研究的主题是实验决策。破碎的能量 G_F, 以及所产生的模

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

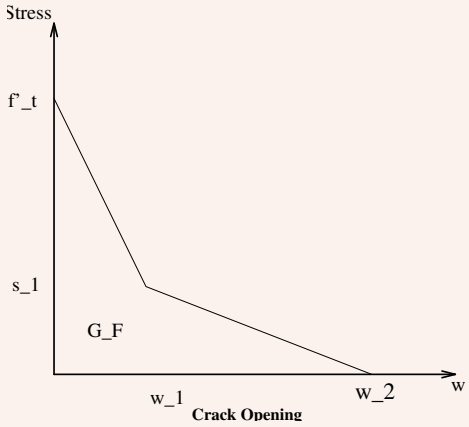


图 O.15: 混凝土 应变 调节模型

型的软化图表 (Cedolin, Dei Poli, and Iori, 1987; Petersson, 1981; Whitman et al., 1988; Jeang and Hawkins, 1985; Gopalaratnam and Shah, 1985; Duda, 1990; Giuriani and Rosati, 1986). 要确定准确的相关性价值的 G_F 和数值模拟的缓解曲线形状, 三种不同组合的破裂实验使用平均报告的分裂能量进行分析。形式的形状假设调节图表是双向的一个提议在 (Whitman et al., 1988), 图 O.15. 这个简单的模型可以独特地定义为抗拉强度。f_t' 和分裂能量 G_F. 在 (Brühwiler and Whitman, 1990), 它被发现, 为混凝土的最佳点与 1” 最大尺寸集合为:

$$s_1 = 0.4 f_t' \tag{O.14}$$

$$w_1 = 0.8 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.15}$$

$$w_2 = 3 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.16}$$

而对于结构性 混凝土, (Whitman et al., 1988) 相应的值是:

$$s_1 = \frac{f_t'}{4} \tag{O.17}$$

$$w_1 = 0.75 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.18}$$

$$w_2 = 5 \frac{G_F}{f_t'} \tag{O.19}$$

哪里 f_t' 它是抗拉强度的单轴。在非线性断裂力学分析的背景下, 这种紧张力量它不能被视为零, 否则不会有破裂过程区。如 f_t' 它很少被实验定义, 假设是 9% 由 f_c', (Mindess and Young, 1981).

6. 而不是直接的压力测试, 可以进行灵活测试。应变 控制, 和分裂能量 G_F 可以确定從荷载 和相應的 位移 曲線下的區域。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

表 O.3: 例子 结构分析 的边界条件

问题	Axial 會員 分布荷载	灵活会员 分布荷载
差异方程式	$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$	$EI\frac{d^4w}{dx^4} - q = 0$
m	1	2
重要 BC。$[0, m-1]$	u	$w, \frac{dw}{dx}$
自然的 C。$[m, 2m-1]$	$\frac{du}{dx}$ 或 $\sigma_{xx} = Eu_{,x}$	$\frac{d^2w}{dx^2}$ 和 $\frac{d^3w}{dx^3}$ 或 $M = EIw_{,xx}$ 和 $V = EIw_{,xxx}$

7. 对于动态分析, 泥土的分裂特性取决于负载速度和预载。测试结果 (Brühwiler and Whitman, 1990) 表明, 破裂的属性一般上涨, 加载率上升。动态压缩预载导致分裂特性在两种 quasi-静态和高加载率。

O.7 边界条件

100 一般情况下, 边界条件可以从与统治区别方程相匹配的 Euler-Lagrange 方程中获得。(固定机械中保持动力或平衡).

101 对于在管理差异方程中最高衍生品的领域变量, 则是顺序。$2m$ 然后我们有 (§47.2.6):

重要 (或强迫, 或地质) 边界条件 (因为它对欧拉方程的衍生性至关重要) if $\eta(a)$ 或 $\eta(b)$ =0. 基本边界条件包括零订单衍生品 (域变量本身) 通过 M1。数学上, 这与 Dirichlet 的边界值问题相匹配。

自然 (或静态) 如果我们离开 η 要有意志性, 就需要使用 $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$ 在 $x = a$ 或 b. 自然界限条件涉及命令衍生品 m 而且更高。数学上, 这与新人边界值问题相匹配。

混合边界值 问题, 其中在边境的补充部分上确定的基本和自然边界条件 (如如 Γ_u 和 Γ_t). 数学上, 它们符合所谓的罗宾边界值问题。

桌子 O.3 在 结构分析 中提供例子。

O.8 彩色图表

102 对于这一向量场问题，相应的 Tonti 图见图 O.16，其力学关系见图 O.17。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

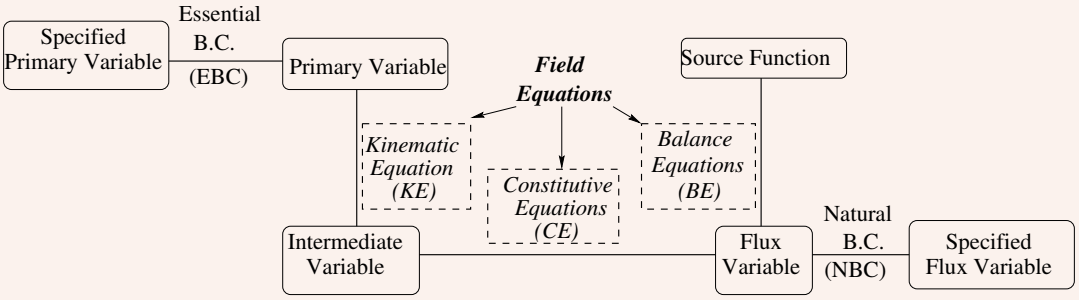


图 O.16: 托尼的图表组件 (Felippa, 2000)

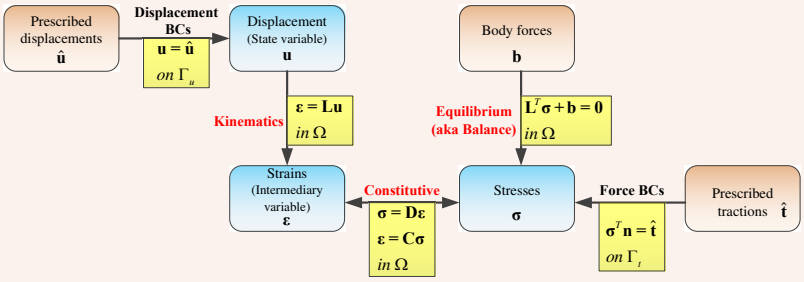


图 O.17: 变形体的机械图表

O.9 内部力量的概念

103 直接以应力和应变为基本变量进行分析并不总是方便，因此可采用它们的积分量，即**内力**与广义位移。

104 内力定义为应力沿厚度方向的积分。对于板单元，见图 O.18。

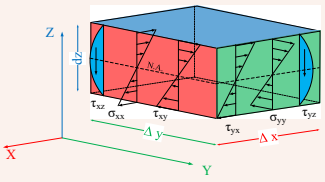


图 O.18: 以应力表示的内力

以单位宽度计，有

$$\text{膜（轴向）内力}\quad \mathbf{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} dz \quad \rightarrow N_{xx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} dz \text{ 等}$$

$$\text{弯矩}\quad \mathbf{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz \quad \rightarrow M_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{xx} z dz \text{ 等}$$

$$\text{横向剪力}\quad \mathbf{V} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \boldsymbol{\tau} dz \quad \rightarrow V_{yy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \text{ 等}$$

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

P 向威斯特加德致敬

摘要

在我看来, 威斯特加德是二十世纪最独特的工程师。他的方法 - 只有少数人分享, 特别是史蒂芬 · 蒂莫申科 - 在结构工程和结构机械方面坚定地站立一脚, 使用先进的机械和数学来解决即时实际意义的问题。正是这个双重立场, 以前由 *Rancine* 模拟。*(§6.8.2)* 它一直是我的专业理想。

威斯特加德有助于两个基本方程式 - 一分裂。机械 其次在 *DAM* 工程师兩個領域都接近我自己的工作, 因此不只是偶然。

为了纪念这个知识英雄, 我把这本书的附件献给了两个最标志性的衍生物。

第一個為应力字段提供一個解析解, 在一塊碎片的頂部, 正式標記新規律的誕生: 断裂力学. 我故意把这种衍生物带到它的全部严格性 没有对弱心的人的任务 因为即使是工程师也有时不得不休息, 以便认识到一个数学解决方案的美丽, 为一个深度实用的问题提供服务。

在第二个, 在与投诉办公室合作开发的 *Hoover Dam* 设计中,*Westergaard* 为地震动作引发的水力动力力量产生了一个非常优雅的表达。

在这两种情况下, 威斯特加德的机械和数学无与伦比的命令毫无疑问地被置于工程的服务中 - 将抽象理论转化为持久实用价值的解决方案。

P.1 Crack 提示 应力 字段 2765
P.1.1 Airy 应力 功能 2765
P.1.2 解决方案 2767
P.2 流体 结构相互作用 2772

P.1 Crack 提示 应力 字段

P.1.1 Airy 应力 功能

1 了解 Westergaard 的解决方案 (**west**) 首先, 必须介绍通过复杂变量表达的 Airy 应力 功能。要追踪克拉克型应力强度因素的完整衍生, 在其所有严格、微妙和数学优雅中, 就是直接与大师机械师的头脑进行干预。然而, 同样的智力也是一个实习工程师的智力, 能够将抽象分析翻译成混凝土解决方案来压迫实际问题 - 在下一部分中显而易见的双重性。

2 在 弹性 问题中, 我们在空间坐标方面寻找一个功能。它可以满足平衡和变形协调等式。Airy 已经证明, 我们可以定义这样的功能。$\Phi(\mathbf{x})$ 如这样:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \, \partial x_2}. \tag{P.1}$$

可以展示 (直接取代这些方程式 Eq. O.8) 平衡方程 已自动满足。

3 对于线性弹性以色素材料, 变形协调的满意度平衡需要进一步 Φ 必须是这样的

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 \Phi \right) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{P.2}$$

审阅稿

哪里 ∇^2 是的, **拉普拉西亚运营商**. 拉普莱斯方程式的解决方案被称为 **和谐功能**.

4 波拉协调

$$\nabla^2\left(\nabla^2\Phi\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right)$$

5 因此, 空气压力功能将使我们能够解决弹性问题, 只要我们能做出正确的选择 Φ 哪些满足自然边界条件 (压力).

复杂变量

6 如下章节所示, 我们可以使用 Airy 应力 函数与实际变量确定一个圆形洞周围的应力字段, 但是我们需要将 Airy 应力 功能扩展到复杂变量, 以便分析: 1) 围绕一片精英洞的压力 (英语), 和压力在克拉克的顶部 (威斯特加德).

7 首先, 我们要定义复杂的数字。z as:

$$z=x_1+ix_2=re^{i\theta}$$

哪里 $i=\sqrt{-1}$, x_1 和 x_2 是卡特西亚坐标, 以及 r 和 θ 它们是波兰坐标。

8 我们将进一步定义一个 **分析功能**, $f(z)$ 哪些衍生品只依赖于 z. 执行链条规则

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(z)=\frac{\partial}{\partial z}f(z)\frac{\partial z}{\partial x_1}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x_1}=f'(z) \tag{P.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}f(z)=\frac{\partial}{\partial z}f(z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=if'(z) \tag{P.4}$$

9 If $f(z)=\alpha+i\beta$ 哪里 α 和 β 真正的功能由 x_1 和 x_2, 和 $f(z)$ 是分析, 然后从 Eq。P.3 和 P.4 我们有:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial x_1}&=\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1}=f'(z),\\ \frac{\partial f(z)}{\partial x_2}&=\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2}=if'(z)\end{aligned}\right\}\qquad \underbrace{i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right)}_{i\ 1^{st}\text{ Equation}}=\underbrace{\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2}}_{2^{nd}\text{ Equation}}$$

10 相同的真实和想象部分, 使 **卡西里曼**方程式:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}=\frac{\partial\beta}{\partial x_2};\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}=-\frac{\partial\beta}{\partial x_1}$$

11 如果我们区分这两个方程式, 首先是 x_1 然后, 至于 x_2, 然后添加它们我们得到

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2}=0\qquad\text{or}\qquad\nabla^2(\alpha)=0$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这是拉普莱斯的方程式。

12 同样, 我们可以有:

$$\nabla^2 (\beta) = 0$$

因此, 两者都是真实的 (α) 想象的部分 (β) 一位分析师函数将单独为拉普莱斯方程式提供解决方案, 并 α 和 β 是 **结合和谐功能**.

复杂 Airy 应力 功能

13 可以显示, 任何 应力 函数都可以表达为

$$\Phi = \text{Re}[(x_1 - ix_2)\psi(z) + \chi(z)] \tag{P.5}$$

如果这两者 $\psi(z)$ (狗狗) 和 $\chi(z)$ (吉) 是和谐的 (伊。$\nabla^2(\psi) = \nabla^2(\chi) = 0$) 分析功能的 x_1 和 x_2. ψ 和 χ 他们经常被称为科罗诺夫 - 穆斯赫利什维利复杂的潜力。

14 If $f(z) = \alpha + i\beta$ 和两者 α 和 β 是真实的, 其结合功能则被定义为:

$$\bar{f}(\bar{z}) = \alpha - i\beta$$

15 请注意, 合并功能不应与结合和谐功能。因此, 我们可以重写 eq。P.5 as:

$$\Phi = \text{Re}[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)]$$

16 取代 EQ。P.1.1 到 eq。P.1, 我们可以确定压力。

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\text{Re}\psi'(z) \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\psi''(z) + \chi''(z)] \end{aligned} \tag{P.6}$$

通过分离现实和想象的部分, 我们可以解决 $\sigma_{22} - \sigma_{11}$ & σ_{12}.

17 同样的转移可以实现。

P.1.2 解决方案

18 哪里 Kirsch, 1898 發展了一種表達街道集中在一個循環洞周圍的表現, 並且後來 Inglis, 1913 以色列的反对者为精英洞, 它是 **west** 谁衍生一个表达的应力字段在尖锐的裂缝的顶部。

19 让我们考虑一个无限的板受统一的白色应力 σ_0 以中央长度的裂缝 $2a$, 图 P.1. 从英格兰的解决方案, 我们知道会有一个理论上无限的应力在克拉克的顶部, 但是没有独特性的本质应力字段也不能从中衍生。

20 威斯特加德的解决方案, (**west**) 首先是假设 $\Phi(z)$ 作为一个和谐的功能 (以满足 Laplace 的方程式 $\nabla^2(\Phi) = 0$). 被称为 $\phi'(z)$ 和 $\phi''(z)$ 第一和第二相应的衍生品, 以及 $\bar{\phi}(z)$ 和 $\bar{\bar{\phi}}(z)$ 其第一和第二个组成部分, 分别为 $\phi(z)$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

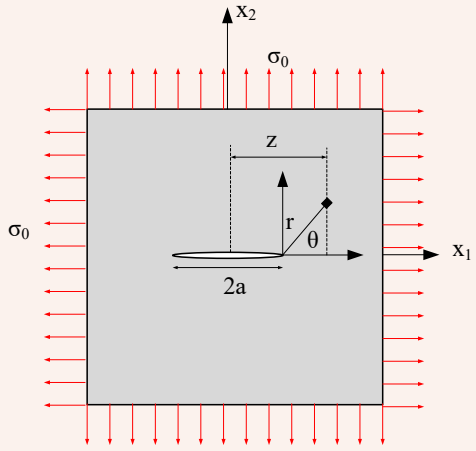


图 P.1: 破碎在一个无限的板

21 威斯特加德提出了这一

$$\Phi = \mathrm{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + x_2\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)$$

这是克拉克问题的解决方案。[1]. $\phi(z)$ 被认为是分析师。

22 让我们检查一下这 Φ 满足比哈蒙方程式。接收第一批衍生品，并提醒 这 $\frac{\partial}{\partial x_1}f(z) = f'(z)$ 我们有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\,\bar{\bar{\phi}}\right) + \left[x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z)\underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial x_1}}_{0}\right] \tag{P.7}$$

$$= \mathrm{Re}\bar{\phi}(z) + x_2\mathrm{Im}\phi(z) \tag{P.8}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathrm{Re}\bar{\phi}(z)\right) + \left[x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi(z) + \mathrm{Im}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right] \tag{P.9}$$

$$= \mathrm{Re}\phi(z) + x_2\mathrm{Im}\phi'(z) \tag{P.10}$$

同样，与 x_2 和回忆来自 EQ。P.4 这 $\frac{\partial}{\partial x_2}f(z) = if'(z)$ 我们得到了

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{Re}\bar{\bar{\phi}}(z) + [x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)\right) + \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\mathrm{Im}\bar{\phi}(z)] \tag{P.11}$$

$$= -\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) + x_2\mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Im}\bar{\phi}(z) \tag{P.12}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{Re}\phi(z) + \mathrm{Re}\phi(z)\frac{\partial x_2}{\partial x_2} \tag{P.13}$$

$$= -x_2\mathrm{Im}\phi'(z) + \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.14}$$

[1]请注意，我们不应该混淆 Airy 应力 功能。Φ 与 The 复杂功能 $\phi(z)$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

同样, 可以证明

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -x_2 \mathrm{Re}\phi'(z) \tag{P.15}$$

对压力和第二部分衍生品的产生表达由 Φ 将其替换为 EQ。P.2, 可以证明, 比哈蒙平衡是满足的, 因此 Φ 是一个有效的解决方案。

[23] 如果我们想说服自己, 压力真的满足 平衡 和 变形协调 等式 (他们所做的, 是为了 Φ 满足双和谐方程式), we 是从 EQ。O.8 在 2D:

1. 平衡:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{P.16}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \tag{P.17}$$

让我们来看看第一种方程式。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)] \\
&= \mathrm{Re}\phi'(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi''(z) \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_2}[-x_2 \mathrm{Re}\phi'(z)] \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= -\mathrm{Re}\phi'(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi''(z)
\end{aligned}$$

如果我们将这两个方程式替换为 Eq。P.16 然后我们就得到了零。同样, 可以证明,eq。P.17 是满意的。

2. 变形协调: 在飞机上 应变 , 转移是由

$$\begin{aligned}
2\mu u_1 &= (1-2\nu)\mathrm{Re}\,\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi(z) \\
2\mu u_2 &= 2(1-\nu)\mathrm{Im}\bar{\phi}(z) - x_2 \mathrm{Re}\,\phi(z)
\end{aligned}$$

由精品组成, 其次是由精子组成。从压力。作为一个检查, 我们计算

$$\begin{aligned}
2\mu\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\
&= (1-2\nu)\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z) \\
&= (1-\nu)\underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) - x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{11}} - \nu \underbrace{[\mathrm{Re}\phi(z) + x_2 \mathrm{Im}\phi'(z)]}_{\sigma_{22}} \\
&= (1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}
\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

回忆这

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

然后

$$E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$$

这表明 $E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} - \sigma_{33})$, and for plane strain, $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ 和 $E\varepsilon_{11} = (1-\nu^2)\sigma_{11} - \nu(1+\nu)\sigma_{22}$

24 到目前为止 Φ 这个问题是独立的, 我们确定了压力在其方面, 并确认了双和谐平衡满意。

25 接下来, 我们必须确定 ϕ 这样的那边界条件是满足的。以後會出現的原因, 我們將我们的问题传递给一个我们有一个比亚克斯状态应力 适用于 板。因此:

1. 在克拉克: 在 $x_2 = 0$ 和 $-a < x_1 < a$ 我们有 $\sigma_{22} = 0$ (自由拖拉克).
2. 在无限: 在 $x_2 = \pm\infty$, $\sigma_{22} = \sigma_0$

我们从 EQ 中提到。P.10 这在 $x_2 = 0$, σ_{22} 减少到

$$(\sigma_{22})_{x_2=0} = \mathrm{Re}\phi(z) \tag{P.18}$$

26 此外, 我们还期待 $\sigma_{22} \to \sigma_0$ 如 $x_1 \to \infty$, and σ_{22} to be greater than σ_0 when $\mid x_1 - a \mid > \varepsilon$ (由于预期的独特性英格兰) 因此, 有可能的选择 σ_{22} 会是 $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{1-\frac{a}{x_1}}$, 对于同义, 这将扩展到 $\sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{\left(1-\frac{a^2}{x_1^2}\right)}$. 但是, 我们也需要有 $\sigma_{22} = 0$ 当 $x_2 = 0$ 和 $-a < x_1 < a$ 因此, 函数 $\phi(z)$ 要想象的沿着克拉克, 以及

$$\sigma_{22} = \mathrm{Re}\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x_1^2}}}\right)$$

27 從 EQ。P.18 我们有 (注意过渡从 x_1 到 z).

$$\phi(z) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

28 如果我们进行变量的变化, 并定义 $\eta = z - a = re^{i\theta}$ 并承认 $\frac{\eta}{a} \ll 1$, 并提醒这 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 然后是 Eq 的第一期。P.10 可以重写为

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\phi(z) &= \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{\eta^2+2a\eta}{\eta^2+a^2+2a\eta}}} \approx \mathrm{Re}\frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{2a\eta}{a^2}}} \\
&\approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2\eta}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2re^{i\theta}}} \approx \mathrm{Re}\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}e^{-i\frac{\theta}{2}} \approx \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29 回忆这 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 而这 $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ 我们替代 $x_2 = r\sin\theta$ 到第二期

$$x_2 \mathrm{Im}\phi' = r\sin\theta \mathrm{Im}\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\frac{a}{2(re^{i\theta})^3}} = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$$

30 将上述方程式与 Eq 相结合。P.10, P.14, 和 P.15 我们获得

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots \\
\sigma_{11} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+\cdots \\
\sigma_{12} &= \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

31 要记住, 这是一个比亚克斯案例, 可以重复的单雅克斯案件。超越一个 压力 在 x_1 方向相同 $-\sigma_0$ 但是这不应该影响应力附近的克拉克点。

32 使用类似的方法, 我们可以为应力字段提取表达式周围一个克拉克点在一个 板 受遥远的压力 (模式 II 如下定义) 使用下一篇: 表达 ϕ

$$\Phi_{II}(z) = -x_2\mathrm{Re}\bar{\phi}_{II}(z) \Rightarrow \phi_{II} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

和同样的克拉克, 但受反计划的压力 (模式 III)

$$\Phi'_{III}(z) = \frac{\sigma_{13}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}}$$

33 伊尔文 [2](Irwin, 1957) 引入了概念的 **应力 强度因素** 定义为:

$$\begin{Bmatrix} K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \lim_{r\to 0,\theta=0}\sqrt{2\pi r}\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

哪里 σ_{ij} 是近的克拉克点压力, 以及 K_i 與三個獨立的電影相關上层和下层克拉克表面的动作与相反, 如在图中所示 P.2

[2]伊尔文被海军研究办公室询问 (我們的) 在第二次世界大战期间, 自由舰队的失败进行调查。三十年前, 英格兰正在调查英国船舶的失败。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

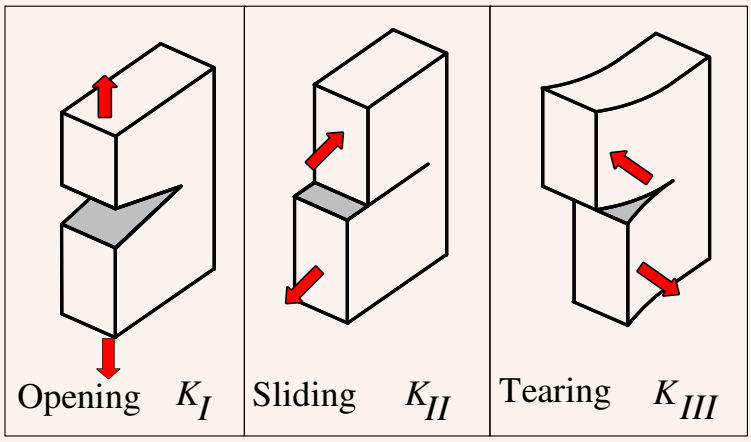


图 P.2: 克拉克移动的独立模式

P.2 流体 结构相互作用

从博士论文 “Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR” 由 Mahdavi, 2023.

在一张纸上, Westergaard, 1933 开发了一种模型, 以量化在一个钻石上运作的水力动力力量, 使用添加 (或在终端单元的背景下闪烁) 质量. 这个模型将在当前的分析中使用。

尽管其广泛的采用, 而且作者的最佳知识, 模型从未被充分描述。其最终方程式被提交, 并通过。

威斯特加德的这项调查在多个方面非常有趣。首先, 它提供了一个非常实用的工程问题的解决方案, 坚定地根源于机械的基础。其次, 尽管与机械学相关的严格性, 但威斯特加德不是教义; 相反, 他知道如何在需要时放松某些假设, 以便找到解决方案。

理论模型

當一個跳到 §P.2 要计算添加的质量以计算水力力量, 了解其衍生性很重要, 因为它是数学、机械和工程最优雅的融合。

因此, 本节将详细审查标志文件 (Westergaard, 1933).

当水压已知时, 它们对压力的影响可以通过应用到静态负载的方法计算。因此, 需要特别注意的问题是水压在地震期间的变化。

评论

下列评级被采用:

x, y, z 直角协调 x 和 y 如在 图 中所示 P.3 其轴的 x 沿着

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

水的不干扰的表面, 是向上流动的, 并且是过渡的。
到飞机上流的面孔的板块; 轴 y 垂直向下。

t 时间。
h 容器的深度。
g 加速度 因 重力 。(Eq. P.26)
w 每单位的水重为体积。(Eq. P.26)
k 大量水模块 (压力 分为 体积 的减少
每個單位 体积). (Eq. P.26)
ξ 和 η 一粒水的转移在方向上 x 和 y 相应。
ξ_0 价值的 ξ 直面上流的面孔。
σ 应力在水中由于动态作用, 积极的压力 (与它相结合
已存在的压力水素).
α 测量 地震 的强度 = 最大水平
基础 的 加速度 组件分为 g.
T 基础的水平振动期。
r, v 底部的垂直振动的宽度和最大速度。
v_n 速度在水中的声音。
i 长度的波在水中扩展, 当时间是 T.
c_n 以方程式定义的值 P.33, 和 P.37 (与 $n = 1, 3, 5 \ldots$).
p 最多 压力 的水在深度的泥土上, y 由于动态行动。
p_0 价值的 p 在底部 $(y = h)$.
Q 垂直板在深度的重力直板中产生的, y 由于压力, p.
Q_0 价值的 Q 在底部 $(y = h)$.
M 旋转的瞬间产生在一个直重力板在深度, y 由于压力, p.
M_s 价值的 M 在底部 $(y = h)$.
o, K 定量在大约的公式中 (Eq. P.45 到 P.51).
b, b' 显示在 图 中的尺寸 P.5

水的动作方程式

因为涉及的动作是小, 相对简单的方程式 (液体中的声音) 可以使用。这些方程式可以从固体的弹性力学的角度解释为弹性的方程, 而无需分裂。以 单元 的 体积 起作用的力量, $dxdydz$, 以 应力 的意义表达, σ 它必须在干扰之前存在的水位压力上过度强加。

使用 D'Alembert 的原理为动态 平衡 为 Newtonian 流体 (标签: 不压缩) (Eq. O.3.4) 我们有

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.19}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{P.20}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

这就是运动方程的方向 x 和 y. 我們不考慮動作在 z (垂直) 方向, 因为动作与 xy 计划。应变是由

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

对于水

$$p = \frac{1}{2}\sigma_{ii} = k\varepsilon_{ii}$$

因此, 应力可以重写为

$$\sigma = k\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{P.21}$$

因此, 该动作由平衡统治。P.19, P.20 和 P.21. 与压缩液体的一般水力学方程式进行比较表明, 这些方程仅适用于 ξ 和 η 它们是小, 而且在产品比例上, $\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ 到 $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ 他们是不可忽视的。

在方程式中提供的解决方案 P.31, P.32, 和 P.35, 这些比例将被认为是由容器深度分裂的动作宽度顺序。

初步研究, 仅采取水平动作

虽然在水板上运作的水可能有一个垂直位移, 但这项初步研究将忽略这个垂直运动。然而, 它将对这个问题发出一些光明。与 $\eta = 0$, Eq. P.19 和 P.21 将提供:

$$k\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{w}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{P.22}$$

这就是波方程式。(Eq. 36.16) 一般的解决方案是什么形式

$$G(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v_s}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_s}\right)$$

作为一个简化假设, 我们认为, 在地震期间, 泥土在一个简单的和谐的动作与时期移动。T, 和最大 加速度, αg 发生时, 当 $t = 0, T, 2T$ 等等。因此, 该议案将由

$$\xi_0 = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^4}\cos\frac{2\pi t}{T} \tag{P.23}$$

与 $\xi_{x=0} = \xi_0$ 平等 P.22 会满足于

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2}\left[\beta\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + (1-\beta)\cos\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v_s}\right)\right] \tag{P.24}$$

哪里 β 它是永恒的, 而且

$$v_s = \sqrt{\frac{gk}{w}} \tag{P.25}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

v_s 是水中的波速, 即声音速度。(由于频率较低, 这些波当然不会像声音那样听起来。). 使用

$$\begin{aligned} k &= 300,000 \text{ lbs/in}^2 = 21,600 \text{ton/ft}^2 \\ g &= 32.2 \text{ ft/sec}^2 \\ w &= 0.03125 \text{ ton/ft}^3 \end{aligned} \tag{P.26}$$

给 $v_s = 4,718$ ft/sec 等。

平等的术语 P.24 包含因素, β, 前面是代表波从泥土移动, 而包含因素的波则, $1-\beta$, 代表向大道移动的波浪。

平等 P.24 和 P.21 给予为 $x = 0$ (也就是说, 在上流的面孔上,):

$$\sigma = (1-2\beta)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw}\sin\frac{2\pi t}{T} \tag{P.27}$$

当时 $\beta > 1/2$ 波浪移动了 (从 DAM) 主宰那些向它移动的人。

平等 P.27 表明, 在 dam 上的最大 压力, 即, $(-\sigma)_{max}$ 发生在时刻 $t = \frac{T}{4}, \frac{5T}{4}, \frac{9T}{4}, \ldots\ldots$ 同等, 同等。

$$p = (2\beta-1)\frac{\alpha T}{2\pi}\sqrt{gkw} \tag{P.28}$$

值得注意的是, 最大的加速度的钻井, 因此由于移动的质量的钻石, 发生时, 最大的无动力。 $t = 0, T, 2T, \ldots$ 因压力而在大楼的压力, p 因此, 无情的力量必须以两种替代流的方式与一个季度差异相结合。

从方程式 P.23, 最多的速度 是,

$$v = \frac{\alpha g T}{2\pi} \tag{P.29}$$

换取平等 P.25 P.29 进入 P.28 我们获得压力的值

$$p = (2\beta-1)\frac{v}{v_s}k \tag{P.30}$$

与 $\beta = 1$ 也就是说, 当波浪只从钻井中移动时, 方程式 P.28 (或, 替代方程式 P.30), 与数值在方程式中提供的恒数 P.26, 与 $\alpha = 0.1$ 和 $T = \frac{4}{3}$ 天下, 给予 $p = 3.13$ 色彩/ft^2. 因为水可以“逃避” 垂直的压力实际上要少得多, 并且不均匀分布在容器深处。正确的解决方案应该在水中产生零压力。

解决水的水平和垂直运动

如果我们允许水也垂直移动, 我们仍然需要满足方程式。P.19 P.20 和 P.21 但受下列限制条件的约束:

1. $\sigma = 0$, at $y = 0$;
2. $\eta = 0$, at $y = h$;

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

3. $\xi = -\frac{\alpha g T^2}{4\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T}$, at $x = 0$;
4. σ 转向 0 当 x 变成大。

从第一条件, 对于小价值的 η 没有什么可珍惜的区别, 即一个 $\sigma = 0$ 在不受干扰或干扰的表面上。

满足三方程式和边界条件的解决方案是基于 Fourrier 系列的一个。

$$\xi = -\frac{\alpha g T^2}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{1}{n} e^{-q_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.31}$$

$$\eta = \frac{\alpha q T^2}{\tau^3} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,0_n..}^{n} \frac{1}{n c_n} e^{-q_n} \cos\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.32}$$

哪里

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} \tag{P.33}$$

和

$$q_n = \frac{n\pi c_n x}{2h}$$

平等 P.33 给了,

$$\frac{1}{c_n} - c_n = \frac{16 w h^2}{n^2 c_n g k T^2} \tag{P.34}$$

然后, 平衡 P.21, P.31, P.32, 和 P.34 将给予

$$\sigma = -\frac{8\alpha w h}{\pi^2} \cos\frac{2\pi t}{T} \sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} e^{-q_n} \sin\frac{n\pi y}{2h} \tag{P.35}$$

可以很容易地确定平衡。P.31, P.32, 和 P.35 满足方程式 P.19 和 P.20 在各方面, 以区分 t, x, 和 y. 平等 P.21 是满意的, 因为它被用于衍生方程式 P.35 从方程式 P.31 和 P.32. 此外, 对表达式的检查 η 和 σ 可以轻松地表明, 条件 1、2 和 4 满足。要检查这个条件 3、$x = 0$, 满意, 必须比较方程式 P.31 为 $x = 0$ 以表达为 $\frac{\pi}{4}$ 至于一系列 Fourier, 当 $0 < u < \pi$,

$$\frac{\pi}{4} = \sin u + \frac{1}{3}\sin 3u + \frac{1}{5}\sin 5u + \dots$$

在本案中, $u = \frac{\pi y}{2h}$.

因此, 所有规定的条件都满足。然而, 方程的可行性取决于另一个条件: 解决方案所定义的转移以及其衍生品。x 和 y 必须小。因此, 我们必须考虑大型迁移的可能性。一种可能性是用水中的响应来确定; 另一种将通过确定由水表面形成的波形状和垂直动作, 沿着水泥的上流面进行研究。

在他的论文中, Westergaard, 1933 解决水中的反射的可能性并得出结论, 因为地震中的主要振动很少有一个时期。不到 1 秒, 这种形状的响应可以被忽略。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

压力在达姆

从方程式 P.35, 最大水量 压力 ($p = -\sigma$ 为 $x = 0$) 发生在当 $t = 0, T, 2T, \ldots$. 因此,

$$p = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \sin \frac{n\pi y}{2h} \tag{P.36}$$

如同以前一样, 根据方程式 P.35, 和与数值在方程式中提供的恒数 P.26:

$$c_n = \sqrt{1 - \frac{16 w h^2}{n^2 g k T^2}} = \sqrt{1 - \frac{0.71889}{n^2} \left(\frac{h \text{ sec.}}{1000 \text{ T ft}} \right)^2}. \tag{P.37}$$

压力的最大值, p, 发生在库存的底部 ($y = h$) 而且是,

$$p_0 = \frac{8\alpha w h}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 c_n} \tag{P.38}$$

图 P.3 顯示 压力 p 分销资料。从方程式 P.38 由衍生品, $\frac{dp}{dy}$ 是无限的, 当 $y = 0$ 但是, 当零

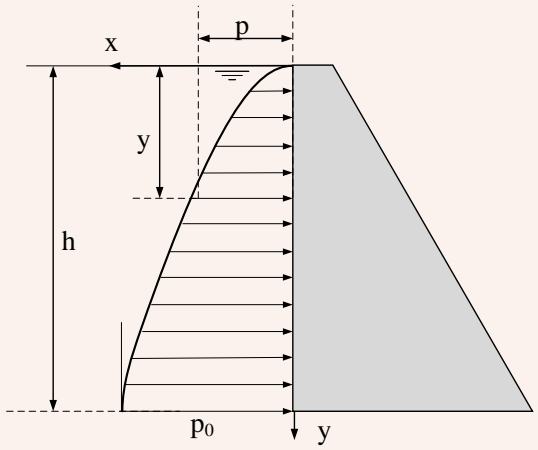


图 P.3: 由于水的动态作用而施加压力 (Westergaard, 1933)

$y = h$ 也就是说, 曲线为 p 它在顶部有一个垂直的坦根, 在底部有一个水平的坦克。

桌面第 1 和第 2 部分 P.1 包含 数值 的比例值, $\frac{p_0}{\alpha h}$, 和 p_0, 从方程式计算 P.37 和 P.38. 比例, $\frac{p_0}{\alpha h}$ 但是, 它只会慢慢变成 h. 为 $h = 600$ ft, $T = \frac{4}{3}$ 塞克。(而为 $h = 200$ ft, $T = \frac{4}{9}$ 塞克。), 压力在深度, $y = \frac{h}{2}$ 被发现是 $p = 0.814 p_0$.

Shear 和 Moments

它可以特别有用地表达垂直的分裂力量和由负载产生的旋转时刻, p 在各个垂直部分的钻石作为一个 cantilever 行动 (重力 dam). 叶子被称为例如, 在角膜宽度单位的强度, 如每脚

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

表 P.1: 数值 与期相匹配的结果, $T = \frac{4}{3}$ 第二

物品	容器的深度, h	Ft.	小小	200	600	800
1	压力的比例, $\frac{p_0}{sh}$	色彩 /ft^3	0.023202	0.023407	0.025254	0,027257
2	压力在底部, p_0 當時 $a = 0, 1$	色彩 /ft^2	$\cdots$	0.468	1.515	2.181
3	与 Shear 相同,	色彩 /ft^3	0.016961	0.017094	0.018286	0.019576
4	向底点点, Q_0 當時 $\alpha = 0.1$	色彩 /ft	...	68.4	658.3	1253
5	瞬间的比例, $\frac{M_0}{\alpha h^3}$	色彩 /ft^3	0.0068089	0.0068576	0.0072947	0.0077666
6	瞬间在底部, M_0,wben $a = 0, 1$	五 - 吨 / 五	...	5486	157600	397600
7	$C = \frac{15M_0}{4\alpha m^2}$	色彩 /ft^3	0.025533	0.025716	0.027355	0.029125
8	$K = C\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h \text{ sec.}}{1000\text{T ft.}}\right)^2}$	色彩 /ft^3	0.025533	0.025507	0.025282	0.025068
	接近 Eq 的比例。P.45, P.46, P.47, P.51, 和 P.53					
9	$\frac{p_0}{a^h}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0255	0.0257	0.0276	0.0296
10	$\frac{Q_0}{ah^2}$	$\frac{\text{ton}}{ft^3}$	0.0170	0.0171	0.0184	0.0198
11	$\frac{M_0}{ah^3}$	$\frac{\text{ton}}{f^3}$	0.00680	0.00686	0.00736	0.00790

最高水平 加速度 等 αg. 当时 T 是多样化的, 所述的比例保持稳定, 如果 h 以相同的比例改变; 例如, 指定的 $h = 800$ft., $T = \frac{4}{3}$ 二、适用于案件, $h = 600$ft., $T = 1$ 二、和 $h = 200$ft., $T = \frac{1}{3}$ 二、指定的比例: 指定的 $h = 200$ft, $T = \frac{4}{3}$ 第四条 适用于此案, $h = 600$ft, $T = 4$sec.

审阅稿

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

吨, 时刻则被列为每幅单位的瞬间, 如每一脚吨。(或只是在色彩中). 那些相关术语子, Q 在深处, y, 和 Q_0 在深处, h 而那些时刻, M 在深处, y, 和 M_0 在深处, h 他们从 p 在 EQ。P.36 通过整合

$$Q = \int_0^y p dy; \quad Q_0 = \int_0^h p dy; \quad M = \int_0^y Q dy; \quad M_0 = \int_0^h Q dy$$

定义

$$q = \sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \tag{P.39}$$

我们得到了:

$$Q = \frac{16\alpha w h}{\pi^3}\left(q - \sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{1}{n^2 c_n} \cos\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.40}$$

$$Q_0 = \frac{16}{\pi^3}\alpha v h^2 q \tag{P.41}$$

$$M = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2}\frac{y}{h} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{1}{n^4 c_n} \sin\frac{n\pi y}{2h}\right) \tag{P.42}$$

$$M_0 = \alpha w h^3\left(\frac{16q}{\pi^2} - \frac{32}{\pi^4}\sum_{1,3,5,\dots}^{n} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{3}}}{n^4 c_n}\right) \tag{P.43}$$

$$\tag{P.44}$$

数值 比例值, $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$ 和 $\frac{M_0}{\alpha h^3}$, 和 Q_0 和 M_{00} 从方程式计算 P.39, P.41, 和 P.43 在桌子上也被提交 P.1 (3、4、5、6 和 6).

接近公式的衍生

计算可以通过在 图 中更换压力图表来简化 P.3 四角形的精灵 (看平等 P.54 下方衍生) 直升变成一个圆圈, 当它被拖到某个特定的规模时 p. 但是, 通过在 图 中取代曲线获得更满意的近距离代表性。P.3 由垂直轴的平板, 如图中所示 P.4, 即使这个模板在底部有一个滑动坦克。此分類上一篇: 下列簡單的公式, 其中 C 是因子, 取决于比例的 h 到 T:

$$p = C\alpha\sqrt{hy}; \qquad p_0 = C\alpha h \tag{P.45}$$

$$Q = \frac{2}{3}C\alpha y\sqrt{hy}; \qquad Q_0 = \frac{2}{3}C\alpha h^2 \tag{P.46}$$

$$M = \frac{4}{15}C_{\alpha y^2}\sqrt{hy}; \qquad M_0 = \frac{4}{15}C_\alpha h^2 \tag{P.47}$$

这个比例, C 可以定义为这样 p_0 将从方程式计算的值 P.38 但是, 一个人通过确定压力图表的整体来获得更好的代表性。C 因此, 这个时刻, M_0, 将有从平衡计算的值 P.43. 对于一个已知的 M_0 然后有人发现,

$$C = \frac{15M_0}{4\alpha h^2}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

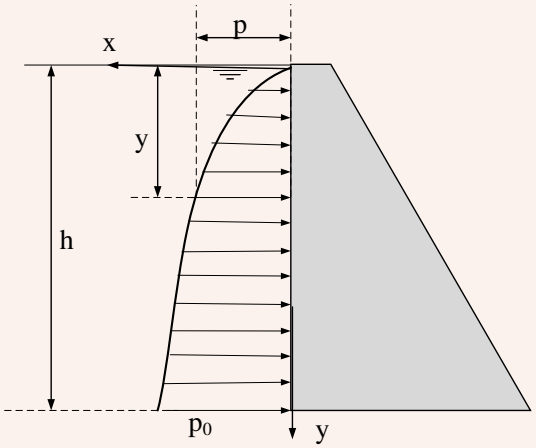


图 P.4: 压力分布的接近 (Westergaard, 1933)

桌子 P.1 (第 7 章) 顯示某些 数值 的值 C. 值得一提的是, 它的尺寸 C 每单位的强度为 体积; C 多元化为 ah 它提供压力作为一个区域单位的力量。

这个比例, C, 在考虑范围内慢慢变化。对于快速估计, 一个可以非常好地承认某种稳定的价值。C 例如, 与 $T \geq \frac{4}{3}$ 西斯:

$$h < 310 \text{ ft} \qquad C = 0.026 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.48}$$

$$310 \text{ ft} < h < 540 \text{ ft} \qquad C = 0.027 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.49}$$

$$540 \text{ ft} < h < 680 \text{ ft} \qquad C = 0.028 \frac{\text{ton}}{\text{ft}^3} \tag{P.50}$$

这些是差异的价值观 C. 最好是持續的功能來表達。C 它将大约在整个范围内应用。主要的变异来源 C 是永恒的, c_n 定义为平等 P.37 与 $n = 1$; c_1 出现在方程式中的每个金额的第一期名称中 P.39 和 P.43. 因此, 合理地尝试一个接近类型的公式, $C = \frac{K}{c_1}$ 在哪裡, K 这是一个恒定的。这个公式是

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - 0.72 \left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}$$

价值观的 K 在表 2 中显示 (第 8 集) 从这个公式计算, 使用这些值的 C 第 7 章 这些结果的检查表明, 一个人可以采用价值, $K = 0.0255$ 多元化 $^{-3}$. 结果是, 这个比例, C 在方程式中 P.45, P.46, 和 P.47 以满足的公式提供。

$$C = \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72 \left(\frac{h}{1000\text{T}}\right)^2}} \tag{P.51}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

水压接近的结果公式

以下接近的水压公式, 将添加到地震之前存在的水压力, 代表了本研究的主要结论; 它直接从方程式中获取。P.45 和 P.51:

$$p = C\alpha\sqrt{hy} \tag{P.52}$$

$$= \frac{0.0255 \text{ ton-ft}^{-3}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}}\alpha\sqrt{hy} \tag{P.53}$$

但是, 对于快速计算, 方程式 P.45, P.48, P.49, 和 P.50 可以使用。对方数的价值, $\frac{p_0}{\alpha h}$, $\frac{Q_0}{\alpha h^2}$, 和 $\frac{M_0}{\alpha h^2}$ 通过使用方程式获得的 P.53, 被列为图 2 中的第 9、10 和 11 条。与第 1.3 条和第 5 条相应的比较表明, 接近是满意的。

使用一四角形的精英 (如上所述) 而不是代表压力的平凡, 一个人通过类似于导致平衡的过程获得下一个接近的公式。P.53:

$$p = \frac{0.0204 \text{ ton ft}^{-3}\alpha\sqrt{y(2h-y)}}{\sqrt{1 - 0.72\left(\frac{h}{1000T}\right)^2}} \tag{P.54}$$

这个公式提供了相同的价值。M_0 作为平等 P.53 但是, 它给了太少的价值。p_0 而且, 全力, Q_0. 平等 P.53 它给出一些太大的价值。p_0 和 Q_0 而且是优先的。

值得注意的是, 压力 p 发生时, 当 $t = 0, T, 2T$ 等等, 就是 (看条件 (3)) 當 DAM (在振动期间) 在极端位置下流。因此, 由于这些水压而造成的压力必须加到最大压力中, 因为蒸汽本身的质量加速。

当, 在振动期间, 蒸汽在极端位置上流时, 压力 p 他们转向, 变成紧张。这些紧张, 就像极端位置下流的压力一样, 必须与现有的水静压相结合。图 2 中的数值值的检查表明, 当大气中包含的压力时, 水中产生的应力不会变成紧张或非常小的压缩。

公式适用于与假设以外的案件

这些公式是由假设没有过流产生的。如果超流在一流道上, 则建议平衡 P.53 用到深度, h 和 y, 从飞机表面测量, 在底层背后的某种距离。按压的模拟图如以前所使用, 只有顶部被切断。

虽然这些公式是由上流面是一个垂直平板的假设产生的, 但它们将提供在其他情况下可能预期的压力指示, 例如在拱的轻松度。

添加 质量

要视觉化水的动态作用, 可以想象某个水体与水泥一起移动, 而剩下的水库仍然不活跃。为此, 水的身体与泥土移动可以被想象为冻结到水平层添加质量。(冰在 (Westergaard, 1933)), 而剩下的储备箱被打破。

简单地说, 我们正在用添加质量引起的无动态力量取代水力动力。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

水体的形状或添加的质量因此被认为是与泥土移动, 必须确定, 以便无动力力量成为相当于实际由水因其动态行动所施加的压力。

添加的 质量 可以以两种方式应用

增加宽度 b 原来是由 Westergaard, 1933. 这里 b 是附加 质量 的转尺寸, 在方向上 x 在深处, y. 接下来, 相应的质量每个区域单位的上流面部变成 $\frac{bw}{g}$, 和相应的内分力, 当加速度是 αg 变成 $\frac{bw}{g} \times \alpha g = \alpha w b$ 必须等同的 p, or

$$b = \frac{p}{\alpha w}$$

此添加的形状 质量 (或冰) 与图表相同的 p 当压力被放置到适当的规模。

目前的目的就足以确定 b 其中一个近似的表达 p 例如, (比较方程式 P.45, P.48, P.49, 和 P.50),

$$p = 0.02734 \text{ ton-ft}^{-3} \alpha \sqrt{hy}$$

与之, 与之。$w = 0.03125$ 多元化 $^{-3}$,

$$b = \frac{7}{8}\sqrt{hy} \tag{P.55}$$

图 P.5 显示水或冰的体, 由方程式定义 P.55. 而不是水的身体, 你可能更愿意考虑一个相当于混凝土的体, 具有相同的质量。如果 混凝土 重量 144 lb/ft^3 相应的尺寸 b 变成,

$$b' = 0.38\sqrt{hy}$$

在 图 中推的曲线 P.5 指示这个身体的混凝土.

添加 质量 这是一个更方便的方法在有限元分析的背景下。这将导致每个单位区域的 DAM 上流面部添加一个质量

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{p(y)}{\alpha g} \tag{P.56}$$

水力动力压力再次由方程式提供 P.53

$$p(y) = C\alpha\sqrt{hy}$$

哪里 C 它在 EQ 中确定。P.51 可以重写, 也可以重写 (来自 EQ。P.37) 如

$$C = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{16\rho_w H_w^2}{gkT^2}}} \tag{P.57}$$

结合方程式 P.56-P.57 最终的关系, 以确定上流水面部单元区分为质量因水在水面上的动态作用, 将是

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{K\sqrt{hy}}{g\sqrt{1 - \frac{16\rho_w h^2}{gkT^2}}} \tag{P.58}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

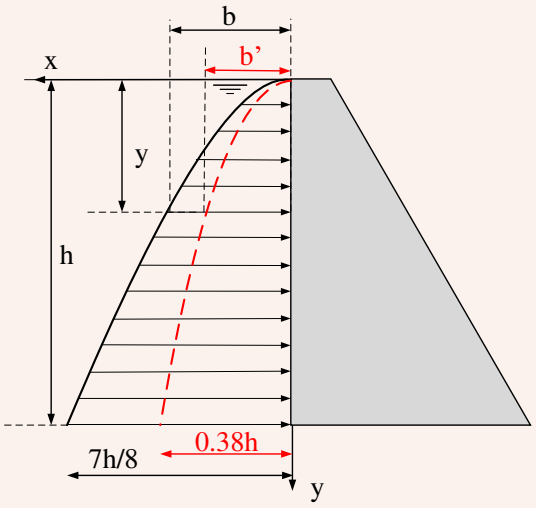


图 P.5: 水泡的身体可以被认为是用相关术语子移动。(Westergaard, 1933)

值得注意的是, 在他的原始论文中, 威斯特加德通过了前方程的进一步简化。(消除依赖性 T) 出生:

$$\gamma_{lump}(y) = \frac{7}{8}\rho_w\sqrt{hy}$$

在文学中最常提到的, 但它比平衡更不准确 P.58.

形象 P.6 表明基于上述方程式的约定和准确解决方案之间的差异, 对于一个假设的蒸汽模型, 其中水位, h 是 100 米。

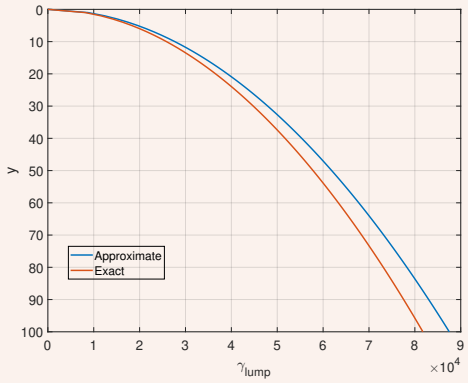


图 P.6: 质量 按单位区域相比高度

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

Q 信任区和莱文伯格 - 马库尔特方法

从博士论文“Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR”由 Mahdavi, 2023.

摘要

该附件介绍了信任区和 *Levenberg-Marquardt* 优化方法的数学基础和实践算法, 用于参数识别和非线性最小方位问题。从泰勒系列的扩展和优化所必需和足够的条件开始, 该附件开发了基于格拉迪特的优化理论、盖斯 - 纽顿方法以及利文伯格 - 马库尔德的适应性冲浪策略, 以平衡快速 *convergence* 与强度在困难领域。附件提供了整个 结构分析 和参数定义部分所提到的完整的理论和计算框架, 包括对比标准、规模策略以及对参数估计的本地不确定性接近。

Q.1 信任区 2785
Q.2 算法 2787
Q.3 MATLAB®formulation 2788
Q.4 实时视觉化 2790

1 为了在顺利功能中解决最小化问题, 泰勒理论通常使用。假设这 $f : R^n \to R$ 它是可持续的区别, 而且 $p \in R^n$ 然后我们有 (Nocedal and Wright, 2006):

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x+tp)^T p \tag{Q.1}$$

对于某些人 $t \in (0,1)$. 除此之外, 如果 f 它是连续两次可区分的, 我们有:

$$\nabla f(x+p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x+tp)p\,dt \tag{Q.2}$$

而这

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2}p^T \nabla^2 f(x+tp)p \tag{Q.3}$$

对于某些人 $t \in (0,1)$. 优化所必需的条件是由假设: x^* 这是一个地方的最小化, 然后证明事实 $\nabla f(x^*)$ 和 $\nabla^2 f(x^*)$.

2 条件:

第一订单必需条件: If x^* 这是一个地方的最小和 f 它是不断的区别和开放的邻居 x^* 然后, $\nabla f(x^*) = 0$.

第二条 必需条件: If x^* 这是一个地方的最小限度。f 和 $\nabla^2 f$ 它存在, 并且在一个开放的邻居中不断存在。x^* 然后, $\nabla f(x^*) = 0$ 和 $\nabla^2 f(x^*)$ 是积极的半定义。

第二条 足够的条件 If $\nabla^2 f$ 在一个开放的邻居中, x^* 而这 $\nabla f(x^*) = 0$ 和 $\nabla^2 f(x^*)$ 肯定定义。然后 x^* 这是一个严格的地方最小限度 f.

审阅稿

Q.1 信任区

3 优化算法通常遵循一个典型的程序, 从第一个猜测点开始, 并向下一个 iterates 进展, 直到它达到一个可接受的准确性解决方案或没有进一步进步。然而, 不同优化算法的区别在于从一个 iterate 移动到另一个策略。良好的算法应该具有以下属性 (Nocedal and Wright, 2006):

- 强度: 他们应该在各个班级中的各种问题上表现得很好, 对起点的所有合理值。
- 效率: 不需要过量计算机时间或存储。
- 准确性: 他们应该能够精确地识别解决方案, 而不过于敏感于数据中的错误或在计算机上实施算法时发生的算法旋转错误。

在优化算法中, 基本上有两种策略可以找到下一个 iterate: 1. 路线搜索 2。信任区。在线搜索方法中, 基本上一个方向是由算法定义的, 下一个点是在这个方向找到的, 这样函数达到较低的值。信任区战略使用一个区域周围的当前点, 我们接受四方接近功能。在此研究中, 我们将专注于后续方法。

4 在信任区域战略中, 模型功能 m_k 建在目前的位置附近 x_k 接近这个点周围的实际功能行为。然而, 此功能可能无法在其他点上接近主要函数, 因为搜索最低值的 m_k 被限制在一个定义的区域周围 x_k. 候选人步骤 p 通过解决以下方程式来确定:

$$\min m_k(x_k + p) \quad s.t. \left\|p\right\| \leq \Delta_k \tag{Q.4}$$

5 如果信任区域太大, 解决方案不会导致功能的足够减少, 因此该地区的广度应减少, 问题应重新解决。一般来说, 信任区是一个由 $\left\|p\right\|_2 \leq \Delta$, 在哪里 $\Delta \geq 0$ 是信任区的广径。

6 模型 m_k 通常被定义为:

$$m_k(x_k + p) = f_k + p^T \nabla f_k + \frac{1}{2} p^T B_k p \tag{Q.5}$$

哪里 f_k 和 ∇f_k 是目前计算的函数和格拉迪特值 x_k. 矩阵的评论 B_k 是希西安人。$\nabla^2 f_k$ 或者接近它。

7 如果我们假设这 m_k 在每個 iterate 中, 基於 Taylor 系列擴展的四方性 f 我们将有:

$$f(x_k + p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_k + tp) p \tag{Q.6}$$

哪里 $f_k = f(x_k)$ 和 $g_k = \nabla f(x_k)$ t 是间隔中的某种尺寸 (0,1). 假设 B_k 与真正的希西安同等。$\nabla^2 f(x_k)$ 我们将有信任区纽顿方法, 我们正在寻找解决问题的解决方案:

$$\min m_k(p) = f_k + g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad s.t. \left\|p\right\| \leq \Delta_k \tag{Q.7}$$

8 信任区域方法的一个重要步骤是确定信任区的直径, 每次分离为这个目的, 一个比例被定义为:

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)} \tag{Q.8}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

9 如果新函数评估高于当前值，因为指标在上面的方程中总是积极的，ρ_k 它是负面的，因此步骤并没有导致功能的增加而不是减少它，步骤是不接受的。ρ_k 接近 1 号，这表明 m_k 在这个阶段，它已经足够接近 $f(x_k)$ 因此，该地区可以在下一节中扩展。但是，如果它接近零或负，则该区域的射线应在下一个字符串中减少。形象 Q.1 显示信任区方法的 4 个字符，有 2 个变量，在这个数字中，蓝色和红色点是当前点的指标，下一个字符的估计，分别。如上所述，信任区域只有在下一个点猜测提供足够的功能减少时才会扩展。

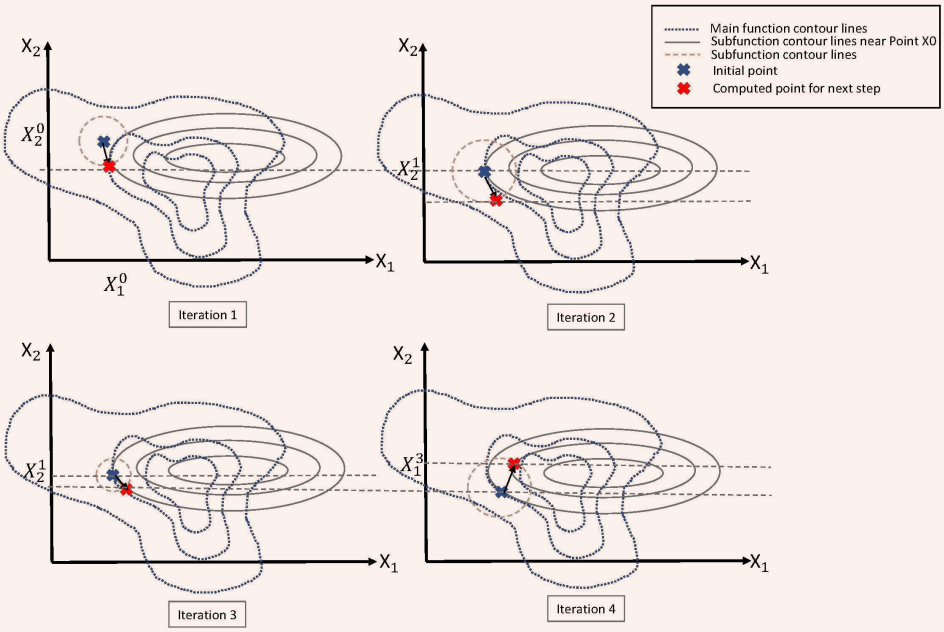


图 Q.1: 信任区算法

10 对于本研究中的问题，相应的客观功能，雅各比、格拉迪安和赫西亚矩阵 (Dennis and Schnabel, 1983) 因此，它被授予:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}') = \mathbf{r}^T\cdot\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m}(u_i-u_i')^2 \tag{Q.9}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{x}^T} = -\mathbf{L} \tag{Q.10}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left[(\mathbf{u}-\mathbf{u}')^T(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{r} \tag{Q.11}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\nabla f\left(\mathbf{x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[2\mathbf{J}^T\mathbf{r}\right] = 2\mathbf{J}^T\mathbf{J} + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \tag{Q.12}$$

11 接近最低限度，$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T\partial \mathbf{x}}\mathbf{r} \to 0$ 我们有 $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \simeq 2\mathbf{J}^T\mathbf{J}$. 使用 Levenberg-Marquardt 方法 (Dennis and Schnabel, 1983) 允许解决 $\mathbf{x}_{k+1}$ 从:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\varepsilon_k\mathbf{I} + \mathbf{H}\left(\mathbf{x}_k\right)\right]^{-1}\nabla f\left(\mathbf{x}_k\right) \tag{Q.13}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 ε_k 因此, 所有自己的价值都是 $[\varepsilon_k \mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)]$ 肯定是定义的。最终可以引入列文伯格 - 马库尔特方法的开发, 被称为信任区方法。事实上, 我们一直在努力尽量减少客观的功能。$m_k(\mathbf{x})$ 在一个信任区域内, 四方接近 (由 Taylor 系列制作) 被认为可靠:

$$m_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \tag{Q.14}$$

12 信任区如下定义:

$$_k = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq \Delta_k\}; \Delta_k > 0 \tag{Q.15}$$

优化问题变成了:

$$\min_{\mathbf{x}} \{m_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\} \tag{Q.16}$$

13 该地区更新所需的条件是:

$$\rho_k = \frac{f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1})}{f(\mathbf{x}_k) - m_k(\mathbf{x}_{k+1})} \tag{Q.17}$$

14 起点的更新与 Levenberg-Marquardt 方法所描述相同。使用此方法, 我们也可以定义这些参数的上和下限为:

$$\min_{\mathbf{x}} \{m_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_k\}; \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \tag{Q.18}$$

15 参数识别过程的起点可以从实验室测试中确定 (提出初步估计 $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$, $\tau_L(T_0)$ 和 $\tau_C(T_0)$). 相反, 曲线匹配的 Dam Creed 位移:

$$u_{irr}^{AAR}(t, \theta) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_C(\theta)}}}{1 + e^{-\frac{(t - \tau_l(\theta))}{\tau_C(\theta)}}} u_{irr}^{AAR,\infty} \tag{Q.19}$$

(哪里 u_{irr}^{AAR} 和 $u_{irr}^{AAR,\infty}$ 是不可逆转、时间和温度依赖的 位移 和最终 位移 因 AAR 相应) 提供保守的估计时间, 但不为 $\varepsilon^{\infty}|_{T=T_0}$. 目标参数必须正常化, 以便所有初始值都有相同的规模顺序, 即:) 初始变量必须足够大, 以产生计算结果的变量。(大型正常化值可能导致即时停止识别过程); 和 B) 参数的最终变量必须足够小, 以便在终端解决方案周围没有大波动的情况下对确定的参数进行微小的最终调整。(过小的正常化参数可能会导致大最终波动。).

16 重量函数可以引入, 以重视最后的数据字段, 通常包含一个大绝对值, 因此比正常负载的影响更代表 AAR 扩展不可逆转效应。请注意, 这种系统识别不需要热分析, 从实用的角度来看, 这意味着在 应力 分析输入文件中包含的三个变量的简单修改。

Q.2 算法

17 Given $\hat{\Delta} > 0$, $\Delta_0 \in (0, \hat{\Delta})$, and $\eta \in [0, \frac{1}{4})$: ((Nocedal and Wright, 2006))
for $k = 0, 1, 2, \ldots$
evaluate ρ_k

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

if $\rho_k < \frac{1}{4}$
  $\Delta_{k+1} = \frac{1}{4}\Delta_k$
else
  if $\rho_k > \frac{3}{4}$ and $\|p_k\| = \Delta_k$
    $\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \hat{\Delta})$
  else
    $\Delta_{k+1} = \Delta_k$;
if $\rho_k > \eta$
  $x_{k+1} = x_k + p_k$
else
  $x_{k+1} = x_k$;
end(for)

Q.3 MATLAB®formulation

18 该过程用 MATLAB® 编程实现，流程图见图 Q.2。程序主要围绕函数 构建，该函数使 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的欧几里得范数平方最小。

$$\min\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2 = \min\left(f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_n(\mathbf{x})^2\right)$$

哪里

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2 = \sqrt{f_1(\mathbf{x})^2 + f_2(\mathbf{x})^2 \cdots f_n(\mathbf{x})^2}$$

$$\text{Residual} \qquad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{法}}(t) - \mathbf{x}_{\text{梅斯}}(t)$$

哪里 $\mathbf{x}_{\text{法}}(t)$ 是 向量 的 位移 (在选择的点上) 由 有限元分析 计算, 以及 $\mathbf{x}_{\text{梅斯}}(t)$ 是相应的 向量 的值。两者都是时间的。

19 这是一个非常简单的操作, 在 MATLAB®[1]

```
[x,resnorm,residual,exitflag,output] = lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options)
```

哪里

乐趣	要尽量减少的功能
`x0`	初始值 向量
`lb`	低限度 向量
`ub`	超级链接 向量

[1]一个样品 MATLAB® 编码在附件中 I.6.1.

由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

选项	定义优化选项的结构
重定向	四方 2 标准的剩余在 x: $\sum(fun(\mathbf{x}).^2)$
剩余	客观功能的价值在解决方案中, 通常 (乐趣 (**x**).
出口旗	解析器停止的原因
出口	关于优化过程的最终信息 (一个结构)

20 虽然大多数参数相对简单, 但最关键的组合是 选项. 该项目所使用的内容包括

马克思	最大功能评估数量
马克思	最大数字符
托尔文	对功能的宽容
托尔克斯	对未知的人的宽容
马克思	最多前提的结合格拉迪特 iterations
托尔克	终止对 PCG 的宽容
典型 x	指示典型的参数序列大小的序列 **x** 使用
	以衡量最终差异为 gradient 估计。
终点差异	最终差异的步骤尺寸因素 向量; 这手动定义
	确保探测工作顺利。

21 最终差距步骤尺寸在我们分析的进展中发挥了关键作用。如果不确定, 该参数的默认值为 sqrt(EPS) 以前进的终极差异为主。然而, 在我们的案例研究中, 这个默认值导致过小的最终差异步骤呼吁变更, 因此, 该程序无法通过转换输入变量来捕捉任何差异, 并最终作为优化反应的初始猜测。通过定义一个 向量 的终端差异步骤尺寸 (v) 计划计算最终差异 δ 每个变量 x 表示为:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{v} \cdot \max(abs(\mathbf{x}), \text{Typicalx}); \tag{Q.20}$$

22 定义更高的值导致变量的显而易见差异, 从而确保在响应变量域内的功能合理探索。

MATLAB® 代码

23 和 MATLAB® 代码在图中描述 Q.2 它是相对简单的跟踪。

24 请注意, 在这种情况下, 分析侧重于由碱性集成反应影响的相关术语。(空气). 目标是确定 AAR 模型的参数, 以便从 有限元分析 的切割转移密切相匹配的领域测量。

1. 现场测量被阅读和调整。
2. 控制输入文件被阅读, 并分为三个部分: 一个中央包含线条要由代码修改。(与 AAR 属性相关) 和两个接近的, 将保持不变。相应的分离器线号用于后续使用, 由最小化函数记录。
3. 用户定义的变量从外部 Excel 文件中阅读。
4. 优化参数设置
5. 和 李克强 功能 , §Q.3 然后被召唤。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

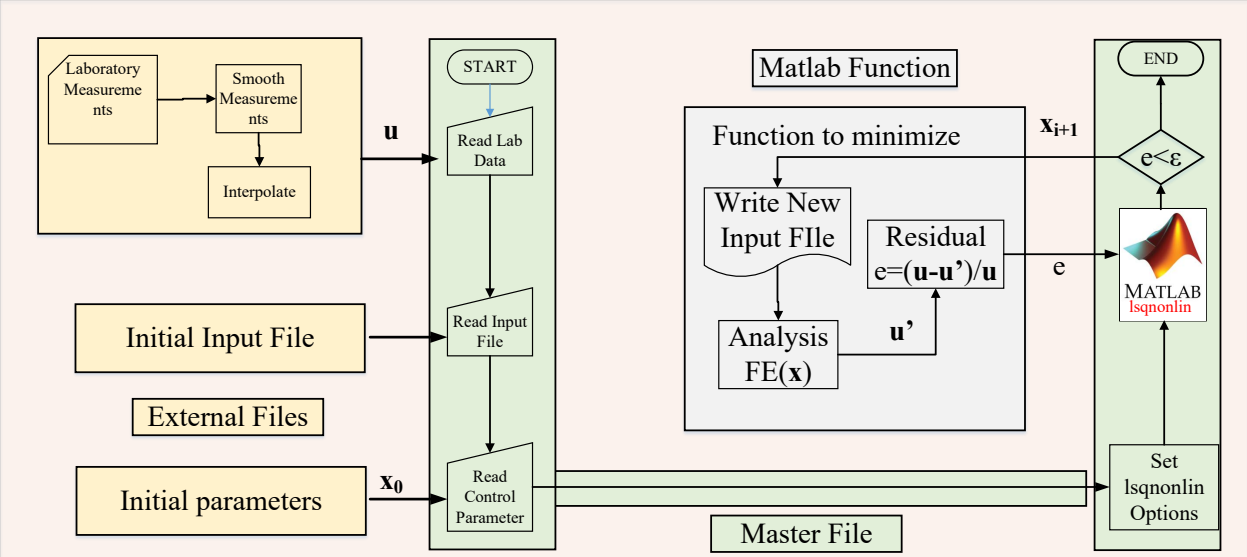


图 Q.2: 参数识别程序流图

功能定义

25 算法的一个关键部分是定义要尽量减少的功能。

1. 创建一个新的输入文件, 以 $\mathbf{x}$ (第一节, 使用默认值 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. 这是通过控制文件的先前分割方便。
2. 以 有限元分析 进行 (在此情况下, 使用梅林).
3. 从输出文件中提取计算的转移, $\mathbf{x}_{法}(t)$
4. 计算剩余 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{法}(t) - \mathbf{x}_{梅斯}(t)$.
5. 遵守规则 e 关于废物。
6. 返回新 向量 的转移标准。

26 计划的完成由 **李克强** 基于以前选择的标准和选项 (§Q.3). 因为没有直接的呼吁到函数, 以尽量减少 MATLAB® 代码, 额外的参数 (如如 $\mathbf{x}_{梅斯}(t)$ 经过的如 **全球** 变量。

27 A MATLAB® 编码以执行最少的四方非线性优化为 §I.6.1.

Q.4 实时视觉化

28 要记住, 非线性终端单元模拟一个 DAM 的 AAR 扩展可能需要从每 3 小时起, 并且在参数识别程序的背景下需要多次分析, 这是一个非常计算机强大的过程。

29 因此, 使用图形用户界面, 图 Q.3. 第一四角是中间移动的序列。($\mathbf{x}_{法}(t)$) 与被测量的人相

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

比 ($\mathbf{x}_{梅斯}(t)$). 其余三个四角形是要识别的选定的变量组合。(ε^{∞}, τ_l, 和 τ_c) 以 iteration 数字为准。

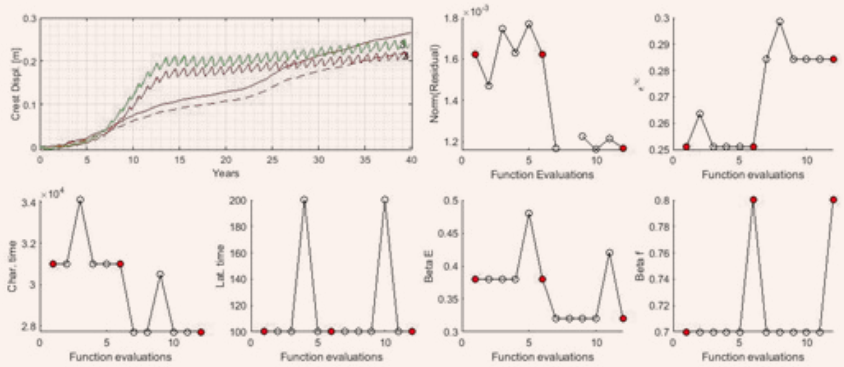


图 Q.3: 图形用户界面为碱集合反力参数识别 (Saouma and Hariri-Ardebili, 2021)

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

R 向量 计算; 一个初始

摘要

本附件涵盖了 *Vector Calculus* 的基本元素, 需要了解本书中的某些衍生物。推荐进一步探索的参考是 *(Schey, 1973)*. 请注意, 本节不完整或全面; 它作为新鲜剂。

R.1 基本定义 2792
R.1.1 衍生品为一个滑板 2792
R.1.2 差异 2794
R.1.3 格拉迪特 2796
R.2 综合理论 2800
R.2.1 整合一个 向量 2800
R.2.2 完整线 2800
R.2.3 集成部分 2801
R.2.4 加斯: 差异理论 2801
R.2.5 斯托克的理论 2803
R.2.6 绿色: 格拉迪特理论 2803

1 A **田野** 它是由一个持续的地区定义的功能。这包括, **滑板场** $g(\mathbf{x})$, **向量 字段** $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, or **张量 字段** $\mathbf{T}(\mathbf{x})$.

2 首先, 我们介绍了 **差异性 向量 操作员** "纳布拉" 被称为 ∇

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

3 我们还注意到, 有这么多方法可以区分一个向量字段, 因为有方法多元 vectors, 由表提供的类似性 R.1.

多元化		差异化		张量 订单
$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$	多特	$\nabla\cdot\mathbf{v}$	差异	↓
$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$	十字架	$\nabla\times\mathbf{v}$	库尔	→
$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$	张量	$\nabla\mathbf{v}$	格拉迪特	↑

表 R.1: 多元化和差异化运营商之间的相似之处

R.1 基本定义

R.1.1 衍生品为一个滑板

4 向量的衍生品 $\mathbf{p}(u)$ 关于一个滑板 u, 图 R.1 被定义为

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{p}(u+\Delta u) - \mathbf{p}(u)}{\Delta u}$$

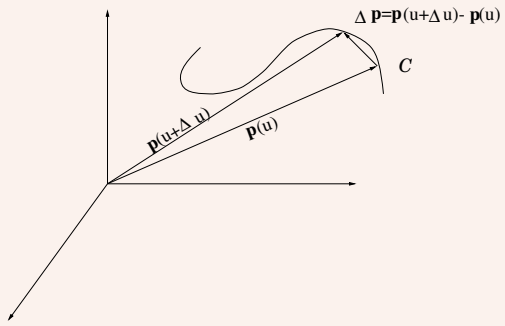


图 R.1: 位置差异 向量 $\mathbf{p}$

5 If $\mathbf{p}(u)$ 是 A **位置 向量** $\mathbf{p}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ 然后,

$$\frac{d\mathbf{p}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

是向量沿着曲线的坦根。

6 If u 是时间 t 然后, $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 是 速度

7 在 **区别地质**如果我们认为一个曲线 C 由函数定义 $\mathbf{p}(u)$ 然后 $\frac{d\mathbf{p}}{du}$ 是 向量 tangent ot C, 如果 u 是曲线协调 s 從某個角落测量, 然後 $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ 是单元坦格向量 到 C $\mathbf{T}$, 图 R.2. 我们有以下关系

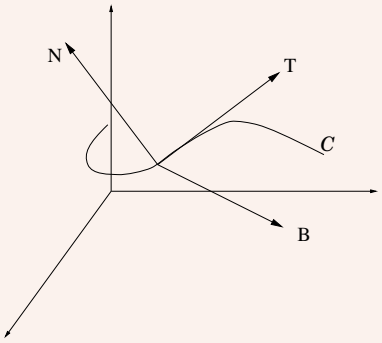


图 R.2: 曲率 的曲线

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{T}$$
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$
$$\kappa = \text{ curvature}$$
$$\rho = \frac{1}{\kappa} \text{ Radius of Curvature}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

我们也注意到 $\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{ds}=0$ if $\left|\frac{d\mathbf{p}}{ds}\right|\neq 0$.

R.1.1.1 例题 R.1: 向曲线倾斜

确定曲线的 向量 单元: $x=t^2+1, y=4t-3, z=2t^2-6t$ 为 $t=2$.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[(t^2+1)\mathbf{i}+(4t-3)\mathbf{j}+(2t^2-6t)\mathbf{k}\right]=2t\mathbf{i}+4\mathbf{j}+(4t-6)\mathbf{k}\\ \left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right|&=\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}\\ \mathbf{T}&=\frac{2t\mathbf{i}+4\mathbf{j}+(4t-6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2+(4)^2+(4t-6)^2}}\\ &=\frac{4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2+(4)^2+(2)^2}}=\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{1}{3}\mathbf{k}\ \text{ for }\ t=2\end{aligned}$$

R.1.2 差异

R.1.2.1 向量

[8] 和 **差异** 向量 一个身体的领域 $\mathcal{B}$ 与边界 Ω, 图 R.3 要考虑到, 每一个点表面有正常的 $\mathbf{n}$, 而这身体被一个向量字段包围 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. 身体的体积是 $v(\mathcal{B})$.

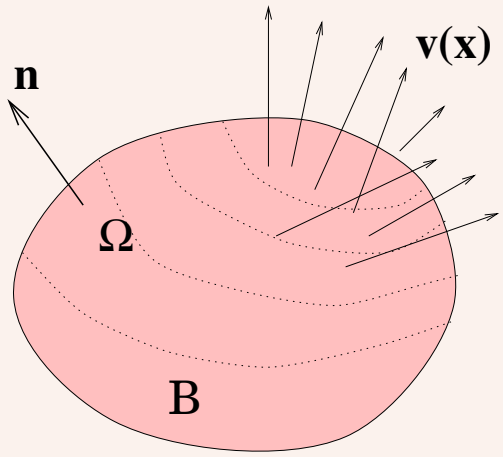


图 R.3: 向量 跨越坚实的区域

[9] 因此, 向量字段的差异被定义为

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x})\equiv\lim_{v(\mathcal{B})\to 0}\frac{1}{v(\mathcal{B})}\int_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dA$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

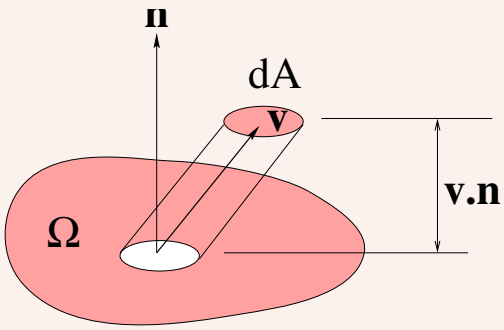


图 R.4: 通过区域流动 dA

哪里 $\mathbf{v}.\mathbf{n}$ 它经常被称为 **流** 代表总体体积的 “流体” 经过的通过 dA 在单位时间, 图 R.4 此 体积 等于缸的基。dA 时间的高度关于缸的 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$. 我们注意到, 流动的那些对边界的紧张, 不让任何流体出, 而那些正常的它。让它尽可能有效。

[10] 因此, 差异是测量一个 向量 字段的变速率。

[11] 这个定义与其形状明显独立。坚实的区域, 但是我们可以获得对偏差, 考虑到与侧面平行的直角 $\Delta x_1, \Delta x_2$, 和 Δx_3 与正常的 vectors 指向在坐标轴的方向, 图 R.5. 如果我们也认为角

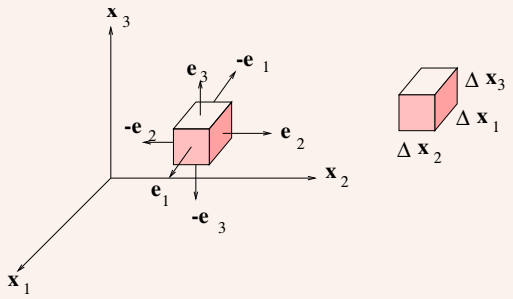


图 R.5: Infinitesimal 单元 对差异的评估

落最接近起源, 如位于 $\mathbf{x}$ 其次, 贡献 (来自 EQ。R.1.2.1) 两面平常的 vector $\mathbf{e}_1$ 和 $-\mathbf{e}_1$ 是

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0}\frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3}[\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1+\mathbf{v}(x)\cdot(-\mathbf{e}_1)]dx_2dx_3$$

或

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\to 0}\frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_2\Delta x_3}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta x_1\mathbf{e}_1)-\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1dx_2dx_3=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$
$$=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_1}\cdot\mathbf{e}_1$$

我们可以普遍化

$$\text{div }\mathbf{v}(\mathbf{x})=\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\cdot\mathbf{e}_i$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

12 或替代

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{v}&=(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3)\cdot(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3)\\&=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\partial_i v_i=v_{i,i}\end{aligned}$$

13 向量的差异是 **滑雪**.

14 我们注意到, 该 **拉普拉西亚运营商** 被定义为

$$\nabla^2 F\equiv\nabla\nabla F=F_{,ii}$$

R.1.2.1.1 例题 R.2: 向量的差异

确定 向量 的差异 $\mathbf{A}=x^2z\mathbf{i}-2y^3z^2\mathbf{j}+xy^2z\mathbf{k}$ 在点 $(1,-1,1)$.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{v}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(x^2z\mathbf{i}-2y^3z^2\mathbf{j}+xy^2z\mathbf{k})\\&=\frac{\partial x^2z}{\partial x}+\frac{\partial-2y^3z^2}{\partial y}+\frac{\partial xy^2z}{\partial z}\\&=2xz-6y^2z^2+xy^2\\&=2(1)(1)-6(-1)^2(1)^2+(1)(-1)^2=-3\ \text{ at }\ (1,-1,1)\end{aligned}$$

R.1.2.2 第二次订单 张量

15 与 Eq 相似。R.1.2.1, 二次命令的差异性 张量田野 $\mathbf{T}$ 是

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=\operatorname{div}\mathbf{T}(\mathbf{x})\equiv\lim_{v(\mathcal{B})\to 0}\frac{1}{v(\mathcal{B})}\int_\Omega\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}dA$$

哪个是 **向量 字段**

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_p}\mathbf{e}_q$$

R.1.3 格拉迪特

R.1.3.1 滑板领域

16 和 **格拉迪特** 一个滑板领域 $g(\mathbf{x})$ 是 向量 字段 $\nabla g(\mathbf{x})$ 如同任何单位 向量 $\mathbf{v}$ 指向衍生品 dg/ds 在方向上, $\mathbf{v}$ 被授予

$$\frac{dg}{ds}=\nabla g\cdot\mathbf{v}$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

哪里 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$ 我们注意到, 这个定义没有提到任何协调系统。格拉迪特就是这样。a **向量 不可变**.

17 要找到任何直角卡特西亚协调系统的组件, 我们使用

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{dx_i}{ds}\mathbf{e}_i$$
$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds}$$

可取代, 可交换。

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathbf{e}_i$$

或

$$\nabla\phi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$
$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

并指出, 它定义了一个 **向量 字段**.

18 一个规模领域的格拉迪安特的物理意义是, 它在该领域最快的方向变化 (对于三维表面, 格拉迪安特沿着正常到飞机坦克到表面). 其长度的向量 $\|\nabla g(\mathbf{x})\|$ 它是对圆线的偏见。

19 $\nabla g(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}$ 给了转变率的尺度在方向 $\mathbf{n}$.

R.1.3.1.1 例题 R.3: 学士学位: 一个规模的领域 I

确定格拉迪安特的 $\phi = x^2yz + 4xz^2$ 在点 $(1,-2,-1)$ 沿着方向 $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + (x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k}$$
$$= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \text{ at } (1,-2,-1)$$
$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$
$$\nabla\phi\cdot\mathbf{n} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k})\cdot\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

因为这个最后的价值是积极的, ϕ 走在那条方向上。

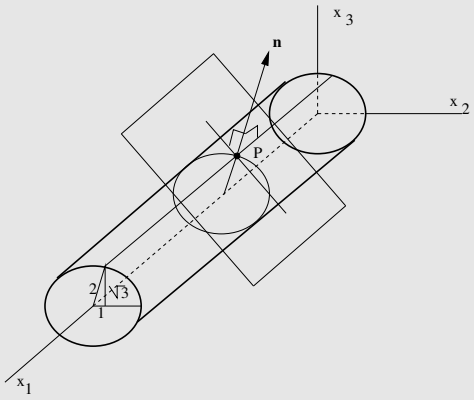
结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

R.1.3.1.2 例题 R.4: (二) 斯卡拉字段的格拉迪特

应力张量在整个连续性中被给予与卡特西亚轴

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3^2 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

定义 应力 向量 (或拖动) 在此点 $P(2,1,\sqrt{3})$ 关于 The 飞机在圆形表面上沉重 $x_2^2 + x_3^2 = 4$ 在 P,



在点 P, 应力张量 是由

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

正常单位到表面 P 被授予

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2x_2\mathbf{2_2} + \mathbf{2x_3e_3}$$

在点 P,

$$\nabla(x_2^2 + x_3^2 - 4) = 2\mathbf{2_2} + \mathbf{2\sqrt{3}e_3}$$

因此, 正常的单位 P 是

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_3$$

因此, 向量的拖动将被确定为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

或 $\mathbf{t^n} = \frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \sqrt{3}\mathbf{e}_3$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

R.1.3.2 向量 字段

20 我们也可以定义一个向量字段的格拉迪安特为

$$[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

这就是 $[\nabla\mathbf{v}]_{ij}$ 以改变的速度为准 i 其组成部分 $\mathbf{v}$ 与尊重的 j 协调轴。

21 注意区别之间的 $\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}$ 和 $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$. 在 矩阵 代表性中, 一个是另一个人的转移。

22 一个向量的格拉迪安特是 2 命令的张量。

23 我们可以地质上解释一个向量的格拉迪安, 图 R.6. 如果考虑到两点 a 和 b 彼此相近的 (伊。Δs 非常小), 并让单位向量 $\mathbf{m}$ 点在方向上从 a 到 b. 向量 字段的值在 a 是 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 和 向量 字段值在 b 是 $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$. 从 向量 字段域内位置的变化, 这两个 vector 是不同的长度和方向。

24 如今, 如果我们把一份副本 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 把它放在在 b 接下来, 我们将这些两个 vector 之间的差异进行比较。向量的评论连接头部 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})$ 是 $\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})-\mathbf{v}(\mathbf{x})$, 在向量中改变。因此, 如果我们把这种变化分为 Δs, 然后我们得到变化速度, 当我们移动在指定的方向。

25 以限制为 Δs 走到零, 我们得到了

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\Delta s\mathbf{m})-\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\Delta s} \equiv D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$$

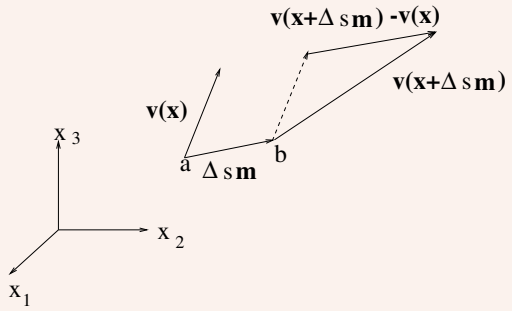


图 R.6: 一个向量的格拉迪特

26 数量的 $D\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{m}$ 被称为 **导向衍生品** 因为它给了向量字段的变化速度, 当我们移动方向 $\mathbf{m}$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

R.1.3.2.1 例题 R.5: 一个向量字段的格拉迪特

我们试图在两个维度中确定一个简单的向量字段的格拉迪安特。

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2, 2xy)$$

要确定这个 向量 字段的格拉迪特 $\nabla\mathbf{F}$, 我们计算向量的每个组件的部分衍生品, x 和 y, so

$$\nabla\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

或

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x \tag{R.1}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}2xy = 2x \tag{R.2}$$

这样

$$\nabla\mathbf{F} = (2x, 2x)$$

R.2 综合理论

R.2.1 整合一个 向量

[27] 一个向量的整体 $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{e}_1 + R_2(u)\mathbf{e}_2 + R_3(u)\mathbf{e}_3$ 被定义为

$$\int \mathbf{R}(u)du = \mathbf{e}_1\int R_1(u)du + \mathbf{e}_2\int R_2(u)du + \mathbf{e}_3\int R_3(u)du$$

如果 向量 $\mathbf{S}(u)$ 有這樣的存在 $\mathbf{R}(u) = \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))$ 然后,

$$\int \mathbf{R}(u)du = \int \frac{d}{du}(\mathbf{S}(u))\,du = \mathbf{S}(u) + c$$

R.2.2 完整线

[28] 给予 $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{e}_1 + y(u)\mathbf{e}_2 + z(u)\mathbf{e}_3$ 哪里 $\mathbf{r}(u)$ 是定义曲线的位置 向量 C 连接点 P_1 到 P_2 哪里 $u = u_1$ 和 $u = u_2$ 相应, AMF 提供 $A(x,y,z) = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ 被定义为 vectorial function 不断的延续 C, 其次, 我们将对 Tangential Component 的 $\mathbf{A}$ 沿着 C 从 P_1 到 P_2 被授予

$$\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1dx + A_2dy + A_3dz$$

If $\mathbf{A}$ 如果是力量, 那么这个整体将代表相应的工作。

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

29 如果封面被关闭, 我们将定义 **包围完整** 如

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

30 可以证明, 如果 $\mathbf{A} = \nabla\phi$ 然后

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \text{ 与连接 } C \text{ 和 } P_1 \text{ 的路径 } P_2 \text{ 无关}$$
$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ along a closed contour line}$$

R.2.3 集成部分

31 组成部分的公式是

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b u dv &= uv|_a^b - \int_a^b v du\end{aligned} \tag{R.3}$$

R.2.4 加斯: 差异理论

32 在最常见的情况下, 我们

$$\int_\Omega \delta F = \int_{\delta\Omega} F$$

33 差异理论 (也被称为奥斯特罗格拉德斯基的理论) 经常在固体机械中出现, 可以说是如下:

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v} d\Omega = \int_\Gamma \mathbf{v}.\mathbf{n} d\Gamma \text{ or } \int_\Omega v_{i,i} d\Omega = \int_\Gamma v_i n_i d\Gamma \tag{R.4}$$

也就是说，向量场散度在体积上的积分等于向量流在一个表面上。

34 对于 2D-1D 转型, 我们有

$$\int_A \nabla\cdot\mathbf{q} dA = \oint_s \mathbf{q}^T\mathbf{n} ds \tag{R.5}$$

35 这个理论有时被称为绿色在太空的理论。

36 **格林加斯** 理论

$$\int_\Omega \Phi\nabla\cdot\mathbf{v} d\Omega = \int_\Gamma \Phi\mathbf{v}^T\mathbf{n} d\Gamma - \int_\Omega (\nabla\Phi)^T\mathbf{v} d\Omega \tag{R.6}$$

If we select $\mathbf{v}^T = [\ \Psi \quad 0 \quad 0\ ]$, we obtain

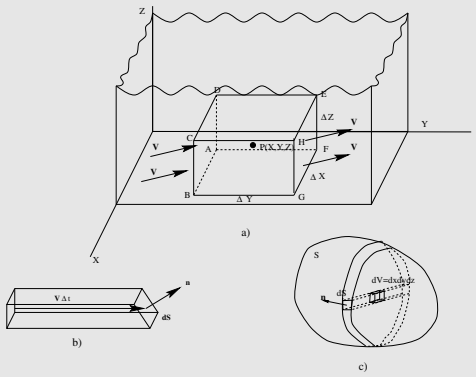
$$\int_\Omega \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x} d\Omega = \int_\Gamma \Phi\Psi n_x d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Psi d\Omega$$

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

R.2.4.1 例题 R.6: 差异理论的物理解释

提供差异理论的物理解释。

流体 具有 速度 字段 $\mathbf{v}(x,y,z)$ 首先, 我们要确定单位时间的净通货膨胀。以 单位体积 在一个平行粘贴中心的 $P(x,y,z)$ 与尺寸 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (a).



$$
\begin{aligned}
v_x\big|_{x,y,z} &\approx v_x \\
v_x\big|_{x-\Delta x/2,y,z} &\approx v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{AFED} \\
v_x\big|_{x+\Delta x/2,y,z} &\approx v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x \quad \text{GHCB}
\end{aligned}
$$

每单位时间的净流量在 x 飞机是

$$
\begin{aligned}
\Delta V_x &= \left(v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z - \left(v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z \\
&= \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z
\end{aligned}
$$

同样

$$
\begin{aligned}
\Delta V_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z \\
\Delta V_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z
\end{aligned}
$$

因此, 每 单位体积 和单位时间的总增加将由

$$
\frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}
$$

此外, 如果我们考虑到流体交叉的总数 dS 在期间 Δt (b) 它将由 $(\mathbf{v}\Delta t)\cdot\mathbf{n}dS = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS\Delta t$ 或 体积 的 流体交叉 dS 按单位时间是 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。
审阅稿

因此, 对于一个自愿的体积 (c), 流体 通往一个封闭的表面的总量 S 为单位时间是 $\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$. 但这等于 $\int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$ (Eq. R.2.4.1) 这样

$$\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \nabla\cdot\mathbf{v}dV$$

这是差异理论。

R.2.5 斯托克的理论

37 斯托克的理论说:

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}dS = \int\int_{\mathcal{S}} (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

哪里 $\mathcal{S}$ 它是一个开放的表面, 有两个面孔被限制在 C

R.2.6 绿色: 格拉迪特理论

38 飞机上的绿色理论是斯托克的理论的一个特殊案例。

$$\oint (Rdx + Sdy) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dxdy$$

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译:
译文可能存在错误。

第二至第四卷及附录参考文献

AASHTO, LRFD (2017). *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*. 8th Edition. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

AASHTO, Seismic (2011). *AASHTO Guide Specifications for LRFD Seismic Bridge Design*. AASHTO; Subcommittee on Bridges.

Abramowitz, M. and I. Stegun (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Tech. rep. Applied Mathematics Series, No. 55. National Bureau of Standard.

Academie Royale des Sciences (1741). "*Eloge de M. De La Hire*". In: Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Annee MDCCXVIII, pp. 76–89.

ACI 318 (2019). *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary*. American Concrete Institute.

ACI 318.2-14 (2014). *Building code requirements for Concrete Thin Shells (ACI 318.2-14) and commentary*. Tech. rep. American Concrete Institute.

American Institute of Steel Construction (2016). *Specification for structural steel building ANSI/AISC 360-16*. American Institute of Steel Construction.

American Society of Civil Engineers (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17. Reston, VA: American Society of Civil Engineers.

Anthropic (2025). *Claude*. https://www.anthropic.com/claude. AI assistant.

Applied Technology Council (2012a). *Seismic Performance Assessment of Buildings Volume 1 - Methodology*. Tech. rep. FEMA P-58-1. Federal Emergency Management Agency.

– (2012b). *Seismic performance assessment of buildings, (Volume 1): Methodology*. Tech. rep. ATC-58-1. Redwood City, CA: Federal Emergency Management Agency.

ASCE/SEI 7-16 (2017). *Minimum Design Loads For Buildings and Other Structures*. Tech. rep. American Society of Civil Engineers.

ATC-13 (1985). *Earthquake damage evaluation data for California. Report No.ATC-13*. Tech. rep. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

ATC-40 (1996). *Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings. Volume 1*. Tech. rep. Redwood City, CA: Applied Technology Council.

Atkinson, G. and D. Boore (1995). "Ground-motion relations for eastern North America". In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 85.1, pp. 17–30.

Baker, A. and A. Amarakone (1964). "" Inelastic Hyperstatic Frames Analysis"". In: *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, pp. 85–142.

Baker, A. L. L. (1956). *The ultimate-load theory applied to the design of reinforced & prestressed concrete frames*. Concrete Publications.

Baker, E., L Kovalevsky, and F. Rish (1972). *Structural Analysis of Shells*. McGraw Hill.

Baker, J. (2015). "Efficient analytical fragility function fitting using dynamic structural analysis". In: *Earthquake Spectra* 31.1, pp. 579–599.

Baker, J. and N. Jayaram (2008). "Correlation of spectral acceleration values from NGA ground motion models". In: *Earthquake Spectra* 24, pp. 299–317.

审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Baker, W. F. (2023). *William Baker: Structural Engineer and Problem Solver*. The Grainger College of Engineering, University of Illinois Urbana–Champaign.
Bate, S. et al. (1962). "Ultimate Load Design Of Concrete Structures." In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 21.2, pp. 399–442.
Bathe, K. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall Inc.
Bažant, Ž. (1984). "Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal". In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 110.4, pp. 518–535.
Bendixen, A. (1914). *Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen*. German. [The Method of Alpha-Equations for the Analysis of Frame Structures]. Germany.
Benjamin, J. and C. Cornell (1970). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. New York: McGraw Hill.
Berry, M., M. Parrish, and M. Eberhard (2004). *Peer Structural Performance database*. Tech. rep. Pacific Earthquake Engineering Research Center; University of California, Berkeley.
Bertero, R. and V. Bertero (2002). "Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 627–652.
Bhatt, P (1986). *Programming the matrix analysis of skeletal structures*. E. Horwood.
Billington, D. (1965). *Thin Shell Concrete Structures*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Billington, D. (1983). *Structural Studies*. Tech. rep. Department of Civil Engineering, Princeton University.
Bisplinghoff, R. L., J. W. Mar, and T. H. Pian (1965). *Statics of deformable solids*. Dover.
Bisshopp, K. and D. C. Drucker (1945). "Large deflection of cantilever beams". In: *Quarterly of applied mathematics* 3.3, pp. 272–275.
Bolt, B. (1973). "Duration of strong ground motion". In: *Proceedings of the 5th World Conference on Earthquake Engineering*. Vol. 1, pp. 1304–1313.
Bommer, J. and A. Martinez-Pereira (1999). "The effective duration of earthquake strong motion". In: *Journal of earthquake engineering* 3.02, pp. 127–172.
Boore, D., W. Joyner, and T. Fumal (1997). "Equations for estimating horizontal response spectra and peak acceleration from western North American earthquakes: A summary of recent work". In: *Seismological research letters* 68.1, pp. 128–153.
Bozorgnia, Y. and V. Bertero (2003). "Damage spectra: characteristics and applications to seismic risk reduction". In: *Structural Engineering, ASCE* 129, pp. 1330–1340.
Bradley, B. (2010). "A generalized conditional intensity measure approach and holistic ground-motion selection". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.12, pp. 1321–1342.
Brandonisio, G. and A. De Luca (2020). "Statics of Buttressed Masonry Arches in Light of Traditional Design Rules". In: *Proceedings of XXIV AIMETA Conference 2019 24*. Springer, pp. 2162–2176.
Branson, D. E. et al. (1963). *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Tech. rep. Alabama. State Highway Department.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Brühwiler, E. and F. Whitman (1990). "Failure of Dam Concrete Subjected to Seismic Loading Conditions". In: *Engineering Fracture Mechanics* 35.3, pp. 565–572.
Brühwiler, E. (1988). *Fracture Mechanics of Dam Concrete Subjected to Quasi-Static and Seismic Loading Conditions*. (in German). Lausanne: Doctoral Thesis No 739, Swiss Federal Institute of Technology.
Bryant, L., J. Brokaw, and P. Mlakar (Jan. 1993). *Reliability Modeling of Concrete Overstressing*. Tech. rep. Report Submitted to U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station. JAYCOR, Vicksburg Mississippi.
Bucher, C. (2009). *Computational analysis of randomness in structural mechanics: Structures and infrastructures book series, Vol. 3*. Crc Press.
CALTRANS, S. (2013). *CALTRANS Seismic Design Criteria*. California Department of Transportation.
Campbell, K. and Y. Bozorgnia (2012). "Cumulative absolute velocity (CAV) and seismic intensity based on the PEER-NGA database". In: *Earthquake Spectra* 28.2, pp. 457–485.
Carol, I and J Murcia (1989). "Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an 'exact' formulation—I. Theory". In: *Computers & structures* 33.1, pp. 79–87.
Castigliano, A. (1879). *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Vol. 1. AF Negro.
Cedolin, L., S. Dei Poli, and I. Iori (1987). "Tensile Behavior of Concrete". In: *J. of Engineering Mechanics, ASCE* 113.3.
Cella, P. (1999). "Reexamining the catenary". In: *The College Mathematics Journal* 30.5, pp. 391–393.
Center, P. E. E. R. (2010). *Pacific Earthquake Engineering Research (PEER) Performance-Based Earthquake Engineering Framework*.
Chen, W. and H. Zhang (1990). *Structural Plasticity*. Springer-Verlag.
Chopra, A. and R. Goel (1999). "Capacity-Demand-Diagram Methods Based on Inelastic Design Spectrum". In: *Earthquake Spectra* 15, pp. 637–656.
Civil Engineers, A. S. of (2017). *Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings*. ASCE/SEI 41-17.
– (2022). *Minimum Design Loads and Associated Criteria for Buildings and Other Structures*. ASCE/SEI 7-22.
Clough, R. W. (1966). "Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements". In: *Proceedings of Japan earthquake engineering symposium*.
Clough, R. and J. Penzien (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Inc., London, UK.
Cohen, I. B. (2002). "Newton's concepts of force and mass, with notes on the Laws of Motion". In: *The Cambridge Companion to Newton*. Ed. by I. Cohen and G. Smith.
Cornell, C. A. (1964). *Stochastic process models in structural engineering*. Department of Civil Engineering, Stanford University.
Cornell, C. and F. Jalayer (2002). "Factored nonlinear displacement demand estimation methods for probability-based safety assessment". In: *Annual Meeting Research Digest No. 2002-7, A publication of the Pacific Earthquake Engineering Research Center*.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

第二至第四卷及附录参考文献

Coulomb, C. (1773). "*Essai sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*". In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 7, pp. 343–382.
Couplet, C. (1729). "*De la poussée des voûtes*". In: *Mémoires de l'académie Royale des Sciences*, pp. 79–117.
– (1730). "*Seconde partie de l'examen des voûtes*". In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences*, pp. 117–141.
Courant, R., K. Friedrichs, and H. Lewy (1967). "On the partial difference equations of mathematical physics". In: *IBM Journal of Research and Development* 11.2, pp. 215–234.
Cuthill, E. and J. McKee (1969). "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices". In: *Proceedings of the 1969 24th national conference*, pp. 157–172.
Da Vinci, L. (1490). *Códice de Madrid I*. Biblioteca Nacional de España.
d'Alembert, J. l. R. (1743). *Traite de dynamique*. First edition. Collation: [4], xxvi, [2], 186, [2]. With 4 folding engraved plates. Paris: David l'aine.
D'Ambrisi, A. and M. Mezzi (2015). "An energy-based approach for nonlinear static analysis of structures". In: *Bulletin of Earthquake Engineering* 13.5, pp. 1513–1530.
Danyzy, A. (1732). "Méthode générale pour déterminer la résistance qu' il faut opposer à la poussée des voûtes". In: *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* 2.1718-1745, pp. 40–56.
de Belidor, B. F. (1729). *La science des Ingegnieurs*. Chez Nyon.
– (1757). *Nouveau cours de mathématique a l'usage de l'artillerie et du génie...* Chez Nyon.
de la Hire, P. (1712). "*Sur la construction des voûtes dans les édifices*". In: *mémoires de l'académie Royale des Sciences* 69.
de La Hire, Philippe (1695). *Traité de Mécanique, où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, et les propriétés des corps pesans lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*. La Compagnie des libraires.
Den Hartog, J. P. (1961). *Strength of materials*. Dover.
Dennis, J. and R. Schnabel (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs.
Desayi, P (1964). "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete". In: *Journal of the American Concrete Institute* 61.3, pp. 1169–1183.
Desmorat, R. et al. (2008). *Anisotropic damage model for multifibre dynamics and pseudo-dynamics analyses*.
Dolati, S. S. K., A. Matamoros, and W. Ghannoum (2023). "Evaluating the effects of loading protocol on the strength and deformation capacity of Flexure-Shear critical concrete columns". In: *Engineering Structures* 279, p. 115592.
Douglas, J (2011). *Ground Motion Estimation Equations 1964–2010*.
Duda, H. (1990). "Stress-Crack-Opening Relation and Size Effect in High-Strength Concrete". In: *Darmastad Concrete* 5, pp. 35–46.
Eddy, H. T. (1878). *Researches in graphical statics*. D. van Nostrand.
Eisenberg, M. A. and L. Malvern (1973). "On Finite Element Integration in Natural Co-ordinates". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7, pp. 574–575.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Elnashai, A. and L. Di Sarno (2015). *Fundamentals of earthquake engineering: from source to fragility*. John Wiley & Sons.
Elwood, K. and J. Moehle (2002). *Shake table tests and analytical studies on the gravity load collapse of reinforced concrete frames*. Tech. rep. PEER Report 2003/01. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California.University of California, Berkeley.
Erberik, M. (2015). "Seismic Fragility Analysis". In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–10.
Estekanchi, H., A. Vafai, and M. Sadeghazar (2004). "Endurance time method for seismic analysis and design of structures". In: *Scientia Iranica* 11, pp. 361–370.
European Committee for Standardization (CEN) (2010). *Eurocode – Basis of Structural Design (EN 1990:2002+A1:2005+A1:2005/AC:2010)*. European Standard. Brussels, Belgium: CEN.
Felippa, C. (1999). *Finite Element Lecture Notes*. Tech. rep. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
– (2000). *Lecture Notes in Advanced Finite Element Methods (ASEN 5367)*. Tech. rep. Dept. of Aerospace Engineering, University of Colorado, Boulder.
FEMA (1997a). *NEHRP commentary on the guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Tech. rep. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
– (1997b). *NEHRP guidelines for seismic rehabilitation of buildings*. Tech. rep. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency.
FEMA (2012). *Seismic Performance Assessment of Buildings*. P-58.
FEMA-356 (2000). *Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings*. Tech. rep. Federal Emergency Managemt Agency.
Feodossiev, V. (1977). *Résistance des Materiaux: Problèmes et Questions Choisis*. Traduction Française. Moscou: Editions MIR.
Filiatrault, A. (2013). *Elements of earthquake engineering and structural dynamics*. Presses inter Polytechnique.
Filippou, F., E. Popov, and V. Bertero (Nov. 1983). "Modeling of Reinfored Concrete Joints under Cyclic Excitations". In: *ASCE, Journal of Structural Engineering* 109.11.
Finsterwalder, U. (1933). "Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt". In: *Ingenieur-Archiv* 4.1, pp. 43–65.
Fischler, M. A. and R. C. Bolles (1981). "Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography". In: *Communications of the ACM* 24.6, pp. 381–395.
Flügge, W. (1973). *Stresses in shells*. Second Edition. Springer Verlag.
Freeman, S. (1978). "Prediction of response of concrete buildings to severe earthquake motion". In: *Proceedings of Douglas McHenry international symposium on concrete and concrete structures*. Ed. by A. C. Institute. Detroit, MI, USA.
– (1998). "The capacity spectrum method". In: *Proceedings of the 11th European conference on earthquake engineering*. Paris, France.
Gakuhari, Y. (Aug. 2021). "Modeling Considerations Related to Concrete with AAR". MA thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Gallagher, R. (1975). *Finite Element Analysis Fundamentals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Gavin, H. P. (2012). *Mathematical Properties of Stiffness Matrices*. CEE 421L, Matrix Structural Analysis course notes. Duke University, Department of Civil and Environmental Engineering.
Georg, R. (Dec. 2014). "Historical Analysis of Arches and Modern Shells". Saouma, Victor E. advisor. M.S. Thesis. Boulder, CO, U.S.A.: University of Colorado, Dept. Civ. Eng.
Gerstle, K. (1974). *Basic Structural Analysis*. Out of Print. McGraw-Hill.
Ghannoum, W. (2010). Personal communication.
– (2020). *Decision-Oriented Column Simulation Capabilities for Enhancing Disaster Resilience of RC Building*. "Seminar at the University of Colorado, Boulder".
Ghorbani, R. et al. (2022). "Uniaxial model for simulating the cyclic behavior of reinforced concrete members". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 51.15, pp. 3574–3597.
Gibson, J. E. (1968). *The design of shell roofs*. Spon.
Giuriani, E. and G. P. Rosati (1986). "Behaviour of Concrete Elements under Tension After Cracking". In: *Studi e Ricerche, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato* 8. (in Italian), pp. 65–82.
Gopalaratnam, V. S. and S. Shah (1985). "Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension". In: *ACI Journal* 82, pp. 310–323.
Gunay, S. and K. Mosalam (2013). "PEER performance-based earthquake engineering methodology, revisited". In: *Journal of Earthquake Engineering* 17.6, pp. 829–858.
Gutenberg, B. and C. Richter (1954). "Frequency and energy of earthquakes". In: *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, pp. 17–19.
Hamburger, R. et al. (2004). "The ATC-58 Project: Development of next-generation reformance-based earthquake engineering design criteria for buildings". In: *Proceeding of the 13th World Conference on Earthquake Engineering*. Vancouver, Canada.
Hariri-Ardebili, M. and H. Mirzabozorg (2014). "Estimation of probable damages in arch dams subjected to strong ground motions using endurance time acceleration functions". In: *KSCE Journal of Civil Engineering* 18, pp. 574–586.
Hariri-Ardebili, M. and V. E. Saouma (2015). "Quantitative failure metric for gravity dams". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 44, pp. 461–480.
Hariri-Ardebili, M., V. E. Saouma, and K. Porter (2016). "Quantification of Seismic Potential Failure Modes in Concrete Dams". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*.
Hariri-Ardebili, M. et al. (2016). "A new class of seismic damage and performance indices for arch dams via ETA method". In: *Engineering Structures* 110, pp. 145–160.
Haselton, C. et al. (2011). "Accounting for ground-motion spectral shape characteristics in structural collapse assessment through an adjustment for epsilon". In: *Structural Engineering* 137.3, pp. 332–344.
Haselton, C. B. et al. (2008). "An assessment to benchmark the seismic performance of a code-conforming reinforced-concrete moment-frame building". In: *Pacific Earthquake Engineering Research Center* 2007/1.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Haselton, C. B. et al. (2016). "Calibration of model to simulate response of reinforced concrete beam-columns to collapse." In: *ACI Structural Journal* 113.6.
Heyman, J. (1997). *The Stone Skeleton: Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge University Press.
Heyman, J. (1969). "The safety of masonry arches". In: *International Journal of Mechanical Sciences* 11.4, pp. 363–385.
Higham, N. J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM.
Hillerborg, A., M. Modéer, and P. Petersson (1976). "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements". In: *Cement and Concrete Research* 6.6, pp. 773–782.
Hinton, E. and D. Owen (1977). *Finite Element Programming*. Academic Press, London.
Hordijk, D., H. Reinhardt, and H. Cornelissen (1989). "Fracture Mechanics Parameters of Concrete from Uniaxial Tensile Tests as Influenced by Specimen Length". In: *RILEM-SEM Int. Conference on Fracture Mechanics of Rock and Concrete*. Ed. by S. Shah and S. Swartz. New-York: Springer-Verlag.
Hoshiya, M and Z Hasgur (1978). "AR and MA models of nonstationary ground motion". In: *Bull. Int. Inst. Seismol. Earthq. Eng.* 16, pp. 55–68.
Howard, S. (1966). *Structure: An Architect's Approach*. Princeton University: McGraw-Hill, Inc.
Hsu, T. et al. (1963). "Micro cracking of Plain Concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve". In: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 209–224.
Huerta, S. (2008). "The analysis of masonry architecture: A historical approach: To the memory of professor Henry J. Cowan". In: *Architectural Science Review* 51.4, pp. 297–328.
Ibarra, L. F. (2004). "Global collapse of frame structures under seismic excitations". PhD thesis. Stanford University.
ICBO (1994). *Uniform Building Code*. Tech. rep. International Conference of Building Officials.
Inglis, C. (1913). "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners". In: *Trans. Inst. Naval Architects* 55, pp. 219–241.
Irwin, G. (1957). "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate". In: *Transactions ASME, J. Appl. Mech.* 24.
Jalayer, F. (2003). "Direct probabilistic seismic analysis: implementing non-linear dynamic assessments". PhD thesis. Palo-Alto, CA: Stanford University.
Jankovic, S. and B. Stojadinovic (2004). "Probabilistic performance-based seismic demand model for {R/C} frame buildings". In: *Proceeding of the 13th World Conferance on Earthquake Engineering*. Vancouver, B.C., Canada.
Jeang, F. L. and N. M. Hawkins (1985). *Nonlinear Analysis of Concrete Fracture*. Structures and Mechanics Report. Seattle, WA: Department of Civil Engineering, University of Washington.
Joukowsky, N. Y. (1948). *Sobranie Sochinenii (Collected Works)*. Vol. 2. 25 vols., 1935–1950. The bicycle wheel problem (ring on elastic foundation) appears in the mechanics volume; first solved ca. 1890s at the Moscow Technical School. Moscow: Gostekhizdat.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Kaila, K. and H. Narain (1971). “A new approach for preparation of quantitative seismicity maps as applied to Alpide belt-Sunda arc and adjoining areas”. In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 61.5, pp. 1275–1291.
Kang, D. (2010). “An Optimized Computational Environment for Real Time Hybrid Simulation”. PhD thesis. Dept. of Civil Engineering, University of Colorado, Boulder.
Kappos, A. (1997). “Seismic damage indices for RC buildings: evaluation of concepts and procedures”. In: *Progress in Structural Engineering and Materials* 1, pp. 78–87.
Kassimali, A. (2021). *Matrix analysis of structures*. Cengage Learning.
Kennedy, M. C. and A. O’Hagan (2001). “Bayesian Calibration of Computer Models”. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 63.3, pp. 425–464.
Kent, D. and R. Park (1971). “Flexural Members with Confined Concrete”. In: *Journal of the Structural Division, ASCE* 97.ST7.
Kinney, J. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Out of Print. Addison-Wesley.
Kirsch, C (1898). “Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre”. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 42, pp. 797–807.
Kolosova, G. S. and V. V. Kuroyedov (2013). “Application of Krylov’s functions for solving structural mechanical problems”. In: *Stroitel’stvo Unikal’nyh Zdanij i Sooruzenij* 9, p. 42.
Ladeveze, P. (1983). “Sur une théorie de l’endommagement anisotrope”. In: *Rapport Interne LMT* 34, pp. 1–34.
Lee, T.-H. and K. M. Mosalam (2004). “Probabilistic fiber element modeling of reinforced concrete structures”. In: *Computers and Structures* 82, pp. 2285–2299.
Li, V. C. and E. Liang (1986). “Fracture Processes in Concrete and Fiber Reinforced Cementitious Composites”. In: *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 112.6, pp. 566–586.
Lignos, D. G. and H. Krawinkler (2013). “Development and utilization of structural component databases for performance-based earthquake engineering”. In: *Journal of Structural Engineering* 139.8, pp. 1382–1394.
Lin, T. and J. Baker (2014). “Conditional Spectra”. In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–13.
Lin, T. and S. Stotesbury (1981). *Structural Concepts and Systems for Architects and Engineers*. John Wiley.
Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. Contains extensive historical notes. Cambridge: Cambridge University Press.
Mackie, K. and B. Stojadinovic (2005). *Fragility basis for California highway overpass bridge seismic decision making*. Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
Mahdavi, G. (Dec. 2023). “Probabilistic Nonlinear Analysis of Concrete Dams Suffering from AAR”. PhD thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Mander, J. B., M. J. Priestley, and R Park (1988). “Theoretical stress-strain model for confined concrete”. In: *Journal of structural engineering* 114.8, pp. 1804–1826.
Maney, G. A. (1915). “Secondary Stresses and Other Problems in Rigid Frames: A New Method of Solution”. In: *Studies in Engineering*. University of Minnesota.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

第二至第四卷及附录参考文献

Mashayekhi, M. and H. Estekanchi (2013). "Investigation of strong-motion duration consistency in endurance time excitation functions". In: *Scientia Iranica* 20, pp. 1085–1093.
Mashayekhi, M., H. Estekanchi, and H. Vafai (2019a). "Simulation of Endurance Time Excitations Using Increasing Sine Functions". In: *Int. J. Optim. Civil Eng* 9.1, pp. 65–77.
– (2019b). "Simulation of endurance time excitations via wavelet transform". In: *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering* 43.3, pp. 429–443.
Mashayekhi, M. et al. (2018a). "Development of hysteretic energy compatible endurance time excitations and its application". In: *Engineering Structures* 177, pp. 753–769.
Mashayekhi, M. et al. (2018b). "Simulation of Cumulative Absolute Velocity Consistent Endurance Time Excitations". In: *Journal of Earthquake Engineering*, pp. 1–26.
Mazars, J. (1986). "A Description of Micro- and Macroscale Damage of Concrete Structures". In: *Engineering Fracture Mechanics* 25.5–6, pp. 729–737.
Mazzoni, S. et al. (2006). *OpenSees Command Language Manual*. Tech. rep. University of California, Berkeley: The Open System for Earthquake Engineering Simulation.
McGuire, W and R. Gallagher (1979). *Matrix Structural Analysis*. First Edition.
McGuire, W. and G. Winter (1968). *Steel structures*. Prentice-Hall.
Menegotto, M. and P. Pinto (1973). "Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior". In: *IABSE symposium on resistance and ultimate deformability of structure. Acted on by Well-Defined Repeated Loads. Lisbon: ACmPress*. Vol. 15, pp. 15–22.
Milankovitch, M. (1907). "Theorie der druckkurven". In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 55, pp. 1–27.
Mindess, S. and F. Young (1981). *Concrete*. Prentice-Hall, Inc.
Morris, M. (1991). "Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments". In: *Technometrics* 33.2, "161–174".
Moseley, H. (1833). "L. On a new principle in statics, called the Principle of least Pressure". In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 3.16, pp. 285–288.
– (1869). *The mechanical principles of engineering and architecture*. J. Wiley & son.
Nobile, L. and V. Bartolomeo (2014). "Methods for the assessment of historical masonry arches". In: *Proc., 5th European Conf. of Civil Engineering (ECCIE' 14)*, pp. 160–167.
Nocedal, J. and S. Wright (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media.
Norris, C. H. and J. Wilbur (1960). *Elementary Structural Analysis*. McGraw-Hill.
Nozari, A. and H. Estekanchi (2011). "Optimization of endurance time acceleration functions for seismic assessment of structures". In: *International Journal of Optimization in Civil Engineering* 1, pp. 257–277.
O'Hara, T. and J. Jacobson (1991). *Standardization of the cumulative absolute velocity*. Tech. rep. Electric Power Research Inst.
Olsson, A. and G. Sandberg (2002). "Latin hypercube sampling for stochastic finite element analysis". In: *Journal of Engineering Mechanics* 128.1, pp. 121–125.
OpenAI (2025). *ChatGPT: Conversation with AI*. Generated in response to a user's query. Available at `https://chat.openai.com`.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Ottosen, N. and H. Petersson (1992). *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice-Hall.
Padgett, J., B. Nielson, and R. DesRoches (2008). "Selection of optimal intensity measures in probabilistic seismic demand models of highway bridge portfolios". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 37, pp. 711–725.
Park, R. and T. Paulay (1991). *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons.
Park, Y.-J. and A. H.-S. Ang (1985). "Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete". In: *Journal of structural engineering* 111.4, pp. 722–739.
PEER (2014). *Ground Motion Database*. Last viewed November 2014. Pacific Earthquake Engineering Research Center.
Petersson, P. (Dec. 1981). *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and similar Materials*. Tech. rep. TVBM 1006. Lund, Sweden: Lund Institute of Technology.
Pilkey, W. and W. Wunderlich (1994). *Mechanics of Structures, Variational and Computational Methods*. CRC Press.
Pippard, A. J., E. Tranter, and L Chitty (1936). "The Mechanics Of The Voussoir Arch.(Includes Appendix)." In: *Journal of the Institution of Civil Engineers* 4.2, pp. 281–306.
Pippard, A. J. S. and J. F. Baker (1943). *The analysis of engineering structures*. Edward Arnold London.
Pitarka, A. et al. (1998). "Three-dimensional simulation of the near-fault ground motion for the 1995 Hyogo-ken Nanbu (Kobe), Japan, earthquake". In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 88.2, pp. 428–440.
Pollalis, S. N. (1999). *What is a bridge? the making of Calatrava's bridge in Seville*. MIT Press.
Porter, K. (2003). "An overview of PEER's performance-based earthquake engineering methodology". In: *Proceedings of the 9th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP9)*. San Francisco, CA.
Porter, K., R. Kennedy, and R. Bachman (2007). "Creating Fragility Functions for Performance-Based Earthquake Engineering". In: *Earthquake Spectra* 23, pp. 471–489.
Portland Cement Association (1947). *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section*. Portland cement association.
– (1954). *Design of Barrel Shell Roofs*. Tech. rep. Portland Cement Association.
Powell, G. H. (Dec. 2008). "Structural Analysis: Are We Relying Too Much on Computers. Part 2: A Solution". In: *STRUCTURE Magazine*. Structural Forum article.
Priestley, M. B. (1965). "Evolutionary spectra and non-stationary processes". In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 204–237.
Przemieniecki, J. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Reprinted by Courrier (formerly Dover). New York: McGraw-Hill.
Ragueneau, F. et al. (2006). "Anisotropic damage for concrete within multifibre beam finite element theory". In: *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*.
Ramamoorthy, S., P. Gardoni, and J. Bracci (2006). "Probabilistic Demand Models and Fragility Curves for Reinforced Concrete Frames". In: *Journal of Structural Engineering* 132, pp. 1563–1572.
Rankine, W. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. Charles Griffin and Company.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

第二至第四卷及附录参考文献

Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
Reich, R. (May 1993). "On the Marriage of Mixed Finite Element Methods and Fracture Mechanics: An Application to Concrete Dams". PhD thesis. University of Colorado, Boulder.
Rezaeian, S. and A. Der Kiureghian (2008). "A stochastic ground motion model with separable temporal and spectral nonstationarities". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 37.13, pp. 1565–1584.
– (2010). "Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.10, pp. 1155–1180.
Rezaeian, S. and X. Sun (2014). "Stochastic ground motion simulation". In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–15.
Richart, F. E., A. Brandtzæg, and R. L. Brown (1928). *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. Tech. rep. University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering ⋯
Saenz, L. P. (1964). "discussion of" Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete" by Desayi and Krishnan". In: *Journal of the American Concrete Institute* 61, pp. 1229–1235.
Saltelli, A. (2002). "Making Best Use of Model Evaluations to Compute Sensitivity Indices". In: *Computer Physics Communications* 145.2, pp. 280–297.
Saouma, V. and M. Sivaselvan (2014). *Hybrid simulation: Theory, implementation and applications*. CRC Press.
Saouma, V. E. and M. Hariri-Ardebili (2021). *Aging, Shaking and Cracking of Infrastructures; From Mechanics to Concrete Dams and Nuclear Structures*. Springer-Nature.
Saouma, V. E., D. Kang, and G. Haussmann (2012). "A computational finite-element program for hybrid simulation". In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.3, pp. 375–389.
Saouma, V. E. et al. (Aug. 1991). "Effect of aggregate and specimen size on fracture properties of dam concrete". In: *ASCE, Journal of Materials in Civil Engineering* 3.3, pp. 204–218.
Saouma, V. E. et al. (2013). "Real-time hybrid simulation of a nonductile reinforced concrete frame". In: *Journal of Structural Engineering* 140.2.
Schey, H. (1973). *Div Grad Curl and all That; An Informal Text on Vector Calculus*. W.W. Norton.
Schodek, D. and M. Bechthold (2014). *Structures*. Pearson.
Schrama, W. (2021). "A Structural Analysis of Timber Reciprocal Frames". In: *TU Delft, Civil Engineering*. Bachelor Thesis.
Schueller, W. (1996). *The design of Building Structures*. Prentice Hall.
Scott, B., R. Park, and M. Priestley (1982). "Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rages". In: *ACI Journal* 79.1, pp. 13–27.
SEAOC (1995). *Performance-based seismic engineerin, SEAOC Vision 2000 Committee*. Tech. rep. Sacramento, CA: Structural Engineers Association of California.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

第二至第四卷及附录参考文献

Segura, C. (2011). “Implementation Of Lumped Plasticity Models And Developments In An Object Oriented Nonlinear Finite Element Code”. MA thesis. University of Colorado, Boulder.
Shinozuka, M. and Y Sata (1967). “Simulation of nonstationary random process”. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 93.1, pp. 11–40.
Slate, F. and S. Olsefski (1963). “X-Rays for Study of Internal Structures and Microcracking of Concrete”. In: *Journal of the American Concrete Institute* 60, pp. 575–587.
Smars, P. (2000). “Etudes sur la stabilité des arcs et voûtes”. PhD thesis. Katholieke Universiteit Leuven.
– (2022). Personal Communication.
Sobol’, I. M. (2001). “Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates”. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 55.1–3, pp. 271–280.
Sohier, H., H. Piet-Lahanier, and J.-L. Farges (2015). “Analysis and optimization of an air-launch-to-orbit separation”. In: *Acta Astronautica* 108, ”18–29”.
Sohier, H., J.-L. Farges, and H. Piet-Lahanier (2014). “Improved of the Representativity of the Morris Method for Air-Launch-to-Orbit Separation”. In: *Preprints of the 19th World Congress*.
Sokolnikoff, I. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*. New York, NY.: McGraw-Hill.
Somerville, P. et al. (1997). “Modification of empirical strong ground motion attenuation relations to include the amplitude and duration effects of rupture directivity”. In: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 199–222.
Sonavane, T. (2014). “Analysis of Arches”. MA thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Southwell, R. V. (1935). “Stress-calculation in frameworks by the method of” systematic relaxation of constraints”—I and II”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences* 151.872, pp. 56–95.
Spacone, E., V. Ciampi, and F. Filippou (Aug. 1992). *A BEAM ELEMENT FOR SEISMIC DAMAGE ANALYSIS*. Tech. rep. UCB/EERC-92/07. Earthquake Engineering Research Center College of Engineering, University of California, Berkeley.
Stewart, J. (2009). *Verification Methods and NRC Regulations: A Brief Overview*. Tech. rep. Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States).
Suselo, A. A. (2021). “Simulated Behavior of Rectangular Reinforced Concrete Columns under Seismic Loading”. PhD thesis. The University of Texas at San Antonio.
Taborda, R. and D. Roten (2014). “Physics-based ground-motion simulation”. In: *Encyclopedia of Earthquake Engineering*. Ed. by M. Beer et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–33.
Takeda, T., M. A. Sozen, and N. N. Nielsen (1970). “Reinforced concrete response to simulated earthquakes”. In: *Journal of the structural division* 96.12, pp. 2557–2573.
Taucer, F, E. Spacone, and F. Filippou (1991a). “A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center”. In: *College of Engineering, University of California*.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Taucer, F, E. Spacone, and F. Filippou (1991b). *A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures: Earthquake Engineering Research Center*. Tech. rep. College of Engineering, University of California.
Thacker, B. et al. (2004). *Concepts of Model Verification and Validation*. Tech. rep. LA-14167. Los Alamos National Laboratory.
Thandavamoothy, T. (2011). *Structural Analysis*. First Edition. YMCA Library Building, New Delhi, India: OXFORD University Press, pp. 1016–1088.
Timoshenko, S., S. Woinowsky-Krieger, et al. (1959). *Theory of plates and shells*. Vol. 2. McGraw-hill New York.
USBR-manual (2011). *Dam safety risk analysis, Best practices training manual, Version 2.2*. Tech. rep. Denver, Colorado: U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation in coorporation with the U.S. Army Corps of Engineers.
USGS (2003). *PSHA Interactive Deaggregation Tool, U.S. Geological Survey*.
Vamvatsikos, D. and C. Cornell (2002). "Incremental dynamic analysis". In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, pp. 491–514.
– (2004). "Applied incremental dynamic analysis". In: *Earthquake Spectra* 20, pp. 523–553.
Červenka, J. (1994). "Discrete crack modeling in concrete structures". PhD thesis. Boulder, Colorado: University of Colorado.
Vitruvius (1960). *The Ten Books on Architecture*. Dover.
Vlasov, V. (1961). "Thin walled elastic beams (2nd edn) National Science Foundation". In: *Washington, DC*.
Voldoire, F. and Y. Bamberger (2008). *Mécanique des structures*. Presses Ponts et Chaussées.
Wang, C.-h. et al. (2001). "Hysteretic models for deteriorating inelastic structures". In: *Journal of Engineering Mechanics* 127.11, pp. 1200–1202.
Wang, G. et al. (2016). "A general definition of integrated strong motion duration and its effect on seismic demands of concrete gravity dams". In: *Engineering Structures* 125, pp. 481–493.
Wang, W., C. Gu, and T. Bao (2013). "Safety Monitoring Index of High Concrete Gravity Dam Based on Failure Mechanism of Instability". In: *Mathematical Problems in Engineering* 2013, pp. 1–14.
Wen, Y.-K. (1976). "Method for random vibration of hysteretic systems". In: *Journal of the engineering mechanics division* 102.2, pp. 249–263.
Westergaard, H. (1933). "Water Pressures on Dams During Earthquakes". In: *Transactions ASCE* 59.8, pp. 418–433.
White, R., P. Gergely, and R. Sexmith (1976). *Structural Engineering*. Out of Print. John Wiley & Sons.
Whitehead, R. (2020). "Sarinen's Shells: The Evolving Influence of Engineering and Construction". In: *Constructing Building Enclosures*. Routledge, pp. 105–123.
Whitman, F. et al. (1988). "Fracture Energy and Strain Softening of Concrete as Determined by Means of Compact Tension Specimens". In: *Materials and Structures* 21, pp. 21–32.
Whitney, C. et al. (1952). *Manuals of Engineering Practice-31: Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*. Tech. rep. New York: American Society of Civil Engineering.

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

第二至第四卷及附录参考文献

Whittaker03, A., R. Hamburger, and A. Mahoney (2003). "Performance-based engineering of buildings for extreme events". In: *Proc., Steel Building Symp. Blast and Progressive Collapse Resistance*, pp. 55–66.

Williams, M. S., I. Villemure, and R. G. Sexsmith (1997). "Evaluation of seismic damage indices for concrete elements loaded in combined shear and flexure". In: *Structural Journal* 94.3, pp. 315–322.

Winkler, E. (1879). "*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*". In: *Deutsche Bauzeitung* 13, pp. 117–119, 127–128, 130.

– (1880). "*Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*". In: *Deutsche Bauzeitung* 14, pp. 58–60.

Yamamoto, Y. (2011). "Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets". PhD thesis. Palo-Alto, CA: Stanford University, Stanford.

Yamamoto, Y. and J. Baker (2013). "Stochastic model for earthquake ground motion using wavelet packets". In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 103.6, pp. 3044–3056.

Yassin, M. H. M. (1994). "Nonlinear analysis of prestressed concrete structures under monotonic and cyclic loads". PhD thesis. University of California.

Youngs, R. et al. (1997). "Strong ground motion attenuation relationships for subduction zone earthquakes". In: *Seismological Research Letters* 68.1, pp. 58–73.

Zareian, F. and H. Krawinkler (2009). *Simplified performance based earthquake engineering, Report No. 169*. Tech. rep. Stanford University.

Zareian, F. et al. (2010). "Basic concepts and performance measures in prediction of collapse of buildings under earthquake ground motions". In: *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 19, pp. 167–181.

Zeris, C. and S. Mahin (1988). "Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uniaxial Excitation." In: *Journal of Structural Engineering, ASCE* 114(ST 4), pp. 804–820.

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。

主题索引——第二至第四卷：分析

$p-\delta$, 1583, 1613
主条目: 信任区分析, 1765
主条目: 信任区数量化, 1765

AASHTO, 1865
acknowledgments, xvii
airfoil, 579
airplane, 610
aleatory, 1766
alkali aggregate reaction, 1804, 2662
allowable stress design, 1499
alluvial plot, 624
anagram, 2628
analysis
  cloud, 1895, 1898
  damage, 1920
  endurance time, 1898
  loss, 1915
  multiple strip, 1893
  nonlinear, 1920
  response spectrum, 1865
analytical baseline, 1468
annual rate of exceedance, 1849
approximate, 1089
approximate analysis, 1086
  cantilever method, 1109
  frames, 1118
  lateral deflections, 1116
  portal method, 1094
  tube systems, 1112
  vertical load, 1092
  wall subsystems, 1111
arch, 885
  circular, 885
  elastic Center, 914
  generalized solution, 900
  helicoidal, 923
  hingeless, 893
  hingeless circular, 2000
  masonry, 859
  parabolic, 1159
  temperature, 1157
  three hinged, 886
  three-hinged circular, 1976
  two hinged, 892
  two hinged arch design, 1148
arche
  three-hinged circular, 1961
Archimedes' principle, 614
architects
  Jahn, Helmut, 754
  Pei, I.M., 754, 923
architecture
  Dulles airport, 754
  Louvre staircase, 923
  Pyramide du Louvre, 754
  Sagrada Familia, 923
  Sony Center, 754
attenuation models, 1823
author, xxxv
autocovariance, 1768
axial load
  impact on flexural deformation, 1604
axial vibration
  natural frequencies, 1483
axisymmetry, 2630

backbone, 1721, 1736
barge, 611
base isolation, 1053, 1486
  example, 1053
Bauschinger
  effect, 1510
  effect, 1507
Bayesian parameter identification, 1801
beam
  bimetallic, 676
  conjugate, 687, 688
  curved, 638, 755, 920, 1275
  elastic foundation, 664

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译;
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第二至第四卷：分析

Euler-Bernoulli, 1174
flexure & shear deformation, 721
floating, 663
Galerkin, 1452
king post, 754
large deflections, 802
queen post, 753
rigid offset, 1282
ring, 728
semi-rigid, 1285
thermal, 722
Timoshenko, 1176
torsion & flexure, 719
variable cross section, 1290
beam-column, 1174
nonlinear formulation, 1620
Belidor, 861
bicycle wheel, 668
biffurcation, 1598
bifurcation point, 807
bimoment, 698
body force, 2616
Botero, 1844
boundary conditions, 1170, 1222, 1224, 1226, 1309, 2636
Dirichlet, 1310
inclined, 608
mixed, 1310
Neuman, 1310
boundary value problem, 1170
box culvert, 782
bridge
Alamillo, 2072
Dora Riparia, 867
Gard, 927
George Washington, 1142
Goethals, 1864
loads, 1951
suspension, 846
Viaducte de Chillon, 658
Walnut Lane, 1081
Broken Obelisk, 618
bubble function, 1400
buckling, 1600
column, 806, 1600
constrained, 817
eigenvalue, 809
elastic, 810
frame, 1601
frames, 821
inelastic, 824
water tower, 818
buoyancy
centre of, 614
Butterworth filter, 2554

cable, 827
catenary, 849
comparison, 856
parabola, 833
prestress, 848
sag, 847
temperature, 847, 848
trolley cable, 853
capacity
Curve, 1855
Diagram, 1855
Function, 1855
curve, 1858, 1860, 1892
function, 1897
capacity design
example, 1050
Carder, 599
Castigliano, 867, 909, 913
theorems, 1356
casualties, 1915
Cauchy strain, 2621
Cauchy stress tensor, 2618
Cauchy tetrahedron, 2616
Cauchy's equation of motion, 2624
center of pressure, 877
central difference method, 1480
characteristic equation, 1956
Charles Mosca, 867

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

chemical bonds, 1508
chord, 827
circular ring, 728
Clapeyron's theorem, 759
coefficient of variation, 2592
coefficient plot, 1776
collapse, 1925
  mechanism, 1890
column
  life-safety, 1745
compressive meridian, 1506
computational fuse, 1715
condensation, 1258
condition number, 1250, 1255
condition of incompressibility, 2624
conditional spectra, 1832
confidence interval, 2590
congruent transformation, 1277
consequnce function, 1915
conservation laws, 2622, 2623
conservation of energy, 2626
conservation of momentum, 2624
consistency condition, 1514
constitutive
  Bauschinger, 1668
  bilinear, 1668
  Drucker-Prager, 1506
  Ghannoum, 1736
  heuristic models, 1667
  hysteretic, 1718
  Ibarra Krawinkler, 1718
  Mohr-Coulomb, 1506
  peak oriented, 1723
  pinching, 1724
  shear limit state, 1715
  strength degradation, 1729
  Tresca, 1504
constitutive equations, 2628
continuity equation, 2623
continuum mechanics, 1666, 2618
control
  displacement, 1591
  load, 1584
convergence, 1576, 1578, 1588
coordinate system
  stiffness method, 1166
  triangular, 1379
correlation, 1766
  matrix, 1767
correlation coefficient, 2593
costs, 1915
Coulomb, 865
Couplet, 864
covariance, 1766, 2592
  spatial, 1767
  temporal, 1768
cumulative
  displacement demand, 1908
  inelastic duration, 1906
  distribution function, 2588

D'Alembert, 1326
d'Alembert's principle, 1022
dam
  pine flat, 1829
damage
  measure, 1921
  multiple, 1925
  assessment, 1861
  Index, 1908
  index, 1905
  metrics, 1908
  probabilistic representation, 1907
damping
  Rayleigh coefficients, 1467
damping ratio, 1025
Danyzy, 864
data mining, 1741
de la Hire, 860
de Veubeke, 1323
decision
  variable, 1921
decomposition, 2564
  Cholesky, 2567

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第二至第四卷：分析

LU, 2566
QR, 2570
singular value, 1255, 2568
dedication, iii
deflected shape diagrams, 1086
deflection
curvature, 666
curvature area method, 677
integration, 659
large, 1609
virtual work, 707
deformation theory, 1511
degree
freedom, 1167
freedom-rotational, 1441
kinematic indeterminacy, 1169
demand, 1858
capacity ratio, 1906
curve, 1861
loads, 1871
spectrum, 1861
design codes, 1056, 1062
design vs. analysis, 566, 1056, 1919
determinant, 601
deterministic, 1058, 1499
differential vector operator, 2665
direction cosines, 630, 1210
Dirichlet, 1170
Dirichlet b.c., 2636
discrete Fourier transform, 2555
discretization, 1224
dislocation, 1509
displacement control, 1591
displacement ductility, 1049, 1485
distributed plasticity, 1665
distribution
bivariate, 2598
bivariate normal, 2599
gumbel, 2595
lognormal, 2594
noraml (Gauss), 2594
Poisson, 1850
uniform, 2593
univariate, 2593
weibull, 2595
downtime, 1915
drift, 1086, 1861
drilled shaft, 1867
ductility, 1521
example, 1050
ratio, 1534
Duhamel integral, 1032
rectangular pulse, 1034
step load, 1033
Dulles airport, 1125
dummy index, 2608
dynamic amplification factor, 1033
dynamic analysis, 1458
frames, 1459
when, 1022
dynamic effects, 1859

effective length, 821
effective mass matrix, 1478
Eiffel tower, 1131
eigenvalue, 1249, 1479, 2571
buckling, 809
problem, 1599
stiffness, 1248
stiffness matrix, 1246
eigenvalues & eigenvectors, 2572
Einstein's notation, 2608
elastic
instability, 1598
solution, 1544
element
hierarchical, 1401
isoparametric, 1414
Lagrangian, 1398
nodal equivalent loads, 1434
parasitic shear, 1439
stress recovery, 1431
elementary effect, 1777
elliptic integral, 803

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

主题索引——第二至第四卷：分析

elliptic integrals, 1955
endurance
  time analysis, 1896
  time excitation functions, 1839
engineering
  demand parameter, 1903, 1920, 1921
  shear strain, 2621
epistemic, 1766
equal displacement rule, 1050
equation of motion, 2624
equations of statics, 1259
equilibrium, 598
  global, 774
equivalent viscous damping, 1048
error
  estimate, 1578
  hidden, 1626
error discovery program, xix
Euler, 1305
  equation, 1307
  method, 1469, 1574
Euler-Lagrange, 1316
Eulerian angles, 1216
explicit
  incremental analysis, 1607
  method, 1581

factor of safety, 1494
failure mode, 1495, 1858
fast Fourrier transform, 2554
fault tolerance, 1495
Fermi's solution, 1086
FFT, 2555
filter
  Butterworth, 2554
finite element, 1404
  bilinear rectangle, 1385
  brick, 1386
  compatibility, 1412
  constant strain triangle, 1384
  error, 1410
  lower bound solution, 1411
  mesh verification, 1743
  modelling, 1740
  numerical integration, 1425
  requirements, 1409
flexibility, 734
  method, 1184
  matrix, 740
floating body, 614
flow rule, 1512
flux, 2623
force, 1332, 2615
  in terms of displacement, 765
force-shear-moment
  differential relations, 642
  integral relations, 643
foreword, iv
form follows function, 616
Fourier analysis
  periodic forcing, 1036
Fourier transform, 2555
fracture process zone, 1706
fragility
  curve, 1907
  curve vs. surface, 1928
  definitions, 1924
  vs. vulnerability vs. hazard, 1925
  continuous vs. discrete, 1926
  curve, 1924
  role in PBEE, 1928
free body diagram, 601
free index, 2608
free vibration, 1028
  initial conditions, 1468
frequency domain, 2555
frequency response function, 1036
function
  consequence, 1915
  cumulative distribution, 2588
fundamental laws, 2622
funicular
  cable, 828
  polygon, 827

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第二至第四卷：分析

gable frame, 607
Galerkin, 1443
  FE discretization, 1452
  weak form, 1449
Galileo, 691, 706
Gauss elimination, 2565
Gauss-Jordan decomposition, 2565
Gauss-Seidel, 788, 2570
geometric
  nonlinearity, 1595
  stiffness matrix, 1595
geometric nonlinearity, 827
gondola, 831
grid, 609
ground motion
  intensity, 1823
  prediction equation, 1823
Gutenberg Richter law, 1821
guyed tower, 844

Hamilton, 1316, 1326
hardening
  isotropic, 1507, 1512, 1516
  kinematic, 1507, 1517
  modulus, 1511
  work, 1510
hazard
  analysis, 1494
  curve, 1849
heat transfer, 1455
helicoidal, 923
Hellinger-Reissner, 1323
hermitian interpolation, 1393
high frequency, 1458
Hilber-Hughes-Taylor, 1475
hinge formation, 1861, 1872
Hooke's law, 2628, 2629
hourglas, 1439
Hu-Washizu, 1322
hydrodynamic, 2625
hydrostatic fluid, 2625
hydrostatic pressure
  dependent, 1505
  independent, 1504
hyperstatic, 601
hypocentral distance, 1825
hysteresis, 1047
  energy dissipation, 1048

IDA curve, 1898
identicon, 2076, 2382
identifiability, 1799
ill-condition, 1253
Impetus, 2616
impulse response function
  example, 1032
incremental dynamic analysis, 1891
independent mechanisms, 1547
index
  performance, 1905
indicial notation, 2608
indirect methods, 2570
influence line, 589, 791
inner product, 2611
instability, 601
  geometric, 601
integration
  full, 1437
  reduced, 1438
  selective reduced, 1439
integration methods, 1583
intensity
  measure, 1920
  measure, 1891, 1920
interaction diagram, 1071
internal forces, 637
interpolation
  Hermitian, 1393
  Lagrangian, 1388
interstory drift, 1908
invariants, 2614
isopleth, 822
isostatic, 601

Jacobian, 1577

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第二至第四卷：分析

Jacobsen formula, 1048
Joyner-Boore distance, 1825

Kiewit, 1864
kinematic
  indeterminacy, 1169
  instability, 1266
  matrix, 1267
kinematically admissible field, 1546
Kuhn-Tucker, 1514, 1690
kurtosis, 2592

laboratory observations, 1507
Lagrange, 1327
Lagrangian
  function, 1317
  interpolation, 1388
Lame's constants, 2629
latin hypercube, 1769, 1779
  etymology, 1770
  example, 1771
law
  large numbers, 2586
layer/fiber section, 1630
least squares
  weighted nonlinear, 1796
Legendre polynomial, 1429
Leonardo da Vinci, 599
Levenberg–Marquardt, 1795
Levenberg-Marquardt, 2369, 2660
limit state, 1903, 1926
  elements, 1704
  calibration&validation, 1904
  multiple, 1905
  shear, 1715
linear equations, 2564
Linear Regression, 1894
linearization, 1574
load
  resistance and factor design, 1499
  bridge, 1951
  combination, 589, 1951
  dead, 1939
  demand, 1880
  earthquakes, 1945
  hydrostatic, 603
  impact, 584
  incremental, 1860
  limit, 1545
  live, 1939
  parabolic, 605
  path, 589
  pattern, 1859
  placement, 1954
  projected, 587
  secondary, 585
  thermal, 586
  unsafe theorem, 1546
  wind, 578, 1939
logarithmic decrement, 1027
logic tree, 1849
lower bound
  lumped plasticity analogy, 1568
  pushover analogy, 1565
  slabs, 1559
  theorem, 1551
LRFD, 1059
  Limitations, 1917
lsqnonlin, 1804, 2661, 2662
lumped-plasticity, 1490, 1568, 1655, 1713, 1752, 1761, 2212

Mü 布雷斯拉夫, 795
Magazini Generali, 1138
Maillart, 1138
margin of safety, 1494
material coordinates, 2619
matrix
  augmented stiffness, 1223
  condition number, 1250
  decomposition, 1222
  decomposition vs. inversion, 1254
  ill-conditioned, 1251
  orthogonal, 1211
  structural analysis, 1163
matrix inversion, 2563

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第二至第四卷：分析

maximum likelihood estimation, 1892, 1894
Maxwell-Betti, 710, 740, 795
mean, 2590
mechanics of deformable bodies, 2607
mechanics review, 2607
mechanism, 1545
method of moments, 1892
modal analysis, 1041
  example, 1043
mode shapes, 1041
model
  complexity, 1741
  Rezaeian and Der Kiureghian, 1836
  Yamamoto and Baker, 1837
modified Newton-Raphson, 1587
modulus
  hardening, 1511
  tangent, 1514
  tangent elastic, 1512
moment
  curvature
    generalization, 1531
  distribution, 783
  envelope, 643
  redistribution, 1710
  statistics, 2590
Monte Carlo simulation, 1769
Morris method, 1777
Moseley, 867
motion
  Cauchy equations of, 2624
  first law of, 2616
  fluid, 579
  ground, 569
  harmonic, 1028
  rigid body, 1249, 1266, 1375, 1409
  water, 2646
Mozart, 2628

natural frequency, 1024
  footbridge, 1046
Nervi
  Palazetto dello sport, 616
Neuman, 1170
Neuman b.c., 2636
Newmark, Nathan, 1472
Newmark-beta method, 1481
Newton
  method, 1574
Newtonian fluid, 2625
nodal equivalent forces, 768
nodal numbering, 1255
nomograph, 822
nonlinear
  analysis
    element formulation, 1617
    notation, xxiii
    sources, 1490
    types of, 1492
    why, 1491
  equations
    Runge-Kutta, 1470
    Euler method, 1469
norm, 1210
  Euclidian, 2661
  euclidian, 1578
  infinity, 1589
notation, xx, xxviii
  indicial, 2608
  Voigt, 2607
numerical analysis
  explicit, 1476
  Hilber-Hughes-Taylor, 1475
  implicit, 1472
numerical integration, 1425
  Gauss-Legendre, 1428
  newton-cotes, 1426

occurrence time, 1829
octahedral stress, 2614
opensees, 1672
operator
  differential, 1443
  incremental, 1607

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

Jacobian, 1417, 1419
tensor, 2609
variation, 1305
optimality, 2657

Pacific Earthquake Engineering Research Center, 1904
parallel systems, 2603
parameter identification, 1790
MATLAB program, 1806
Pascal triangle, 1375
PBEE
example, 1929
first generation, 1917
implementation, 1922
key documents, 1933
Matlab example, 2377
PBA, 1919
PBSD, 1919
SEAOC, 1911
second generation, 1919
peak
ground acceleration, 1852
shear force, 1908
performance
assessments
intensity, 1834
scenario, 1834
time based, 1834
based
assessment, 1911
earthquake engineering, 1910
earthquake engineering (PBEE), 1500, 1917
engineering, 1084, 1910
seismic design, 1910
point, 1861
pieds droits, 861
pipeline, 723
Pippard, 869
plane strain, 2630
plane stress, 2631
plastic
displacement, 1880
moment, 1878
hinge, 686, 1545, 1859
hinge length, 1877
length, 1712
modulus, 1511
solution, 1545
zone, 1706
plates, 937
axisymmetric bending, 947
circular plates, 947
Kirchoff, 941
Reissner-Mindlin, 937
variational formulation, 951
point estimate method, 1773
Poisson's probability model, 1829
polynomial chaos expansion, 1775
position, 2619
potential
energy, 1334, 1353
external work, 1334
potential energy, 1313
precision, 1253
preconditioning, 1253, 1255, 2573
predictor, corrector, 1584
presure
dynamic, 579
principal values, 2613
principle
complementary virtual work, 1343, 1551
Hamilton, 1316
thermodynamics, 1331
total complementary potential energy, 1356
total potential energy, 1313, 1353
virtual work, 1349, 1546
probabilistic
risk assessment, 1495
seismic demand analysis, 1895
probability, 2585
conditional, 2587

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

distribution, 2587
prolegomena, v
pushover, 1858
analysis, 1564

QR decomposition, 2570

R/C
beams, 570
bond, 1520
buildings, 590
columns LRFD, 1071
moment of inertia, 1708
plastic strength, 1063
pushover, 1867
Random Sample Consensus (RANSAC), 1792
random variable, 2585, 2587
random variables, 1783
rank, 1249, 2571
rate theory, 1511
Rayleigh damping, 1042
calibration, 1467
Rayleigh-Ritz, 1362
reaction, 597
reaction vector, 1585
reciprocal frame
example, 651
recurrence relationship, 1821
redundancy, 1495
reliability index, 1060, 1495, 2601
repair cost, 1915
residual forces, 1584
resonance, 1029
pedestrian, 1046
response spectra, 1873, 1896
response spectrum, 1038
example, 1039
retrofit, 1859, 1861
rigidity factor, 1288
risk assessment, 1494
Robin b.c., 2636
root finding, 1573
rupture distance, 1825

safety, 1494
safety-critical system, 1495
sag, 827
Saint-Venant, 697
Salieri, 2628
Secant
method, 1580
Newton, 1587
seismic
coefficient, 1860
hazard analysis
deterministic, 1826
probabilisitc, 1827
hazard curves, 1829
hazard deaggregation, 1831
hazard map, 1831
load, 581
source model, 1822
Seismic hazard analysis
Matlab example, 2375
seismic record
filtering, 2554
seismogenic
depth, 1825
distance, 1825
sensitivity analysis, 1777
serendipity, 1376
series system, 2602
shape functions, 1377, 1378
shear building, 1043
shear deformation
transverse, 692
shear modulus, 2629
shells, 954
cylindrical free, 980
cylindrical on beams, 1004
design barrel roof, 2043
general theory, 954
membrane, 978
shallow, 974

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。

shock spectrum, 1034, 1035
sign convention
  analysis, 764
  design, 640
  stiffness method, 1166
Simpson's rule, 1128
single-degree-of-freedom system (SDOF), 1023
singularity, 2571
skewness, 2592
slenderness ratio, 822
slope deflection, 773
Smars, 874
Sobol indices, 1781
soil-structure interaction, 1051, 1486
solid mechanics, 2607
spatial coordinates, 2619
spatial distribution ratio, 1906
spectra
  target response, 1832
spring
  defelction, 1362
  helicoidal, 674, 731
standard deviation, 2591
state determination
  beam column
    flexibility, 1637
    stiffness, 1623
  truss, 1619
  zero length element, 1655
  zero length section, 1660
static
  determinacy, 601
  indeterminacy, 1169
statics
  matrix, 630
statistics, 2585
stiffness
  matrix
    tangent, 1584
    geometric, 1595
  assembly, 1227, 1277
  augmented, 1222
  axial vs. flexural, 1459
  coefficients, 1172
  computer implementation, 1226
  definition, 1172
  direct, 1184
  eigenvalues, 1246
  element, 1172
  equation numbers, 1227
  flexibility relation, 1271
  grid element, 1175
  location matrix, 1227
  matrix derivation, 1406
  nodal numbering, 1255
  orthogonal structures, 1183
  strain energy, 1248
stochastic ground motion, 1835
strain, 2621
  large, 1596
  linear operator, 2621
strain energy, 1333
  stiffness matrix, 1248
  virtual, 1335
strains, 2620
  Eulerian, 2620
stress
  geometric representation, 2618
  hydrostatic, 2618
  recovery, 1223
Stressor, 1855
structural
  design, 1056
    ASD, 1058
    LRFD, 1059
    performance based earthquake engineering, 1084
    prestressed concrete, 1080
    R/C beam, 1063
    R/C column, 1071
    safety, 1056
  response, 1860
structural dynamics, 1021

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。
审阅稿

structures
idealization, 1164
modeling, xxxv, 1595
substructuring, 1258
Sum of Squared Error Minimization, 1894
supports, 597

tangent modulus
engineering derivation, 1515
generalized derivation, 1512
tangent stiffness matrix, 1463
Taylor series, 1410, 1470, 1472, 1574, 2657
finite difference estimation, 1774
temperature
beam deflection, 722
curvature relation, 683
frame deflection, 683
tensile meridian, 1506
tension stiffening, 1679, 1708
tensor, 2609
stress, 2616
tensor notation, 2608
tensors, 2609
thermodynamics
potential, 1666
first law, 1331, 2626
first principle, 2626
law, 708
thrust, 827
thrust line, 877
time discretization, 1472
Timoshenko, 1176
Tonti diagram
D'Alembert, 1328
deformable body, 2637
Hamilton, 1328
Hu-Washizu, 1325
Lagrange, 1328
Tonti diagrams, 2636
tornado diagram, 1787
torsion
deformation, 697
St Venant, 1182
Vlasov, 1180
torsional
deformation
Vlasov/nonuniform, 698
traction, 1332, 2616
traction vectors, 2617
transformation
Eulerian angles, 1216
matrix, 1208
tensors, 2612
vectors, 2611
transient dynamic analysis, 1458
transverse isotropy, 2630
tri-diagonal matrix, 759
tributatry area, 592
truss
analysis, 619
nonlinear formulation, 1617
stiffness matrix, 1173
trust region, 2658
tuned mass damper, 1051, 1486
example, 1052

uniform hazard spectra, 1832
upper bound theorem, 1546

variance, 2591
variational formulation, 1463
variational principle
Hu-Washizu, 1322
Varignon's theorem, 600
vector fields, 2615
verification & validation, 1743
virtual work
complementary, 707
visualization, 1805, 2663
Voigt notation, 2608, 2618
von Mises, 1505
voussoir, 859
generalized solution, 874
historical development, 860
vulnerability, 1925

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译；
译文可能存在错误。
审阅稿

主题索引——第二至第四卷：分析

warping constant, 698, 700
wave equation, 1045, 1482
wave speed
  axial, 1483
weak form, 1307, 1451
weak points, 1859
weakest link, 1741
weight factor, 1451
weighted residual
  Galerkin, 1443
Winkler, 867
work, 1334
  complementary virtual, 1343
  internal, 1335
  path independence, 1336
  principle virtual, 1349
  virtual, 1343

yield
  condition, 1503
  function, 1504, 1512
  line, 1559, 1706
  strength, 1876
  stress, 1510
  surface, 1504

zero-length
  element, 1655
  section element, 1659

主条目: 信任区, 1765

屈曲
  没有 $\mathbf{k}_{geom}$, 1614

扭转
  变形
    s^t 服装 / Uniform, 697
拱
  变量 i, 1159
操作员
  应变 $\mathbf{l}$, 2621
此分類上一篇: 曲率
  $\sigma - \varepsilon \rightarrow m - \phi$, 1524
  $m - \phi$, 1522

谢尔
  V_{2500}, 1881

审阅稿

结构分析四书 © 2026 CC BY-NC-SA 4.0
由 OpenAI Codex 从英文原版翻译：
译文可能存在错误。